



SIMETRIA Y LOGO

José A. Cajaraville Pegito

La Geometría comienza a recobrar su protagonismo dentro de la Educación Matemática. Al menos, las tendencias observadas en los últimos años reivindican a la Geometría como una disciplina fundamental, si pretendemos que el alumno aprenda Matemáticas "haciendo" Matemáticas. La postergación que sufrió esta disciplina en la década de los 60, con la introducción de la llamada "Matemática Moderna", parece estar superándose. De ello debemos congratularnos todos los profesionales de la Educación Matemática.

Las investigaciones actuales se centran en el **enfoque: ¿Geometría en coordenadas versus Geometría intrínseca?**. ¿Los *aspectos métricos* son prioritarios frente a las *propiedades características* de los "objetos" geométricos?. Las tendencias actuales otorgan mucha más importancia a la Geometría Intrínseca y al papel de las Transformaciones geométricas. Al menos en los niveles básicos, un *aprendizaje significativo de la Matemática* -en el sentido ausubeliano- se caracteriza, necesariamente, por un apoyo geométrico continuo. El conocimiento de las formas y de sus propiedades es esencial para progresar en la exploración y dominio del espacio. El papel que desempeñan, en este conocimiento, las **transformaciones geométricas** es fundamental. Dentro de ellas, la **simetría** merece especial atención.

La simetría, además de transformación, puede ser considerada como una propiedad de ciertas figuras o formas geométricas. Una propiedad que las hace permanecer *invariantes* respecto de ciertas "manipulaciones". Por ejemplo, si una superficie de forma cuadrada gira media vuelta sobre una de sus diagonales, se obtiene la "misma forma, ocupando el mismo espacio". Sin embargo, si realizamos la misma experiencia con una superficie rectangular -no cuadrada- ¿qué ocurre?. Bajo este criterio, algunas formas "son más simétricas" que otras: Un círculo "es más simétrico" que un cuadrado. Otras figuras son asimétricas. Este punto de vista caracteriza a la simetría como propiedad de determinados objetos

Sin embargo una forma asimétrica, desde este punto de vista, tiene multitud de formas simétricas a ella. ¡No hay más que reflejarla en un espejo, e ir variando la posición del espejo!. Es la otra perspectiva: La *simetría como transformación*.

La naturaleza y el arte son fuentes inagotables de ejemplificación de la simetría. Nuestro cuerpo permite poner un primer ejemplo. La arquitectura clásica utiliza la simetría como referencia básica. Proporciona una armonía que resulta estética. Los bellos mosaicos árabes son una buena muestra. En las portadas de algunos libros y revistas aparecen de vez en cuando diseños muy originales con una figura base que está reproducida desde cualquier perspectiva con que se observe. Los trabajos del holandés Maurice Escher en este sentido, merecen especial mención.

La simetría, como propiedad o como transformación, está perfectamente definida y caracterizada dentro de la Matemática. Se diferencia entre simetría respecto de un eje -axial- o respecto de un punto -rotacional-. Sin embargo, en este artículo vamos a darle un enfoque más intuitivo. Nuestra referencia será **el espejo** y nuestra herramienta para "pensar sobre" la simetría, el **ordenador**. En muchas escuelas, la simetría -axial- se ejemplifica mediante el doblado de papel: Se dibuja una figura -a ser posible con tinta o pintura fresca-; con la regla se traza una línea recta que cruce el papel -eje de simetría-; se dobla por esta línea y, si la tinta no se ha secado, se reproduce la figura simétrica. Sobre un ordenador las cosas se plantean de modo diferente. Dibujar una figura no significa tomar una pluma y realizar un diseño; significa pensar sobre que mensajes -en forma de algoritmo- debemos transmitir a una máquina, para que ésta se encargue de diseñar la figura. Enseñando al ordenador a simetrizar figuras, profundizamos en nuestro conocimiento acerca de la simetría y de sus propiedades. Para codificar dichos mensajes usaremos el lenguaje **LOGO**. El motivo de elegir este lenguaje computacional radica en sus características especiales para la apoyar la Geometría Intrínseca. Dispone de ordenes específicas para el diseño de figuras, tan sencillas como **AVANZA, RETROCEDE, GIRADERECHA Y GIRAIQUIERDA, que permiten desplazar y orientar -por la pantalla- a un indicador -"tortuga"- que se encarga de trazar la forma al mismo tiempo que se desplaza.**

Estas características, permiten codificar mensajes para explorar la simetría que contienen muy poco "aparato" matemático -en el ejemplo que proponemos, no van más allá del teorema de Pitágoras o de la fórmula que nos proporciona la longitud de una circunferencia en función de su radio-. Nos apoyaremos en el concepto de **inversión**, usando como modelo intuitivo el espejo.

