AGORA —Papeles de Filosofía— (1996), 15/2: 63-70 *ISSN 0211-6642*

¿QUÉ SON LAS CONJUNCIONES Y DISYUNCIONES BORROSAS?

Claudi Alsina
Universitat Oberta de Catalunya

Resumen

En este artículo se presenta una aproximación intuitiva a las conjunciones y disyunciones propias de la Lógica Borrosa, con especial referencia a sus modelizaciones matemáticas y a sus interpretaciones.

Palabras clave: Conjunciones, disyunciones, lógica borrosa.

Abstract

In this paper we present an intuitive approacch to conjunctions and disjunctions used in Fuzzy Logic and we focus our presentation on the mathematical models related to these operations as well as to their interpretations.

Key words: Conjunctions, disjunctions, fuzzy logic.

1. Introducción

En este pequeño artículo quisiéramos aportar unas reflexiones sobre las conjunciones y las disyunciones normalmente utilizadas en Lógica Borrosa, intentando encuadrar las mismas respecto de lo que son las conjunciones o disyunciones de proposiciones o conjuntos y el tratamiento que la probabilidad y la estadística dan a dichas operaciones.

Este tema, que es de crucial importancia en el estudio de las estructuras borrosas al extenderse la omnipresente estructura del álgebra de Boole, ha recibido especial atención en la literatura matemática desde la introducción del concepto de conjunto borroso realizada por Zadeh en 1965.

2. Sobre conjunciones, disyunciones y booleanidad

La Lógica clásica considera proposiciones diáfanas susceptibles de ser declaradas «verdaderas» o «falsas». «El número pi es mayor que tres» o «la distancia de Madrid a Barcelona no llega a 100 Km.» son dos ejemplos de proposiciones perfectamente estructuradas, siendo clara la veracidad de la primera y la rotunda falsedad de la segunda. En este contexto, las operaciones básicas de conjunción («p y q») y de disyunción («p ó q») generan nuevas

 Aceptación: XII/1996

proposiciones cuya verdad o falsedad depende totalmente de la correspondiente verdad o falsedad de las proposiciones generadoras p, q. Uniendo a la disyunción y a la conjunción la posibilidad de la negación obtenemos universos de proposiciones que responden a la denominada estructura de álgebra de Boole (Trillas, Alsina y Terricabres, 1995).

Cuando un universo de proposiciones se hace corresponder con una familia de *conjuntos*, asignando a cada proposición el conjunto de elementos (de un conjunto referencial dado) que satisfacen a dicha proposición, entonces nace un perfecto isomorfismo en el cual la conjunción de proposiciones se identifica con la *intersección* de conjuntos, la disyunción con la *reunión* y la negación con la *complementariedad*. En esta feliz identificación lógico-conjuntista la estructura booleana permanece inalterada.

Quizás vale la pena comentar en este punto que las claras clasificaciones booleanas que conceptualmente son ideales, pueden presentar, en los procesos de aplicación, notables dificultades.

Cuando de una visión generalista se pasa a una visión concreta, pronto se descubre que el dictamen de la veracidad o la falsedad (o la construcción de los conjuntos correspondientes) puede requerir artillerías sofisticadas, habilidades muy especiales y largas investigaciones. El concepto de número primo es muy claro, pero el dictamen sobre si un número grande es primo o no, no es, en absoluto, un problema trivial. Esta situación es remarcable: en nada tiene que ver la sencillez de un enunciado con la dificultad de su concreción o demostración. Así pues, cuando uno se interesa por las aplicaciones prácticas y precisa ir más allá de las definiciones formales o las descripciones lingüísticas claras, e interesa, por ejemplo, enumerar los elementos de un conjunto, las dificultades prácticas pueden ser grandes. El conjunto de los españoles que acudieron a visitar la Expo de Sevilla parece un conjunto bien definido aunque sería poco creíble poder hacer un listado de sus componentes. La lógica matemática y la teoría de conjuntos no resuelven, pues, muchos de los problemas prácticos que de sus consideraciones se derivan.

