NOTAS DE GEOMETRÍA AFÍN Y EUCLÍDEA

MARÍA J. VALE GONSALVES

Estas son las notas utilizadas durante los cursos 2020-21 y 2021-22 para impartir la materia Xeometría Linear del Grado de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela.

Índice

1. ESPACIO AFÍN

En este tema introducimos el concepto de espacio afín como una generalización del plano y espacio ordinario. Cada espacio afín lleva asociado un espacio vectorial y en los espacios afines estudiamos únicamente las propiedades geométricas que se pueden deducir de las propiedades de sus vectores.

Un concepto fundamental en este tema es el paralelismo. La teoría de figuras homotéticas está dentro de la geometría afín. Los conceptos de traslación y homotecia y más en general el concepto de aplicación afín son conceptos afines. El estudio de longitudes, ángulos, perpendicularidad y distancias corresponde a la geometría euclídea.

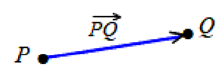
Las figuras que utilizamos se refieren al plano o espacio ordinario y están aquí principalmente para apoyar nuestra intuición; las demostraciones deben hacerse de forma lógica y ser independientes de las figuras.

1.1. Espacio afín sobre un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K.

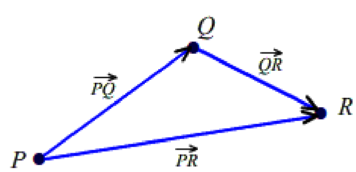
1.1.1. **Definición.** ([3, p. 498]) Un *espacio afín* sobre el espacio vectorial V es una terna $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ formada por un conjunto no vacío $\mathbb{A}$ cuyos elementos se llaman puntos, el espacio vectorial V y una operación externa:

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow : \mathbb{A} \times \mathbb{A} : & \longrightarrow & V \\ (P\ ,\ Q) & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$



donde por $\overrightarrow{PQ}$ o también por $\overrightarrow{P,Q}$ denotamos la imagen por la aplicación $\rightarrow$ del par (P, Q), verificándose los siguientes axiomas:

(1) Relación de Chasles: Para cualesquiera puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}$, se verifica $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.



(2) Para cada punto $P \in \mathbb{A}$ y cada vector $v \in V$, existe un único punto $Q \in \mathbb{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = v$; generalmente denotaremos Q por $P + v$ y entonces se tiene que $\overrightarrow{P, P+v} = v$, para cada $P \in \mathbb{A}$ y cada $v \in V$.

Con frecuencia denotaremos el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ simplemente por $\mathbb{A}$. Si $K = \mathbb{R}$ diremos que $\mathbb{A}$ es un espacio afín real. Si $K = \mathbb{C}$ diremos que $\mathbb{A}$ es un espacio afín complejo.

1.1.2. **Proposición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Se tiene:

(1) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

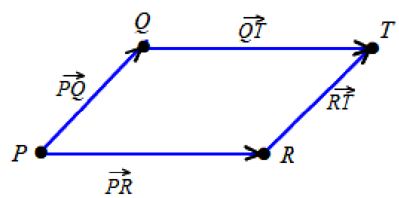
(2) $\overrightarrow{PP} = 0$, para todo $P \in \mathbb{A}$.

(3) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'} \implies Q = Q'$.

(4) $\overrightarrow{PQ} = 0 \iff Q = P$.

(5) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(6) Relación del paralelogramo: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RT} \quad \implies \quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QT}$.



(7) $P + v = P + v' \Rightarrow v = v'$.

(8) $P + (u + v) = (P + u) + v$, para todo $P \in \mathbb{A}$ y para cualesquiera $u, v \in V$.

(9) $P + 0 = P$, para todo $P \in \mathbb{A}$.

Demostración. (1) Se sigue de la definición 1.1.1 (2).

(2) Dado que $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$, se tiene que $\overrightarrow{PP} = 0$.

(3) Pongamos $v = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$. Por la definición 1.1.1 (2), $Q = P + v = Q'$.

(4) Se sigue de (2) y (3).

(5) Es consecuencia de que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$.

(6) Se tiene

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{QT}.$$

(7) $v = \overrightarrow{P, P + v} = \overrightarrow{P, P + v'} = v'$.

(8) Dado que

$$\overrightarrow{P,\ (P+u)+v} = \overrightarrow{P,\ P+u} \ + \ \overrightarrow{P+u,\ (P+u)+v} = u + v = \overrightarrow{P,\ P+(u+v)},$$

el resultado se sigue de (3).

(9) Se sigue de (3), puesto que $\overrightarrow{P,\ P+0} = 0 = \overrightarrow{PP}$.

$\square$

1.1.3. **Ejemplos.**

(1) El conjunto de los puntos del plano (espacio) ordinario, junto con el espacio vectorial de los vectores libres del plano (espacio) y con la aplicación que lleva cada par de puntos P, Q del plano (espacio) al vector libre $[\overrightarrow{PQ}]$, forman un espacio afín.

(2) Sea V un espacio vectorial sobre K. La terna $(V, V, \rightarrow)$, donde para cualesquiera $P, Q \in V$, $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, es un espacio afín. En efecto, la relación de Chasles se verifica puesto que

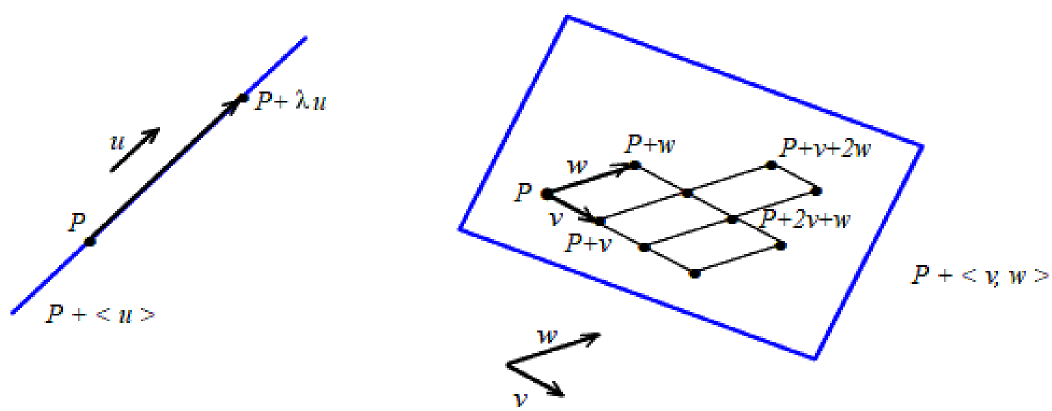
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (Q - P) + (R - Q) = R - P = \overrightarrow{PR}.$$

El axioma (2) se verifica, puesto que para cada punto $P \in V$ y cada vector $v \in V$ el punto $Q = P + v$ es el único punto que verifica la ecuación $Q - P = v$.

Así, todo espacio vectorial V puede ser considerado como un espacio afín sobre V; este espacio afín se llama el espacio afín de V y lo denotaremos por V.

1.1.4. **Definición.** Sea P un punto de $\mathbb{A}$ y sea U un subespacio de V. Se llama *variedad lineal* o *subespacio afín* de $\mathbb{A}$ que pasa por P y con dirección U al conjunto

$$P + U = \{\, P + u \mid u \in U \,\} \subset \mathbb{A}.$$



1.1.5. ***Observación.*** Las variedades lineales del espacio afín de V son los subconjuntos de V de la forma

$$P + U = \{P + u \mid u \in U\},$$

donde $P \in V$ y U es un subespacio de V, es decir, son los elementos del espacio vectorial cociente V/U.

El espacio afín $\mathbb{A}$ sobre el espacio vectorial V es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. En efecto, $\mathbb{A} = P + V$, para todo $P \in \mathbb{A}$.

1.1.6. **Proposición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V.

(1) Sea $L = P + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ y $Q \in \mathbb{A}$. Son equivalentes:

(a) $Q \in L$.

(b) $\overrightarrow{PQ} \in U$.

(c) $L = Q + U$.

(2) Sea $L = P + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Si $R, S \in L$, entonces $\overrightarrow{RS} \in U$.

(3) Sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene

$$L_1 \subset L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad P_1 \in L_2, \;\; U_1 \subset U_2 \,.$$

y en particular,

$$L_1 = L_2 \;\Rightarrow\; U_1 = U_2.$$

Demostración. (1) $(a) \Rightarrow (b)$ Existe $u \in U$ tal que $Q = P + u$. Por tanto $\overrightarrow{PQ} = u \in U$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Para cada $u \in U$, se tiene

$$P + u = Q + \overrightarrow{QP} + u \in Q + U.$$

Así, $L \subset Q + U$. De forma similar se prueba que $Q + U \subset L$.

$(c) \Rightarrow (a)$ $Q = Q + 0 \in Q + U = L$.

(2) Por (1) se tiene que $L = R + U$ y dado que $S \in R + U$, $\overrightarrow{RS} \in U$.

(3) Si $L_1 \subset L_2$, entonces $P_1 \in L_2$ y por (1), $L_2 = P_1 + U_2$. Veamos que $U_1 \subset U_2$. Si $u_1 \in U_1$, $P_1 + u_1 \in L_1 \subset L_2 = P_1 + U_2$, luego existe un vector $u_2 \in U_2$ tal que $P_1 + u_1 = P_1 + u_2$. De la proposición 1.1.2 (7), se sigue que $u_1 = u_2 \in U_2$. Recíprocamente, si $P_1 \in L_2$, entonces $L_2 = P_1 + U_2$ y dado que $U_1 \subset U_2$, se tiene $L_1 = P_1 + U_1 \subset L_2$. $\square$

1.1.7. ***Observación.*** Como consecuencia de la proposición 1.1.6, toda variedad lineal tiene un único subespacio dirección.

Veamos que toda variedad lineal es un espacio afín.

1.1.8. **Proposición.** Sea $L = P + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. La terna $(L, U, \rightarrow)$, siendo $\rightarrow : L \times L \longrightarrow U$ la aplicación que lleva cada par $(Q, R) \in L \times L$ al vector $\overrightarrow{QR}$ de V, es un espacio afín sobre U.

Demostración. Dado que $Q, R \in L$, el vector $\overrightarrow{QR} \in U$. La relación de Chasles se verifica para los puntos de L, puesto que se verifica para los puntos de $\mathbb{A}$. También se verifica el axioma (2), puesto que para cada punto $Q \in L$ y cada vector $u \in U$ el punto $R = Q + u \in L = Q + U$ es el único punto que verifica la ecuación $\overrightarrow{QR} = u$. $\square$

1.1.9. **Definición.** Sea V un espacio vectorial sobre K. Una *combinación lineal* de los elementos $v_1, \ldots, v_r \in V$ es una suma

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v_i, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Si S es un subconjunto de V, se llama *subespacio generado* por S, y se denota por $\langle S \rangle$, al conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de todos los subconjuntos finitos de S.

Si S es un subconjunto de V, entonces $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

1.1.10. ***Observación.*** Una *base* de un espacio vectorial V de dimensión n es una n-pla $(v_1,\dots,v_n)\in V^n$ tal que el conjunto $\{v_1,\dots,v_n\}$ genera V; en particular, los vectores $v_1,\dots,v_n$ son linealmente independientes.

1.1.11. **Definición.** Se llama *dimensión* del espacio afín $(\mathbb{A},V,\to)$ a la dimensión de V como espacio vectorial sobre K.

Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín y $L=P+U$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\dim L=\dim_K U$.

1.1.12. **Definición.** Se llaman *rectas* y *planos* a los espacios afines de dimensiones 1 y 2, respectivamente. Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n, se llaman *hiperplanos* de $\mathbb{A}$ a las variedades lineales de dimensión $n-1$. El espacio afín $\mathbb{A}$ tiene dimensión 0 si, y solo si, $\mathbb{A}=\{P\}$, para algún $P\in\mathbb{A}$. El conjunto vacío se considera una variedad lineal de dimensión -1.

1.1.13. **Proposición.** Si $L_1=P_1+U_1$ y $L_2=P_2+U_2$ son variedades lineales de igual dimensión de un espacio afín $\mathbb{A}$ y $L_1\subset L_2$, entonces $L_1=L_2$.

Demostración. Por la proposición 1.1.6 (3), $U_1\subset U_2$ y $P_1\in L_2$. Dado que $\dim_K U_1=\dim_K U_2$, se tiene que $U_1=U_2$ y entonces, por la proposición 1.1.6 (1), $L_2=P_1+U_2=P_1+U_1=L_1$. $\square$

1.1.14. **Proposición.** Si $\{L_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces $\bigcap_{i\in I}L_i$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Además, si $L_i=P_i+U_i$ y $Q\in\bigcap_{i\in I}L_i$,

$$\bigcap_{i\in I}L_i \;=\; Q+\bigcap_{i\in I}U_i.$$

Demostración. Por la proposición 1.1.6, $L_i=Q+U_i$ para cada $i\in I$ y se tiene

$$P\in\bigcap_{i\in I}L_i \iff P\in L_i,\ \forall\, i\in I \iff \overrightarrow{QP}\in U_i,\forall\, i\in I \iff \overrightarrow{QP}\in\bigcap_{i\in I}U_i \iff P\in Q+\bigcap_{i\in I}U_i. \quad\square$$

Como consecuencia, si $\bigcap_{i\in I}L_i\neq\varnothing$, entonces $\dim\left(\bigcap_{i\in I}L_i\right)=\dim_K\left(\bigcap_{i\in I}U_i\right)$.

1.1.15. **Definición.** Si $S\subset\mathbb{A}$, se llama *variedad lineal generada* por S y la denotaremos por $\langle\langle S\rangle\rangle$ a la variedad lineal

$$\langle\langle S\rangle\rangle=\bigcap_{i\in I}L_i,$$

donde $\{L_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$ que contienen a S.

La variedad lineal generada por S es la menor variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a S.

La siguiente proposición da una descripción de los elementes de $\langle\langle S\rangle\rangle$.

1.1.16. **Proposición.** Si $S\neq\varnothing$ un subconjunto de $\mathbb{A}$, entonces

$$\langle\langle S\rangle\rangle=Q+\langle\,\overrightarrow{QP}\ \mid\ P\in S\rangle,$$

para cualquier $Q\in S$.

Demostración. La inclusión $S \subset Q + \langle \overrightarrow{QP} \mid P \in S\rangle$ se sigue de las igualdades

$$Q = Q + 0, \qquad P = Q + \overrightarrow{QP}, \ \forall P \in S.$$

Si $L = R + U$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ tal que $S \subset L$, entonces, por la proposición 1.1.6,

$$L = Q + U, \quad \langle \overrightarrow{QP} \mid P \in S\rangle \subset U.$$

Así,

$$Q + \langle \overrightarrow{QP} \mid P \in S\rangle \subset L.$$ □

1.1.17. **Ejercicio.** Sean S y S' subconjuntos no vacíos de $\mathbb{A}$. Prueba que:

(1) $S \subset \langle\langle S\rangle\rangle$.

(2) Si $S \subset S'$, entonces $\langle\langle S\rangle\rangle \subset \langle\langle S'\rangle\rangle$.

(3) S es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ si, y solo si, $\langle\langle S\rangle\rangle = S$.

(4) Si $\mathbb{A}$ tiene dimensión finita, existe un subconjunto finito S_0 de S tal que $\langle\langle S\rangle\rangle = \langle\langle S_0\rangle\rangle$.

(5) Dados $P, Q \in \mathbb{A}$, si $Q \in \langle\langle S \cup \{P\}\rangle\rangle$ y $Q \notin \langle\langle S\rangle\rangle$, entonces $P \in \langle\langle S \cup \{Q\}\rangle\rangle$.

1.1.18. **Proposición.** Sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene

$$L_1 \bigcap L_2 \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$$

Demostración. Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $P_1 + u_1 = P_2 + u_2$. Entonces $P_1 = P_2 + u_2 - u_1$, de donde se sigue que $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$.

Recíprocamente, si $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$, existen vectores $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 + u_2$, luego $P_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} = P_1 + u_1 + u_2$. Por tanto $P_2 - u_2 = P_1 + u_1 \in L_1 \cap L_2$. □

1.1.19. ***Observación.*** Si L_1 y L_2 son variedades lineales de $\mathbb{A}$ su unión conjuntista $L_1 \cup L_2$ no es, en general, una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Si el cuerpo K tiene característica distinta de 2 y $L_1 \cup L_2$ es una variedad lineal, entonces $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$. En efecto, sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ y supongamos que U es el subespacio dirección de $L_1 \cup L_2$. Dado que $P_1, P_2 \in L_1 \cup L_2$, se tiene que $\overrightarrow{P_1P_2} \in U$, luego

$$P_1 + 2\,\overrightarrow{P_1P_2} \in L_1 \cup L_2.$$

Si $P_1 + 2\,\overrightarrow{P_1P_2} \in L_1$, entonces $2\,\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1$ y si $P_1 + 2\,\overrightarrow{P_1P_2} \in L_2$,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_1} + 2\,\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2, P_1 + 2\,\overrightarrow{P_1P_2}} \in U_2.$$

Por tanto, si la característica de K es distinta de 2 se tiene que $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 \cup U_2$, de donde se sigue que $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Si $P \in L_1 \cap L_2$, entonces $L_1 \cup L_2 = P + U$, luego $U = U_1 \cup U_2$, y por ser U un subespacio de V se tiene que $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$. Por la proposición 1.1.6, $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.

Si $K = \mathbb{Z}_2$ no se verifica necesariamente que si $L_1 \cup L_2$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$. En este caso, las rectas de $\mathbb{A}$ son todos los conjuntos formados por dos puntos distintos; por tanto si $P, Q \in \mathbb{A}$, $P \neq Q$, se tiene que $\{P, Q\}$ es una recta.

1.1.20. **Definición.** Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se llama *variedad lineal unión* o *suma* de las variedades $\{L_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{A}$ a la menor variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a $\bigcup_{i\in I} L_i$; la denotaremos por $\circ_{i\in I} L_i$. Se tiene

$$\circ_{i\in I} L_i = \langle\langle \bigcup_{i\in I} L_i \rangle\rangle.$$

En particular, si $S = \{P_1, \dots, P_r\}$, escribiremos $P_1 \circ \dots \circ P_r = \langle\langle S \rangle\rangle$.

La siguiente proposición da una expresión sencilla de los elementos de $L_1 \circ L_2$.

1.1.21. **Proposition.** Si $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ son variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

$$L_1 \circ L_2 = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + U_1 + U_2.$$

Demostración. Se tiene que $L_1 \subset P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + U_1 + U_2$ puesto que $P_1 + u_1 \in P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + U_1 + U_2$, para cada $u_1 \in U_1$ y $L_2 \subset P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + U_1 + U_2$ porque $P_2 + u_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + u_2$, para cada $u_2 \in U_2$. Sea $L = Q + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ tal que $L_1 \cup L_2 \subset L$. Dado que $U_1 \subset U$ y $U_2 \subset U$, es $U_1 + U_2 \subset U$. Puesto que $P_1, P_2 \in L$, se tiene que $L = P_1 + U$ y $\langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle \subset U$. Así, $P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle + U_1 + U_2 \subset L$. $\square$

1.1.22. **Corolario.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene:

(1) **Identidad de Grassmann para variedades lineales afines**: Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, entonces

$$\dim (L_1 \circ L_2) + \dim (L_1 \bigcap L_2) = \dim\, L_1 + \dim\, L_2.$$

(2) Si $L_1 \bigcap L_2 = \varnothing$, entonces

$$\dim (L_1 \circ L_2) = 1 + \dim_K (U_1 + U_2).$$

Demostración. (1) Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ y $Q \in L_1 \cap L_2$, entonces $L_1 \cap L_2 = Q + (U_1 \cap U_2)$ y $L_1 \circ L_2 = P_1 + U_1 + U_2$. El resultado se sigue de la identidad de Grassmann para subespacios.

(2) Si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces $\overrightarrow{P_1P_2} \notin U_1 + U_2$ y por tanto $\langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$. Así, $\dim (L_1 \circ L_2) = 1 + \dim_K (U_1 + U_2)$. $\square$

1.1.23. **Definición.** Se dice que las variedades lineales $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ son *paralelas*, si $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$. Se escribe $L_1 \parallel L_2$.

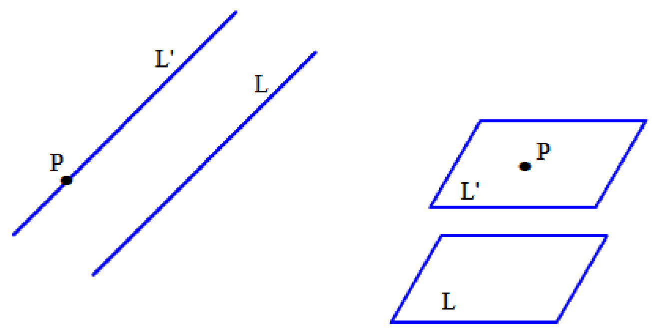
1.1.24. **Proposición.** Sean $L = Q + U$, $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene:

(1) Si $L_1 \parallel L_2$ y $\dim L_1 = \dim L_2$, entonces $U_1 = U_2$.