Colocados delante de un espejo podemos apreciar con claridad la **inversión entre derecha e izquierda que se manifiesta entre nosotros y nuestra imagen**. Si levantamos nuestra mano derecha nuestra imagen levanta su mano izquierda. Si hacemos un guiño con el ojo derecho nuestra imagen hace lo recíproco con su ojo izquierdo. Si tenemos un lunar en la mejilla derecha, nuestra imagen tiene ese mismo lunar pero en su mejilla izquierda....

LOGO nos ofrece una magníficas posibilidades para plasmar esta propiedad de la simetría.

Por otra parte, si acercamos algún miembro al espejo, nuestra imagen también acerca al espejo el "miembro invertido". Si lo alejamos, nuestra imagen también lo aleja. Si nos fijamos con atención, podemos apreciar que la "cantidad" de alejamiento o separación es idéntico para el objeto y su imagen. Esta es, precisamente una de las propiedades que caracterizan a una simetría. *El espejo se comporta como "la mediatriz" entre el objeto y su imagen.*

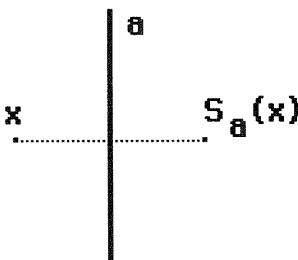
La combinación de ambas características nos permitirá "evadir" la naturaleza **puntual** de una transformación como la simetría, en beneficio de una interpretación sustentada sobre las ideas de **valor inicial e inversión**. Veamos:

1. Una simetría axial plana. de eje a . es una transformación biunívoca entre los puntos del plano:

$$S_a: \phi \longrightarrow \phi$$

$$x \longrightarrow S_a(x)$$

de forma que el eje a es la mediatriz del segmento $XS_a(X)$



2. Si, fijada una posición inicial para dibujar una figura, nos desplazamos hacia la *derecha*, la figura simétrica, partiendo de la posición inicial simétrica, se desplaza hacia la *izquierda* y recíprocamente.

Elegiremos como diseño básico una bicicleta. Sus elementos: CUADRO, MANILLAR, PEDALES, RUEDAS, SILLIN..... se dibujarán en la pantalla respondiendo a un mensaje específico: un procedimiento LOGO. Dichos procedimientos se conjuntarán para dar lugar al procedimiento principal: BICICLETA.

Tanto el procedimiento BICICLETA como sus procedimientos subordinados dependen de un parámetro: **tamaño**. Este parámetro permite establecer el "tamaño" de la bicicleta en función proporcional de la longitud -en pixels- de la barra que une la base del manillar con el sillín.

Fijada, como posición inicial de la tortuga, la posición "casa" -centro de la pantalla- y **determinando la posición inicial simétrica en función del eje de simetría que se considere y situada la tortuga en esa posición, bastará con cambiar en el procedimiento de partida GIRADERECHA por GIRAIZQUIERDA -y recíprocamente- para obtener la bicicleta simétrica!**

Los procedimientos GDI -*gira derecha-izquierda*- y GID -*gira izquierda-derecha*- se encargan de realizar la inversión. Así, en el procedimiento SIMETRIAS.BICICLETA nos ahorramos repetir todos los procedimientos que configurarían la bicicleta simétrica!. Basta con modificar una *clave*, que *invierte GIRADERECHA por GIRAIZQUIERDA y recíprocamente*.

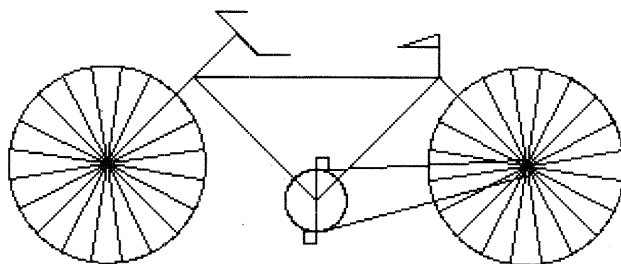
Un procedimiento -EJE- se encarga de determinar el eje de simetría en función de los parámetros **distancia** -en pixels- al origen e **inclinación** -en grados- respecto de la horizontal.