3. Sobre conjunciones y disyunciones probabilísticas

Al considerar un álgebra de Boole de sucesos A, B, ... sobre los cuales sea factible asignar probabilidades, lo que interesará desde un punto de vista probabilístico (Carnap, 1950) no es la descripción conjuntista de los sucesos «$A \cap B$» o «$A \cup B$» sino el cálculo de la probabilidad de dichos eventos. La propia axiomática fundacional de A. N. Kolmogorov sobre la teoría de la probabilidad toma como punto de partida la relación entre las probabilidades de la disyunción y la conjunción de sucesos:

$$P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

El jugador de ruleta que apuesta a la vez a los números 7, 13 y 19 sabe que la probabilidad de ganar es muy baja y, por tanto, que el premio posible será elevado, lo cual aumenta enormemente su extraño interés ludópata. Así pues la probabilidad, como toda medida, resuelve el problema de evaluar disyunciones y conjunciones mediante fórmulas aditivas. *Más que la estructura booleana, que se presupone, interesa la valoración de la aleatoriedad.*

4. Sobre conjunciones y disyunciones estadísticas

Consideremos, por ejemplo, el «conjunto de españoles que el día 1 de enero de 1995 tenían menos de 25 años y cuya altura no superaba 160 cm». Esta conjunción booleana merecería una evaluación estadística. De acuerdo con los principios elementales de la estadística (y actuando posiblemente sobre una muestra) se considerarían sobre la población E de españoles vivos el 1 de enero de 1995 las variables estadísticas X, Y correspondientes, respectivamente, a edad en años y a altura en centímetros. Recogidos los datos de X e Y, seguramente en forma de tablas o listas, se podría proceder a construir las respectivas funciones de distribución F_X, F_Y las cuales visualizan bien, mediante gráficas, la distribución de los valores de las variables en los intervalos más importantes (sin necesidad de usar las tablas iniciales en las cuales es difícil apreciar la distribución de valores). Interesaría evaluar la probabilidad de que una persona de E sea menor de 25 años y mida menos de 160 cm., o sea:

$$P\,(p \in E \mid X(p) \leq 25 \text{ años y } Y(p) \leq 160 \text{ cm.})$$

lo cual corresponde al valor de la bien conocida función de distribución conjunta H_{XY} en el punto (25 años, 160 cm). El celebrado teorema de Sklar (Schweizer y Sklar, 1983) establece que existirá una función de dos variables C_{XY} asociada a X e Y, denominada cópula, satisfaciendo una serie de propiedades de regularidad y permitiendo obtener la distribución conjunta a partir de las distribuciones marginales:

$$H_{XY}(u, v) = C_{XY}(F_X(u), F_Y(v))$$

Dicha función C_{XY} contiene en sí misma gran información sobre la dependencia entre las variables (Schweizer y Sklar, 1983).

Así la conjunción de características estadísticas (y análogamente se procede para la disyunción de las mismas) se materializa en la construcción de una función de dos variables que se obtiene combinando/operando dos funciones de una variable. De nuevo sobre una base conjuntista se materializa una valoración estadística, en este caso de carácter funcional, y cuyos resultados pueden variar al cambiar de muestras o cambiar de procedimientos. Si en probabilidad se calculan los números que corresponden a las probabilidades de reuniones o intersecciones, en estadística se producen funciones que describen como se distribuyen parejas de variables. El resultado ya no es numérico sino funcional. Vale la pena remarcar esto antes de pasar al mundo de la borrosidad, donde encontraremos situaciones semejantes.