(2) Si $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, entonces $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$; además, si $\dim L_1 = \dim L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

(3) La "relación de paralelismo" es una relación de equivalencia en el conjunto de las variedades lineales de la misma dimensión de un espacio afín.

(4) **Axioma de paralelismo**: Si P es un punto de $\mathbb{A}$ tal que $P \notin L$, entonces existe una única variedad lineal L' de la misma dimensión que L que pasa por P y es paralela a L.



(5) Si $L_1 \parallel L_2$ y $\dim L_1 \leq \dim L_2$, entonces existe una única variedad lineal L'' tal que $\dim L'' = \dim L_2$, $L_1 \subset L''$ y $L'' \parallel L_2$.

Demostración. (1) Dado que $U_1 \subset U_2$ y $\dim_K U_1 = \dim_K U_2$, se tiene que $U_1 = U_2$.

(2) Si $Q \in L_1 \cap L_2$, entonces $L_1 = Q + U_1$ y $L_2 = Q + U_2$. Dado que $L_1 \parallel L_2$, se tiene $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$. Así, $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.

(3) Se sigue de (1).

(4) $L' = P + U$.

(5) $L'' = P_1 + U_2$. $\square$

1.1.25. **Definición.** Sean L_1 y L_2 variedades lineales del espacio afín $\mathbb{A}$ sobre V. Se dice que L_1 y L_2 se *cortan* si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Se dice que L_1 y L_2 se *cruzan* si no son paralelas y no se cortan.

Si P es un punto de $\mathbb{A}$, diremos que la variedad lineal L *pasa* por P si $P \in L$.

1.1.26. **Ejemplo.** Consideramos las rectas $r_a = (0,1,1) + \langle(-1,2,a)\rangle$ y $s_a = (1,0,1) + \langle(a-1,4,-2)\rangle$, y vamos a estudiar la posición relativa de r_a y s_a según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Las rectas r_a y s_a son paralelas si, y solo si, $\langle(-1,2,a)\rangle = \langle(a-1,4,-2)\rangle$. Por tanto,

$$r_a \parallel s_a \iff \lambda(-1,2,a) = (a-1,4,-2) \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R} \iff a = -1.$$

Por la proposición 1.1.18,

$$r_a \cap s_a \neq \varnothing \iff (1,-1,0) \in \langle(-1,2,a),(a-1,4,-2)\rangle,$$

y si $a \neq -1$,

$$r_a \cap s_a \neq \varnothing \iff \begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff a = -2.$$

Así, $r_{-1} \parallel s_{-1}$, $r_{-2} \cap s_{-2} \neq \varnothing$, $r_{-2} \neq s_{-2}$ y r_a y s_a se cruzan para todo $a \in \mathbb{R} - \{-1,-2\}$. Además, $r_{-2} \cap s_{-2} = \{(-1/2,2,0)\}$.

1.1.27. **Incidencia de variedades lineales en el plano.**

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín sobre el espacio vectorial V. Se tiene:

(1) Por dos puntos distintos pasa una única recta.

(2) Dos rectas distintas son paralelas si, y solo si, no se cortan.

Demostración. (1) Si $P, Q \in \mathbb{A}$, $P \neq Q$, entonces $P \circ Q = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ es una recta que pasa por P y Q. Si L es otra recta tal que $P, Q \in L$, entonces $P \circ Q \subset L$ y por la proposición 1.1.13, $L = P \circ Q$.

(2) Sean $L = P + \langle u \rangle$ y $L' = P' + \langle v \rangle$ rectas distintas. Veamos que si $L \parallel L'$, entonces $L \cap L' = \varnothing$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $L \cap L' \neq \varnothing$ y $L \parallel L'$. Por la proposición 1.1.24 (2), se tiene que $L = L'$. Recíprocamente, si $L \cap L' = \varnothing$, se tiene $\overrightarrow{PP'} \notin \langle u, v \rangle$. Por tanto $\dim_K \langle u, v \rangle = 1$, luego $\langle u \rangle = \langle v \rangle$. $\square$

1.1.28. **Incidencia de variedades lineales en el espacio afín tridimensional.**

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión 3 sobre el espacio vectorial V. Se tiene:

(1) Por dos puntos distintos pasa una única recta.

(2) Por tres puntos no alineados pasa un único plano.

(3) Si dos puntos distintos de una recta están en un plano, entonces la recta está contenida en el plano.

(4) Si dos planos distintos se cortan, su intersección es una recta.

(5) Dos planos distintos son paralelos si, y solo si, no se cortan.

(6) Un plano y una recta no contenida en el plano son paralelos si, y solo si, no se cortan.

(7) Dos rectas distintas son paralelas si, y solo si, son coplanarias y no se cortan.

Demostración. (1) Si $P, Q \in \mathbb{A}$, $P \neq Q$, entonces $P \circ Q = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ es la única recta que pasa por P y Q.

(2) Si P, Q y R no están alineados, entonces la variedad lineal $P \circ Q \circ R = P + \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle$ es un plano. En efecto, si $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ para algún $\lambda \in K$, entonces $P, Q, R \in P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$. Si Π es otro plano tal que $P, Q.R \in \Pi$, entonces $P \circ Q \circ R \subset \Pi$ y por la proposición 1.1.13, $\Pi = P \circ Q \circ R$.

(3) Sea L una recta, $P, Q \in L$, $P \neq Q$ y Π un plano. Si $P, Q \in \Pi$, entonces $L = P \circ Q \subset \Pi$.

(4) Sean Π y Π' planos distintos tales que $\Pi \cap \Pi' \neq \varnothing$. Dado que $\Pi \neq \Pi'$, se tiene que $\Pi \subset \Pi \circ \Pi'$ y $\Pi \neq \Pi \circ \Pi'$. Por tanto, $\dim(\Pi \circ \Pi') = 3$. Así,

$$\dim(\Pi \cap \Pi') = \dim \Pi + \dim \Pi' - \dim(\Pi \circ \Pi') = 2 + 2 - 3 = 1.$$

(5) Sean $\Pi = P + U$ y $\Pi' = P' + U'$ planos distintos. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\Pi \parallel \Pi'$ y que $\Pi \cap \Pi' \neq \varnothing$. Por la proposición 1.1.24 (2), $\Pi = \Pi'$. Recíprocamente, puesto que la

condición $\Pi \cap \Pi' = \varnothing$ implica que $\dim(\Pi \circ \Pi') = 1 + \dim_K(U + U') \leq 3$, se tiene que $\dim_K(U + U') \leq 2$. Como $U \subset U + U'$ y $U' \subset U + U'$, es $U = U'$. Así, $\Pi \parallel \Pi'$.

(6) La demostración es similar a la de (5).

(7) Sean $L = P + \langle u \rangle$ y $L' = P' + \langle u \rangle$ rectas paralelas distintas. Por la proposición 1.1.24 (2), $L \cap L' = \varnothing$, luego $\dim(L \circ L') = 1 + \dim_K \langle u \rangle = 2$. Recíprocamente, si $L = P + \langle u \rangle$ y $L' = P' + \langle v \rangle$ son rectas coplanarias tales que $L \cap L' = \varnothing$, entonces $L \parallel L'$, por 1.1.27 (2). □

1.2. Referencias afines. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. En esta sección se introducen coordenadas en el espacio afín $\mathbb{A}$ y se estudian las ecuaciones lineales de las variedades lineales de $\mathbb{A}$.

1.2.1. **Definición.** Se dice que $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}$ son *afínmente independientes* si los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ son linealmente independientes.

1.2.2. **Proposición.**

(1) Sean $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}$. Son equivalentes:

  (a) $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes.

  (b) $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = r - 1$.

  (c) $P_i \notin P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P_i} \circ \ldots \circ P_r$, $i = 1, \ldots, r$, donde con $\widehat{P_i}$ indicamos que se elimina el punto P_i.

(2) Los puntos $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes si, y solo si, los puntos $P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(r)}$ son afínmente independientes para toda permutación $\sigma \in S_r$.

(3) Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos afínmente independientes y $P \notin P_1 \circ \ldots \circ P_r$, entonces los puntos $P_1, \ldots, P_r, P$ son afínmente independientes.

Demostración. (1)

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Se sigue de que $P_1 \circ \ldots \circ P_r = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle$.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Se sigue de que

$$\overrightarrow{P_1P_i} \in \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \widehat{\overrightarrow{P_1P_i}} \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle \iff P_i \in P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P_i} \circ \ldots \circ P_r.$$

donde con $\widehat{\overrightarrow{PP_i}}$ indicamos que se elimina el vector $\overrightarrow{P_1P_i}$.

(2) $P_1 \circ \ldots \circ P_r = P_{\sigma(1)} \circ \ldots \circ P_{\sigma(r)}$.

(3) Dado que $P \notin P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle$, se tiene que $\overrightarrow{P_1P} \notin \langle \overrightarrow{P_1P_2} \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle$. Como los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ son linealmente independientes, los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}, \overrightarrow{P_1P}$ son linealmente independientes, Así, los puntos los puntos $P_1, \ldots, P_r, P$ son afínmente independientes. □

1.2.3. **Proposición.** Se tiene:

(1) Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n, entonces $\mathbb{A}$ tiene $n+1$ puntos afínmente independientes; además el mayor número de puntos afínmente independientes es $n+1$.

(2) Si $P_1, \ldots, P_{n+1}$ son puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes y $\dim \mathbb{A} = n$, entonces $\mathbb{A} = P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}$.

(3) Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n y $P_1, \ldots P_r$, $r \leq n+1$, son puntos afínmente independientes, entonces existen puntos $P_{r+1}, \ldots, P_{n+1}$ tales que $P_1, \ldots, P_{n+1}$ son afínmente independientes.

Demostración. (1) Veamos que existen $n+1$ puntos afínmente independientes. Si P es un punto de $\mathbb{A}$ y $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V, entonces los puntos $P, P+v_1, \ldots, P+v_n$ son $n+1$ puntos afínmente independientes. Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos afínmente independientes, entonces los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ son vectores linealmente independientes y por tanto $r-1 \leq n$.

(2) Dado que $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}) = n$, por la proposición 1.1.13 se tiene que $\mathbb{A} = P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}$.

(3) Sean $v_r, \ldots, v_n$ vectores tales que $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}, v_r, \ldots, v_n$ son linealmente independientes. Si tomamos $P_i = P_1 + v_{i-1}$, para $i = r+1, \ldots, n+1$, entonces los puntos $P_1, \ldots, P_r, P_{r+1}, \ldots, P_{n+1}$ son afínmente independientes. □

1.2.4. **Ejemplos.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio. Se tiene:

(1) Dos puntos $P_1, P_2 \in \mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y solo si, $P_1 \neq P_2$.

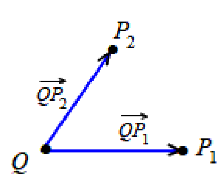
(2) Tres puntos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y solo si, $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{A}$ no están alineados.

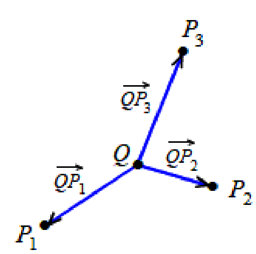
(3) Cuatro puntos $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y solo si, P_1, P_2, P_3, P_4 no son coplanarios.

1.2.5. ***Observación.*** De la proposición 1.2.3 (1) y de los ejemplos 1.2.4, se sigue que toda recta tiene al menos dos puntos distintos, todo plano tres puntos no alineados y en todo espacio afín de dimensión 3 existen cuatro puntos no coplanarios.

1.2.6. **Definición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n. Una *referencia* o *referencia afín* $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ es una $(n+1)$-pla $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ tal que los puntos $P_1, \ldots, P_n, Q$ son afínmente independientes. Escribiremos $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ y diremos que Q es el *origen* y $B_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{QP_1}, \ldots, \overrightarrow{QP_n})$ es la *base asociada* a $\mathcal{R}$.

Los siguientes dibujos muestran una referencia en el plano y una referencia en el espacio afín tridimensional, respectivamente.

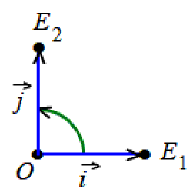


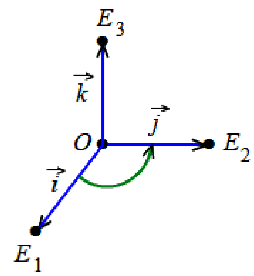


1.2.7. **Ejemplos.**

(1) La referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2; O\}$ del plano ordinario es una terna (E_1, E_2, O) de puntos no alineados tal que las rectas $O \circ E_1$ y $O \circ E_2$ son perpendiculares, los vectores $\overrightarrow{i} = [\overrightarrow{OE_1}]$ y $\overrightarrow{j} = [\overrightarrow{OE_2}]$ tienen módulo 1 y al girar de $\overrightarrow{i}$ a $\overrightarrow{j}$ siguiendo el menor ángulo resulta un giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

La referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ del espacio ordinario es una cuaterna (E_1, E_2, E_3, O) de puntos no coplanarios tal que las rectas $O \circ E_1$, $O \circ E_2$ y $O \circ E_3$ son perpendiculares dos a dos, los vectores $\overrightarrow{i} = [\overrightarrow{OE_1}]$, $\overrightarrow{j} = [\overrightarrow{OE_2}]$ y $\overrightarrow{k} = [\overrightarrow{OE_3}]$ tienen módulo 1 y tales que un sacacorchos situado en la dirección de $\overrightarrow{k}$ al girar de $\overrightarrow{i}$ a $\overrightarrow{j}$ siguiendo el menor ángulo avanza en el sentido del vector $\overrightarrow{k}$.





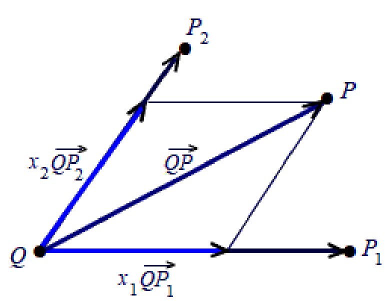
(2) La referencia $\mathcal{C} = \{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1); (0, \ldots, 0)\}$ de K^n se llama *referencia canónica* de K^n. Su base asociada es la *base canónica* $C = (e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1))$ de K^n.

(3) $\{(1, 2), (2, -1); (3, 2)\}$ es una referencia de $\mathbb{R}^2$.

1.2.8. **Definición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$. Se llaman *coordenadas* o *coordenadas afines* del punto $P \in \mathbb{A}$ en la referencia $\mathcal{R}$ a la n-pla $(x_1, \ldots, x_n)$ de coordenadas del vector $\overrightarrow{QP}$ en la base $B_{\mathcal{R}}$, es decir a la n-pla $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tal que

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overrightarrow{QP_i}$$

El siguiente dibujo ilustra esta definición en el caso $n = 2$.

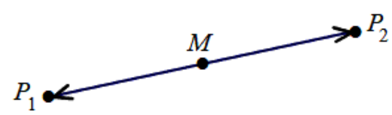


1.2.9. **Ejemplos.**

(1) En la referencia canónica $\mathcal{C}$ de K^n, el punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$.

(2) En la referencia $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, -1);\ (3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$, el punto $P = (0, 5)$ tiene coordenadas $(2, -1)$.

1.2.10. **Definición.** Si la característica de K es distinta de 2, se llama *punto medio* de los puntos P_1 y P_2 al punto M tal que $\overrightarrow{MP_1} = -\overrightarrow{MP_2}$.



1.2.11. **Lema.** Si la característica de K es distinta de 2, entonces M es el punto medio de P_1 y P_2 si, y solo si, $M = P_1 + (1/2)\,\overrightarrow{P_1P_2}$ o, equivalentemente, si $M = P_2 + (1/2)\,\overrightarrow{P_2P_1}$.

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP_1} = -\overrightarrow{MP_2} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{P_1M} = -\overrightarrow{P_2M} \Longleftrightarrow \overrightarrow{P_1M} = -\overrightarrow{P_2P_1} - \overrightarrow{P_1M} \\
&\Longleftrightarrow 2\,\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2} \Longleftrightarrow M = P_1 + (1/2)\,\overrightarrow{P_1P_2} \\
&\Longleftrightarrow M = P_2 + \overrightarrow{P_2P_1} - (1/2)\,\overrightarrow{P_2P_1} \\
&\Longleftrightarrow M = P_2 + (1/2)\,\overrightarrow{P_2P_1}.
\end{aligned}$$

$\square$

1.2.12. **Lema.** Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ y $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(1) Si el punto P tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ y el punto P' tiene coordenadas $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en $\mathcal{R}$, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{PP'}$ en $B_{\mathcal{R}}$ son $(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n)$.

(2) Si el punto P tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ y el vector v tiene coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$ en $B_{\mathcal{R}}$, entonces las coordenadas del punto $P + v$ en $\mathcal{R}$ son $(x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n)$.

(3) Si el punto P tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ y el punto P' tiene coordenadas $(x'_1, \ldots, x'_n)$, entonces las coordenadas del punto medio de P y P' en $\mathcal{R}$ son $(1/2)(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$.

Demostración. (1) Se tiene

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i, \quad \overrightarrow{QP'} = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, v_i, \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{QP'} - \overrightarrow{QP},$$

luego

$$\overrightarrow{PP'} = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)\, v_i.$$

(2) Dado que

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i, \quad v = \sum_{i=1}^{n} z_i\, v_i, \quad \overrightarrow{Q, P+v} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{P, P+v} = \overrightarrow{QP} + v,$$

se tiene

$$\overrightarrow{Q, P+v} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i)\, v_i.$$

(3) Se sigue del lema 1.2.11 y de (1) y (2). $\square$

1.2.13. **Definición.** Sean $B = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ bases de un espacio vectorial V y sea

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

La matriz

$$\mathrm{id}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se llama *matriz de cambio de base* de B' a B.

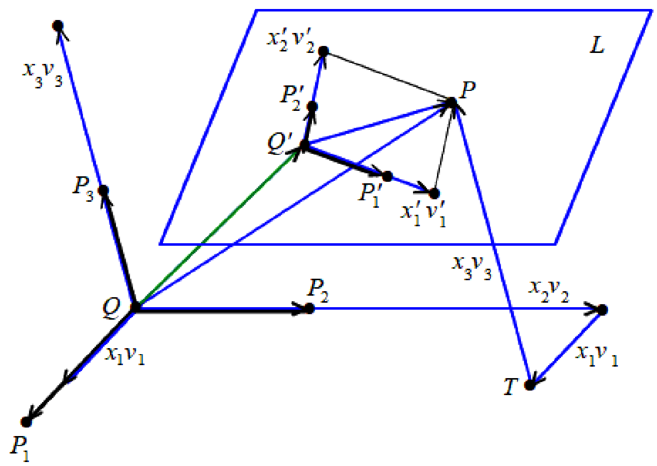
1.2.14. **Proposición.** Sean L una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R}' = (P'_1, \ldots, P'_r; Q')$ una referencia de L, $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B_{\mathcal{R}'} = \{v'_1, \ldots, v'_r\}$. Supongamos que $(a_1, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de Q' en $\mathcal{R}$ y que

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Si P es un punto de L de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ y $(x'_1, \ldots, x'_r)$ en $\mathcal{R}'$, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{pmatrix},$$

que es la *ecuación matricial del cambio de coordenadas* de los puntos de L de la referencia $\mathcal{R}'$ a la referencia $\mathcal{R}$.



Demostración. Dado que $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P}$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i + \sum_{j=1}^{r} x'_j\, v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j\, (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i + \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x'_j)\, v_i,\end{aligned}$$

de donde se sigue

$$x_i = a_i + \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x'_j, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad \square$$

1.2.15. **Cambio de coordenadas.**

Sean $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ y $\mathcal{R}' = \{P'_1, \ldots, P'_n; Q'\}$ referencias de $\mathbb{A}$, $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B_{\mathcal{R}'} = (v'_1, \ldots, v'_n)$. Sea P un punto de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en la referencia $\mathcal{R}$ y coordenadas $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en la referencia $\mathcal{R}'$. Si $\mathrm{id}_{B_{\mathcal{R}'}\, B_{\mathcal{R}}} = (a_{ij})$ es la matriz de cambio de base de $B_{\mathcal{R}'}$ a $B_{\mathcal{R}}$, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

donde $(b_1, \ldots, b_n)$ son las coordenadas de Q' en $\mathcal{R}$. Esta ecuación se llama *ecuación matricial del cambio de coordenadas* de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

Demostración. Es un caso particular de la proposición 1.2.14; basta tomar $L = \mathbb{A}$ $\square$.

1.2.16. **Proposición.** Sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ y $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$. El conjunto S de puntos de $\mathbb{A}$ cuyas coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc}
c_{11}x_1 & + & \ldots & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\
c_{21}x_1 & + & \ldots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
c_{m1}x_1 & + & \ldots & + & c_{mn}x_n & = & d_m,
\end{array}$$

donde $c_{ij}, d_i \in K$, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots, n$, es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ y si $S \neq \varnothing$, entonces la dimensión de S es $n - \operatorname{rango}(c_{ij})$. Los vectores de la dirección de S son los vectores cuyas coordenadas en $B_{\mathcal{R}}$ son solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado al anterior.

