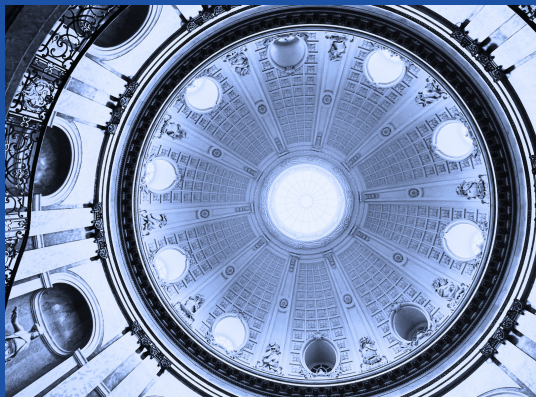
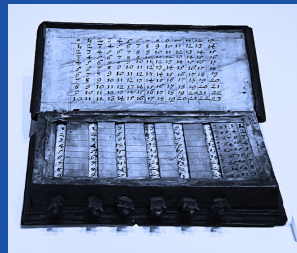
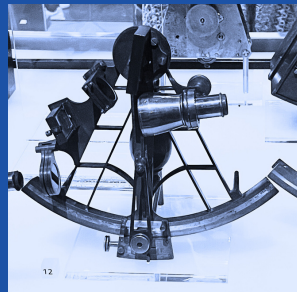


# ÁIS



# MATES



# Introdución

## Editores da revista

---

**P**resentámosvos o número de decembro de “Máis Mates”. Non volveremos a sacar número ata o mes de febreiro, pois estamos en época de exames e precisamos máxima concentración.

### EXTRACTO

Agradecemos a Santy, Nacho, Fran, Guille e a Antón, do grupo Sementeira, pola redacción dos diferentes artigos. Moitas grazas tamén ao profesor Óscar Rivero Salgado, pois contamos cunha entrevista sobre a súa persoa.

### *Historia*

Santy cóntanos curiosidades sobre como manter (ou non) o anonimato, e describe varios exemplos moi interesantes. Na seguinte páxina, Fran escribe unha breve reseña histórica do Principio de Indución así como da súa xeneralización.

### *Actualidade*

O noso trasmirenses, dínos que hai unha conxectura menos! Neste caso, relata as noticias que hai sobre o problema do “empaquetamento enteiro de círculos” que xa ben plantexado dende Apolonio.

### *Retos*

Sementeira cóntanos un tipo de problemas bastante usuais nas olimpíadas matemáticas, falamos dos Cuadriláteros cíclicos. Ogallá vos entretades facendo os exercicios propostos!

Adxúntase un QR que contén as solucións dos exercicios do segundo número.

### *Teoría*

Os compañeiros de teoría están moi prolíficos. Santy lúcese contando como se “desmontan” as matemáticas, un tema moi interesante. Nacho continúa coa segunda parte de cuántica. Esperemos que xunto coa primeira parte, teñades unha visión enteira do que o noso compañeiro tenta transmitir. E por último, Pedro explica formalmente, o determinante, pero vai máis alá, dálle unha visión alxebrista moito máis xeral que aquela interpretación que tiñamos cando estabamos no Bacharelato.

### CARTAS DO LECTOR/A

Tes algunha curiosidade ou pequena dúbida matemática que cres que tamén voa pola cabeza dos teus compañeiros ou que simplemente non fuches quen de preguntar nunca a ningún? Escríbenos ao noso correo, e recompilaremos de xeito anónimo as máis interesantes coas súas respectivas contestacións no próximo número de Máis Mates! Ou ata ao mellor pode servir de inspiración para algún dos artigos.

### DIFUSIÓN

Xa temos carteis por toda a Facultade! Calquera dúbida podedes mandala ao noso correo.

Esperamos que no vindeiro cuadrimestre se organicen diferentes actividades, que serán publicitadas para que veña quen se anime.

### AGRADECEMENTOS

Dende a Facultade tivo lugar a impresión dunha chea de libretas coa portada da revista que len. Estamos moi agradecidas pola súa implicación e apoio, así como pola difusión desta revista.

### CORREO:

**REVISTAMAISMATES@GMAIL.COM**

# A privacidade dun xenio matemático: unha guía práctica

Santiago González Gómez

**C**res que tes o que hai que ter para acadar a fama no mundo das Matemáticas, pero tes medo de que conseqüilo dane a túa privacidade? Desgústache a idea de pasar á posteridade se isto conleva que, dentro de 200 anos, as túas vivencias máis íntimas se convirtan en anécdotas entre os alumnos dunha facultade coma esta? Se este é o teu caso, dende o equipo de Máis Mates queremos axudar repasando as vidas dun par de ilustres matemáticos que poden servirche de modelo a seguir.

## UNHA VIDA IGNOTA

A figura de Pitágoras está tan afastada no tempo de nós que, malia sabermos que a súa escola foi chave na modelización do pensamento matemático grego, realmente non somos quen de asegurar se el deu a proba do seu famoso teorema, ou sequera se existiu como unha única persoa. Non é este o perfil que estamos a procurar, porque ti de seguro existes. Porén, imaxínate escribir posiblemente o libro máis influente da historia das Matemáticas e que nada se saiba sobre a túa biografía. Este é o caso de Euclides, autor dos *Elementos*. Aínda que non aportou demasiados resultados novos ao escenario da xeometría grega, si foi o primeiro en ordenalos nunha sucesión lóxica e en aportar probas rigorosas de todos eles. O único seguro sobre a vida de Euclides é que traballou na biblioteca de Alexandría na época de máis efervescencia desta; non se conservan sequera tódalas súas obras, dende logo nada sobre a súa vida e tampouco o seu lugar de nacemento. É máis, ás veces cítase erroneamente Megara como a súa patria por mor dun filósofo homónimo, pois o nome era común na época. Pasar así de desapercibido sería o ideal...

## UNHA IMAXE PECULIAR

Pero sexamos realistas, calquera ten hoxe en día unha páxina na Galipedia. Se somos menos ambiciosos, poderíamos tentar que non trascendan imaxes nosas. A finais do século XVIII, os retratos eran moi comúns en Francia entre a clase media-alta, e posuímos imaxes de persoeiros como Laplace, Lagrange ou Fourier. Porén, este non é o caso do seu contemporáneo Adrien-Marie Legendre. Legendre foi o redactor dun tratado de xeometría de relevancia chamado tamén *Éléments*, traballou en xeodesia e teoría de números, pero é máis celebrado polas súas contribucións ás matemáticas empregadas en diversas áreas da Física, como as transformadas de Legendre, vitais en Termodinámica e Mecánica teórica, ou as funcións de Legendre, que solucionan certas ecuacións diferenciais. O máis chamativo de Legendre é que a única imaxe que conservamos del en vida é unha caricatura a acuarela que non lle faría especial graza (figura (1)).



