



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# La ecuación diferencial logística

Berta Cadaveira Regueiro

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# La ecuación diferencial logística

Berta Cadaveira Regueiro

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Análisis matemático</b>
<b>Título: La ecuación diferencial logística</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
La ecuación diferencial ordinaria logística es una de las ecuaciones no lineales más sencillas, pero al mismo tiempo de las más interesantes desde un punto de vista teórico y de las aplicaciones. Se aplicará al estudio de la epidemia de la COVID-19.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. La ecuación diferencial logística</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto histórico . . . . .	2
<b>2. Resolución de la ecuación diferencial logística y la función logística</b>	<b>5</b>
2.1. Resolución de la ecuación diferencial logística . . . . .	5
2.2. La función logística . . . . .	8
2.3. Resolución de la ecuación diferencial logística en serie de potencias . . . . .	11
2.4. Relación entre los polinomios de Euler y la función logística . . . . .	12
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>17</b>
3.1. Distribución logística . . . . .	17
3.2. Epidemiología . . . . .	22
3.2.1. COVID-19 . . . . .	24
3.2.2. VIH . . . . .	26
3.3. Plataformas de streaming . . . . .	27
3.3.1. Netflix . . . . .	28
3.3.2. Youtube . . . . .	30

---

3.4. Crecimiento de tumores . . . . .	32
3.5. Sistema de clasificación Elo . . . . .	36
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>

## Resumen

La ecuación diferencial logística es una función muy útil en diversos ámbitos. En su inicio ésta se desarrolló con la intención de encontrar una ecuación que explicara el crecimiento de una población y el mérito de su descubrimiento se debe a Pierre-François Verhulst. Dicha ecuación se puede resolver de diversas formas, pero lo importante de su resolución es una solución en particular que se conoce como función logística. La misma está relacionada con distintas funciones como puede ser la función zeta de Riemann.

Además de ser interesante teóricamente, dicha función, así como la ecuación diferencial logística, son importantes en múltiples áreas. Entre sus aplicaciones se encuentra la epidemiología para estudiar la evolución de epidemias como puede ser el COVID-19, el crecimiento de tumores, la clasificación Elo en ajedrez o las plataformas de streaming, entre otras.

## Abstract

The logistic differential equation is a very useful function in various fields. It was originally developed with the intention of finding an equation to explain the growth of a population and the merit of its discovery is due to Pierre-François Verhulst.

This equation can be solved in different ways, but an important part of its solution is a particular solution known as the logistic function. It is related to different functions such as Riemann's zeta function.

Besides being theoretically interesting, this function, as well as the logistic differential equation, are important in many areas. Among its applications is epidemiology to study the evolution of epidemics such as COVID-19, tumor growth, Elo ranking in chess or streaming platforms, among others.



# Introducción

La ecuación diferencial logística es una ecuación muy interesante a nivel práctico, pues se utiliza en múltiples ámbitos o áreas.

Para comenzar en el Capítulo 1 del presente trabajo se definirá esta ecuación con detalle exponiéndose algún ejemplo de la misma, y seguidamente se realizará un breve recorrido por la historia con la intención de observar cómo dicha función surgió y quién merece el reconocimiento de la misma.

Posteriormente, en el Capítulo 2 se resuelve dicha ecuación mediante el método de variables separadas, y se estudian casos particulares de la misma, mostrándose también distintas representaciones gráficas de las soluciones que ayudan a su comprensión. Principalmente la sección se centra en una solución que se conoce como la ecuación logística.

A continuación, en la Sección 2.3 se resuelve de nuevo la ecuación diferencial logística pero en este caso se pretende obtener una solución en serie de potencias, de tal forma que se deduce una igualdad entre la función logística y la nueva solución.

Finalmente, para terminar el capítulo y así la parte dedicada principalmente a la teoría, se recoge en la Sección 2.4 la relación de los polinomios de Euler con la función logística, así como la relación entre las derivadas de dicha función y la función zeta de Euler.

En el último capítulo, es decir, en el Capítulo 3, se recogen distintas aplicaciones de la ecuación diferencial logística y de la solución particular mencionada anteriormente, la función logística.

En el primer apartado, Sección 3.1 se recoge información acerca de la distribución logística, pues la solución anterior se corresponde con la función de distribución de la misma.

Tras esto en la Sección 3.2, se habla del ámbito de la epidemiología, recogiendo distintos modelos epidemiológicos basados en la función que es objeto de estudio. Además se realiza un estudio extrayendo datos sobre dos epidemias que han causado grandes problemas en la sociedad, como son el virus COVID-19, o como puede ser el virus VIH.

A continuación, la Sección 3.3 se centra en las plataformas de streaming, que como ya se sabe,

en la actualidad dichos medios tienen una gran repercusión en el mundo. Análogamente, a lo que se hace en el apartado anterior se exponen datos acerca de dos plataformas muy importantes a nivel mundial, Netflix y Youtube, realizándose un estudio de las mismas.

Posteriormente, la Sección 3.4 recoge información de cómo se utiliza la función logística para entender el crecimiento de tumores y se presenta un ejemplo para facilitar su entendimiento.

Finalmente, la última sección de este trabajo, la Sección 3.5, está dedicada a la clasificación Elo, la cual es utilizada en el ajedrez para realizar la clasificación FIDE. En este apartado, se muestran las probabilidades de los jugadores de puntuar que se corresponde con una variante de la función logística y se expone una ecuación para obtener la calificación final de un jugador tras su participación en una competición.

# Capítulo 1

## La ecuación diferencial logística

En primer lugar se comenzará definiendo la ecuación diferencial ordinaria (EDO) que será objeto de estudio y posteriormente se realizará un breve recorrido por la historia para situar el contexto en el que tal ecuación surgió.

**Definición 1.1.** La **ecuación diferencial logística** es la ecuación diferencial ordinaria que presenta la siguiente expresión

$$x'(t) = k \left( 1 - \frac{x(t)}{M} \right) x(t), \quad (1.1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}$  es una función de variable real  $t$  y tanto  $k$  como  $M$  son constantes reales que dependerán del problema considerado.

En este contexto, es importante mencionar que se trata de una EDO autónoma, es decir, una ecuación del tipo  $x' = f(x)$  en la que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y en este caso  $f(x) = kx - \frac{k}{M}x^2$ . Sin embargo, más adelante se considerará el caso de una función no autónoma, esto quiere decir que tanto  $M$  como  $k$  pueden variar con el tiempo y de esta forma la ecuación (1.1) se expresaría como sigue

$$x'(t) = k(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{M(t)} \right) x(t). \quad (1.2)$$

*Observación 1.2.* Usualmente se considerará la variable  $t$  como el tiempo, y  $x(t)$  proporcionará la evolución de la variable  $x$  a lo largo del tiempo.

Una vez presentada la ecuación diferencial, es el momento de analizar de que modo surgió esta EDO y con que fin, y para abordar esta nueva sección se utilizará [5].

## 1.1. Contexto histórico

En 1798 el matemático Thomas Malthus propuso lo que se conoce como modelo de Malthus y fue el primer acercamiento hacia una ecuación que explicase el crecimiento de una población.

Este modelo viene dado por la fórmula siguiente

$$x'(t) = cx(t), \quad (1.3)$$

siendo  $c$  una constante que se identifica con la tasa de crecimiento de la población y  $x(t)$  el tamaño de la población.

Puesto que la ecuación (1.3) se trata de una EDO lineal ésta tiene solución única para una condición inicial dada. Por tanto tomando como condición inicial  $x(0) = x_0 > 0$ , la solución es de la forma  $x(t) = x_0 e^{ct}$  en el instante  $t$  y en consecuencia el crecimiento de la población sería proporcional a la propia población. Sin embargo, tal modelo no es muy adecuado a largo plazo pues se tendría que la población crece exponencialmente e indefinidamente, y por ello, surge la necesidad de proponer otro método.

En 1847, Pierre-François Verhulst presenta un nuevo modelo, que se corresponde con lo que se conoce como ecuación diferencial logística. En la expresión además de estar presente una constante referida a la tasa de crecimiento de la población, se considera otra que identifica la capacidad máxima de la misma,  $M$ . De esta forma, se establece que la población crece de manera exponencial, pero que cada vez se aproxima más a un estado estacionario hasta alcanzar su capacidad máxima.

Nótese que para una población inicial  $x_0 \in (0, M)$ , la ecuación  $x'$  es positiva y por tanto la solución será creciente. No obstante, la solución nunca podrá alcanzar el valor máximo  $M$ , pues la función constante  $M$  es una solución de la ecuación (1.1) la cual posee solución única para un dato inicial dado.

Para determinar los valores correspondientes a  $k$  y  $M$ , Verhulst utilizó datos de países, primeramente de Bélgica, y posteriormente presentó la manera de aproximar dichos términos a partir de los datos de la población en tres años distintos pero igualmente espaciados. Así, el matemático obtuvo las siguientes expresiones

$$M = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2} \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{T} \log \left[ \frac{1/P_0 - 1/M}{1/P_1 - 1/M} \right], \quad (1.4)$$

siendo  $P_0$  el tamaño de la población para  $t = 0$ ,  $P_1$  para  $t = T$  y  $P_2$  para  $t = 2T$ .

*Observación 1.3.* Es posible que para la población humana el valor que se asocia al término de la capacidad máxima sea aproximadamente 10 billones americanos.

A pesar de que ambos matemáticos consideraron esos valores como constantes, es obvio que también pueden variar con el tiempo como se muestra en el siguiente ejemplo, exponiéndose así un caso particular de EDO no autónoma mencionada anteriormente.

**Ejemplo 1.4.** Se toma  $k(t) = t^2$  y  $M = 2$ , entonces la ecuación (1.1) presenta la siguiente expresión

$$x'(t) = t^2 \left( 1 - \frac{x(t)}{2} \right) x(t). \quad (1.5)$$

Ahora utilizando el programa *Maple* y considerando como condición inicial  $x(0) = x_0$  se obtendrá la solución de esta EDO, y los comandos utilizados se pueden ver a continuación.

```
> f := diff(x(t), t) = t^2*(1-(1/2)*x(t))*x(t);
```

$$\frac{d}{dt}x(t) = t^2 \left( 1 - \frac{x(t)}{2} \right) x(t)$$

```
> sol := dsolve(f, x(t));
```

$$x(t) = \frac{2}{1 + 2 e^{-1/3 t^3} \_C1}$$

```
> eval(sol, t = 0);
```

$$x(0) = \frac{2}{1 + 2 \_C1}$$

```
> C := solve(x(0) = 2/(1+2*_C1), _C1);
```

$$-\frac{1}{2} \frac{x(0) - 2}{x(0)}$$

```
> solucion := eval(sol, _C1 = C);
```

$$x(t) = \frac{2}{1 - \frac{e^{-1/3 t^3} (x(0) - 2)}{x(0)}}$$

```
> sol2 := simplify(solucion);
```

$$x(t) = \frac{2 x(0)}{e^{-1/3 t^3} x(0) - 2 e^{-1/3 t^3} - x(0)}, \quad (1.6)$$

Por tanto se tiene que la solución de la ecuación (1.5) del ejemplo viene dada por la expresión (1.6).

Ahora que se ha expuesto un ejemplo en el que varía con el tiempo el parámetro asociado a la tasa de crecimiento, se muestra otro en el que varía el coeficiente de la capacidad de carga.