Demostración. Si $f\colon V \to K^m$ es la aplicación lineal definida por

$$f(v_i) = (c_{1i}, \ldots, c_{mi}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

entonces

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i) = (\sum_{i=1}^{n} c_{1i}\, x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{mi}\, x_i).$$

Si P es el punto de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$, se tiene

$$P \in S \iff \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, x_i = d_j,\ j = 1, \ldots, m \iff \big(\sum_{i=1}^{n} c_{1i}\, x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{mi}\, x_i\big) = (d_1, \ldots, d_m),$$

es decir, $P \in S$ si, y sólo si, $f(\overrightarrow{QP}) = (d_1, \ldots, d_m)$. Si $A \in S$, entonces $S = A + \operatorname{Nuc} f$, donde $\operatorname{Nuc} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$; en efecto,

$$P \in S \iff f(\overrightarrow{QP}) = (d_1, \ldots, d_m) = f(\overrightarrow{QA}) \iff \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QA} \in \operatorname{Nuc} f \iff \overrightarrow{AP} \in \operatorname{Nuc} f \iff P \in A + \operatorname{Nuc} f.$$

Por tanto,

$$\dim S = \dim_K \operatorname{Nuc} f = n - \dim_K f(V) = n - \operatorname{rango}(c_{ij}).$$

Además, un vector de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $B_{\mathcal{R}}$ está en la dirección de S, si, y solo si,

$$f\big(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i\big) = (0, \ldots, 0) \iff \big(\sum_{i=1}^{n} c_{1i}\, x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{mi}\, x_i\big) = (0, \ldots, 0),$$

de donde se sigue que unas ecuaciones en la base $B_{\mathcal{R}}$ del subespacio dirección de S son

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, x_i = 0, \;\; j = 1, \ldots, m. \qquad \square$$

1.2.17. **Ecuaciones paramétricas de una variedad lineal.** Sean $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B_U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ una base de U. Supongamos que $(a_1, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de A en $\mathcal{R}$ y que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Si P es un punto de L de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$, entonces

$$P \in L \iff \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \mid x_i = a_i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ se llaman *parámetros*.

Demostración. Se tiene que $P \in L$ si, y solo si, existe $u \in U$ tal que $P = A + u$, equivalentemente si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ tales que

$$P = A + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, u_j.$$

Por el lema 1.2.12, se tiene

$$P \in L \iff \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \mid (x_1, \ldots, x_n) = (a_1, \ldots, a_n) + \lambda_1(a_{11}, \ldots, a_{r1}) + \ldots + \lambda_r(a_{1r}, \ldots, a_{nr}),$$

y el resultado se sigue igualando coordenadas. $\square$

1.2.18. **Ejemplo.** Unas ecuaciones paramétricas del plano $\Pi = (0, 1, 1) + \langle (1, 1, 1), (1, 0, 2) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ en la referencia canónica están dadas por

$$(x, y, z) \in \Pi \iff \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = 1 + \lambda_1 \\ z = 1 + \lambda + 2\lambda_2, \end{cases}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Para calcular unas ecuaciones paramétricas del plano Π en la referencia

$$\mathcal{R} = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1);\ (1, 1, 1)\}$$

obtenemos que las coordenadas del punto $(0, 1, 1)$ en $\mathcal{R}$ son $(0, 0, 1)$, las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ en $B_{\mathcal{R}} = ((0, -2, -1), (-1, 0, -1), (-1, 0, 0))$ son $(-1/2, -1/2, -1/2)$ y las coordenadas del vector $(1, 0, 2)$ en $B_{\mathcal{R}}$ son $(0, -2, 1)$. Si P es el punto de coordenadas (x, y, z) en $\mathcal{R}$, entonces

$$P \in \Pi \iff \begin{cases} x = -(1/2)\, \lambda_1 \\ y = -(1/2)\, \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ z = 1 - (1/2)\lambda_1 + \lambda_2, \end{cases}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con lo que se tienen unas ecuaciones paramétricas de Π en $\mathcal{R}$.

1.2.19. **Ecuaciones lineales o implícitas de una variedad lineal.** Sean $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r, $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B_U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ una base de U. Supongamos que $(a_1, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de A en $\mathcal{R}$ y que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Si P es un punto de L de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$, se tiene

$$P \in L \iff \operatorname{rango} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - a_n & a_{n1} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} = r.$$

En particular, si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces

$$P \in L \iff \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r - a_r & a_{r1} & \ldots & a_{rr} \\ x_j - a_j & a_{j1} & \ldots & a_{jr} \end{vmatrix} = 0, \quad j = r+1, \ldots, n.$$

Así, toda variedad lineal de dimensión r en un espacio afín de dimensión n queda determinada por el conjunto de soluciones de un sistema de $n - r$ ecuaciones lineales y n incógnitas, donde el rango de la matriz de coeficientes es $n - r$. Por la proposición 1.2.16, unas ecuaciones del subespacio dirección U de L en la base $B_{\mathcal{R}}$ están dadas por el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado al sistema de ecuaciones lineales de L en $\mathcal{R}$.

Demostración. Se tiene que $P \in L$ si, y solo si, $\overrightarrow{AP} \in U$, es decir,

$$P \in L \iff \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} \in U \iff \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\, v_i \in \Big\langle \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ir}\, v_i \Big\rangle,$$

luego

$$P \in L \iff \operatorname{rango} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - a_n & a_{n1} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} = r. \qquad \square$$

1.2.20. ***Observación.*** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y L una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r. El menor número de ecuaciones lineales de un sistema de ecuaciones lineales de L es $n - r$. En efecto, por 1.2.19, las coordenadas de los puntos de L son el conjunto de soluciones de un sistema de $n - r$ ecuaciones lineales y n incógnitas. Si las coordenadas de los puntos de L son el conjunto de soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas y $\mathcal{A}$ es la matriz de coeficientes de este sistema, entonces por la proposición 1.2.16, $\dim L = n - \operatorname{rango} \mathcal{A} \geq n - m$; luego, $m \geq n - r$.

1.2.21. **Ejemplo.** Una ecuación lineal del plano $\Pi = (0,1,1) + \langle (1,1,1),(1,0,2)\rangle$ del ejemplo 1.2.18 en la referencia canónica se obtiene de la siguiente forma:

$$(x,y,z) \in \Pi \iff \operatorname{rango}\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dim \Pi = 2 \iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x-y-z+2=0.$$

Sea P el punto de coordenadas (x',y',z') en la referencia $\mathcal{R} = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,1,1);\ (1,1,1)\}$. Una ecuación lineal del plano Π en $\mathcal{R}$ se obtiene de la siguiente forma:

$$P \in \Pi \iff \begin{vmatrix} x' & -1/2 & 0 \\ y' & -1/2 & -2 \\ z'-1 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x' - y' - 2z' + 2 = 0.$$

También se puede calcular una ecuación lineal de Π en $\mathcal{R}$ a partir de su ecuación lineal en la referencia canónica y de las ecuaciones del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}$ a la referencia canónica (1.2.15).

1.2.22. **Ejemplo.** Sea H el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación en la referencia canónica es $x+y+z+t=2$. Sea L la recta de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$L \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + z = 4 \\ t = 0. \end{cases}$$

Se tiene que $L \subset H$ y que los puntos $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$ y $(0,1,0,1)$ son puntos de H afínmente independientes. Vamos a calcular unas ecuaciones lineales de la recta L en la referencia

$$\mathcal{R} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1);(0,1,0,1)\}$$

de H. Las coordenadas del punto $(0,-2,4,0)$ de L en $\mathcal{R}$ son $(0,1,3)$ y las coordenadas del vector $(1,1,-2,0)$ de la dirección de L en la base $B_{\mathcal{R}} = ((1,0,0,-1),(0,0,1,-1),(0,-1,1,0))$ son $(1,-1,-1)$. Si P es el punto de coordenadas (x',y',z') en $\mathcal{R}$, entonces

$$P \in L \iff \operatorname{rango}\begin{pmatrix} x' & 1 \\ y'-1 & -1 \\ z'-3 & -1 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{vmatrix} x' & 1 \\ y'-1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x' & 1 \\ z'-3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

luego

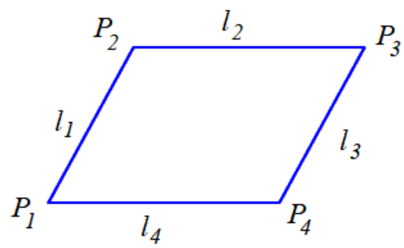
$$P \in L \iff L \equiv \begin{cases} x' + y' - 1 = 0 \\ x' + z' - 3 = 0. \end{cases}$$

También se pueden calcular unas ecuaciones lineales de L en $\mathcal{R}$ a partir de las ecuaciones de L en la referencia canónica y de las ecuaciones del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}$ de H a la referencia canónica (proposición 1.2.14). Obsérvese que 3 el número mínimo de ecuaciones lineales de L como variedad lineal de $\mathbb{R}^4$ y que 2 es el número mínimo de ecuaciones lineales de L como variedad lineal de H.

1.2.23. **Definición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Sean P_1, P_2, P_3 yP_4 cuatro puntos distintos y l_1, l_2, l_3 y l_4 cuatro rectas distintas. Se dice que los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 son los *vértices del paralelogramo de lados* l_1, l_2, l_3, l_4 si se verifican las siguientes condiciones:

(1) $l_1 \parallel l_3$, $l_2 \parallel l_4$.

(2) $l_1 \cap l_4 = \{P_1\}$, $l_1 \cap l_2 = \{P_2\}$, $l_2 \cap l_3 = \{P_3\}$, $l_3 \cap l_4 = \{P_4\}$.



Las longitudes de los lados opuestos de un paralelogramo se pueden comparar, ya que los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos. La siguiente proposición demuestra que los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud.

1.2.24. **Lema.** Sean P_1, P_2, P_3, P_4 los vértices de un paralelogramo. Se tiene

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}\,, \quad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}.$$

Demostración. Dado que $P_1 \circ P_2 \parallel P_4 \circ P_3$ y $P_1 \circ P_4 \parallel P_2 \circ P_4$, existen escalares $a, b \in K$ tales que $\overrightarrow{P_1\,P_2} = a\,\overrightarrow{P_4\,P_3}$ y $\overrightarrow{P_1\,P_4} = b\,\overrightarrow{P_2\,P_3}$. Veamos que $a = b = 1$. Por la relación de Chasles,

$$\overrightarrow{P_1\,P_2} + \overrightarrow{P_2\,P_3} = \overrightarrow{P_1\,P_3} = \overrightarrow{P_1\,P_4} + \overrightarrow{P_4\,P_3},$$

y por lo tanto

$$a\,\overrightarrow{P_4\,P_3} + \overrightarrow{P_2\,P_3} = b\,\overrightarrow{P_2, P_3} + \overrightarrow{P_4\,P_3},$$

de donde se sigue

$$(a-1)\,\overrightarrow{P_4\,P_3} + (1-b)\,\overrightarrow{P_2\,P_3} = 0.$$

Dado que $l_2 \cap l_3 = \{P_3\}$, los vectores $\overrightarrow{P_4\,P_3}$ y $\overrightarrow{P_2\,P_3}$ son linealmente independientes, luego $a = b = 1$. $\square$

1.3. Aplicaciones afines

En esta sección consideraremos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. La geometría afín estudia las propiedades que se conservan por isomorfismos afines. Si $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$, el teorema fundamental de la geometría afín [14] afirma que los isomorfismos afines de un espacio afín de dimensión finita $n \geq 2$ sobre un espacio vectorial son las aplicaciones biyectivas que llevan puntos alineados en puntos alineados. Damos la definición algebraica de isomorfismo afín y estudiamos sus propiedades algebraicas y geométricas; entre los isomorfismos afines destacan las traslaciones y las homotecias que en espacios afines de dimensión $n \geq 2$ son las aplicaciones biyectivas que llevan cada recta en una recta paralela.

- GRUPO AFÍN

1.3.1. **Definición.** Sean V y V' espacios vectoriales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre V y V', respectivamente, y O un punto de $\mathbb{A}$. Se dice que una aplicación $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es *afín* si la aplicación $\overrightarrow{\alpha}\colon V \to V'$ dada por

$$\overrightarrow{\alpha}(v) = \overrightarrow{\alpha(O), \alpha(O+v)}, \quad v \in V,$$

es una aplicación lineal.

1.3.2. **Lema.** Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín, entonces

$$\overrightarrow{\alpha}(v) = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)}, \quad v \in V,$$

para cada $P \in \mathbb{A}$.

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)} &= \overrightarrow{\alpha(O+\overrightarrow{OP}), \alpha(O+\overrightarrow{OP}+v)} = \overrightarrow{\alpha(O+\overrightarrow{OP}), \alpha(O)} + \overrightarrow{\alpha(O), \alpha(O+\overrightarrow{OP}+v)} \\ &= -\overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{OP}+v) = \overrightarrow{\alpha}(v).\end{aligned}$$

$\square$

1.3.3. **Definición.** Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín, la aplicación lineal $\overrightarrow{\alpha}\colon V \to V'$ se llama la *aplicación lineal asociada* a α.

Se dice que la aplicación afín $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es un *isomorfismo de espacios afines* si existe una aplicación afín $\beta\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ tal que $\beta\circ\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ y $\alpha\circ\beta = \mathrm{id}_{\mathbb{A}'}$; los isomorfismos de espacios afines se llaman *afinidades*. Se dice que los espacios afines $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ son *isomorfos* si existe una afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$.

1.3.4. **Lema.** Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín, entonces $\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{PQ})$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

Demostración. Si $v = \overrightarrow{PQ}$, se tiene $\overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+\overrightarrow{PQ})} = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)}$. $\square$

1.3.5. **Proposición.** Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente.

(1) Si A es un punto de $\mathbb{A}$, A' un punto de $\mathbb{A}'$ y $f\colon V \to V'$ una aplicación lineal, entonces la aplicación $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es f.

(2) Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín y $A \in \mathbb{A}$, entonces $\alpha(P) = \alpha(A) + \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{AP})$, para cada $P \in \mathbb{A}$.

(3) Toda aplicación afín $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ está determinada conocida la imagen de un punto y su aplicación lineal asociada.

Demostración. (1) La aplicación $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$ es una aplicación afín. En efecto, para cada $v \in V$,

$$\overrightarrow{\alpha}(v) = \overrightarrow{\alpha(O), \alpha(O+v)} = \overrightarrow{A' + f(\overrightarrow{AO}), A' + f(\overrightarrow{A, O+v})} = -f(\overrightarrow{AO}) + f(\overrightarrow{A, O+v}) = f(\overrightarrow{O, O+v}) = f(v).$$

(2) Dado que $\overrightarrow{\alpha(A), \alpha(P)} = \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{AP})$, se tiene que $\alpha(P) = \alpha(A) + \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{AP})$.

(3) Se sigue de (2). $\square$

1.3.6. **Ejemplo.** La aplicación afín $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\alpha(1,0,1) = (2,-1,1,0)$ y cuya aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{\alpha}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{\alpha}(x,y,z) = (x, 2y-z, 0, x+y+z)$, es la aplicación dada por

$$\begin{aligned}\alpha(x,y,z) =&(2,-1,1,0) + \overrightarrow{\alpha}(x-1,y,z-1) = (2,-1,1,0) + (x-1,\ 2y-z+1,\ 0,\ x+y+z-2)\\ =&(1+x,\ 2y-z,\ 1,\ -2+x+y+z).\end{aligned}$$

1.3.7. **Proposición.**

(1) Si $\alpha_1\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ y $\alpha_2\colon \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ son aplicaciones afines, entonces $\alpha_2 \circ \alpha_1$ es una aplicación afín.

(2) $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín.

(3) El conjunto
$$G(\mathbb{A}) = \{\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid \alpha \text{ afinidad}\}$$
es un grupo con la operación composición.

Demostración. (1) Sea $O \in \mathbb{A}$, para cada $v \in V$,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1})(v) =&\overrightarrow{(\alpha_2 \circ \alpha_1)(O), (\alpha_2 \circ \alpha_1)(O+v)} = \overrightarrow{\alpha_2(\alpha_1(O)), \alpha_2(\alpha_1(O) + \overrightarrow{\alpha_1}(v))}\\ =&\overrightarrow{\alpha_2}(\overrightarrow{\alpha_1}(v)) = (\overrightarrow{\alpha_2} \circ \overrightarrow{\alpha_1})(v),\end{aligned}$$

luego $\overrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1} = \overrightarrow{\alpha_2} \circ \overrightarrow{\alpha_1}$ es una aplicación lineal.

(2) La aplicación identidad $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(P) = P$ para cada $P \in P$, es una aplicación afín con aplicación lineal asociada id_V.

(3) Se sigue de (1) y (2). □

El grupo $(G(\mathbb{A}), \circ)$ se llama *grupo afín* de $\mathbb{A}$ y se denota simplemente por $G(\mathbb{A})$.

1.3.8. **Proposicion.**

(1) Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V y $v \in V$. La aplicación *traslación por el vector* v, dada por

$$\begin{aligned}t_v\colon \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A}\\ P &\longmapsto P+v,\end{aligned}$$

es una afinidad.

(2) El conjunto
$$T(\mathbb{A}) = \{t_v\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid v \in V\}$$
es un grupo abeliano con la operación composición.

Demostración. (1) Si O es un punto de $\mathbb{A}$, entonces

$$\overrightarrow{t_v}(w) = \overrightarrow{t_v(O), t_v(O+w)} = \overrightarrow{O+v, O+w+v} = w, \quad w \in V.$$

Así, t_v es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es id_V; además, t_v es una afinidad, puesto que $(t_v)^{-1} = t_{-v}$ es una aplicación afín.

(2) Se sigue de las siguientes igualdades: $t_{v+v'} = t_{v'} \circ t_v$, $\quad t_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ y $t_{-v} = (t_v)^{-1}$. □

El grupo $(T(\mathbb{A}), \circ)$ se llama *grupo de traslaciones* de $\mathbb{A}$ y se denota por $T(\mathbb{A})$.

1.3.9. **Proposición.**

(1) Sea $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Son equivalentes:

  (a) α es una afinidad,

  (b) α es una aplicación biyectiva,

  (c) $\overrightarrow{\alpha}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(2) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente, $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' = n$. Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín y $P_1, \ldots, P_{n+1}$ puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes. Entonces α es una afinidad si, y solo si, $\alpha(P_1), \ldots, \alpha(P_{n+1})$ son puntos afínmente independientes.

(3) Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Se tiene:

  (a) Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\alpha(L)$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}'$.

  (b) Si α es una afinidad y L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\dim \alpha(L) = \dim L$.

  (c) Si $\{L_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

$$\alpha(\circ_{i\in I} L_i) = \circ_{i\in I}\, \alpha(L_i),$$

  y si α es una afinidad,

$$\alpha(\bigcap_{i\in I} L_i) = \bigcap_{i\in I} \alpha(L_i).$$

  (d) Si α es una afinidad y L_1 y L_2 son variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

$$L_1 \parallel L_2 \iff \alpha(L_1) \parallel \alpha(L_2).$$

Demostración. (1) (a) $\Rightarrow$ (b) Trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Veamos que $\overrightarrow{\alpha}$ es inyectiva. Sea $v \in V$ tal que $\overrightarrow{\alpha}(v) = 0$. Se tiene

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)} = \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{P, P+v}) = \overrightarrow{\alpha}(v) = 0,$$

luego $\alpha(P+v) = \alpha(P)$. Por ser α inyectiva, $P = P + v$, y por la proposición 1.1.2 (7) y (9), $v = 0$. Para probar que $\overrightarrow{\alpha}$ es suprayectiva tomamos $v' \in V'$ y $P' \in \mathbb{A}'$. Sean $P, Q \in \mathbb{A}$ tales que $\alpha(P) = P'$ y $\alpha(Q) = P' + v'$. Entonces

$$v' = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{PQ}).$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Sean $A \in \mathbb{A}$ y $\beta : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ la aplicación afín dada por

$$\beta(P') = A + \overrightarrow{\alpha}^{-1}(\overrightarrow{\alpha(A), P'}), \quad P' \in \mathbb{A}'.$$

Es inmediato que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ y $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathbb{A}'}$.

(2) Sean $P_1, \dots, P_{n+1}$ puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes. Dado que α es una afinidad si, y solo si, $\overrightarrow{\alpha}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, y que $\overrightarrow{\alpha}$ es un isomorfismo si, y solo si, los vectores

$$\overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{\alpha(P_1), \alpha(P_2)}, \dots, \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{P_1P_{n+1}}) = \overrightarrow{\alpha(P_1), \alpha(P_{n+1})},$$

son linealmente independientes, α es una afinidad si, y solo si, los puntos $\alpha(P_1), \dots, \alpha(P_{n+1})$ son afínmente independientes.

(3) (a) Si $L = A + U$, entonces $\alpha(L) = \alpha(A) + \overrightarrow{\alpha}(U)$.