**Fig. 1:** Adrien-Marie Legendre o día en que se lle acabou o café instantáneo, probablemente. c. 1820

## MORRER NOVO, OU RETIRARSE A TEMPO

Con todo, vivindo rodeados de teléfonos e cámaras, evitarmos a perduración de imaxes antóllase imposible. Ademais, nada nos casos anteriores nos garante unha vida tranquila. Podería ser que o truco estivese en facerse famoso de xeito póstumo. Este é o caso, por exemplo, do francés Galois e do noruegués Abel. Galois era un mozo cun talento innegable, pero a maior parte dos seus artigos foron rexeitados porque non adoitaba dar probas ou explicacións dos seus métodos. Diversos golpes de mala sorte na súa vida e unha personalidade peculiar conducírono a un duelo a pistola por unha muller no que perdeu a vida con 20 anos. A noite antes da súa morte deixou por escrito tódalas súas ideas, que conducirían a un gran salto adiante na álgebra abstracta. Pola súa banda, Abel tivo unha única pero pesada carga durante toda a súa vida: a pobreza. O seu traballo foi esencial, xunto co do propio Galois, para constatar a irresolubilidade por radicais das ecuacións de grao maior que catro; porén, morreu de tuberculose aos 27 anos, dous días antes de recibir unha carta que lle ofrecía unha posición en Berlín.

Talvez a solución anterior resulta un pouco drástica... se cadra, o mellor sería ir improvisando sobre a marcha. Ao fin e ao cabo, para librarse da fama, cumpriría primeiro chegar a ela, non si? Sempre nos quedará a solución de Grothendieck, a figura esencial da álgebra do século XX: cando esteas farto das Matemáticas, podes mudar a túa vida académica por unha de ermitán aos pés dos Pirineos. Sorte no teu camiño cara ao cumio das Matemáticas!

## REFERENCIAS

- [1] BOYER, C. B., MERZBACH, U. C. (2011), *A history of mathematics*, John Wiley & Sons.

# Unha perspectiva sobre o Principio de Indución

Francisco Estévez Lengua

Os números naturais forman ese conxunto de números co que nos atopamos nos primeiros intres da nosa vida. Contamos coas mans, dando lugar a posibles sistemas de numeración e logo imos aumentando o noso enfoque cando nos ensinan o sistema decimal.

Ao longo deste longo e tortuoso camiño, ao entrar na carreira, explícanse os axiomas de Peano, en que se basa o conxunto dos números naturais e aparece por alá metido o Principio de Indución. Volvémoslos a recordar:

## AXIOMAS DE DEDEKIND-PEANO

1.  $0 \in \mathbb{N}$ .
2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un único sucesor  $n^*$ . Existe unha aplicación sucesor  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $s(n) = n^*$ .
3.  $n^* \neq 0$  para calquera  $n \in \mathbb{N}$ , i.e  $0 \notin \text{Im}(s)$
4. A aplicación sucesor é inyectiva, é dicir dados dous números  $n, m \in \mathbb{N}$ , se  $s(n) = s(m)$  entón  $n = m$ .
5. Sexa  $M$  un subconxunto de  $\mathbb{N}$  tal que
  - a)  $0 \in M$
  - b) se  $n \in M \implies n^* \in M$
 entón  $M = \mathbb{N}$

En concreto, vamos falar do quinto postulado destes axiomas. A idea intuitiva, pódese extrapolar de forma moi sinxela. Cando sabemos que ocorre algo unha cantidade inxente de veces, podemos crer que o fará indefinidamente. Un exemplo curioso é o seguinte. Se temos un polígono convexo, de  $n+2$  lados, entón se sumamos os ángulos do mesmo, teremos  $180 \cdot n$ . Déixase como exercicio sinxelo, para que o proben os lectores.

Se nos pomos a demostralo, coma se non souperamos que podemos empregar indución, entón empezariamos con  $n = 1$  e teríamos un triángulo, cuxa suma de ángulos é o desexado. O mesmo acaece ao considerar un cadrado, un pentágono. Probaríamos con todos os números que deamos, pero non bastaría.

Moitas veces, experimentalmente suponse que será verdadeiro, e un confórmase con probar que o resultado é certo para valores moi grandes de  $n$ . Nós, ben sabemos que isto está incompleto e que habería que probalo para calquera  $n$  número natural.

## RESEÑA HISTÓRICA

As primeiras alusións á nosa indución aparecen en escritos hindúes e gregos, como por exemplo, no “método cíclico” de

Bhaskara, e na proba de *Euclides* de que o número de primos é infinito.

Aló polo século X, *Al-Karaji*, persa, traballou no teorema do binomio e tamén no que sería o Triángulo de Pascal. Coñecemos isto polas referencias de *Al-Samawal al-Maghribi* no seu tratado *al-Bahir fi'l-jabr* (El brillante en el álgebra) (1150 d.C), pois a obra orixinal de *Al-Karaji* perdérase.

Porén, non se establecen unhas hipóteses formais, sendo *Blaise Pascal* o que expuxo a idea do Principio de Indución. Tamén contribuíron co método do “Descenso Infinito”, unha variante do principio en cuestión. Finalmente, no século XIX, co traballo de *Giuseppe Peano* (1858-1932) e *Richard Dedekind* (1831-1916), establecen os axiomas, dándolle ese tratamento sistemático, riguroso e lóxico que se emprega hoxe en día para realizar demostracións por indución.

## UN POUCO MÁIS ALÁ.

Se queremos ir un pouco máis alá, aparecerá o Principio de Indución Transfinita. A idea é a mesma, pero traballase en conxuntos diferentes dos números naturais.

Foi desenvolto por Zermelo, a principios do século XX, introducindo e formalizando este principio para establecer unha base axiomática sólida para a teoría de conxuntos, que daría lugar aos Axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Con este, preténdese xeralizar o principio de indución a calquera conxunto ben ordenado. Esta nova ferramenta é fundamental na teoría de conxuntos e no estudo de conxuntos infinitos, pois permítenos demostrar que algo se cumpre nun conxunto máis xeral que o dos números naturais. Na carreira, polo menos ata terceiro, só aparece citado, pois moitas veces empréganse vías alternativas a este método. Exemplos de resultados que poderían empregar a indución transfinita serían o Teorema de Zermelo (todo conxunto  $X$  admite un bo orde) ou o Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, que se ven na materia de 1º Curso, *Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números*.

## REFERENCIAS

- [1] COURANT, R., ROBBINS, H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.
- [2] FLORIAN CAJORI, (1918) *Origen del nombre “Inducción matemática”*, The American Mathematical Monthly, vol 25, nº 5.
- [3] SUPPES, PATRICK. *Axiomatic Set theory*, Van Nostrand Company, New York.