**Ejemplo 1.5.** En este caso se tiene que  $k(t) = 2$  y  $M = e^t$ , entonces la ecuación (1.1) viene dada como sigue

$$x'(t) = 2 \left( 1 - \frac{x(t)}{e^t} \right) x(t). \quad (1.7)$$

Ahora utilizando el programa *Maple* y análogamente al ejemplo anterior se obtendrá la solución de la ecuación.

```
> f := diff(x(t), t) = 2*(1-(1/exp(t))*x(t))*x(t);
```

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2 \left( 1 - \frac{x(t)}{e^t} \right) x(t)$$

```
> sol := dsolve(f, x(t));
```

$$x(t) = \frac{e^{2t}}{2e^t + \_C1}$$

```
> eval(sol, t = 0);
```

$$x(0) = \frac{1}{2 + \_C1}$$

```
> C := solve(x(0) = 1/(2+_C1), \_C1);
```

$$-\frac{2x(0) - 1}{x(0)}$$

```
> solucion := eval(sol, \_C1 = C);
```

$$x(t) = \frac{e^{2t}}{2e^t - \frac{2x(0) - 1}{x(0)}}$$

```
> sol2 := simplify(solucion);
```

$$x(t) = \frac{e^{2t} x(0)}{2e^t x(0) - 2x(0) + 1}. \quad (1.8)$$

Por tanto se ha deducido que la solución de la función (1.7) del ejemplo viene dada por la expresión (1.8).

Finalmente, tras conocer la ecuación en la que se basa el presente trabajo, junto con un breve contexto histórico de la misma, en el próximo apartado se procederá a su estudio.

## Capítulo 2

# Resolución de la ecuación diferencial logística y la función logística

Una vez presentada la ecuación diferencial y visto que esta merece una especial atención pues es de gran importancia en la historia, interesa conocer su resolución. Por esta razón, se hallará la solución de tal EDO de dos maneras diferentes. Además, se tratará un caso particular de la misma junto con unas gráficas que ayudarán a su comprensión y se deducirán unas relaciones de dicha ecuación con otras funciones.

### 2.1. Resolución de la ecuación diferencial logística

En esta ocasión, se hallará la solución general de la ecuación (1.1). Por una parte cabe destacar que si  $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$  se está ante una solución constante de la EDO, al igual que si  $x(t) = M$ , pues en ambos casos se tiene que  $x'(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$  y  $f(0) = f(M) = 0$ .

Por otra parte, si se supone que  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces se trata de un problema de Cauchy que sigue la siguiente forma

$$\begin{cases} x'(t) = k \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) x(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

y lo que se pretende demostrar es que la EDO tiene solución y que ésta es única. Para realizar tal proceso, es necesario exponer unos resultados previos.

**Teorema 2.1.** (*Existencia y unicidad*). Sea  $f$  una función continua en un abierto  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $x'(t) = f(x, t)$  una ecuación diferencial. Si  $(x_0, t_0)$  es un punto de tal conjunto y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  es una

función continua respecto a la segunda variable, se puede decir que existe una solución local de la EDO pasando por  $(x_0, t_0)$  y es única.

El teorema se ha obtenido uniendo y extrapolando los teoremas de existencia y unicidad recogidos en [7] y tras ello es necesario presentar un tipo de ecuaciones diferenciales denominadas ecuaciones de variables separadas.

**Definición 2.2.** Una ecuación diferencial  $\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x)$  es de **variables separadas** si se puede expresar como el producto de dos funciones: una que depende sólo de  $x$  y otra que depende sólo de  $t$ , de tal manera que  $\frac{\partial x}{\partial t} = g(t) h(x)$ .

Este tipo de ecuaciones se resuelven de manera muy sencilla y con el fin de mostrar tal proceso se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.** Se considera la EDO  $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{t}{x}$  y ahora se despeja y se integra en ambos lados de la igualdad

$$\partial x x = \partial t t \implies \int \partial x x = \int \partial t t, \quad (2.2)$$

y de aquí se obtiene  $\frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + c$  siendo  $c$  una constante, por tanto se puede escribir la solución como

$$x(t) = \sqrt{t^2 + k}. \quad (2.3)$$

Una vez enunciados los anteriores conceptos se está en condiciones de comenzar la resolución de la EDO, y lo primero que se debe ver es que la ecuación (1.1) cumple las hipótesis del Teorema 2.1.

Se considera  $f(t, x) = k \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) x(t)$  y por lo tanto es evidente que tal función es continua  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$  y que además su derivada parcial respecto de la variable  $x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = k \left(1 - \frac{2x}{M}\right)$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ . Por consiguiente, se puede afirmar que la ecuación (1.1) tiene solución y que dicha solución es única, pues se verifican las hipótesis del teorema.

Ahora es momento de hallar tal solución, y como se puede observar se está ante una ecuación no lineal pero de variables separadas por tanto se puede resolver mediante el método expuesto anteriormente en la Definición 2.2.

En este caso,  $x'(t) = g(t) h(x)$  siendo  $g(t) = 1$  y  $h(x) = k \left(1 - \frac{x}{M}\right) x$ , por tanto si se considera  $x'(t) = \frac{\partial x}{\partial t}$ , se puede escribir la expresión

$$\frac{\partial x}{\partial t} = k \left(1 - \frac{x}{M}\right) x \implies \frac{\partial x}{k \left(1 - \frac{x}{M}\right) x} = \partial t. \quad (2.4)$$

Integrando en ambos lados de la igualdad se obtiene

$$-\frac{1}{k} \left( -\ln \frac{|x|}{|M|} + \ln \left| \frac{x}{M} - 1 \right| \right) = t + c, \quad (2.5)$$

siendo  $c$  una constante.

Despejando en la expresión  $x(t)$  se llega a la solución general de la EDO (1.1) con constante  $c$

$$x(t) = \frac{M e^{kt} c}{e^{kt} c - 1}. \quad (2.6)$$

Una vez conocida la solución general, si se tiene en cuenta que  $x_0 = x(0)$  se puede hallar el valor que toma la constante  $c$ ,  $x(0) = \frac{M c}{c - 1} = x_0 \implies c = \frac{x_0}{x_0 - M}$ . Finalmente, haciendo caso a las condiciones sugeridas anteriormente se alcanza la solución

$$x(t) = \frac{M x_0 e^{kt}}{M + x_0 (e^{kt} - 1)}. \quad (2.7)$$

Ahora se comprobará utilizando el programa *Maple* que la solución de la ecuación (1.1) se corresponde con la calculada.

```
> g := diff(x(t), t) = k*(1-x(t)/M)*x(t)
```

$$\frac{d}{dt}x(t) = k \left( 1 - \frac{x(t)}{M} \right) x(t)$$

```
> solg := dsolve(g, x(t));
```

$$x(t) = \frac{M}{1 + e^{-kt} \_C1 M}$$

```
> eval(solg, t = 0);
```

$$x(0) = \frac{M}{M \_C1 + 1}$$

```
> C := solve(x(0) = M/(M*_C1+1), _C1);
```

$$\frac{M - x(0)}{M x(0)}$$

```
> solucion2 := eval(sol, _C1 = C);
```

$$x(t) = M \left( 1 + \frac{e^{-kt} (M - x(0))}{x(0)} \right)^{-1}$$

```
> sol := simplify(solucion2);
```

$$x(t) = \frac{Mx(0)}{e^{-kt}M - e^{-kt}x(0) + x(0)}$$

De esta forma, si se multiplica la ecuación (2.7) por  $e^{-kt}$  se puede asegurar que la solución de (1.1) calculada anteriormente se corresponde con la solución dada a través de *Maple*.

Finalmente, tras haber obtenido la solución de la EDO (1.1), en la posterior sección se considerará un caso particular de la misma que merece una especial atención.

## 2.2. La función logística

Como se ha dicho anteriormente se abordará un caso específico de la ecuación diferencial logística. Para ello se escogen  $k = M = 1$  y así se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$x' = x - x^2. \quad (2.8)$$

Se trata de una EDO de variables separadas como se ha visto anteriormente entonces se escribe la ecuación (2.8) de la siguiente forma

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x - x^2 \implies -\frac{\partial x}{x^2 - x} = \partial t. \quad (2.9)$$

Ahora integrando en ambos lados de la igualdad y exponenciando lo obtenido se tiene

$$\int -\frac{\partial x}{x^2 - x} = \int \partial t \implies \ln(x - 1) - \ln(x) = c - t \implies \frac{x - 1}{x} = e^{c-t}, \quad (2.10)$$

de donde se sigue la solución general de la EDO (2.8) como se buscaba

$$x(t) = \frac{e^t}{c + e^t}. \quad (2.11)$$

En este contexto se expondrán tres casos para así mostrar distintas soluciones particulares de la ecuación (2.8) en función del valor que se le asocia a la condición inicial  $x_0$ .

- Caso 1: Si  $x_0 < 0$ .

Se toma por ejemplo  $x_0 = -1/2 < 0$ , lo que supone  $c = -3$ . Así la solución de (2.8) se puede expresar de la siguiente manera  $x(t) = \frac{1}{1 - 3e^{-t}}$  cuya representación se ha obtenido a partir del programa *Maple* pudiéndola observar en la Figura 2.1.

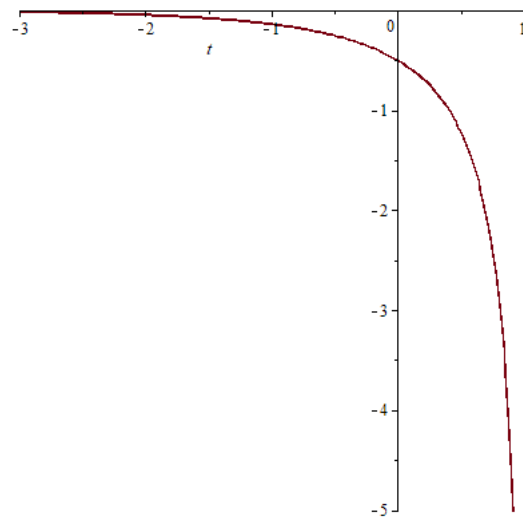


Figura 2.1: Representación de solución particular para  $x_0 < 0$  en  $[-3, 1]$ .

■ Caso 2:  $x_0 \in (0, M)$ .

En esta ocasión  $x_0 = 1/2$  que pertenece al intervalo  $(0, M)$  y que proporciona el valor de  $c = 1$ . Al seleccionar este valor se obtiene una solución que se conoce como ecuación logística, la cual está definida  $\forall t \in \mathbb{R}$  y se expresa como sigue

$$x(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}. \quad (2.12)$$

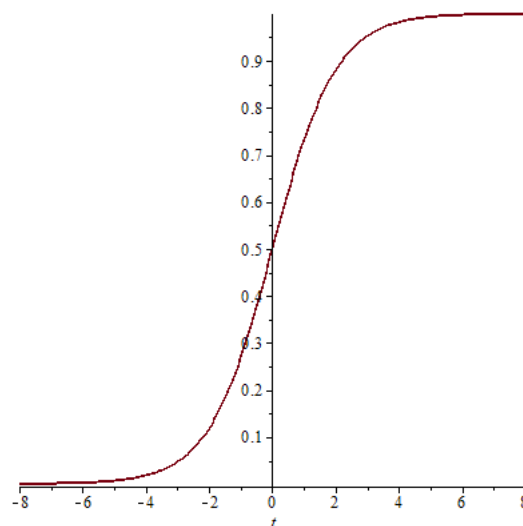


Figura 2.2: Gráfica ecuación logística en  $[-8, 8]$ .