(3) (b) Si α es una afinidad, $\dim L = \dim_K U = \dim_K \overrightarrow{\alpha}(U) = \dim \alpha(L)$.

(3) (c) Dado que

$$\circ_{i\in I} L_i = A + \langle \overrightarrow{AP} \mid P \in \bigcup_{i\in I} L_i \rangle, \quad A \in \bigcup_{i\in I} L_i,$$

se tiene

$$\alpha(\circ_{i\in I} L_i) = \alpha(A) + \langle \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{AP}) \mid P \in \bigcup_{i\in I} L_i \rangle = \alpha(A) + \langle \overrightarrow{\alpha(A), \alpha(P)} \mid \alpha(P) \in \bigcup_{i\in I} \alpha(L_i) \rangle = \circ_{i\in I} \alpha(L_i).$$

Si α es una afinidad, entonces $\alpha(\bigcap_{i\in I} L_i) = \bigcap_{i\in I} \alpha(L_i)$, puesto que α es inyectiva.

(3) (d) Sean $L_1 = A + U_1$, $L_2 = B + U_2$ y α una afinidad. Entonces

$$L_1 \parallel L_2 \iff U_1 \subset U_2 \text{ o } U_2 \subset U_1 \iff \overrightarrow{\alpha}(U_1) \subset \overrightarrow{\alpha}(U_2) \text{ o } \overrightarrow{\alpha}(U_2) \subset \overrightarrow{\alpha}(U_1) \iff \alpha(L_1) \parallel \alpha(L_2). \quad \square$$

El conjunto

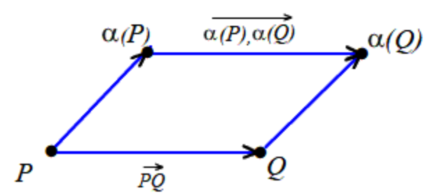
$$GL(V) = \{ f \colon V \to V \mid f \text{ isomorfismo de espacios vectoriales } \}$$

es un grupo con la operación composición. El grupo $(GL(V), \circ)$ se llama *grupo lineal general* de V y se denota por $GL(V)$.

1.3.10. **Lema.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V y $\alpha \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín. Si $\overrightarrow{\alpha} = \mathrm{id}_V$, entonces α es una traslación.

Demostración. Para cada $P, Q \in \mathbb{A}$,

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \overrightarrow{PQ}$$



y por la relación del paralelogramo,

$$\overrightarrow{P, \alpha(P)} = \overrightarrow{Q, \alpha(Q)}.$$

Pongamos $v = \overrightarrow{P, \alpha(P)}$,

$$\alpha(P) = P + \overrightarrow{P, \alpha(P)} = P + v = t_v(P), \quad P \in \mathbb{A}. \qquad \square$$

1.3.11. **Teorema.** Los grupos $G(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})$ y $GL(V)$ son isomorfos.

Demostración. Si α es una afinidad, por la proposición 1.3.9 (1) su aplicación lineal asociada es un isomorfismo de espacios vectoriales. La aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon G(\mathbb{A}) &\longrightarrow GL(V) \\ \alpha &\longmapsto \overrightarrow{\alpha} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos suprayectivo cuyo núcleo es $T(\mathbb{A})$. En efecto, si $\alpha \in \mathrm{Nuc}(\phi)$, entonces $\overrightarrow{\alpha} = \mathrm{id}_V$ y, por el lema anterior, $\alpha \in T(\mathbb{A})$. La aplicación ϕ es suprayectiva, puesto que si $f \in GL(V)$, la aplicación afín $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $\alpha(P) = A + f(\overrightarrow{AP})$, donde $A \in \mathbb{A}$, es una afinidad por las proposiciones 1.3.5 (1) y 1.3.9 (1) y verifica que $\overrightarrow{\alpha} = f$. Por tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{\phi}\colon G(\mathbb{A})/T(\mathbb{A}) &\longrightarrow GL(V) \\ \alpha \circ T(\mathbb{A}) &\longmapsto \overrightarrow{\alpha} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

1.3.12. **Ejemplos.**

(1) Si $L = P + U$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces la aplicación inclusión $i_L\colon L \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín; su aplicación lineal asociada es la aplicación inclusión $i_U : U \to V$.

(2) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia afín de $\mathbb{A}$ y $B_{\mathbb{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$. La aplicación

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{R}}\colon \mathbb{A} &\longrightarrow K^n \\ P &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

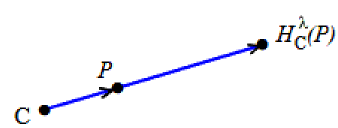
donde $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de P en $\mathcal{R}$, es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es la aplicación

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha_{\mathcal{R}}}\colon V &\longrightarrow K^n \\ \sum_{i=1}^{n} z_i v_i &\longmapsto (z_1, \ldots, z_n). \end{aligned}$$

En particular, si $\mathbb{A}$ es el plano (resp. espacio) afín ordinario y $\mathcal{C}$ es la referencia canónica, la afinidad $\alpha_{\mathcal{C}}$ permite identificar el plano (resp. espacio) ordinario con $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

(3) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, C un punto de $\mathbb{A}$ y $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Se llama *homotecia* de *centro* C y *razón* λ a la aplicación

$$\begin{aligned} H_C^{\lambda}\colon \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ P &\longmapsto C + \lambda\, \overrightarrow{CP}. \end{aligned}$$



La aplicación $\lambda\,\mathrm{id}_V\colon V\to V$, $(\lambda\,\mathrm{id}_V)(v)=\lambda\,v$ para todo $v\in V$, es un isomorfismo de espacios vectoriales y $H_C^\lambda(P)=C+(\lambda\,\mathrm{id}_V)(\overrightarrow{C\,P})$. Por las proposiciones 1.3.5 (1) y 1.3.9 (1), H_C^λ es una afinidad.

(4) Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y $f\colon V\to V'$ una aplicación lineal. La aplicación f considerada como aplicación entre los espacios afines de V y V' es una aplicación afín. En efecto,

$$\overrightarrow{f}(v)=\overrightarrow{f(0),f(0+v)}=f(v)-f(0)=f(v),\quad v\in V,$$

donde 0 es el vector cero de V.

(5) Si V y V' son espacios vectoriales, $v'\in V'$ y $f\colon V\to V'$ es una aplicación lineal, entonces $t_{v'}\circ f$ es una aplicación afín entre los espacios afines de V y V', respectivamente, por ser composición de aplicaciones afines. Recíprocamente, si $\alpha\colon V\to V'$ es una aplicación afín, entonces existe un vector $v'\in V'$ tal que $\alpha=t_{v'}\circ\overrightarrow{\alpha}$. En efecto, por la proposición 1.3.5 (2),

$$\alpha(P)=\alpha(0)+\overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{0P})=(t_{\alpha(0)}\circ\overrightarrow{\alpha})(P),\quad P\in V.$$

Basta tomar $v'=\alpha(0)$.

1.3.13. **Teorema.**

(1) Todo espacio afín $(\mathbb{A},V,\to)$ es isomorfo al espacio afín de V.

(2) Dos espacios afines de igual dimensión finita son isomorfos.

Demostración. (1) Fijemos un punto A de $\mathbb{A}$. La aplicación $\alpha_A\colon\mathbb{A}\to V$ dada por $\alpha_A(P)=\overrightarrow{A\,P}$ es una afinidad, En efecto,

$$\overrightarrow{\alpha_A}(v)=\overrightarrow{\alpha_A(O),\alpha_A(O+v)}=\alpha_A(O+v)-\alpha_A(O)=\overrightarrow{A,\,O+v}-\overrightarrow{A\,O}=\overrightarrow{O,\,O+v}=v.$$

Así, $\overrightarrow{\alpha_A}=\mathrm{id}_V$.

(2) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de la misma dimensión sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Por (1), existen afinidades $\alpha\colon\mathbb{A}\to V$ y $\beta\colon\mathbb{A}'\to V'$. Si $f\colon V'\to V$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, la aplicación $\beta^{-1}\circ f\circ\alpha\colon\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ es una afinidad. □

1.3.14. **Corolario.** Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín sobre V, el grupo $G(\mathbb{A})$ es isomorfo a $G(V)$.

Demostración. Sea $\varphi\colon\mathbb{A}\to V$ una afinidad. La aplicación $\Psi\colon G(\mathbb{A})\to G(V)$, $\Psi(\alpha)=\varphi\circ\alpha\circ\varphi^{-1}$, es un isomorfismo de grupos. □

• DETERMINACIÓN DE UNA APLICACIÓN AFÍN

1.3.15. **Teorema.** Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente, $\dim\mathbb{A}=n$. Sean $P_1,\dots,P_{n+1}$ son puntos de de $\mathbb{A}$ afínmente independientes y $P'_1,\dots,P'_{n+1}$ puntos de $\mathbb{A}'$. Existe una única aplicación afín $\alpha\colon\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ tal que $\alpha(P_i)=P'_i$, $i=1,\dots,n+1$. En particular, si $\dim\mathbb{A}'=n$ y $P'_1,\dots,P'_{n+1}$ son puntos afínmente independientes, entonces α es una afinidad.

Demostración. Consideremos la aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} f\colon V &\longrightarrow V' \\ \overrightarrow{P_1P_i} &\longmapsto \overrightarrow{P_1'P_i'}, \end{aligned}$$

y la aplicación afín

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A}' \\ P &\longmapsto P_1' + f(\overrightarrow{P_1P}). \end{aligned}$$

Se tiene

$$\alpha(P_i) = P_i', \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Sea $\beta\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ otra aplicación afín tal que $\beta(P_i) = P_i'$, $i = 1, \ldots, n+1$. Entonces

$$\overrightarrow{P_1'P_i'} = \overrightarrow{\beta(P_1), \beta(P_i)} = \overrightarrow{\beta}(\overrightarrow{P_1P_i}), \quad i = 2, \ldots, n+1.$$

Por tanto, $\overrightarrow{\beta} = f = \overrightarrow{\alpha}$ y por la proposición 1.3.5 (3), $\beta = \alpha$. Si $\dim \mathbb{A} = n$ y $P_1', \ldots, P_{n+1}'$ son afínmente independientes, por la proposición 1.3.9 (2) se tiene que α es una afinidad. $\square$

1.3.16. **Corolario.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V, $\dim \mathbb{A} = n$, y $P_1, \ldots, P_{n+1}$ puntos de A afínmente independientes. Se tiene:

(1) Si $\alpha, \beta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ son aplicaciones afines tales que $\alpha(P_i) = \beta(P_i)$, para $i = 1, \ldots, n+1$, entonces $\alpha = \beta$.

(2) Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín tal que $\alpha(P_i) = P_i$, para $i = 1, \ldots, n+1$, entonces $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$.

1.3.17. **Ejemplo.** Existe una única aplicación afín $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(0,0,0) = (1,0,2)$, $\alpha(1,0,0) = (2,1,2)$, $\alpha(1,1,0) = (2,0,2)$ y $\alpha(0,1,-1) = (1,1,1)$, puesto que los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,-1)$ son afínmente independientes. La aplicación lineal asociada a α es la aplicación $\overrightarrow{\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\overrightarrow{\alpha}(1,0,0) = (1,1,0),\ \overrightarrow{\alpha}(1,1,0) = (1,0,0),\ \overrightarrow{\alpha}(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

Se tiene que $\overrightarrow{\alpha}(x,y,z) = (x, x-y-2z, z)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(x,y,z) =& \alpha(0,0,0) + \overrightarrow{\alpha}(x,y,z) \\ =& (1,0,2) + (x, x-y-2z, z) = (1+x, x-y-2z, 2+z). \end{aligned}$$

Además, α es una afinidad, puesto que los puntos $(1,0,2)$, $(2,1,2)$, $(2,0,2)$ y $(1,1,1)$ son afínmente independientes.

1.3.18. **Proposición.** Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín, L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r y α deja fijos $r+1$ puntos afínmente independientes de L, entonces α deja fijos todos los puntos de L.

Demostración. Sean $L = A + U$ y $P_1, \ldots, P_{r+1}$ puntos de L afínmente independientes y tales que $\alpha(P_i) = P_i$, para $i = 1, \ldots, r+1$. Se tiene que $L = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$ y entonces, por la proposición 1.3.9 (3) (c), $\alpha(L) = \alpha(P_1) \circ \ldots \circ \alpha(P_{r+1}) = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1} = L$. Veamos que $\alpha_{|L}\colon L \to L$ es una aplicación afín. Dado que

$$\overrightarrow{\alpha_{|L}}(u) = \overrightarrow{\alpha(P_1), \alpha(P_1+u)} = \overrightarrow{\alpha}(u), \qquad u \in U,$$

y que $\overrightarrow{\alpha}(u) \in U$, puesto que $\alpha(P_1), \alpha(P_1+u) \in L$, se tiene que $\overrightarrow{\alpha_{|L}} = \overrightarrow{\alpha}_{|U}$ es una aplicación lineal. Por el corolario 1.3.16 (2), $\alpha_{|L} = \mathrm{id}_L$. $\square$

1.3.19. **Ejemplo.** Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es $y - 2z = 2$. Vamos a calcular la afinidad $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que deja fijos los puntos del plano Π y tal que $\alpha(1,0,0) = (0,0,0)$.

La aplicación buscada es la aplicación afín dada por

$$\alpha(1,0,0) = (0,0,0), \quad \alpha(1,2,0) = (1,2,0), \quad \alpha(0,0,-1) = (0,0,-1), \quad \alpha(0,2,0) = (0,2,0).$$

Su aplicación lineal asociada es la aplicación $\overrightarrow{\alpha}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\overrightarrow{\alpha}(0,2,0) = (1,2,0), \quad \overrightarrow{\alpha}(-1,0,-1) = (0,0,-1), \quad \overrightarrow{\alpha}(-1,2,0) = (0,2,0),$$

equivalentemente, $\overrightarrow{\alpha}(x,y,z) = (x + 1/2\ y - z, y, z)$, luego

$$\alpha(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \overrightarrow{\alpha}(x-1,y,z) = (-1 + x + 1/2\ y - z, y, z).$$

La afinidad α deja fijos los puntos de Π, puesto que deja fijos los puntos $(1,2,0)$, $(0,0,-1)$ y $(0,2,0)$, que son tres puntos de Π afínmente independientes.

1.3.20. **Definición.** Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V y $B' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ una base de V'. Si $f\colon V \to V'$ es una aplicación lineal y

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, v'_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

la matriz

$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se llama *matriz asociada a f respecto* a las bases B y B'. Si $V = V'$ y $B = B'$ denotaremos $f_{BB'}$ por f_B.

1.3.21. **Ecuaciones de una aplicación afín.** Sean V un espacio vectorial de dimensión n y V' un espacio vectorial de dimensión m. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre V y V', respectivamente, y $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Sean $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R}' = \{P'_1, \ldots, P'_m; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}'$, $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B_{\mathcal{R}'} = (v'_1, \ldots, v'_m)$. Si (a_{ij}) es la matriz asociada a $\overrightarrow{\alpha}$ respecto a las bases $B_{\mathcal{R}}$ y $B_{\mathcal{R}'}$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas del punto $P \in \mathbb{A}$ en $\mathcal{R}$ y $(x'_1, \ldots, x'_m)$ son las coordenadas de $\alpha(P)$ en $\mathcal{R}'$, entonces

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde $(b_1, \ldots, b_m)$ son las coordenadas de $\alpha(Q)$ en $\mathcal{R}'$. Esta ecuación se llama *ecuación matricial* de la aplicación afín α en las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

Demostración.

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i, \quad \overrightarrow{Q'\alpha(P)} = \sum_{i=1}^{m} x'_i\, v'_i, \quad \overrightarrow{\alpha}(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, v'_i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Puesto que $\overrightarrow{Q'\alpha(P)} = \overrightarrow{Q'\alpha(Q)} + \overrightarrow{\alpha(Q)\alpha(P)} = \overrightarrow{Q'\alpha(Q)} + \overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{QP})$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i\, v'_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\, v'_i + \overrightarrow{\alpha}(\sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_i\, v'_i + \sum_{j=1}^{n} x_j\, (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, v'_i) = \sum_{i=1}^{m} (b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)\, v'_i,$$

de donde se sigue

$$x'_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad \square$$

Como consecuencia, se obtiene la ecuación del cambio de coordenadas ya estudiado en 1.2.15. En efecto, la ecuación del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}$ a la referencia $\mathcal{R}'$ es la ecuación de la afinidad $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}} \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ en las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$. Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R}'$ es una referencia de L y $\mathcal{R}$ es una referencia de $\mathbb{A}$, la ecuación de cambio de coordenadas de los puntos de L de la referencia $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es la ecuación de inclusión $i_L \colon L \to \mathbb{A}$ en las referencias $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}$.

- EJEMPLOS DE AFINIDADES. DILATACIONES

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre un espacio vectorial V, $\dim \mathbb{A} \geq 2$.

1.3.22. **Definición.** ([11, p. 37]) Se dice que $D \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una *dilatación* si D es una aplicación biyectiva tal que para toda recta L de $\mathbb{A}$ se tiene que $\alpha(L)$ es una recta y $\alpha(L) \parallel L$.

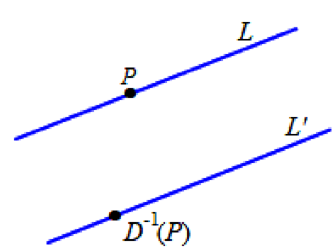
Denotaremos por $\mathrm{Di}(\mathbb{A})$ el conjunto de todas las dilataciones del espacio $\mathbb{A}$.

1.3.23. **Proposición.** El conjunto $\mathrm{Di}(\mathbb{A})$ es un grupo con la operación composición.

Demostración. Si $D_1, D_2 \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$, entonces $D_2 \circ D_1$ es una aplicación biyectiva. Además, si L es una recta de $\mathbb{A}$, $D_1(L)$ es una recta paralela a L, por ser D_1 una dilatación y $D_2((D_1(L)) \parallel D_1(L)$, por ser D_2 una dilatación. Por la transitividad de la relación de paralelismo en el conjunto de rectas de $\mathbb{A}$, $(D_2 \circ D_1)(L) \parallel L$. Luego $D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$.

Claramente, $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$.

Sea $D \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$ y veamos que $D^{-1} \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$. Sea L una recta de $\mathbb{A}$ y $P \in L$. Por el axioma de paralelismo existe una única recta L' tal que $D^{-1}(P) \in L'$ y $L' \parallel L$. Por ser D una dilatación, $D(L')$ es una recta paralela a L' y pasa por $D(D^{-1}(P) = P$. Por el axioma de paralelismo, $L = D(L')$. Así, $D^{-1}(L) = L'$, luego $D^{-1}(L) \parallel L$.



$\square$

1.3.24. **Proposición.** Sea $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad y $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Si $\overrightarrow{\alpha} = \lambda\,\mathrm{id}_V$, entonces α es una dilatación; en particular, las traslaciones y las homotecias de $\mathbb{A}$ son dilataciones.

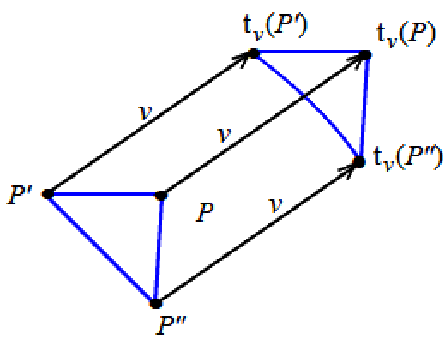
Demostración. Si $\lambda\,\mathrm{id}_V$ es la aplicación lineal asociada a α y $L = A + \langle v\rangle$ es una recta de $\mathbb{A}$, entonces

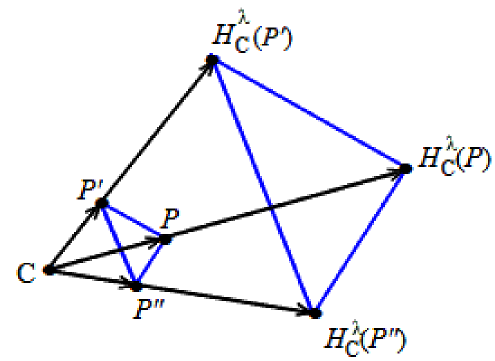
$$\alpha(L) = \alpha(A) + \langle \lambda\, v\rangle = \alpha(A) + \langle v\rangle,$$

luego $\alpha(L)$ es una recta paralela a L. $\square$

1.3.25. **Definición.** Una *configuración* o *figura* en $\mathbb{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{A}$. Se dice que dos figuras en $\mathbb{A}$ son *homotéticas* si existe una dilatación que lleva una figura en la otra.

Los dos triángulos en azul de la figura de la izquierda son homotéticos y los dos triángulos en azul de la figura de la derecha también lo son.





1.3.26. **Lema.** Si $D \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$ y L_1 y L_2 son rectas de $\mathbb{A}$ paralelas, entonces las rectas $D(L_1)$ y $D(L_2)$ son paralelas.

