THEORIA

DAS

QUANTIDADES NEGATIVAS

POR

Benjamim Constant Botelho de Magalhães

BACHAREL EM MATHEMATICAS E SCIENCIAS NATURAES, CAPITÃO DO CORPO DO ESTADO MAIOR DE PRIMEIRA CLASSE

Apresentada ao instituto polythechnico nas ultimas sessões de dezembro de 1867.

PETROPOLIS.

Typographia do *Mercantil* de B. Pereira Sudré

RUA DO IMPERADOR N. 4.

1868.

THEORIA

DAS

QUANTIDADES NEGATIVAS

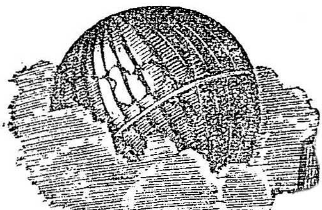
TRABALHO FEITO

POR

Benjamim Constant Botelho de Magalhães

BACHAREL EM MATHEMATICAS E SCIENCIAS NATURAES, CAPITÃO DO CORPO DO ESTADO MAIOR DE PRIMEIRA CLASSE

Apresentado ao instituto polythechnico nas ultimas sessões de dezembro de 1867.



PETROPOLIS.

Typographia do *Mercantil* de Bartholomeo Pereira Sudré

RUA DO IMPERADOR N. 4.

1868.

AO INSTITUTO POLYTHECHNICO.

O trabalho que apresento tem por fim mostrar o desejo que possuo de concorrer de algum modo para o importante objecto a que se destina o Instituto Polythechnico, do qual sou o mais insignificante membro. Não é este trabalho, bem o sei, digno da altura deste instituto; uma simples theoria de algebra elementar não é de certo objecto que deva distrahir a attenção de seus membros, que, com a minha unica e motivada excepção, visão com vantagem questões as mais importantes, quer procurando desenvolver os pontos mais difficeis das diversas sciencias positivas; quer na exploração daquelles, que são de immediata applicação á engenharia e que podem concorrer para os seus progressos e melhoramentos. Além do principal motivo acima apontado, uma outra circumstancia me animou ainda a apresentar este opusculo. O ponto que tomei é um daquelles que não vêm claramente desenvolvidos nos diversos tratados de algebra elementar; ao contrario é, para os principiantes, uma fonte natural de desgosto pela confuzão e duvida que com razão em seu espirito suggerem algumas proposições sem significação, as quaes impropriamente a elle se encadeião. Mostrar a completa inutilidade e o absurdo de semelhantes proposições, substituindo-as ao mesmo tempo por outras conhecidas e verdadeiras, resultado que temos em vista neste trabalho, é me parece, por experiencia propria, prestar um serviço áquelles que, pouco inteligentes, se quizerem comtudo dedicar ao estudo da sciencia mathematica, poupando-lhes assim, ao menos em relação a este ponto, o tempo e os exforços que empregarião para possuirem idéas claras a seu respeito. Dar-me-hei por feliz se o instituto julgar que este mirrado fructo de meus esforços preenche ao menos este fim.

THEORIA

DAS

QUANTIDADES NEGATIVAS.

1 A distincção das quantidades em positivas e negativas não é só uma circumstancia accidental, que se póde dar na determinação dos valores numericos das expressões algebricas, por onde se é levado a considerar quantidades isoladas affectas dos signaes + e — ; esta distincção corresponde maravilhosamente na passagem do concreto para o abstracto a opposição de sentido de que muitas grandezas são susceptiveis, tendo assim uma significação clara ao espirito, e apresentando-se como um caracter importante da linguagem algebrica, que concorre para tornal-a a mais perfeita linguagem do raciocinio.

A sciencia mathematica apresentaria com effeito uma grave lacuna, limitando-se a considerar as grandezas unicamente quanto aos seus valores, sem attender ao seu modo de existencia.

Assim por exmplo :

2 Se sobre uma linha recta um ponto estiver 30 metros á direita de outro, e um segundo ponto estiver 30 metros á esquerda; se um acontecimento tiver lugar 10 annos antes da éra christã, e outro tiver lugar 10 annos depois; se um individuo possuir 1000 francos, e outro dever a mesma quantia; se um relogio adiantar-se de 7 minutos por dia, e outro atrzar-se de 7 minutos; se a velocidade de um

movel augmentar de 8 metros por segundo, se a de outro diminuir de 8 metros etc, os numeros 30^{m}, 10^{as}, 1000^{fr}, 7^{m}, 8^{m}, não bastarão para determinar as grandezas correspondentes.

Cada um delles representa duas grandezas homogeneas e iguaes, mas cújo modo de existencia tem lugar em sentidos directamente oppostos, que não vem designados nos numeros que as representão.

3 Na passagem do concreto para o abstracto é pois indispensavel que se attenda a esse duplo aspecto que muitas grandezas podem apresentar.

O simples valor numerico não basta á sua inteira determinação, é necessario que se lhe ajunte alguma cousa, que corresponda na linguagem ordinaria ás idéas que exprimimos com as palavras: á direita, á esquerda; antes, depois; acima, abaixo; além, á quem etc.

A linguagem algebrica seria evidentemente defeituosa, senão possuisse symbolos ou caracteres quaesquer equivalentes a essas palavras.

Estes caracteres, attendendo á natureza dessa linguagem, devem ser ao mesmo tempo os mais simples e os mais geraes e portanto independentes da natureza concreta das grandezas consideradas.

E' pelos signaes $+$ e $-$ que a Algebra satisfaz completamente a essas condições.

Quando duas grandezas da mesma especie tem situações directamente oppostas, exprime-se esta circumstancia affectando uma dellas do signal $+$ e a outra do signal $-$, e affectão-se ambas do signal $+$, ou ambas do signal $-$, quando tem a mesma situação.

A maneira de exprimir assim pela opposição ou identidade dos signaes $+$ e $-$ a opposição ou identidade no sentido das grandezas, não é, como parece, um simples principio de convenção ; ao contrario, esta circumstancia se revela expontaneamente na passagem do concreto para o abstracto.

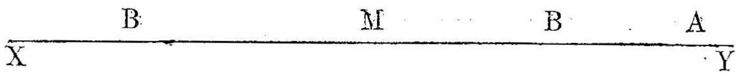
Sempre que uma grandeza muda de sentido, a expressão de seu valor muda de signal, e reciprocamente.

Parece ainda reservada ao calculista a liberdade de escolher o sentido em que a grandeza deve ser affecta de um dos dous signaes, o outro sendo uma consequencia dessa escolha.

Ha alguns casos em que esta liberdade tem realmente logar, em outros porém a natureza da grandeza, ou mesmo a natureza da questão determinão em cada sentido o signal conveniente.

Para esclarecer o que acabamos de dizer, tomemos alguns exemplos :

Fig. 1.



4 Supponhamos que sobre a recta X Y se trata de determinar uma distancia a partir de um ponto fixo M existente na recta.

Representemos por x essa distancia, e supponhamos que é dada pela expressão algebrica a— b, temos pois $x = a - b$.

A partir do ponto M tomemos para a direita um intervallo $MA = a$.

Para termos a distancia pedida é necessario subtrahir de MA a quantidade b, o que se consegue evidentemente tomando do ponto A para a esquerda uma parte igual a b.

Se b fôr menor do que a, tomando de A para a esquerda uma parte AB igual a b, obter-se-ha um ponto B situado á direita de M, e a distancia x, que é positiva neste caso, será contada do ponto M para a direita.

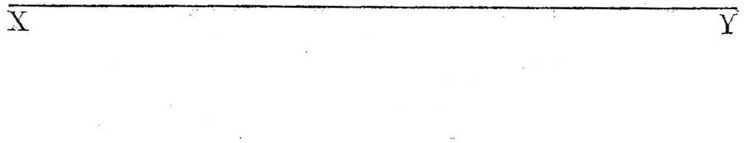
Se porém b fôr maior que a, caso em que a distancia x é negativa, obter-se-ha pelo mesmo processo um ponto B' situado á esquerda de M; a distancia será contada do ponto M para a esquerda, isto é, em sentido opposto áquelle em que erão contadas as distancias positivas.

Se em lugar de marcarmos o intervallo MA para a direita de M, o tivessemos marcado para a esquerda, a distancia pedida seria contada do ponto M para a esquerda, se a differença a—b fosse positiva, e para a direita se fosse negativa.

A mudança do signal de x determina pois uma mudança de sentido na distancia correspondente e portanto na posição do ponto B determinado por ella.

A reciproca é tambem verdadeira. Com effeito, sobre a recta xy tomemos dous pontos fixos M e N, e representemos por a o intervallo MN que os separa. (fig. 2).

Fig. 2.



Supponhamos agora dous outros pontos A e B equidistantes de N, e representemos por x as distancias NA = NB. as distancias do ponto M a cada um dos pontos A e B, serão evidentemente $MN + NB$ ou $a + x$ para o ponto B, e $MN - NA$ ou $a - x$ para o ponta A.

Vê-se pois que a opposição de s ntido na situação dos pontos A e B a respeito de N determina a opposição dos signaes no valor de suas distancias contadas a partir de N. Com effeito, a distancia x é positva para o ponto B situado á direita e negativa para o ponto A situado á esquerda de N.

Resulta daqui que, se sobre uma recta indefinida a partir de um ponto, considerarmos como positivas as distancias contadas em um certo sentido, as distancias contadas em sentido contrario serão negativas.

Reciprocamente, se as distancias que, sobre uma linha recta determinão as posições de dous pontos em relação a um outro tomado sobre ella forem de signaes contrarios, os pontos terão situações oppostas a respeito do ponto fixo, existindo um á direita e o outro á esquerda delle.

Se forem do mesmo signal estarão ambos do mesmo lado, isto é, ambos á direita ou ambos á esquerda conforme os signaes.

Este exemplo é um dos mais notaveis para bem fixar a significação das quantidades positivas e negativas, pois quasi todas as grandezas susceptiveis de uma opposição de sentido podem ser representadas por linhas rectas.

5 O tempo fornece tambem um exemplo apropriado á bem fixar esta distincção.

Quando se referem a uma certa epocha dous acontecimentos quaesquer, um anterior e outro posterior, os intervallos de tempo que separão da epocha considerada estes dous acontecimentos são necessariamente de signaes contrarios; porque no primeiro caso é necessario subtrahir dessa epocha o intervallo de tempo que a separa do primeiro acontecimento para termos a epocha em que elle se deu, no segundo é necessario ajuntar.

Qualquer instante tomado póde servir de origem á quantidade de tempo que será positiva quando se seguir o curso natural de seu crescimento e negativa em sentido opposto.

A origem real desta grandeza é tão impossivel conceber-se como o é o instante em que ella deve terminar o seu curso.

A distincção do zero absoluto e do zero relativo, que alguns tem imaginado para dar a significação das quantidades negativas, é tão pueril em relação ao tempo, como o é em relação a qualquer outro exemplo tomado ao acaso.

Em relação ao tempo qual seria o zero absoluto, isto é, qual seria o instante que devesse ser o primeiro em seu curso indefinido?

A maneira universalmente admettida porque todos os povos civilisados determinão as suas epochas, referindo-as á éra Christã, é evidentemente tão convencional, como o seria a de algum outro facto importante, como o seria mesmo a da origem confusa e indeterminada senão impossivel do universo.

Qualquer instante, como dissémos acima, póde ser tomado para origem na avaliação do tempo, e, uma vez determinada essa origem pela natureza de qualquer phenomeno, ou por qualquer convenção, seremos sempre levados a tomar como positivo qualquer intervallo de tempo que se seguir a esse instante, e como negativo o que o preceder.

Em relação ás distancias.

Qual é sobre uma recta indefinida o ponto que deve servir de verdadeira e unica origem commum ás distancias contadas sobre ella?.....

Qual é no espaço indefinido o ponto que de preferencia a todos os outros deve gozar dessa propriedade?.....

Não ha, a meu vêr, concepção mais infeliz do que a da pretendida existencia do zero absoluto e do zero relativo como fornecendo a significação das quantidades positivas e negativas.

6 A opposição dos signaes + e — affectando as quantidades, não póde ter outra interpretação concreta que a da opposição dos sentidos das grandezas correspondentes.

Tão numerosos e variados são os exemplos que confirmão esta verdade, que nemhum espirito sensato póde duvidar della.

Os dous exemplos dados bastão tambem para conhecer-se que as quatidades negativas tem uma existencia tão real e tão determinada como as positivas.

A differença dos signaes refere-se unicamente á differença de sentidos, e toda discussão das quantidades positivas e negativas que se desviar desta unica e verdadeira significação conduzirá por força, como tem acontecido, aos mais monstruosos absurdos.

7 Não obstante esta idéa natural e simples de representar pela opposição dos signaes + e —a opposição no sentido das grandezas, estabelecida a primeira vez por Descartes, que encontra uma confirmação em cada caso particular, sem que haja uma unica excepção real, a distincção das quantidades em positivas e negativas tem dado origem ás mais extravagantes e intoleraveis theorias.

Abandonada ou mal interpretada a idéa de Descartes, uns considerão as quantidades negativas como symbolos algebricos sem nemhuma significação real, como por exemplo o proprio Descartes, que as denominava raizes falsas da equação ou do problema ; outros, como expressões de absurdo ou de impossibilidade etc ; e mesmo aquelles que admittem a sua verdadeira significação, por uma inexplicavel aberração dos mais comesinhos principios de logica cahem por sua vez em absurdos semelhantes.

Com effeito, embora haja divergencia sobre a sua verdadeira significação, são todos os algebristas concordes, como o provão todos os tratados de algebra desde o mais antigo desde Descartes até o mais moderno, nos seguintes principios evidentemente absurdos.

1.º Qualquer quantidade negativa é menor do que zero.

2.º Uma quantidade negativa é tanto menor quanto maior é o seu valor numerico ou absoluto.

Cumpre notar que alguns autores sentem repugnancia em admittir como rigorosamente verdadeiros estes principios, cujo absurdo presentem; mas longe de os eliminar os considerão como uma consequencia a que forçosamente dá lugar a theoria das quantidades negativas, como uma necessidade indispensavel da sciencia, e procurão a sua verdadeira interpretação como se elles fossem susceptiveis de uma interpretação qualquer que o bom senso não repellisse tendo ella por fim firmal-os como verdades.

Para esse fim imaginão uns a absurda distincção do zero absoluto e do zero relativo, outros fazem unicamente questões de palavras, e assim interpretão a primeira proposição:

Quando se diz que uma quantidade negativa é menor do que zero deve-se entender uma quantidade *abaixo* de zero e pensão assim ter vencido toda a difficuldade.

E' bom observar que essa repugnancia parece só especial á primeira proposição, pois quanto á segunda, todos a admittem como uma convenção racional ou como uma verdade incontestavel.

Ora, ellas são consequencia immediata uma da outra, e tanto assim, que com razão vêm muitas vezes reunidas em um só enunciado.

A unica explicação, que me parece poder-se dar deste facto curioso é que o absurdo da primeira proposição fere de prompto ao espirito, ao passo que a segunda o illude um pouco com a nova ordem de quantidades, que desde a sua primeira apparição vem revestidas das mais exquisitas propriedades.

Outros as admittem com a maior boa fé e com a mais profunda convicção como o faz por exemplo Paque que até apresenta tres demonstrações para estabelecel-as directamente; como este autor ha muitos outros, por exemplo Fourcy, Choquet, Briot, Duchesne, Dubour, Cirodde, Bourdon, Garnier, etc.

Não é preciso esforço algum para demonstrar o absurdo contido em cada uma dessas proposições.

Concebe-se facilmente que de uma grandeza qualquer é possivel subtrahir ou supprimir successivamente cada uma de suas partes até que a grandeza desappareça ou se aniquile, o que acontecerá evidentemente quando se tiver supprimido todas as partes de que ella se compunha; mas que de uma grandeza se possa subtrahir outra maior, ou que ella continue á decrescer depois de aniquilar-se é realmente inconcebivel.

Este absurdo, que se dá na ordem concreta, tem lugar do mesmo modo na ordem abstracta.

Concebe-se que de um numero qualquer se possa subtrahir successivamente cada uma de suas unidades e partes da unidade e que se possa subtrahir mesmo o proprio numero, mas que de um numero se possa effectivamente subtrahir um numero maior, ou que de zero, que nem é quantidade, se possa subtrahir qualquer numero, é realmente uma violação das leis as mais formaes do entendimento.