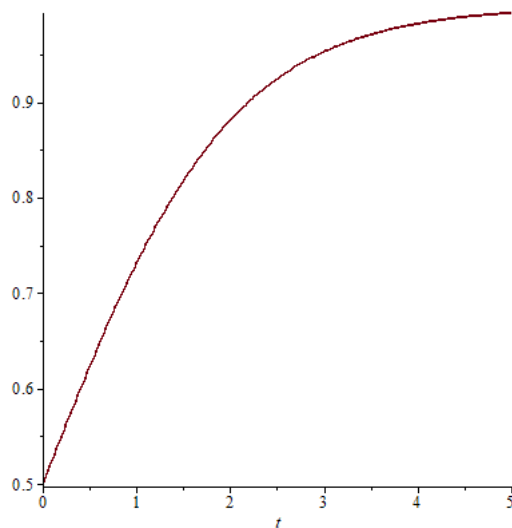


Figura 2.3: Gráfica ecuación logística en  $[0, 5]$ .

Las gráficas asociadas a esta solución se presentan en las Figuras 2.2 y 2.3. En la primera se observa una simetría rotacional respecto del punto  $(0, 1/2)$  y además se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$  por lo que es evidente que es una función acotada.

En cuanto a la segunda representación, se puede apreciar que el crecimiento disminuye a medida que aumenta la variable  $t$ .

■ Caso 3:  $x_0 > M$ .

Se selecciona  $x_0 = 3$  y de esta forma  $c = -2/3$ , por tanto la solución será  $x(t) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}e^{-t}}$ .

Para ver su representación gráfica basta observar la Figura 2.4.

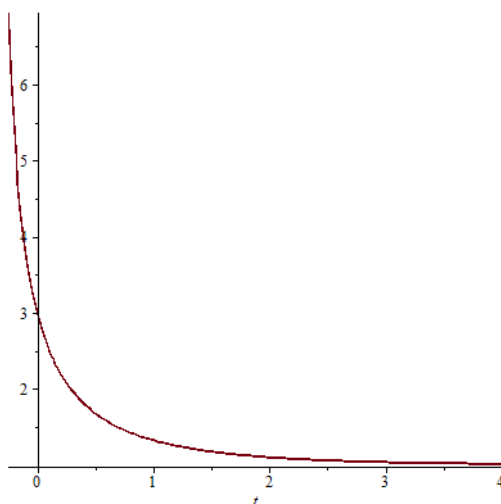


Figura 2.4: Representación de solución particular para  $x_0 > M$  en  $[-0.25, 3]$ .

## 2.3. Resolución de la ecuación diferencial logística en serie de potencias

La solución de la EDO (1.1) también se puede obtener como una serie de potencias. Ahora bien, con el fin de hallar la solución de (1.1) de tal manera, se definirán primero unos conceptos básicos que se puede ver en [2] pero que también se pueden encontrar en [19].

**Definición 2.4.** Una expresión que sigue la siguiente forma

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (2.13)$$

se conoce como **serie de potencias** centrada en  $x_0$ .

Conocida esta definición se presentará el producto de dos series.

**Definición 2.5.** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  dos series, se define su **producto de Cauchy** como la serie

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (2.14)$$

Una vez expuestas estas nociones lo que se pretende es buscar una solución del tipo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (2.15)$$

y para ello se hará uso de [3].

Para hallar la expresión que toma  $x(t)$  es necesario determinar la forma del término  $a_n$  y para ello se empieza derivando (2.15) término a término

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n. \quad (2.16)$$

Ahora utilizando el producto de Cauchy de series de potencias definido en (2.14) se tiene

$$x^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right) t^n, \quad (2.17)$$

por lo que si se sustituye en (1.1) y se igualan las potencias de  $t^n$  resulta que

$$(n+1) a_{n+1} = k a_n - \frac{k}{M} \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j}, \quad \text{con } n \geq 0. \quad (2.18)$$

De aquí, se obtiene la relación de recurrencia siguiente

$$a_{n+1} = \frac{k}{n+1} \left( a_n - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right). \quad (2.19)$$

Una vez conocida tal expresión, falta calcular el valor del término  $a_0$ , que tomando como condición inicial  $x(0) = x_0$  es obvio que  $a_0 = x_0$ .

Finalmente la solución de (1.1) como serie de potencias pasando por  $(0, x_0)$  toma la forma

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{n+1} \left( a_n - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right) t^{n+1}. \quad (2.20)$$

*Observación 2.6.* Cabe destacar que si se toma  $k = M = 1$  y  $a_0 = x_0 = 1/2$ , la serie de potencias presentaría la expresión asociada a la función logística expuesta en la sección anterior. Por tanto la función solución  $x(t)$  vendría dada por la serie de potencias expuesta en (2.20) cuyos coeficientes se corresponderían con la ecuación (2.19) y  $a_0 = 1/2$ . De esta manera la solución quedaría como sigue

$$\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left( a_n - \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right) t^{n+1}. \quad (2.21)$$

Ahora considerando la relación de recurrencia expresada en (2.19), se tiene que los primeros términos de la serie son

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{48}, \quad a_4 = 0, \quad \dots, \quad (2.22)$$

de forma que así se puede expresar la igualdad (2.21), del siguiente modo

$$\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{48}t^3 + \dots \quad (2.23)$$

## 2.4. Relación entre los polinomios de Euler y la función logística

A continuación, se verá la relación existente entre los polinomios de Euler y la función logística teniéndose en cuenta todas las igualdades deducidas hasta el momento. Todo lo expresado y escrito en este apartado se ha extraído de [3].

Antes de comenzar esta nueva sección se expondrá la definición necesaria para el entendimiento de dicho apartado.

**Definición 2.7.** Los **polinomios de Euler** están definidos por la siguiente función

$$\frac{2e^{\xi t}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\xi) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.24)$$

de forma que la serie es convergente para  $|t| < \pi$ .

Ahora, una vez conocida esta noción si se toma  $\xi = 1$  se tiene lo siguiente

$$\frac{2e^t}{e^t + 1} = 2 \left( \frac{1}{1 + e^{-t}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(1) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.25)$$

por tanto es sencillo darse cuenta que

$$\frac{1}{1 + e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} E_n(1) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.26)$$

Entonces como se ha visto que la función logística se puede expresar como en (2.15) y considerándose la anterior igualdad, es obvio que los coeficientes de dicha serie siguen la forma

$$a_n = \frac{E_n(1)}{2n!}. \quad (2.27)$$

Seguidamente, se toma  $E_n = E_n(1)$  de manera que  $a_n = \frac{E_n}{2n!}$  y como  $a_n = \frac{x^{(n)}(0)}{n!}$ , se deduce para la ecuación logística (2.12) la relación buscada

$$x^{(n)}(0) = \frac{E_n(1)}{2}, \quad (2.28)$$

siendo  $E_n(\xi)$  el  $n$ -polinomio de Euler expresado en la Definición 2.7.

En la Tabla 2.4 se encuentran recogidos los primeros coeficientes de la serie de potencias deducida en (2.20) pero calculados en función de los polinomios de Euler tratados hasta ahora.

<b>n</b>	<b><math>E_n(\xi)</math></b>	<b><math>E_n(1)</math></b>	<b><math>E_n(1)/2n!</math></b>
0	$E_0(\xi) = 1$	$E_0(1) = 1$	1/2
1	$E_1(\xi) = \xi - 1/2$	$E_1(1) = 1/2$	1/4
2	$E_2(\xi) = \xi^2 - \xi$	$E_2(1) = 0$	0
3	$E_3(\xi) = \xi^3 - (3/2)\xi^2 + 1/4$	$E_3(1) = -1/4$	-1/48
4	$E_4(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi$	$E_4(1) = 0$	0
5	$E_5(\xi) = \xi^5 - (5/2)\xi^4 + (5/2)\xi^2 - 1/2$	$E_5(1) = 1/2$	1/480

Tabla 2.1: Primeros coeficientes de la solución en serie de potencias (2.20) mediante los polinomios de Euler.

Se ha visto la relación entre la función logística y los polinomios de Euler, sin embargo, estos últimos también se pueden definir como siguen

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^* \frac{t^n}{n!}. \quad (2.29)$$

Dada la igualdad anterior ésta se ha obtenido de  $\frac{2e^{\xi t}}{e^t + 1}$  para  $\xi = 0$ , lo cual implica que  $E_n^* = E_n(0)$  deduciéndose así

$$E_0^* = 1, \quad E_1^* = -1/2, \quad E_2^* = 0, \quad E_3^* = 1/4, \quad \dots, \quad (2.30)$$

que siguen la relación dada por

$$E_n(\xi + 1) + E_n(\xi) = 2\xi^n. \quad (2.31)$$

Finalmente, para  $\xi = 0$  se tienen las siguientes igualdades

$$E_0(1) + E_0(0) = 2, \quad E_n(1) + E_n(0) = 0, \quad \text{para } n \geq 1, \quad (2.32)$$

lo que supone

$$E_n + E_n^* = 0 \iff E_n = -E_n^*, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (2.33)$$

Este nuevo modo de definir los polinomios de Euler junto con las relaciones anteriores, permiten establecer una relación entre las derivadas de la función logística (2.12) y la función zeta de Euler que se define a continuación.

**Definición 2.8.** La **función zeta de Euler** es una función entera en  $\mathbb{C}$  y viene dada por

$$\zeta_E(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}. \quad (2.34)$$

Ahora si se consideran números negativos la función zeta de Euler verifica

$$\zeta_E(-k) = E_k^* \iff \zeta_E(-k) = -E_k(1), \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35)$$

En este contexto, se deduce la relación mencionada antes entre las derivadas y la función zeta de Euler

$$x^{(n)}(0) = \frac{-\zeta_E(-n)}{2}. \quad (2.36)$$

Teniéndose en cuenta la Definición 2.8, dicha función puede usarse para definir la famosa función zeta de Riemann que se presenta y que ha sido extraída de [8].

**Definición 2.9.** La función zeta de Riemann se puede definir como

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (2.37)$$

Conociendo la expresión de la función zeta de Riemann, se puede ver que se cumple la igualdad siguiente entre ambas funciones

$$\zeta(s) = -\frac{1}{2(1-2^{1-s})} \zeta_E(s), \quad (2.38)$$

obteniéndose así una nueva relación entre la función logística (2.12) y la función zeta de Riemann

$$x^{(n)}(0) = (2^{1-s} - 1) \zeta(-m), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

Finalmente, una vez presentadas las resoluciones de la ecuación (1.1) y hecho hincapié en la función logística exponiendo diversas relaciones de la misma con otras funciones es momento de introducir aplicaciones de las mismas.



# Capítulo 3

## Aplicaciones

Este nuevo capítulo se centrará en recopilar distintas aplicaciones de las funciones tratadas anteriormente, ya que como se verá son de gran importancia y muy útiles en distintos ámbitos. Además también se tomarán datos en alguna sección y se verá si se ajustan a ciertas curvas como pueden ser la logística o la exponencial.

### 3.1. Distribución logística

Se comienza este nuevo capítulo con una aplicación de la función logística y es que dicha ecuación se corresponde con la función de distribución de la distribución logística. Para la realización de dicho apartado se empleará [6], aunque también se puede ver en [14].

Este concepto es muy utilizado en ámbitos como la psicología, para comprender el desarrollo del aprendizaje en las personas o en la biología, en particular en el área de la epidemiología como se puede ver en la Sección 3.2, entre otras.

A continuación, se definirá la función de distribución de dicha distribución de probabilidad para una variable continua  $x \sim L(\mu, \sigma^2)$ .