Demostración. Dado que $D(L_1) \parallel L_1$, $L_1 \parallel L_2$ y $L_2 \parallel D(L_2)$, por la transitividad del paralelismo en rectas se tiene $D(L_1) \parallel D(L_2)$. $\square$

1.3.27. **Teorema.** Si $D \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$, entonces existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, tal que D es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es $\lambda\,\mathrm{id}_V$.

Demostración. Sean $v \in V$ y $P \in \mathbb{A}$. Consideremos la aplicación $\overrightarrow{D}\colon V \to V$ dada por

$$\overrightarrow{D}(v) = \overrightarrow{D(P), D(P+v)}, \quad v \in V.$$

Veamos que $\overrightarrow{D}$ no depende del punto $P \in \mathbb{A}$. Si $v = 0$,

$$\overrightarrow{D(P), D(P+0)} = \overrightarrow{D(P), D(P)} = 0, \quad P \in \mathbb{A}.$$

Sea $v \neq 0$ y sean $P, Q \in \mathbb{A}$. Veamos que:

$$\overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \overrightarrow{D(Q), D(Q+v)}.$$

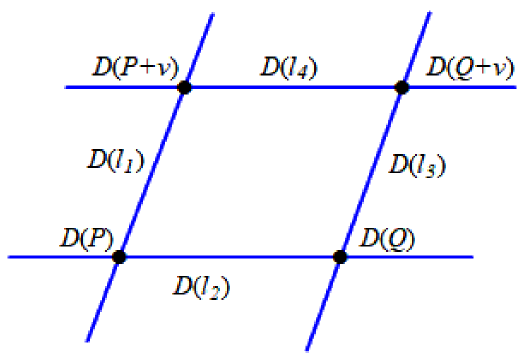
Caso 1: Si $Q \notin P + \langle v \rangle = l_1$, se tiene

$$l_1 = P \circ (P+v) \parallel l_3 = Q \circ (Q+v)\,, \quad l_2 = P \circ Q \parallel l_4 = (P+v) \circ (Q+v), \quad l_1 \neq l_3, \quad l_2 \neq l_4,$$
$$l_1 \cap l_2 = \{P\}, \quad l_2 \cap l_3 = \{Q\}, \quad l_3 \cap l_4 = \{Q+v\}, \quad l_1 \cap l_4 = \{P+v\}.$$

Por el lema 1.3.26, puesto que D lleva rectas a rectas,

$$D(l_1) = D(P) \circ D(P+v) \parallel D(l_3) = D(Q) \circ D(Q+v),$$
$$D(l_2) = D(P) \circ D(Q) \parallel D(l_4) = D(P+v) \circ D(Q+v).$$

Por la definición 1.2.23, los puntos $D(P)$, $D(P+v)$, $D(Q+v)$ y $D(Q)$ son los vértices del paralelogramo de lados $D(l_1)$, $D(l_4)$, $D(l_3)$ y $D(l_2)$,



y entonces, por la proposición 1.2.24,

$$\overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \overrightarrow{D(Q), D(Q+v)}.$$

Caso 2: Si $Q \in P + \langle v \rangle$, dado que $\dim \mathbb{A} = n \geq 2$, existe $R \notin P + \langle v \rangle = Q + \langle v \rangle$. Por el caso 1,

$$\overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \overrightarrow{D(R), D(R+v)} = \overrightarrow{D(Q), D(Q+v)}.$$

Puesto que $D(l_1) \parallel l_1$, existe $\lambda_v \in K$ tal que

$$\overrightarrow{D}(v) = \overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \lambda_v\, v.$$

Veamos que para todo $w \in V - \{0\}$, $\lambda_w = \lambda_v$. Si v y w son vectores linealmente independientes

$$\lambda_{v+w}\,(v+w) = \overrightarrow{D(P), D(P+v+w)} = \overrightarrow{D(P), D(P+v)} + \overrightarrow{D(P+v), D(P+v+w)} = \lambda_v\, v + \lambda_w\, w,$$

luego $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Si v y w son linealmente dependientes, entonces $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ y como $\dim V \geq 2$, existe $u \in V$ tal que $u \notin \langle v \rangle$. Los vectores u y v son linealmente independientes y u y w también lo son. Así, $\lambda_v = \lambda_u = \lambda_w$. Por tanto, si $\lambda = \lambda_v$ (cualquiera que sea $v \neq 0$), se tiene $\overrightarrow{D} = \lambda\, \mathrm{id}_V$. $\square$

1.3.28. **Corolario.** Una aplicación $D\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una dilatación si, y solo si, D es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es $\lambda\,\mathrm{id}_V$, para algún $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

Demostración. Se sigue de la proposición 1.3.24 y del teorema 1.3.27. $\square$

1.3.29. **Proposición.** Sea D una dilatación con isomorphismo lineal asociado $\lambda\,\mathrm{id}_V\colon V \to V$. Se tiene:

(1) Si $\lambda = 1$, entonces D es una traslación.

(2) Si $\lambda \neq 1$, entonces D es una homotecia distinta de $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}$. El punto fijo de D es el centro y el escalar λ es la razón.

Demostración. (1) Si $\lambda = 1$, entonces la aplicación lineal asociada a D es id_V. Por el lema 1.3.10, $D = t_v$, donde $v = \overrightarrow{P, D(P)}$ para todo $P \in \mathbb{A}$.

(2) Si $\lambda \neq 1$, entonces el único punto fijo de D es el punto $C = A + (\lambda - 1)^{-1}\overrightarrow{D(A), A}$, siendo A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. En efecto,

$$\begin{aligned} D(P) = P &\iff D(A) + \lambda\,\overrightarrow{AP} = P \iff \overrightarrow{D(A), P} = \lambda\,\overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{D(A), A} + \overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{AP} \\ &\iff \overrightarrow{D(A), A} = (\lambda - 1)\,\overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{AP} = (\lambda - 1)^{-1}\overrightarrow{D(A), A} \\ &\iff P = A + (\lambda - 1)^{-1}\overrightarrow{D(A), A}. \end{aligned}$$

Por la proposición 1.3.5 (2),

$$D(P) = C + (\lambda\,\mathrm{id}_V)(\overrightarrow{CP}) = C + \lambda\,\overrightarrow{CP} = H_C^{\lambda}(P), \quad P \in \mathbb{A}. \qquad \square$$

1.3.30. **Ejemplo.** Vamos a calcular la dilatación $D\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica $D(1,1,-1) = (1,1,1)$ y $D(0,2,2) = (3,-1,-5)$.

Las dilataciones de $\mathbb{R}^3$ son afinidades cuya aplicación lineal asociada es la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda\,1_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Por ser D una aplicación afín,

$$\overrightarrow{D}((0,2,2) - (1,1,-1)) = D(0,2,2) - D(1,1,-1),$$

luego

$$\overrightarrow{D}(-1,1,3) = (2,-2,-6) = (-2)(-1,1,3).$$

Por tanto, $\lambda = -2$ y entonces D es una homotecia de razón -2. Se tiene

$$\begin{aligned} D(x,y,z) =& D(1,1,-1) - 2(x-1, y-1, z+1) = (1,1,1) + (2-2x, 2-2y, -2-2z) \\ =& (3-2x, 3-2y, -1-2z). \end{aligned}$$

El centro de α es el único punto fijo de α, es decir el punto $(1,1,-1/3)$.

1.4. Ejercicios.

(1) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n \geq 4$ sobre un espacio vectorial. Estudia cuales de las propiedades de incidencia de (1.1.28) relativas a puntos, rectas y planos se verifican en $\mathbb{A}$.

(2) Prueba que si L_1 y L_2 son rectas del espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión $n \geq 3$ sobre un espacio vectorial, entonces L_1 y L_2 se cruzan si, y solo si, no son coplanarias.

(3) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n \geq 2$ sobre un espacio vectorial, L una variedad lineal y P un punto de $\mathbb{A}$. Prueba que si $P \notin L$, entonces $\dim(L \circ P) = 1 + \dim L$.

(4) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n \geq 2$ sobre un espacio vectorial, L una variedad lineal no vacía y H un hiperplano tal que $L \nparallel H$. Prueba que $\dim(L \cap H) = \dim L - 1$.

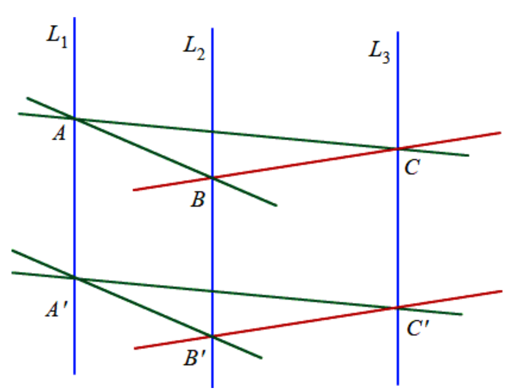
(5) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión 3, L_1 y L_2 rectas que se cruzan y P un punto tal que $P \notin L_1$ y $P \notin L_2$. ¿Existe alguna recta coplanaria con L_1 y con L_2 que pase por P? ¿Para que puntos $P \in \mathbb{A}$ es cierto este resultado si $\dim \mathbb{A} \geq 4$?

(6) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión 3, L_1 y L_2 rectas que se cruzan y P un punto tal que $P \notin L_1$ y $P \notin L_2$. ¿Para que puntos de $\mathbb{A}$ existe una recta que pasa por P y corta a L_1 y a L_2? Estudia el mismo problema cuando $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \neq L_2$.

(7) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V, $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ y $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ su base asociada. Calcula las coordenadas de los puntos $P_1, \ldots, P_n, Q$ y $Q + v_1 + \ldots + v_n$ en $\mathcal{R}$.

(8) Sea K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n \geq 2$ y $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Prueba que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

(9) Teorema de Desargues: Sea $\mathbb{A}$ un plano afín sobre un espacio vectorial. Sean L_1, L_2 y L_3 rectas distintas que son paralelas. Sean $A, A' \in L_1$, $A \neq A'$, $B, B' \in L_2$, $B \neq B'$ y $C, C' \in L_3$, $C \neq C'$. Supongamos que A, B y C no están alineados y que A', B' y C' no están alineados. Prueba que si $A \circ B \parallel A' \circ B'$ y $A \circ C \parallel A' \circ C'$, entonces $B \circ C \parallel B' \circ C'$.



(10) Calcula una referencia de $\mathbb{R}^3$ donde el plano Π cuya ecuación en la referencia canónica es $2x + y - z = 1$ tiene la ecuación $z' = 0$.

(11) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión 3 y sea $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{A}$. Estudia la posición relativa

(a) de dos planos,

(b) de una recta y un plano,

(c) de dos rectas,

según el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada con los términos independientes del sistema de ecuaciones lineales en la referencia $\mathcal{R}$ de sus correspondientes intersecciones.

(12) Estudia la posición relativa de las rectas $L_1 = (-1, 2, 0) + \langle(3, -3, 1)\rangle$ y $L_2 = (0, 2, 0) + \langle(1, -1, 1)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Calcula la recta que pasa por $P = (2, -2, 0)$ y corta a las rectas L_1 y L_2. ¿Existe una recta que pasa por $P' = (1, 1, 0)$ y corta a L_1 y a L_2?

(13) Sean L y L' rectas de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$L \equiv \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \\ t = -1, \end{cases} \qquad L' \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \\ t = \lambda. \end{cases}$$

(a) Estudia la posición relativa de L y L'. Calcula unas ecuaciones lineales de $L \circ L'$.

(b) Calcula unas ecuaciones lineales de la recta que pasa por el punto $(0, 0, -2, -2)$ y es coplanaria con las rectas L y L'.

(c) ¿Existe alguna recta que pasa por el punto $(1, 0, 0, 0)$ y es coplanaria con las rectas L y L'?

(14) Consideremos el espacio afín $\mathbb{R}^3$.

(a) Encuentra los números reales a para los cuales los puntos $P_a = (1, 0, a)$, $Q_a = (0, a - 2, 1)$ y $T = (2, 0, 3)$ están alineados.

(b) Para cada número real a calcula la menor variedad lineal que pasa por los tres puntos del apartado anterior.

(c) Para los valores de a para los cuales P_a, Q_a y T no están alineados, encuentra un punto S tal que los puntos P_a, Q_a, T y S no son coplanarios y calcula unas ecuaciones lineales de la recta $T \circ S$ en la referencia $\mathcal{R} = \{P_a, T, S; Q_a\}$.

(d) Sea Π el plano cuya ecuación en la referencia canónica es $2x - 2y - z - 1 = 0$. Prueba que (P_1, Q_1, T) es una referencia de Π.

(e) Sea r la recta cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

¿Está la recta r contenida en el plano Π? En caso afirmativo, calcula unas ecuaciones lineales de r en $\mathcal{R}' = \{P_1, Q_1; T\}$.

(15) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Prueba que $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín si, y solo si, existe una aplicación lineal $f\colon V \to V'$ tal que

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = f(\overrightarrow{PQ}), \quad P, Q \in \mathbb{A}.$$

(16) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Sea $\mathcal{R} = \{P_1, \dots, P_n; Q\}$ una referencia afín de $\mathbb{A}$ y $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una afinidad. Prueba que el punto $P \in \mathbb{A}$ tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ si, y solo si, $\alpha(P)$ tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la referencia $\alpha(\mathcal{R}) = \{\alpha(P_1), \dots, \alpha(P_n); \alpha(Q)\}$.

(17) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K, $\dim V \geq 2$, y sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V.

(a) Prueba que las homotecias de centro C forman un grupo abeliano con la operación composición isomorfo al grupo $(K^*, \cdot)$.

(b) Prueba que la composición de dos homotecias de distinto centro y razones λ y μ es una homotecia si $\lambda\,\mu \neq 1$ y una traslación si $\lambda\,\mu = 1$.

(c) Sean $\lambda, \mu \in K$, $\lambda\,\mu \neq 1$, y sean $C, D \in \mathbb{A}$, $C \neq D$. Calcula el centro y la razón de la homotecia composición $H_\mu^D \circ H_\lambda^C$.

(18) Sea K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial sobre K y $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Prueba que si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una afinidad, M es el punto medio de P_1 y P_2 si, y solo si, $\alpha(M)$ es el punto medio de $\alpha(P_1)$ y $\alpha(P_2)$.

(19) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y sean L y L' rectas paralelas de $\mathbb{A}$, $L \neq L'$. Sean P_1 y P_2 puntos de L, $P_1 \neq P_2$, y P_1' y P_2' puntos de L', $P_1' \neq P_2'$. Prueba que existe una única dilatación $D\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $D(P_1) = P_1'$ y $D(P_2) = P_2'$.

(20) Sea $\mathbb{A}$ un plano afín sobre un espacio vectorial V y sean L_1, L_2 y L_3 rectas tales que no pasan las tres por un mismo punto, $L_1 \nparallel L_2$, $L_2 \nparallel L_3$ y $L_1 \nparallel L_3$, y sean L_1', L_2', y L_3' otras tres rectas con las mismas propiedades. Prueba que existe una única afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(L_i) = L_i'$, para $i = 1, 2, 3$.

(21) Considera en $\mathbb{R}^2$ las rectas L_i y L_i' cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$\begin{aligned} &L_1 \equiv x + 1 = 0, && L_2 \equiv x + y - 5 = 0, && L_3 \equiv x - y - 1 = 0,\\ &L_1' \equiv 4x - 3y + 1 = 0, && L_2' \equiv 4x - y - 5 = 0, && L_3' \equiv y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Calcula las ecuaciones en la referencia canónica de la afinidad $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(L_i) = L_i'$, para $i = 1, 2, 3$. ¿Existe una única afinidad verifiando estas condiciones?

(22) Sea Π el plano cuya ecuación en la referencia canónica es $x + y + z - 1 = 0$. Estudia si existe alguna afinidad $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(\Pi) = \Pi$ y $\alpha(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$. En caso afirmativo, razona si existe una única afinidad verificando estas condiciones.

(23) Considera en $\mathbb{R}^2$ las rectas r_i y r_i', $i = 1, 2, 3, 4$, cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$\begin{aligned} &r_1 \equiv 2x - y - 1 = 0, && r_2 \equiv x + y - 2 = 0, && r_3 \equiv x + y - 5 = 0, && r_4 \equiv 2x - y - 4 = 0,\\ &r_1' \equiv 3x + y - 3 = 0, && r_2' \equiv x - 3y - 1 = 0, && r_3' \equiv x - 3y - 11 = 0, && r_4' \equiv 3x + y - 13 = 0. \end{aligned}$$

a) Estudia si existe alguna afinidad $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(r_i) = r'_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

b) ¿Existe una única afinidad verificando estas condiciones? En caso afirmativo, calcula las ecuaciones de α en la referencia canónica.

(24) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V y $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad.

(*a*) Prueba que si α deja fijos dos puntos distintos de $\mathbb{A}$, entonces 1 es un autovalor del isomorfismo lineal asociado a α.

(*b*) Recíprocamente, supongamos que 1 es un autovalor del isomorfismo lineal asociado a α. ¿Deja α dos puntos fijos distintos?

(25) Sea $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un afinidad. Demuestra que el conjunto $\{P \in \mathbb{A} \mid \alpha(P) = P\}$ de puntos fijos de α es vacío o un punto o una variedad lineal cuya dirección es el subespacio de vectores propios asociados al autovalor 1 de $\overrightarrow{\alpha}$.

2. ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

En este tema se introduce el concepto de producto escalar en un espacio vectorial real, que generaliza el concepto de producto escalar usual de vectores libres del plano o espacio. Trasladaremos a los espacios vectoriales euclídeos las nociones de longitud de un vector y ángulo entre dos vectores, de forma que se conserven las propiedades que tienen en el espacio vectorial de los vectores libres.

Probaremos la existencia de bases ortonormales en un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Las transformaciones ortonormales de un espacio vectorial euclídeo son las aplicaciones lineales que conservan el producto escalar o, equivalentemente, la longitud de los vectores. Se estudian y clasifican las transformaciones ortogonales de un plano y de un espacio vectorial euclídeo tridimensional.

2.1. Espacios vectoriales euclídeos

2.1.1. **Definición.** Sea V un espacio vectorial real. Se dice que una aplicación $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$ es un *producto escalar* en V si verifica las siguientes condiciones:

(1) σ es una *aplicación bilineal* o una *forma bilineal*, es decir:

$$(a)\ \ \sigma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \sigma(v_1, w) + \lambda_2 \sigma(v_2, w), \qquad v_1, v_2, w \in V,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

$$(b)\ \ \sigma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \sigma(v, w_1) + \lambda_2 \sigma(v, w_2), \qquad v, w_1, w_2 \in V,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

(2) σ es *simétrica*, es decir $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$, para todo $v, w \in V$,

(3) σ es *definida positiva*:

a) $\sigma(v, v) \geq 0$, para todo $v \in V$,

b) $\sigma(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$.

Si σ es un producto escalar, denotaremos con frecuencia $\sigma(u, v)$ por $u \cdot v$.

Un *espacio vectorial euclídeo* es un par (V, σ), donde V es un espacio vectorial real y σ es un producto escalar en V. Lo denotaremos por (V, σ) o simplemente por V.

2.1.2. **Ejemplos.**

(1) Sean V_2 y V_3 los espacios vectoriales reales de los vectores libres del plano y del espacio ordinario, respectivamente. La aplicación $\sigma_i\colon V_i \times V_i \to \mathbb{R}$, $i = 2, 3$, dada por

$$\sigma_i(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{cases} 0, \quad \text{si} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{o} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \\ |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \quad \text{si} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, \end{cases}$$

donde $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ es el ángulo no orientado entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ (es decir, el menor de los ángulos que forman un representante $\overrightarrow{OP_1}$ de $\overrightarrow{u}$ y un representante $\overrightarrow{OP_2}$ de $\overrightarrow{v}$), es un producto escalar en V_i, para $i = 2, 3$. Por tanto, (V_i, σ_i) es un espacio vectorial euclídeo para $i = 2, 3$.

(2) La aplicación $\sigma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$\sigma((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$, que llamaremos *producto escalar usual.* Así, $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual es un espacio vectorial euclídeo.

(3) En el espacio vectorial $\mathbb{R}[X]$ de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$, si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la aplicación $\sigma\colon \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(F(X), G(X)) = \int_a^b F(x)\, G(x)\, dx, \quad F(X), G(X) \in \mathbb{R}[X]$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}[X]$. La bilinealidad de σ se sigue de las propiedades de la integral definida. Claramente, σ es simétrica y es definida positiva, puesto que

$$\sigma(F(X), F(X)) = \int_a^b F(x)^2\, dx \geq 0,$$

y $F^2(-) : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, $F^2(x) = (F(x))^2$, es una función continua no negativa que se anula a lo sumo en un número finito de puntos de $[a,\, b]$. $(\mathbb{R}[X], \sigma)$ es un ejemplo de espacio vectorial euclídeo que no tiene dimensión finita.

(4) Si (V, σ) es un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \sigma_U\colon U \times U & \to & \mathbb{R} \\ (u\ ,\ u') & \longmapsto & \sigma(u, u') \end{array}$$

es un producto escalar en U. Así, todo subespacio U de un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial euclídeo con el producto escalar σ_U inducido.