5. Sobre conjunciones y disyunciones borrosas

Si ahora consideramos a «los españoles maduros y parados» nos enfrentamos sin duda a un colectivo que sociológicamente y políticamente es digno de estudio. Sin embargo, la vaguedad de los términos «maduros» y «parados» difícilmente nos permite atacar el problema de una manera única. Una aproximación conjuntista clásica nos llevaría, por ejemplo, a considerar los «españoles que el día 1 de enero de 1995 tenían más de 40 años y menos de 65 años y estaban inscritos en las listas de las oficinas de empleo como parados». Pero hay otros conjuntos posibles que merecerían ser considerados como concreciones correctas del colectivo vagamente descrito (Trillas, 1980), (Trillas, 1990). Una concreción estadística basada en una encuesta previa sobre lo que las personas entienden por maduro y parado también sería posible pero admitiría modelizaciones diversas (Trillas y Gutiérrez, 1978).

En el marco de la teoría de los conjuntos borrosos (Zadeh, 1965) se consideraría un modelo funcional (Bellman y Zadeh, 1970) susceptible de diversas matizaciones del siguiente estilo (Alsina, Trillas y Valverde, 1983). Realizada una primera formalización del concepto «maduro» mediante un conjunto borroso $M: N \to [0, 1]$ que a toda edad expresada en años asigne un grado de madurez $M(e)$ entre 0 y 1, se fijaría otro borroso $P: N \to [0, 1]$ que asignase, por ejemplo, a todo valor de horas h trabajadas en el último año un grado $P(h)$ indicativo de la situación de activo-parado. Entonces para toda persona española p de un cierto colectivo E tendría sentido calcular la edad $e(p)$ y las horas trabajadas en el último año $h(p)$ y disponer en consecuencia de los valores borrosos

$$(M(e(p)), P(h(p))),$$

correspondientes, respectivamente, a grado de madurez y de actividad. Si interesa combinar dichos índices (Aczél, 1987) en un único parámetro entonces tendría sentido usar una operación (t-norma) T en [0,1] que permitiera sintetizar en un único parámetro la conjunción «maduro y parado»:

$$T(M(e(p)), P(h(p))).$$

A esta operación numérica T se le exigen normalmente algunas propiedades naturales como la conmutatividad ($T(x, y) = T(y, x)$); que 1 sea elemento unidad ($T(x, 1) = x$); que 0 sea elemento absorbente ($T(x, 0) = 0$) y que valga la propiedad asociativa ($T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$). Ejemplos normales de tales operaciones son Mínimo (x, y), $x \cdot y$ o Máximo $(x + y - 1, 0)$. La modelización de la disyunción «maduro o parado» podría entenderse como la correspondiente a «no (no maduro y no parado)», es decir, obtener el carácter disyuntivo a partir de las negaciones pertinentes de una conjunción. Ello lleva a considerar las operaciones S en [0, 1] que se obtienen en la forma $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$, donde T es la operación que corresponda a la conjunción y N una negación fuerte en [0, 1], o sea, una aplicación biunívoca de [0, 1] en [0, 1] tal que $N(0) = 1$, $N(1) = 0$ y $N(N(x)) = x$ (generalización obvia del caso clásico $N(x) = 1 - x$). Operaciones disyuntivas (t-conormas) serían, por ejemplo, Máximo (x, y), $x + y - x \cdot y$ o Mínimo $(x + y, 1)$.

El estudio matemático de los semigrupos en intervalos numéricos y las técnicas de ecuaciones funcionales permiten estudiar diversas estructuras en el mundo de los conjuntos borrosos, extendiendo tanto el caso booleano como el probabilístico y estadístico. En este contexto cabe remarcar que las operaciones que pueden usarse para modelizar disyunciones y conjunciones no son únicas, debiendo fijarse criterios específicos adicionales que faciliten la determinación de qué operaciones pueden ajustarse más al problema considerado. Esta ambigüedad, que de hecho ya se da en la propia construcción de los conjuntos borrosos, tiene la ventaja de poder ofrecer *modelos flexibles*. La situación paralela la encontraremos en las descripciones probabilísticas o estadísticas antes aludidas, en donde, por ejemplo, la operación producto se usa para tratar sucesos independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ o la operación $C_{XY}(a, b) = \mathrm{Max}\,(a + b - 1, 0)$ se usa como cópula de variables dependientes en la forma $Y = mX$ con m no positivo, es decir, las propias características de los eventos o las variables inducen a usar unas operaciones concretas.