**Definición 3.1.** La **función de densidad** de una variable  $x$  que sigue una distribución logística  $L(\mu, \sigma^2)$  se expresa como

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \frac{e^{-\pi(x-\mu)/\sigma\sqrt{3}}}{(1 + e^{-\pi(x-\mu)/\sigma\sqrt{3}})^2}, \quad (3.1)$$

donde  $\mu, x \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ .

En cuanto a su función de distribución se verá en la definición siguiente.

**Definición 3.2.** La **función de distribución** de una variable  $x$  que sigue una distribución logística  $L(\mu, \sigma^2)$  viene dada por

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{-\pi(x-\mu)/\sigma\sqrt{3}}}, \quad (3.2)$$

con  $\mu, x \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ .

Ahora cabe destacar que tanto la ecuación (3.1) como la (3.2) se pueden expresar de otra manera mediante las funciones de la tangente hiperbólica y la secante hiperbólica. Antes de proceder a su expresión, se presentan dichas funciones.

1. La expresión de la **tangente hiperbólica** viene dada por

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (3.3)$$

y su gráfica, obtenida a través del programa *Maple*, se puede ver en la Figura 3.1.

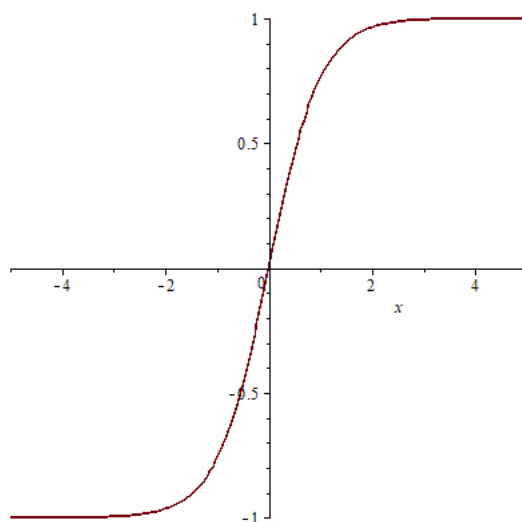


Figura 3.1: Representación de la tangente hiperbólica en  $[-5,5]$ .

2. La expresión de la **secante hiperbólica** viene dada por

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad (3.4)$$

y su gráfica se puede ver en la Figura 3.2.

Entonces, ahora que se conocen las expresiones anteriores, y teniendo en cuenta que se puede expresar

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (3.5)$$

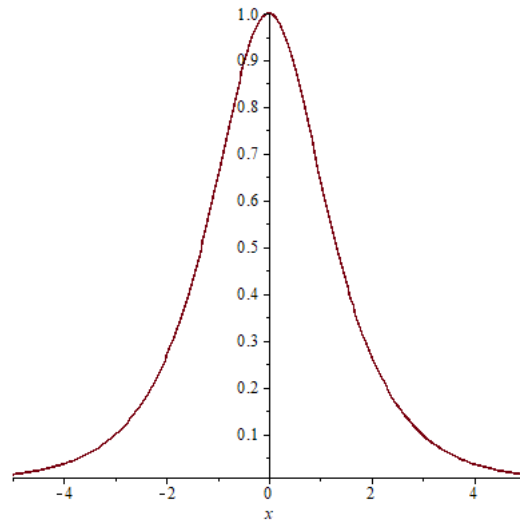


Figura 3.2: Representación de la secante hiperbólica en  $[-5,5]$ .

se concluye que la función de distribución también se puede escribir  $\forall x \in (-\infty, \infty)$  como sigue

$$F(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{\pi(x - \mu)}{2\sigma\sqrt{3}} \right) \right), \quad (3.6)$$

y la función de densidad del siguiente modo

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{\pi}{4\sigma\sqrt{3}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\pi(x - \mu)}{2\sigma\sqrt{3}} \right), \quad \forall x \in (-\infty, \infty). \quad (3.7)$$

En este contexto, es importante conocer la forma estandarizada de la distribución, por tanto tras un proceso de estandarización de la función de densidad así como de la función de distribución siendo  $z = \pi(x - \mu) / \sigma\sqrt{3}$  y  $z \in (-\infty, \infty)$  tales funciones vienen dadas por

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2}, \quad (3.8)$$

$$F(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}, \quad (3.9)$$

y no hay más que fijarse en la segunda para darse cuenta que se corresponde con la función logística (2.12), que ya se representó en la Figura 2.2.

En cuanto a la primera, se ha obtenido su gráfica a partir de *Maple* y la representación se encuentra recogida en la Figura 3.3. Además cabe notar que la ecuación (3.8) es la derivada de la función de distribución (3.9), es decir,  $f(z) = F'(z)$ .

Una vez que se han expuesto estas ideas, se van a estudiar unas de las principales propiedades de la distribución logística, la media y la varianza.

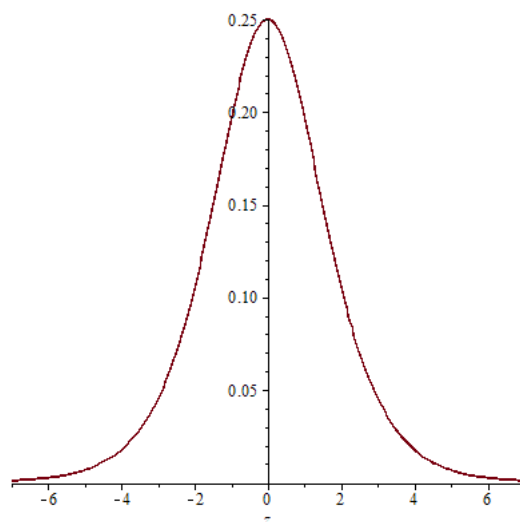


Figura 3.3: Representación de la función de densidad dada por (3.8) en  $[-7,7]$ .

Antes de nada se presentan unas definiciones básicas que serán útiles para su desarrollo y que se encuentran recogidas en [6].

**Definición 3.3.** Sea  $X$  una variable real aleatoria continua con función de densidad  $f(x)$ , entonces se define la **esperanza de  $X$** ,  $E(X) = \mu$  como

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (3.10)$$

**Definición 3.4.** Sea  $X$  una variable real aleatoria continua con función de densidad  $f(x)$ , su **varianza**  $V(X) = \sigma^2$ , se define como

$$\sigma^2 = V(X) = E((X - \mu)^2), \quad (3.11)$$

en particular si  $E(X) = \mu$  se tiene

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (3.12)$$

Por tanto, siendo  $X$  una variable continua cuya función de densidad viene dada por (3.7), se comenzará demostrando que  $E(X) = \mu$  para la distribución logística y posteriormente se verá el valor correspondiente de  $Var(X)$ .

Dada la función de densidad (3.7) y con el objetivo de obtener unos cálculos más sencillos se denota  $a = \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}$  de manera que la función toma la siguiente expresión

$$f(x) = \frac{1}{4a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - \mu}{2a}\right). \quad (3.13)$$

Entonces, se comienza sustituyendo en (3.10) de la siguiente forma

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{(x-\mu)}{2a}\right) dx, \quad (3.14)$$

de modo que al realizar el cambio de variable  $t = \frac{x-\mu}{2a}$  y teniendo así  $dt = \frac{1}{2a} dx$ , se obtiene

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2at + \mu}{2}\right) \operatorname{sech}^2(t) dt = a \int_{-\infty}^{\infty} t \operatorname{sech}^2(t) dt + \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) dt. \quad (3.15)$$

Ahora como la función de la primera integral del sumando es impar se tendrá que la misma es 0 y así se deduce

$$E(X) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) dt = \frac{\mu}{2} \left[ \tanh t \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \mu. \quad (3.16)$$

Ahora que se ha demostrado el valor de la esperanza, es momento de ver el término asociado a la varianza, que en este caso será  $Var(X) = \frac{a^2\pi^2}{3}$ .

Antes de nada, se presentan unos conceptos necesarios para la comprensión de la demostración y que serán útiles durante el proceso.

**Definición 3.5.** Se define la función cuantil o **función de distribución inversa** como la función  $F^{-1}$  que devuelve el  $x$  tal que

$$F(x) = P[X \leq x] = p. \quad (3.17)$$

En particular, para la función de distribución logística la función cuantil sigue la siguiente expresión

$$F^{-1}(p) = \mu + a \ln\left(\frac{p}{1-p}\right). \quad (3.18)$$

Esto se puede encontrar en [11] y a continuación se recoge una nueva noción que se puede ver en [4].

**Definición 3.6.** El **número de Bernoulli**  $B_n$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  sigue la fórmula

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1. \quad (3.19)$$

Entonces, es momento de comenzar la demostración, así teniendo en cuenta la función de densidad de (3.13), se sustituye ésta en la ecuación (3.12) de forma que

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx. \quad (3.20)$$

Ahora bien, si se escribe la expresión anterior mediante la función cuantil (3.18) se deduce

$$\text{Var}(X) = \int_0^1 (F^{-1}(p) - \mu)^2 dp = a^2 \int_0^1 \ln^2 \left( \frac{p}{1-p} \right) dp. \quad (3.21)$$

Dicha integral se puede expresar mediante los números Bernoulli recogidos en la Definición 3.6

$$\int_0^1 \ln^2 \left( \frac{p}{1-p} \right) dp = 2\pi^2 |B_2|, \quad (3.22)$$

y de esta manera, atendiendo a que  $|B_2| = 1/6$ , se concluye que

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2 \pi^2}{3}. \quad (3.23)$$

Con todo esto, se ha realizado un estudio acerca de la distribución logística con el objetivo de introducirla brevemente, pues como ya se dijo es muy útil en múltiples ámbitos.

## 3.2. Epidemiología

Una vez entendida y explicada la sección anterior, se hablará de la repercusión de la función logística en la epidemiología, pues como ya se mencionó dicha ecuación es útil en este área. Para ello se hará uso de [1], y posteriormente, se definirá un nuevo concepto además de analizar unos datos sobre el virus COVID-19 y otros acerca del virus VIH.

Como se explicó en el primer capítulo la ecuación diferencial logística supuso grandes avances para entender la evolución de una población, sin embargo, es posible extender esta función a la epidemiología con el fin de explicar el crecimiento de la población infectada por una enfermedad. Debido a tal extensión, varios modelos epidemiológicos pueden ser expresados mediante ecuaciones logísticas, entre ellos se encuentran el SI (modelo en el que un individuo comienza siendo susceptible y luego se mantiene como infectado) o el SIS (modelo como el SI en el que finalmente el individuo vuelve a ser susceptible).

A continuación, se presentan las funciones logísticas de los modelos citados

$$I' = \beta I \left( 1 - \frac{I}{N} \right), \quad (3.24)$$

$$I' = (\beta - \gamma) I - \frac{\beta}{N} I^2, \quad (3.25)$$

donde  $I$  representa la población de infectados y  $N$  la población total.