# Unha conxectura menos

Guillermo Arcos Salgado

**F**ai preto de 2200 anos, o xeómetra grego Apolonio de Perga escribiu un libro chamado *Tanxencias* sobre cómo construír un círculo tanxente a outros tres dados, que se perdeu ao longo dos anos. Non foi ata 500 anos despois, que o matemático grego Pappus de Alexandría fixo un breve resumo que sobreviviría á caída do Imperio Bizantino.

Empregando este libro foi como os matemáticos renacentistas intentaron recuperar o traballo orixinal. Algúns, como Descartes (que tanto lle daba igual cifras como letras), chegaron a establecer relacións entre as curvaturas dos círculos tanxentes. Pero... que son as curvaturas?

Imaxinemos que temos tres moedas de forma que cada unha está tocando ás outras. Sempre se pode debuxar un círculo entre elas que toca a todas á vez. E entón podemos facernos varias preguntas: como é o tamaño dese círculo en comparación co das moedas? E se comezamos a escribir máis círculos progresivamente nos ocos que imos xenerando? E como serían os tamaños deses círculos en relación aos outros?

Pois ben, empecemos a abordar o problema. Para medir os tamaños dos círculos poderíamos pensar en medir os diámetros. Pero realmente non é algo brillante xa que a medida que os círculos se fan pequenos traballariamos con números decimais e iso non interesa, polo que rexeitaremos esta idea (apaga o candil María chus chus). A forma habitual de facelo é empregando a inversa do seu radio, á cal chamaremos **curvatura**.

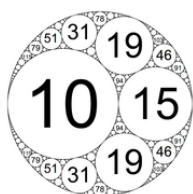


Fig. 1: Empacamento enteiro de círculos de Apolonio

Resulta que os matemáticos renacentistas demostraron que se a curvatura dos catro primeiros círculos é un número natural, entón os seguintes círculos que se engaden nos ocos teñen garantizado un número natural de curvatura.

Xa máis recentemente, no 1936 o premio Nobel Frederick Soddy esperaba que a medida que os círculos se facían máis pequenos (e entón as curvaturas máis grandes) se iba atopar con raíces cadradas ou incluso números decimais infinitos, mais só atopaba curvaturas enteiras. Isto era consecuencia da ecuación de Descartes, aínda que ninguén se dera conta durante centos de anos.

En 2010, Elena Fuchs (profesora da Universidade de California) probou que as curvaturas seguen unha relación particular de xeito que forzosamente se atopan en certos grupos

numéricos. E máis tarde, os matemáticos estaban convencidos de que non só se atopan nese grupo determinado, senón que todos os membros do grupo ían estar presentes na curvatura dalgún círculo, o que se chamaría como a **conxectura local-global**.

Katherine E. Stange, profesora da Universidade de Colorado Boulder, xunto con Fuchs observaron que en certos casos, si se lles aplicaba o módulo 24 ás curvaturas, obtían que pertencían a un conxunto determinado de clases (por exemplo, ao 0,1,4,9,12,16). Determinaron 6 conxuntos de clases diferentes posibles.

Summer Haag e Clyde Kertzer son dous estudantes que se interesaron polo tema durante un programa académico de vrau, e James Rickards, postdoctorado na Universidade de Colorado Boulder, fixo un código que permitía examinar e deseñar calqueira exemplo deste problema de círculos. Todo isto, baixo a tutela da matemática K.Stange. Pois ben, empregando ese programa, descubriron que a conxectura local-global parecía non verificarse!

Concretamente, Stange en [2] formulou a conxectura da forma seguinte:

**Conxectura 1** *Sexa  $A$  un empacamento de círculos de Apolonio primitivo que conteña curvaturas congruentes con  $r$  (mód 24). O conxunto dos enteiros positivos  $x \equiv r$  (mód 24) que non aparecen en  $A$  é finito.*

Pois ben, os dous estudantes atoparon un patrón de números enteiros que non aparecían nos empacamentos (para máis información do experimento podedes ver as referencias ao final do artigo), é dicir, descubriron que hai unha cantidade infinita de números congruentes con  $r$  (mód 24) que non aparecen no empacamento. Para K.Stange isto foi tan extraño como un magosto para alguén da Coruña. Foi entón como ela mesma, empregando vellos principios como a reciprocidade cuadrática (na que aparecen congruencias de segundo grao e números primos impares) demostrou como hai certas curvaturas que non poden ser tanxentes entre sí, como se ve no artigo [2] que se publicou en xullo deste ano.

E como nunca chove a gusto de todos, podemos ver como por momentos o que nos mostran os ordenadores poden romper coa intuición dos matemáticos.

## REFERENCIAS

- [1] QuantaMagazine, "Two Students Unravel a Widely Believed Math Conjecture" [www.quantamagazine.org](http://www.quantamagazine.org)
- [2] Summer Haag, Clyde Kertzer, James Rickards, Katherine E. Stange, "The Local-Global Conjecture for Apollonian circle packings is false" [www.quantamagazine.org](http://www.quantamagazine.org)

# Óscar, de Xinzo e de Números

Francisco Estévez Lengua

Temos connosco a Óscar Rivero Salgado, un rapaz de Xinzo, que este ano pasou a formar parte do profesorado. Estudou o dobre Grao de Matemáticas e Enxeñaría Física na UPC, e continuou os seus estudos realizando un máster. Acabou o doutorado e estivo de postdoutoramento dous anos en Inglaterra e medio ano en Estados Unidos.



