



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Resolución numérica del problema de Bratu: diferencias finitas y métodos de continuación

Mateo Pérez Rodríguez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Resolución numérica del problema de Bratu: diferencias finitas y métodos de continuación

Mateo Pérez Rodríguez

Junio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Matemática Aplicada
Título: Resolución numérica del problema de Bratu: diferencias finitas y métodos de continuación
Breve descripción del contenido
El problema de Bratu es una ecuación diferencial elíptica con una no linealidad de forma exponencial que aparece, entre otros, en modelos de ignición. Dependiendo de los valores del coeficiente del término no lineal, la ecuación puede tener dos soluciones, una o ninguna. Por tanto, la completa resolución del problema conlleva al cálculo de las soluciones dependientes de dicho parámetro. La resolución numérica se abordará mediante la discretización con diferencias finitas del operador diferencial combinada con un método de continuación, para lo cual será necesario introducir una coordenada curvilínea, definida mediante una ecuación escalar, que se añadirá al sistema discretizado del modelo.
Recomendaciones
Haber cursado las materias de Métodos Numéricos en Optimización y Ecuaciones Diferenciales y estar cursando Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Discretización numérica del problema de Bratu	1
1.1. Resolución del problema de Bratu mediante el método de Newton	3
2. Parametrización de las curvas de soluciones de problemas no lineales dependientes de un parámetro	5
2.1. Parametrización natural	7
2.2. Parametrización en un entorno de un punto singular simple	8
2.3. Parametrización en un entorno de un punto de retorno	11
2.4. Parametrización por longitud de arco	14
3. Aproximación numérica de las curvas de soluciones	17
3.1. Aproximación numérica en un entorno de un punto regular	17
3.2. Aproximación numérica en un entorno de un punto singular simple	21
3.3. Aproximación numérica en un entorno de un punto de retorno	23
3.3.1. Puntos de retorno no degenerados	25
4. Detección de puntos de retorno	29
4.1. Funciones test	29
4.1.1. Determinantes	30
4.1.2. Matrices ampliadas	30
5. Resultados numéricos	41
5.1. Solución analítica del problema de Bratu	41
5.2. Solución numérica del problema de Bratu mediante diferencias finitas	43
5.3. Tablas de error	44

5.3.1. Error en norma $L^\infty(0, 1)$	45
5.3.2. Error en norma $L^2(0, 1)$	46
5.3.3. Error en norma H_0^1	47
5.4. Aproximación numérica de la autofunción en un entorno del punto de retorno	48
Conclusiones y nuevas líneas de investigación	49
5.5. Conclusiones de la memoria	51
5.6. Problema de Bratu en dimensión superior	52
5.7. Discretizaciones alternativas del problema de Bratu	52
5.8. Aproximación numérica en un entorno de un punto de bifurcación simple . .	53
Bibliografía	55

Resumen

En este trabajo se lleva a cabo la resolución numérica del problema de Bratu unidimensional. Para ello se procederá, en primer lugar, a la discretización mediante diferencias finitas centradas de orden dos del mismo. A continuación, se construye la parametrización de las curvas de soluciones del problema continuo en entornos de puntos regulares y de puntos singulares simples; tras lo cual se inicia un estudio sobre la aproximación numérica de las soluciones del problema continuo por las del problema discreto correspondiente. También se presentan algunos tipos de funciones escalares que serán de utilidad a la hora de detectar los llamados puntos de retorno no degenerados, que son los que presenta la curva de soluciones del problema de Bratu. Finalmente, se implementa un método de continuación respecto al parámetro longitud de arco y se muestran los resultados numéricos obtenidos.

Abstract

In this memory the numerical resolution of the one-dimensional Bratu problem is carried out. Firstly, we will proceed to its discretization, using the second order centered finite difference scheme. Then, the parameterization of the solution curve of the continuous problem in a neighbourhood of a regular point is obtained and, in the same way, near a simple singular point. A study of the numerical approximation of the solutions of the continuous problem by those of the corresponding discretized problem is also carried out. After that, some scalar functions are presented in order to detect the so-called nondegenerate turning points, which is the case in the solution curve of the Bratu problem. Finally, an arclength continuation method has been implemented and numerical results are given.

Introducción

En este trabajo se realiza un estudio sobre la resolución numérica del clásico problema de Bratu unidimensional, definido como el siguiente problema de contorno no lineal

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda e^{u(x)} & \forall x \in [a, b], \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \quad (1)$$

En todo el trabajo supondremos, sin pérdida de generalidad, $a = 0$ y $b = 1$.

Este tipo de problemas de contorno son habitualmente usados tanto en las ciencias como en las ingenierías para describir modelos físicos y químicos complejos. En particular, el problema de Bratu se utiliza en una gran variedad de aplicaciones, como son el modelo de ignición de la teoría de la combustión térmica o el modelo Chandrasekhar de la expansión del universo. También aparece en la teoría de las reacciones químicas, la transferencia de calor radiactivo y la nanotecnología (para más aplicaciones se puede consultar [CCÖ+09], así como las referencias que allí aparecen).

El problema de Bratu es un caso particular de las llamadas *ecuaciones de reacción-difusión* en el que únicamente se consideran soluciones estacionarias. Estas ecuaciones, en dimensión superior, son de la forma

$$-D \Delta u = f(\lambda, u),$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$ es un vector que representa varias sustancias en una reacción química o especies en un sistema biológico, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ es un vector de control de parámetros, $D \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es una matriz simétrica y semidefinida positiva que representa la tasa de difusión de la sustancia y $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector de funciones, que supondremos de clase \mathcal{C}^∞ , que representa la reacción entre las diferentes sustancias. Este tipo de ecuaciones se suelen definir en dominios acotados $\Omega \in \mathbb{R}^k$, con $k \leq 3$, como pueden ser un recipiente (en el caso de las reacciones químicas), un jardín (en sistemas biológicos) o un tegumento de un embrión (por ejemplo, para el estudio de la formación de patrones del pelaje animal) y,

además, estas condiciones de contorno pueden diferir entre las especies que conforman el sistema.

Sin embargo, y como ya hemos dicho anteriormente, en este trabajo se tratará únicamente el caso unidimensional del problema de Bratu, esto es, el caso en el que $p = k = 1$. Además, se procederá al estudio y al cálculo de las soluciones de (1) en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. De esta forma se observará como, conforme los valores del parámetro varían, el sistema se auto-ajusta de manera correspondiente ante el nuevo estado.

En este sentido, se detectará la existencia de un valor crítico del parámetro λ para el cual el número de soluciones del problema de Bratu varía, de manera que el problema (1) puede tener dos soluciones, una o ninguna. Este tipo de fenómeno, conocido bajo el nombre de *bifurcación*, provoca que sea necesario emplear un método de continuación, el cual constituye una herramienta fundamental en la teoría de la bifurcación de los problemas no lineales.

Por tanto, la resolución numérica del problema de Bratu se llevará a cabo mediante la discretización con diferencias finitas del operador diferencial, combinada con un método de continuación. Para ello, será necesario introducir una coordenada curvilínea, definida mediante una ecuación escalar, que se añadirá al sistema discretizado del modelo.

Además, en esta memoria también se demuestra que el problema discretizado obtenido mediante diferencias finitas presenta un comportamiento análogo al del problema continuo, y se estudiará la aproximación numérica de la curva de soluciones del problema continuo por las del problema discretizado correspondiente. Para ello, nos basaremos en [BRR81a], donde se exponen resultados generales de aproximación en un entorno de un punto de retorno (que, como veremos, es el que presenta la curva de soluciones de (1)).

A continuación se presenta un esquema de este trabajo. En el Capítulo 1 se procede a la discretización mediante diferencias finitas centradas de orden dos del problema de Bratu, así como a su posterior resolución numérica haciendo uso del método iterativo de Newton, con λ fijado. En el Capítulo 2 se aborda el problema de parametrizar las curvas de soluciones del problema continuo

$$\{(\lambda, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : (\lambda, u) \text{ es solución de (1)}\},$$

tanto en un entorno de un punto regular (véase [MEI13]) como en un entorno de un punto singular simple como, en particular, de un punto de retorno (véase [BRR81a]); para así

poder estudiar la variación de las soluciones de (1) en función del parámetro λ . En el Capítulo 3, el cual supone una adaptación de los resultados de [BRR81a] al marco funcional adecuado, se estudia la aproximación numérica de la curva de soluciones del problema continuo por la del problema discreto obtenido mediante diferencias finitas. En el Capítulo 4 se presentan algunos tipos de funciones escalares que son de utilidad a la hora de detectar puntos de retorno. En el Capítulo 5 se darán detalles de la implementación en MATLAB del método de continuación anteriormente mencionado y se presentarán los resultados numéricos correspondientes y, finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las principales conclusiones de este trabajo, así como las posibles nuevas líneas de investigación a seguir.

Capítulo 1

Discretización numérica del problema de Bratu

Consideremos el problema de contorno no lineal

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda e^{u(x)} & \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \quad (1.1)$$

Con objetivo de discretizar el dominio, definamos los nodos x_0, \dots, x_{n+1} de manera que

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1,$$

que además supondremos equiespaciados, esto es

$$x_i = ih \quad , \quad i = 0, \dots, n+1,$$

siendo $h = \frac{1}{n+1}$.

Sea $u \in \mathcal{C}^4([0, 1])$. Empleando la fórmula de derivación numérica centrada

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + O(h^2),$$

se obtiene la siguiente aproximación de la derivada segunda, de orden dos,

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2}.$$

Esto sugiere la siguiente aproximación de la ecuación diferencial (1.1) en el punto x_i

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} - \lambda e^{u_i} = 0,$$

donde u_{i+1} , u_i y u_{i-1} representan las aproximaciones de $u(x_i + h)$, $u(x_i)$ y $u(x_i - h)$, respectivamente.

Por tanto, como se tienen las condiciones de contorno homogéneas $u(0) = u_0 = 0 = u_{n+1} = u(1)$, tomamos $u_h = (u_1, \dots, u_n)^T$, de manera que el problema original se puede discretizar y escribir en notación matricial como

$$A_{0h}u_h - \lambda e^{u_h} = \mathcal{O}, \quad (1.2)$$

donde

$$A_{0h} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n} \quad (1.3)$$

y $e^{u_h} = (e^{u_1}, e^{u_2}, \dots, e^{u_{n-1}}, e^{u_n})^T \in \mathbb{R}^n$. De esta forma, si se define la función

$$F_h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ Z = (z_1, \dots, z_n)^T & \longmapsto & F_h(Z) = A_{0h}Z - \lambda e^Z \end{array},$$

es claro que u_h es solución del sistema n -dimensional no lineal

$$F_h(u_h) = \mathcal{O}. \quad (1.4)$$

Nótese que el orden de aproximación del esquema numérico construido es dos, como se recoge en el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Sea g una función de clase $\mathcal{C}^2([0, 1])$ y supongamos que la solución u de la ecuación lineal $-u'' = g$ con condiciones de contorno $u(0) = \alpha$ y $u(1) = \beta$ es una función de clase $\mathcal{C}^4([0, 1])$. Entonces*

$$\|u_{\text{exa}} - u_h\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |u(x_i) - u_i| \leq K \sup_{x \in [0, 1]} |u^{(4)}(x)| h^2,$$

siendo $u_{\text{exa}} = (u(x_1), \dots, u(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ y K una constante independiente de h .

Demostración. Véase [CMT89]. □

1.1. Resolución del problema de Bratu mediante el método de Newton

Una vez discretizada la ecuación diferencial (1.1), el siguiente paso será resolver la ecuación (1.4) haciendo uso de un método iterativo, como es el método de Newton vectorial. Formalmente, se construye el siguiente proceso iterativo

$$\begin{cases} u_h^{(0)} \text{ dado} \\ u_h^{(k)} = u_h^{(k-1)} - DF_h(u_h^{(k-1)})^{-1} F_h(u_h^{(k-1)}) \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

donde, en nuestro caso

$$DF_h(u_h^{(k)}) = A_{0h} - \lambda \begin{pmatrix} e^{u_1^{(k)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{u_2^{(k)}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{u_n^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, a la hora de implementar este método en un ordenador, es preferible, en términos de eficiencia, evitar el cálculo de la inversa de $DF_h(u_h^{(k-1)})$ resolviendo un único sistema, dado por

$$\begin{cases} u_h^{(0)} \text{ dado} \\ DF_h(u_h^{(k-1)}) \Delta u_h^{(k)} = -F_h(u_h^{(k-1)}) \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

donde $\Delta u_h^{(k)} = u_h^{(k)} - u_h^{(k-1)}$. Como test de parada se puede emplear

$$\|\Delta u_h^{(k)}\|_\infty \leq \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ previamente fijado.

Capítulo 2

Parametrización de las curvas de soluciones de problemas no lineales dependientes de un parámetro

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ . Se considera la ecuación

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O}, \quad (2.1)$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$ es un vector que describe el estado de un sistema definido por el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Con objeto de detallar las distintas situaciones que se analizan y se resuelven numéricamente en este trabajo, introducimos las siguientes definiciones (véase [MEI13], [BRR80] y [BRR81a]).

Definición 2.1. Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ . Un punto $g \in \mathbb{R}^n$ se dice **valor regular** de F si

$$\text{rang}(DF(\lambda, u)) = n, \quad \forall (\lambda, u) \in F^{-1}(g),$$

siendo $DF(\lambda, u) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación diferencial de F en (λ, u) . Un punto $g \in \mathbb{R}^n$ que no es valor regular de F se dice **valor singular**.

Observación 2.2. Nótese que en la definición anterior se entiende que $\text{rang}(DF(\lambda, u)) = \dim(\text{Im}(DF(\lambda, u)))$. Por tanto, un punto $g \in \mathbb{R}^n$ se dirá valor regular de F si la aplicación $DF(\lambda, u) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva, para todo $(\lambda, u) \in F^{-1}(g)$.

Definición 2.3. Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ . Diremos que el punto $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un **punto regular** de F si la aplicación

$$D_u F^0 := D_u F(\lambda^0, u^0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo.