Las funciones anteriores no se pueden considerar realistas, pues tanto la capacidad de carga como la tasa de crecimiento de la enfermedad no deberían considerarse valores fijos o constantes. Esto es porque factores externos a la enfermedad, como puede ser la toma de medidas sanitarias o

mismamente la estación del año en la que se encuentre la población, pueden provocar variaciones en ambos valores. Por ello y con el fin de obtener unas ecuaciones que se ajusten de una forma más adecuada a los modelos, se propone que estos términos sean funciones que dependan del tiempo y que, a su vez, estén acotados por constantes positivas. Por tanto, se considerarán ecuaciones bajo la condición inicial  $x(0) = x_0 > 0$  y con  $0 < \alpha \leq a(t) \leq A$ ,  $0 < \beta \leq b(t) \leq B$  de la forma

$$x' = a(t)x - b(t)x^2. \quad (3.26)$$

Finalmente, la ecuación logística además de ser útil a la hora de representar modelos epidemiológicos como los vistos hasta ahora, puede extenderse a un nuevo concepto denotado por función logística generalizada y que es de gran ayuda a la hora de predecir brotes de enfermedades como puede ser el virus COVID-19 o el VIH. Antes de nada, se presenta esta nueva idea que se encuentra recogida en [15].

**Definición 3.7.** La **función logística generalizada** o curva de Richards se corresponde con una extensión de la función logística en la que su crecimiento no tiene porque ser simétrico en el punto de inflexión. Su expresión viene dada por

$$x(t) = A + \frac{k - A}{(c + Q e^{-Bt})^{1/\gamma}}, \quad (3.27)$$

donde  $A$  se corresponde con la asíntota inferior,  $k$  es la superior que en caso de  $A = 0$  ésta representaría la capacidad de carga,  $B$  es la tasa de crecimiento,  $Q$  varía en función de la condición inicial  $x(0) = x_0$ ,  $c$  normalmente se considera 1 y  $\gamma$  afecta al crecimiento máximo asintótico.

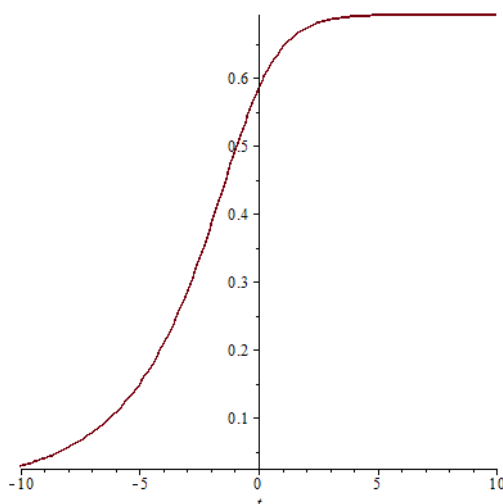


Figura 3.4: Gráfica función logística generalizada en  $[-10, 10]$  con  $A = 0$ ,  $k = 1$ ,  $c = 3$ ,  $Q = 2$ ,  $B = 1$  y  $\gamma = 3$ .

Para ayudar a comprender esta nueva función, en la Figura 3.4 se ha representado con *Maple* un caso particular de la misma en el intervalo  $[-10, 10]$  en la que se observa como no existe simetría respecto del punto de inflexión.

Una vez definido y entendido este concepto, se está en condiciones de presentar una reparametrización de la curva cuya expresión viene dada por

$$f(t; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \varepsilon) = \theta_1 \left[ 1 + \varepsilon e^{-\theta_2(t-\theta_3)} \right]^{-1/\varepsilon}, \quad (3.28)$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ .

Esta reparametrización es la que permite realizar un estudio sobre enfermedades contagiosas, como pueden ser el COVID-19 o el VIH. En ella, el término  $\theta_1$  designa el tamaño final de la epidemia, en otras palabras, el número máximo acumulado de infectados,  $\theta_2$  representa la tasa de infección y  $\theta_3$  se asocia al tiempo que transcurre desde que un individuo es expuesto al virus hasta el momento en que puede transmitir la enfermedad.

*Observación 3.8.* Cabe notar que si  $\varepsilon$  toma el valor 1, entonces la curva sería la función logística descrita en (2.12). Por otra parte, si  $\varepsilon$  converge a 0 por la derecha (números reales positivos), entonces la curva convergería a la curva de Gompertz, que se explicará más adelante en el apartado 3.4.

Para ejemplificar este concepto y conocer más profundamente su uso, se expondrán dos ejemplos de epidemias en España, por una parte se analizarán unos datos acerca del COVID-19 y por otra parte se hablará del VIH.

### 3.2.1. COVID-19

El **COVID-19** es una enfermedad derivada de un nuevo tipo de coronavirus (SARS-CoV-2) que pertenece a una gran familia de virus. Dicha enfermedad provoca infecciones en los humanos e incluso en algunos animales.

Los primeros casos de COVID-19 se identificaron en diciembre de 2019, sin embargo, en España no aparecieron hasta febrero de 2020. En cuanto a la propagación de dicha enfermedad, ésta se produjo muy rápidamente y provocó una pandemia a nivel mundial.

A continuación se considerará el número acumulado de casos de COVID-19 en España en el periodo comprendido entre el 1 de marzo de 2020 y el 13 de abril de 2021 los cuales han sido extraídos de [16], y se verá reflejado lo explicado hasta el momento.

En la Figura 3.5 se encuentran recogidos estos datos mediante un gráfico de barras y sin más que fijarse en tal representación, se podría intuir que la información recogida se adecuaba bastante

a la función logística generalizada. Por tanto, usando el software *Mathematica* se corroborará dicho comportamiento.

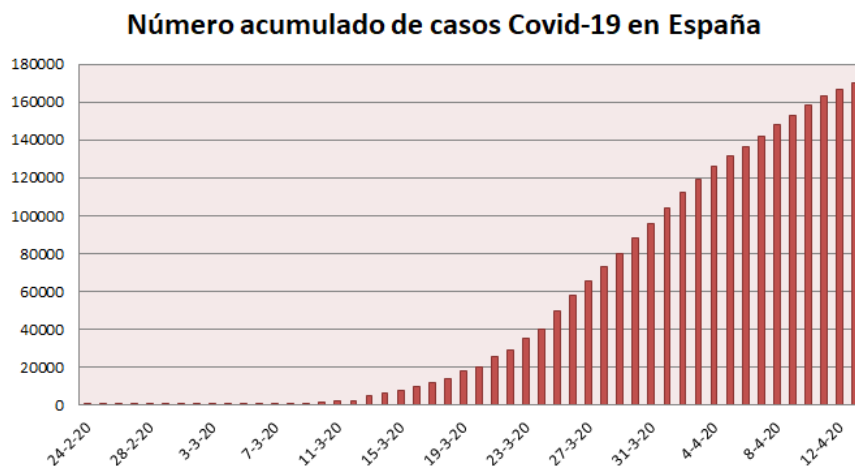


Figura 3.5: Representación gráfica con el número de casos acumulado de COVID-19 en España.

Primero, se han introducido los datos en *Mathematica* y seguidamente se ha realizado un ajuste de los mismos a la curva (3.28) tomándose  $\varepsilon = 1$ ,  $\theta_1 = a$ ,  $\theta_2 = b$  y  $\theta_3 = c$ .

```
> LFitC19 = NonlinearModelFit[LdataC19, a/(E^(-b*(t - c)) + 1), {a, b, c}, t]
> LFitC19["BestFitParameters"]
```

Tras dicho proceso se obtienen los valores para los parámetros deseados:  $a = 177810$ ,  $b = 0,192926$  y  $c = 35,2084$ , siendo así la curva ajustada para  $t \in \mathbb{R}$  la siguiente

$$f(t) = \frac{177810}{1 + e^{-0,192926(t-35,2084)}} \quad (3.29)$$

De esta forma, en la Figura 3.6, que ha sido obtenida gracias al programa, se muestra dicha curva junto los datos recogidos.

```
> Show[ListPlot[LdataC19], Plot[LFitC19[t], {t, 0, 49}], Frame -> True
```

En este caso, se aprecia fácilmente que el número de casos acumulados de COVID-19 en el periodo considerado se ajusta muy bien a la curva de Richards siendo cierto así, lo intuïdo al principio.

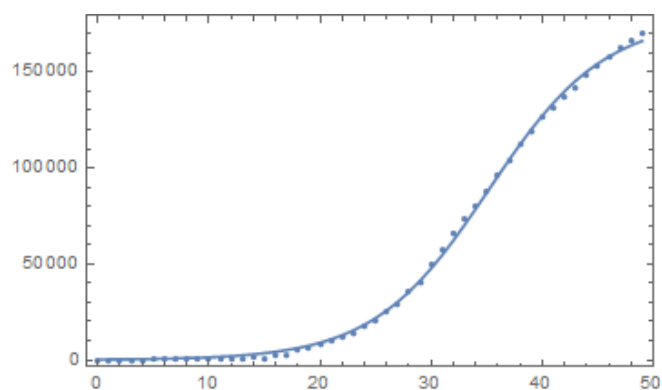


Figura 3.6: Gráfica con la curva (3.29) junto con los datos representados por puntos.

### 3.2.2. VIH

Tras realizar un análisis sobre el virus COVID-19, se presenta el tema que da nombre a este apartado, el **VIH** o virus de inmunodeficiencia humana. Este virus ataca sobre un tipo de glóbulos blancos de tal manera que el cuerpo humano pierde poco a poco la capacidad de combatir las infecciones.

Los primeros casos diagnosticados aparecen en 1981, sin embargo dicha enfermedad estaba presente con anterioridad en el mundo y en particular, en España el primer caso fue diagnosticado ese mismo año.

En este contexto, se va a considerar el número de casos de VIH acumulado por año de diagnóstico en España desde 1981 hasta 2020 que se encuentra recogido en [17] y que se muestra en la Figura 3.7.

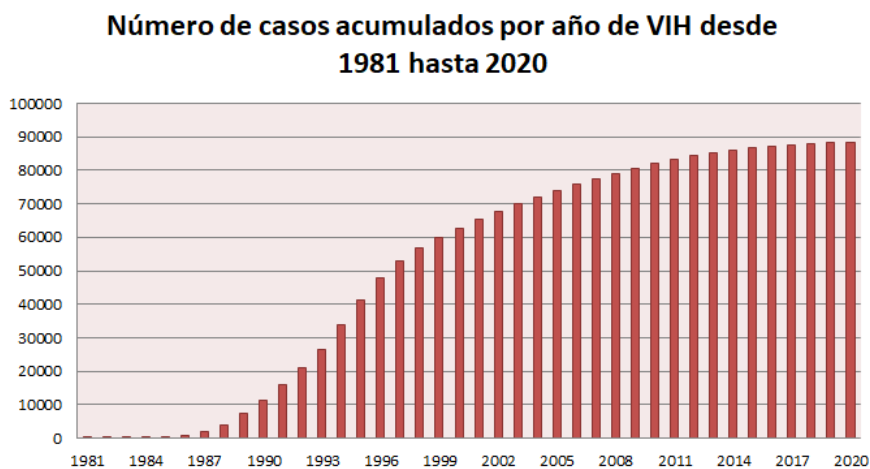


Figura 3.7: Representación gráfica del número de casos acumulados de VIH en España.

Una vez conocidos los datos e introducidos en *Mathematica*, se procede de manera análoga a la subsección anterior, y se ajusta dicha información a la ecuación (3.28) teniendo en cuenta que  $\varepsilon = 1$ ,  $\theta_1 = a$ ,  $\theta_2 = b$  y  $\theta_3 = c$ .

```
> LFitvih = NonlinearModelFit[Ldatavih, a/(E^(-b*(t - c)) + 1), {a, b, c}, t]
> LFitvih["BestFitParameters"]
```

Así, los valores asociados a dichos parámetros tras el ajuste de los datos son:  $a = 84753,8$ ,  $b = 0,276668$  y  $c = 14,9605$ , de forma que la curva (3.28), sustituyendo los parámetros por los valores adquiridos, para  $t \in \mathbb{R}$  sería del siguiente modo

$$f(t) = \frac{84753,8}{1 + e^{-0,276668(t-14,9605)}}. \quad (3.30)$$

Finalmente, en la Figura 3.8 se pueden apreciar tanto los datos recogidos, en otras palabras, los casos acumulados por años de diagnóstico desde 1981 hasta 2020, como la función (3.30). Por tanto, al igual que ocurría con el virus COVID-19, el comportamiento del virus del VIH se ajusta considerablemente a la curva de Richards expresada en (3.30).