Los listados de todos los procedimientos son:

PARA GDI :ángulo
SI :clave = 1 [GD :ángulo] [GI :ángulo]
FIN

PARA GID :ángulo
SI :clave = 1 [GI :ángulo] [GD :ángulo]
FIN

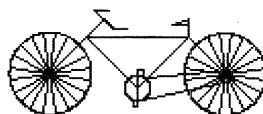
PARA BICICLETA :tamaño
CUADRO :tamaño
RUEDA.DELANTERA :tamaño
GID 90 AVANZA (:tamaño / 10) GDI 45 AVANZA :tamaño
SILLIN :tamaño
RUEDA.TRASERA :tamaño
FIN



BICICLETA 120



BICICLETA 25



BICICLETA 50

PARA CUADRO: tamaño
GID 45 AVANZA (:tamaño/RAIZCUADRADA(2)) GDI 135
AVANZA: tamaño
GD 135 AVANZA (:tamaño/RAIZCUADRADA(2))
GID 45 AVANZA (:tamaño / 8) GDI 90
REPITE 360 [AVANZA (6.28 * :TAMAÑO /(8 * 360)) GDI 1]
PEDALES :tamaño
MANILLAR :tamaño
FIN

PARA SILLIN :tamaño

GID 90 AVANZA (:tamaño/8) GID 90 AVANZA (:tamaño/6)

GDI 160 AVANZA (:tamaño / 5.5) GDI 110

AVANZA (:tamaño /15)

FIN

PARA MANILLAR :tamaño

SUBELAPIZ GID 45 AVANZA (:tamaño / RAIZCUADRADA (2))

GDI 90 BAJALAPIZ

AVANZA (:tamaño / 4) GID 90 AVANZA (:tamaño / 8)

GDI 135 AVANZA (:tamaño / 8)

RETROCEDE (:tamaño/8) GID 135 RETROCEDE (:tamaño/4)

GID 45 RETROCEDE (:tamaño /8)

AVANZA (:tamaño/8) GDI 45 AVANZA (:tamaño/8)

GDI 90 RETROCEDE (:tamaño / 4)

FIN

PARA RUEDA.DELANTERA :tamaño

RETROCEDE (:tamaño * 0.4) + (:tamaño / 10)

REPITE 20 [AVANZA (:tamaño*0.4) RETROCEDE (:tamaño*0.4)
GDI 18]

AVANZA (:tamaño*0.4) GDI 90

REPITE 360 [AVANZA (6.28 * :tamaño * 0.4 / 360) GDI 1]

FIN

PARA RUEDA.TRASERA :tamaño

AVANZA (:tamaño / 8) GID 135

RUEDA.DELANTERA :tamaño

FIN

Y, para simetrizar:

PARA EJE :distancia :inclinación

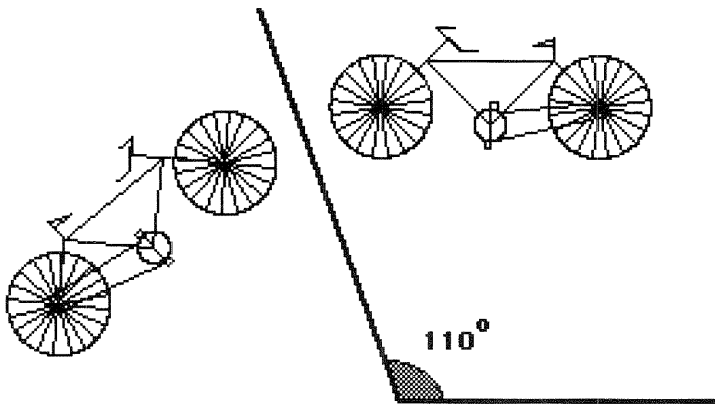
SUBELAPIZ

GIRADERECHA (90 - :inclinación)