6. A modo de conclusión

La rica estructura booleana que pivota precisamente sobre la sencillez del conjunto {0, 1} da paso en los modelos borrosos (Dubois y Prade, 1980) a unas estructuras que por depender de la rica valoración en el intervalo [0, 1] no mantienen algunas de las propiedades booleanamente irrenunciables (Ginsberg, 1987) (Giles, 1988). Así surge una lógica borrosa que aun siendo extensión del caso clásico presenta una mayor complejidad de cálculo y una mayor versatilidad para modelizar situaciones que difícilmente son tratables desde los planteamientos rígidos. Tanto la probabilidad como la estadística han aportado interesantes modelizaciones para tratar fenómenos aleatorios o fenómenos sobre los cuales pueden acumularse datos. Pero las teorías probabilísticas y estadísticas no pueden abarcar el tratamiento de otros problemas que por su vaguedad, subjetividad o complejidad ni admiten un tratamiento nítido ni son susceptibles de aleatoriedad o repetición. Podemos encontrar bellos ejemplos de problemas que precisan de un tratamiento borroso en temas de controles y señales, en la elaboración de sistemas expertos (López de Mántaras, 1990), en el tratamiento de imágenes, en los modelos del lenguaje natural, etc. Pero quizás sin ir demasiado lejos, en nuestra propia forma de razonar (Minski, 1968), (Pólya, 1954), en nuestra forma de comunicarnos y descubrir (Poppes, 1959) y en toda la poética humana ... hallaremos un mundo muy intrigante para ser investigado con técnicas de lógica borrosa.

Bibliografía comentada

Aczél, J., *A short course on functional equations, based upon recent applications to the social and behavioral sciences*, Reidel, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, 1987.
Se trata de un libro tremendamente sugestivo donde se pone especial atención en los procesos de modelización de problemas aplicados mediante el uso de ecuaciones funcionales.

Alsina, C. y Trillas, E., «Fuzzy Sets and Mathematics Education», *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, (1991), 16-19.
Se trata de un artículo educativo en donde los autores hacen una reflexión y una propuesta sobre cómo podrían aparecer las ideas básicas de conjuntos borrosos en la enseñanza pre-universitaria.

Alsina, C.; Trillas, E. y Valverde, L., «On some logical connectives for Fuzzy Set Theory», *J. Math. An. & Appl.*, 93, (1983), 15-26.
Artículo técnico que marcó un punto inicial en muchas publicaciones posteriores sobre t-normas, t-conormas y negaciones.

López de Mántaras, R., *Approximate Reasoning Models*, Ellis Horwood series in Artificial Intelligence, Chichester, 1990.
Un libro básico sobre modelos del razonamiento aproximado y el problema de implementación de dichos modelos en sistemas expertos.

Pólya, G., *Patterns of plausible Inference*, Princeton University Press, 1954.
Un clásico. Las ideas educativas y lógicas que Pólya desarrolla en forma magistral constituyen aún hoy en día una fuente inagotable de inspiración.

Popper, K. R., *The Logic of Scientific Discovery*, Nueva York, Basic Books, 1959. Trad.: *La lógica de la investigación científica*, Madrid, 1962.
Una obra capital de Popper sobre la cual es posible establecer una reflexión interesante desde el punto de vista nuevo de la lógica no-monótona.

Schweizer, B. y Sklar, A.*, *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier North-Holland, Nueva York, 1983.
Referencia imprescindible para aprender todo lo básico concerniente a espacios métricos probabilísticos, t-normas, t-conormas, cópulas, etc. A los autores se debe la introducción de la mayoría de conceptos expuestos en este tratado.

Trillas, E., «Sobre funciones de negación en la teoría de los subconjuntos difusos», *Stochastica*, III-1, (1979), 47-59.