8 Não obstante aquellas proposições contão já seculos de existencia e de um uso não interrompido de Descartes até hoje, e tem por tal modo invadido todas as partes da scien-

cia mathematica, tão numerosas e variadas são as applicações que tem recebido, que a sancção do tempo e a de tantos homens respeitaveis por sua illustração seria sufficiente para continuar a admitil-as como verdadeiras ou ao menos como uma triste necessidade da sciencia, se a nenhuma utilidade pratica ou scientifica de semelhantes proposições, e se cada uma das applicações que tem recebido não fosse um protesto solemne contra a sua irracionalidade real, e não servisse ao contrario de prova a favor da unica e verdadeira significação concreta ou abstracta das quantidades positivas e negativas, mostrando nessas duas proposições o escolho em que vão dar todos os que della se desvião.

9 Sem grande esforço demonstraremos a these que ficou estabelecida.

Antes porém de o fazer vamos ver porque raciocinios se tem chegado ás duas proposições já mencionadas.

Aprezentaremos com a maior boa fé todas as demonstrações, que se tem dado. Eis em que ellas consistem.

«10 Tomemos a expressão $x = a - b$ em que a e b reprezentão dous numeros quaesquer.

Emquanto b é menor do que «*a*» é possivel praticar a subtracção e a differença x ou $a - b$ é positiva; quando porém $b > a$ para termos a differença podemos decompôr b em duas partes, uma das quaes seja igual a (a), representando por c a outra parte, teremos:

$b = a + c$.

« Subtrahir de «a» a quantidade b importa subtrair de «a» cada uma das partes «a» e «c» de que b se compõe e então teremos; $x = a - a - c = - c$.

Assim a differença é negativa sempre que o subtrahendo fôr maior que o minuendo.

« Supponhamos pois que «a» é constante e b variavel e que vá crescendo successivamente á partir de zero, a differença a — b irá evidentemente decrescendo até se redusir á zero quando b = a ; b continuando á crescer indefinidamente deste ponto em diante, a differença negativa vai tambem crescendo indefinidamente em seu valor absoluto.

« Assim pois a differença a — b é positiva sempre que b < a, é zero quando b = a e negativa sempre que b > a.

« Ora em uma subtracção o resto é tanto menor quanto maior é o subtrahendo, portanto qualquer quantidade negativa é menor que zero; e como quanto maior fôr b em relação a (a) tanto maior é o numero que representa a quantidade. Resulta, d'ahi que :

« Uma quantidade negativa é tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto.

« Resulta pois que :

$-1 < o$ ou $o > -1$, $-2 < o$ ou $o > -2$ e em geral $-c < o$ ou $o > -c$, $-1 > -2$, $-7 > -8$ e em geral $-a > -(a+b)$.

Quáesquer que sejão o estylo e a forma com que venha ennunciado é este o argumento fundamental com que em todos os tratados de algebra se estabelecem as duas proposições acima ennunciadas como qualquer póde verificar. Não digo que seja o unico, mas é o mais geral; ha alguns outros que havemos tambem de dar a conhecer.

Para confirmal-o melhor, accrescentão o seguinte.

« 11 Imaginem-se todas as quantidades de uma mesma especie dispostas por sua ordem de grandeza em uma linha horisontal, collocando a partir de zero para a direita todas as quantidades positivas crescentes, e de zero para a esquerda todas as quantidades negativas tambem crescentes em seus valores absolutos.

« Forma-se assim uma serie por onde se obtem, vindo da direita para a esquerda, quantidades successivamente menores desde o infinito positivo até o infinito negativo e vice-versa, de modo que o termo zero da serie é o limite superior de todas as quantidades que lhe ficão á esquerda, e o limite inferior de todas aquellas que lhe ficão á direita.

« Reconhecer-se-ha assim.

« 1º que toda a quantidade negativa é menor que zero, pois que qualquer quantidade negativa está mais afastada de uma positiva do que o zero; 2.º» Uma quantidade negativa é tanto menor quanto maior é o numero que a representa, isto é, quanto maior é o seu valor absoluto; pois que quanto maior fôr o valor absoluto da quantidade negativa, tanto mais abaixo ou mais afastada está de zero.

Pode-se verificar isto nos tratados de Cirodde, Paque, Fourcy, Bourdon e muitos outros que seria longo ennumerar.

A' formação desta serie chegão tambem alguns pelo seguinte raciocinio, que para muitos é a unica demonstração desta proposição.

« Quando a uma quantidade negativa se ajunta uma quantidade positiva, a quantidade negativa diminue em seu valor absoluto, e cresce ao contrario quando se subtrahe.

« Assim, por exemplo, a — 10 ajuntando uma unidade, vêm — 9, ajuntando ainda a esta uma unidade, temos — 8 e assim por diante.

« De — 10 subtrahindo uma unidade vêm — 10 — 1 ou — 11 e desta subtrahindo ainda uma unidade tem-se — 12 e assim por diante.

« Assim pois se partirmos da quantidade — 10, por exemplo, e se lhe ajuntarmos successivamente uma unidade formaremos a seguinte serie:

$-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\infty$

Continuando esta serie para a esquerda, para o que é bastante subtrahir successivamente uma unidade ao numero — 10, teremos:

— 11, — 10, — 9, —8, — 7, — 6, — 5, — 4, — 3, — 2, — 1,0 , + 1, + 2, + 3, ... + ∞

« Vê-se pois (dizem) que as quantidades negativas gozão de propriedades muito differentes das positivas :-

Quanto mais unidades se ajunta a uma quantidade negativa, mais ella diminue em seu valor absoluto, e quanto mais se diminue, mais ella cresce.

(E' realmente notavel esta propriedade.)

12 Além destas demonstrações, que são geralmente admittidas, havendo só differença de estylo mas sempre a mais intima e profunda harmonia de idéas a respeito das duas proposições, com excepção de um pequeno numero de authores, que as admittem porêm com interpretações, que já demos a conhecer, ha algumas outras mais directas que vamos apresentar.

Bourdon e alguns outros acrescentão mais esta demonstração para estabelecer directamente os dous principios.

Diz Bourdon :

« Dès que pour interpréter tous les resultats singu-
« liers que fournit la résolution algèbrique d'une ques-
« tion, l'on est convenu de considérer *les expressions*
« *négatives* comme des quantités, il faut qu'en les soumet-
« tant aux mêmes opérations que les nombres absolus,
« on puisse parvenir à des résultats exacts. Or on peut re-
« garder comme un *axiome*, que, si un nombre « a » est plus
« grand qu'un autre « b » et que l'on ajoute à chacun un
« même nombre « d », le premier resultat a + d est plus
« grand que le second b + d.

« Cela posé, en admettant les inégalités o > — a et — a >
« — (a + m) (a et m sont ici des nombres absolus), si l'on

« ajoute aux deux membres de chacune d'elles $a + m$, on « trouve $a + m > m$ et $m > o$, ce qui est exact. Au contraire, « si l'on posait $o < - a$ et $- a < - (a + m)$, il résulterait « $a + m < m$ et $m < o$, ce qui serait absurde.

13 Mr. A. J. Paque, professor do Athenêo Real de Liège, etc, em uma sua obra publicada em agosto de 1862, onde trata especialmente da theoria das quantidades negativas e das expressões imaginarias, demonstra directamente estas proposições.

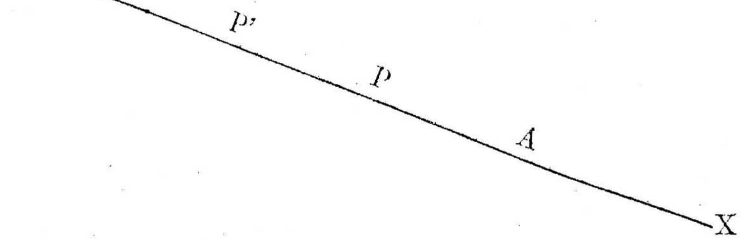
Eis tudo quanto elle diz a este respeito, copiado textualmente de sua obra:

« Il arrive sans cesse que l'algèbre emploie des quantités « qui, sous l'influence des variables dont elles dépendent, « passent d'une manière continue, du positif au négatif.

« La continuité exige alors que la quantité, qui subit « ces fluctuations, passe par l'origine de translation, en ces- « sant d'exister à cet instant; et c'est pour caractériser « analytiquement ce résultat que l'on emploie le signe « o » « auquel il faut par conséquent se garder d'appliquer la « signification et le nom de nombre.

« Théorème. Une quantité négative est relativement « d'autant plus petite, que sa valeur absolue ou arithmeti- « que, est plus grande.

« Démonstration. (*). Soit OAX le sens positif de trans-



(*) E' bom notar desde já que M. Paque vai demonstrar que $AP' < AP$, e que $PP' < o$!!!

« lation à origine O, et supposons que l'on veuille trans-
« porter cette origine en A : soient deux points quelconque
« P et P' situés entre O et A, et posons
« AO = n, AP = a, PP' = i
« n, a, et i, exprimant les longueurs des droites AO, AP et
« PP' en fonction d'une unité linéaire quelconque, on a
« évidemment,

$$OP' < OP$$
$$OA - AP' < OA - AP$$
$$OA - (AP + PP') < OA - AP.,$$

« ou encore

$$n - (a + i) < n - a,$$

« que l'on peut d'ailleurs écrire, en se fondant sur la règle
« d'addition,

$$n + [-(a + i)] < n + [-a]$$

« Et pour satisfaire à cette inégalité, il faut que

$$(1) \qquad -(a + i) < -a, \qquad \text{ou}$$
$$AP' < AP$$

« Cette dernière relation, qui établit le théorème proposé,
« subsiste encore lorsque l'on suppose « a » nul, puisqu'au
« lieu de OP' < OP, on a OP' < OA, par suite on voit (zero
« ne pouvant être affecté d'aucun signe) que $-i < o$.

« 2me Démonstration. Considérant les nombres négatifs
« comme restes d'une soustraction dans laquelle le dimi-
« nuer est plus grand que le diminuende, et supposant
« que a étant constant, b soit au contraire variable, il est
« clair que plus le diminuer b augmente plus le reste di-
« minuera ; pour b > a on peut donner au reste la forme
« explicite d'une quantité négative, en écrivant

$$\text{reste} = -(b - a)$$

« Dès lors il devient évident que, ce reste décroissant lors-
« que b augmente, tout nombre négatif est d'autant plus
« grand que sa valeur absolue numérique est moindre.

« 3^{me} Démonstration. Au point de vue philosophique on « peut dire :

« La formation ou la composition des grandeurs étant « dénotée par le signe +, la déformation, dénoncée par le « signe —, sera d'autant plus grande et plus puissante qu'il « y aura d'élements, d'unités sur lesquelles la décomposi- « tion aura porté.

« La quantité — (a + i) indique donc une déformation « plus complète que la quantité — (a) ; et comme la gran- « deur diminue à mesure que la décomposition agit sur un « plus grand nombre d'unités la relation (1) devient ma- « nifeste.

Les quantités négatives entières forment donc, en vertu de (1) et (2) la suite croissante — n, — (n — 1), — (n — 2), —(n — 3)..... — 3, — 2, — 1, 0

« Et il est bon de remarquer que 0 est la limite supérieure « de cette suite, mais que cette limite ne peut jamais « être atteinte.

« De sorte que les quantités positives et négatives fornis- « sent l'échelle suivante continue et graduelle, dans laquelle « o est la limite inférieure des premières et la limite supé- « rieure des dernières : — (n + 1), — (n), — (n — 1),..... —3, « — 2, — 1, o, + 1. + 2, + 3, ... + n + (n + 1)......

« Par diverses démonstrations directes du théorème précé- « dent nous permettons d'éviter, selon les divers points de « vue auxquels on peut se placer, l'écueil contre lequel sont « venus se briser les auteurs des meilleurs traités d'Algèbre : « MM. Lefébure de Fourcy, Mayer, Choquet, Bertrand, mul- « tiplient les conventions sans nécessité, et exposent sou- « vent ainsi l'élève à beaucoup de dangers, dont le moindre « est quelquefois le dégoût, toujours l'obscurité et le doute. « Malgré notre profonde estime pour ces savants traités, « qu'il nous soit permis de signaler quelques passages afin

« de montrer combien est réel le reproche que nous venons
« de formuler.

« M. de Fourcy : (Leçons d'Algèbre, 6me edt. pag. 10) Par-
« ceque les valeurs négatives viennent à la suite des nom-
« bres positifs décroissants 3, 2, 1, 0, on convient de les regar-
« der comme plus petites que zéro ; et parceque les quantités
« négatives qui ont une valeur absolue plus considérable
« viennent après celles qui ont une valeur absolument
« moindre, on les regarde aussi comme plus petites que ces
« derniéres, etc. »

« Dans le traité élémentaire d'algèbre de MM. Mayer et
« Choquet on lit à la pag. 20 de la cinquième edition :
Si d'un nombre tel que 10, par exemple, on retranche
successivement les nombres 1, 2, 3,......... 10. on obtiendra
d'abord des restes positifs de plus en plus petits, puis on
parviendra à un reste nul ; et en continuant à soustraire
« du même nombre 10, les nombres 11, 12, 13, 14..... on
« produira les quantités négatives —1—2,—3..... on dit
« par cette raison que les quantités négatives doivent être
« regardées comme plus petites que zéro, et d'autant plus pe-
« tites que leurs valeurs sont plus grandes.
« Ce n'est là qu'une convention, ou plutôt une forme du
« langage dont l'utilité sera appréciée par la suite.
« Chez M Bertrand, (Alg. pag. 9.), on trouve :
La forme des résultats précédents peut se simplifier à l'ai-
de d'une convention très utile en Algèbre, qui consiste à
regarder tous les termes d'un polynome comme ajoutés les
uns aux autres, en nommant nombres négatifs ceux qui
sont précédés du signe —.
Par exemple, on regardera la différence a — b comme
résultat de l'addition de a avec —b.

$$a - b = a + (-b) \qquad (1)$$

L'expression isolée (— b) n'acquiert pour cela aucune signification, seulement on dit ajouter — b au lieu de dire retrancher b. On convient de même que retrancher — b signifie ajouter b.

$$a - (-b) = a + b \qquad (2)$$

Il serait absurde de chercher à démontrer les formules (1) et (2):

Les définitions ne se démontrent pas.

Nous reconnaisson que le moyen imaginé par M. Bertrand est simple et facile, mais il faut bien avouer aussi qu'aucune explication des règles d'addition et de soustraction, ne être pourrait moins satisfaisante.

En principe général, et au point de vue rigoureusement scientifique, nous déclarons que les conventions et les postulatums constituent un vice de doctrine: des notations sont souvent nécessaires, mais ces notations, qui ne sont pas du genre des conventions de MM. Lefebure, Mayer, Choquet, Bertrand, ne peuvent porter sur la nature des grandeurs; et des conventions ne doivent d'ailleurs être reçues que si elles sont sans influence sur les résultats.

« C'est précisement contre ce dernier principe rigoureux « qui péchent les conventions additives et soustractives de « M. Bertrand. »

Eis as diversas sortes de argumentos com que se tem pretendido estabelecer como verdadeiras as proposições relativas ás quantidades negativas, isto é, que:

1ª Qualquer quantidade negativa é menor que zero (1)

2ª Uma quantidade negativa é tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto. (2)

14 Não entraremos por ora na analyse d'esses argumentos, de que trataremos especialmente mais adiante, notemos porêm desde já duas outras proposições completamente oppostas ás duas acima mencionadas, e que no entretanto derivão naturalmente da theoria das quantidades algebricas

e das simples accepções arithmeticas que ligamos aos signaes $+$ e $-$, que estão de inteira harmonia com a interpretação concreta das quantidades positivas e negativas que constitue o importante theorema de Descartes, e fazem parte do complexo des verdadeiros principios que são do dominio da sciencia mathematica, recebendo continuas verificações nas infinitas e variadas applicações de que esta sciencia é susceptivel.