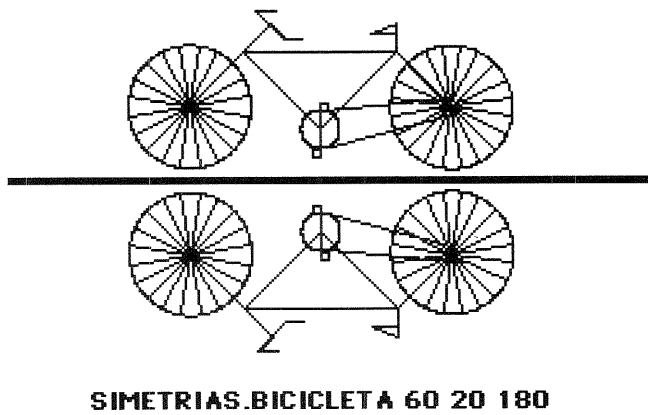
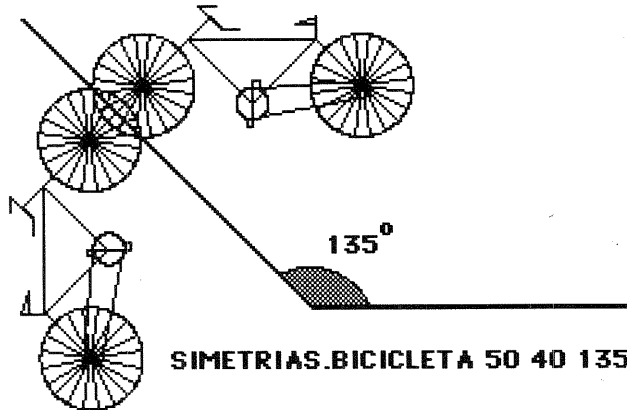
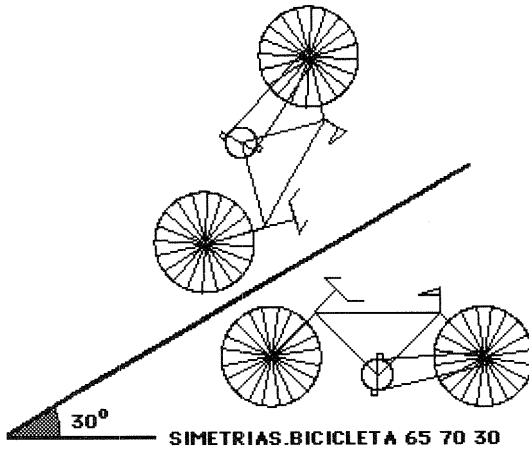
GIRAIZQUIERDA 90

AV :distancia
BAJALAPIZ GIRADERECHA 90 AVANZA 20
RETROCEDE 40 AVANZA 20 GIRAIZQUIERDA 90 SUBELAPIZ
AVANZA :distancia
GIRADERECHA (180 - :inclinación)
BAJALAPIZ
FIN

PARA SIMETRIAS.BICICLETA :tamaño :distancia :inclinación
HAZ "clave 1
BICICLETA :tamaño
SUBELAPIZ PONX 0 PONY 0 PONRUMBO 0 BAJALAPIZ
EJE :distancia :inclinación
HAZ "clave 2
BICICLETA :tamaño
FIN



SIMETRIAS.BICICLETA 50 65 110



BIBLIOGRAFIA:

- ABELSON, H.-DiSSESA, A. : "Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics". M.I.T. Press. 1981. (Traducido al castellano: "Geometría de Tortuga". Anaya Multimedia. 1986).
- BOSUET, G. : "La computadora en la Escuela". Paidós. 1984.
- CAJARAVILLE, J.A.-OTERO, M.-PUEYO, M. : "Primeros pasos en LOGO". Vol I y II. Anaya Multimedia. 1985-86.
- CAJARAVILLE, J.A.: "Enseñanza de la Matemática asistida por Ordenador". Vol. 30 de la colección MATEMATICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE. Editorial Síntesis. A aparecer.
- DIAZ GODINO, J.-MATANERO, M.C.: "Microordenadores en la Escuela". Editan los autores. Distribuye RAMA S.A. 1985.
- D'OPAZO, J/Grupo GOLEM. "Programación en LOGO". Anaya Multimedia. 1986.
- FREUDENTHAL, H.: "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures". De Reidel Publishing Company. 1983.
- HUNTER, B: "My Students Using Computer". Reston Publishing Company. 1983. (Traducido al castellano: "Mis alumnos usan ordenador". Ediciones Martínez Roca. 1985).
- JACOBS, R.: "Mathematics. A Human Endeavor". Academic Press. 1984.