Vamos a introducir el concepto de matriz de Gram de una forma bilineal, ya que facilita el estudio del producto escalar y permitirá utilizar el criterio de Sylvester para determinar cuando una forma bilineal simétrica es definida positiva.

2.1.3. **Definición.** Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se llama *matriz de Gram* de σ respecto a la base B a la matriz

$$G_\sigma^B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (g_{ij}),$$

donde $g_{ij} = \sigma(v_i, v_j)$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

2.1.4. ***Observación.*** Sea $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base de V. Si $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ son vectores de V y $G_\sigma^B = (g_{ij})$ es la matriz de Gram de σ respecto a B, entonces

$$\sigma(v, w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, x_i\, y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} G_\sigma^B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2.1.5. **Definición.** Sea K un cuerpo y C y D matrices $n\times n$ sobre K. Se dice que C y D son *congruentes*, si existe una matriz regular $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{P}^t\, C\, \mathcal{P} = D$, donde $\mathcal{P}^t$ es la matriz traspuesta de la matriz $\mathcal{P}$.

La relación "ser congruentes" en el conjunto de matrices $n \times n$ sobre K es una relación de equivalencia.

2.1.6. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo, $B = \{v_1, \dots v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \dots v'_n\}$ bases de V y sean

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{B'B} = (p_{ij})$, entonces

$$G_\sigma^{B'} = \mathcal{P}^t\, G_\sigma^B\, \mathcal{P}.$$

Así, las matrices G_σ^B y $G_\sigma^{B'}$ son congruentes.

Demostración. Sean $G_\sigma^B = (g_{ij})$ y $G_{\sigma'}^{B'} = (g'_{ij})$. Se tiene

$$g'_{ij} = v'_i \cdot v'_j = (\sum_{k=1}^{n} p_{ki}\, v_k) \cdot (\sum_{l=1}^{n} p_{lj}\, v_s) = \sum_{k,l=1}^{n} p_{ki}\, p_{lj}\, g_{kl}. \qquad \square$$

2.1.7. **Proposición.** Sea $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y sea $B = \{v_1, \dots v_n\}$ una base de V. Entonces, la forma bilineal σ es simétrica si, y solo si, la matriz G_σ^B es una matriz simétrica, es decir, si $(G_\sigma^B)^t = G_\sigma^B$.

Demostración. Si σ es simétrica,

$$g_{ij} = \sigma(v_i, v_j) = \sigma(v_j, v_i) = g_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

luego G_σ^B es simétrica. Recíprocamente, si $g_{ij} = g_{ji}$, para $i, j = 1, \dots, n$, $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ y $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$, se tiene

$$\sigma(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ji}\, y_j\, x_i = \sigma(w, v). \qquad \square$$

2.1.8. **Definición.** Sean (V, σ) y (V', σ') espacios vectoriales euclídeos. Se dice que una aplicación $f\colon V \to V'$ es una *isometría* si verifica

(1) f es un isomorfismo de espacios vectoriales reales,

(2) $\sigma(v, w) = \sigma'(f(v), f(w))$, para todo $v, w \in V$.

Sean (V, σ) y (V', σ') vectoriales euclideos. Se dice que (V, σ) y (V', σ') son *isométricos* si existe una isometría $f\colon V \to V'$.

2.1.9. **Lema.** Sean (V, σ) y (V', σ') espacios vectoriales euclídeos de dimensión n, $B = (v_1, \dots v_n)$ una base de V y $f\colon V \to V'$ un isomorfismo de espacios vectoriales reales. Se tiene que f es una isometría si, y solo si, $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \dots, n$.

Demostración. Si f es una isometría, entonces $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \dots, n$.

Recíprocamente, supongamos que $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \dots, n$, y sean $v, w \in V$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i.$$

Entonces

$$f(v) \cdot f(w) = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) \big) \cdot \big(\sum_{i=1}^{n} y_i f(v_i) \big) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(v_i) \cdot f(v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, v_i \cdot v_j = v \cdot w. \qquad \square$$

2.1.10. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que los vectores u y v son *ortogonales* si $u \cdot v = 0$.

2.1.11. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo y v un vector de V. Se llama *norma* o *longitud* del vector v y se denota por $\|v\|$ al número real

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}\,.$$

Se dice que un vector v es *unitario* si $\|v\| = 1$.

Obsérvese que si $v \in V - \{0\}$, entonces el vector $v/\|v\|$ es unitario.

En los espacios vectoriales euclídeos V_2 y V_3 de vectores libres, la longitud de un vector libre es el módulo de ese vector libre, es decir $\|\overrightarrow{v}\| = |\overrightarrow{v}|$.

2.1.12. **Propiedades de la longitud.** Sea V un espacio vectorial euclídeo.

(1) $\| v \| = 0$ si, y solo si, $v = 0$.

(2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

(3) $| u \cdot v | \leq \|u\| \, \|v\|$, $u, v \in V$ (Desigualdad de Cauchy- Schwartz).

(4) $\| u + v \| \leq \|u\| + \|v\|$, $u, v \in V$ (Desigualdad de Minkowski).

(5) Si u y v son vectores ortogonales, entonces $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Demostración. (1) $\| v \| = 0 \iff v \cdot v = 0 \iff v = 0$.

(2) $\|\lambda v\| = \sqrt{\lambda v \cdot \lambda v} = \sqrt{\lambda^2 (v \cdot v)} = |\lambda| \sqrt{v \cdot v} = |\lambda| \, \|v\|$.

(3) Si $u = 0$, es trivial. Si $u \neq 0$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\|\lambda \, u + v\|^2 = (\lambda \, u + v) \cdot (\lambda \, u + v) = \lambda^2 \, \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \, \lambda \, u \cdot v \geq 0.$$

Tomando

$$\lambda = - \frac{u \cdot v}{\|u\|^2},$$

se obtiene

$$\|\lambda \, u + v\|^2 = \frac{(u \cdot v)^2}{\|u\|^2} + \|v\|^2 - 2 \, \frac{(u \cdot v)^2}{\|u\|^2} \geq 0,$$

equivalentememte,

$$(u \,.\, v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2,$$

es decir, $|u \cdot v| \ \leq \ \|u\| \, \|v\|$.

(4) Se tiene

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 =& \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\, u\cdot v \ \leq \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\, |u \cdot v| \\ \leq& \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\, \|u\| \, \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

(5) Si $u \cdot v = 0$, entonces $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\, u \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2$. □

Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\, u \cdot v \,| \ \leq \ \|u\| \, \|v\|$, se sigue que $-\|u\| \, \|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\| \, \|v\|$, equivalentente,

$$-1 \ \leq \ \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \ \leq 1.$$

Dado que la aplicación $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ es biyectiva, existe un único número real que denotaremos por $\angle(u,v)$, tal que $0 \leq \angle(u,v) \leq \pi$, y que verifica

$$\cos\, \angle(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

2.1.13. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se llama *ángulo no orientado* entre los vectores no nulos u y v al número real $\angle(u,v)$, $0 \leq \angle(u,v) \leq \pi$, tal que

$$\cos\, \angle(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

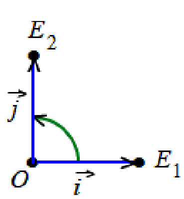
Obsérvese que los vectores no nulos u y v son ortogonales si, y solo si, $\angle(u,v) = \pi/2$.

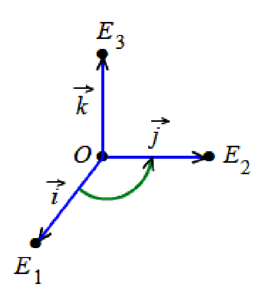
2.1.14. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V es *ortogonal* si $v_i \cdot v_j = 0$, para todo $i \neq j$.

2.1.15. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V es *ortonormal* si B es una base ortogonal y los vectores v_i , $i = 1, \ldots, n,$ son unitarios, equivalentemente, si $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \ldots, n$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i = j$.

2.1.16. **Ejemplos.**

(1) La base $C = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2; O\}$ del plano ordinario y la base $C = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ del espacio ordinario son bases ortonormales de V_2 y V_3, respectivamente.





(2) La base canónica $C = (e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1))$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

2.1.17. **Proposition.** Sea V un espacio vectorial euclídeo y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ortonormal de V. Si v es un vector de V de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en B, se tiene

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Demostración.

$$v \cdot v = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (v_i \cdot v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \, \delta_{ij} = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

y entonces

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

□

2.1.18. **Lema.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. Si $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto de vectores no nulos de V ortogonales dos a dos, es decir tales que $v_i \cdot v_j = 0$ si $i \neq j$, entonces S es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Demostración. Se tiene

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v_i = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v_i) \cdot v_j = 0, \, j = 1, \ldots, r \Rightarrow \lambda_j \, (v_j \cdot v_j) = 0, \, j = 1, \ldots, r \Rightarrow \lambda_j = 0, \, j = 1, \ldots, r.$$

□

Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, el método de ortogonalización de Gram-Schmidt permitirá construir un base ortogonal de V a partir de una base cualquiera de V.

2.1.19. **Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. Si $u_1, \ldots, u_r$ son vectores linealmente independientes, entonces los vectores que se obtienen de la forma:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\
&\vdots \\
v_r &= u_r - \frac{u_r \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_r \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \ldots - \frac{u_r \cdot v_{r-1}}{v_{r-1} \cdot v_{r-1}} v_{r-1}
\end{aligned}$$

son linealmente independientes, ortogonales dos a dos y verifican

$$\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Demostración. Razonaremos por inducción sobre el número r de vectores linealmente independientes. Para $r = 1$ es trivial. Supongamos $r \geq 2$ y que el resultado es cierto para $r-1$. Sean $u_1, \ldots, u_r$ vectores linealmente independientes. Por hipótesis de inducción, los vectores

$$v_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{u_j \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}\, v_i, \quad j = 1, \ldots, r-1,$$

son linealmente independientes, ortogonales dos a dos y verifican

$$\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, r-1.$$

Pongamos

$$v_r = u_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{u_r \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}\, v_i.$$

Se tiene que $v_r \neq 0$ y además

$$v_r \cdot v_j = u_r \cdot v_j - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{u_r \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}\, v_i \cdot v_j = u_r \cdot v_j - \frac{u_r \cdot v_j}{v_j \cdot v_j}\, v_j \cdot v_j = 0, \quad j = 1, \ldots, r-1.$$

Por el lema 2.1.18, los vectores $v_1, \ldots, v_r$ son linealmente independientes y $v_1, \ldots, v_r \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, luego $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$. □

2.1.20. **Teorema.** Todo espacio vectorial euclídeo (V, σ) de dimensión finita tiene una base ortonormal.

Demostración. Si $\dim V = n$, por el teorema de estructura de espacios ortogonales reales o aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a una base cualquiera $(u_1, \ldots, u_n)$ de V, se obtiene que existe una base ortogonal $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V. Poniendo

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

se obtiene que la base $B' = (w_1, \ldots, w_n)$ es una base ortonornal de V. □

2.1.21. **Lema.** Si (V, σ) es un espacio vectorial euclídeo y B es una base de V, entonces la matriz de Gram de σ en B es congruente a la matriz identidad I.

Demostración. Por el teorema 2.1.20, V tiene una base ortonormal B', luego $G_\sigma^{B'} = I$. Por la proposición 2.1.6, G_σ^B es congruente a I. □

2.1.22. **Criterio de Sylvester.** Sea $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Si $G_\sigma^B = (g_{ij})$ es la matriz de Gram de σ en B, entonces

$$\sigma \text{ es definida positiva} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1i} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2} & \cdots & g_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Supongamos que σ es definida positiva. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base cualquiera de V, $B_j = (v_1, \ldots, v_j)$, $V_j = \langle B_j \rangle$, $\sigma_j = \sigma_{|V_j}$ y $G_j = G_{\sigma_j}^{B_j}$, para $j = 1, \ldots, n$. Por el ejemplo (4) de 2.1.2, (V_j, σ_j) es un espacio vectorial euclídeo. Por el lema 2.1.21, existe una matriz regular $\mathcal{P}_j$ tal que $G_j^{B_j} = \mathcal{P}_j^t \, I_j \, \mathcal{P}_j$, luego $\Delta_j = \det G_j = \det(\mathcal{P}_j)^2 > 0$, para $j = 1, \ldots, n$.

Para probar el recíproco, razonaremos por inducción sobre la dimensión de V. Si la dimensión de V es 1, el resultado es cierto trivialmente. Supongamos el resultado cierto para espacios vectoriales de dimensión $n-1$ y veamos que es cierto para espacios vectoriales de dimensión n. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $\sigma \colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V tal que $\Delta_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Sea $V' = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ y $\sigma' = \sigma_{|V'}$. Dado que $\Delta_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$, por hipótesis de inducción σ' es definida positiva, luego (V', σ') un espacio vectorial euclídeo. Sea $B' = (w_1, \ldots, w_{n-1})$ una base ortonormal de V'. Pongamos $B'' = (w_1, \ldots, w_{n-1}, v_n)$. Se tiene

$$G_\sigma^{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix}.$$

Por la proposición 2.1.6, existe una matriz regular Q tal que $G_\sigma^{B''} = \mathcal{Q}^t \, G_\sigma^B \, \mathcal{Q}$. Consideremos la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\mathcal{P}^t \, G_\sigma^{B''} \, \mathcal{P} = \operatorname{diag}(\, 1 \quad \ldots \quad 1 \quad d\,), \quad d = c_n - c_1^2 - \ldots - c_{n-1}^2.$$

Si $\mathcal{T} = \mathcal{Q}\,\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{T}^t \, G_\sigma^B \, \mathcal{T} = \operatorname{diag}(\, 1 \quad \ldots \quad 1 \quad d\,)$, luego

$$d = \det(\mathcal{T})^2 \, \det(G_\sigma^B) > 0.$$

Sea $\tilde{B}$ la base tal que $\mathcal{T} = id_{\tilde{B}B}$. Se tiene que $G_\sigma^{\tilde{B}} = \operatorname{diag}(\, 1 \quad \ldots \quad 1 \quad d\,)$. La forma bilineal σ es definida positiva, puesto que si $v \in V - \{0\}$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en la base $\tilde{B}$, entonces

$$v \cdot v = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + d\, x_n^2 > 0. \qquad \square$$

2.1.23. **Ejemplo.** La forma bilineal $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3,$$

tiene como matriz de Gram en la base canónica $C = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$

$$G_\sigma^C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La forma bilineal σ es simétrica, puesto que $(G_\sigma^C)^t = G_\sigma^C$. Además,

$$\det(2) = 2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \det(G_\sigma^C) = 1 > 0,$$

y σ es definida positiva, por el criterio de Sylvester. Así, σ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Vamos a calcular una base ortogonal $B' = (w_1, w_2, w_3)$ de $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
w_1 &= e_1 = (1,0,0),\\
w_2 &= e_2 - \frac{\sigma(e_2,w_1)}{\sigma(w_1,w_1)}\, w_1 = (0,1,0) - (-1/2)\,(1,0,0) = (1/2,1,0),\\
w_3 &= e_3 - \frac{\sigma(e_3,w_1)}{\sigma(w_1,w_1)}\, w_1 - \frac{\sigma(e_3,w_2)}{\sigma(w_2,w_2)}\, w_2 = (0,0,1) - (-2)(1/2,1,0) = (1,2,1).
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\sigma(e_3, w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

y de forma análoga se obtiene que $\sigma(w_2, w_2) = 1/2$. La base B' no es ortonormal, puesto que los vectores w_1 y w_2 no son unitarios

$$\|w_1\| = \sqrt{\sigma(w_1,w_1)} = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\sigma(w_2,w_2)} = \sqrt{2}/2, \quad \|w_3\| = \sqrt{\sigma(w_3,w_3)} = 1.$$

A partir de B' se obtiene la siguiente base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \sigma)$:

$$B = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right) = ((\sqrt{2}/2, 0, 0), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, 0), (1,2,1)).$$

2.1.24. **Definición.** Sean (V, σ) un espacio euclídeo y U y W subespacios de V. Se dice que U es *ortogonal a* W si $u \cdot w = 0$ para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$.

2.1.25. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U y W subespacios de V. Se dice que la suma $U + W$ es una *suma ortogonal* y se denota por $U \perp W$, si verifica que $U \cap W = \{0\}$ y U es ortogonal a W.

2.1.26. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. El subespacio

$$U^\perp = \{v \in V \mid u \cdot v = 0, \forall\, u \in U\}$$

se llama *subespacio ortogonal* a U.

2.1.27. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V de dimensión finita. Se tiene que $V = U \perp U^\perp$.

Demostración. Sea $B = (u_1, \dots, u_r)$ una base ortonormal de U y $v \in V$. Consideremos el vector

$$u = (v \cdot u_1)\, u_1 + \dots + (v \cdot u_r)\, u_r \in U.$$

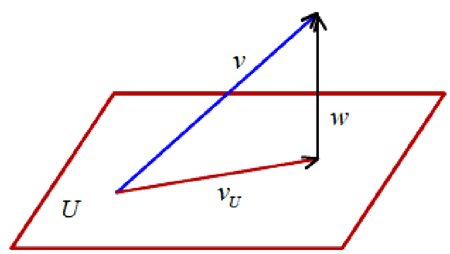
El vector $v - u \in U^\perp$, puesto que, para cada $i = 1, \dots, r$,

$$(v - u) \cdot u_i = v \cdot u_i - u \cdot u_i = v \cdot u_i - v \cdot u_i = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Asì, $V = U + U^\perp$. Además, si $v \in U \cap U^\perp$, entonces $v \cdot v = 0$ y por ser V un espacio vectorial euclídeo, se tiene que $v = 0$. Por tanto $V = U \perp U^\perp$.

Los números reales $v \cdot u_i$ se llaman *coeficientes de Fourier* de v respecto a la base ortonormal B de U. □

2.1.28. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V de dimensión finita. Si $v \in V$ se llama *proyección ortogonal* de v sobre U al vector $v_U \in U$ tal que $v - v_U \in U^\perp$.



2.1.29. ***Observación.*** Sea V un espacio vectorial euclídeo, U es un subespacio de V de dimensión finita y v un vector de V. Si $B = (u_1, \dots, u_r)$ es una base ortonormal de U, entonces

$$v_U = (v \cdot u_1)\, u_1 + \dots + (v \cdot u_r)\, u_r \in U.$$

Veamos un ejemplo de como calcular la proyección ortogonal de un vector sobre un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2.1.30. **Ejemplo.** Consideremos el plano vectorial U de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la base canónica es $2x + y - z = 0$ y el vector $v = (-3, 1, 1)$. Se tiene

$$U = \langle((1,0,2),(0,1,1)\rangle, \qquad U^\perp = \langle(2,1,-1)\rangle.$$

Luego $\mathbb{R}^3 = U \perp U^\perp = \langle(1,0,2),(0,1,1),(2,1,-1)\rangle$. Dado que

$$(-3,1,1) = -(1,0,2) + 2(0,1,1) - (2,1,-1),$$

la proyección ortogonal de v sobre U es el vector

$$v_U = -(1,0,2) + 2(0,1,1) = (-1,2,0).$$

2.1.31. **Teorema de clasificación de espacios vectoriales euclídeos.** Dos espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita son isométricos si, y solo si, tienen igual dimensión; en particular, todo espacio vectorial euclídeo de dimensión n es isométrico a $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

Demostración. Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ bases ortonormales de V y V', respectivamente. La aplicación lineal $f\colon V \to V'$ dada por

$$f(v_i) = v'_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

es una isometría, puesto que $v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = v'_i \cdot v'_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \dots, n$. $\square$

La isometría $f\colon V_3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\overrightarrow{i}) = e_1$, $f(\overrightarrow{j}) = e_2$, $f(\overrightarrow{k}) = e_3$, donde $C = (e_1, e_2, e_3)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, permite identificar el espacio vectorial euclídeo de los vectores libres del espacio ordinario con $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual. De forma análoga se identifica el espacio vectorial euclídeo de los vectores libres del plano ordinario con $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual.

2.2. Transformaciones ortogonales. Matrices ortogonales

2.2.1. **Definición.** Sea K un cuerpo. Se dice que la matriz $\mathcal{A} \in M_n(K)$ es una *matriz ortogonal* si $\mathcal{A}^t \mathcal{A} = I$, siendo $\mathcal{A}^t$ la matriz traspuesta de $\mathcal{A}$.

2.2.2. **Proposición.** Sea $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) La matriz $\mathcal{A}$ es una matriz ortogonal.

(2) $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^t$.

(3) $\mathcal{A}\,\mathcal{A}^t = I$.

(4) $B_F = ((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nn}))$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

(5) $B_C = ((a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, ((a_{1n}, \dots, a_{nn}))$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) La matriz $\mathcal{A}$ es regular, puesto que $\det(\mathcal{A}^t)\det(\mathcal{A}) = 1$. Luego, $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}^t I = \mathcal{A}^t (\mathcal{A}\,\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}^{-1}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{A}^t \mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = I$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) se prueba de forma similar a (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(4) es equivalente a que $\mathcal{A}\,\mathcal{A}^t = I$.