Fig. 1: Óscar Rivero Salgado

- F: Porque te decantaches por volver a Galicia, despois de ter “visto” tanto mundo? Non te ves fóra a longo prazo?
  - O: A terra sempre tira, son moi caseiro. quixen voltar para Galiza, pois teño a familia e teño moi bos recordos desta facultade. Estou moi cómodo aquí.
  - F: Un profesor de universidade, necesita ter realizado un doutorado para poder exercer disto. Logo é unha condición necesaria, consideras que é suficiente?
  - O: Eu penso que a xente que se doutora e ten boas credenciais de investigación, moitas veces accede á docencia para poder seguir investigando, pois só ten praza na docencia. Tendo vocación, pode ser que non sexa o mellor docente. Para ser profesor, tes que pasar un exame, e a parte da analizar a túa carreira investigadora tes que preparar unha exposición oral dun tema docente. Pero claro é un tempo moi reducido e que o fagas ben ou mal non creo que diga que sexas bo ou mal profesor. Estou de acordo que é un feito claro que haia xente boa investigadora e non tan boa docente, pero non vexo unha solución obvia a ese problema. Eu entendo que como profesores universitarios a nosa obriga é facer a mellor investigación e a mellor docencia. Por aportar algo, diría que se debería incentivar a boa docencia, pois existen complementos por esta, que se dan automaticamente, pero creo que debería regularse iso un pouco máis.
  - F: Poderíasme relatar algúnha anécdota túa relacionada coas Mates, á que lle teñas cariño?
  - O: Pois mira, eu comecei a interesarme coas mates co tema das olimpíadas. A primeira vez que ía participar nas olimpíadas, no ano 2009, aquí, en Santiago, había un temporal de neve. Xa me ves a min cos meus pais dende Xinzo co coche ata Santiago. Estaba todo nevado, dende o alto do Dozón, era unha barbaridade, que case non se daba pasado. E cando chegamos, dinnos que está cancelada. Aínda así, atendeunos un profesor, Felipe, quen nos acolleu e ensinou a Facultade.
- Teño bo recordo desa época. A olimpíada fora dúas semanas despois e dende aquela fun pasando a diferentes fases nacionais. Sempre me acordarei de cando viñamos os sábados para as clases de Felipe, que nos preparaba para ir ás distintas fases, e sempre nos traía croissants. Eu creo que dende aquelas me quedaron as ganas de vir á Facultade, pois sempre tiven a idea de que estaría ben volver.
- F: Porque decidiches Matemáticas, e porque tirache cara a investigación?
  - O: A min gustábanme as mates no instituto, e por iso fixen o dobre grao. Aínda que non creas que me foi de moita utilidade, nese momento estaban de auxe os doubles graos e só había fóra. Todas as persoas da miña contorna dicíanme que aproveitara a oportunidade, e alá fun a facer Matemáticas e Enxeñaría Física. A día de hoxe creo que só tivera feito as mates, a outra rama está moi ben, aportoume cultura, pero nada en específico do que me poida aproveitar hoxe en día.
- Eu non tiña interese en irme polo sector privado, nin pola docencia, quería seguir estudando. É verdade que en terceiro de carreira non tiña claro que área me gustaba máis, se Álgebra ou Análise, pero xa buscando temas para o TFG, tiraba máis para a Álgebra, sobre todo despois de ver a asignatura de Estructuras. A día de hoxe diría que eu céntrome na Teoría de Números, estudando as propiedades de números primos, etc.
- F: Como te ves a longo prazo? Aquí na facultade?
  - O: Non che vou dicir que vou estar aquí con 70 anos. Non é unha opinión 100% segura á larga, pero eu véxome aquí, si. Estou moi contento en Santiago e creo que podo aproveitar moito esta oportunidade.

# Retos Matemáticos

## SEMENTEIRA

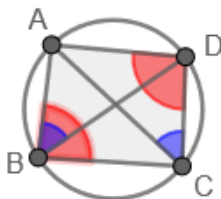
### CUADRILÁTEROS CÍCLICOS

Os triángulos son unha das configuracións máis importantes dentro da xeometría sintética: permítenos atopar ángulos e distancias, ademais de poder aplicar moitos teoremas distintos, como por exemplo o Teorema de Pitágoras. Resulta entón natural preguntarse se ocorre unha situación similar cos cuadriláteros, e en xeral a resposta é negativa.

Agora ben, se estudamos subclases concretas de cuadriláteros, aparecen resultados interesantes. De cara ás olimpíadas matemáticas, os cuadriláteros cíclicos son especialmente útiles. Diremos que un cuadrilátero  $ABCD$  é **cíclico** se os catro vértices están contidos nunha mesma circunferencia.

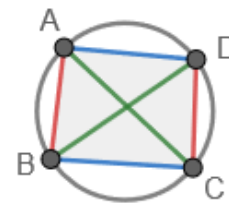
**Teorema.** *Sexa  $ABCD$  un cuadrilátero convexo, entón son equivalentes:*

- (1)  $ABCD$  é un cuadrilátero cíclico,
- (2)  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$  e
- (3)  $\angle ABD = \angle ACD$ .



**Teorema (Ptolomeo).**  $ABCD$  é un cuadrilátero cíclico se, e soamente se:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$



Estes teoremas non só proporcionan caracterizacións sinxelas, senón que poñen de manifesto a utilidade dos cuadriláteros cíclicos para buscar ángulos e lonxitudes.

Outro resultado interesante é o seguinte, semellante á fórmula de Herón para calcular áreas de triángulos en cuadriláteros cíclicos:

**Teorema (Fórmula de Brahmagupta).** *Dado un cuadrilátero cíclico  $ABCD$ , a súa area é:*

$$[ABCD] := \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

onde  $s := \frac{1}{2}(a+b+c+d)$  é o semiperímetro e  $a, b, c, d$  son as lonxitudes dos lados do cuadrilátero.

### PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Sexan  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dous círculos que se intersecan en  $A$  e  $B$  puntos distintos. Consideremos unha recta que pase por  $B$  e que interseque a  $\omega_1, \omega_2$  en  $C, D$  respectivamente, con  $C \neq D$ . Sexan  $E \in \omega_1, F \in \omega_2$  tal que  $CE = CB$  e  $BD = DF$ . Supoñamos que  $BF$  interseca  $\omega_1$  en  $P$ , e  $BE$  interseca  $\omega_2$  en  $Q$ . Proba que  $A, P, Q$  son colineais.
2. Atopar tódalas solucións enteiras da ecuación:

$$y^k = x^2 + x,$$

onde  $k$  é un enteiro dado maior que 1.

3. Sexan  $C$  e  $C'$  dúas circunferencias tanxentes exteriores con centros  $O$  e  $O'$  e radios 1 e 2 respectivamente. Dende  $O$  trázase unha tanxente a  $C'$  con tanxencia no punto  $P'$  e dende  $O'$  trázase unha tanxente a  $C$  con punto de tanxencia en  $P$  no mesmo semiplano que  $P'$  con respecto á recta que pasa por  $O$  e  $O'$ . Calcula a área do triángulo  $OXO'$ , onde  $X$  é o punto de corte de  $O'P$  e  $OP'$ .
4. Atopar todas as funcións  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que  $f(\cos x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Xa podes consultar as solucións dos problemas propostos do mes pasado escaneando ou premendo no seguinte QR:



# Panic! At Mathematics: a incompletitude de Gödel

Santiago González Gómez

**D**urante o século XIX, foi crescendo progresivamente no mundo das Matemáticas o convencemento de que era necesaria unha axiomatización destas, de xeito que se puidesen desenvolver na súa totalidade de forma lóxica partindo dun conxunto de afirmacións dadas por certas. A inicios do século XX, persoeiros como David Hilbert e Bertrand Russell traballaban en favor da causa. Sería Kurt Gödel quen, en 1931, daría unha resolución inesperada ao problema da lóxica matemática cos seus teoremas de incompletitude.