Definición 2.4. Un punto $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ se dice **punto singular** de F si

$$\text{rang}(D_u F^0) \leq n - 1.$$

En particular, diremos que

- (λ^0, u^0) es un **punto singular simple** de F si:
 1. $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$,
 2. $D_u F^0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es singular, con $\text{rang}(D_u F^0) = n - 1$.
- (λ^0, u^0) es un **punto de retorno** (o **punto límite simple**) de F si:
 1. $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$,
 2. $D_u F^0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es singular, con $\text{rang}(D_u F^0) = n - 1$,
 3. $D_\lambda F^0 := D_\lambda F(\lambda^0, u^0) \notin \text{Im}(D_u F^0)$.

Observación 2.5. Como veremos más adelante, los puntos regulares verifican las hipótesis del teorema de la función implícita, de manera que podremos obtener en estos puntos u como función explícita de λ , a diferencia de lo que sucede con los puntos singulares simples y los puntos de retorno. Nótese además que tanto los puntos regulares como los puntos de retorno pueden aplicarse en valores regulares de F .

Observación 2.6. Las anteriores definiciones, así como todos los resultados que se presentan a lo largo de este Capítulo, se aplican de manera inmediata al problema de Bratu sin más que tomar

$$F(\lambda, u) = -u'' - \lambda e^u.$$

En este trabajo consideraremos únicamente el caso en el que $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de F . El objetivo será estudiar procedimientos numéricos para el cálculo aproximado de las familias de soluciones de (2.1).

Denotemos por

$$\mathcal{M}_0 := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : F(\lambda, u) = \mathcal{O}, \text{rang}(DF(\lambda, u)) = n\} \quad (2.2)$$

al conjunto de soluciones de (2.1) para las cuales la matriz jacobiana $DF(\lambda, u)$ tiene rango máximo. En este capítulo, discutiremos cómo parametrizar el conjunto \mathcal{M}_0 .

2.1. Parametrización natural

Consideremos el problema uniparamétrico con variables $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde u representa una variable de estado y λ su parámetro de control. Dado un punto regular (λ^0, u^0) solución de (2.1), el teorema de la función implícita (que se puede consultar en [ROD03]) establece las condiciones bajo las cuales λ puede ser utilizado como parámetro de la curva de soluciones que pasa por (λ^0, u^0) en un entorno de dicho punto. En otras palabras, establece cuándo el conjunto de soluciones \mathcal{M}_0 definido en (2.2) puede ser parametrizado localmente respecto al parámetro λ .

Lema 2.7. *Sea $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$ y $\text{rang}(D_u F^0) = n$. Entonces existe una constante maximal $\delta > 0$ y una única función $u : (\lambda^0 - \delta, \lambda^0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\{(\lambda, u(\lambda)) : |\lambda - \lambda^0| < \delta, u(\lambda^0) = u^0\} \subset \mathcal{M}_0. \quad (2.3)$$

Observación 2.8. El lema anterior extiende la parametrización a ambos lados de λ^0 hasta que $DF(\lambda, u(\lambda))$ deje de ser inversible. Notemos además que, como hemos tomado δ de forma que sea maximal, el rango de $D_u F(\lambda + \delta, u(\lambda + \delta))$ o $D_u F(\lambda - \delta, u(\lambda - \delta))$ es menor que n .

Nótese que, si $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de F y en (λ^0, u^0) se produce una deficiencia del rango de $D_u F^0$, entonces $D_u F^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deja de ser un isomorfismo y el lema anterior ya no se aplica. En este caso, basta cambiar el parámetro λ con otra componente de u para conseguir una parametrización de la curva de soluciones en un entorno de (λ^0, u^0) . En los dos apartados siguientes veremos cómo realizar una parametrización global de la curva de soluciones de (2.1) cuando $\text{rang}(D_u F^0) < n$.

2.2. Parametrización en un entorno de un punto singular simple

Dada una aplicación $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^∞ , el objetivo de este apartado es estudiar las soluciones de la ecuación

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O} \quad (2.4)$$

en un entorno de un punto singular simple (λ^0, u^0) , esto es, de un punto $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que verifique las dos siguientes condiciones:

1. $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$,
2. $D_u F^0$ es singular, con $\text{rang}(D_u F^0) = n - 1$ (o, equivalentemente, singular y tal que 0 es un autovalor simple de $D_u F^0$).

En esta sección seguiremos el formalismo de [BRR81a], adaptado al caso de dimensión finita. Denotemos por $\|\cdot\|$ a la norma euclídea en \mathbb{R}^n y consideremos el producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

A continuación presentamos un resultado que será de gran utilidad a lo largo de todo el capítulo.

Lema 2.9. *Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ tal que $\text{rang}(D_u F^0) = n - 1$. Entonces existen $\varphi^0, \varphi^{0*} \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\begin{aligned} D_u F^0 \varphi^0 &= 0 \quad , \quad \|\varphi^0\| = 1, \\ (D_u F^0)^* \varphi^{0*} &= 0 \quad , \quad \langle \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle = 1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

siendo $(D_u F^0)^* \equiv \overline{D_u F^0}^T$ la matriz adjunta de $D_u F^0$. Además, si denotamos por

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv \text{Ker}(D_u F^0) = \langle \varphi^0 \rangle, \\ V_2 &\equiv \text{Im}(D_u F^0) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, \varphi^{0*} \rangle = 0\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

entonces se verifica que

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \quad (2.7)$$

y $D_u F^0|_{V_2}$ es un isomorfismo de V_2 .

Observación 2.10. Nótese que en el problema de Bratu el operador $D_u F^0$ es autoadjunto (esto es, verifica que $D_u F^0 = (D_u F^0)^*$). Por tanto, en el teorema anterior se tiene que $\varphi^0 = \varphi^{0*}$ y, además, la suma (2.7) es ortogonal.

Denotemos por $L = \left(D_u F^0|_{V_2} \right)^{-1}$ a la inversa del isomorfismo $D_u F^0|_{V_2} : V_2 \longrightarrow V_2$. Si definimos el operador proyección $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_2$ como

$$Q(v) = v - \langle v, \varphi^{0*} \rangle \varphi^0, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

entonces la ecuación (2.1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} Q F(\lambda, u) = \mathcal{O} \in V_2, \\ (I - Q) F(\lambda, u) = \mathcal{O} \in V_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde $(I - Q) : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_1$.

De lo anterior se sigue que, dado $u \in \mathbb{R}^n$, si (λ^0, u^0) es un punto singular simple, entonces existe una única descomposición de la forma

$$u = u^0 + \alpha \varphi^0 + v, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad v \in V_2,$$

ya que $\mathbb{R}^n = \langle \varphi^0 \rangle \oplus V_2$. Por tanto, si escribimos

$$\lambda = \lambda^0 + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

entonces el sistema (2.9) se puede escribir como

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\xi, \alpha, v) = \mathcal{O} \in V_2, \\ (I - Q) F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v) = \mathcal{O} \in V_1 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\xi, \alpha, v) = \mathcal{O} \in V_2, \\ \langle F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v), \varphi^{0*} \rangle = 0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.10)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\xi, \alpha, v) &\longmapsto \mathcal{F}(\xi, \alpha, v) = Q F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v) \end{aligned}$$

una función que verifica:

1. $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \times V_2)$,
2. $\mathcal{F}(0, 0, \mathcal{O}) = Q F(\lambda^0, u^0) = Q(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$,
3. $D_v \mathcal{F}(0, 0, \mathcal{O}) = D_u F^0|_{V_2} \in \mathcal{L}(V_2, V_2)$ es un isomorfismo (por el lema 2.9).

Por tanto, del teorema de la función implícita (véase [ROD03]) se sigue el siguiente lema.

Lema 2.11. Sea $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un punto singular simple. Entonces existen dos constantes $\xi^0, \alpha^0 > 0$ y una única aplicación $v : (-\xi^0, \xi^0) \times (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow V_2$ de clase C^∞ tal que

1. $\mathcal{F}(\xi, \alpha, v(\xi, \alpha)) = \mathcal{O}, \quad |\xi| < \xi^0, \quad |\alpha| < \alpha^0$
2. $v(0, 0) = \mathcal{O}$.

Por tanto, volviendo a la segunda ecuación del sistema (2.10), es inmediato que resolver la ecuación (2.1) en un entorno de un punto singular simple (λ^0, u^0) equivale a resolver la **ecuación de bifurcación**

$$f(\xi, \alpha) = \langle F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi, \alpha)), \varphi^{0*} \rangle = 0, \quad (2.11)$$

siendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables escalares, ξ y α .

Observación 2.12. Obtengamos las expresiones de las derivadas parciales de la función $v : (-\xi^0, \xi^0) \times (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow V_2$ del lema anterior. Derivando la ecuación 1. del lema 2.11 respecto de ξ en el punto $(\xi, \alpha) = (0, 0)$, resulta

$$\begin{aligned} D_\xi \mathcal{F}(\xi, \alpha, v(\xi, \alpha))|_{(\xi, \alpha) = (0, 0)} &= \left. \frac{\partial}{\partial \xi} QF(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi, \alpha)) \right|_{(\xi, \alpha) = (0, 0)} = \\ &= QD_\lambda F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi, \alpha))|_{(0, 0)} + QD_u F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi, \alpha)) \left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_{(0, 0)} = \\ &= QD_\lambda F(\lambda^0, u^0 + v(0, 0)) + QD_u F(\lambda^0, u^0 + v(0, 0)) \frac{\partial v}{\partial \xi}(0, 0) = \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Como $v(0, 0) = \mathcal{O}$ y además, por definición, $QD_u F(\lambda, u) = D_u F(\lambda, u)$, entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$QD_\lambda F(\lambda^0, u^0) + D_u F(\lambda^0, u^0) \frac{\partial v}{\partial \xi}(0, 0) = QD_\lambda F^0 + D_u F^0 \frac{\partial v}{\partial \xi}(0, 0) = \mathcal{O}.$$

Finalmente, despejando y teniendo en cuenta que $L = \left(D_u F^0|_{V_2} \right)^{-1}$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, 0) = -LQD_\lambda F^0. \quad (2.12)$$

Si ahora derivamos la misma ecuación respecto de α en el punto $(\xi, \alpha) = (0, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} D_\alpha \mathcal{F}(\xi, \alpha, v(\xi, \alpha))|_{(\xi, \alpha) = (0, 0)} &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} QF(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi, \alpha)) \right|_{(\xi, \alpha) = (0, 0)} = \\ &= QD_u F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi, \alpha)) \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\xi, \alpha) \right) \Big|_{(\xi, \alpha) = (0, 0)} = \\ &= D_u F^0 \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, 0) \right) = D_u F^0 \varphi^0 + D_u F^0 \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, 0) = D_u F^0 \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, 0) = \mathcal{O}, \end{aligned}$$

y como $\frac{\partial v}{\partial \alpha}(0,0) \in V_2 \cap \text{Ker}(DuF^0)$, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}(0,0) = \mathcal{O}. \quad (2.13)$$

Una vez obtenidas las derivadas parciales de v , si se deriva (2.11) respecto de α y se evalúa en $(\xi, \alpha) = (0,0)$ resulta

$$D_\alpha f(0,0) \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = \left\langle DuF^0 \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0,0) \right), \varphi^{0*} \right\rangle = \langle DuF^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle = 0, \quad (2.14)$$

de donde se sigue que en un entorno de un punto singular simple, α (y, por consiguiente, u) no puede ser parametrizado en función de ξ (respectivamente λ). En el siguiente apartado estudiaremos el caso en el que, además, $D_\xi f(0,0) \neq 0$ (es el caso de los puntos de retorno), lo cual permitirá parametrizar ξ en función de α y, por consiguiente, λ y u en función de α , obteniendo así una única curva de soluciones $(\lambda(\alpha), u(\alpha))$ de (2.4).

2.3. Parametrización en un entorno de un punto de retorno

En este apartado veremos que, en un entorno de un punto de retorno, las soluciones de (2.11) constituyen una única curva de soluciones, de la cual construiremos la parametrización. Consideremos de nuevo el problema

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O}, \quad (2.15)$$

y supongamos que (λ^0, u^0) es un punto de retorno de F , esto es, un punto singular simple que, además, verifica la condición

$$D_\lambda F^0 \notin \text{Im}(D_u F^0).$$

Consideremos, de nuevo, la función escalar

$$f(\xi, \alpha) = \langle F(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v(\alpha, \xi)), \varphi^{0*} \rangle. \quad (2.16)$$

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Lema 2.13. *Sea (λ^0, u^0) un punto de retorno de F . Entonces existe una constante $\alpha^0 > 0$ y una única aplicación $\xi : \alpha \in (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow \xi(\alpha) \in \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^∞ tal que:*

1. $f(\xi(\alpha), \alpha) = 0$, $|\alpha| < \alpha^0$,
2. $\xi(0) = 0$.

Además, existe una única rama de soluciones $\{(\lambda(\alpha), u(\alpha)) : |\alpha| < \alpha^0\}$ de (2.15) en un entorno del punto de retorno (λ^0, u^0) , siendo $\alpha \rightarrow \lambda(\alpha)$ y $\alpha \rightarrow u(\alpha)$ funciones de clase \mathcal{C}^∞ dadas por

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha) &= \lambda^0 + \xi(\alpha), \\ u(\alpha) &= u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Demostración. Basta tener en cuenta que, como (λ^0, u^0) es un punto de retorno, entonces $D_\lambda F^0 \notin \text{Im}(D_u F^0) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, \varphi^{0*} \rangle = 0\}$, luego derivando (2.16) respecto de ξ y evaluando en $(\xi, \alpha) = (0, 0)$ resulta

$$D_\xi f(0, 0) \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi}(0, 0) = \langle D_\lambda F^0, \varphi_0^* \rangle \neq 0,$$

por lo que podemos aplicar el teorema de la función implícita en la ecuación de bifurcación (2.11) para obtener la función $\xi = \xi(\alpha)$; lo cual, junto con el lema de la sección anterior, completa el resultado. Para más detalles puede consultarse [BRR81a]. \square

De este teorema se deduce inmediatamente que en un entorno de un punto de retorno las soluciones de (2.1) son, exactamente, las soluciones de la **ecuación de bifurcación**

$$f(\xi(\alpha), \alpha) = \langle F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)), \varphi^{0*} \rangle = 0$$

y vienen determinadas de manera única, en un entorno del punto, por (2.17).