(5) es equivalente a que $\mathcal{A}^t \mathcal{A} = I$. $\square$

2.2.3. **Proposición.** Si $\mathcal{A}$ es una matriz ortogonal, entonces el determinante de $\mathcal{A}$ vale 1 o -1.

Demostración. Se tiene
$$(\det(\mathcal{A}))^2 = \det(\mathcal{A}^t)\,\det(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A}^t\,\mathcal{A}) = 1.$$
Así, $\det(\mathcal{A}) = 1$ o $\det(\mathcal{A}) = -1$. $\square$

2.2.4. **Definición.** Sea V un un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la aplicación $f\colon V \to V$ es una *transformación ortogonal* de V si es una isometría, es decir si es un isomorfismo de espacios vectoriales reales y además
$$f(v)\cdot f(w) = v\cdot w, \;\; \forall\, v, w \in V$$

2.2.5. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $f\colon V \to V$ una aplicación lineal. Entonces f es una transformación ortogonal si, y sólo si,
$$f(v)\cdot f(w) = v\cdot w, \quad v, w \in V.$$

Demostración. Basta ver que si $f(v)\cdot f(w) = v\cdot w$, para cada $v, w \in V$, entonces f es un isomorfismo de espacios vectoriales; y puesto que el espacio vectorial V tiene dimensión finita, es suficiente probar que el núcleo de f es el subespacio $\{0\}$. Se tiene
$$f(v) = 0 \implies 0 = f(v)\cdot f(v) = v\cdot v \implies v = 0. \qquad \square$$

2.2.6. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Una aplicación $f\colon V \to V$ es una transformación ortogonal si, y solo si, $f(v)\cdot f(w) = v\cdot w$, para todo $v, w \in V$.

Demostración. Es suficiente probar que si la aplicación $f\colon V \to V$ verifica que $f(v)\cdot f(w) = v\cdot w$, para todo $v, w \in V$, entonces f es una aplicación lineal.

Si $u = v + w$,
$$\begin{aligned} 0 =& \|u - v - w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\,u\cdot v - 2\,u\cdot w - 2\,v\cdot w\\ =& \|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - 2\,f(u)\cdot f(v) - 2\,f(u)\cdot f(w) - 2f(v)\cdot f(w)\\ =& \|f(u) - f(v) - f(w)\|^2. \end{aligned}$$

Así, $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

Si $u = \lambda\, v$,
$$0 = \|u - \lambda\, v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 - 2\,\lambda\, u\cdot v = \|f(u)\|^2 + \lambda^2\|f(v)\|^2 - 2\,\lambda\, f(u)\cdot f(v) = \|f(u) - \lambda f(v)\|^2.$$

Así, $f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v)$. $\square$

2.2.7. **Notación.** Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, denotaremos por $\mathcal{O}(V)$ el conjunto de las transformaciones ortogonales de V y por $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ reales ortogonales.

2.2.8. **Teorema.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, B una base ortonormal de V y $f\colon V \to V$ una aplicación lineal. Entonces f es una transformación ortogonal si, y solo si, la matriz asociada a f respecto a la base B es una matriz ortogonal.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (a_{ij})$ la matriz asociada a f respecto a la base $B = (v_1, \dots, v_n)$. Por el lema 2.1.9, f es una transformación ortogonal si, y solo si, $f(v_i) \cdot f(v_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \dots, n$. El resultado se sigue de las siguientes equivalencias

$$f(v_i) \cdot f(v_j) = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, v_k\Big) \cdot \Big(\sum_{l=1}^{n} a_{lj}\, v_l\Big) = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \delta_{ij}$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \mathcal{A}^t\, \mathcal{A} = I. \qquad \square$$

El siguiente lema será utilizado en el capítulo 4 para clasificar los movimientos en un espacio afín euclídeo.

2.2.9. **Lema.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $f\colon V \to V$ una transformación ortogonal de V. Se tiene

$$\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_V) = (\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_V))^{\perp}.$$

Demostración. Para cada $(f - \mathrm{id}_V)(v) \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_V)$ y cada $w \in \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_V)$, es

$$(f - \mathrm{id}_V)(v) \cdot w = (f(v) - v) \cdot w = f(v) \cdot w - v \cdot w = f(v) \cdot f(w) - v \cdot w = 0.$$

Así, $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_V) \subset (\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_V))^{\perp}$ y, dado que

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_V) = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_V) = \dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_V))^{\perp},$$

se obtiene el resultado. $\square$

2.2.10. **Lema.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n \geq 1$ y sean B una base ortonormal de V y B' una base de V. Entonces B' es una base ortonormal de V si, y solo si, $1_{B'B}$ es una matriz ortogonal.

Demostración. Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ y consideremos la aplicación lineal $f\colon V \to V$ dada por

$$f(v_i) = v'_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se tiene que $f_B = \mathrm{id}_{B'B}$. Por la demostración del teorema 2.1.31, B' es una base ortonormal si, y solo si, $f \in \mathcal{O}(V)$ y por el teorema 2.2.8, $f \in \mathcal{O}(V)$ si, y solo si, $1_{B'B} = f_B \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. $\square$

2.2.11. **Lema.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y $f\colon V \to V$ una aplicación lineal. Si B y B' son bases de V y f_B y $f_{B'}$ son las matrices asociadas a f respecto a las bases B y B' respectivamente, entonces $\det(f_B) = \det(f_{B'})$.

Demostración. Se tiene
$$f_{B'} = \mathcal{P}^{-1}\, f_B\, \mathcal{P},$$
donde $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{B'B}$. Por tanto,
$$\det(f_{B'}) = \det(\mathcal{P}^{-1})\, \det(f_B)\, \det(\mathcal{P}) = (\det(\mathcal{P}))^{-1}\, \det(\mathcal{P})\, \det(f_B) = \det(f_B). \qquad \square$$

2.2.12. **Definición.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y sea $f\colon V \to V$ una aplicación lineal. Se llama *determinante* de f, y se denota por $\det(f)$, al deteminante de la matriz asociada a f en una base B de V, es decir
$$\det(f) = \det(f_B).$$

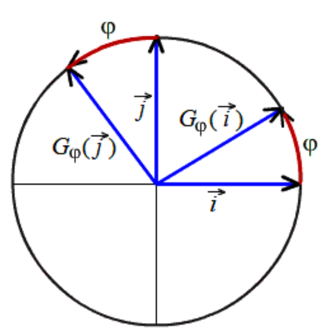
Obsérvese que por el lema 2.2.11, $\det(f)$ no depende de la base considerada en V.

2.2.13. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si f es una transformación ortogonal de V, entonces el determinante de f es 1 o -1.

Demostración. Sea B una base ortonormal de V. Por el teorema 2.2.8, la matriz f_B es una matriz ortogonal. Dado que el determinante de f es igual al determinante de f_B, por la proposición 2.2.3 es $\det(f) = 1$ o $\det(f) = -1$. $\square$

2.2.14. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V. Se dice que f es un *giro* o una *rotación* si $\det(f) = 1$. Se dice que f es una *reflexión* si $\det(f) = -1$.

2.2.15. **Ejemplo.** El giro de ángulo φ en V_2, $G_\varphi\colon V_2 \to V_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, es la transformación ortogonal de V_2 cuya matriz asociada en la base ortonormal $C = (\vec{i}, \vec{j})$ es
$$(G_\varphi)_C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$



2.2.16. **Notación.** Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, denotaremos por $\mathcal{O}^+(V)$ el conjunto de los giros de V y por $\mathcal{O}^-(V)$ el conjunto de las reflexiones de V. Denotaremos por $\mathcal{O}^+(n,\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ ortogonales reales de determinante 1 y por $\mathcal{O}^-(n,\mathcal{R})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ ortogonales reales de determinante -1.

2.2.17. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo. El conjunto $\mathcal{O}(V)$ con la operación composición es un grupo que se denomina *grupo ortogonal* de V y el conjunto $\mathcal{O}^+(V)$ es un subgrupo de $\mathcal{O}(V)$ que se denomina *grupo de los giros de* V. El conjunto $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ con la operación producto de matrices es un grupo y el conjunto $\mathcal{O}^+(n,\mathbb{R})$ es un subgrupo de $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$. Si V tiene dimensión n y B es una base ortonormal de V, la aplicación

$$\Phi_B\colon \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(n,\mathbb{R})$$

dada por $\Phi_B(f) = f_B$, donde f_B es la matriz asociada a f respecto a la base B, es un isomorfismo de grupos; además, $f \in \mathcal{O}^+(V)$ si, y solo si, $f_B \in \mathcal{O}^+(n,\mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{O}^-(V)$ si, y solo si, $f_B \in \mathcal{O}^-(n,\mathbb{R})$.

Demostración. Es inmediata. □

A partir de transformaciones ortogonales de subespacios de un espacio vectorial euclídeo V se pueden construir nuevas transformaciones ortogonales de V como se prueba en la siguiente proposición.

2.2.18. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sean U_1 y U_2 subespacios de V tales que $V = U_1 \perp U_2$. Si $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$, entonces la aplicación:

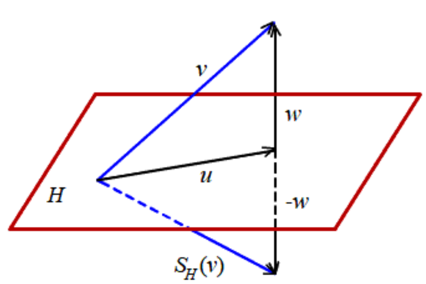
$$f_1 \perp f_2\colon V \longrightarrow V$$

dada por $(f_1 \perp f_2)(u_1+u_2) = f_1(u_1)+f_2(u_2)$ para todo $u_1 \in U_1$ y todo $u_2 \in U_2$, es una transformación ortogonal de V.

Demostración. Para todo $u_1, v_1 \in U_1$ y $u_2, v_2 \in U_2$, se tiene

$$\begin{aligned}(f_1 \perp f_2)(u_1+u_2)\cdot(f_1 \perp f_2)(v_1+v_2) &= (f_1(u_1)+f_2(u_2))\cdot(f_1(v_1)+f_2(v_2))\\ &= f_1(u_1)\cdot f_1(v_1) + f_1(u_1)\cdot f_2(v_2)\\ &\quad + f_2(u_2)\cdot f_1(v_1) + f_2(u_2)\cdot f_2(v_2)\\ &= u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 = (u_1+u_2)\cdot(v_1+v_2).\end{aligned}$$ □

2.2.19. **Definición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea H un hiperplano vectorial de V, es decir, un subespacio de V de dimensión $n-1$. Se llama *simetría* respecto a H a la transformación ortogonal de V, $S_H = \mathrm{id}_H \perp (-\mathrm{id}_{H^\perp})$.



$$S_H(u+w) = u - w, \quad u \in H,\ w \in H^\perp.$$

Obsérvese que el conjunto de vectores fijos de S_H es H y que $(S_H)^2 = \mathrm{id}_V$, equivalentemente, $S_H^{-1} = S_H$.

2.2.20. **Proposición.** Si H es un hiperplano vectorial de V, entonces S_H es una reflexión.

Demostración. Dado que $V = H \perp H^\perp$, si $B = (v_1, \dots, v_{n-1})$ es una base de H y $H^\perp = \langle v_n \rangle$, entonces $B' = (v_1, \dots, v_n)$ es una base de V. Teniendo en cuenta que $S_H = \mathrm{id}_H \perp (-\mathrm{id}_{H^\perp})$,

$$(S_H)_{B'} = \mathrm{diag}(1 \overset{n-1}{\ldots} 1 -1).$$

Por tanto, $\det S_H = \det (S_H)_{B'} = -1$. Así, S_H es una reflexión. □

2.2.21. **Ejemplo.** Considemos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual. Sea U el plano vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la base canónica es $y - z = 0$. Se tiene

$$U = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle, \qquad U^\perp = \langle (0,1,-1) \rangle.$$

Sea $B = ((1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1))$. La simetría respecto al plano vectorial U de $\mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal $S_U = \mathrm{id}_U \perp (-\mathrm{id}_{U^\perp})\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$S_U(1,0,0) = (1,0,0), \quad S_U(0,1,1) = (0,1,1), \quad S_U(0,1,-1) = (0,-1,1),$$

luego

$$\begin{aligned}(S_U)_C = (S_U)_{BC}\,\mathrm{id}_{CB} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Así, $S_U(x,y,z) = (x,z,y)$.

2.2.22. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sea f una transformación ortogonal de V. Si U es un subespacio invariante por f, entonces tambien lo es $U^\perp$.

Demostración. Veamos que si $f(U) \subset U$, entonces $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Por ser f un isomorfismo de espacios vectoriales $f(U) = U$ y se tiene que para cada $u \in U$ y cada $w \in U^\perp$,

$$u \cdot f(w) = f(f^{-1}(u)) \cdot f(w) = f^{-1}(u) \cdot w = 0.$$ □

2.2.23. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de f, entonces $\lambda = \pm 1$.

Demostración. Si v es un vector propio de f asociado al autovalor λ, entonces $f(v) = \lambda v$. Se tiene

$$v \cdot v = f(v) \cdot f(v) = (\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda^2\, v \cdot v,$$

y dado que $v \cdot v \neq 0$, es $\lambda^2 = 1$. □

2.3. Transformaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo

2.3.1. **Proposición.** Si $\mathcal{A} \in \mathcal{O}(2, \mathbb{R})$, entonces

$$(1) \quad \mathcal{A} \in \mathcal{O}^+(2, \mathbb{R}) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \ \mid\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \in \mathcal{O}^-(2, \mathbb{R}) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \ \mid\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Demostración. (1) Si

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

la condición $\mathcal{A}^t\, \mathcal{A} = I$ es equivalente a las condiciones

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a\, c + b\, d = 0, \quad c^2 + d^2 = 1.$$

La condición $\det(\mathcal{A}) = 1$ equivale a $ad - bc = 1$. Resolviendo el sistema

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a\, c + b\, d = 0, \quad a\, d - b\, c = 1,$$

se tiene que $c = -b$ y $d = a$.

(2) Se prueba de forma análoga a (1). □

2.3.2. **Proposición.** Sea V un plano vectorial euclídeo, $B = (v_1, v_2)$ una base ortonormal de V y $f : V \to V$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Se tiene:

$$(1) \quad f \in \mathcal{O}^+(V) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \ \mid\ f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$(2) \quad f \in \mathcal{O}^-(V) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \ \mid\ f_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Además, $a = v_1 \cdot f(v_1)$.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y de la proposición 2.2.17. □

2.3.3. **Proposición.** El grupo $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ es abeliano.

Demostración.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

□

2.3.4. **Corolario.** Si V es un plano vectorial euclídeo, entonces $\mathcal{O}^+(V)$ es un grupo abeliano.

Demostración. Por la proposición 2.2.17, los grupos $\mathcal{O}^+(V)$ y $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ son isomorfos. □

2.3.5. **Proposición.** Sea V un plano vectorial euclídeo y sean u y v vectores no nulos de V tales que $\|u\| = \|v\|$. Existe un único giro $f \in \mathcal{O}^+(V)$ tal que $f(u) = v$.

Demostración. Sea $B = (v_1, v_2)$ una base ortonormal de V y sean (x_1, x_2), (y_1, y_2) las coordenadas de u y v, respectivamente, en la base B. Veamos que existe una matriz ortogonal

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

tal que

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema

$$x_1 a - x_2 b = y_1, \quad x_2 a + x_1 b = y_2,$$

se tiene que

$$a = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|u\|^2}, \quad b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\|u\|^2}, \quad a^2 + b^2 = \frac{\|u\|^2 \, \|v\|^2}{\|u\|^4} = 1.$$

Si f es el giro de V cuya matriz asociada respecto a la base B es la matriz $\mathcal{A}$ que acabamos de obtener, entonces $f(u) = v$. □

Obsérvese que en un plano vectorial euclídeo un giro está determinado conocida la imagen de un vector no nulo.

2.3.6. **Lema.** Sea V un plano vectorial euclídeo, u y v vectores unitarios de V y $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Se verifica

$$u \cdot f(u) = v \cdot f(v).$$

Demostración. Por la proposición 2.3.5, existe un giro g tal que $g(u) = v$. Así,

$$u \cdot f(u) = g(u) \cdot g(f(u)) = g(u) \cdot f(g(u)) = v \cdot f(v).$$ □

2.3.7. **Definición.** Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f un giro de V. Se llama *coseno* de f, y se denota por $\cos f$, al número real

$$\cos f = v \cdot f(v),$$

donde v es un vector unitario cualquiera de V.

2.3.8. **Corolario.** Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f un giro de V. Si B y B' son bases ortonormales de V y si

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad f_{B'} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad {a'}^2 + {b'}^2 = 1.$$

entonces $a = a' = \cos f$ y $b = \pm\, b'$.

Demostración. Pongamos $B = (v_1, v_2)$ y $B' = (v_1', v_2')$. Por la proposición 2.3.2 y la definición 2.3.7, se tiene

$$a = v_1 \cdot f(v_1) = \cos f = v_1' \cdot f(v_1') = a'.$$

Por tanto, $b^2 = 1 - a^2 = b'^2$, luego $b = \pm b'$. $\square$

2.3.9. **Nota.** El valor de b en el corolario anterior depende de la base ortonormal considerada en V. Por ejemplo, si $B = (v_1, v_2)$ es una base ortonormal de V y

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

entonces la matriz asociada a f respecto a $B' = (v_2, v_1)$ es

$$f_{B'} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

2.3.10. **Definición.** Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se dice que las bases B y B' *tienen la misma orientación* si el determinante de la matriz de cambio de base $\mathrm{id}_{B\,B'}$ es positivo; en caso contrario se dice que *tienen distinta orientación*.

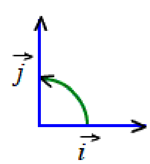
La relación "tener la misma orientación" en el conjunto de bases de V es una relación de equivalencia. Existen solamente dos clases de equivalencia distintas para esta relación. Si B es una base de V, la clase de equivalencia $[B]$ se dice que es una *orientación* en V.

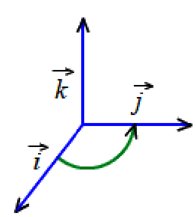
El par $(V, [B])$ se llama *espacio vectorial orientado*. Diremos que V *está orientado con la base* B para indicar que consideramos $(V, [B])$ y en este caso las bases de $[B]$ se dice que son bases de *orientación positiva* y las bases de V que no están en $[B]$ se dice que son bases de *orientación negativa*.

Consideramos que $\mathbb{R}^n$ está orientado con la base canónica.

El espacio V_2 de los vectores libres del plano se considera orientado con la base ortonormal $C = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2; O\}$ del plano ordinario.

El espacio V_3 de los vectores libres del espacio se considera orientado con la base ortonormal $C = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ del espacio ordinario.





2.3.11. **Proposición.** Sea V un plano vectorial euclídeo orientado y sea f un giro de V. Sean B y B' son bases ortonormales de V tales que

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad f_{B'} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 = 1.$$

Si B y B' tienen la misma orientación, entonces $f_B = f_{B'}$. Si B y B' tienen distinta orientación, entonces $a' = a$ y $b' = -b$

Demostración. Dado que B y B' son bases ortonormales, se tiene que $\mathrm{id}_{B'B} \in \mathcal{O}(2,\mathbb{R})$ por el lema 2.2.10. Si además, B y B' tienen la misma orientación, $1_{B'B} \in \mathcal{O}^+(2,\mathbb{R})$; las matrices f_B y $f_{B'}$ están también en el grupo abeliano $\mathcal{O}^+(2,\mathbb{R})$ y entonces

$$f_{B'} = \mathrm{id}_{BB'}\, f_B\, \mathrm{id}_{B'B} = \mathrm{id}_{BB'}\, \mathrm{id}_{B'B}\, f_B = f_B.$$

Si $B = (v_1, v_2)$ y las bases B y B' tienen distinta orientación, entonces las bases $B'' = (v_2, v_1)$ y B' tienen igual orientación. Por tanto,

$$f_{B'} = f_{B''} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \qquad \square$$

2.3.12. **Definición.** ([10, p. 248]) Los elementos del grupo abeliano cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ con la operación adición se llaman *ángulos orientados*.

Por definición, un ángulo orientado es un subconjunto de $\mathbb{R}$ de la forma

$$\varphi + 2\pi\mathbb{Z} = \{\varphi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

para algún $\varphi \in \mathbb{R}$. Cada ángulo orientado tiene un único elemento φ_0, $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, con el que lo identificaremos habitualmente, ya que existe una biyección entre el conjunto $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ y el intervalo semiabierto $[0,\, 2\pi)$. En efecto, si $\varphi + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq \varphi/2\pi < n+1$ y entonces $2\pi\, n \leq \varphi < (n+1)2\pi$, equivalentemente, $0 \leq \varphi - 2\pi\, n < 2\pi$. Así, $\varphi + 2\pi\mathbb{Z} = (\varphi - 2\pi n) + 2\pi\mathbb{Z}$.

Si $\varphi \in \mathbb{R}$ denotaremos por R_φ la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Dado que R_φ es una matriz ortogonal y que $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, $R_\varphi \in \mathcal{O}^+(2,\mathbb{R})$.