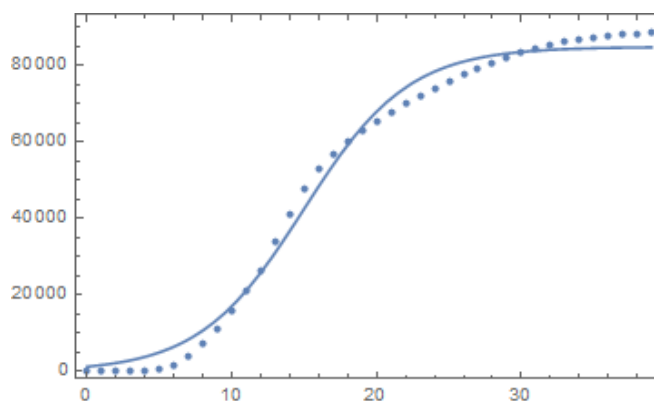


Figura 3.8: Gráfica con la curva 3.30 junto con los datos representados por puntos.

Una vez expuestos los ejemplos, cabe destacar que entonces la ecuación diferencial logística, así como la función logística, son muy útiles en la epidemiología y teniendo en cuenta la repercusión que tuvo el virus COVID-19 en la población mundial, las mismas han ayudado notablemente en el ámbito y por tanto en la sociedad.

### 3.3. Plataformas de streaming

A continuación se presenta un tema que cada día merece más atención, las plataformas de streaming. Estos medios han supuesto un gran avance o revolución hasta el momento en la

industria del entretenimiento, pues han conseguido poner contenidos de calidad al alcance de cualquier individuo que posea internet. Además, no habría sido posible sino fuera por todos los avances tecnológicos que se han producido en los últimos años.

Éstas se encuentran en pleno auge desde hace un tiempo, pues a menudo aparecen nuevas plataformas y cada vez más personas están suscritas a las mismas. En particular, en España un 50% de la población está suscrita a algún tipo de aplicación de streaming ya sean tanto de series y películas como de música o deporte. Entre ellas se encuentran dos, Netflix y Youtube, que serán objeto de estudio en los próximos apartados.

### 3.3.1. Netflix

Se comienza analizando una de las que tiene un mayor impacto en el mundo y en España, Netflix. Ésta destaca sobre todo por su autonomía, pues los usuarios pueden decidir qué ver, dónde, cuándo y cómo. Dicha flexibilidad es una de las principales razones que ha llevado a que a medida que transcurre el tiempo su actividad aumente, y en particular que su número de abonados crezca considerablemente.

Este crecimiento de suscriptores, desde su inicio hasta el día de hoy, se puede representar mediante una ecuación diferencial logística, pues es obvio que en los primeros años el número de usuarios es bajo, pero a medida que pasa el tiempo este crece exponencialmente hasta llegar a su capacidad máxima.

Esto es lo que se verá a continuación al realizar un análisis sobre el número de suscriptores que posee Netflix en el mundo (en millones) desde el primer trimestre de 2012 hasta el primero de 2021, extraídos de [20].

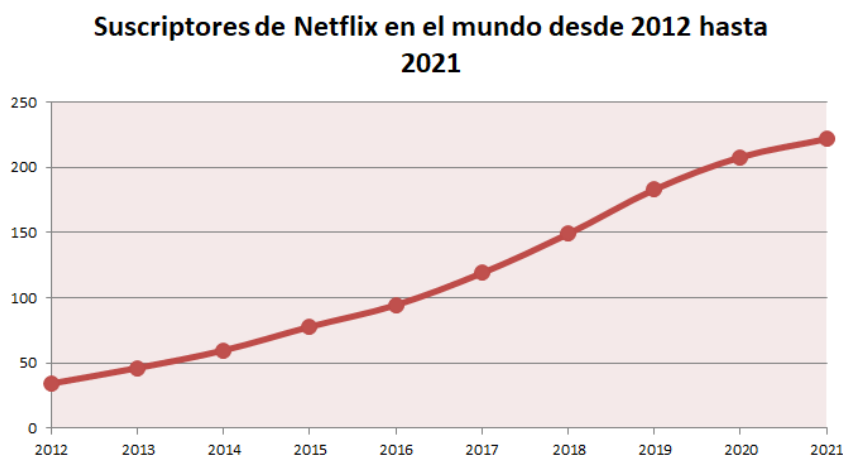


Figura 3.9: Representación gráfica del número de suscriptores de Netflix en el mundo en millones.

En la Figura 3.9 se muestra un gráfico con el número de abonados que posee Netflix en el mundo en el periodo seleccionado. A continuación se realizará un ajuste mediante *Mathematica* de los datos a ciertas curvas como son la exponencial o la expresada en (2.7).

Primeramente, se considera la función exponencial de la forma

$$f(t) = a e^{kt}, \quad (3.31)$$

```
> LFitN = NonlinearModelFit[Ldatanetflix, a*E^(k*t), {a, k}, t]
> LFitN["BestFitParameters"]
```

y se obtienen los valores asociados a los términos  $a$  y  $k$  con los comandos anteriores, siendo éstos  $4,57867 \times 10^7$  y  $0.184222$ , respectivamente.

Por consiguiente, se tendrá que la expresión de la ecuación exponencial ajustada es

$$f(t) = 4,57867 \times 10^7 e^{0,184222t}. \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta esta ecuación, se intuye que existe un crecimiento exponencial en el número de suscriptores de dicha plataforma, dónde la tasa de crecimiento se asocia al parámetro  $k$  y  $a$  determina la condición inicial, es decir, para un tiempo inicial  $t = 0$  la cantidad de abonados.

A continuación, se considera la curva (2.7), es decir, la solución de la ecuación diferencial logística tomándose  $k = 0,184222$  y  $x_0 = a = 4,57867 \times 10^7$ , y se procede de manera análoga al caso anterior.

```
> LFitN2 = NonlinearModelFit[Ldatanetflix,
{(4.57867*10^7*m*E^(0.184222* t))/(m + 4.57867*10^7* (E^(0.184222*t) - 1))} , {m}, t]
```

Entonces, se adquiere un valor  $m = 2,40734 \times 10^{10}$  que representa la capacidad máxima de suscriptores que posee Netflix, y así la función (2.7) se puede expresar como sigue

$$x(t) = \frac{1,10224 \times 10^{18} e^{0,184222t}}{2,40734 \times 10^{10} + 4,57867 \times 10^7 (-1 + e^{0,184222t})}. \quad (3.33)$$

Una vez estudiado su comportamiento, en la Figura 3.10 se representa la curva anterior y los datos del número de suscriptores de Netflix utilizados hasta el momento. En este contexto, es sencillo ver que los datos elegidos se adecúan bastante bien a una función del tipo (2.7), por tanto a medida que transcurra el tiempo, el número de suscriptores de Netflix comenzará a estabilizarse.

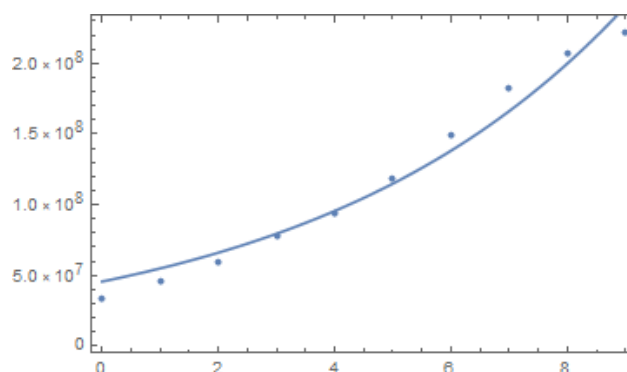


Figura 3.10: Representación gráfica de (3.33) junto con los datos proporcionados representados por puntos.

### 3.3.2. Youtube

Es momento de hablar de un medio muy presente en la sociedad mundial digitalizada, Youtube. Dicho espacio, además de desempeñar su rol como plataforma de streaming, ofrece diferentes herramientas que le aportan la faceta de red social entre las que se encuentran la posibilidad de compartir, valorar o comentar vídeos, entre otras.

Youtube cuantifica más de 1000 millones de cuentas y al igual que ocurría con la anterior plataforma, su número de usuarios desde sus inicios ha crecido exponencialmente.

En este apartado, se considerará el número de usuarios de Youtube por años desde 2012 hasta 2021 (en miles de millones) en el mundo y se ajustarán las mismas funciones que se trataron en la sección anterior.

Entonces, se comienza introduciendo en el programa los datos que se pueden ver recogidos en la Figura 3.11 y que se han obtenido de [12].

Una vez establecidos los datos sobre los que se trabajará, se ajustan los mismos a la función exponencial (3.31) siguiendo

```
> LFitY = NonlinearModelFit[Ldatayoutube, a*E^(k*t), {a, k}, t]
> LFitY["BestFitParameters"]
```

y obteniéndose así  $a = 8,34586 \times 10^8$  y  $k = 0,12601$ .

De esta forma la curva posee la siguiente expresión

$$f(t) = 8,34586 \times 10^8 e^{0,12601t}. \quad (3.34)$$

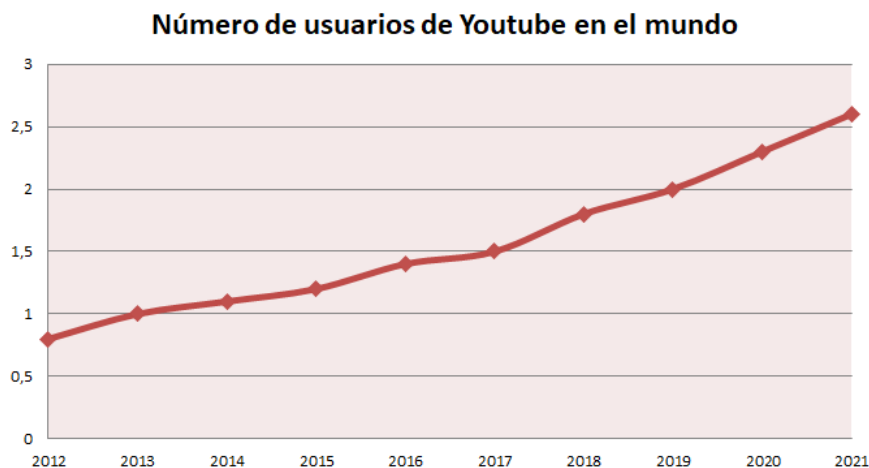


Figura 3.11: Representación gráfica del número de usuarios de Youtube en el mundo en miles de millones.

Seguidamente, se considera de nuevo una curva como (2.7) y se toman los valores proporcionados por *Mathematica*  $a = x_0$  y  $k$ . De esta forma se obtiene que el parámetro  $m = 3,58194 \times 10^{20}$  y por tanto la ecuación tomaría la forma

$$x(t) = \frac{2,98944 \times 10^{29} e^{0,12601t}}{3,58194 \times 10^{20} + 8,34586 \times 10^8 (-1 + e^{0,12601t})}. \quad (3.35)$$

Así, se realiza una presentación en la que se combinan los datos usados para el estudio y la gráfica de la curva anterior, y ésta se expone en la Figura 3.12.