Observación 2.14. Calculemos la primera y segunda derivada de la función $\alpha \rightarrow \xi(\alpha)$ en el origen. Para ello, serán necesarias las expresiones de las derivadas parciales de v calculadas en el apartado anterior. Derivando la expresión 1. del lema 2.13 respecto de α se obtiene

$$\begin{aligned}& \left\langle D_\lambda F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + \right. \\ & \left. + D_u F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi(\alpha), \alpha) \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\xi(\alpha), \alpha) \right), \right. \\ & \left. \varphi^{0*} \right\rangle = 0\end{aligned}\tag{2.18}$$

Evaluando (2.18) en $\alpha = 0$ y teniendo en cuenta (2.12), (2.13) y que $\varphi^{0*} \in \text{Im}(D_u F^0)^\perp$

$$\left\langle D_\lambda F^0 \frac{d\xi}{d\alpha}(0) + D_u F^0 \left(\varphi^0 - LQD_\lambda F^0 \frac{d\xi}{d\alpha}(0) \right), \varphi^{0*} \right\rangle = \left\langle D_\lambda F^0 \frac{d\xi}{d\alpha}(0), \varphi^{0*} \right\rangle = 0.$$

Como en un punto de retorno se verifica que $\langle D_\lambda F^0, \varphi^{0*} \rangle \neq 0$, entonces necesariamente

$$\frac{d\xi}{d\alpha}(0) = 0.\tag{2.19}$$

Para calcular la derivada segunda, basta volver a derivar (2.18) respecto de α

$$\begin{aligned}
& \left\langle D_{\lambda\lambda}F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \left(\frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) \right)^2 + \right. \\
& + D_{\lambda}F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \frac{d^2\xi}{d\alpha^2}(\alpha) + \\
& + 2D_{\lambda u}F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi(\alpha), \alpha) \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\xi(\alpha), \alpha) \right) \\
& \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + D_uF(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi(\alpha), \alpha) \left(\frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) \right)^2 + \right. \\
& + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \xi}(\xi(\alpha), \alpha) \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + \left. \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}(\xi(\alpha), \alpha) \right) + \\
& + D_{uu}F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)) \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi(\alpha), \alpha) \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\xi(\alpha), \alpha) \right) \\
& \left. \left(\varphi^0 + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi(\alpha), \alpha) \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha) + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\xi(\alpha), \alpha) \right), \varphi^{0*} \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Evalutando (2.20) en $\alpha = 0$ y teniendo en cuenta (2.13) y (2.19)

$$\left\langle D_{\lambda}F^0 \frac{d^2\xi}{d\alpha^2}(0) + D_{uu}F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \right\rangle = \left\langle D_{\lambda}F^0 \frac{d^2\xi}{d\alpha^2}(0), \varphi^{0*} \right\rangle + \langle D_{uu}F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle = 0,$$

donde $D_{uu}F^0 \equiv D_{uu}F(\lambda^0, u^0) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ denota la derivada parcial segunda de F respecto a u en el punto (λ^0, u^0) , siendo $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ el espacio formado por todas las funciones continuas y bilineales de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n . Finalmente, como en un punto de retorno se verifica que $\langle D_{\lambda}F^0, \varphi^{0*} \rangle \neq 0$, de lo anterior se deduce inmediatamente que

$$\frac{d^2\xi}{d\alpha^2}(0) = -\langle D_{\lambda}F^0, \varphi^{0*} \rangle^{-1} \langle D_{uu}F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle.$$

Definición 2.15. Diremos que un punto de retorno $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es **no degenerado** si verifica la condición

$$\langle D_{uu}F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle \neq 0.$$

Observación 2.16. Construyamos el polinomio de Taylor de la función $\xi : (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow \mathbb{R}$ centrado en $\alpha = 0$, teniendo en cuenta que $\xi(0) = \xi'(0) = 0$:

$$\xi(\alpha) = \xi(0) + \xi'(0) \alpha + \frac{\xi''(0)}{2} \alpha^2 + O(\alpha^3) = \frac{\xi''(0)}{2} \alpha^2 + O(\alpha^3), \tag{2.21}$$

donde $\xi'(0) \equiv \frac{d\xi}{d\alpha}(0)$ y $\xi''(0) \equiv \frac{d^2\xi}{d\alpha^2}(0)$. Sustituyendo (2.21) en (2.17) resulta

$$\lambda(\alpha) = \lambda^0 + \frac{\xi''(0)}{2} \alpha^2 + O(\alpha^3).$$

Es por esto por lo que un punto de retorno no degenerado (en el cual se verifica que $\xi''(0) \neq 0$) también se llama **punto límite cuadrático**, ya que en él la curva de soluciones $(\lambda(\alpha), u(\alpha))$ se comporta, localmente, como una parábola de grado dos no degenerada de vértice (λ^0, u^0) .

2.4. Parametrización por longitud de arco

Una vez obtenida la expresión analítica de la parametrización de la curva de soluciones de (2.15) en el caso de que \mathcal{O} sea un valor regular de F , terminaremos este capítulo describiendo una parametrización válida tanto en las soluciones regulares (en las cuales sería igualmente posible utilizar el parámetro natural, λ , o su trasladado, ξ) como en los puntos de retorno (en donde habría que utilizar, necesariamente, el parámetro α).

Sea $(\lambda^0, u^0) \in \mathcal{M}_0$, esto es, una solución de $F(\lambda, u) = \mathcal{O}$ tal que

$$\text{rang}(DF(\lambda^0, u^0)) = n.$$

Gracias al teorema de la función implícita, hemos obtenido en las secciones anteriores un intervalo abierto $J \ni 0$ y una única curva $c : t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow c(t) = (\lambda(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

1. $F(c(t)) = \mathcal{O}$,
2. $\text{rang}(DF(c(t))) = n$, $\forall t \in J$,
3. $\dot{c}(0) \neq \mathcal{O}$, $c(0) = (\lambda^0, u^0)$.

En particular, se tiene que $\{c(t) : t \in J\} \subset \mathcal{M}_0$ y

$$c(t) = (\lambda^0, u^0) + \dot{c}_0 t + \dots,$$

donde $\dot{c}_0 = \dot{c}(0)$. Usando la regla de la cadena en la ecuación **1.** resulta $DF(c(t))\dot{c}(t) = \mathcal{O}$, de donde $\langle \dot{c}(t) \rangle \subset \text{Ker}(DF(c(t)))$. Por tanto, de **2.** se deduce que

$$\text{Ker}(DF(c(t))) = \langle \dot{c}(t) \rangle.$$

A partir de esto, podemos parametrizar la curva de soluciones mediante el parámetro longitud de arco, s , de manera que

$$\|\dot{c}(s)\| = \left[\sum_{i=1}^{n+1} \dot{c}_i(s)^2 \right]^{1/2} = 1.$$

El siguiente resultado de [MEI13] establece las condiciones bajo las cuales la curva de soluciones de (2.15) puede ser parametrizada mediante el parámetro longitud de arco.

Lema 2.17. *Sea (λ^0, u^0) una solución de $F(\lambda, u) = \mathcal{O}$ tal que $\text{rg}(DF(\lambda^0, u^0)) = n$. Entonces la curva de soluciones puede ser parametrizada mediante el parámetro longitud de arco s en un entorno de (λ^0, u^0) . Es decir, existe un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \in J$ y una única función $c : s \in J \rightarrow c(s) = (\lambda(s), u(s)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que*

1. $F(c(s)) = \mathcal{O}$,
2. $c(0) = (\lambda^0, u^0)$,
3. $\|\dot{c}(s)\|^2 = \dot{c}^T(s)\dot{c}(s) = 1$, $\forall s \in J$.

Además, la tangente $\dot{c}(s)$ queda determinada de manera única por el sistema

$$\begin{cases} DF(c(s))\dot{c}(s) = 0 \\ \|\dot{c}(s)\|^2 = 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

verificando la propiedad

$$\det \begin{pmatrix} DF(c(s)) \\ \dot{c}(s)^T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.23)$$

Definición 2.18. Llamamos **vector tangente orientado** de la curva solución $c(s)$ al único vector $\dot{c}(s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que verifica las condiciones 2.22 y 2.23. Definimos entonces la **matriz jacobiana extendida** de F en el punto $s = s^0$ como la matriz

$$\begin{pmatrix} DF(c(s^0)) \\ \dot{c}(s^0)^T \end{pmatrix}$$

Relación con la parametrización natural

Recordemos que en la parametrización natural las coordenadas (λ, u) se escogen en \mathbb{R}^{n+1} para distinguir el parámetro λ . Sin embargo, si la parametrización se realiza a través del parámetro longitud de arco s , entonces la curva solución será de la forma $c(s) = (\lambda(s), u(s))$. Como ya vimos en la sección anterior, la parametrización natural se bloquea en cuanto

$$\text{rang}(D_u F(\lambda(s), u(s))) < n,$$

mientras que la parametrización por longitud de arco continúa en este punto. Además, derivando la ecuación

$$F(\lambda(s), u(s)) = \mathcal{O}$$

respecto de s , obtenemos

$$D_\lambda F(\lambda(s), u(s)) \dot{\lambda}(s) + D_u F(\lambda(s), u(s)) \dot{u}(s) = DF(\lambda(s), u(s)) \begin{pmatrix} \dot{\lambda}(s) \\ \dot{u}(s) \end{pmatrix} = \mathcal{O},$$

esto es, la derivada de la parametrización longitud de arco es el vector tangente orientado, $\begin{pmatrix} \dot{\lambda}(s) \\ \dot{u}(s) \end{pmatrix}$. Además, por construcción en (2.22), se verifica que

$$\|\dot{u}(s)\|^2 + |\dot{\lambda}(s)|^2 = 1.$$

En las secciones anteriores se ha mostrado que un parámetro longitud de arco puede ser tomado en la dirección de ξ (o, equivalentemente, de λ) en el caso de un punto regular; y en la dirección de α en el caso de un punto de retorno no degenerado.

Capítulo 3

Aproximación numérica de las curvas de soluciones

En el capítulo anterior se ha estudiado la parametrización de las curvas de soluciones del problema continuo de dimensión finita

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ , en un entorno de soluciones regulares, de puntos singulares simples y de puntos de retorno no degenerados. En particular, estos resultados se aplican también a las aproximaciones finito-dimensionales construidas con esquemas de diferencias finitas de ecuaciones diferenciales.

En los artículos ya clásicos de Brezzi, Rappaz y Raviart ([BRR80], [BRR81a] y [BRR81b]), se analiza el orden de aproximación que se obtiene al aproximar una curva de soluciones del problema continuo por la curva de soluciones del problema discreto.

En este capítulo se presentan dichos resultados de aproximación numérica de problemas no lineales adaptados al marco funcional adecuado para el análisis numérico del problema de Bratu.

3.1. Aproximación numérica en un entorno de un punto regular

Definamos el conjunto

$$H_0^1(0, 1) := \{g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : g \in H^1(0, 1) \text{ y } g(0) = 0 = g(1)\},$$

donde $H^1(0, 1) = \{g \in L^2(0, 1) : g' \in L^2(0, 1)\}$.

Se tiene que $H_0^1(0, 1)$ es un espacio de Hilbert (y, por tanto, de Banach) de dimensión infinita, dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx,$$

donde u' y v' denotan las derivadas débiles¹ de u y v , respectivamente. Nótese que dicho producto escalar induce la norma

$$\|u\|_{H_0^1(0,1)} = \left(\int_0^1 u(x)^2 dx + \int_0^1 u'(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

A lo largo de esta sección emplearemos la notación $H_0^1 \equiv H_0^1(0, 1)$. Sean entonces $G : \mathbb{R} \times H_0^1 \rightarrow H_0^1$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ y $T \in \mathcal{L}(H_0^1, H_0^1)$ un operador lineal tales que

$$F(\lambda, u) = u + TG(\lambda, u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times H_0^1, H_0^1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, u \in H_0^1$$

y consideremos el problema no lineal

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O}. \tag{3.1}$$

Denotemos por $D^l F(\lambda, u) \in \mathcal{L}_l(\mathbb{R} \times H_0^1, H_0^1)$, $l \geq 2$, a la derivada l -ésima de F .

Consideremos una malla x_0, x_1, \dots, x_{n+1} verificando

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 1,$$

que, además, supondremos uniforme (esto es, tal que $x_i - x_{i-1} = h$, para $i = 1, \dots, n+1$). Para cada valor del parámetro $h > 0$, que tenderá a cero, consideremos el subespacio de dimensión finita $V_h \subset H_0^1$, formado por todas las funciones afines a trozos en $[0, 1]$

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0([0, 1]) : v_h|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1, i = 1, \dots, n+1 ; v_h(0) = 0 = v_h(1) \right\}$$

donde por \mathbb{P}_1 denotamos al espacio de polinomios de grado menor o igual que uno. Nótese que cada elemento de V_h queda unívocamente determinado por los valores en los nodos x_i .

¹El concepto de derivada débil o derivada en el sentido de las distribuciones constituye una generalización del concepto de derivada, en el sentido de que es aplicable a funciones no diferenciables pero sí integrables (véase [BRE10]). Más concretamente, dada una función $u \in \mathcal{L}^1(0, 1)$, se dice que $u' \in \mathcal{L}^1(0, 1)$ es una derivada débil de u si y solo si $\int_0^1 u(t)\psi'(t)dt = -\int_0^1 u'(t)\psi(t)dt$, para todo $\psi \in \mathcal{C}^\infty$.

Sea $T_h \in \mathcal{L}(H_0^1, V_h)$ un operador lineal y definamos la aplicación

$$F_h(\lambda, u) = u + T_h G(\lambda, u_h) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad u \in H_0^1.$$

El problema aproximado consiste en resolver la ecuación

$$F_h(\lambda, u_h) = \mathcal{O}, \tag{3.2}$$

esto es, en encontrar los pares $(\lambda, u_h) \in \mathbb{R} \times V_h$ soluciones de (3.2). Nótese que esto equivale a resolver la ecuación (3.2) en $\mathbb{R} \times H_0^1$.