Estas proposições que são apenas uma extensão, a todas as quantidades positivas e negativas, dos principios evidentes que regem a comparação das quantidades positivas, constituem a these que por exclusão das proposições (1) e (2) ficará expontaneamente firmada

1ª Duas quantidades são iguaes quando o fôrem os seus valores absolutos, quer sejão affectos do mesmo signal, quer de signaes contrarios, e reciprocamente. (A)

2ª De duas quantidades é maior aquella cujo valor absoluto é o maior, quer estes valores sejão affectos do mesmo signal, quer de signaes contrarios, e reciprocamente. (B)

Observação. Subentende-se que as quantidades devem ser da mesma especie, quando concretas, e referidas a uma commum unidade.

15 Do enunciado dessas proposições se conclue que a comparação das grandezas se reduz sempre á de seus valores numericos; os signaes $+$ e $-$ nem uma iufluencia exercendo sobre ella, quer se os considere em relação á sua significação abstracta, quer em relação á sua interpretação concreta.

Nestas mesmas proposições está comprehendida a seguinte, que no emtanto mencionaremos aqui especialmente para deixar bem em evidencia sua completa opposição com as proposições (1) e (2):

— Qualquer quantidade negativa é maior que zero e tanto maior quanto maior é o seu valor absoluto. —

16 O modo porque enunciámos esta proposição comparando a zero uma quantidade negativa, comparação tão superflua como se tratassemos de quantidades positivas, tornou-se no emtanto necessario attendendo á maneira porque vem enunciadas as propriedades das quantidades negativas. Zero, como se sabe, quer dizer completa ausencia de valor. Debaixo desta mesma accepção póde ser tambem considerado como o limite commum para que tendem todas as grandezas variaveis que decrescem continuamente, podendo sempre cahir abaixo de qualquer valor por menor que elle seja, assim como o symbolo $\frac{A}{0}$ é o limite commum de todas as grandezas variaveis e susceptiveis de um crescimento continuo e indefinido, podendo portanto elevar-se acima de qualquer valor dado por maior que elle seja, e que por isso se chama o symbolo do infinito.

Estes limites porêm nunca podem ser attingidos e muito menos excedidos. Qualquer quantidade está sempre evidentemente comprehendida entre elles, tomando-se a palavra quantidade em sua rigorosa accepção. Dizer que uma grandeza continua e variavel tem por limites zero e o infinito, importa dizer que ella não tem limites em sua variabilidade.

E' nessa mesma accepção que se diz, por exemplo, que o tempo tem por limites zero e o infinito.

E' assim tambem, que sobre uma recta indefinida a distancia entre dous pontos moveis sobre ella, tem por limites zero e o infinito quando elles pódem approximar-se ou afastar-se indefinidamente, &.

17 Não pretendemos porêm demonstrar as duas proposições (A) e (B) que no emtanto formão a these que deixámos estabelecida; pois que os axiomas não se demonstrão.

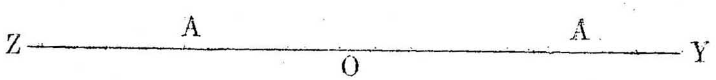
Vamos porêm considerar primeiramente cada um dos proprios exemplos com que nos diversos tratados de Algebra se pretende confirmar as proposições (1) e (2) relativas ás quantidades negativas, e cada um desses exemplos longe de produzir um semelhante resultado, ao contrario porá ainda mais em evidencia o absurdo contido nessas proposições, e fornecerá ao mesmo tempo uma verificação da these evidente que estabelecemos em completa opposição com ellas.

Passando depois ao exame das diversas demonstrações que se tem dado, elle nos levará a resultados identicos.

18 1º Quando sobre uma recta indefinida se considerão como positivas as distancias contadas em um certo sentido a partir de um ponto da recta tomado para origem, as distancias contadas em sentido opposto serão negativas. E' uma convenção geralmente admittida e que, como vimos, nada tem de arbitraria; é, ao contrario, a expressão da profunda harmonia entre o facto analytico e a significação concreta dos signaes + e — que recebe neste exemplo uma confirmação decisiva.

Assim se referimos a uma origem O a posição de um ponto A movel sobre a recta ZY,

Fig. 3.



representando por x sua distancia á origem que supporemos positiva quando fôr contada para a direita de O, e portanto negativa quando o fôr em sentido opposto, o valor de x e o signal respectivo tem aqui a vantagem de fixar precisamente em cada instante a posição do movel sobre a recta.

E' evidente que quanto mais afastado ou mais proximo da origem O estiver o ponto A, tanto maior ou tanto menor será o valor absoluto de x : os signaes + e — nada mais indicão senão a sua situação a respeito do ponto O, o que é indispensavel para determinal-o em cada caso. Estes signaes não têm pois neste caso outra significação.

Como é pois que deste exemplo, que tão bem caracterisa a significação dos signaes + e — e que é tão geral, podendo-se applicar a todas as grandezas susceptiveis de opposição de sentidos, se póde tirar argumentos a favor das propriedades das quantidades negativas; isto é, que toda a quantidade negativa é menor que zero e tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto?!... Como é que podemos combinar estas idéas de distancias positivas e negativas com taes propriedades das quantidades negativas?

Pois não é evidente que, quanto mais o ponto A se afastar de O para a direita ou para a esquerda, maior é a distancia que o separa deste ponto e maior é portanto o valor numerico de x, que representa essa distancia ?

A quantidade negativa —x não terá neste caso uma significação tão clara ao espirito representando uma grandeza real tanto maior ou tanto menor, quanto maior ou quanto menor fôr o valor absoluto de x?

Para se estar de harmonia com taes propriedades das quantidades negativas, é necessario admittir-se que quanto maior fôr o valor absoluto da distancia representada por —x, tanto menor será a distancia entre os pontos O e A, ou o que é o mesmo, quanto mais afastados estiverem dous pontos um do outro, tanto menor é a distancia que os separa, e essa distancia é ainda menor do que aquella que haveria se elles estivessem reunidos !....

E' o absurdo o mais colossal que o espirito humano póde imaginar.

No emtanto é a unica consequencia que n'este exemplo se deve tirar em favor das propriedades das quantidades negativas, expressas nas duas proposições que por meio delle se pretende firmar, e que de certo ninguem a quer acceitar.

No emtanto Mr. Paque demonstrou que esse absurdo é que era a verdade, e devia-o fazer para ser consequente com suas idéas sobre as quantidades negativas, que são tambem as universalmente admittidas.

Mr. Paque desmonstrou, como vimos, que $AP' < AP$!!!..

Fig. 2.

pois o ponto P', no sentido das distancias negativas, estava mais afastado de A do que o ponto P; concluio mais que $PP' < o$, PP' representando uma distancia contada no sentido que corresponde ao signal (—)!!!...

A presença do facto geometrico nem ao menos o fez reflectir no absurdo que queria firmar como verdade.

Examinaremos mais tarde esta e outras pretendidas demonstrações.

Passemos a mais exemplos.

19 2º Supponhamos um corpo movendo-se em linha recta.

Se considerarmos a velocidade como positiva, quando o movimento tem lugar em um certo sentido, será negativa quando o movimento tiver lugar no sentido opposto. E' uma consequencia a que nos leva neste caso a interpretação dos signaes $+$ e $-$.

Como é que deste exemplo se póde tirar argumentos para demonstrar que toda a quantidade negativa é menor que zero, e tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto ou numerico?!...

Não é possivel harmonisar a idéa de velocidade com semelhantes propriedades, que se attribue ás quantidades negativas.

Para harmonisar estas idéas é indispensavel suppôr que quando a velocidade é negativa, o corpo anda menos do que quando está parado!!... e tanto menos, quanto maior é a velocidade no sentido indicado pelo signal —

E no emtanto não é esta decerto a consequencia a que ninguem quer chegar, posto que ella seja irrecusavel para que as quantidades negativas possão gozar das propriedades que se lhes attribue.

20 3° Vamos a um outro exemplo, que se tem tornado geral; consiste elle no seguinte:

Se representarmos por $a - b$ o estado pecuniario de um negociante ou de um individuo qualquer, representando por «a» a receita e por b a despeza, tres casos se pódem dar: $b = a$, $b < a$ e $b > a$.

No primeiro caso, sendo a receita igual á despeza, o individuo nada possue, mas tambem nada deve; no segundo, a receita sendo maior que a despeza, tem elle um saldo a seu favor que o representaremos por c, sendo c a differença $a - b$, que é positiva neste caso; finalmente, quando b é maior que «a», fica elle devendo a quantia c. Neste caso, porém, a differença, que representaremos ainda por c é negativa e igual a — c.

Resulta pois que:

Se reprezentarmos por c o valor absoluto ou numerico de uma certa quantia, + c exprimirá uma quantia que um individuo possue realmente, e — c exprimirá uma divida.

E' claro porêm que a quantia designada por c é tanto maior ou tanto menor quanto maior ou quanto menor fôr o numero c que a representa, quer elle seja affecto do signal +, quer do signal —: isto é, quer represente uma fortuna que alguem possue, quer represente uma divida.

Como é pois que deste exemplo se póde tirar argumento algum para confirmar ou demonstrar a these em questão? A expressão — c representando uma divida, e sendo verdade que toda quantidade negativa é menor que zero, não havia realmente nada melhor para o devedor.

21 4º O argumento tirado da graduação dos thermometros, para o qual alguns appellão como fornecendo uma confirmação destas propriedades, é tão ineficaz como qualquer outro; e só poderá servir para illudir áquelles que forem completamente ignorantes dos mais comesinhos principios de physica.

A temperatura de um corpo qualquer, variavel em geral com o tempo, representa em cada instante a quantidade de calorico sensivel que elle contém, e augmenta ou diminue conforme augmenta ou diminue esta quantidade.

Assim pois, o exemplo do thermometro só poderia servir se o zero da escala correspondesse á completa ausencia de calorico n'um corpo, o que não tem realmente lugar, nem é possivel ter; impossibilidade esta, que se concebe tanto mais claramente quanto mais se reflecte na especie da grandeza considerada.

Este ponto representa sempre, como se sabe, uma quantidade determinada de calorico.

Nos thermometros centigrado e de Réaumur (a que se referem) corresponde á temperatura do gelo fundindo; isto é, a uma determinada quantidade de calorico sensivel, que se conserva invariavel durante o phenomeno da fusão do gelo, e no de Fahrenheit a uma mistura refrigerante de gelo pilado e sal marinho, que produz uma temperatura mais baixa que a do gelo fundindo e é representada por 32 gráos abaixo desta.

Qualquer outra temperatura mais alta ou mais baixa poderia ser tomada para zero na graduação de um thermometro, tão impropriamente como cada uma das mencionadas, uma vez que se a pudesse reproduzir á vontade, o que é necessario para a verificação deste apparelho.

Assim quando se diz que a temperatura de um corpo é por exemplo de — 10°, entende-se nos thermometros centigrado e de Reaumur uma temperatura menor que a do gelo fundindo, e no de Fahrenheit que é menor que a da mistura de gelo e sal marinho.

As considerações expostas são sufficientes para dar uma idéa da completa inaptidão d'este exemplo para o fim a que se propõe, fornecendo ao contrario n'elle mais uma prova importante a favor da unica e verdadeira interpretação concreta dos signaes + e —; não obstante convem-nos fazer algumas reflexões mesmo para desvanecer qualquer duvida que possa ainda ter lugar.

Qualquer que seja a temperatura designada por zero, concebe-se sempre e existem realmente temperaturas mais baixas e mais elevadas que esta. E' certo tambem que, quanto maior for o numero de gráos do thermometro que designar qualquer outra temperatura, tanto maior será ella em relação á designada por zero, se elle for positivo, e tanto menor será do que esta, se elle fôr negativo; o que parece de inteira harmonia com as proposições que combatemos.

Ha porém no argumento tirado deste exemplo, como em todos os que em favor destas proposições se tem apresentado, uma inexplicavel confusão entre as idéas de valor e as ideas de relação. Para pôr bem em evidencia uma tal confusão, limitando-nos por agora a este exemplo, representemos por G a quantidade de calorico que corresponde á temperatura designada por zero, em qualquer thermometro, por t uma outra differente de G, por n o numero de gráos que corresponde a t, e por c a quantidade de calorico que corresponde ao gráo do thermometro que é funcção do calorico especifico do mercurio, da capacidade do reservatorio e do diametro do tubo do thermometro; nc ou t — G representará uma quantidade de calorico que é necessario ajuntar ou subtrahir á G, conforme a differença t — G fôr positiva ou negativa, para ter-se a quantidade de calorico ou a temperatura t que corresponde a n gráos do thermometro.

E' evidente que quanto maior fôr n tanto maior ou tanto menor será a temperatua correspondente, conforme n fôr positivo ou negativo, pois que no 1° caso, tanto maior é a quantidade de calorico que é necessario ajuntar á G para ter-se a que corresponde a n, e no 2° tanto maior é a quantidade de calorico que é necessario diminuir de G.

Daqui porêm nada se pode concluir em favor dos principios que se pretende estabelecer. Em 1° lugar, por mais baixa que seja uma temperatura em relação áquella tomada para zero, ella representa sempre uma certa quantidade de calorico existente, e que é portanto positiva na accepção mathematica em que se costuma tomar esta palavra; em 2° logar o numero + n ou — n designa sempre uma mesma quantidade determinada de calorico e directamente proporcional ao valor numerico de n: os signaes + e — indicão unicamente que ella deve ser sommada ou subtrahida, o que determina duas temperaturas equidistantes de G, uma tomada a partir de G no sentido das temperaturas crescentes, outra no sentido das temperaturas decrescentes.

Se o zero do thermometro tivesse uma posição real, o que significarião, em relação ás temperaturas, as quantidades negativas na accepção em que ellas são geralmente tomadas? Se não existe, e nem é até possivel conceber-se, um corpo inteiramente destituido de calorico, como se poderia conceber um corpo contendo uma quantidade de calorico menor do que um outro que nemhum calorico possue? A má idéa que presidio á graduação dos thermometros, de designar por zero uma temperatura determinada em relação á qual se avalião todas as outras, é pois a unica base do argumento cuja inefficacia já está em evidencia.

22 Este argumento constitue ainda um verdadeiro typo do que se denomina um circulo vicioso. Com effeito, a construcção dos thermometros data do fim do seculo 16 e é portanto posterior á épocha em que Descartes enunciou pela primeira vez o theorema relativo á expontanea e intima harmonia entre a opposição dos signaes + e — e a opposição no sentido das grandezas correspondentes; d'onde se tem concluido illogicamente os dous principios relativos as quantidades negativas. A harmonia entre a maneira de graduar o thermometro e a maneira de conceber as quantidades negativas, mostra nesta operação a sancção que recebeo a doutrina já estabelecida; hoje partem do facto desta graduação para estabelecel-a!..

23 Seria interminavel este trabalho, se quizessemos considerar todos os casos que confirmão a importante propriedade dos signaes + e — de exprimirem simplesmente na passagem do abstracto para o concreto a opposição de sentido nas grandezas correspondentes, como seria impossivel

a qualquer descobrir um unico caso que estabeleça a necessidade logica de considerar as quantidades negativas revestidas dessas propriedades que lhes são attribuidas, quer se as considere em relação á sua significação abstracta, quer em relação á sua interpretação concreta.

Comtudo vamos estabelecer mais uma proposição até aqui cuidadosamente esquecida, (ao tratar-se da theoria das quantidades negativas) e que constitue um corollario irrecusavel das proposições estabelecidas. Admittamos que estas proposições sejão verdadeiras, isto é, que uma quantidade negativa é menor que zero e tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto.

24 Seja a expressão $y = \frac{A}{a-x}$, A e *a* representando quantidades constantes quaesquer e positivas, x e y duas grandezas variaveis sujeitas em sua variabilidade á lei mathematica expressa pela equação $y = \frac{A}{a-x}$

Quando $x < a$, a differença $a - x$ e o quociente $\frac{A}{a-x}$ ou y são positivos; quando porêm $x > a$, a differença $a - x$ e o quociente $\frac{A}{a-x}$ são negativos.

Supponhamos agora que x vá successivamente crescendo a partir de zero; o quociente $\frac{A}{a-x}$ positivo emquanto $x < a$ vai crescendo rapidamente em seo valor absoluto; pois quanto menor é o divisor, tanto maior é o quociente.

Quando $x = a$, isto é, quando o divizor fôr menor que qualquer numero dado por menor que seja, a relação $\frac{A}{a-x}$ ou $\frac{A}{o}$ será maior que qualquer grandeza dada por maior que seja; diz-se neste caso que é infinitamente grande.