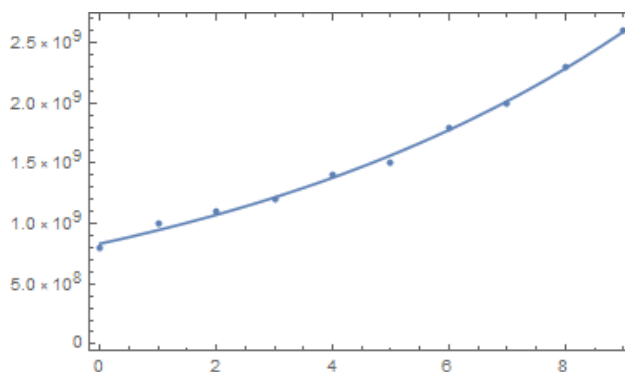


Figura 3.12: Gráfico dónde los puntos representan datos recogidos y la curva se corresponde con la representación de (3.35).

Cabe destacar que con este procedimiento, se ha obtenido un valor muy elevado del parámetro  $m$  lo cual indica que es bastante improbable que se alcanza la capacidad máxima de usuarios de Youtube.

Además si se atiende tanto a la Figura 3.10 como a la Figura 3.12 se observa que la segunda curva es un poco más estable que la primera, y esto podría deberse a que Youtube se encuentra establecido en la sociedad desde hace más tiempo que Netflix, por lo que éste probablemente se aproxime antes a su capacidad máxima.

### 3.4. Crecimiento de tumores

Se comienza una nueva sección en la que se expondrá la curva de Gompertz mencionada en la Observación 3.8. Dicha curva es muy útil en diversos ámbitos pero especialmente en la medicina, pues la misma se utiliza para explicar el crecimiento o evolución de tumores.

Primeramente se expondrá la función de Gompertz junto con su ecuación diferencial, lo cual se encuentra recogido en [21].

**Definición 3.9.** La **función de Gompertz** definida  $\forall t \in \mathbb{R}$  sigue la siguiente expresión

$$y(x) = k e^{-e^{-bx}}, \quad (3.36)$$

donde tanto  $a$  como  $b$  y  $k$  son números positivos.

Para facilitar la comprensión del comportamiento de la función anterior en la Figura 3.13 se recogen dos casos de la misma, en azul se encuentra la función para los valores  $a = b = 1$  y  $k = 1/2$ , y en rojo se aprecia para  $a = b = k = 1$ .

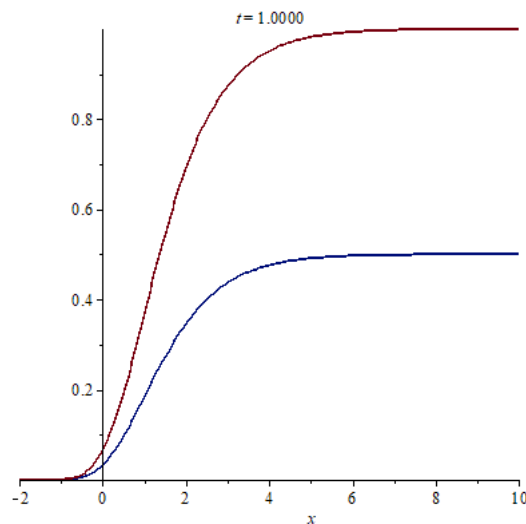


Figura 3.13: Representación gráfica de la función (3.36) en  $[-2, 10]$  para  $a = b = 1$ . En azul  $k = 1/2$  y en rojo  $k = 1$ .

Gracias a la Figura 3.13 y a la definición anterior es sencillo fijarse en que la  $y = k$  representa una asíntota al igual que  $y = 0$ , pero la función no es simétrica. Por otra parte, se tienen dos puntos de inflexión uno en  $y = a/b$  y otro en el punto  $y = k/e$ .

A continuación se muestran dos representaciones gráficas en las que se recogen dos casos particulares de la función de Gompertz.

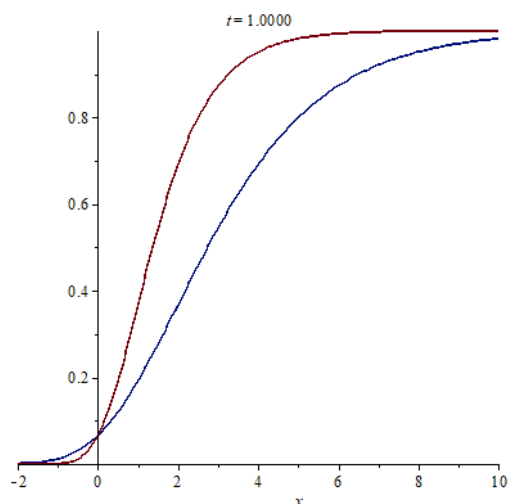


Figura 3.14: Representación gráfica de la función (3.36) en  $[-2, 10]$  para  $a = k = 1$ . En azul  $b = 1/2$  y en rojo  $b = 1$ .

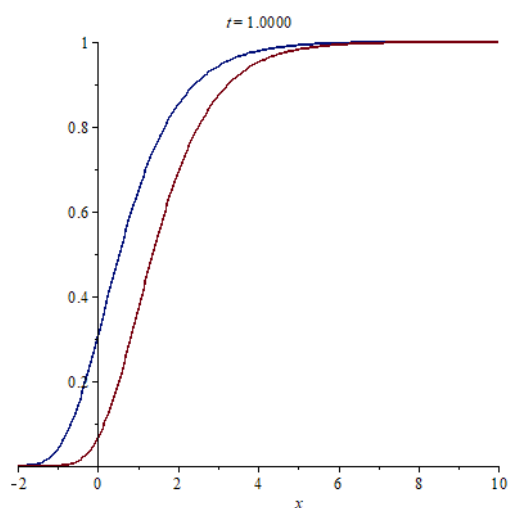


Figura 3.15: Representación gráfica de la función (3.36) en  $[-2, 10]$  para  $b = k = 1$ . En azul  $a = 1/6$  y en rojo  $a = 1$ .

Por un lado, en la Figura 3.14 se tienen dos casos en los que  $a = k = 1$  pero se varía el

término  $b$ , en azul  $b = 1/2$  y en rojo  $b = 1$ . En esta situación, se muestra de un modo sencillo que al aumentar el parámetro  $b$  la velocidad con la que crece la función aumenta a partir de los valores positivos.

Por otro lado, en la Figura 3.15 se procede de manera análoga pero en este caso se toma el término  $a \in \{1/2, 1\}$  y  $b = k = 1$ . Entonces con esto se aprecia fácilmente que el parámetro  $a$  simplemente supone una variación de la función en el eje de las abscisas.

En cuanto a la ecuación diferencial asociada a dicha función ésta se presenta a continuación.

**Definición 3.10.** La **ecuación diferencial de Gompertz**  $\forall t \in \mathbb{R}$  se define como

$$y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = b y \ln \left( \frac{k}{y} \right). \quad (3.37)$$

Ahora es momento de presentar la ecuación diferencial que se utiliza para explicar el crecimiento tumoral, ésta se basa en la definición anterior y se puede encontrar en [9],

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial t} = r x(t) \ln \left( \frac{k}{x(t)} \right). \quad (3.38)$$

En este caso es obvio que la función es una ecuación diferencial de variables separadas explicadas en la Definición 2.2, entonces sin más que proceder como en el Ejemplo 2.3 se obtiene la solución siguiente

$$x(t) = \frac{k}{e^{e^{-r(t+c)}}} = \frac{k}{e^{\alpha e^{-rt}}}. \quad (3.39)$$

Ahora se considera  $x(0) = x_0$  y se calcula el valor de  $\alpha$ , siendo así  $\alpha = \ln \left( \frac{k}{x_0} \right)$ , de manera que al sustituir dicho valor en la ecuación (3.39) se deduce la solución

$$x(t) = k \left( \frac{x_0}{k} \right)^{e^{-rt}}. \quad (3.40)$$

A continuación se comprueba con el programa *Maple* que dicha solución es la correcta.

```
> g := diff(x(t), t) = r*x(t)*ln(k/x(t));
```

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = r x(t) \ln \left( \frac{k}{x(t)} \right)$$

```
> sol := dsolve(g, x(t));
```

$$x(t) = k e^{-e^{-C_1 r - r t}}$$

```
> eval(sol, t = 0);
```

$$x(0) = k e^{-e^{-C_1 r}}$$

```
> C := solve(x(0) = k*exp(-exp(-C1*r)), _C1);
```

$$-\frac{\ln\left(-\ln\left(\frac{x(0)}{k}\right)\right)}{r}$$

```
> solucion := eval(sol, _C1 = C);
```

$$x(t) = k e^{-e^{\ln\left(-\ln\left(\frac{x(0)}{k}\right)\right) - r t}}$$

```
> sol2 := simplify(solucion);
```

$$x(t) = k \left(\frac{x(0)}{k}\right)^{e^{-r t}}$$

Por tanto se ha visto que la solución dada por *Maple* se corresponde con la calculada anteriormente en (3.40). Entonces gracias a la ecuación se puede expresar el crecimiento de un tumor siendo  $x_0$  la condición inicial, es decir, el tamaño inicial del tumor, el parámetro  $k$  el tamaño máximo que puede alcanzar el tumor y  $r$  la tasa de crecimiento, la cual es distinta dependiendo de las células del tumor.

A continuación se propone un caso particular de la función anterior, tomándose los valores siguientes:  $x_0 = 10^{-8}$ ,  $k = 10^8$  y  $r = 0,08$ , y se presenta en la Figura 3.16 la gráfica de la función correspondiente

$$x(t) = 10^8 \left(\frac{10^{-8}}{10^8}\right)^{e^{-0,08t}}. \quad (3.41)$$

Como se puede ver en la gráfica, se produce un crecimiento considerable y de modo muy rápido para valores de  $t$  pequeños. Esto quiere decir que en su inicio, el crecimiento del tumor se produce de manera veloz, sin embargo, para valores de  $t$  elevados, la función se aproxima cada vez más al valor máximo fijado  $k = 10^8$  (tamaño máximo del tumor) de manera que la función se estabiliza.

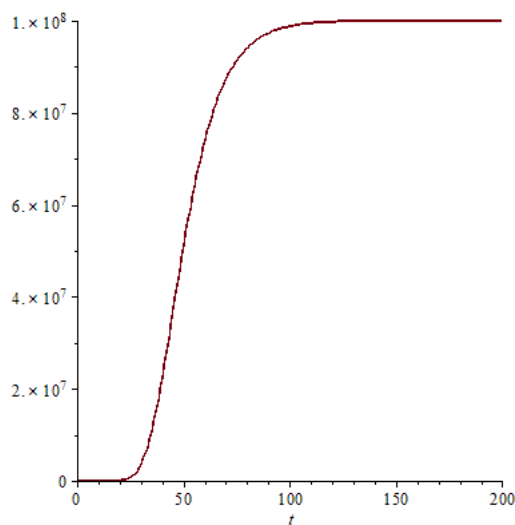


Figura 3.16: Representación gráfica de la solución particular (3.41) en  $[0, 200]$  para  $x_0 = 10^{-8}$ ,  $k = 10^8$  y  $r = 0,08$ .