A continuación enunciamos un resultado previo que será de gran utilidad a lo largo de todo este capítulo.

Teorema 3.1. *Supongamos que $u : \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow u(\lambda) \in H_0^1$ es una función acotada de clase \mathcal{C}^r tal que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, verifica:*

1. $F(\lambda, u(\lambda)) = \mathcal{O}$,
2. $D_u F(\lambda, u(\lambda)) : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ es un isomorfismo tal que

$$\|D_u F(\lambda, u(\lambda))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_0^1, H_0^1)} \leq c.$$

Para cada valor del parámetro h , sea

$$F_h : \mathbb{R} \times H_0^1 \rightarrow V_h \subset H_0^1$$

una aplicación de clase \mathcal{C}^r tal que, para todo subconjunto acotado $\mathcal{B} \subset \mathbb{R} \times H_0^1$, verifique:

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\sup_{(\lambda, u) \in \mathcal{B}} \|D^l F(\lambda, u) - D^l F_h(\lambda, u)\|_{\mathcal{L}_l(\mathbb{R} \times H_0^1, H_0^1)} \right] = 0, \quad 0 \leq l < r,$
2. $\sup_{(\lambda, u) \in \mathcal{B}} \|D^r F_h\|_{\mathcal{L}_r(\mathbb{R} \times H_0^1, H_0^1)} \leq \tilde{c}, \quad \text{con } \tilde{c} \text{ independiente de } h.$

Entonces existen dos constantes $a, h^0 \in \mathbb{R}, h^0 > 0$, y, para $h \leq h^0$ suficientemente pequeño, una única aplicación $u_h : \mathbb{R} \rightarrow V_h \subset H_0^1$ de clase \mathcal{C}^r tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

1. $F_h(\lambda, u_h(\lambda)) = \mathcal{O}$,
2. $\|u_h(\lambda) - u(\lambda)\|_{H_0^1} \leq a.$

Además, para todo $\lambda, \lambda^* \in \mathbb{R}$ y todo $m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq m < r$ se tiene la siguiente cota de error

1. $\|D^m u_h(\lambda^*) - D^m u(\lambda)\|_{\mathcal{L}_m(\mathbb{R}, H_0^1)} \leq \left\{ |\lambda^* - \lambda|_{\mathbb{R}} + \sum_{l=0}^m \left\| \frac{d^l}{d\lambda^l} (F(\lambda, u(\lambda)) - F_h(\lambda, u_h(\lambda))) \right\|_{\mathcal{L}_l(\mathbb{R}, H_0^1)} \right\},$
2. $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|D^r u_h\|_{\mathcal{L}_r(\mathbb{R}, H_0^1)} \leq K,$

donde $D^m u_h$ y $D^m u$ denotan las derivadas m -ésimas de u_h y u , respectivamente, y $K > 0$ es una constante independiente de h .

Este resultado se aplica directamente a las parametrizaciones de las soluciones en un entorno de un punto regular del problema de Bratu, sin más que tomar

$$G(\lambda, u) = \lambda e^u \quad , \quad T \in \mathcal{L}(H_0^1, H_0^1),$$

siendo T tal que $Tg = w$ es solución de de la ecuación $w'' = g$. En efecto, se tiene que

$$-u'' = \lambda e^u \implies -u = T\lambda e^u \implies u + T\lambda e^u = \mathcal{O}, \quad (3.3)$$

luego, efectivamente, basta tomar

$$F(\lambda, u) = u + T\lambda e^u.$$

Además, de (3.3) se sigue que la solución de problema de Bratu es $u = -T\lambda e^u$.

En cuanto al problema aproximado, de manera análoga se tiene

$$F_h(\lambda, u_h) = u_h + T_h \lambda e^{u_h}.$$

En este caso, el operador T_h es, precisamente, la solución del problema aproximado con diferencias finitas,

$$u_h = -T_h \lambda e^{u_h}.$$

Observación 3.2. Nótese que, así definido, T es un operador compacto. En efecto, la aplicación $T : L^2(0, 1) \rightarrow H_0^1$ es lineal y continua, y la inclusión $H_0^1 \hookrightarrow L^2(0, 1)$ es compacta (véase [BRE10]), por lo que la composición es un operador lineal compacto.

3.2. Aproximación numérica en un entorno de un punto singular simple

En esta sección estudiaremos la aproximación numérica de la ecuación

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O} \quad (3.4)$$

en un entorno de un punto singular simple (λ^0, u^0) .

Sea entonces (λ^0, u^0) un punto singular simple de F , esto es, tal que

1. $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$,
2. $D_u F^0 = I + TD_u G^0 \in \mathcal{L}(H_0^1, H_0^1)$ tiene a 0 como autovalor simple (o, equivalentemente, -1 es autovalor simple del operador compacto $TD_u G^0$), siendo φ^0 la autofunción asociada.

Observación 3.3. Nótese que, en el problema de Bratu, el operador $D_u F^0 = I + TD_u G^0$ es autoadjunto. En efecto, consideremos la notación $Tf = v$ y $Tw = u$, donde $v'' = f$ y $u'' = w$ (ya que, como hemos dicho anteriormente, así es como se define el operador T en el problema de Bratu). Entonces

$$\langle Tw, f \rangle = \langle u, v'' \rangle = \int_0^1 u(x)v''(x)dx.$$

Integrando por partes dos veces y aplicando condiciones de contorno Dirichlet homogéneas (pues $u, v \in H_0^1$) resulta

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \langle u'', v \rangle = \langle w, T^* f \rangle.$$

Basta recordar, finalmente, que la definición de operador adjunto es $\langle Tw, f \rangle = \langle w, T^* f \rangle$, lo cual completa la demostración. Por tanto, $\varphi^0 = \varphi^{0*}$ es también la autofunción asociada de $D_u F^{0*}$.

Observación 3.4. Nótese que podemos escribir la siguiente descomposición del espacio H_0^1

$$H_0^1 = \langle \varphi^0 \rangle \oplus \langle \varphi^0 \rangle^\perp.$$

Al igual que sucedía en el caso continuo, el problema aproximado

$$F_h(\lambda, u_h) = \mathcal{O}, \quad (3.5)$$

es equivalente a sistema

$$\begin{cases} Q F_h(\lambda, u_h) = F_h(\lambda, u_h) - \langle F_h(\lambda, u_h), \varphi^{0*} \rangle \varphi^0 = \mathcal{O} \in \langle \varphi^0 \rangle^\perp, \\ (I - Q) F_h(\lambda, u) = \langle F_h(\lambda, u_h), \varphi^{0*} \rangle \varphi^0 = \mathcal{O} \in \langle \varphi^0 \rangle, \end{cases} \quad (3.6)$$

siendo $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \langle \varphi^0 \rangle^\perp$ el operador proyección definido en (2.8). Si escribimos

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^0 + \xi \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ u_h &= u^0 + \alpha \varphi^0 + v_h \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad v_h \in V_2 := \langle \varphi^0 \rangle^\perp, \end{aligned}$$

entonces el sistema (3.6) se puede escribir como

$$\begin{cases} \mathcal{F}_h(\xi, \alpha, v_h) = \mathcal{O} \\ (I - Q) F_h(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v_h) = \mathcal{O} \in \langle \varphi^0 \rangle, \end{cases} \quad (3.7)$$

siendo \mathcal{F}_h la función de clase \mathcal{C}^∞ definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h : \quad \mathbb{R}^2 \times V_2 &\longrightarrow V_2 \\ (\xi, \alpha, v) &\longmapsto \mathcal{F}_h(\xi, \alpha, v) = Q F_h(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v). \end{aligned}$$

Consideremos, finalmente, la aplicación $J \in \mathcal{C}^\infty$ definida por

$$\begin{aligned} J : \quad (-\xi^0, \xi^0) \times (-\alpha^0, \alpha^0) &\longrightarrow H_0^1 \\ (\xi, \alpha) &\longmapsto J(\xi, \alpha) = G(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha \varphi^0 + v(\xi, \alpha)), \end{aligned}$$

donde $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$ denota la función proporcionada por el lema (2.11) del capítulo anterior. El siguiente resultado de [BRR81a] establece la existencia de una familia de soluciones del problema discretizado (3.5).

Teorema 3.5. *Sea (λ^0, u^0) un punto singular simple de F y supongamos que G es una aplicación de clase \mathcal{C}^p (con $p > 1$) tal que $D^p G$ está acotada. Si se verifica que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T - T_h\|_{\mathcal{L}(H_0^1, H_0^1)} = 0,$$

entonces existen tres constantes positivas $\xi^0, \alpha^0, a \in \mathbb{R}$ y, para $h \leq h^0$ suficientemente pequeño, una única aplicación $v_h : (-\xi^0, \xi^0) \times (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow V_2$ de clase \mathcal{C}^p tal que

1. $\mathcal{F}_h(\xi, \alpha, v_h(\xi, \alpha)) = \mathcal{O}$,
2. $\|v_h(\xi, \alpha) - v(\xi, \alpha)\|_{H_0^1} \leq a, \quad |\xi| < \xi^0, \quad |\alpha| < \alpha^0$.

Además, existe una constante $K > 0$ independiente de h tal que, para todo $\xi, \xi^* \in (-\xi^0, \xi^0)$, todo $\alpha, \alpha^* \in (-\alpha^0, \alpha^0)$ y todo $m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq m < p$, se tiene la siguiente cota de error

1. $\|D^m v_h(\xi^*, \alpha^*) - D^m v(\xi, \alpha)\|_{\mathcal{L}_m(\mathbb{R}^2, H_0^1)} \leq$

$$\leq K \left\{ |\xi^* - \xi| + |\alpha^* - \alpha| + \sum_{l=0}^m \left\| (T - T_h) D^l J(\xi, \alpha) \right\|_{\mathcal{L}_l(\mathbb{R}^2, H_0^1)} \right\},$$
2. $\|D^p v_h(\xi^*, \alpha^*)\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^2, H_0^1)} \leq K.$

Observación 3.6. Nótese que en el problema de Bratu se tiene que $G : \mathbb{R} \times H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ es de clase \mathcal{C}^∞ y, por tanto, el teorema anterior proporciona una aproximación de las derivadas parciales de v de todos los órdenes.

Gracias a este teorema queda probado que, al igual que sucedía en el caso continuo, resolver el problema aproximado (3.5) en un entorno de un punto singular simple (λ^0, u^0) es equivalente a resolver la **ecuación de bifurcación aproximada**

$$f_h(\xi, \alpha) = \langle F_h(\lambda^0 + \xi, u^0 + \alpha\varphi^0 + v_h(\alpha, \xi)), \varphi^{0*} \rangle = 0$$

en un entorno del origen.

3.3. Aproximación numérica en un entorno de un punto de retorno

Para finalizar este capítulo, estudiaremos la aproximación numérica del problema continuo

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O} \tag{3.8}$$

en un entorno de un punto de retorno (λ^0, u^0) .

Sea entonces (λ^0, u^0) un punto de retorno de F , esto es, un punto verificando

1. $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$,
2. $D_u F^0 = I + T D_u G^0 \in \mathcal{L}(H_0^1, H_0^1)$ tiene a 0 como autovalor simple (o, equivalentemente, -1 es autovalor simple del operador compacto $T D_u G^0$), siendo $\varphi^0 = \varphi^{0*}$ la autofunción asociada (pues, como ya se vió en la observación 3.3, el operador $D_u F$ del problema de Bratu es autoadjunto).
3. $D_\lambda F^0 \notin \text{Im}(D_u F^0)$ o, equivalentemente, $\langle D_\lambda F^0, \varphi^{0*} \rangle \neq 0$.

Se ha visto en el capítulo anterior que $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0, 0) \neq 0$, lo cual permite construir una curva de soluciones $(\xi(\alpha), \alpha)$, obtenida mediante el teorema de la función implícita, sin más que resolver la ecuación de bifurcación

$$f(\xi(\alpha), \alpha) = \langle F(\lambda^0 + \xi(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v(\xi(\alpha), \alpha)), \varphi^{0*} \rangle = 0.$$

A continuación enunciamos un resultado que establece la existencia de una rama de soluciones del problema aproximado

$$F_h(\lambda, u_h) = \mathcal{O} \tag{3.9}$$

en un entorno de la rama de soluciones $\{(\lambda(\alpha), u(\alpha)) : |\alpha| \leq \alpha^0\}$ del problema continuo (3.8), para un $h \leq h^0$ suficientemente pequeño.

Lema 3.7. *Sea (λ^0, u^0) un punto de retorno de F . Entonces existen dos constantes positivas $\alpha^0, b \in \mathbb{R}$ y, para $h \leq h^0$ suficientemente pequeño, una única aplicación $\xi_h : \alpha \in (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow \xi_h(\alpha) \in \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^p tal que, para $|\alpha| < \alpha^0$, se tiene*

1. $f_h(\xi_h(\alpha), \alpha) = 0$,
2. $|\xi_h(\alpha) - \xi(\alpha)| \leq b$.

Además, existe una constante $K > 0$ independiente de h tal que, para todo $\alpha \in (-\alpha^0, \alpha^0)$ y todo entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq m < p$, se tiene la siguiente estimación del error

1. $\left| \frac{d^m}{d\alpha^m} (\xi_h(\alpha) - \xi(\alpha)) \right| \leq K \sum_{l=0}^m \left\| (T - T_h) \frac{d^l}{d\alpha^l} G(\lambda(\alpha), u(\alpha)) \right\|_{H_0^1},$
2. $\left| \frac{d^p}{d\alpha^p} \xi_h(\alpha) \right| \leq K.$

Demostración. Véase [BRR81a].