Admittamos agora que x continúa a crescer; a differença $a - x$ e o quociente $\frac{A}{a-x}$ virão então negativos.

Representando por $-c$ a differença $a - x$, teremos $y = \frac{A}{a-x}$ ou $\frac{A}{-c}$

Ora como $-c < o$, resulta que $\frac{A}{-c}$ é tambem maior que $\frac{A}{o}$; e como quanto maior é c tanto menor é a quantidade $-c$, segue-se que a quantidade $\frac{A}{-c}$ continuará a crescer indefinidamente além do limite $\frac{A}{0}$, decrescendo em seu valor absoluto!

Como se póde dar a A e c toda sorte de valores, resulta d'ahi que qualquer quantidade negativa é maior que o infinito, isto é, que qualquer grandeza dada por maior que ella seja!

25 A ser verdade tudo quanto se tem dito sobre as quantidades negativas, não ha realmente nada mais maravilhoso do que esta mysteriosa influencia do signal menos dando origem a tantas propriedades exquesitas, absurdas e contraditorias.

Reunamos por curiosidade todas as propriedades que se tem attiribuido ás quantidades negativas:

26 1ª Qualquer quantidade negativa é menor do que zero

2ª Uma quantidade negativa é tanto menor quanto maior é o seo valor absoluto.

3ª Qualquer quantidade negativa é maior que o infinito, isto é, maior que qualquer outra positiva ou negativa por maior que ella seja.

4ª Quanto mais se ajunta a uma quantidade negativa, mais ella diminue em seo valor absoluto.

5ª Quanto mais se diminue mais ella cresce.

Resulta ainda que as quantidades negativas tem por limites, como as positivas, zero e o infinito, porém com esta descommunal differença:

As quantidades negativas são menores que o menor limite, e ao mesmo tempo maiores que o maior limite, isto é, menores que zero e maiores que o infinito!!!...

27 Haverá nada mais repulsivo ao simples bom senso que o conjuncto dessas absurdas e contradictorias propriedades, que além disso nem uma utilidade tem, qualquer que seja o ponto de vista debaixo do qual se as considere?

Admira realmente que ellas se originassem no espirito illustrado de Descartes que immortalisou seu nome ligando-o a tantas e tão importantes descobertas scientificas, e que tão bem comprehendeu a verdadeira interpretação dos signaes + e —, dando-lhe ao mesmo tempo em a nova constituição geometrica, a — Geometria Analytica — com que tanto enriqueceo a sciencia mathematica, a mais vasta e uma das mais brilhantes applicações que tem recebido. Admira ainda mais que tenhão sido fielmente reprodusidas até hoje por tantos homens competentes, que merecidamente gozão na sciencia de uma autoridade real, e que são, como Descartes, dignos do mais profundo respeito.

A circumstancia de se ligarem estas proposições a uma das mais simples e elementares theorias d'algebra, não devendo por isso merecer a reflexão dos genios e só podendo offerecer difficuldades aos principiantes ou apoucados de espirito, não constitúe de certo argumento serio em favor de sua existencia. Um vicio de doutrina é sempre um grave inconveniente, e debaixo do ponto de vista philosophico não ha em qualquer sciencia principios, nem theorias mais ou menos importantes, desde que todos são necessarios e indispensaveis á continuidade e intima harmonia do todo.

Se isto se dá em relação a qualquer sciencia, quanto mais em relação á mathematica, typo eterno da sciencia por excelencia.

Desde os mais simples elementos do calculo arithmetico, até as questões mais transcendentes do calculo differencial e integral (no dizer do Dr. Pinto Peixoto, um dos mais illustrados lentes que tem tido a nossa escola central) « esse instrumento analytico porventura o mais poderoso que ha creado a mente humana, que tem como que arrancado á natureza os seos mais bellos segredos e suas mais reconditas leis, e elevado a Astronomia a esse alto grão de perfeição, desenvolvimento e unidade, que constitue hoje a mais bella e a mais avançada sciencia da natureza » não ha um só principio, uma só theoria por simples e mesmo insignificante que pareça, que não tenha no systema inteiro da sciencia mathematica uma utilidade e uma importacia real.

Não se vai de um jacto ao cume, sem ter primeiro percorrido todo o teclado da sciencia.

E' por esse vasto encadeiamento de raciocinios, de leis e de principios, que a sciencia nos offerece em seu aspecto geral, que o nosso espirito se eleva progressiva e naturalmente dos principios os mais simples, das leis as mais elementares, ás questões as mais transcendentes, ás leis as mais complicadas que possam existir entre as grandezas.

No immenso todo da sciencia mathematica não ha, felizmente, abrigo algum para essas proposições, que impropriamente se prendem á theoria das quantidades negativas, as quaes nada mais são do que uma nociva escrecencia.

A não ser a antiga influencia do *Magister dixit*, só a predilecção pelo mysterio tão natural á infancia da razão humana, como radicalmente impropria a estes ultimos seculos, onde o espirito positivo vai cada vez mais fazendo-a desapparecer, poderia dar a razão de ser dessas absurdas theorias.

Mas nem assim. Esses nevoeiros de considerações metaphysicas que envolvem ainda alguns ramos importantes de nossos conhecimentos, improprios sempre de uma sciencia bem constituida, tem ao menos uma razão de ser, como vestigios das vãs, porêm naturaes tendencias do espirito humano para o conhecimento da natureza intima de todos os seres, da cauza ou origem dessa infinita multidão de variados phenomenos com que o espectaculo da natureza tão vivamente o atrahe.

E' assim por exemplo, que em physica e chimica os inconcebiveis fluidos subtis e imponderaveis, a acção de presença ou catalyptica, &, gozão ainda de uma influencia tão preponderante, estabelecendo a unica base na explicação de seos diversos phenomenos.

Em mathematica, porêm, sciencia positiva por excellencia, e principalmente na parte abstracta, que não considera a natureza concreta dos phenomenos, o que poderia motivar um tão funesto desvio, mas unicameute os valores numericos e as leis abstractas da reciproca dependencia das grandezas consideradas, essas consideções metaphysicas não pódem achar abrigo.

E' portanto redicula a pretenção de crear mysterios nesta sciencia e principalmente na theoria de que nos occupamos, uma das mais elementares e simples de Algebra, posto que importante por suas applicações.

Se algum mysterio ha nessa theoria cocsiste ella a meu ver na propria existencia das proposições (1) e (2) que lhe são incorporadas, proposições cujo absurdo ressalta do embate dos mais simples principios e só á custa da violação dos mais triviaes axiomas, poderão ser tomadas como verdadeiras, como tem sido até hoje e continuarão talvez a ser por muito tempo.

Tão grande é com effeito a força dos habitos adquiridos que este vicio secular continuará ainda como principio verdadeiro, como doutrina dominante a despeito de sua nenhuma utilidade, das mais absurdas contradições a que dá continuamente lugar, da obscuridade e da duvida em que deixa o espirito dos principiantes e do thema ridiculo que fornece ás discussões as mais pueris.

28 Não precisamos accrescentar mais nada aos muitos absurdos, ás continuas e manifestas contradições, que temos apontado, e que são consequencias logicas das duas proposi-

ções fundamentaes relativas á theoria das quantidades negativas, para ficar bem em evidencia quanto é falsa e antiphilosophica essa theoria tal qual se acha estabelecida. No emtanto, antes de passarmos á analyse dos argumentos com que se a tem pretendido firmar, vamos mostrar mais uma consequencia absurda que della se deriva.

Conforme se suppoem, qualquer quantidade negativa é menor que zero, ou abaixo de zero, e é tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto. Isto posto, imaginemos uma quantidade negativa cujo valor absoluto seja infinitamente pequeno e vá crescendo por gráus infinitamente pequenos, Nestas circunstancias a quantidade negativa irá decrescendo tambem por gráus infinitamente pequenos, e suppondo que o valor absoluto cresça indefinidamente de modo a poder tornar-se maior que qualquer grandeza dada por maior que seja, a quantidade negativa decrescerá tambem indefinidamente de modo a tornar-se menor que qualquer grandesa dada por menor que ella seja; a quantidade negativa tende pois para zero (limite inferior) quando o seu valor absoluto cresce indefinidamente; mas zero é tambem o limite supperior déssas quantidades, limite para o qual ellas se approximão tanto mais, quanto menor se vai tornando o seu valor absoluto. Dos principios estabelecidos pode-se pois tirar mais esta consequecia absurda; as quantidades negativas varião desde zero até zero!!..

Esta consequencia absurda deve tambem ser acceita por aquelles que considerão como verdadeiras as proposições (1) e (2) e que, admittindo quantidades abaixo ou menores que zero, suppõe dar maior extensão e importancia á Algebra elevando ao mais alto gráu sua extrema generalidade no modo de considerar as grandezas. Para aquelles que assim considerão as quantidades, zero não é a expressão de ausencia de valor; a Algebra descortina-lhes uma infinidade de quantidades abaixo deste limite commum a todas as que decrescem indefinidamente; uma grandeza decrescendo não se extingue quando tiver perdido todas as partes de que se compunha, ella pode ainda continuar a decrescer indefinidamente além de zero pelo profundo abysmo que offerecem a seu decrescimento as quantidades negativas!...

Aquelles que assim suppõem elevar e engrandecer a sciencia, quanto a abatem e quanto parecem afastados dos seus severos e sãos principios? !

Cumpre-nos porém observar de novo que estes principios se encontrão nos melhores e mais importantes tratados d'Algebra e que tem sido repetidos por homens que profundamente conhecem toda a sciencia mathematica, que a tem enriquecido com importantissimas descobertas e que são por qualquer destes titulos dignos da admiração e profundo respeito que todos lhes tributão. E' isto mais uma notavel singularidade da theoria das quantidades negativas.

29 Convem-nos ainda observar que a ultima consequencia a que chegámos, assim como todas as outras contradicções e absurdos que temos apontado, permanecem os mesmos independentemente das diversas interpretações que se tem dado ás proposições (1) e (2). Com effeito alguns autores, conforme vimos, repugnando acceitar essas proposições como verdadeiras *in absoluto*, especialmente a primeira procurárão dar-lhe diversas interpetrações já considerando as quantidades negativas como symbolos algebricos sem alguma significação real, já como expressões de absurdo, de impossibilidade na resolução das questões em que ellas apparecem como solução &c.; outros para as admittirem, estabelecem a inconcebivel distincção do zero absoluto e zero relativo; o zero absoluto sendo o limite para que tende a quantidade negativa quando o seu valor absoluto cresce

indefinidamente, o zero relativo sendo o limite para que ella tende quando o seu valor absoluto decresce indefinidamente; quando porém se trata da comparação dos valores das quantidades negativas, quer entre si, quer com as positivas, são todos concordes em que uma quantidade negativa é sempre menor que uma positiva qualquer, e que de duas ou mais quantidades negativas é menor aquella cujo valor absoluto é o maior!! Ora, como é facil de ver, desta 2ª proposição se diriva a 1ª como consequencia irrecusavel.

Com effeito, consideremos uma quantidade negativa qualquer. Se suppusermos o seu valor absoluto decrescendo indefinidamente, em virtude da 2ª proposição, a quantidade negativa irá crescendo successivamente; e como zero é o limite inferior do decrescimento do valor absoluto, zero é pois o limite superior da quantidade negativa. Daqui se tira pois como consequencia a 1ª proposição, quasquer que sejão as diversas interpretações que lhe queirão dar.

30 Tudo quanto temos dito deixa bem em evidencia o absurdo contido nas proposições (1) e (2), não obstante vamos ainda entrar na analyse de suas pretendidas demonstrações directas, e veremos, conforme já afirmámos que, só pela violação dos mais triviaes axiomas se tem podido chegar a essas proposições.

31 Comecemos pela 1ª das demonstrações dadas por M. Paque em o seu — Tratado especial da theoria das quantidades negativas e expressões imaginarias — publicado em 1862.

Conforme vimos em o n.º (13) chegou elle á seguinte desigualdade dedusida da fig. (1):

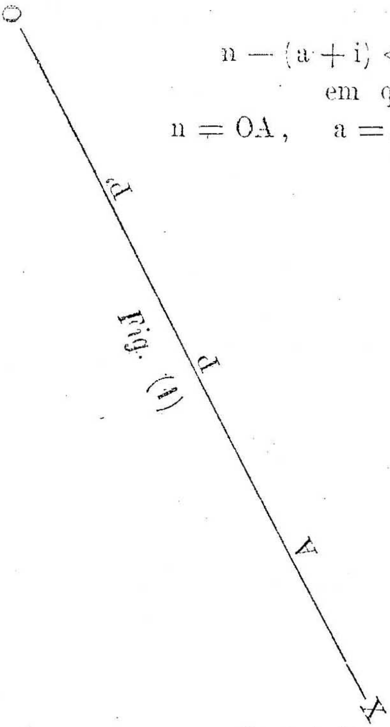


Fig. (1)

$$n - (a + i) < n - a$$

em que

$$n = OA, \quad a = AP \quad e \quad i = PP'$$

Desta desigualdade se conclue immediatamente que, é necessario para que ella tenha lugar que a parte negativa $-(a+i)$, ou AP' seja maior que a parte negativa $(-a)$, ou AP; pois que os dois membros desta desigualdade representando differenças nas quaes o minuendo (n), ou a parte positiva (OA) é a mesma, para que a 1ª differença seja menor que a 2ª é indispensavel que a quantidade a snbtrahir $-(a+i)$ seja ~~menor~~ maior que $(-a)$, o que aliás é evidente não só na fig. (1), como nas proprias expressões dessas quantidades; o autor porêm suppoz evitar esta consequencia dando á desigualdade a seguinte forma (o que é permittido)

$$n + [-(a+i)] < n + [-a]$$

Então conclue elle que, cada um dos membros desta desigualdade representando uma somma composta de duas parcellas, e havendo entre ellas uma parte commum (n), para que a 1ª somma seja menor que a 2ª é necessario que, a 2ª parte da 1ª seja menor que a 2ª parte da 2ª; isto é que

$$[-(a+i)] < [-a]$$

ou tirando os parenthesis

$$-(a+i) < -a, \text{ ou } AP' < AP$$

Dahi conclue tambem fazendo $a = o$ que,

$$-i < o, \text{ ou } PP' < o$$

Não é preciso esforço algum para conhecer-se o sophisma infeliz de que elle se servio. Com effeito os parenthesis com que envolveo as quantidades e com que parece que teve em vista *mascarar* a questão, nem ao menos podem produzir esse resultado. Esta 2ª desigualdade é absolutamente a mesma que a 1ª; cada membro representa ainda uma differença, na qual a parte positiva (n) representa o minuendo e a parte negativa o subtrahendo, e portanto tem-se evidentemente ainda

$$[-(a+i)] > [-a], \text{ ou } -(a+i) > -a \text{ e } i > o.$$

32 Ha uma outra demonstração que tem muita analogia com esta e, por isso aproveitamos a occasião para apresental-a.

Trata-se de demonstrar que uma quantidade negativa é menor que zero.

Seja por exemplo -30.

Ajuntando a esta quantidade $+30$, tem-se $(-30)+30=0$ Dizem então: a parte é menor que o todo, assim pois tem-se evidentemente $-30 < -30+30$, ou $-30 < 0$. Basta notar que nem ao menos se lembrão aquelles que apresentão esta demonstração que, se se considerar $(-30)+30$ como um todo, deve-se ter tambem $+30 < o$, pois que o axioma citado é applicavel a cada uma das partes de que o todo se compõe.

Esta demonstração, além de vir assim estabelecida em alguns compendios d'Algebra, está implicitamente contida na demonstração pelas series dos numeros positivos e negativos mencionados em os ns. (11 e 13), onde designámos tambem os compendios em que ellas se encontrão. Nesta demonstração o absurdo da argumentação é manifesto; a expressão $(-30)+30$, ou em geral $(-a)+(a)$, representa uma differença arithmetica e para que a differença seja zero, é necessario evidentemente que, o minuendo seja igual ao subtrahendo. Ainda quando se considere $(-a)+(a)$ como um todo (somma algebrica) é evidente que, para ser nulla uma semelhante somma, é necessario que as quantidades sejão iguaes e de signaes contrarios; isto é, que

$$+a = -a$$

Assim pois a consequencia, muito diversa da que se pretendia tirar, está ao contrario em perfeita harmonia com o que dissemos sobre a comparação das quantidades positivas e negativas, isto é que a comparação deve ser feita unicamente entre os valores absolutos fazendo-se abstracção dos signaes $(+)$ e $(-)$ que podem affectar as quantidades que em abstracto representão operações a effectuar e debaixo do ponto de vista concreto indicão opposição de sentido nas grandezas correspondentes. Como temos visto precedentemente, estes dois pontos de vista debaixo dos quaes se pode considerar as quantidades positivas e negativas, isto é, a sua significação abstracta e a sua interpretação concreta estão sempre em perfeita harmonia.