* Berthold Schweizer: nacido en Colonia en 1929 emigró de niño a Estados Unidos (1937). Discípulo de Karl Menger, ha desarrollado una gran labor docente e investigadora en las universidades de California, Arizona y Massachusetts (Amherst). A él, y a Abe Sklar, se deben muchos conceptos y resultados de la teoría de espacios métricos probabilísticos, semigrupos en intervalos y cópulas. Ha creado toda una escuela de matemáticos. Nunca trabajó en lógica borrosa pero gran parte de las artillerías matemáticas desarrolladas por él y Abe Sklar, son piezas clave de los modelos matemáticos usados en la teoría de conjuntos borrosos en los últimos treinta años.

Este artículo es una referencia ya clásica. Ilustra y aporta una interesante representación para negaciones fuertes en intervalos.
Trillas, E., *Conjuntos borrosos*, Barcelona, Vicens Vives, 1980.
Uno de los primeros libros de divulgación de la teoría de conjuntos borrosos.
Trillas, E.; Alsina, C. y Terricabres, J. M., *Introducción a la lógica borrosa*, Barcelona, Ariel, 1995.
Una aproximación muy simple a la lógica borrosa incluyendo visiones filosóficas, matemáticas y aplicaciones.
Trillas, E. y Gutiérrez, J. (eds.), *Aplicaciones de la lógica borrosa*, Madrid, Nuevas Tendencias, CSIC, 1992.
La publicación presenta interesantes artículos sobre aplicaciones muy diversas de los conjuntos borrosos con especial interés para los casos de ingeniería y de inteligencia artificial.
Zadeh, L. A., «Fuzzy Sets», *Information and Control*, 8, (1965), 33-50.
«El artículo». Con esta publicación original de Zadeh nació la teoría de «fuzzy sets» que siempre ha encontrado en su inventor L. A. Zadeh un líder internacionalmente reconocido.

Bibliografía complementaria

Azorín Poch, F., *Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la estadística*, Madrid, Ministerio de Economía, INE, 1979.
Bellman, R. y Zadeh, L. A., «Decision making in a fuzzy environment», *Management Science*, 1970, pp. 17-40.
Black, M., «Vagueness», *Philosophy of Science*, 4, (1937), 427-455.
Boden, M. A. (ed.), *The Philosophy of Artificial Intelligence*, Oxford University Press, 1990.
Boole, G., *Investigación sobre las leyes del pensamiento*, Madrid, Paraninfo, 1982.
Bouchon-Meunier, B., *La Logique Flou*, París, PUF (Que sais-je?), 1993.
Carnap, R., *Logical Foundations of Probability*, The University of Chicago Press, 1950.
Dubois, D. y Prade, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, 1980.
Fisher, A., *The Logic of Real Arguments*, Cambridge University Press, 1988.
Giles, R., «The concept of grade of membership», *Fuzzy Sets and Systems*, 25, (1988), 297-323.
Minski, M., «Matter, Mind and Models», en Minsky (ed.), *Semantic Information Processing*, Cambridge, Mass., The MIT Press, 1968.
Tarski, A., «La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica», en M. Bunge (ed.), *Antología semántica*, Buenos Aires, Sur, 1960, pp. 119-157.
Terricabras, J. M. y Trillas, E., «Some Remarks on Vague Predicates», *Theoria*, 10, (1988-1989), 1-12.

Trillas, E., «Una introducción breve a la lógica borrosa», en *Inteligencia Artificial y Robótica*, Real Academia de Ciencias de Madrid, 1990, pp. 187-199.

Trillas, E. y Alsina, C., «Some Remarks on Approximate Entailment», *Int. Journal of Approximate Reasoning*, 6, (1992), 525-533.

Trillas, E. y Alsina, C., «Logic: Going further from Tarski?», *Fuzzy Sets and Systems*, 53, (1993), 1-13.

Zadeh, L. A., «Fuzzy logic and approximate reasoning», *Synthese*, 30, (1975), 407-428.

Zimmermann, H. J., «Bibliography. Theory and Applications of Fuzzy Sets», Institut für Wirtschaftswissenschaften, Aachen, D. B. R, 1980.