□

Por tanto, si definimos el par de funciones de clase \mathcal{C}^∞ ,

$$\lambda_h : \alpha \in (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow \lambda_h(\alpha) \in \mathbb{R} \quad , \quad u_h : \alpha \in (-\alpha^0, \alpha^0) \rightarrow u_h(\alpha) \in H_0^1$$

como

$$\begin{aligned} \lambda_h(\alpha) &= \lambda^0 + \xi_h(\alpha) \\ u_h(\alpha) &= u^0 + \alpha\varphi^0 + v_h(\xi_h(\alpha), \alpha), \end{aligned}$$

entonces resolver el problema aproximado (3.9) en un entorno de un punto de retorno equivale a resolver la **ecuación de bifurcación aproximada**

$$f_h(\xi_h(\alpha), \alpha) = \langle F_h(\lambda^0 + \xi_h(\alpha), u^0 + \alpha\varphi^0 + v_h(\alpha, \xi_h(\alpha))), \varphi^{0*} \rangle = 0, \quad (3.10)$$

de manera que $\{(\lambda_h(\alpha), u_h(\alpha)) : |\alpha| < \alpha^0\}$ es una rama de soluciones de (3.9).

Denotemos por $\lambda^{(m)}(\alpha)$, $u^{(m)}(\alpha)$ y $\lambda_h^{(m)}(\alpha)$, $u_h^{(m)}(\alpha)$ a las derivadas m -ésimas de las funciones $\lambda(\alpha)$, $u(\alpha)$ y $\lambda_h(\alpha)$, $u_h(\alpha)$, respectivamente. El siguiente resultado, que constituye el resultado principal de este apartado, justifica la aproximación de la curva de soluciones del problema continuo (3.8), obtenida en el Lema 2.13 del capítulo anterior, $(\lambda(\alpha), u(\alpha))$, por la del problema discreto (3.9), $(\lambda_h(\alpha), u_h(\alpha))$, en un entorno del punto de retorno.

Teorema 3.8. *Sea (λ^0, u^0) un punto de retorno de F . Entonces, el problema aproximado*

$$F_h(\lambda, u_h) = \mathcal{O}$$

tiene una única rama de soluciones $\{(\lambda_h(\alpha), u_h(\alpha)) : |\alpha| < \alpha^0\}$ en un entorno de la rama de soluciones $\{(\lambda(\alpha), u(\alpha)) : |\alpha| < \alpha^0\}$ del problema continuo

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O}.$$

Además, estas ramas de soluciones son de clase C^∞ y, para todo $\alpha \in (-\alpha^0, \alpha^0)$ y todo $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \geq 0$, se tiene la siguiente estimación del error

$$\left| \lambda_h^{(m)}(\alpha) - \lambda^{(m)}(\alpha) \right| + \left\| u_h^{(m)}(\alpha) - u^{(m)}(\alpha) \right\|_{H_0^1} \leq K \sum_{l=0}^m \left\| (T - T_h) \frac{d^l}{d\alpha^l} G(\lambda(\alpha), u(\alpha)) \right\|_{H_0^1}.$$

3.3.1. Puntos de retorno no degenerados

En este apartado probaremos que si la curva de soluciones del problema continuo (3.8), $\{(\lambda(\alpha), u(\alpha)) : |\alpha| < \alpha^0\}$, presenta un punto de retorno no degenerado en $\alpha = 0$, entonces la curva de soluciones del problema aproximado (3.9), $\{(\lambda_h(\alpha), u_h(\alpha)) : |\alpha| < \alpha^0\}$, también presenta un punto de retorno no degenerado en un punto $(\lambda_h(\alpha_h^0), u_h(\alpha_h^0))$.

Supongamos entonces que (λ^0, u^0) es un punto de retorno no degenerado de F , esto es, un punto de retorno que, además, verifica la condición

$$\langle D_{uu}F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle \neq 0.$$

En este caso, como ya se ha probado en el capítulo anterior, se tiene que

$$\frac{d\xi}{d\alpha}(0) = 0 \quad , \quad \frac{d^2\xi}{d\alpha^2}(0) \neq 0$$

y, por tanto, la función $\alpha \rightarrow \xi(\alpha)$ tiene un máximo o mínimo local en el punto $\alpha = 0$.

Supongamos que G es una función de clase \mathcal{C}^p , con $p \geq 3$. De la estimación de las derivadas de ξ_h proporcionada por el Lema (3.7), para $m = 0, 1, 2$, se sigue la existencia un intervalo $(-\alpha^1, \alpha^1)$ y, para $h \leq h^0$ suficientemente pequeño, un único valor $\alpha_h^0 \in (-\alpha^1, \alpha^1)$ tal que

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_h^0 = 0$,
2. $\frac{d}{d\alpha} \xi_h(\alpha_h^0) = 0$,
3. $\left| \frac{d^2}{d\alpha^2} \xi_h(\alpha) \right| \geq \varepsilon$, para todo $\alpha \in (-\alpha^1, \alpha^1)$,

donde la constante $\varepsilon > 0$ es independiente de h . Si denotamos por

$$\lambda_h^0 = \lambda(\alpha_h^0) \quad , \quad u_h^0 = u_h(\alpha_h^0),$$

es sencillo comprobar que el punto (λ_h^0, u_h^0) es un punto de retorno no degenerado de F_h . El siguiente resultado establece un orden de aproximación de este punto de retorno.

Teorema 3.9. *Sea (λ^0, u^0) un punto de retorno no degenerado de F . Entonces, para $h \leq h^0$ suficientemente pequeño, se tiene la siguiente estimación del error*

$$|\lambda_h^0 - \lambda^0| + \|u_h^0 - u^0\|_{H_0^1} \leq K \sum_{l=0}^1 \left\| (T - T_h) \frac{d^l}{d\alpha^l} G(\lambda(\alpha), u(\alpha))|_{\alpha=0} \right\|_{H_0^1},$$

siendo $K \in \mathbb{R}$ una constante positiva independiente de h .

Demostración. Véase [BRR81a].

□

En muchos casos, la cota de error para $|\lambda_h^0 - \lambda^0|$ puede ser mejorada, como se muestra en el siguiente resultado, particularizado al caso del problema de Bratu en donde

$$[(T - T_h) D_u G^0]^* = (T - T_h) D_u G^0 \in \mathcal{L}(H_0^1, H_0^1),$$

por ser $D_u F$ autoadjunto.

Teorema 3.10. *Sea (λ^0, u^0) un punto de retorno no degenerado de F . Entonces, para $h \leq h^0$ suficientemente pequeño, se tiene la siguiente estimación del error*

$$|\lambda_h^0 - \lambda^0| \leq K \left\{ |\langle (T - T_h) G^0, \varphi^{0*} \rangle| + \|(T - T_h) G^0\|_{H_0^1} \cdot \left\| [(T - T_h) D_u G^0]^* \varphi^{0*} \right\|_{(H_0^1)'} + \sum_{l=0}^1 \left\| (T - T_h) \frac{d^l}{d\alpha^l} G(\lambda(\alpha), u(\alpha))|_{\alpha=0} \right\|_{H_0^1}^2 \right\},$$

donde por $(H_0^1)'$ denotamos el espacio dual de H_0^1 .

Demostración. Véase [BRR81a]. □

Capítulo 4

Detección de puntos de retorno

En este capítulo se describen y analizan algunas funciones escalares que cambian de signo en un punto de retorno y que, por tanto, pueden ser de utilidad a la hora de detectar este tipo de puntos.

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ y consideremos de nuevo el problema no lineal

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O}. \quad (4.1)$$

Sean $\varphi^0, \varphi^{0*} \in \mathbb{R}^n$ las autofunciones definidas en el Lema 2.9, tales que

$$\text{Ker}(D_u F^0) = \langle \varphi^0 \rangle, \quad \text{Im}(D_u F^0) = \text{Ker}((D_u F^0)^*) = \langle \varphi^{0*} \rangle. \quad (4.2)$$

Observación 4.1. Como ya se dijo en el capítulo anterior, el operador $D_u F^0$ en el problema de Bratu es autoadjunto (en el sentido de que $D_u F^0 = (D_u F^0)^*$) y, por tanto, en realidad se tiene $\varphi^0 = \varphi^{0*}$.

4.1. Funciones test

En el contexto de la continuación numérica de una curva de soluciones, es interesante el hecho de poder controlar cuándo aparecen singularidades. Denotemos por $(\lambda(s), u(s))$ a la curva de soluciones de la ecuación (4.1) y supongamos que $(\lambda(s^0), u(s^0)) = (\lambda^0, u^0)$.

Definición 4.2. Sea (λ^0, u^0) un punto singular de F y U un entorno de dicho punto. Sea $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que $\sigma(\lambda, u)$ es una **función test** para el punto singular (λ^0, u^0) si $\sigma(\lambda(s), u(s))$ cambia estrictamente de signo en $s = s^0$.

A continuación estudiaremos dos tipos de funciones test para detectar puntos de retorno.

4.1.1. Determinantes

Ya hemos visto que si (λ^0, u^0) es un punto de retorno, entonces $D_u F^0$ es singular, con rango $n - 1$. Por tanto, es natural usar el determinante de $D_u F$ como una función test. Se toma entonces

$$\sigma(\lambda, u) := \det(D_u F(\lambda, u)).$$

Esta función es válida siempre y cuando el determinante de $D_u F(\lambda, u)$ sea fácil de calcular y, normalmente, solo es aplicable en problemas de pequeño o mediano tamaño o cuando se disponga, en el proceso de cálculo, de dicha información. Este último caso se da, por ejemplo, en el proceso de continuación que se lleva a cabo al resolver los sistemas no lineales con el método de Newton, ya que $D_u F(\lambda, u)$ es uno de los bloques de la matriz del sistema que se factoriza, por lo que no supone un mayor coste ir comprobando sus cambios de signo.

4.1.2. Matrices ampliadas

Dada una curva de soluciones $(\lambda(s), u(s))$, Griewank y Reddien (véase [GR84]) probaron que un punto de retorno en $s = s^0$ puede ser caracterizado como la raíz de una función escalar $\sigma : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida de manera implícita por el siguiente sistema ampliado de dos incógnitas

$$\begin{pmatrix} r & D_u F(\lambda, u) \\ 0 & l^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $r, l \in \mathbb{R}^n$ son vectores normalizados (esto es, tales que $\|r\| = \|l\| = 1$) que se escogen, generalmente, para que la matriz ampliada (4.3) sea no singular en un entorno del punto de retorno. En el siguiente lema describimos las propiedades de la matriz ampliada (4.3).

Lema 4.3 (de Keller). *Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ la aplicación lineal dada por la matriz*

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

siendo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $C \in \mathbb{R}$ y $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1. Si B es no singular, entonces \mathcal{A} es no singular si y solo si

$$C - DB^{-1}A \neq 0.$$

2. Si B es singular y $\dim(\text{Ker}(B)) = 1$, entonces \mathcal{A} es no singular si y solo si

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(A)) = 1 & \quad , \quad \text{Im}(A) \cap \text{Im}(B) = \{\mathcal{O}\}, \\ \dim(\text{Im}(D)) = 1 & \quad , \quad \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{\mathcal{O}\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

3. Si B es singular y $\dim(\text{Ker}(B)) > 1$, entonces \mathcal{A} es singular.

Demostración. (Véase [DK80]) Consideremos el sistema

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix},$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$. Se tiene que la matriz \mathcal{A} es no singular si y solo si el sistema

$$\begin{cases} A\zeta + Bx = y \\ C\zeta + Dx = \eta \end{cases} \quad (4.5)$$

tiene solución única para todo (y, η) , lo cual equivale a probar que el sistema

$$\begin{cases} A\zeta + Bx = \mathcal{O} \\ C\zeta + Dx = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

admite como única solución la solución trivial. A continuación, consideramos los tres casos del enunciado del lema.

1. Caso 1: B no singular.

Supongamos que $C - DB^{-1}A \neq 0$. Si despejamos x en la primera ecuación del sistema (4.6) obtenemos

$$x = -B^{-1}A\zeta,$$

y sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación

$$C\zeta + D(-B^{-1}A\zeta) = 0 \iff (C - DB^{-1}A)\zeta = 0.$$

Como por hipótesis $C - DB^{-1}A \neq 0$, entonces $\zeta = 0$ y así $x = \mathcal{O}$, quedando probada la existencia y unicidad de soluciones de (4.6).

Supongamos ahora que \mathcal{A} es no singular. Despejando x en la primera ecuación del sistema (4.5) obtenemos $x = B^{-1}(y - A\zeta)$, y sustituyendo en la segunda ecuación

$$C\zeta + DB^{-1}(y - A\zeta) = \eta \iff (C - DB^{-1}A)\zeta = \eta - DB^{-1}y. \quad (4.7)$$

Como por hipótesis \mathcal{A} es no singular, entonces el sistema (4.5) tiene solución para cualquier (y, η) y, por tanto, también la tiene la ecuación (4.7). Tomando $y = 0$ en dicha ecuación, tenemos

$$(C - DB^{-1}A)\zeta = \eta,$$

lo cual, tomando $\eta \neq 0$, implica que $C - DB^{-1}A \neq 0$.

2. Caso 2: B singular y $\dim(Ker(B)) = 1$.

Supongamos ciertas las igualdades (4.4) y veamos que entonces \mathcal{A} es no singular. Nótese que si se satisficiera el sistema (4.6), entonces

$$A\zeta = \mathcal{O} = Bx,$$

pues, en caso contrario, si $A\zeta \neq \mathcal{O}$ entonces $Bx \neq \mathcal{O}$, lo cual contradiría el hecho de que $Im(A) \cap Im(B) = \{\mathcal{O}\}$. Por tanto, como $\dim(Im(A)) = 1$ y $\zeta \in \mathbb{R}$, entonces $\zeta = 0$. Sustituyendo esto en la segunda ecuación de (4.6) obtenemos

$$Dx = \mathcal{O},$$

y como $Ker(B) \cap Ker(D) = \{\mathcal{O}\}$, entonces $x = \mathcal{O}$, quedando probada la existencia y unicidad de soluciones de (4.6).