33 Passemos agora ao exame de uma outra demonstração directa, que se encontra em Bourdon e em outros compendios d'Algebra.

Conforme vimos (n.º 12) diz Bourdon: Estabelecendo as desigualdades:

$$-(a+m) < -a \text{ e}$$
$$-a < o$$

Ajuntando a ambos os membros $(a+m)$ teremos, feitas as reducções.

$$o < m \text{ e } m < a+m$$

o que é exacto. Se ao contrario suppusessemos

$$-(a+m) > -a, \text{ e } -a > o$$

pela mesma transformação teriamos

$$o > m, \text{ e } m > a + m$$

o que é absurdo : logo etc.

O que é realmente admiravel é que estes autores tenhão assim chegado a resultados exactos partindo de hypotheses gratuitas e absurdas, e a resultados absurdos partindo de principios exactos.

Com effeito, seja (A) uma quantidade indeterminada que supporemos por em quanto maior que $a + m$; admitta-se que sejão verdadeiras as desigualdades.

$$-(a+m) < -a, \text{ e } -a < o$$

conforme Bourdon ajuntando (A) a ambos os membros, tem-se ainda

$$(X) \qquad A-(a+m) < A-a, \text{ ou}$$

suppondo $A = a + m$

$$o < m \text{ e } m < a + m.$$

E' facil mostrar que, não só são falsas as hypotheses estabelecidas, como são falsos os principios de que elle se servio para chegar a taes resultados.

Com effeito cada membro da desigualdade (X) representa uma somma algebrica de duas quantidades de signaes contrarios e é portanto uma differença arithmetica na qual a maior que é (A) representa o minuendo e a outra o subtrahendo ; e, se se admittir que a quantidade $-(a+m)$ seja menor que a quantidade $-a$, então se deverá ter evidentemente :

$$A-(a+m) > A-a, \text{ ou}$$

suppondo $A = a + m$

$$o > m \text{ e } m > a + m$$

o que é absurdo (absurdo que provem de suppor $-(a+m) < -a$). Ora a desigualdade de $A-(a+m) < A-a$ sendo evidentemente verdadeira, segue-se que a outra

$-(a+m) < -a$ não o é: o mesmo raciocinio se applica á 2ª, $-a < o$. Se suppusermos, diz ainda Bourdon:

$$p \ldots\ldots -(a+m) > -a \text{ e}$$

$$-a > o$$

ajuntando a ambos os membros a quantidade positiva (A), teremos *ainda*

$$q \ldots\ldots A-(a+m) > A-a, \text{ ou}$$

suppondo $A = a + m$

$$o > m \text{ e } m > a + m$$

o que é absurdo.

Como no 1º caso, a demonstração pecca nos mesmos pontos: em 1º lugar, na transformação da desigualdade (p) para a desigualdade (q) não fez applicação de axioma algum, não *ajuntou*, como suppoz, a ambos os membros a mesma quantidade; em 2º lugar, a desigualdade transformada não tem lugar no mesmo sentido que a primitiva. Com effeito, quando escreveu (A) com o signal $+$ em ambos os membros, importou isso não em *sommar* a ambos a quantidade (A); mas em subtrahir de (A) primeiro a quantidade $(a+m)$ depois a quantidade (a), o que dá as differenças $A-(a+m)$ e $A-a$, que compõe os membros da desigualdade (q). E' claro ainda que a 1ª differença $A-(a+m)$ é menor que a 2ª $A-a$; pois é evidente que da mesma quantidade tirando quantidades desiguaes os restos são desiguaes, mas em sentidos contrarios; assim pois, tem-se:

$$A-(a+m) < A-a, \text{ ou}$$

fazendo $A = a + m$

$$o < m \text{ e } m < a + m$$

o que é exacto, e não

$$o > m \text{ e } m > a + m$$

que são resultados absurdos, falsos, como são falsos os principios que empregou para chegar a taes resultados.

34 Passemos agora á segunda demonstração dada por M.

Paque é que se encontra tambem em outros tratados de Algebra.

Diz este autor: A formação ou composição das quantidades sendo denotada pelo signal (+), e a deformação ou decomposição denunciada pelo signal (—) será tanto maior e mais possante quanto maior for o numero de elementos sobre os quaes a decomposição tiver lugar. Assim pois a quantidade $-(a+i)$, indicando uma decomposição mais completa que a quantidade $(-a)$, a desigualdade (1) torna-se manifesta, isto é, tem-se

$$-(a+i) < -a$$

Neste argumento o autor não considera a quantidade negativa isolada, elle implicitamente a suppõe ligada a uma quantidade positiva; além disso suppõe a quantidade negativa indicando uma decomposição, o que não é realmente uma propriedade dessas quantidades, pois, conforme as mais simples regras d'Algebra, quando duas quantidades de signaes contrarios se achão combinadas entre si por meio de uma somma algebrica, dão sempre lugar a uma decomposição, a uma subtracção arithmetica na qual a maior, positiva ou negativa, representa o todo, o minuendo, e a outra o subtrahendo; a menor das duas quantidades, a que determina a decomposição, indica a parte que deve ser supprimida na outra, que então representa o todo, ou a quantidade que soffre a decomposição, dando lugar a um resto que é sempre do mesmo signal do todo. Dahi se conclue que estas quantidades se neutralisão quando são iguaes.

O que acabamos de dizer, é o que continuamente se pratica, o que se encontra logo nas primeiras paginas de qualquer compendio de Algebra. Resulta d'ahi que o signal (—) affectando uma quantidade, não lhe dá exclusivamente a propriedade de annunciar uma decomposição, e mesmo quando assim acontecesse, não se podia tirar a consequencia a que autor chegou sobre a comparação dos valores das quantidades negativas. Supponhamos com effeito que a quantidade negativa indica sempre uma decomposição. Para dahi tirar-se como consequencia as proposições (1) e (2) é forçoso tomar o resultado da docomposição pela quantidade que a determinou, tomar, pode-se dizer, o effeito pela causa, ou em termos mais simples, mais apropriados a esta questão extremamente elementar, tomar o valor do resto em uma subtracção pelo valor do subtrahendo. E' inqualificavel absurdo concluir do facto de decrescer o resto tanto mais quanto maior é o subtrahendo, que este seja tanto menor em seu valor real, quanto maior for o seu valor absoluto. No emtanto é esta a consequencia a que chegão para poder estabelecer a theoria!.....

35 A demonstração que acabamos de examinar, encontra-se tambem conforme dissemos, em outros compendios d'Algebra. Cyrode e outros applicão-na a exemplos particulares, suppondo talvez tornal-a mais clara, ou mais rigorosa; veremos porêm que em suas bases a argumentação é a mesma que a demonstração geral que analysámos, e que lhe são absolutamente applicaveis todas as considerações que fizemos por essa occasião. Eis em resumo em que consiste a demonstração:

« Supponhamos uma recta indefinida sobre a qual existem dois pontos fixos A e B, e um terceiro ponto movel (m) cuja distancia ao ponto (B) representaremos por «a». Suppondo conhecida a distancia (AB), tratemos de determinar a distancia do ponto movel (m) ao ponto A. E' claro que esta distancia será igual a AB + m B quando o ponto (m) estiver alêm de B, e a AB — m B quando elle estiver entre A e B; isto é, será positiva, ou negativa, conforme o ponto (m) estiver situado alêm do ponto (B), ou entre (A) e (B).

Assim pois para ter-se a distancia do ponto (m) ao ponto (A), que é a pedida, é bastante mencionar a distancia ao ponto (B) e o signal respectivo, sem ser necessario enunciar a distancia AB á qual no emtanto mentalmente a ligamos: bastará com effeito saber-se a quantos metros, braças, palmos, etc. se acha o ponto (m) alêm ou a quem do ponto (B) para saber-se tambem a quantos metros, braças, palmos, etc. elle se acha do ponto (A). E' claro tambem que sendo (mB) affecto do signal (—), quanto maior for o seu valor absoluto, menor será a distancia pedida, e tenderá para zero á medida que mB se approximar de ser igual a (A B).

Suppondo agora para maior generalidade, o ponto (A) infinitamente affastado de (B) e sendo (mB) negativo, quanto maior se for tornando o valor absoluto de (mB) mais o ponto (m) se irá approximando do ponto (A), e menor portanto se irá tornando a distancia pedida, que se redusirá a zero quando mB for infinitamente grande. Semelhante ao caso em que a distancia (AB) é limitada, a distancia pedida é zero, quando o valor de (mB) negativo é igual ao valor de (AB). Dizem que neste caso é que a grandeza se reduz ao zero absoluto, o pretendido zero relativo referindo-se ao caso em que o ponto (m) se acha sobre o ponto (B). Ve-se agora quanto é illusoria alem de desnecessaria a distinção entre o zero absoluto e o zero relativo. Nésta questão a distancia ou a grandeza pedida resulta da distancia invariavel (AB) e da distancia do ponto (m) ao ponto (B); cada uma déssas distancias se reduz a zero justamente quando os pontos correspondentes estão sobrepostos, isto é, quando cada uma dellas deixa de existir: cumpre attender bem, que não é a mesma grandeza que passa por esses dois estados singulares caracterisados pelos suppostos *zero absolu* e o *zero relativo*. Quando o ponto (m) se acha sobre o ponto

(B), é a distancia (mB) que se nulifica, a distancia pedida sendo então igual a (AB); quando o ponto (m) se acha sobre (A) é a distancia pedida que se nulifica, (mB) sendo então igual a (AB).

36 Passemos agora ao exame da ultima demonstração que nos falta considerar e que vem reproduzida em o numero (10). Conforme vimos, a expressão $x = a - b$, naqual (a) e (b) representão dois numeros quaesquer, dá realmente lugar a considerar tres casos: $b < a$, $b = a$, e $b > a$. No primeiro a differença é positiva, no segundo nula, e no terceiro negativa. E' tambem um verdadeiro axioma o principio de que ahi se fes applicação, consistindo em que em uma subtracção, o resto é tanto menor quanto maior é o subtrahendo; pois é evidente que, quanto maior é a parte que se supprime em um todo, menor é a parte que resta; houve porem, no argumento citado, má applicação deste axioma, e della provierão as absurdas proposições (1) e (2).

Com effeito, no caso em que $b > a$, o axioma citado não tem applicação no mesmo sentido em que tem para os casos: $b < a$, $b = a$; pois nesse caso a subtracção é impossivel no sentido indicado e só pode ter lugar invertidos os termos della, isto é tomando-se (b) para minuendo e (a) para subtrahendo. As proposições (1) e (2) serião verdadeiras se na hypothese $b > a$ ainda se tomasse (a) para minuendo e (b) para subtrahendo, o que não tem realmente lugar, nem é possivel ter.

Nesta hypothese sendo absolutamente impossivel a subtracção no sentido indicado, foi-se naturalmente levado a invertel-a, afim de effectual-a no sentido em que é possivel. Com effeito, quando se decompos (b) em duas partes uma das quaes fosse igual a (a) fazendo depois a reducção, o que deu $(-c)$ para resultado, foi-se naturalmente levado a tomar $(-b)$ para minuendo e (a) para subtrahendo. $(-b)$ é com effeito um todo, uma somma arithmetica, cujas parcellas são neste caso (— a) e (— c). Tem-se tambem evidentemente — a < — b, — c < — b, pois a parte é sempre menor que o todo. (— a) reduz-se com (a) e fica então (— c) para resto. Reduz-se pois a questão a subtrahir de (b) a quantidade (a) e dar ao resto o signal de (b) na expressão (a — b.) Pode-se pôr debaixo da seguinte forma a expressão deste resto: $x = -(b - a)$.

E' claro que quanto maior for b em relação a (a), maior será tambem o valor do resto.

Como é pois que neste caso em que é reconhecida a impossibilidade de effectuar a subtracção no sentido indicado, em que se invertem os termos desta operação, se tira como consequencia as proposições (1) e (2)?

Se quando $b > a$ toma-se com effeito (b) para minuendo e (a) para subtrahendo, como é que se raciocina ainda como se b fosse o subtrahendo, ou a parte que se supprime quando realmente é o contrario o que tem lugar?! — O signal (—) que neste caso affecta o resultado da operação longe de dar lugar ás proposições (1) e (2), constituindo quantidades menores que zero, &, tem uma interpretação muito racional indicando que na hypothese considerada a operação é impossivel no sentido indicado (isto é, é empossivel considerar b como subtrahendo.) e que foi effectuado no sentido opposto, isto é, que a quantidade pedida é neste caso subtrativa em lugar de additiva como se suppunha.

É' esta tambem a interpretação que se dá ás soluções negativas nas diversas sortes de equações e problemas que a Algebra considera. O que temos dito torna-se ainda mais claro transformando a expressão $x = a - b$ nesta outra $a = b + x$. Reduz-se a questão a achar uma quantidade que *sommada* com b reproduza a quantidade (a). E' claro que esta questão só é possivel quando $b < a$, e que se determina a quantidade pedida subtrahindo de (a) a quantidade b; quando porem $b > a$, é absolutamente impossivel resolver a questão no sentido em que foi enunciada: a quantidade pedida não pode ser positiva, isto é, affecta do signal (+); pois ajuntando-se a b, que é maior do que (a), qualquer quantidade o resultado é sempre maior que b, e com mais forte razão maior tambem do que (a). Neste caso a questão só é possivel quando em lugar de pedir-se uma quantidade que sommada com (b) dê a, pedir-se uma quantidade que subtrahida de b dê para resultado (a); isto é, quando na expressão $a = b + x$ em lugar de $(+ x)$ se puzer $(- x)$. o que dá $a = b - x$; donde se tira $x = b - a$.

Vê-se pois do modo o mais claro que o signal — que affecta a differença $a - b$ ou x, quando $b > a$, longe de constituir chimericas e absurdas quantidades abaixo de zero, menores que zero etc., tem uma significação a mais simples e a mais racional que é possivel indicando como dissemos acima: 1º, que naquella hypothese a operação é impraticavel no sentido indicado; 2º, que foi effectuada em sentido opposto. Nenhuma outra interpretação racional pode ter o signal — que affecta a expressão $a - b$, quando $b > a$.

(37) O estudo da theoria das quantidades negativas, que até aqui temos feito, analysando separadamente cada um dos diversos argumentos relativos ás proposições (1) e (2), illogicamente consideradas como estabelecendo a base dessa theoria, deixa a convicção de que as quantidades negativas tem uma existencia tão real como as positivas, e que na comparação dessas quantidades, deve-se attender unicamente aos seus valores absolutos.

Os signaes + e — nada influem sobre os valores das quantidades a que são affectos.

Considerados na accepção puramente arithmetica que ligamos a estes signaes, e portanto debaixo do ponto de vista o mais simples e tambem o mais circumscripto, as quantidades positivas e negativas significão = *quantidades a ajuntar* = e = *quantidades a subtrahir*. =

Sem perderem porem este caracter arithmetico que vem expresso nos signaes que acompanhão e constituem aquellas quantidades, são ellas susceptiveis, como temos visto, de uma accepção muito mais vasta e muito mais importante: é pela feliz correspondencia que existe entre a opposição de sentidos de que muitas grandezas são susceptiveis e a opposição dos signaes + e — dos seus valores respectivos que as quantidades positivas e negativas preenchem em Algebra, assim como em toda a sciencia mathematica, um importante papel dando lugar a muitas importantes e indispensaveis applicações.

Conforme vimos, é pelos signaes + e —, affectos ás quantidades, que, na linguagem algebrica, exprimimos da maneira a mais simples, a mais breve, e tambem a mais geral, as mesmas idéas que na linguagem ordinaria exprimimos com as differentes palavras: antes, depois; á direita, á esquerda; acima, abaixo; alem, aquem; etc.