A lóxica formal coa que se traballou no século XX para tentar modelizar o razoamento matemático é densa, e neste artigo só queremos dar unha aproximación á idea da incompletitude de Gödel. Así, imos tentar centrarnos nas intuicións antes que na rigor. Consideramos unha “teoría formal de cálculo proposicional”  $\mathcal{L}$ , que informalmente definimos como un conxunto de símbolos lóxicos (“ $\neg$ ”, “ $\rightarrow$ ”, “ $()$ ”) e de letras que representan afirmacións, que se coordinan baixo axiomas e regras de escritura e demostración. Estes elementos forman frases ben formuladas (f.b.f)  $\mathcal{A}$ . Se  $\mathcal{A}$  é un teorema (é dicir, se se pode demostrar) no noso sistema, escribimos  $\vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{A}$ . Como matemáticos axiomatizadores, quereamos que a nosa teoría sexa **completa**, o cal significa que podemos probar a veracidade dunha f.b.f., ou da súa negación; así,  $\vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{A}$  ou  $\vdash_{\mathcal{L}} \neg \mathcal{A}$ . A lóxica proposicional é insuficiente para desenvolver matemáticas, e por iso se estende ao cálculo predicativo, que engade os símbolos “ $,$ ” e “ $\forall$ ”, variables, constantes, funcións e relacións. Estas teorías dinse de 1ª orde.

Deamos un paso máis, engadindo a igualdade “ $=$ ” á nosa teoría lóxica, e un par de axiomas básicos referentes a ela. Cunha teoría lóxica de primeira orde con igualdade, que denotamos  $\mathcal{S}$ , e as funcións “seguinte” (que nos dá o número seguinte a outro dado), “suma” e “produto”, podemos desenvolver a axiomática de Peano e, así, construír os números naturais, facer afirmacións sobre eles e probalas. Esta teoría é o que se di **consistente**, é dicir, que non pode ocorrer que unha frase e a súa negación sexan certas simultaneamente (unha propiedade bastante razoable, e que queremos para unha teoría lóxica).  $\mathcal{S}$  mesmo cumpre outra propiedade máis forte, a  **$\omega$ -consistencia**, que basicamente quere dicir que, se temos unha afirmación cunha variable libre  $\mathcal{A}(x)$  tal que  $\vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{A}(c)$  para toda constante  $c$ , entón non pode ser certo que exista unha constante para a cal non se cumpra, i.e.,  $\not\vdash_{\mathcal{L}} (\exists c) \neg \mathcal{A}(c)$ . Pois ben, nunha teoría tan aparentemente básica e razoable como esta, aplica o seguinte resultado

**Teorema 1.** (primeiro de incompletitude de Gödel) *Se  $\mathcal{S}$  é  $\omega$ -consistente, entón non é completa.*

Isto tradúcese a unha linguaxe máis común como segue: existen afirmacións verdadeiras sobre a nosa teoría  $\mathcal{S}$  que non podemos demostrar que son verdadeiras coa teoría. Un pre-

gúntase, como sabemos se é certa unha frase, se non a podemos demostrar? Dicimos que existe unha afirmación verdadeira no senso seguinte: se unha frase non se pode demostrar, a súa negación tampouco, e por consistencia, unha das dúas debe de ser unha verdade na teoría.

A enxeñosa forma en que Gödel demostrou este resultado precisa dos números de Gödel (que denotamos por  $g(\cdot)$ ). Primeiro, asígnaselle a cada un dos símbolos da teoría  $u_i$  un número  $g(u_i)$  **impar** ata o 23; o resto de impares adícanse a variables. Agora, dada unha f.b.f.  $\mathcal{A}$ , esta é unha concatenación destes símbolos:  $\mathcal{A} = u_1 \cdots u_n$ ; polo tanto, podemos asignarlle a  $\mathcal{A}$  o número de Gödel  $g(\mathcal{A}) = 2^{g(u_1)} \cdots p_n^{g(u_n)}$ , onde  $p_n$  é o  $n$ -ésimo primo. Así, os números de Gödel de frases ben formuladas son números **pares con expoñentes impares** na descomposición en factores primos. Por último, para unha secuencia de frases (p.ex., unha demostración), definimos  $g(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n) = 2^{g(\mathcal{A}_1)} \cdots p_n^{g(\mathcal{A}_n)}$ . Estes números de Gödel son **pares con expoñentes pares** na descomposición en factores primos. Polo tanto, dado un número de Gödel e, pola unicidade da descomposición en primos, podemos reconstruír con exactitude a afirmación da que provén.

Agora, construímos a seguinte relación de equivalencia:

$$P := \{(n, m) : n \text{ é o número de Gödel dunha frase } \mathcal{A} \text{ cunha variable libre } x \text{ e } m \text{ é o número de Gödel dunha demostración de } \mathcal{A} \text{ avaliada en } x = n\}.$$

Dados  $n$  e  $m$ , pódese comprobar se son equivalentes ou non vendo se  $m$  corresponde a unha demostración de  $\mathcal{A}$ . Agora, terase que  $\vdash_{\mathcal{S}} P(n, m)$ , se  $n \sim m$ ; e  $\vdash_{\mathcal{S}} \neg P(n, m)$  noutro caso. Consideremos a frase  $\mathcal{B} : (\forall x_2) \neg P(x_1, x_2)$ , e sexa  $l = g(\mathcal{B})$  o seu número de Gödel. Como  $\mathcal{B}$  ten só unha variable libre (a  $x_2$  está baixo a influencia dun “ $\forall$ ”), entra na definición de  $P$ . Así, dado  $k \in \mathbb{N}$ , podemos comprobar se  $l \sim k$ : isto cumprírase se  $k$  é o número de Gödel da f.b.f.  $\mathcal{C} : (\forall x_2) \neg P(l, x_2)$ . O que acabamos de facer é construír un paradoxo, unha sorte de versión do do mentireiro, pois  $\mathcal{C}$  vennos dicindo que  $\mathcal{C}$  non se pode demostrar. En efecto, supoñendo os casos  $\vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$  e  $\vdash_{\mathcal{S}} \neg \mathcal{C}$  chégase a cadansúa contradición; non recollemos o final da demostración por brevidade.

O impacto deste resultado foi enorme, pois nunha disciplina que quería axiomatizarse, acabábase de demostrar que sempre haberá verdades non demostrables. É máis, se extendemos a teoría engadindo axiomas novos, non se arranxa o fallo, senón que aparecen novas afirmacións indemostrables (e non falemos xa de que, se queremos facer cousas interesantes, imos ter necesariamente que ampliar esta teoría básica). Porén, as Matemáticas tiveron que aprender a vivir coa incompletitude de Gödel, e esta última observación, a de que non se pode “parchar o erro”, danos unha visión moito máis optimista: non é que as Matemáticas estean mal fundamentadas, senón que son capaces de facerse preguntas tan profundas que nin sequera a súa estrutura pode contestar. E se hai preguntas que facer, temos traballo por moitos anos máis...