Supongamos ahora \mathcal{A} no singular. Entonces usando la primera ecuación de (4.5) se tiene que, dado $y \in \mathbb{R}^n$, existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tal que

$$y - A\zeta = Bx \in Im(B). \quad (4.8)$$

Como $\dim(Ker(B)) = 1$, entonces $\dim(Im(B)) = n - 1$ y, por tanto, de (4.8) se deduce que

$$\dim(Im(A)) = 1$$

y, además,

$$Im(A) \cap Im(B) = \{\mathcal{O}\}.$$

Supongamos ahora, por reducción al absurdo, que $Ker(B) \cap Ker(D) \neq \{\mathcal{O}\}$. Entonces, para algún $x^0 \neq \mathcal{O}$ se tendría que

$$Bx^0 = \mathcal{O} = Dx^0.$$

Sustituyendo esto en (4.6), obtenemos

$$\begin{cases} A\zeta = \mathcal{O} \\ C\zeta = 0 \end{cases}$$

y, por tanto, $(x, \zeta) = (x^0, 0)$ sería una solución no trivial del sistema (4.6), contradiciendo la unicidad de soluciones de (4.6) (pues estamos suponiendo \mathcal{A} no singular). Por tanto

$$\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{\mathcal{O}\}$$

Por otro lado, sea

$$\text{Ker}(B) = \langle \phi \rangle.$$

Notemos que

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \eta \end{pmatrix},$$

donde $\eta = D\phi$. Como \mathcal{A} es no singular, entonces $\eta \neq 0$, de donde se deduce que

$$\dim(\text{Im}(D)) = 1.$$

3. Caso 3: B singular y $\dim(\text{Ker}(B)) > 1$.

Para probar que \mathcal{A} es singular, basta construir una solución no trivial del sistema homogéneo. En este caso, existen $\phi^1, \dots, \phi^p \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$, vectores linealmente independientes tales que

$$B\phi^i = \mathcal{O} \quad , \quad \forall i \in 1, \dots, p.$$

Pero como el conjunto

$$\{D\phi^i : i \in 1, \dots, p\} \subset \mathbb{R}$$

debe ser linealmente dependiente, entonces han de existir escalares $\alpha^i \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum_{i=1}^p \alpha^i \phi^i \neq \mathcal{O}$ satisfaga el sistema

$$\begin{cases} Bx = \mathcal{O} \\ Dx = \mathcal{O} \end{cases}$$

y, por tanto, \mathcal{A} es singular.

□

Observación 4.4. Para los dos primeros casos anteriormente estudiados podemos obtener explícitamente las soluciones del sistema (4.5).

1. Caso 1: B no singular.

Supongamos B no singular y obtengamos la expresión explícita de la única solución (η, x) del sistema (4.5). Despejando x en la primera ecuación del sistema (4.5):

$$x = B^{-1}(y - A\zeta),$$

y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$C\zeta + DB^{-1}(y - A\zeta) = \eta \iff (C - DB^{-1}A)\zeta = \eta - DB^{-1}y,$$

de donde

$$\zeta = (C - DB^{-1}A)^{-1}(\eta - DB^{-1}y).$$

2. Caso 2: B singular y $\dim(Ker(B)) = 1$.

Supongamos ahora B singular y tal que $\dim(Ker(B)) = 1$ y obtengamos la expresión explícita de la única solución (η, x) del sistema (4.5). Como $\dim(Ker(B)) = 1$, entonces

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus Im(B).$$

Ahora bien, como $\dim(Im(A)) = 1$ y $Im(A) \cap Im(B) = \{\mathcal{O}\}$, se tiene que $\mathbb{R} \approx Im(A)$ y así

$$\mathbb{R}^n = Im(A) \oplus Im(B).$$

De esta forma, dado $y \in \mathbb{R}^n$, existen $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\zeta \in \mathbb{R}$ tales que

$$y = A\zeta + Bx^0 \iff Bx^0 = y - A\zeta.$$

Calculemos, para este y , la solución general de la primera ecuación de (4.5)

$$A\zeta + Bx = A\zeta + Bx^0 \implies Bx = Bx^0 \implies B(x - x^0) = 0 \implies x - x^0 \in Ker(B),$$

esto es

$$x = x^0 + z^0, \quad z^0 \in Ker(B).$$

Para resolver la segunda ecuación del sistema, basta encontrar un $z^0 \in Ker(B)$ tal que

$$C\zeta + D(x^0 + z^0) = \eta \iff Dz^0 = \eta - C\zeta - Dx^0.$$

Nótese que, dado $\eta \in \mathbb{R}$, la existencia de un z^0 en tales condiciones queda garantizada por ser $Ker(B) \cap Ker(D) = \{\mathcal{O}\}$ y $\dim(Im(D)) = 1$.

□

Si se aplica **1.** del lema 4.3 a la matriz

$$\begin{pmatrix} r & D_u F(\lambda, u) \\ 0 & l^* \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

obtenemos que, si la matriz $D_u F(\lambda, u)$ es no singular, entonces la matriz ampliada (4.9) es no singular si y solo si

$$\langle D_u F^{-1}(\lambda, u) r, l^* \rangle \neq 0. \quad (4.10)$$

Si $D_u F(\lambda, u)$, por el contrario, es singular y $\dim(\text{Ker}(D_u F)) = 1$, entonces aplicando **2.** del lema 4.3 a la matriz (4.9), resulta que la matriz ampliada (4.9) es no singular si y solo si

$$\begin{aligned} r \notin \text{Im}(D_u F) &\iff \langle r, \varphi^{0*} \rangle \neq 0, \\ l^* \notin \text{Im}(D_u F^*) &\iff \langle \varphi^0, l^* \rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde φ^0 y φ^{0*} son las definidas en (4.2).

Observación 4.5. En este capítulo se emplean las siguientes notaciones equivalentes en \mathbb{R}^n

$$v^* v = \langle v, v^* \rangle,$$

identificando así el producto escalar con el producto de dualidad.

Teorema 4.6. *La matriz ampliada*

$$\begin{pmatrix} r & D_u F(\lambda, u) \\ 0 & l^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (4.12)$$

es no singular si y solo si la matriz

$$(I - rr^*)D_u F + rl^* \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

es no singular. Además, la solución del sistema implícito (4.3) viene dada por

$$\begin{aligned} v(\lambda, u) &= [(I - rr^*)D_u F(\lambda, u) + rl^*]^{-1} r \in \mathbb{R}^n, \\ \sigma(\lambda, u) &= -\langle D_u F(\lambda, u)v(\lambda, u), r^* \rangle \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De esta forma, (λ^0, u^0) es un punto de retorno si y solo si

$$\sigma(\lambda^0, u^0) = 0,$$

y se tiene que

$$\left. \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \right|_{s=0} = K \langle D_{uu} F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle \langle r, \varphi^{0*} \rangle^{-1}, \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demostración. Supongamos que la matriz ampliada (4.12) es no singular y consideremos la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} [(I - rr^*) D_u F + rl^*] x &= D_u F x - rr^* D_u F x + rl^* x \\ &= D_u F x - r(r^* D_u F x - l^* x) = \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Multiplicando la ecuación (4.14) por r^* y teniendo en cuenta que $\|r\|^2 = r^* r = 1$, resulta

$$\begin{aligned} \langle D_u F x - r(r^* D_u F x - l^* x), r^* \rangle &= \langle D_u F x, r^* \rangle - \|r\|^2 (r^* D_u F x - l^* x) \\ &= \langle D_u F x, r^* \rangle - \langle D_u F x, r^* \rangle + l^* x = l^* x = 0, \end{aligned}$$

esto es, $l^* x = 0$. Por tanto, la ecuación (4.14) se puede escribir como

$$D_u F x - rr^* D_u F x = \mathcal{O}, \quad (4.15)$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$\begin{pmatrix} r & D_u F(\lambda, u) \\ 0 & l^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r^* D_u F x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_u F x - rr^* D_u F x \\ l^* x \end{pmatrix} = \mathcal{O}. \quad (4.16)$$

Como por hipótesis la matriz de coeficientes es regular, entonces la igualdad (4.16) implica que $x = \mathcal{O}$. Acabamos de probar entonces que

$$[(I - rr^*) D_u F + rl^*] x = \mathcal{O} \implies x = \mathcal{O},$$

lo cual implica que la matriz $(I - rr^*) D_u F + rl^*$ es no singular.

Recíprocamente, supongamos que la matriz $(I - rr^*) D_u F + rl^*$ es no singular y consideremos el sistema homogéneo de dos incógnitas, (x, α) , dado por

$$\begin{cases} D_u F x + r\alpha = \mathcal{O}, \\ l^* x = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Multiplicando la primera ecuación del sistema (4.17) por r^* y teniendo en cuenta que $\|r\|^2 = r^* r = \langle r, r^* \rangle = 1$, se deduce que

$$\begin{aligned} \langle D_u F x + r\alpha, r^* \rangle &= \langle D_u F x, r^* \rangle + \|r\|^2 \alpha = 0 \implies \langle D_u F x, r^* \rangle + \alpha = 0 \implies \\ &\implies \alpha = -\langle D_u F x, r^* \rangle. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación de (4.17) y sumándole el vector cero $r(l^* x)$ obtenemos

$$D_u F x - r \langle D_u F x, r^* \rangle + rl^* x = [(I - rr^*) D_u F + rl^*] x = \mathcal{O}. \quad (4.18)$$

Como, por hipótesis, la matriz de coeficientes $(I - rr^*) D_u F + rl^*$ es no singular, entonces el sistema (4.18) tiene como única solución la solución trivial, $x = \mathcal{O}$. Sustituyendo esto en (4.17), obtenemos que $\alpha = 0$. Por tanto, $(x, \alpha) = (\mathcal{O}, 0)$ es la única solución del sistema (4.17), de donde se deduce inmediatamente que la matriz ampliada (4.12) es no singular.

Por otro lado, es fácil comprobar que (4.13) es la única solución del sistema implícito

$$\begin{pmatrix} r & D_u F(\lambda, u) \\ 0 & l^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

En efecto, multiplicando la primera ecuación del sistema (4.19) por r^* y teniendo en cuenta que $\|r\|^2 = r^*r = \langle r, r^* \rangle = 1$, resulta

$$\langle r\sigma + D_u F(\lambda, u)v, r^* \rangle = \|r\|^2 \sigma + \langle D_u F v, r^* \rangle = \sigma + \langle D_u F v, r^* \rangle = \mathcal{O},$$

de donde

$$\sigma = -\langle D_u F(\lambda, u)v, r^* \rangle. \quad (4.20)$$

Si ahora tomamos

$$v := [(I - rr^*)D_u F(\lambda, u) + rl^*]^{-1} r,$$

operando se tiene que

$$[(I - rr^*)D_u F(\lambda, u) + rl^*] v = r \implies D_u F(\lambda, u)v - r \langle D_u F(\lambda, u)v, r^* \rangle + rl^*v = r.$$

Sustituyendo (4.20) en la anterior expresión, resulta

$$D_u F(\lambda, u)v + r\sigma + rl^*v = r$$

y, como $D_u F(\lambda, u)v + r\sigma = \mathcal{O}$ (primera ecuación del sistema (4.19)), entonces

$$rl^*v = r \implies l^*v = 1,$$

verificándose así la segunda ecuación del sistema (4.19).

A continuación estudiamos el comportamiento de la función test σ en un entorno de un punto de retorno cuadrático. Sea (λ^0, u^0) un punto de retorno no degenerado de F y consideremos la primera ecuación del sistema (4.19) que define de manera implícita a la función test $\sigma \equiv \sigma(\lambda(s), u(s))$ a lo largo de la curva de soluciones $(\lambda(s), u(s))$, suponiendo que $(\lambda(0), u(0)) = (\lambda^0, u^0)$:

$$r\sigma(\lambda(s), u(s)) + D_u F(\lambda(s), u(s))v(\lambda(s), u(s)) = \mathcal{O}. \quad (4.21)$$

Evaluando (4.21) en $s = 0$ resulta

$$r \sigma(\lambda^0, u^0) + D_u F^0 v(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}. \quad (4.22)$$

Como en un punto de retorno se verifica $\text{rang}(D_u F^0) = n - 1$, entonces, por (4.11), se tiene que $r \notin \text{Im}(D_u F)$, luego de (4.22) se sigue

$$\sigma(\lambda^0, u^0) = 0 \quad (4.23)$$

de donde

$$v(\lambda^0, u^0) \in \text{Ker}(D_u F^0) = \langle \varphi^0 \rangle \implies v(\lambda^0, u^0) = K \varphi^0, \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.24)$$

Por otro lado, si derivamos (4.21) respecto de s

$$\begin{aligned} r \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) + \left(D_{u\lambda} F(\lambda(s), u(s)) \dot{\lambda}(s) + D_{uu} F(\lambda(s), u(s)) \dot{u}(s) \right) v(\lambda(s), u(s)) + \\ + D_u F(\lambda(s), u(s)) \frac{d}{ds} v(\lambda(s), u(s)) = \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Evaluando (4.25) en $s = 0$

$$\begin{aligned} r \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} + \left(D_{u\lambda} F^0 \dot{\lambda}(0) + D_{uu} F^0 \dot{u}(0) \right) v(\lambda^0, u^0) + \\ + D_u F^0 \frac{d}{ds} v(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} = \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Calculemos, en primer lugar, las expresiones de $\dot{\lambda}(0)$ y de $\dot{u}(0)$. Para ello, basta usar la regla de la cadena en la ecuación $F(\lambda(s), u(s)) = \mathcal{O}$ en el punto $s = 0$, obteniendo

$$\frac{d}{ds} F(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} = D_\lambda F^0 \dot{\lambda}(0) + D_u F^0 \dot{u}(0) = \mathcal{O}. \quad (4.27)$$

Como en un punto de retorno se tiene que $D_\lambda F^0 \notin \text{Im}(D_u F^0)$, entonces de (4.27) se deduce

$$\dot{\lambda}(0) = 0, \quad (4.28)$$

de donde

$$\dot{u}(0) \in \text{Ker}(D_u F^0) = \langle \varphi^0 \rangle \implies \dot{u}(0) = C \varphi^0, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.29)$$

Sustituyendo estos valores en (4.26)

$$r \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} + D_{uu} F^0 C \varphi^0 v(\lambda^0, u^0) + D_u F^0 \frac{d}{ds} v(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} = \mathcal{O}$$

y multiplicando ambos lados de la igualdad por φ^{0*} y usando (4.24), resulta

$$\begin{aligned} \left\langle r \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0}, \varphi^{0*} \right\rangle + \langle D_{uu} F^0 C K \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle + \\ + \left\langle D_u F^0 \frac{d}{ds} v(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0}, \varphi^{0*} \right\rangle = \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ahora bien, como $Im(D_u F^0) = \langle \varphi^{0*} \rangle$, entonces (4.30) se puede escribir como

$$\left\langle r \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0}, \varphi^{0*} \right\rangle + \langle D_{uu} F^0 C K \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle = \mathcal{O}. \quad (4.31)$$

Como $\langle r, \varphi^{0*} \rangle \neq 0$ por ser $r \notin Im(D_u F^0)$, se puede despejar de (4.31), obteniendo

$$\frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} = K_2 \langle D_{uu} F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle \langle r, \varphi^{0*} \rangle^{-1}, \quad K_2 := -CK \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

de donde

$$\dot{\sigma}(\lambda^0, u^0) \equiv \frac{d}{ds} \sigma(\lambda(s), u(s)) \Big|_{s=0} \neq 0, \quad (4.32)$$

ya que en un punto de retorno no degenerado se verifica que $\langle D_{uu} F^0 \varphi^0 \varphi^0, \varphi^{0*} \rangle \neq 0$.