38 Estes signaes, gozando da notavel propriedade de exprimirem a opposição de sentidos, são comtudo insuficientes para a inteira determinação de grandezas que podem existir em muitos sentidos ou situações differentes, como acontece, por exemplo, aos raios de um circulo ou de uma esphera, aos raios vectores de diversas curvas e bem assim aos raios, diametros, etc., dos diversos corpos de revolução determinados pelas superficies geradas por essas curvas. Felizmente porém tem a sciencia recursos para determinal-as completamente em valor e posição.

Todas as applicações das quantidades positivas e negativas; todos os argumentos que temos produsido; toda a serie de proposições absurdas e contradictorias que se deduz das proposições (1) e (2), impropria e arbitrariamente consideradas como fundamentaes á theoria das quantidades negativas, *quaesquer que sejão as interpretações que lhes deem;* todos os argumentos que se tem apresentado em favor de taes proposições desde aquelle que deu a primeira idéa da necessidade de considerar quantidades isoladas affectas dos signaes + e —, (seguindo-se naturalmente o argumento tirado das series dos numeros positivos e negativos) até os ultimos posteriormente apresentados, pretendidas demonstracções directas com as quaes se tinha em vista provar a veracidade das proposições estabelecidas, confirmão pois, como temos visto, a falsidade e o obsurdo dessas proposições sem nenhuma significação, abstracta ou concreta, e deixão no espirito, e na maior evidencia, a distincção real entre os dois pontos de vista abstracto e concreto relativos as qualidades positivas e negativas que tem sido até aqui sem razão confundidos, e a veracidade das proposições (A) e (B) que estabelecemos n. (14), as quaes se resumem na seguinte:

39 *As quantidades negativas se comparão entre si e com as positivas segundo os seus valores absolutos, abstracção feita dos signaes.*

Assim, se designarmos por « a » qualquer quantidade, é evidente que essa quantidade será tanto maior ou tanto menor, quanto maior ou quanto menor for o valor numerico de « a », quer elle seja affecto do signal +, quer do signal — ; estes signaes accrescentão simplesmente a idéa de quantidade uma idéa de qualidade ou de uma circumstancia de qualidade.

Para mais esclarecer o que temos dito, tomemos alguns exemplos.

Supponhamos que por « a » designamos uma distancia.

E' evidente que essa distancia será tanto maior ou tanto menor, quanto maior ou quanto menor fôr o valor numerico de «a», quer elle seja affecto do signal +, quer do signal — ; isto é, quer a distancia seja contada em um certo sentido, quer em sentido opposto. (*)

O que dissemos em geral neste exemplo, applica-se sem uma unica excepção a todos os casos particulares.

E' assim que em — Trigonometria — os signaes + e —, juntos aos valores das linhas trigonometricas, servem para determinar os arcos a que essas linhas pertencem, e correspondem aos sentidos oppostos em que ellas podem existir. Assim por exemplo, dividindo o circulo em quatro partes iguaes por dois diametros perpendiculares entre si, um dos quaes consideraremos como horisontal, e o outro por tanto como vertical, e suppondo que os arcos sejão contados a partir do extremo esquerdo do diametro horisontal; os senos são positivos quando são contados do diametro horisontal para cima, e negativos quando são contados em sentido opposto; os co-senos são positivos quando são contados do diametro vertical para a esquerda, e negativos em sentido opposto; as tangentes trigonometricas (contadas sobre a tangente geometrica tirada á origem dos arcos), são positivas quando são contadas para cima do diametro horisontal e negativas quando são contadas em sentido opposto; as secantes são positivas quando o raio prolongado tirado a um extremo do arco encontra a tangente geometrica tirada pelo outro extremo, e negativas quando esse raio prolongado não encontra a tangente e é então prolongado em sentido opposto, etc.

E' assim que na — Geometria analyctica — no systema rectilineo, polar ou qualquer outro dos diversos systemas

(*) Neste exemplo, assim como em todos os que se seguem suppomos que na comparação de cada grandeza com a sua unidade, esta se conserva a mesma.

que existem e que se podem imaginar, os signaes das co-ordenadas juntos aos valores respectivos servem para determinar a posição dos pontos correspondentes no espaço ou em qualquer superficie, pontos que ficarião indeterminados se unicamente se dessem os valores numericos de suas co-ordenadas.

Se «a» designar um intervallo de tempo, é evidente que quanto maior ou quanto menor for o valor numerico de «a» tanto maior ou tanto menor será tambem esse intervallo de tempo, quer «a» seja affecto do signal +, quer do signal —; isto é, quer a epoca correspondente a esse intervallo de tempo seja posterior ou anterior a uma outra a partir da qual elle é contado.

Se «a» designar a velocidade de um movel, é evidente que, quanto maior ou quanto menor for o valor absoluto de «a» tanto maior ou tanto menor será essa velocidade; isto é, tanto maior ou tanto menor será o espaço percorrido pelo movel no mesmo intervallo de tempo, quer «a» seja affecto do signal +, quer do signal —; isto é, quer o movimento se effectue em um certo sentido, quer em sentido opposto.

Se «a» designar a intensidade de uma força, é evidente que quanto maior ou quanto menor for «a», tanto maior ou tanto menor será tambem a força determinada por este numero, quer elle seja affecto do signal +, quer do signal—; isto é, quer a força seja applicada em um certo sentido, quer em sentido opposto.

Se «a» designar uma certa quantia, é evidente que quanto maior for o valor numerico de «a», tanto maior ou tanto menor será tambem a quantia correspondente, quer elle seja affecto do signal +, quer do signal — ; isto é, conforme a interpretação usual, quer a quantia represente a fortuna que alguem possue, quer seja a expressão de uma divida.

Seria interminavel e mais que fastidioso este trabalho, se quisessemos considerar todos os exemplos que confirmão a proposição que avançámos sobre a comparação das quantidades positivas e negativas.

Em todas as applicações, sem uma unica excepção, encontrará ella uma confirmação decisiva.

40 Não obstante, para evitar qualquer duvida que possa ainda apparecer, vamos mostrar que os absurdos que se derivão das igualdades e desigualdades resultantes da comparação das quantidades negativas quer entre si, quer com as positivas, feita segundo a regra contida na proposição n. (14), provem, não de serem falsas ou absurdas semelhantes igualdades e desigualdades, mas *unicamente*, da má applicação de axiomas em que se fundão as diversas transformações pelas quaes ellas podem passar.

D'entre esses axiomas aquelle a que nos referimos nesta occasião é o seguinte:

Quando duas quantidades são iguaes, ajuntando ou subtrahindo a cada uma dellas a mesma quantidade, os resultados são iguaes; e quando duas quantidades são desiguaes, ajuntando ou subtrahindo a cada uma a mesma quantidade, os resultados são desiguaes, e no mesmo sentido; ou mais simplesmente:

Uma igualdade ou desigualdade não se altera quando se ajunta, ou se subtrahe a ambos os membros a mesma quantidade.

Este axioma só tem applicação no sentido puramente arithmetico das palavras — *sommar* — e — *subtrahir* —, e não em sua accepção algebrica, a mais lata, a mais geral.

Parece que, a somma algebrica de duas ou mais quantidades dando effectivamente lugar a uma somma, ou a uma subtracção arithmetica, e o mesmo acontecendo á subtracção algebrica, a restricção que fizemos relativa a tomaremse, no axioma citado, as palavras — ajuntar — e — subtrahir — na accepção puramente arithmetica não tem cabimento algum.

E' porem facil de comprehender, por pouco que se reflicta, que esta restricção é indispensavel, como o vamos reconhecer.

41 Esta parte em que ampla e francamente estabelecemos os principios que redusem á maior evidencia a propusição n.º (14), a qual constitue a unica base solida e racional em que repousa inteira a theoria das quantidades negativas, considerada debaixo do ponto de vista novo no qual a apresentamos, e tambem o unico verdadeiro e racional que lhe é proprio, completa a solução do problema que nos proposemos resolver, e que consiste em — procurar através de toda a serie de falsas, absurdas e contradictorias proposições (que constituem a actual theoria das quantidades negativas), os principios falsos que lhes servem de base commum, e depois de descubertos e destruidos esses principios, procurar os verdadeiros e unicos que servem de base racional a essa mesma theoria.

Temos a convicção de que preenchemos o fim a que nos propusemos.

Passemos pois a examinar detalhadamente as diversas circumstancias em que se podem achar as igualdades e desigualdades acima referidas.

Comecemos pelas igualdades.

42 Supponhamos duas quantidades de signaes contrarios tendo o mesmo valor numerico ou absoluto. (*)

Todos os argumentos que temos apresentado, todas as applicações das quantidades positivas e negativas demonstrão que estas quantidades são iguaes.

(*) Não consideramos o caso de serem ambos os membros do mesmo signal, porque elle não offerece nenhuma duvida.

Representemos por «a» o valor numerico commum ás duas quantidades consideradas, e estabeleçamos a seguinte igualdade que resulta de sua comparação; teremos assim:

$$a = -a$$

Uma das objecções que se apresenta é a seguinte:

43 Se esta igualdade é verdadeira, ajuntando a ambos os seus membros a mesma quantidade, os resultados devem ser iguaes; o que não acontece, pois ajuntando-se «a» a ambos os membros, vem:

$$a + a = -a + a$$

ou

$$2a = o\ ,$$

igualdade absurda, logo é tambem absurda a igualdade

$$a = -a$$

44 Para destruir esta insignificante objecção, basta notar que, quando se escreveu «a» com o signal $+$ no 1° membro da igualdade acima, augmentou-se com effeito o 1° membro dessa quantidade; porem, quando se escreveu «a» com o signal $+$ no 2° membro, fez-se a somma algebrica de duas quantidades de signaes contrarios, que corresponde a subtrahir desse membro a quantidade «a». Ora se duas quantidades são iguaes, ajuntando a uma dellas qualquer quantidade, e subtrahindo da outra essa mesma quantidade, os resultados são evidentemente desiguaes, sendo o 1° maior que o 2°; portanto teremos:

$$2\,a > o$$

e não

$$2\,a = o\ ,$$

que é realmente um absurdo, assim como é falso e absurdo o argumento em que consiste a objecção. Não se fez alhi applicação do axioma citado, ou, para mais exactidão, fez-se má applicação desse axioma.

Suppondo-se que elle tinha lugar no sentido algebrico, o mais amplo da palavra — sommar —, sommou-se algebricamente a ambos os membros da igualdade a quantidade «a», isto é, (conforme a regra da addicção das quantidades algebricas), escreveu-se em ambos os membros esta quantidade com o signal +, e dahi resultou ter-se augmentado o 1° membro da quantidade «a», ao passo que diminuiu-se o 2° da mesma quantidade; e portanto não subsiste a igualdade, pois a transformação não está no espirito do enunciado daquelle axioma.

Já temos tido, e teremos ainda occasião de verificar que aquelle axioma só tem applicação no sentido puramente arithmetico que ligamos ás palavras — ajuntar — e — subtrahir; e não em toda a extensão de sua accepção algebrica.

45 Para generalisar mais o argumento que constitue a objecção apresentada, sommemos algebricamente a ambos os membros da igualdade a quantidade positiva A, e teremos os resultados, $A+a$, que corresponde ao 1° membro, e $A-a$, que corresponde ao 2°.

E' evidente, *qualquer que seja o valor de* A, que teremos sempre:

$$A+a > A-a,$$

e não

$$A+a = A-a$$

como se suppunha, e que é realmente absurdo, como se verifica á simples inspecção das duas quantidades comparadas.

46 Esta objecção caracterisada pela má applicação do axioma, é tambem a manifestação da idéa confusa que fazem aquelles que a appresentão, da natureza e propriedades das quantidades positivas e negativas, e até de um extranho

esquecimento dos mais evidentes e comesinhos principios d'algebra. Com effeito, decorre naturalmente da concepção clara das quantidades positivas e negativas, da simples acepção arithmetica que ligamos aos signaes + e — etc., que *a somma algebrica de duas quantidades só corresponde a uma verdadeira somma arithemetica, quando essas quantidades são do mesmo signal;* isto é, ambas positivas ou ambas negativas, sendo tambem a somma do mesmo signal das parcellas; dando lugar a uma subtracção arithmetica, quando ellas são de signaes contrarios. Assim para *sommar* a ambos os membros de uma igualdade qualquer ($a = -a$ por exemplo) uma quantidade qualquer A, é necessario escrever em cada membro esta quantidade com o proprio signal desse membro. Para evitar porem o esquecimento desta condição indispensavel á boa applicação deste ou de qualquer outro axioma, convem encerrar em um parenthesis o valor absoluto de cada membro, pondo fóra do parenthesis o signal desse membro, effectüando depois as operações sobre as quantidades encerradas nos parenthesis. Pode-se limitar esta modificação somente ao membro negativo, tendo sempre o cuidado de trocar os signaes a todos os seus termos e de por o signal — fóra do parenthesis que encerra estes termos com os signaes invertidos. Com esta precaução podem-se effectuar todas as transformações seguindo as regras geraes conhecidas para o caso em que ambos os membros da igualdade são do mesmo signal.

Assim por exemplo, pondo a igualdade $a = -a$ sob a forma

$$+(a) = -(a)$$

e ajuntando «a» a ambos os membros, vem:

$$+(a + a) = -(a + a)$$

ou

$$+2a = -2a,$$

o que é exacto.

Em geral ajuntando qualquer quantidade A, tem-se

$$+(A+a) = -(A+a)$$

—

47 A 2.ª objecção consiste em que, se a igualdade $a = -a$ é verdadeira, extrahindo as raizes do mesmo gráu a ambos os membros, os resultados devem ser iguaes, o que não tem lugar, pois que extrahindo-se a ráiz quadrada a ambos os membros, vem:

$$\sqrt{a} = \sqrt{-a}$$

igualdade absurda, pois tem-se uma quantidade real $\sqrt{a}$, igual a uma expressão imaginaria $\sqrt{-a}$; o que é impossivel, porque não póde haver comparação entre uma quantidade real e uma expressão imaginaria.

48 Em primeiro lugar, a circumstancia de não se poder fazer a comparação entre as expressões $\sqrt{a}$ e $\sqrt{-a}$, não é razão para que se não possão comparar entre si as quantidades reaes e racionaes «a» e «— a» submettidas aos radicaes, as quaes são sem duvida alguma susceptiveis de comparação.

49 Em segundo lugar, se este argumento fosse efficaz contra a igualdade acima, que não é, como deixaremos provado, forneceria tambem mais uma objecção contra a comparação das quantidades, segundo as proposições (1) e (2). Em virtude dessas proposições, a comparação das quantidades «a» e «— a», dá lugar á desigualdade:

$$a > -a,$$

a differença está somente em que, contra os mais comesinhos principios de logica, a comparação dá lugar, não a uma igualdade, que é a consequencia racional da concepção clara da theoria das quantidades negativas e de todas as suas applicações, mas á desigualdade acima, cujo absurdo já temos deixado na maior evidencia.

50 Extrahindo-se a raiz quadrada a ambos os membros daquella desigualdade, vem:

$$\text{(A)} \qquad \sqrt{a} > \sqrt{-a}$$

E assim o argumento apresentado acima contra a igualdade $a = -a$, tem tambem applicação contra a desigualdade (A), cujos membros são expressões, uma real, outra imaginaria, que não são com effeito susceptiveis de comparação.

Da desigualdade

$$a > -a\,,$$

tira-se outra não menos absurda

$$a^2 > a^2\,,$$

ou em geral

$$a^{2m} > a^{2m}\,,$$

elevando ao quadrado ou em geral a uma mesma potencia par ambos os seus membros.

No emtanto, elevando a essas mesmas potencias ambos os membros da igualdade

$$a = -a,$$

tem-se

$$a^2 = a^2$$

ou em geral

$$a^{2m} = a^{2m}\,,$$

o que é evidente

As ultimas desigualdades cujo absurdo é manifesto, nunca forão lembradas por occasião de estabelecerem-se as proposições (1) e (2), ou forão então cautelosamente esquecidas.