## REFERENCIAS

- [1] FERNÁNDEZ TOJO, F. A. (2022), *Introducción a la lógica*, apuntes de curso. Universidade de Santiago de Compostela.

# Introdución á modelización de algoritmos cuánticos:

## Parte II

Ignacio Garbayo Fernández

**A**índa que se adoita dicir que as segundas partes nunca son boas, alá vamos cunha segunda tirada desta serie, relacionada coas matemáticas detrás da **algoritmia cuántica** desenvolvida. Como antes, [1] será o noso texto de referencia. Neste caso, explicaremos a clase de problemas que son resolubles mediante computación cuántica, pendente do número anterior, e trataremos o **algoritmo de Shor**.

### COMPLEXIDADE CUÁNTICA

Tomamos como referencia o seguinte conxunto.

**Definición 1.** Coñécese como **BPP**, siglas de *Bounded-Error Probabilistic Polynomial Time*, o conxunto dos problemas de decisión<sup>1</sup> que unha máquina de Turing (calquera dos ordenadores actuais) probabilística<sup>2</sup> pode resolver en tempo polinomial, cun erro menor ou igual a 1/3.

Informalmente, un problema é BPP se existe un algoritmo que o soluciona que cumpre as seguintes propiedades:

1. Pode tomar decisións aleatorias (como lanzar unha moeda).
2. Está garantido que rematará en tempo polinomial ( $n^p$ ) respecto ao tamaño do problema ( $n$ ).
3. Baixo calquera execución do programa, a probabilidade de dar a resposta incorrecta é, como máximo 1/3, ben sexa esta afirmativa ou negativa.

Neste senso, aparece o seguinte concepto.

**Definición 2.** Chamamos **BQP**, siglas de *Bounded-Error Quantum Polynomial Time*, á clase de todos os problemas resolubles por unha máquina de Turing cuántica en tempo polinomial cun erro inferior a 1/3.

Unha máquina de Turing cuántica pode verse como a xeralización dunha máquina de Turing probabilística. É curioso comentar que  $\mathbf{P} \subset \mathbf{BQP}$ , onde  $\mathbf{P}$  é a clase dos problemas resolubles por unha máquina de Turing determinista en tempo polinomial. Logo os problemas que se poden resolver en máquinas tradiciónes de forma «eficiente» tamén poden ser solucionados cunha máquina cuántica.

### TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

En 1994, e despois dalgunhas das aportacións de **David Deutsch**, feitas en 1985 e vistas no número anterior, **Peter Shor** propuxo un método para atopar os factores primos

<sup>1</sup>Un problema de decisión é aquel no que, por medio dun algoritmo, trátase de elixir o mellor candidato que cumpre unhas condicións determinadas.

<sup>2</sup>Ao revés que unha máquina determinística, esta toma resultados segundo unha distribución aleatoria, polo que podería dar resultados distintos en diferentes execucións con mesma entrada.

dun número enteiro. Este traballador para AT&T achou un método que, en principio, superaría a eficiencia de calquera computador tradicional neste problema (ver [2]).

Este descubrimento tivo importantes implicacións na época, pois gran parte da criptografía estaba baseada na factorización de números moi longos. O algoritmo ataca a seguinte cuestión.

**Problema 1 (da orde).** Dado un enteiro  $N > 0$  e  $s \in \mathbb{Z}$  tal que  $1 < s < N$ , achar a orde multiplicativa de  $s$  en  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ; isto é, o menor enteiro positivo  $k$  tal que  $s^k \equiv 1 \pmod{N}$ .

Antes de mostrar a resolución, introducimos a expresión da **transformada cuántica de Fourier**,  $\mathbf{QFT}_m$ , con  $m \leq 2^n$  nun sistema de  $n$  qubits, necesaria para o algoritmo. Esta vén dada por

$$\mathbf{QFT}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\mathbf{k}=0}^{m-1} \omega^{x\mathbf{k}} \mathbf{k}, \quad \omega^{x\mathbf{k}} = e^{\frac{2\pi i x \mathbf{k}}{m}}, \quad \text{se } \mathbf{x} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n.$$

O **algoritmo de Shor** emprega esta porta para resolver a problema da orde segundo:

1. Inicializamos a  $\mathbf{0}$  o vector cuántico:

$$\varphi_0 = \mathbf{0}_{\lceil \log_2 N \rceil} \otimes \mathbf{0}_{2 \lceil \log_2 N \rceil}.$$

2. Aplicamos por un lado a porta de Hadamard e por outro a identidade:

$$\varphi_1 = \text{Had}_{2 \lceil \log_2 N \rceil} \otimes \text{Id}_{\lceil \log_2 N \rceil}(\varphi_0).$$

3. Convertimos o segundo término a unha expresión modular:

$$\varphi_2 = M_{s,N}(\varphi_1), \quad M_{s,N}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = \mathbf{i} \otimes (\mathbf{j} + \mathbf{s}^i) \pmod{N}.$$

4. Facemos a primeira medición:

$$\varphi_3 = 2^{\lceil \log_2 N \rceil - \text{primeirosQubits}}(\varphi_2).$$

5. Aplicamos a transformada cuántica de Fourier:

$$\varphi_4 = \mathbf{QFT}_{2^{2 \lceil \log_2 N \rceil}}(\varphi_3).$$

6. Medimos  $\varphi_4$ .

Se somos quen, a través dun procedemento, de achar  $N = p q$  e un deles non é primo, podemos aplicar de novo este procedemento ao non primo. Usando o **algoritmo de Euclides**, podemos sempre saber se  $N$  é par (e polo tanto 2 é un factor) ou impar. Neste caso,  $N$  pode ser unha potencia prima (obtida mediante algoritmos tradicionais) ou pode non ser tan trivial.

Se tomamos un enteiro calquera  $2 < a < N$ , o algoritmo de Euclides pode obter un dos factores se calculamos o  $\text{mcd}(a, N)$ . Se este é non trivial, o outro factor é  $N/\text{mcd}(a, N)$  e rematamos. Se non é así, e  $N$  e  $a$  son coprimos, pasamos a executar o **algoritmo de Shor para a orde** descrito (Figura 1), que devolve a orde  $r$  de  $a$  en  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .

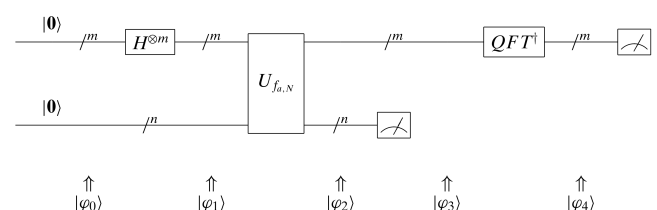


Fig. 1: Algoritmo de Shor. Fonte: [3]

**REFERENCIAS**

- [1] Pastor Díaz, Ulises. *Algoritmos fundamentales en Computación Cuántica*. Do autor de *Toda computación, a la vez, en todas partes*, impartida o 6 de xuño de 2023 na Facultade de Matemáticas.
- [2] *The Quantum Computer: History*. Enlace: <http://ffiden-2.phys.uaf.edu/211.web.stuff/Almeida/history.html>
- [3] Lei Mao. *Shor's Algorithm*. Enlace ao Github: <https://leimao.github.io/blog/Shor-Algorithm/>

# Que determina o determinante?

Pedro Vidal Villalba

C ase todos os lectores deste artigo saberían calcular o determinante dunha matriz ou, polo menos, lembran ter que facelo algunha vez, e probablemente tamén recorden o suplicio de contas que supón. Tamén é moi posible que lembren algunhas das súas propiedades, e algunhas conclusións sobre a matriz que poden obterse del.

Porén, non é moi común atopar a alguén que teña claro *que* é un determinante, ou *por que* debería ter as propiedades que ten. Pois ben, o obxectivo deste artigo é redescubrir o determinante e, para iso, como para a meirande parte das cousas relativas á álgebra linear, debemos comezar cun plano.

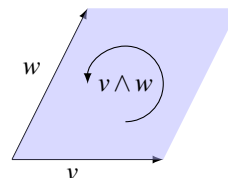
Demos primeiro un paso atrás e pensemos en vectores, pero nos de verdade, nesas flechiñas orientadas que nos contaban no colexio, e non na serie de propiedades abstractas coas que se definen en álgebra. Os vectores xorden para responder a unha necesidade: traballar con distancias. Ao fin do día, un vector non deixa de ser un segmento cunha lonxitude que permite saber como de lonxe está outra cousa, pero cunha particularidade: está orientado. É esta orientación a que lles confire aos vectores as súas propiedades alxébricas e os diferencian dos números normais e correntes, que poderíamos pensar que serven perfectamente para falar de distancias, pero rapidamente decatámonos de que se quedan cortos.

Pois ben, do mesmo xeito que queremos medir distancias e para iso usamos vectores, resulta bastante natural querer medir áreas. Nun primeiro instante poderíamos pensar que cun número para medir a área tamén é suficiente, pero igual que pasaba coa distancia, realmente non termina de funcionar. Como aínda estamos a falar de álgebra linear, imos a restringir un pouco as áreas que podemos medir: igual que cos vectores só podemos medir distancias en liña recta, restrinxamos o estudo das áreas ás máis básicas que coñecemos —os paralelogramos—. Paralelogramo é unha palabra feísima, e como non necesitamos falar de paralelismo nin necesitamos ángulos para nada do que segue, a partir de agora falarei soamente de rectángulos, pero tede presente que me estou a referir sempre a paralelogramos en xeral.

Agora, o primeiro impulso sería definir a área dun rectángulo como a lonxitude da súa base pola súa altura, pero de

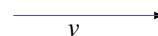
novo eso nos deixa cun simple número, que non é suficiente. O que si está claro é que un rectángulo está definido por dous vectores.

Así, dados dous vectores  $v, w \in V$  (pense en  $V$  como o plano real), denotaremos o **rectángulo determinado por  $v$  e  $w$**  como  $v \wedge w$ . Inda non temos nin idea de que quere dicir isto, pero como queremos falar de áreas, busquemos algunhas propiedades que debería cumprir para que iso teña sentido.



**Fig. 2:** Produto exterior de  $v$  e  $w$

En primeiro lugar, se collemos o mesmo vector dúas veces, o rectángulo que define non ten área, polo que deberíamos pedir que  $v \wedge v = 0, \forall v \in V$ .



**Fig. 3:** Paralelogramo dexenerado  $v \wedge v$ , de área 0

Por outra parte, como o rectángulo vén definido por vectores, e o único que podemos facer cos vectores en xeral é escalalos e sumalos, é razoable preguntarse que lle sucede á área cando o facemos. É bastante claro que deberíamos pedir que  $(\alpha v) \wedge w = \alpha(v \wedge w) = v \wedge (\alpha w)$ , para calquera escalar  $\alpha$  e vectores  $v, w$ .

A pregunta que aparece agora é, se  $\alpha$  é negativo, que sentido ten un área *negativa*? Observemos que:

$$0 = (v \wedge w) - (v \wedge w) = v \wedge w + (-v) \wedge w$$

Por suposto, aquí estamos a sumar estes *rectángulos* sen saber moi ben o que estamos a facer, pero esa é a idea cando se está a (re)descubrir matemáticas. Pois ben, observamos que se a suma se comportase como un esperaríala, entón os rectángulos  $v \wedge w$  e  $(-v) \wedge w$  terían que cancelarse. Non obstante, tamén é claro que teñen a mesma área. Igual que pasa cos vectores  $v$  e  $-v$ , que son iguais pero con sentidos opostos, ten sentido pedir que os rectángulos  $v \wedge w$  e  $(-v) \wedge w = -(v \wedge w)$  tamén sexan iguais pero con sentidos opostos. Revélase entón un novo descubrimento: para que as cousas funcionen ben coas áreas —igual que coas distancias— debemos consideralas orientadas.

Así, o rectángulo  $v \wedge w$  será igual que o rectángulo  $w \wedge v$  pero con orientación oposta, é dicir,  $v \wedge w = -w \wedge v$ .

Como última propiedade interesante a explorar está o que acontece se temos unha suma nalgún dos vectores que define o rectángulo. Non é trivial, pero tampouco moi difícil, convencerse de que debería terse que  $(v + u) \wedge w = (v \wedge w) + (u \wedge w)$ . Anímase ao lector a facer os debuxos oportunos no plano para convencerse deste feito, usando a noción intuitiva de área coma un número, pero tendo en conta que nos rectángulos que aparezan, deben contarse os que teñan orientación oposta como de área negativa.