Por tanto, de (4.23) y de (4.32) se sigue inmediatamente que, en un punto de retorno no degenerado, la función test $\sigma(\lambda, u)$ cambia estrictamente de signo. \square

Capítulo 5

Resultados numéricos

5.1. Solución analítica del problema de Bratu

Como ya se ha mencionado a lo largo de este trabajo, el problema de Bratu se define como el problema de contorno no lineal

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda e^{u(x)} & \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \quad (5.1)$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, la expresión analítica de las soluciones de (5.1) es conocida y se define en función de un parámetro auxiliar, μ , de la siguiente manera:

- Si $\lambda \geq 0$, entonces la solución analítica viene dada por

$$u(x) = \ln \left[\cosh^2 \frac{\mu}{2} \cdot \cosh^{-2} \left(\mu \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right], \quad (5.2)$$

donde el parámetro $\mu \geq 0$ es solución de la ecuación trascendente

$$\lambda = 2\mu^2 \cosh^{-2} \frac{\mu}{2}. \quad (5.3)$$

- Si $\lambda < 0$, entonces

$$u(x) = \ln \left[\cos^2 \frac{\mu}{2} \cdot \cos^{-2} \left(\mu \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right],$$

siendo $\mu \in [0, \pi)$ solución de

$$\lambda = -2\mu^2 \cos^{-2} \frac{\mu}{2}. \quad (5.4)$$

Observación 5.1. Las ecuaciones no lineales (5.3) y (5.4) se pueden resolver fácilmente haciendo uso de un método iterativo como, por ejemplo, el método de Newton.

Además, una particularidad del problema de Bratu es que, dado λ , la ecuación trascendente (5.4) tiene una única solución, μ , mientras que (5.3) presenta dos soluciones distintas, μ_1 y μ_2 (en [CR90] se puede consultar la gráfica del parámetro auxiliar μ frente al parámetro de control, λ). Más concretamente, si $\mu^0 > 0$ es tal que

$$\mu^0 \operatorname{tgh} \left(\frac{\mu^0}{2} \right) = 2$$

y denotamos por

$$\lambda^0 := 2 (\mu^0)^2 \cosh^{-2} \frac{\mu^0}{2} \geq 0,$$

entonces

- para $\lambda \in (0, \lambda^0)$, el problema (5.1) tiene dos soluciones.
- Para $\lambda = \lambda^0$, el problema (5.1) presenta una única solución, dada por

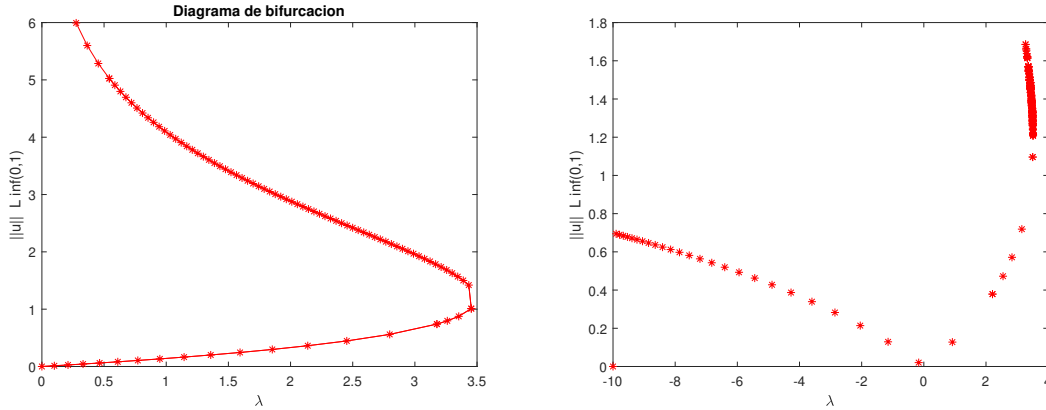
$$u^0(x) = \ln \left[\cosh^2 \frac{\mu^0}{2} \cdot \cosh^{-2} \left(\mu^0 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right].$$

- Para $\lambda > \lambda^0$, el problema (5.1) no tiene solución.

Por tanto, las soluciones del problema de Bratu consisten en un punto de retorno no degenerado (λ^0, u^0) y dos ramas de soluciones, $u_1 \in \mathcal{C}^\infty(-\infty, \lambda^0)$ y $u_2 \in \mathcal{C}^\infty(0, \lambda^0)$.

En la Figura 5.1 se detalla el llamado *diagrama de bifurcación* del problema de Bratu, obtenido mediante un programa de continuación respecto al parámetro longitud de arco y en el cual se representan los pares $(\lambda, u_h(\frac{1}{2}))$. En él se puede comprobar fácilmente que el punto de retorno se corresponde, aproximadamente, con $\lambda^0 \approx 3,51383$.

Observación 5.2. Nótese que $|u_h(\frac{1}{2})| = \|u_h\|_{L^\infty(0,1)}$, ya que las soluciones del problema de Bratu son simétricas y alcanzan su máximo en valor absoluto en el punto medio del intervalo.



(a) Diagrama de bifurcación con $\lambda \in (0, \lambda^0)$. (b) Diagrama de bifurcación con $\lambda \in (-10, \lambda^0)$.

Figura 5.1: Diagrama de bifurcación del problema de Bratu.

5.2. Solución numérica del problema de Bratu mediante diferencias finitas

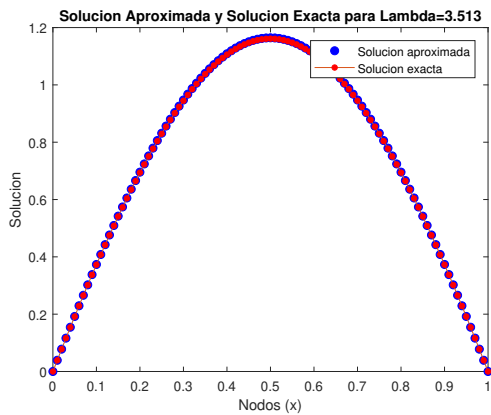
En la Figura 5.2a se representa la solución exacta, u , en un entorno del punto de retorno (λ^0, u^0) junto con la solución aproximada, u_h , obtenida tras resolver, mediante el método iterativo de Newton, el problema aproximado

$$A_{0h} u_h - \lambda e^{u_h} = \mathcal{O}$$

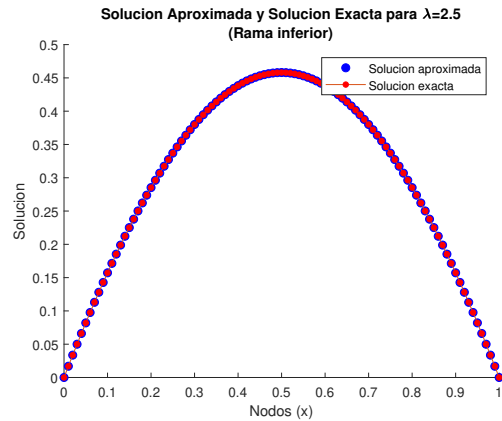
discretizado mediante diferencias finitas, tal y como se indica en el Capítulo 1; donde $A_{0h} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ denota la matriz simétrica definida en 1.3, $e^{u_h} = (e^{u_1}, e^{u_2}, \dots, e^{u_{n-1}}, e^{u_n})^T \in \mathbb{R}^n$ y $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$. En dicho gráfico se puede comprobar como, para este valor del parámetro λ , la solución del problema de Bratu presenta un único máximo en $x = \frac{1}{2}$.

En la Figura 5.2b se representan las soluciones exacta y aproximada para $\lambda = 2,5 > 0$, correspondientes a la rama inferior de la curva de soluciones y en la Figura 5.2c las correspondientes a la rama superior. Nótese que (5.2) no proporciona una expresión analítica de las soluciones de la rama superior, por lo que en este último caso se ha representado, únicamente, la solución aproximada. En ambos casos vemos como el máximo corresponde, de nuevo, a $x = \frac{1}{2}$.

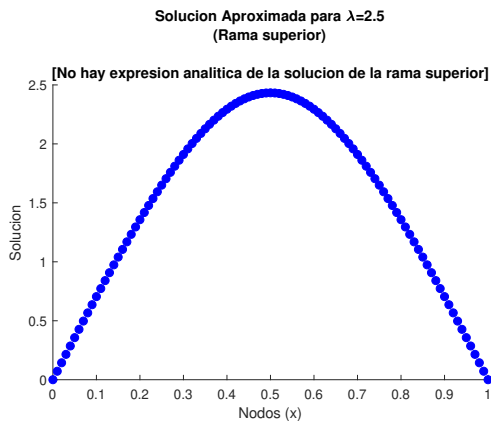
Finalmente, en la Figura 5.2d se representa la solución exacta y aproximada para $\lambda = -2,5 < 0$. Vemos que, para este valor del parámetro λ , la solución del problema de Bratu presenta un único mínimo en el punto medio del intervalo.



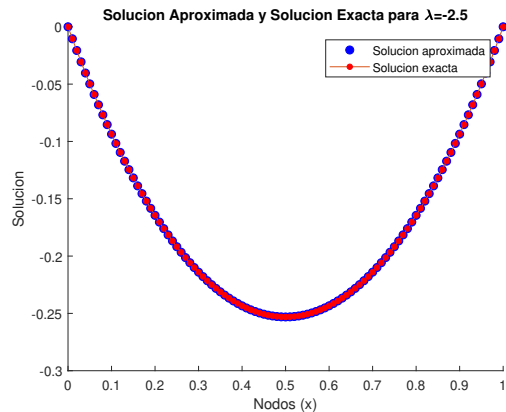
(a) $\lambda \approx \lambda^0$.



(b) $\lambda = 2,5$ (rama inferior).



(c) $\lambda = 2,5$ (rama superior).



(d) $\lambda = -2,5$.

Figura 5.2: Solución exacta (en rojo) y aproximada (en azul) obtenida mediante diferencias finitas para distintos λ .

5.3. Tablas de error

Como ya se ha dicho anteriormente, la curva de soluciones del problema de Bratu presenta un punto de retorno en $\lambda^0 \approx 3,51383$. Es por ello por lo que el orden del método se hace visible, únicamente, en aquellos puntos que están suficientemente alejados de este valor de λ (ya que en este caso la matriz del sistema es singular, lo cual dificulta la convergencia del método de Newton, dejando de ser cuadrática).

Observación 5.3. En lo sucesivo, $ndim$ denota el número de nodos interiores del intervalo $[0, 1]$ empleados para la discretización del problema (5.1). Nótese que $h = \frac{1}{ndim+1}$ y, recíprocamente, $ndim = \frac{1-h}{h}$.

A continuación se presentan diferentes tablas de error, tanto para $\lambda = -2,5$ como para $\lambda = 2,5$, obtenidas mediante un programa en el que se ha implementado el método iterativo de Newton para la resolución del problema de Bratu, previamente discretizado mediante diferencias finitas de segundo orden.

5.3.1. Error en norma $L^\infty(0, 1)$

Como se dijo en la observación 5.2, las soluciones del problema de Bratu presentan su máximo en valor absoluto en $x = \frac{1}{2}$, por lo que se puede escribir

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(0,1)} = \left| u\left(\frac{1}{2}\right) - u_h\left(\frac{1}{2}\right) \right|.$$

En las las tablas (5.1) y (5.2) se recoge el cálculo del error obtenido con esta norma, para $\lambda = -2,5$ y $\lambda = 2,5$.

- Para $\lambda = -2,5$:

Paso	Error	<i>ndim</i>
$h = 0, 1$	$3,8132 \cdot 10^{-4}$	9
$h = 10^{-2}$	$3,8359 \cdot 10^{-6}$	99
$h = 10^{-3}$	$3,8376 \cdot 10^{-8}$	999

Tabla 5.1: Tabla de error calculada con $\|\cdot\|_{L^\infty(0,1)}$, para $\lambda = -2,5$.

- Para $\lambda = 2,5$:

Paso	Error	<i>ndim</i>
$h = 0, 1$	$1,9631 \cdot 10^{-3}$	9
$h = 10^{-2}$	$1,9410 \cdot 10^{-5}$	99
$h = 10^{-3}$	$1,9408 \cdot 10^{-7}$	999

Tabla 5.2: Tabla de error calculada con $\|\cdot\|_{L^\infty(0,1)}$, para $\lambda = 2,5$.

Como se observa, el programa implementado en MATLAB recupera el orden dos del método.