51 Nenhuma objecção séria se póde pois apresentar contra a igualdade acima; a 1.ª, como deixámos provado, provem da má applicação do axioma a que se recorreu; a 2.ª não ataca a igualdade em si mesma, mas a uma outra que della se deriva, e que pela natureza da operação effectuada, nada deixa concluir a respeito da exactidão da 1.ª A circumstancia de resultar da transformação empregada uma expressão imaginaria, verdadeiro symbolo algebrico a que não podemos ligar portanto nenhuma idéa de valor, sendo por isso impossivel a sua comparação, não só com a quantidade real $\sqrt{a}$, ou com outra qualquer, como tambem com qualquer expressão imaginaria differente, é bastante para destruir completamente a objecção que alem desta circumstancia, que lhe tira toda a importancia, não se refere á igualdade acima. Esta objecção se applicaria igualmente á desigualdade resultante da comparação das quantidades «a» e «— a» pelos principios estabelecidos na actual theoria das quantidades negativas, conforme o demonstrámos acima.

52 Se considerarmos a igualdade $a = -a$ em relação á significação concreta que se liga aos signaes $+$ e $-$, ella está de harmonia com o *principio de Descartes*, e com todas as applicações das quantidades positivas e negativas, como o deixámos provado nos n.os (30, 31, 33, etc.); o que não acontece com a actual e antiga theoria das quantidades negativas, absurda não só em seus principios fundamentaes e em todo o seu ponto de vista abstracto, como em relação a todas as suas opplicações, (conforme tambem ficou demonstrado nos numeros 7, 8 e de 21 a 28.)

Poderiamos tirar ainda argumentos contra a 2ª objecção apresentada, baseando-nos no *pouco profundo conhecimento* que se tem ainda das expressões imaginarias, mas não o faremos; porque isso nos forçaria a longos desenvolvimentos necessarios para apresentarmos, em toda a sua extensão actual, a theoria das expressões imagninarias, considerando taes expressões quer como raizes das equações e problemas, quer em relação ás diversas operações a que podem ser submettidas, como simples expressões algebricas, quer finalmente em relação ás suas applicações, e á significação concreta de que ellas são susceptiveis; desviando-nos assim muito da theoria, que constitue o nosso assumpto principal.

Alem disso, pouca ou nenhuma utilidade resultaria para o nosso objecto; pois a objecção, por sua natureza, é independente da significação, abstracta ou concreta, das quantidades positivas e negativas e das regras seguidas na comparação dessas quantidades. Com effeito, qualquer que seja a significação abstracta ou concreta que convenha ás quantidades negativas, quaesquer que sejão os principios estabelecidos para compa:al-as entre si e com as positivas, o *facto analytico* de um radical de grão par affectando uma quantidade negativa, indica sempre, conforme os principios estabelecidos no estado actual da sciencia, uma operação impraticavel, e constitue sempre um verdadeiro symbolo algebrico, a que não podemos ligar nenhuma idéa de valor.

Observações. Quando se enunciar o resultado da comparação de duas grandezas quaesquer, convirá ajuntar os signaes de que essas grandezas são affectas, dizendo-se: iguaes e positivas, iguaes e negativas, ou iguaes e de signaes contrarios; este accrescimo de palavras é necessario para deixar uma idéa completa das grandezas consideradas. Não se deve porem concluir do que fica exposto sobre a comparação das quantidades que, sendo iguaes os valores de duas quantidades, uma positiva, outra negativa ellas se possão reciprocamente substituir nas equações, ou nas expressões algebricas. Esta observação necessaria, de inteira harmonia com as idéas que temos apresentado, dimana logicamente dos dois aspectos distinctos debaixo dos quaes se podem considerar as grandezas, quer em si mesmas, quer em relação ás suas expressões mathematicas. Os signaes $+$ e $-$ que affectão os valores das grandezas, indicando a opposição de sentidos em que ellas podem existir, correspondem tambem a duas operações distinctas e inversas uma da outra; portanto a substituição de uma quantidade por outra igual, mas de signal contrario, n'uma equação, ou n'uma expressão algebrica, altera necessariamente a equação ou a expressão em que se faz a substituição, pois, a inversão do signal da quantidade corresponde a inverter a operação pela qual esta quantidade se achava ligada ás outras na composição da equação, ou da expressão considerada. Assim, se na expressão $A+a$, em lugar de «$+a$» substituirmos «$-a$» o que dá $A-a$, temos evidentemente um resultado differente do 1.º, pois são differentes as operações pelas quaes as quantidades A e «a» se achão ligadas: a 1.ª sendo a somma, e a 2.ª a differença dessas duas quantidades.

Ha porem um unico caso em que esta substituição se póde fazer sem o inconveniente apontado acima; é aquelle em que a quantidade entra na equação ou na expressão sómente com expoentes pares, o que é uma consequencia da regra dos signaes na formação das potencias.

Passemos agora ás desigualdades

53 Entre as diversas transformações que se podem effectuar n'uma desigualdade consideraremos aqui somente aquellas que se fundão no axioma citado acima n.º (42), porque é da má applicação que se faz delle que se tem tirado argumentos a favor da comparação das quantidades segundo as proposições (1) e (2); e portanto contrarios á maneira, unica verdadeira, pela qual as quantidades se comparão entre si, que é por seus valores absolutos, quaesquer que sejão os signaes respectivos.

Supponhamos uma desigualdade a cujos membros se somma algebricamente uma certa quantidade (*)

Examinemos os diversos casos que se podem dar.

1.º Em relação ao valor da quantidade, este valor pode ser maior, ou menor que o de cada um dos membros da desigualdade, ou comprehendido entre elles.

2.º Quanto ao signal dessa quantidade, se os membros da desigualdade forem do mesmo signal, ella poderá ser do mesmo signal que esses membros, ou de signal contrario; se os membros da desigualdade forem de signaes contrarios, será do mesmo signal que um delles e de signal contrario ao do outro.

Vamos agora examinar detalhadamente cada um desses casos.

54 Comecemos por aquelle em que os membros da desigualdade são do mesmo signal, e que este é o signal —, e que a quantidade que se ajunta é de signal contrario, isto é, positiva.

O valor da quantidade póde ser, como dissemos, menor que ambos os membros, maior que cada um, ou comprehendido entre elles.

No 1.º caso, conforme a simples regra de reducção, temse de subtrahir de cada membro a quantidade considerada, e dar ao resto o signal desse membro; assim pois a desigualdade não se altera, pois que a transformação consiste em subtrahir de ambos os membros a mesma quantidade,

No 2.º, como a quantidade é maior que cada um dos membros e de signal +, reduz-se a operação não a *ajuntar*, nem a *subtrahir* a ambos os membros a mesma quantidade,

(*) Nesta desigualdade, como em todas as que considerarmos daqui por diante supporemos a comparação feita segundo a regra n.º 14, ou n.º 39; o maior membro será sempre representado pela quantidade que tiver maior valor absoluto, quaesquer que sejão os signaes.

mas em subtrahir dessa quantidade cada um desses membros; e portanto a desigualdade resultante tem lugar, mas em sentido opposto ao primitivo, pois é evidente que, da mesma quantidade subtrahindo-se quantidades desiguaes, os restos são desiguaes, mas em sentidos oppostos: ao maior subtrahendo correspondendo sempre menor resto; e reciprocamente.

Neste caso pois, ajuntando-se algebricamente a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade, não se faz applicação alguma do axioma citado; isto é, não se ajunta, nem se subtrahe a ambos os membros a mesma quantidade.

No 3.º como a quantidade está comprehendida entre os dois membros, a transformação effectuada corresponde a subtrahir do maior membro a quantidade considerada, e a subtrahir dessa quantidade o menor membro. Neste caso tambem, ajuntando *algebricamente* a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade, não se faz absolutamente applicação alguma do axioma citado, nem de qualquer outro d'entre aquelles em que se fundão as diversas transformações que, sem alteral-a, se podem effectuar n'uma desigualdade. Com effeito, em consequencia da operação acima, a desigualdade pode existir no mesmo sentido, em sentido contrario, ou transformar-se n'uma igualdade, conforme o valor da quantidade.

55 Estas tres circumstancias que se podem dar nesta transformação, correspondem a tres circumstancias em que se póde achar tambem o valor da quantidade sommada.

O valor desta quantidade, sendo comprehendido entre os valores dos dois membros, póde ser igual ao menor dos membros mais a semidifferença arithmetica entre elles, menor que este numero, ou maior do que elle.

No 1º caso, a desigualdade transforma-se n'uma igualdade; no 2.º, existe no mesmo sentido; no 3.º, muda de sentido.

Para o demonstrarmos bastar-nos-ha notar que o maior membro, ou em geral a maior de duas quantidades, é sempre igual á menor mais a differença entre as duas.

Assim pois, no 3.º caso em questão, a transformação consistindo em subtrahir do maior membro a quantidade que se ajuntou algebricamente á desigualdade, e em subtrahir dessa quantidade o menor, é claro que, se a quantidade for igual ao menor membro mais a semidifferença entre os dois, as duas differenças acima serão iguaes, sendo cada uma a semidifferença entre os dois membros da desigualdade; logo, quando os membros de uma desigualdade são do mesmo signal e a quantidade sommada *algebricamente* é de signal contrario, e igual ao menor membro mais a semidifferença entre os dois, a desigualdade converte-se n'uma igualdade, como queriamos demonstrar.

Tomando este 1.º caso para base ser-nos-ha facil demonstrar cada um dos outros,

Com effeito, se a quantidade for menor que o menor membro mais a semidifferença entre os dois, como ella é subtrahendo na 1.ª subtracção, e minuendo na 2,ª, o 1.º resto será maior que o 2.º; portanto a desigualdade terá lugar no mesmo sentido que a primitiva; porem, se a quantidade for maior que o menor dos membros mais a semidifferença entre os dois, então a primeira differença será menor que a segunda; e portanto a desigualdade mudará de sentido.

56 Se, os membros da desigualdade fossem positivos, e a quantidade sommada, negativa, dar-se-hião as mesmas circumstancias, que para o caso inverso que examinámos.

Em geral, sempre que os membros de uma desigualdade forem do mesmo signal, e a quantidade sommada algebricamente for de signal contrario, dar-se-hão as diversas circumstancias que mencionámos acima; o mesmo acontecerá se a quantidade, sendo de mesmo signal que os membros da desigualdade, for subtrahida *algebricamente*.

57 Supponhamos agora uma desigualdade cujos membros são de signaes contrarios, e que se somma *algebricamente* a seus membros uma quantidade de signal contrario ao maior delles.

Observação. Cumpre attender bem, sempre que os membros de uma desigualdade são de signaes contrarios, ajuntando-se, ou subtrahindo-se, *algebricamente* a ambos os membros a mesma quantidade, não se faz *absolutamente* applicação alguma do axioma que se suppoem empregar; isto é, não se *somma*, nem se *subtrahe* effectivamente a ambos os membros a mesma quantidade; a transformação consiste sempre neste caso em sommar arithmeticamente a quantidade a um dos membros da desigualdade, e a praticar no outro membro uma subtracção arithmetica, tirando-se da quantidade esse membro, ou tirando delle a quantidade, conforme os valores que tiverem. Dahi resultão tres circumstancias que se podem dar: a desigualdade póde converter-se n'uma igualdade; póde existir no mesmo sentido; ou mudar de sentido.

Se a quantidade for igual á semidifferença arithmetica entre os dois membros, a desigualdade converter-se-ha n'uma igualdade; se for maior que esta semidifferença, mudará de sentido; e se for menor subsistirá no mesmo sentido.

E' facil dar a razão destes factos.

Quando os membros da desigualdade são de signaes contrarios, e a quantidade sommada *algebricamente* é de signal contrario ao maior, e igual em seu valor absoluto á semidifferença arithmetica entre os dois membros, consistindo a transformação em subtrahir do maior membro a quantidade considerada, e em ajuntar essa quantidade ao menor, os dois resultados são evidentemente iguaes, pois cada um é igual ao menor mais a semidifferença arithmetica entre os dois: logo, como dissemos a desigualdade transforma-se n'uma igualdade.

Tomando-se este primeiro caso para base, é facil a demonstração de cada um dos outros dois.

Dar-se-hão as mesmas circumstancias acima, quando se subtrahir *algebricamente* a uma desigualdade, cujos membros são de signaes contrarios, uma quantidade do mesmo signal que o maior desses membros.

59 Supponhamos agora que os membros da desigualdade são de signaes contrarios, e a quantidade, sommada *algebricamente*, do mesmo signal que o maior.

Neste caso, qualquer que seja o valor absoluto da quantidade, a desigualdade transformada tem sempre lugar no mesmo sentido que a primitiva; não porque o axioma tenha applicação no sentido unico em que deve ser tomado, mas porque a transformação consiste então em ajuntar arithmeticamente a quantidade ao maior dos membros, e em praticar uma subtracção arithmetica no menor, subtrahindo-se da quantidade esse membro, ou subtrahindo-se desse membro a quantidade, conforme ella for maior ou menor que o menor membro.

O mesmo acontecerá se subtrahirmos *algebricamente* a uma desigualdade, cujos membros são de signaes contrarios, uma quantidade de signal contrario ao maior desses membros.

São estes os preceitos aos quaes cumpre attender bem afim de evitarem-se os erros e os absurdos grosseiros resultantes da má applicação do axioma n.° (40).

60 Seria realmente de immensa vantagem que as regras seguidas para as diversas transformações que se podem ope-

rar nas equações, fossem igualmente applicaveis a todas as igualdades e desigualdades, mas infelizmente assim não acontece; o modo de formação das equações, ou para melhor dizer, o preceito geralmente seguido para o estabelecimento das equações de um problema qualquer, conduz sempre a igualar entre si duas expressões algebricas de *uma mesma quantidade*; resultando dahi que, os membros da equação são sempre affectos dos mesmos signaes; e portanto tem sempre applicação o axioma do qual temos feito menção especial; pois sommando-se ou subtrahindo-se a ambos os membros uma mesma quantidade, isto é, escrevendo-se em ambos os membros essa quantidade com o seu proprio signal, ou com o signal trocado, a operação reduzir-se-ha sempre a sommar arithmeticamente a ambos a mesma quantidade, ou a effectuar uma subtracção arithmetica que consistirá em subtrahir de cada membro essa quantidade, ou em subtrahir dessa quantidade cada um dos membros; portanto os resultados serão sempre iguaes: o axioma terá sempre inteira applicação.

Não se dá porem o mesmo, como temos demonstrado, com as igualdades ou desigualdades, cujos membros, seguindo-se o unico modo racional de comparar as quantidades, podem ser do mesmo signal, ou de signaes contrarios.

61 Generalisando a observação do n.º 46, diremos:

1.º Para *sommar* a ambos os membros de uma igualdade ou desigualdade a mesma quantidade, é necessario escrever em cada membro essa quantidade com o proprio signal desse membro.

2.º Para *subtrahir* de ambos os membros de uma igualdade ou desigualdade a mesma quantidade, é necessario escrever em cada membro essa quantidade com o signal contrario ao desse membro.

Observação. E' porem necessario, neste ultimo caso, que a quantidade seja menor que ambos os membros, ou igual ao menor.

62 Quando, em virtude de qualquer transformação, se verificar que não tem lugar nenhum dos dois preceitos acima indicados, seguir-se-ha que o axioma n.° (40) não teve applicação; e então se recorrerá aos preceitos estabelecidos nos n.os (54 a 59).

Não é porem necessario reter na memoria todos os casos particulares que se podem dar e que temos considerado: quando, em consequencia de qualquer transformação, se tiver de escrever com o signal $+$, ou com o signal $-$, uma dada quantidade em ambos os membros de uma igualdade ou designaldade, basta ter-se uma idéa delles para saber-se tratando-se de uma igualdade, se ella subsiste, ou se se transforma n'uma desigualdade; tratando-se de uma desigualdade, se ella converte-se n'uma igualdade, se muda de sentido, ou se subsiste no mesmo sentido.

63 Uma igualdade ou desigualdade não se altera com effeito, quando se *somma*, ou se *subtrahe* a ambos os membros a mesma quantidade; não se deve porem concluir que se tenha feito applicação deste axioma quando se escrever em ambos os seus membros uma mesma quantidade com o signal $(+)$, ou com o signal $(-)$, conforme temos demonstrado.

As palavras — *sommar* — e — *subtrahir* — não tem em Algebra, como é sabido, a mesma accepção que na arithmetica; a palavra — sommar — em arithmetica dá sempre idéa de augmento; assim como a palavra — subtrahir — trás sempre a idéa de diminuição. A somma arithmetica de duas ou mais quantidades compõe-se sempre de tantas unidadas e partes da unidade, quantas existem em todas as parcellas. Somma-se a uma quantidade uma outra qualquer, quando se reune a essa quantidade cada uma das unidades e partes da unidade de que a outra se compõe; não acontece porem o mesmo com a somma algebrica, que pode dar lugar a uma somma, ou a uma subtracção arithmetica, coforme os signaes das quantidades.