### 3.5. Sistema de clasificación Elo

Una vez hablado del uso de las ecuaciones que son objeto de estudio en el crecimiento de tumores, así como en las plataformas de streaming o en la epidemiología, se trata otro ámbito en el que son realmente útiles las mismas. Esta aplicación se centra en el sistema de clasificación Elo, que se corresponde con un método de clasificación que en su inicio se utilizaba para clasificar a los jugadores de ajedrez.

Este método también se ha utilizado en otras áreas como puede ser en concursos o incluso en el fútbol, pero en este caso, se hablará simplemente de como se utiliza para realizar la clasificación FIDE (Federación Internacional de Ajedrez). Esta información se ha extraído de [18] dónde también se puede ver el uso de este método en sistemas educativos adaptativos.

Para el desarrollo del ranking en la FIDE como se ha dicho se usa la clasificación Elo, en la cual las diferencias entre los jugadores se basan en probabilidades. Antes de comenzar, lo que se expone a continuación se recoge y basa en [10].

Primero se consideran tres jugadores que se denotan por  $x, y, z$  de manera que  $x$  tiene una probabilidad de puntuar sobre  $y$ , y análogamente ocurre con el jugador  $y$  sobre  $z$  entonces

$$\left(\frac{P_{xy}}{P_{yx}}\right) \left(\frac{P_{yz}}{P_{zy}}\right) = \left(\frac{P_{xz}}{P_{zx}}\right), \quad (3.42)$$

donde  $P_{xy}$  es la probabilidad de  $x$  puntuar sobre  $y$ .

Tras esto se toman los logaritmos a ambos lados de la ecuación, y si se denota la diferencia

entre las puntuaciones de los jugadores  $x$  e  $y$  como sigue

$$C \ln \left( \frac{P_{xy}}{P_{yx}} \right) = D_{xy}, \quad (3.43)$$

entonces se tendrá que

$$D_{xy}D_{yz} = D_{xz}. \quad (3.44)$$

Una vez obtenida esta función, se puede expresar la ecuación (3.43) que representa la probabilidad de que un jugador puntúe sobre otro de la siguiente forma

$$P_D = \frac{1}{1 + e^{-D/C}}, \quad (3.45)$$

que sin más que fijarse se trata de una variación de la ecuación (2.12), donde  $D$  es la diferencia en las puntuaciones y  $C$  se corresponde con el intervalo de clase en la escala determinada que en su inicio se encuentra establecida en  $D$ .

De forma análoga, se podría obtener la probabilidad de puntuar de un jugador mediante el logaritmo en otra base, como puede ser  $\sqrt{10}$ , obteniéndose así la ecuación correspondiente

$$P_D = \frac{1}{1 + 10^{-D/2C}}. \quad (3.46)$$

Entonces se recogen en la Tabla 3.1 las probabilidades de puntuar de dos jugadores según la ecuación (3.46), uno con una puntuación mayor  $H$  y otro con una menor  $L$ , en función del término  $D$ .

Ahora sin más que fijarse en la misma, es sencillo ver que a mayor diferencia entre las puntuaciones de los jugadores,  $D$ , el jugador con más puntuación posee una mayor probabilidad aproximándose cada vez más a 1 y el jugador con menos aproximándose a 0.

Conociendo la probabilidad de puntuar, surge la duda de si existe una ecuación que se utilice para obtener la puntuación que adquiere un jugador después de un torneo o competición. Pues dicha función sí existe y viene dada por lo siguiente

$$R_n = R_0 + K(W - W_e), \quad (3.47)$$

donde  $R_0$  se corresponde con la puntuación del jugador antes del evento,  $R_n$  con la puntuación tras la competición,  $K$  es el valor en puntos de la puntuación de una sola partida,  $W$  es la puntuación real de la partida y finalmente  $W_e$  se asocia a la puntuación esperada del juego en base a  $R_0$ .

Dada dicha función, el parámetro  $W$  se obtiene mediante la suma del número de victorias y la mitad del número de empates, en cuanto al término  $W_e$  se corresponde con la suma de las

D	P		D	P		D	P	
	H	L		H	L		H	L
0-3	0.5	0.5	120-127	0.67	0.33	282-294	0.84	0.16
4-10	0.51	0.49	128-135	0.68	0.32	295-308	0.85	0.15
11-17	0.52	0.48	136-143	0.69	0.31	309-323	0.86	0.14
18-24	0.53	0.47	144-151	0.7	0.3	324-338	0.87	0.13
25-31	0.54	0.46	152-159	0.71	0.29	339-354	0.88	0.12
32-38	0.55	0.45	160-168	0.72	0.28	355-372	0.89	0.11
39-45	0.56	0.44	169-177	0.73	0.27	373-391	0.9	0.10
46-52	0.57	0.43	178-186	0.74	0.26	392-412	0.91	0.09
53-59	0.58	0.42	187-195	0.75	0.25	413-436	0.92	0.08
60-66	0.59	0.41	196-205	0.76	0.24	437-463	0.93	0.07
67-74	0.6	0.4	206-214	0.77	0.23	464-494	0.94	0.06
75-81	0.61	0.39	215-224	0.78	0.22	495-530	0.95	0.05
82-88	0.62	0.38	225-235	0.79	0.21	531-576	0.96	0.04
89-96	0.63	0.37	236-246	0.8	0.2	577-636	0.97	0.03
97-103	0.64	0.36	247-257	0.81	0.19	637-726	0.98	0.02
104-111	0.65	0.35	258-269	0.82	0.18	727-920	0.99	0.01
112-119	0.66	0.34	270-281	0.83	0.17	> 920	1.0	0.0

Tabla 3.1: Probabilidad de los jugadores  $H$  y  $L$  en función de la diferencia  $D$  en base  $\sqrt{10}$ .

puntuaciones esperadas para cada partida, es decir,  $W_e = \sum P_i$ , sin embargo, se puede calcular de la siguiente forma aunque suponga una pequeña pérdida de precisión

$$W_e = N P_{D_C}, \quad (3.48)$$

donde  $N$  designa al número total de partidas y  $P_{D_C}$  denota la probabilidad establecida por  $D_C = R - R_C$ , en otras palabras, por la diferencia entre la puntuación del jugador y la puntuación media de los rivales del mismo.

Considerando la ecuación (3.47) se muestra que las puntuaciones de los jugadores varían en función de lo sorprendente que sean las partidas. En otras palabras, cuando un jugador débil, que posee una puntuación baja, vence a uno fuerte con puntuación elevada, se supone que es sorprendente, por tanto el cambio en la puntuación será cuantioso.

Para ejemplificar este sistema y así mejorar su comprensión, se expone a continuación un ejemplo de un caso particular basado en un ejemplo de [10], en el que se quiere obtener la calificación final de un jugador tras un torneo.

**Ejemplo 3.11.** Se considera un jugador de ajedrez que antes de un torneo posee una puntuación de  $R_0 = 2657$ . En la competición se enfrenta contra 12 oponentes con una puntuación media  $R_C = 2512$ , de manera que así  $D_C = 145$ , y entonces según la Tabla 3.1 se deduce que  $P_{D_C} = 0,7$ . Teniendo en cuenta esto y la ecuación (3.48) se obtiene

$$W_e = 12 \cdot 0,7 = 8,4, \quad (3.49)$$

y como en competiciones internacionales se toma  $K = 10$  y la puntuación final del jugador en la competición fue  $W = 9,25$  se obtiene el valor esperado considerando la función (3.47)

$$R_n = 2657 + 10(9,25 - 8,4) = 2665,5. \quad (3.50)$$

Con todo esto se finaliza el capítulo donde se ha demostrado la importancia y lo interesante que es a nivel práctico la ecuación diferencial logística, pero principalmente su solución particular, la función logística.



# Bibliografía

- [1] Agarwal, P., Nieto, J. J., Ruzhansky, M. y Torres, D. F. M. (2021). Generalized Logistic Equations in Covid-Related Epidemic Models. *Analysis of Infectious Disease Problems (COVID-19) and Their Global Impact*. Springer Nature.
- [2] Apostol, T. M. (1977). *Análisis Matemático*, 2nd ed. Ed. Reverté.
- [3] Area, I. y Nieto, J. J.(2021). Power series solution of the fractional logistic equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 573. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.125947>.
- [4] Arakawa, T., Ibukiyama, T. y Kaneko, M. (2014). *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*. Springer.
- [5] Bacaër, N. (2021). Verhulst y la ecuación logística (1838). *Breve historia de los modelos matemáticos en dinámica de poblaciones*, (pp. 37-41).
- [6] Balakrishnan, N. (1992). *Handbook of the Logistic Distribution*. Marcel Dekker.
- [7] Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson Editores, S.A.
- [8] Blinder, S. M. (2013). Mathematical Thinking. *Guide to Essential Math (Second Edition)*, (pp. 1-16). <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407163-6.00001-1>
- [9] Durrett, R. y Talkington, A. (2015). Estimating Tumor Growth Rates In Vivo. *Bulletin of mathematical biology*, 77(10). <https://doi.org/10.1007/s11538-015-0110-8>.
- [10] Elo, A. E. (1986) *The rating of chessplayers, past & present*, 2nd ed. Arco Publishing.
- [11] Gilchrist, W. G. (2000). *Statistical Modelling with Quantile Functions*. Chapman & Hall/CRC.
- [12] GMI Blogger (18 de abril de 2022). *Youtube User Statistics 2022*. <https://www.globalmediainsight.com/blog/youtube-users-statistics/#year>. Consultado el 3 de junio de 2022.

- [13] Grinstead, C. M. y Snell, J. L. (2012). *Introduction to Probability: Second Revised Edition*. American Mathematical Society.
- [14] Johnson, N. L., Kotz, S. y Balakrishman, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions Volume 2*. Wiley-Interscience.
- [15] Lee, S. Y., Lei, B. y Mallick, B. (2020). Estimation of COVID-19 spread curves integrating global data and borrowing information, *PLoS ONE* 15(7). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0236860>.
- [16] Mendoza, J. (12 de mayo de 2022). *Cumulative number of confirmed cases and deaths of the novel coronavirus (COVID-19) in Spain between February 1, 2020 and May 11, 2022*. Statista. <https://www.statista.com/statistics/1109308/cumulative-coronavirus-cases-deaths-and-recoveries-in-spain/>.
- [17] Ministerio de Sanidad, Dirección General de Salud Pública, Sistemas Autonómicos de Vigilancia Epidemiológica (2020). *Vigilancia Epidemiológica del VIH y SIDA en España 2019: sistema de Información sobre nuevos diagnósticos de VIH, registro nacional de casos de SIDA*. Gobierno de España. [https://www.sanidad.gob.es/ciudadanos/enfLesiones/enfTransmisibles/sida/vigilancia/Informe\\_VIH\\_SIDA\\_20201130.pdf](https://www.sanidad.gob.es/ciudadanos/enfLesiones/enfTransmisibles/sida/vigilancia/Informe_VIH_SIDA_20201130.pdf).
- [18] Pelánek, R. (2016). Applications of the Elo rating system in adaptive educational systems. *Computers & Education*, 98. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.03.017>.
- [19] Simmons, G. F. (1993). *Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*, 2nd ed. Ed. McGraw-Hill.
- [20] Stoll, J. (22 de abril de 2022). *Number of Netflix paid subscribers worldwide from 3rd quarter 2011 to 1st quarter 2022*. Statista. <https://www.statista.com/statistics/250934/quarterly-number-of-netflix-streaming-subscribers-worldwide/>.
- [21] Winsor, C. P. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 18(1). <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1076153/pdf/pnas01729-0009.pdf>.