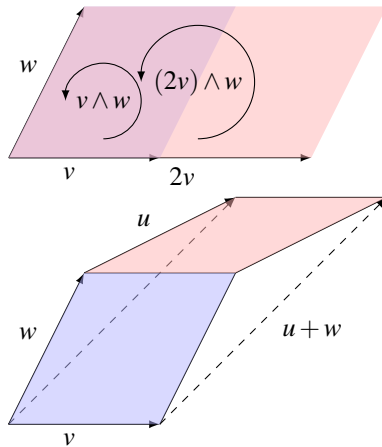


Fig. 4: Bilinearidade do produto exterior

Xuntando todo, temos as seguintes propiedades que querríamos pedirle á área definida por dous vectores:

$$\begin{aligned}
 (\alpha v) \wedge w &= \alpha(v \wedge w) = v \wedge (\alpha w) \\
 (v + u) \wedge w &= v \wedge w + u \wedge w; \quad v \wedge (w + u) = v \wedge w + v \wedge u \\
 v \wedge v &= 0
 \end{aligned}$$

Tense entón que, sexa o que sexa a operación  $\wedge$ , que devolve o rectángulo orientado definido por dous vectores, debe ser unha operación bilinear e alternada. Así pois, definámola como tal, é dicir, a operación bilinear e alternada máis xenérica que se pode definir sobre  $V \times V$ .

**Definición 3.** Chamamos **produto exterior** dun espazo vectorial  $V$  por si mesmo, que denotamos por  $V \wedge V$ , ao espazo vectorial de tódalas combinacións lineais dos produtos  $v \wedge w$ , con  $v, w \in V$ , sendo  $\wedge$  unha aplicación linear e alternada.

Formalmente, tense que

$$V \wedge V = \frac{V \otimes V}{\langle v \otimes v \mid v \in V \rangle},$$

onde  $\otimes$  é o produto tensorial.

Os elementos de  $V \wedge V$  denomínanse **bivectores**.

Por suposto, unha vez temos falado de lonxitudes e áreas, o paso natural é seguir falando de volumes, hipervolumes, etc. Resulta que todo o razonado xeneraliza ben a máis dimensións, polo que podemos definir de maneira análoga o produto exterior de máis copias de  $V$ .

**Definición 4.** Sexa  $k \in \mathbb{N}$  e  $V$  un espazo vectorial. O  $k$ -produto exterior de  $V$ , denotado por  $\wedge^k V$ , é o espazo vectorial xerado polos produtos  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ , onde  $v_i \in V$ , e  $\wedge$  é unha aplicación bilinear, alternada e asociativa. Os elementos de  $\wedge^k V$  denomínanse  $k$ -vectores.

En xeral, os  $k$ -vectores representan  $k$ -volumes orientados rectangulares, polo que os bivectores serían áreas rectangulares orientadas, os trivectores serían paralelepípedos orientados, etc.

En canto a dimensión destes novos espazos vectoriais, tense a seguinte proposición.

**Proposición 1.** Sexa  $V$  un espazo vectorial de dimensión  $n$  e sexa  $k \in \mathbb{N}$ . Entón,

$$\dim \wedge^k V = \binom{n}{k},$$

onde poñemos  $\binom{n}{k} = 0$ , se  $k > n$ .

Desta proposición obtemos que, se  $V$  é un espazo vectorial de dimensión  $n$ , entón  $\wedge^n V$  ten dimensión 1. Isto ten sentido, pois no plano só é posible ter unha *dirección* para as áreas, igual que no espazo só é posible ter unha *dirección* para os volumes: todo o plano ou todo o espazo, respectivamente.

Con isto, estamos listos para definir finalmente o determinante.

**Definición 5.** Sexa  $V$  un espazo vectorial de dimensión  $n$ , e sexa  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo linear de  $V$ . Por ser  $\dim \wedge^n V = 1$ , existe un único escalar  $d$  tal que, dados  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,

$$f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_n) = d(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$$

Este escalar denomínase **determinante** de  $f$ , e se denota por  $\det f$ ; é unha medida de como a transformación  $f$  distorsiona os volumes maximais no espazo  $V$  (os  $n$ -volumes nun espazo de dimensión  $n$ ).

Así, por exemplo, se no plano real denotamos por  $e_1, e_2$  os vectores da base canónica, e  $f$  é a aplicación linear tal que  $f(e_1) = ae_1 + be_2$ ,  $f(e_2) = ce_1 + de_2$ , entón

$$\begin{aligned}
 f(e_1) \wedge f(e_2) &= (ae_1 + be_2) \wedge (ce_1 + de_2) = \\
 &= ace_1 \wedge e_1 + ade_1 \wedge e_2 + bce_2 \wedge e_1 + bde_2 \wedge e_2 = \\
 &= ade_1 \wedge e_2 + bce_2 \wedge e_1 = (ad - bc)e_1 \wedge e_2,
 \end{aligned}$$

logo  $\det f = ad - bc$ , e recuperamos a fórmula xa coñecida do determinante dunha matriz  $2 \times 2$ , así como a fórmula da área dun paralelogramo determinado polos vectores  $(a, b)$  e  $(c, d)$  do plano.

Esta intuición do determinante coma o factor de distorsión dun volume (sendo negativo se a transformación cambia a orientación do espazo), permite entender de forma intuitiva moitas das propiedades e usos que podían parecer misteriosos desta operación.

Así, por exemplo, as propiedades de multilinearidade e antisimetría dedúcense do feito de estar a súa definición íntimamente ligada ao produto exterior, cuxa propiedade fundamental é precisamente ser multilinear e antisimétrico.

Ademáis, pensade o que significa que o determinante dunha aplicación linear sexa nulo. Que o determinante sexa cero significa que a transformación colapsa todos os volumes do espazo en elementos con volume nulo, o que só pode suceder se a transformación está a colapsar algunha dimensión do espazo. De isto dedúcese que se o determinante é cero, entón o rango da transformación non pode ser máximo, e que a transformación non pode ser inversible.

Por último, pensemos na fórmula do cambio de variable:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi|,$$

na que también intervén o determinante. Neste caso, a xacobiana do cambio de variable  $\varphi$  é a mellor aproximación linear dese cambio de variable en cada punto; o seu determinante, polo tanto, mide como a transformación  $\varphi$  modifica as áreas de rectángulos localmente, e como na integración debemos sumar as áreas deses diminutos rectángulos, é este factor o que permite ter en conta esas modificacións locais de área introducidas polo cambio de variable.

Dirección e Produción  
Francisco Estévez Lengua

Sección Historia  
Santiago González Gómez  
Francisco Estévez Lengua

Sección Actualidade  
Guillermo Arcos Salgado

Sección Teoría  
Ignacio Garbayo Fernández  
Santiago Fonzález Gómez  
Pedro Vidal Villaiba

Sección Retos  
Sementeira

Sección Sociedade  
Francisco Estévez Lengua

### AGRADECEMENTOS

Pola continuidade de Carmen Rodríguez e a Rafael Muñoz pola súa implicación e desexo de mellora na revisión (lingüística e matemática).

A Óscar Rivero Salgado, por acceder a facer a entrevista, e polo seu tempo

Á Facultade de Matemáticas pola difusión.

Ás e aos lectores desta revista.

Revista Más Mates  
Número 3  
Decembro de 2023