5.3.2. Error en norma $L^2(0, 1)$

En este caso, la norma $L^2(0, 1)$ viene definida como sigue

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 |u - u_h|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u - u_h|^2 \right)^{1/2} =: S^{1/2}.$$

Si se aproxima la anterior integral mediante la regla de Simpson (exacta para polinomios de grado tres) en cada subintervalo, resulta que

$$S \approx \sum_{i=0}^n \frac{h}{6} \left\{ |u(x_i) - u_i|^2 + 4 \left| u(x_{med}) - \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \right|^2 + |u(x_{i+1}) - u_{i+1}|^2 \right\},$$

donde $x_{med} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ denota el punto medio del subintervalo (x_i, x_{i+1}) . En las tablas (5.3) y (5.4) se recoge el cálculo del error obtenido con esta norma, para $\lambda = -2,5$ y $\lambda = 2,5$.

- Para $\lambda = -2,5$:

Paso	Error	<i>ndim</i>
$h = 0, 1$	$2,1010 \cdot 10^{-3}$	9
$h = 10^{-2}$	$2,3567 \cdot 10^{-5}$	99
$h = 10^{-3}$	$2,3815 \cdot 10^{-7}$	999

Tabla 5.3: Tabla de error calculada con $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$, para $\lambda = -2,5$.

- Para $\lambda = 2,5$:

Paso	Error	<i>ndim</i>
$h = 0, 1$	$2,3465 \cdot 10^{-3}$	9
$h = 10^{-2}$	$2,5811 \cdot 10^{-5}$	99
$h = 10^{-3}$	$2,6037 \cdot 10^{-7}$	999

Tabla 5.4: Tabla de error calculada con $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$, para $\lambda = 2,5$.

De nuevo, el orden dos del método es recuperado.

5.3.3. Error en norma H_0^1

Recordemos que, como ya se dijo en el Capítulo 3, la norma H_0^1 se define como

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H_0^1} &= \left(\int_0^1 |u - u_h|^2 + |u' - u'_h|^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u - u_h|^2 + |u' - u'_h|^2 \right)^{1/2} =: S_{der}^{1/2}, \quad (5.5) \end{aligned}$$

donde u'_h representa la aproximación de $u' \equiv u'(x)$.

Observación 5.4. Nótese que la expresión analítica de la derivada de la solución exacta del problema de Bratu depende, nuevamente, del parámetro auxiliar μ , y viene dada por

- Si $\lambda \geq 0$

$$u'(x) = -2\mu \operatorname{tgh} \left(\mu \left(x - \frac{1}{2} \right) \right),$$

donde el parámetro $\mu \geq 0$ es solución de la ecuación trascendente

$$\lambda = 2\mu^2 \cosh^{-2} \frac{\mu}{2}. \quad (5.6)$$

- Si $\lambda < 0$, entonces

$$u'(x) = 2\mu \operatorname{tg} \left(\mu \left(x - \frac{1}{2} \right) \right),$$

siendo $\mu \in [0, \pi)$ solución de

$$\lambda = -2\mu^2 \cos^{-2} \frac{\mu}{2}. \quad (5.7)$$

Aproximando la integral (5.5) mediante la regla del punto medio en cada subintervalo y la derivada primera mediante una fórmula de derivación de orden uno, resulta que

$$S_{der} \approx \sum_{i=0}^n h \left[|u(x_{med}) - u_i|^2 + \left| u'(x_{med}) - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right|^2 \right],$$

donde $x_{med} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ denota el punto medio del subintervalo (x_i, x_{i+1}) .

En las las tablas (5.5) y (5.6) se recoge el cálculo del error obtenido con esta norma, para $\lambda = -2,5$ y $\lambda = 2,5$.

- Para $\lambda = -2,5$:

Paso	Error	<i>ndim</i>
$h = 0,1$	$2,0662 \cdot 10^{-2}$	9
$h = 10^{-2}$	$2,8543 \cdot 10^{-3}$	99
$h = 10^{-3}$	$2,9389 \cdot 10^{-4}$	999

Tabla 5.5: Tabla de error calculada con $\| \cdot \|_{H_0^1}$, para $\lambda = -2,5$.

- Para $\lambda = 2,5$:

Paso	Error	<i>ndim</i>
$h = 0,1$	$3,8522 \cdot 10^{-2}$	9
$h = 10^{-2}$	$5,0750 \cdot 10^{-3}$	99
$h = 10^{-3}$	$5,2000 \cdot 10^{-4}$	999

Tabla 5.6: Tabla de error calculada con $\| \cdot \|_{H_0^1}$, para $\lambda = 2,5$.

Como vemos, el empleo de una fórmula de derivación numérica de orden uno provoca que el orden del método descienda.

5.4. Aproximación numérica de la autofunción en un entorno del punto de retorno

Finalmente, en el punto de retorno (λ^0, u^0) también se puede obtener numéricamente la autofunción φ^0 definida en el Capítulo 2. Para ello, basta tener en cuenta que φ^0 es solución del problema de contorno lineal

$$\begin{cases} -(\varphi^0)''(x) = \lambda^0 e^{u^0(x)} \varphi^0(x) & \forall x \in [0, 1], \\ \varphi^0(0) = 0 = \varphi^0(1). \end{cases}$$

De esta manera, φ^0 se puede obtener numéricamente sin más que resolver el siguiente sistema lineal con matriz singular (obtenido tras discretizar el operador derivada segunda con diferencias finitas)

$$(A_{0h} - D) v_h = \mathcal{O}, \tag{5.8}$$

siendo $D \in \mathcal{M}_{n \times n}$ la matriz diagonal

$$D = \lambda^0 \begin{pmatrix} e^{u_1^0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{u_2^0} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{u_n^0} \end{pmatrix}.$$

En la Figura 5.3 se representa la autofunción aproximada, v_h , obtenida tras resolver el sistema (5.8) por remonte, para lo cual se ha empleado la factorización de Gauss de la matriz $A_{0h} - D$.

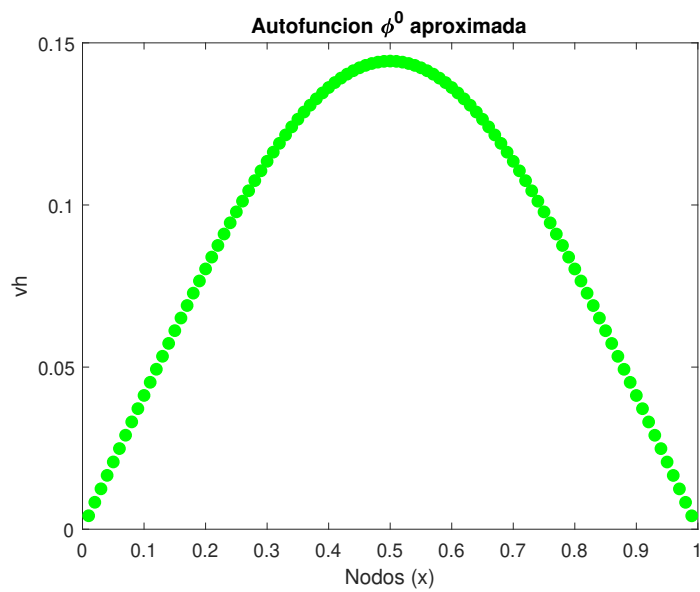


Figura 5.3: Aproximación numérica de la autofunción φ^0 de $D_u F(\lambda^0, u^0)$.

Conclusiones y nuevas líneas de investigación

5.5. Conclusiones de la memoria

En este trabajo se ha visto que el problema de Bratu unidimensional

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda e^{u(x)} & \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \quad (5.9)$$

puede presentar dos soluciones, una o ninguna, dependiendo del valor del parámetro de control $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, definiendo la función $F : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ de manera adecuada, se ha probado que la curva de soluciones de (5.9) en función del parámetro λ se puede obtener de manera equivalente resolviendo el problema no lineal

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O}. \quad (5.10)$$

Sin embargo, la curva de soluciones de (5.10) presenta un punto de retorno no degenerado, lo cual dificulta la parametrización de la misma. Por ello, mientras que en un entorno de un punto regular se ha podido emplear la parametrización natural (esto es, expresar u en función de λ) sin más que usar el teorema de la función implícita, en un entorno del punto de retorno ha sido necesario emplear una parametrización respecto al parámetro longitud de arco.

También se ha probado que el problema discretizado obtenido mediante un esquema de diferencias finitas de orden dos presenta un comportamiento similar al del problema continuo, de manera que la curva de soluciones del problema aproximado también posee un punto de retorno no degenerado. Además, se han ofrecido las correspondientes cotas de error de la aproximación de la curva de soluciones del problema continuo (5.10) por las del problema discreto correspondiente.

Finalmente, se han presentado algunos tipos de funciones escalares (llamadas *funciones test*) que permiten detectar, de manera sencilla, la presencia de dichos puntos de retorno.

5.6. Problema de Bratu en dimensión superior

Aunque en este trabajo se ha estudiado únicamente el caso unidimensional del problema de Bratu, también es de gran importancia su versión en dimensión superior, definido como la siguiente ecuación diferencial no lineal, elíptica, con dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \leq 3$, y condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en la frontera $\partial\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda e^{u(x)} & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Delta u \equiv \nabla^2 u$ denota el laplaciano de u .

De nuevo, este problema aparece en numerosos ámbitos de la ciencia, como son la teoría de Frank-Kamenetskii sobre la combustión térmica de una mezcla homogénea de reactivos mantenida dentro de un recipiente cerrado con paredes de temperatura constante; o la ecuación de Emden-Chandrasekhar que, además de describir la expansión de la nebulosa planetaria, también permite describir la carga espacial de electricidad alrededor de un cable incandescente.

5.7. Discretizaciones alternativas del problema de Bratu

Aunque en este trabajo la discretización del problema unidimensional de Bratu se ha llevado a cabo mediante diferencias finitas de orden dos, también se podría haber abordado mediante un esquema de elementos finitos Lagrange P_1 . Sin embargo, todos los resultados que se han presentado a lo largo de los Capítulos 2 y 3 son también válidos para problemas variacionales, de manera que se aplicarían de manera inmediata.

Por otro lado, en la discretización de la derivada segunda se podría haber optado por un esquema de diferencias finitas de mayor orden, como el método de Numerov. Este método numérico, empleado para resolver problemas de contorno como el que se expone en este trabajo, es un método de diferencias finitas de cuarto orden utilizado generalmente en problemas de bifurcación, por lo que su uso habría aumentado el orden de la discretización considerablemente.

Por último, cabe mencionar que existen formas de obtener soluciones aproximadas del problema de Bratu sin necesidad de ningún tipo de discretización, como es el caso del VIM (*variational iteration method*). Este método, basado en los multiplicadores de Lagrange, es el que se expone con detalle en [BAT10].

5.8. Aproximación numérica en un entorno de un punto de bifurcación simple

Dada una función arbitraria $F : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ de clase \mathcal{C}^∞ , el problema no lineal

$$F(\lambda, u) = \mathcal{O} \tag{5.11}$$

puede presentar otros tipos de singularidades que provoquen una multiplicidad de soluciones. Este es el caso de, por ejemplo, los llamados puntos de bifurcación simples.

Definición 5.5. Diremos que $(\lambda^0, u^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un **punto de bifurcación simple** de F si:

1. $F(\lambda^0, u^0) = \mathcal{O}$,
2. $D_u F^0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es singular, con $\text{rang}(D_u F^0) = n - 1$,
3. $D_\lambda F^0 := D_\lambda F(\lambda^0, u^0) \in \text{Im}(D_u F^0)$.

Observación 5.6. Nótese que un punto de bifurcación simple y un punto de retorno se diferencian, únicamente, en que en este último se tiene que $D_\lambda F^0 \notin \text{Im}(D_u F^0)$. Por este motivo, en el caso de un punto de bifurcación simple, DF^0 no es de rango máximo, a diferencia de lo que sucede en un punto de retorno.

Si además se impone una condición de intersección transversal sobre la derivada segunda de F , se puede probar que el problema (5.11) presenta dos ramas de soluciones distintas que se intersecan transversalmente en (λ^0, u^0) . En [CR71] se puede encontrar un mayor análisis de este tipo de puntos y en [BRR81b] se estudia la aproximación numérica de la curva de soluciones del problema continuo (5.11) por la del correspondiente problema aproximado en un entorno de un punto de bifurcación simple.

Bibliografía

- [BAT10] B. BATIHA. Numerical solution of bratu-type equations by the variational iteration method. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39(1):23–29, 2010.
- [BRE10] H. BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [BRR80] F. BREZZI, J. RAPPAZ, and P.A. RAVIART. Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part I: Branches of nonsingular solutions. *Numer. Math.*, (36):pp. 1–25, 1980.
- [BRR81a] F. BREZZI, J. RAPPAZ, and P.A. RAVIART. Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part II: Limit points. *Numer. Math.*, (37):pp. 1–28, 1981.
- [BRR81b] F. BREZZI, J. RAPPAZ, and P.A. RAVIART. Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part III: Simple Bifurcation points. *Numer. Math.*, (38):pp. 1–30, 1981.
- [CCÖ+09] H. CAGLAR, N. CAGLAR, M. ÖZER, A. VALARISTOS, A. N. MILIOU, and A. N. ANAGNOSTOPOULOS. Dynamics of the solution of bratu’s equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12):e672–e678, 2009.
- [CMT89] P. G. CIARLET, B. MIARA, and J. M. THOMAS. *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Cambridge University Press, 1989.
- [CR71] M. G. CRANDALL and P. H. RABINOWITZ. Bifurcation from simple eigenvalues. *Journal of Functional Analysis*, 8(2):321–340, 1971.
- [CR90] M. CROUZEIX and J. RAPPAZ. *On numerical approximation in bifurcation theory*. Springer Berlin, 1990.

- [DK80] D. W. DECKER and H. B. KELLER. Multiple limit point bifurcation. *Journal of mathematical analysis and applications*, 75(2):417–430, 1980.
- [GR84] A. GRIEWANK and G. W. REDDIEN. Characterization and computation of generalized turning points. *SIAM journal on numerical analysis*, 21(1):176–185, 1984.
- [MEI13] Z. MEI. *Numerical bifurcation analysis for reaction-diffusion equations*, volume 28. Springer Science & Business Media, 2013.
- [ROD03] G. RODRÍGUEZ. *Diferenciación de funciones de varias variables reales*, volume 4. Univ Santiago de Compostela, 2003.