Mais uma vez lembramos a observação abaixo, muito conhecida, é verdade, mas que no emtanto tem sido sempre despresada, tratando-se dos principios das quantidades negativas:

Para que a somma algebrica corresponda a uma verdadeira somma arithmetica, é necessario que as quantidades sejão affectas dos mesmos signaes, isto é, compostas de unidades tomadas no mesmo sentido; o mesmo se deve entender a respeito da subtracção algebrica.

64 *Observação.* Não tratamos especialmente dos axiomas em que se fundão outras transformações que se podem effectuar nas igualdades ou desigualdades, porque sobre elles não ha nenhuma restricção a fazer: todos tem sempre applicação.

Assim, qualquer que seja a igualdade ou desigualdade considerada, pode-se sempre, *sem alteral-a*, multiplicar ou dividir ambos os membros por uma mesma quantidade *positiva* ou *negativa;* elevar ambos os membros a uma potencia, *par ou impar*, etc.; pois é evidente que — sendo iguaes os valores absolutos de duas quantidades, sel-o-hão tambem os de seus productos, ou de seus quocientes por um mesmo numero, os de suas potencias ou de suas raizes do mesmo gráo, etc.

65 Quanto á circumstancia relativa aos radicaes de gráo par mencionada no n.º 48, ella nenhuma objecção fornece contra a comparação natural das quantidades por seus valores absolutos; nenhuma condição, a não ser proveniente de alguma questão absurda, pode estabelecer a neccssidade de extrahir raizes de gráo par de uma quantidade affecta do signal (—).

Os principios estabelecidos na actual theoria das quantidades negativas, para servirem de base ás transformações das desigualdades, taes como : — *multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma desigualdade por uma quantidade negativa, a desigualdade muda de sentido ; elevando-se ambos os seus membros a uma potencia par, a desigualdade subsiste no mesmo sentido, se elles são positivos, e muda de sentido, se elles são negativos, ou um positivo e outro negativo, etc.* ; não tem nenhuma razão de ser ; são novos e lastimaveis erros creados, com os quaes, em vão se pretende destruir os absurdos que são consequencias immediatas dos erros commettidos nas falsas proposições (1) e (2).

---

66 Póde-se affirmar que a theoria das quantidades negativas está actualmente mais atrasada do que na época em que Descartes estabeleceu pela primeira vez o theorema relativo á importante propriedade dos signaes (+) e (—) de exprimirem a opposição de sentidos das grandezas nas relações do abstracto para o concreto.

Este simples, mas importante, theorema lançou então nova e immensa luz sobre aquella theoria, estabelecendo do modo o mais claro os dois pontos de vista distinctos em que devera ser considerada, e dando-lhe por essa occasião a mais extensa e tambem a mais fecunda de todas as applicações que ella tem recebido.

67 Bastão algumas ligeiras considerações para bem comprehender-mos toda a importancia deste theorema, não só em relação á theoria abstracta das quantidades negativas, sobre a qual ella exerce uma influencia real, e á natureza e extensão de suas applicações, mas até em relação á opportunidade de sua descoberta.

O feliz pensamento que levou Descartes a applicar a Algebra á Geometria, talvez com o fim exclusivo de aperfeiçoar as theorias geometricas, procurando crear methodos geraes applicaveis a todas as figuras convenientemente definidas, não produziu somente esse grande resultado em relação ás questões de grandeza, unicas que parecião susceptiveis da applicação da analyse mathematica ; elevou-se tambem ás questões de fórma e de posição, até então fóra do alcance da antiga Geometria ; exercendo ao mesmo tempo a mais benefica influencia sobre as mais importantes theorias algebricas, já aperfeiçoando-as, já marcando-lhes um novo e importante destino, que tem, alem de tudo, a vantagem de attenuar a natural repugnancia do espirito ás abstracções muito longas e indeterminadas.

68 Estes caracteres dão apenas uma succinta e vaga idéa das immensas vantagens proprias á vasta e fecunda aliança contrahida entre as concepções geometricas e as concepções analyticas, que constitue e caracterisa a nova Geometria fundada por Descartes a — *Geometria analytica* —.

Não entraremos porem na apreciação da extrema importancia propria a este vasto e fecundo ramo da sciencia Mathematica ; limitar-nos-hemos, em attenção ao fim que temos em vista, a algumas das difficuldades encontradas para a sua instituição definitiva.

Os fenomenos geometricos dividindo-se em fenomenos de fórma, de grandeza, e de posição, e sendo estas tres ordens de fenomenos naturalmente independentes entre si ; parece que a Geometria devia dividir-se tambem em tres partes, ou em tres sciencias distinctas e independentes ; comprehendendo cada uma o estudo das questões relativas a cada uma dessas ordens.

Ainda quando fosse isso possivel, a falta de ligação entre esses ramos concernentes ao estudo da extensão, séde commum das tres cathegorias de fenomenos considerados, era um grave inconveniente, não só em relação ao proprio estudo desses fenomenos; mas tambem em ralação á complicação que produsiria no estudo dos fenomenos mechanicos, thermologicos, etc., naturalmente dependentes dos fenomenos geometricos.

Essa circumstancia faria uma excepção á systematisação e encadeamento, que são sempre a consequencia de uma bem dirigida applicação da analyse mathematica ao estudo de quaesquer fenomenos, especialmente quando, como no caso actual, elles se referem a uma fonte commum, se o immortal fundador da nova instituição geometrica a não fizesse desapparecer, sendo levado por suas judiciosas e profundas meditações a subordinar de um modo admiravel aos fenomenos de posição todos os outros fenomenos da extensão.

Pelos systemas chamados de coordenados, imaginados por Descartes, pôde elle reduzir a questão de numeros as questões relativas á posição, que envolvendo as de forma e de grandeza, dependião por sua vez da determinação da posição dos pontos. Por occasião porem de realisar o novo plano de estudos da Geometria, apresentou-se uma difficuldade preliminar, mas de importancia real. Os simples valores das coordenadas de um ponto não bastavão á sua completa determinação, correspondendo em geral a quatro posições differentes que elle podia occupar em um plano, e a oito tratando-se de pontos do espaço.

Comprehende-se quanto, esta indeterminação na simples posição de um ponto, deve complicar extremamente a questão complexa relativa a determinação das formas geometricas, mesmo as mais simples.

Descartes teria sido obrigado a renunciar o emprego das coordenadas, unico meio que permittia a transformação indispensavel das questões de posição a simples questões de numeros; e a abandonar portanto o fecundo plano que tinha concebido, se a descoberta da propriedade dos signaes $+$ e

—, de exprimirem a opposição de sentidos das grandezas, não fizesse completamente desapparecer a difficuldade preliminar relativa á determinação dos pontos.

Os signaes das coordenadas de um ponto, juntos aos valores respectivos, distinguem e fixão de um modo preciso a posição desse ponto.

Esta simples descuberta, destruindo o entrave á realisação do pensamento de Descartes, deu-lhe immediatamente o mais amplo desenvolvimento, encontrando tambem ahi a sua mais brilhante applicação.

69 Demos uma idéa da importancia, que se deve ligar ao theorema ou principio de Descartes. Comprehende-se tambem, pelo que ficou dito, a influencia que elle devia exercer sobre a theoria das quantidades negativas. No emtanto assim não aconteceu.

Os principios falsos e contraditorios, já enraizados, que constituião e constituem ainda a actual e antiquissima theoria das quantidades negativas, a demasiada influencia attribuida aos signaes, as considerações sofisticas sem importancia, por tal modo preponderarão que impedirão a duravel e benefica influencia que a descoberta de Descartes devia exercer sobre essa theoria.

As mal fundadas e vãs tentativas feitas para estabelecer e demonstrar *á priori* o theorema que Descartes apresentou como um simples resultado de suas bem dirigidas observações, o desejo exagerado de abranger em um só ponto de vista abstracto os dois pontos de vista distinctos, abstracto e concreto relativos á theoria das quantidades negativas, estabelecendo uma mistura heterogenea entre as idéas de valor e as idéas de qualidade, deixarão esta theoria ainda em maior confusão do que ella já apresentava quando Descartes enunciou o seu importante theorema sobre a propriedade dos signaes + e —.

70 A mysteriosa e intima união infelizmente imaginada entre os signaes e os valores das quantidades tem sido pois um dos maiores obstaculos levantados contra o estabelecimento racional da theoria das quantidades negativas, tão funestamente desviada até hoje de seu verdadeiro caracter logico, embora elle seja solemnemente manifestado em todas questões nas quaes a intervenção das quantidades negativas é uma necessidade indispensavel.

As continuas e variadissimas applicações dessas quantidades, mesmo as mais importantes applicações geometricas e mechanicas, que põem em relevo a admiravel propriedade dos signaes + e —, descuberta por Descartes, não tem sido sufficientes para deixarem nos espiritos, profundamente imbuidos da falsa doutrina dominante, a feliz distincção logica, e alem disso necessaria, entre os dois pontos de vista distinctos expontaneamente manifestados pela natureza e usos das quantidades positivas e negativas.

Nada mais precisamos accrescentar ao que temos apresentado em todo este trabalho, para deixarmos completamente estabelecida toda a theoria das quantidades negativas em um plano uniforme e racional.

Bem estabelecida esta theoria, ella apresenta sempre duas partes perfeitamente distinctas: uma abstracta; outra concreta.

A theoria abstracta das quantidades positivas e negativas como mostrámos, nenhuma difficuldade séria apresenta; ella póde ser completamente estabelecida em um só plano geral, quer se considere aquellas quantidades em relação á sua significação e usos; quer em relação aos principios que regem a sua comparação, e á theoria das igualdades e desigualdades que della resultão; quer finalmente em relação ás diversas operações a que podem ser submettidas.

Quanto á parte concreta desta theoria, ella consiste simplesmente no principio ou theorema de Descartes; isto é, na propriedade dos signaes + e — de exprimirem a opposição de sentidos das grandezas.

Na demonstração geral deste theorema, que estabelece uma importante relação entre o concreto e o abstracto, consiste porem toda a difficuldade desta parte da theoria.

Todas as tentativas feitas até hoje, para estabelecer-se aquella demonstração, tem sido sem resultado.

A difficuldade consiste essencialmente na imperfeição actual da sciencia mathematica, que não permitte ao nosso espirito elevar-se tão alto, quanto o exigem a vastidão e importancia deste theorema, para estabelecerem-se relações directas entre o concreto e o abstracto em mathematicas, isto é, entre as duas grandes secções em que esta sciencia se divide.

No emtanto, as suas numerosas, variadas e indispensaveis applicações nenhuma duvida deixão no espirito sobre a exactidão e importancia de um tal principio.

Uma das mais importantes applicações que se faz deste principio e que já temos mencionado, consiste no seguinte :

72 Obtidas as equações que traduzem analyticamente as relações que existem entre as grandezas consideradas em qualquer questão, se estas grandezas vierem a mudar de sentido, não é necessario recomeçar os calculos, muitas vezes longos e trabalhosos, para obterem-se as equações que exprimem o novo estado da questão ; é bastante, para esse fim, mudar nas equações estabelecidas, os signaes das grandezas que experimentarão a mudança de sentido.

As equações, assim modificadas, coincidem sempre com as que se obterião recomeçando os calculos para resolver a questão no novo estado caracterisado pela mudança de sentido das grandezas.

Comprehendem-se bem as immensas vantagens que se tirão desta propriedade dos signaes + e —, caracterisadas, não só pela grande economia de trabalho que se deriva de sua applicação; como tambem pela circumstancia de dar ás expressões mathematicas uma immensa extensão e a mais ampla generalidade.

73 Está contida no principio acima a interpretação que se deve dar ás soluções negativas nas diversas equações e problemas que a Algebra considera; taes soluções indicão sempre que as grandezas correspondentes, em lugar de serem tomadas no sentido em que o forão por occasião de estabelecerem-se as equações, devem ser tomadas em sentido contrario; pode-se, querendo-se, fazer a correcção, mudando nas equações os signaes dessas grandezas; e as novas equações darão para ellas os mesmos valores, porem positivos.

Para terminarmos este trabalho cumpre-nos fazer ainda uma observação.

74 Parece que para completarmos a theoria abstracta das quantidades negativas, tornava-se necessario tratarmos das diversas operações que sobre estas quantidades se podem effectuar; mas não o fizemos porque em o nosso modo de entender essa questão se acha completamente resolvida. Não nos referimos ás diversas pretendidas demonstrações directas, que se tem apresentado das regras para effectuarem-se essas operações; porque:

1.º Algumas dessas demonstrações, fundando-se em applicações geometricas, ou mechanicas das quantidades positivas e negativas, ou na significação concreta dos signaes + e —, tem o grave inconveniente de estabelecer uma mistura heterogenea entre o abstracto e o concreto, que só produz confusão sem nenhum outro resultado.

2.º Porque outras são verdadeiras subtilezas sem merito, que quando muito só podem servir para illudir os principiantes.

Referimo-nos ás regras geraes seguidas para effectuarem-se as operações sobre as quantidades algebricas, que comprehendem implicitamente as que são especiaes ás quantidades positivas e negativas, e a razão de ser dessas regras.

Ha muita exageração sobre a difficuldade que se suppõem existir no estabelecimento destas regras, especialmente tratando-se da dos signaes na multiplicação. O desejo de estabelecer *á priori* esta regra, e a especie de mysterio que se encontra em ser positivo o producto de dois factores negativos, são ainda consequencias da exagerada influencia attribuida aos signaes e dos principios falsos que regem a theoria das quantidades negativas.

Não encontramos a menor repugnancia em admittir aquelle facto analytico, tanto mais, quanto o nosso espirito o obtem como uma consequencia logica, seguindo o encadeamento algebrico que o deriva dos elementos da operação.

75 Por pouco que se reflicta sobre a regra dos signaes na multiplicação, vê-se que a difficuldade que existe para o caso de dois factores negativos é a mesma para aquelle em que elles são positivos, ou de signaes contrarios. Com effeito no caso em que ambos os factores são positivos, toma-se como evidente, ou ao menos como facilimo de demonstrar-se que, o producto é positivo, isto é, affecto tambem do signal $+$; notemos porem que todos os raciocinios feitos por aquelles que tem tentado a demonstração directa desta regra, são inteiramente os mesmos que farião tratando simplesmente de valores absolutos: o facto de tomar-se esse producto com o signal $+$, como o deixa ver a mais ligeira observação, não dimana logicamente de uma combinação effectiva dos signaes na deducção da regra, mas da faculdade puramente algebrica que se tem, de poder affectar, ou considerar affecto do signal $+$ qualquer valor absoluto considerado isoladamente.

OBSERVAÇÃO FINAL.

A adopção do plano racional em que considerámos a theoria geral das quantidades negativas nenhuma alteração produz nos verdadeiros principios da sciencia mathematica, por mais extensas que sejão as applicações das quantidades negativas, e por mais enraisada que esteja a antiga theoria em todo o corpo desta sciencia.

Não ha na theoria que apresentamos principio algum que o espirito repugne acceitar; todos os principios que lhe servem de base são dos mais simples e conhecidos d'entre aquelles que constituem a sciencia mathematica; estão todos de inteira harmonia entre si, e com as diversas applicações das quantidades positivas e negativas; mesmo as regras que apresentámos para o estabelecimento e transformações das igualdades e desigualdades entre as quantidades positivas e negativas, embora em profunda opposição necessaria com as que são seguidas, para o mesmo fim, resultantes das falsas proposições (1) e (2), nenhuma alteração produzem sobre as regras geraes seguidas para o estabelecimento, e resolução das equações, assumpto capital d'Algebra, nem sobre as diversas sortes de transformações que sobre ellas se podem effectuar; como se deduz do que dissemos no n.º (60).

A theoria das quantidades negativas, que apresentamos nenhuma perturbação pois produzindo sobre os verdadeiros e sãos principios estabelecidos na sciencia, apresenta porem alem de outras, a vantagem de destruir completamente todos os erros, todos os principios falsos, absurdos e contraditorios da actual e falsa theoria dominante.

FIM.