2.3.13. **Proposición.** Se tiene el isomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} R\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{O}^+(2,\mathbb{R}) \\ \varphi + 2\pi\mathbb{Z} &\longmapsto R_\varphi, \end{aligned}$$

Demostración. Puesto que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, si $\varphi + 2\pi\mathbb{Z} = \psi + 2\pi\mathbb{Z}$, equivalentemente si $\varphi - \psi \in 2\pi\mathbb{Z}$, entonces $R_\varphi = R_\psi$. Así, R esta bien definida; además, R es biyectiva, puesto que para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ existe un único $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\varphi$ y $b = \operatorname{sen}\varphi$ ([7, Ch. IV, Theorem 9]). La aplicación R es un homomorfismo de grupos, puesto que

$$R_\varphi\, R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\operatorname{sen}(\varphi+\psi) \\ \operatorname{sen}(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = R_{\varphi+\psi}. \qquad \square$$

2.3.14. **Definición.** Sea V un plano vectorial euclídeo orientado y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Se llama *giro de ángulo orientado* $\varphi + 2\pi\mathbb{Z}$, o también *giro de ángulo orientado* φ, al giro $G_\varphi\colon V \to V$ cuya matriz asociada respecto a cualquier base ortonormal de V de orientación positiva es

$$(G_\varphi)_B = R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Si B es una base ortogonal de V de orientación positiva y $\Phi_B\colon \mathcal{O}^+(V) \to \mathcal{O}^+(2,\mathbb{R})$ es el isomorfismo de grupos dado por $\Phi_B(f) = f_B$, entonces se tiene el siguiente isomorfismo entre el grupo de los ángulos orientados y el grupo de los giros de V

$$\Phi_B^{-1} \circ R\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}^+(V),$$

donde $(\Phi_B^{-1} \circ R)(\varphi + 2\pi\mathbb{Z}) = G_\varphi$, para $\varphi \in [0, 2\pi)$; este isomorfismo no depende de la base ortonormal B de V de orientación positiva considerada,

2.3.15. **Definición.** Sea V un plano vectorial euclídeo orientado y $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Se llama *ángulo del giro* f al ángulo orientado $\varphi + 2\pi\mathbb{Z}$ o también al número real $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $f = G_\varphi$; es decir, si B es una base ortonormal de V de orientación positiva y

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

el ángulo del giro f es el número real $\varphi \in [0, 2\pi)$, tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = b$.

Si u y v son vectores de V no nulos, se llama *ángulo orientado entre* u *y* v al ángulo del giro f tal que

$$f\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big) = \frac{v}{\|v\|}.$$

2.4. Clasificación de las transformaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo

2.4.1. **Teorema.** Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f una transformación ortogonal de V. Se tiene:

(1) Si $f \in \mathcal{O}^+(V)$, $f \neq \mathrm{id}_V$, y B es una base ortonormal de V tal que

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a^2 + b^2 = 1,$$

entonces las raíces del polinomio característico de f son $a \pm bi \neq 1$ y el coseno de f es a.

(2) Si $f \in \mathcal{O}^-(V)$, entonces f tiene los autovalores 1 y -1; en este caso existe una base ortonormal B de V tal que la matriz asociada a f respecto a B es la matriz

$$f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

luego f es la simetría respecto al subespacio propio $V_1 = \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_V)$.

Demostración. (1) El polinomio característico de f es

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} a - X & -b \\ b & a - X \end{vmatrix} = X^2 - 2aX + 1.$$

Las raices de $P_f(X)$ son $a \pm bi$. Si $b = 0$ y $a = 1$, entonces $f = \mathrm{id}_V$. Si $b = 0$ y $a = -1$, entonces $f = -\mathrm{id}_V$. Si el plano euclídeo V está orientado y B es una base ortonormal de orientación positiva, entonces f es un giro de ángulo φ, con $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = b$.

(2) Si f es una reflexión, entonces, por la proposición 2.3.2,

$$f_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

El polinomio característico de f es

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ b & -a - X \end{vmatrix} = X^2 - 1.$$

Sus autovalores son 1 y -1. Si v un vector propio asociado a 1 y w un vector propio asociado a -1, los vectores v y w son distintos de cero y ortogonales. En efecto, por ser f una transformación ortogonal,

$$v \cdot w = f(v) \cdot f(w) = -\, v \cdot w \;\Rightarrow\; v \cdot w = 0.$$

Por el lema 2.1.18, los vectores v y w son linealmente independientes. Si $v_1 = v/\|v\|$ y $v_2 = w/\|w\|$, entonces $B = (v_1, v_2)$ es una base ortonormal de V y

$$f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $f = S_{\langle v_1 \rangle}$ y $\langle v_1 \rangle = \mathrm{Nuc}(f - \mathrm{id}_V)$. □

2.4.2. **Corolario.** Sea V un plano vectorial euclídeo. Se tiene

(1) Toda transformación ortogonal cuyo polinomio característico no tiene raíces reales es un giro.

(2) Toda reflexión es una simetría.

(3) Las transformaciones ortogonales de V son giros o simetrías respecto a subespacios de dimensión 1.

2.4.3. **Corolario.** Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f una transformación ortogonal de V. Se tiene

(1) Si el único vector fijo de f es el cero, entonces f es un giro y $f \neq \mathrm{id}_V$.

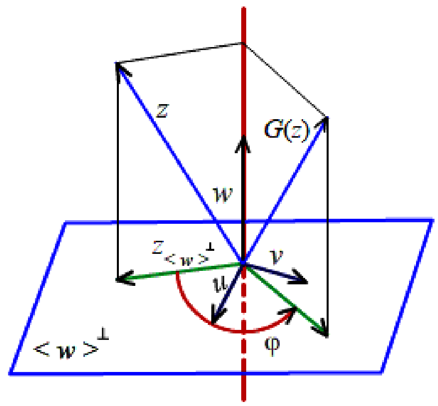
(2) Si f tiene solo un subespacio de vectores fijos de dimensión 1, entonces f es la simetría respecto a ese subespacio.

2.5. Clasificación de las transformaciones ortogonales del espacio vectorial euclídeo tridimensional

Utilizando la clasificación de transformaciones ortogonales de un plano vectorial euclídeo vamos a describir las transformaciones ortogonales del espacio vectorial euclídeo tridimensional .

2.5.1. **Definición** Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y $w \in V$, $w \neq 0$. Se dice que una transformación ortogonal de V es un *giro de eje* $\langle w \rangle$ si $f = f_1 \perp \mathrm{id}_{\langle w \rangle}$, donde f_1 es un giro en el plano vectorial euclídeo $\langle w \rangle^{\perp}$.

2.5.2. **Definición.** ([13, p. 333]) Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado y $w \in V$, $w \neq 0$. se llama *giro de eje orientado* $\langle w \rangle$ y *ángulo* φ a la transformación ortogonal $G_{\langle w \rangle, \varphi} = G_{\varphi} \perp \mathrm{id}_{\langle w \rangle}$, donde el plano $\langle w \rangle^{\perp}$ está orientado por una base ortonormal $B_1 = (u, v)$ tal que la base $B = (u, v, w)$ es de orientación positiva.



$G\,(z) = G_{<w>,\,\varphi}(z)$

Nota. Obsérvese que si $\langle w \rangle$ está orientado, entonces la orientación en $\langle w \rangle^{\perp}$ está bien definida. En efecto, sea $B_1' = (u', v')$ otra base ortonormal de $\langle w \rangle^{\perp}$ tal que la base $B' = (u', v', w)$ es de orientación positiva. Si

$$\mathrm{id}_{B_1' B_1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathrm{id}_{B' B} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $\det(\mathrm{id}_{B_1' B_1}) = \det(\mathrm{id}_{B' B}) > 0$. Por tanto, B_1' es otra base ortonormal de $\langle w \rangle^{\perp}$ de orientación positiva.

2.5.3. **Ejemplo.** Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual. El giro de eje orientado $\langle (0,1,1) \rangle$ y ángulo $2\pi/3$ es la transformación ortogonal

$$G_{\langle (0,1,1) \rangle,\, 2\pi/3} = G_{2\pi/3} \perp \mathrm{id}_{\langle (0,1,1) \rangle} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad G_{2\pi/3} \in \mathcal{O}^+(\langle (0,1,1) \rangle^{\perp}).$$

La base $B_1 = \big((1,0,0), (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\big)$ es una base ortonormal de orientación positiva de $\langle (0,1,1) \rangle^{\perp} = \langle (1,0,0), (0,1,-1) \rangle$. Por la definición 2.3.14,

$$(G_{2\pi/3})_{B_1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la base ortonormal $B = \big((1,0,0),(0,\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2),(0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. La matriz asociada a $G_{\langle(0,1,1)\rangle,\,2\pi/3}$ en la base B es

$$(G_{\langle(0,1,1)\rangle,2\pi/3})_B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$(G_{\langle(0,1,1)\rangle,2\pi/3})_C = \mathrm{id}_{BC}\,(G_{\langle(0,1,1)\rangle,2\pi/3})_B\,\mathrm{id}_{CB} = \mathrm{id}_{BC}\,(G_{\langle(0,1,1)\rangle,2\pi/3})_C\,(\mathrm{id}_{BC})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/4 & 3/4 \\ -\sqrt{6}/4 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

puesto que al ser id_{BC} una matriz ortogonal, $(\mathrm{id}_{BC})^{-1} = (\mathrm{id}_{BC})^t$. Así,

$$G_{\langle(0,1,1)\rangle,2\pi/3}(x,y,z) = 1/4\,(-2x - \sqrt{6}y + \sqrt{6}z, \sqrt{6}x + y + 3z, -\sqrt{6}x + 3y + z).$$

Las ecuaciones de $G_{\langle(0,1,1)\rangle,2\pi/3}$ en la base canónica son:

$$x' = 1/4\,(-2x - \sqrt{6}y + \sqrt{6}z), \quad y' = 1/4\,(\sqrt{6}x + y + 3z), \quad z' = 1/4\,(-\sqrt{6}x + 3y + z).$$

2.5.4. **Proposición.** Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sea f una transformación ortogonal de V. Existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f = f_1 \perp \mathrm{id}_{\langle v\rangle}$ o $f = f_1 \perp (-\mathrm{id}_{\langle v\rangle})$, donde $f_1 \in \mathcal{O}(\langle v\rangle^\perp)$.

Demostración. El polinomio característico de f es un polinomio con coeficientes reales de grado 3, luego tiene una raíz real. Por la proposición 2.2.23, esta raíz es 1 o -1. Sea v un vector propio asociado al autovalor 1 o al -1. Se tiene que $f\langle v\rangle = \langle v\rangle$, y por la proposición 2.2.22, $f(\langle v\rangle^\perp) = \langle v\rangle^\perp$. Si ponemos

$$f_1 = f_{|\langle v\rangle^\perp} : \langle v\rangle^\perp \to \langle\, v\,\rangle^\perp,$$

entonces $f_1 \in \mathcal{O}(\langle v\rangle^\perp)$ y $f = f_1 \perp \mathrm{id}_{\langle v\rangle}$ o $f = f_1 \perp (-\mathrm{id}_{\langle v\rangle})$. □

2.5.5. **Teorema.** Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado y sea f una transformación ortogonal de V. Sean $V_1 = \mathrm{Nuc}\,(f - \mathrm{id}_V)$ y $V_{-1} = \mathrm{Nuc}\,(f + \mathrm{id}_V)$. Se tiene:

(1) Si $f \in \mathcal{O}^+(V)$, $f \neq \mathrm{id}_V$, entonces f es un giro de eje V_1.

(2) Si $f \in \mathcal{O}^-(V)$, entonces $f = -\mathrm{id}_V$ o f es la simetría respecto al plano V_1 o f es la composición de un giro de eje V_{-1} con la simetría respecto al plano vectorial $(V_{-1})^\perp$.

Demostración. Existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f = f_1 \perp \mathrm{id}_{\langle v \rangle}$, o $f = f_1 \perp -\mathrm{id}_{\langle v \rangle}$, con $f_1 \in \mathcal{O}(\langle v \rangle^{\perp})$. Sea $B_1 = (v_1, v_2)$ una base ortonormal de $\langle v \rangle^{\perp}$ y sea $v_3 = v/\|v\|$. Consideremos la base ortonormal $B = (v_1, v_2, v_3)$. Se pueden presentar los siguientes casos:

- $f = f_1 \perp \mathrm{id}_{\langle v_3 \rangle}$, $f_1 \in \mathcal{O}^{+}(\langle v_3 \rangle^{\perp})$. Se tiene

$$(f_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

  En este caso f es un giro. Si $a = 1$, entonces $f = \mathrm{id}_V$. Si $a \neq 1$, entonces los autovalores de f son 1 y $a \pm bi \neq 1$, con $a^2 + b^2 = 1$; en este caso f es un giro de eje orientado $V_1 = \langle v_3 \rangle$ y ángulo φ. Si la base B es de orientación positiva, el ángulo φ es tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = b$ y si B es una base de orientación negativa, el ángulo φ es tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = -b$.

- $f = f_1 \perp \mathrm{id}_{\langle v_3 \rangle}$, $f_1 \in \mathcal{O}^{-}(\langle v_3 \rangle^{\perp})$. Sea $B_1' = (v_1', v_2')$ una base ortonormal de $\langle v_3 \rangle^{\perp}$ tal que

$$(f_1)_{B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Pongamos $B' = (v_1', v_2', v_3)$. Entonces

$$f_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  luego f es una reflexión y además f es la simetría respecto al plano vectorial $V_1 = \langle v_1', v_3 \rangle$.

- $f = f_1 \perp (-\mathrm{id}_{\langle v_3 \rangle})$, $f_1 \in \mathcal{O}^{+}(\langle v_3 \rangle^{\perp})$. En este caso,

$$(f_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

  luego f es una reflexión. Si $a = 1$, $b = 0$, entonces f es la simetría respecto al plano $V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si $a = -1$, $b = 0$, entonces $f = -\mathrm{id}_V$. Si $b \neq 0$ y las raíces del polinomio característico de f son -1 y $a \pm bi$, con $a^2 + b^2 = 1$, teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  se tiene que f es la composición de un giro de eje orientado $V_{-1} = \langle v_3 \rangle$ y ángulo φ con la simetría respecto al subespacio $(V_{-1})^{\perp} = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si la base B es de orientación positiva, entonces el ángulo φ es tal que $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = b$ y si la base B es de orientación negativa, entonces el ángulo φ es tal que $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = -b$.

- $f = f_1 \perp (-\mathrm{id}_{\langle v_3\rangle})$, $f_1 \in \mathcal{O}^-(\langle v_3\rangle^\perp)$. Sea $B_1' = \{v_1', v_2'\}$ una base ortonormal de $\langle v_3\rangle^\perp$ tal que

$$(f_1)_{B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $B' = (v_1', v_2', v_3)$, se tiene

$$f_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

luego f es el giro de eje $V_1 = \langle v_1'\rangle$ y ángulo π. $\square$.

2.5.6. **Corolario.** Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado y sea f una transformación ortogonal de V. Se tiene:

(1) Si 1 es un autovalor de f de multiplicidad 1 y las otras dos raíces del polinomio característico son $a \pm bi$, $a^2 + b^2 = 1$, entonces f es un giro de eje orientado V_1 y ángulo φ (que depende de la orientación de V_1), tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = \pm b$.

(2) Si 1 es un autovalor de f de multiplicidad 2 y -1 es un autovalor de f de multiplicidad 1, entonces f es la simetría respecto al plano vectorial V_1.

(3) Si -1 es un autovalor de f de multiplicidad 1 y las otras dos raíces del polinomio característico son $a \pm bi \neq \pm 1$, $a^2 + b^2 = 1$, entonces f es la composición de un giro de eje orientado V_{-1} y ángulo φ (que depende de la orientación de V_{-1}), tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = \pm b$, con la simetría respecto al plano vectorial $(V_{-1})^\perp$.

2.5.7. **Corolario.** Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sea f una transformación ortogonal de V. Se tiene:

(1) Si f tiene solo un subespacio de vectores fijos de dimensión 1, entonces f es un giro de eje ese subespacio.

(2) Si f tiene únicamente un subespacio de vectores fijos de dimensión 2, entonces f es la simetría respecto a ese subespacio.

(3) Si el único vector fijo de f es el cero, entonces f es la composición de un giro con una simetría respecto a un plano vectorial.

2.5.8. **Ejemplo.** Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual. La aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (-z, -x, y)$$

es una transformación ortogonal, puesto que su matriz asociada respecto a la base canónica es

$$f_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es una matriz ortogonal ($f_C^t\, f_C = I$). Puesto que $\det(f) = \det(f_C) = 1$, f es un giro. El polinomio característico de f es

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X^3 + 1.$$

Las raíces de $P_f(X)$ son 1, $-1/2 + \sqrt{3}/2$ y $-1/2 - \sqrt{3}/2$. Por el corolario 2.5.6, f es un giro de eje la recta vectorial

$$\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0,\ x + y = 0\} = \langle(-1, 1, 1)\rangle.$$

El ángulo del giro f es un número real φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$, tal que $\cos\varphi = -1/2$, luego $\varphi = 2\pi/3$ o $\varphi = 4\pi/3$, dependiendo de la orientación que consideremos en el eje del giro. Veamos cual es el ángulo de f si orientamos el eje de giro con la base $\{(-1, 1, 1)\}$. Consideremos la base ortonormal $B_1 = \{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6)\}$ de $\langle(-1, 1, 1)\rangle^\perp$. Dado que la base

$$B = \{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6), (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)\},$$

es de orientación positiva, la base B_1 es de orientación positiva, Se tiene

$$f_B = \mathrm{id}_{CB}\, f_C\, \mathrm{id}_{BC} = (\mathrm{id}_{BC})^t\, f_B\, (\mathrm{id}_{BC})$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $f_1 = f_{|\langle(-1,1,1)\rangle^\perp}$, entonces

$$(f_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

y el ángulo del giro f es $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\varphi = -1/2$ y $\operatorname{sen}\varphi = -\sqrt{3}/2$, es decir $\varphi = 4\pi/3$. Si orientamos el eje de giro con la base $\{(1, -1, -1)\}$, entonces el ángulo del giro es $2\pi/3$.

2.5.9. **Ejemplo.** Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual. La aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}\,(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z)$$

es una transformación ortogonal, puesto que su matriz asociada respecto a la base canónica es

$$f_C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

que es una matriz ortogonal ($f_C^t f_C = I$). Como $\det(f) = \det(f_C) = -1$, f es una reflexión. El polinomio característico de f es

$$P_f(X) = -(X^2 - 1)(X - 1).$$

Las raíces de $P_f(X)$ son 1 (de multiplicidad 2) y -1 (de multiplicidad 1). Por el corolario 2.5.6, f es la simetría respecto al plano vectorial

$$\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

2.6. Producto vectorial

Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado.

2.6.1. **Definición.** Sea $B = (v_1, v_2, v_3)$ una base ortonormal de V de orientación positiva. Sean u y v vectores cuyas coordenadas en B son (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3), respectivamente. Se llama *producto vectorial* de u y v al vector $u \wedge v$ de coordenadas

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

en la base B. Utilizaremos la notación

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2.6.2. **Proposición.**

(1) Los vectores no nulos u y v son linealmente dependientes si, y solo si, $u \wedge v = 0$.

(2) El vector $u \wedge v$ es un vector ortogonal a u y a v.

(3) Si u y v son linealmente independientes, entonces $(u, v, u \wedge v)$ es una base de V de orientación positiva.

(4) $\| u \wedge v \| = \| u \| \, \| v \| \operatorname{sen} \angle(u, v)$, siendo $\angle(u, v)$ el ángulo no orientado que forman u y v.

(5) La aplicación $\wedge : V \times V \to V$, $\wedge(u, v) = u \wedge v$, es bilineal y antisimétrica.

Demostración. Sean u y v vectores cuyas coordenadas en la base ortonormal de orientación positiva B son (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3), respectivamente.

(1) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$ o, equivalentemente, $(x_1, x_2, x_3) = \lambda (y_1, y_2, y_3)$; así,

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1 \iff \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0) \iff u \wedge v = 0.$$

(2) Se tiene

$$u \cdot (u \wedge v) = x_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Análogamente se prueba que $v \cdot (u \wedge v) = 0$.

(3) Los vectores u, v y $u \wedge v$ son linealmente independientes, puesto que

$$a\,u+b\,v+c\,(u\wedge v) = 0 \Rightarrow a\,u\cdot(u\wedge v)+b\,v\cdot(u\wedge v)+c\,(u\wedge v)\cdot(u\wedge v) = 0 \Rightarrow c\,(u\wedge v)\cdot(u\wedge v) = 0 \Rightarrow c = 0,$$

luego $a\,u + b\,v = 0$. Por ser u y v vectores linealmente independientes, $a = b = 0$.
Si $B' = (u, v, u \wedge v)$, entonces

$$\det(1_{B'B}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_2 & y_2 & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \|u \wedge v\|^2 > 0.$$

(4) Se tiene

$$\begin{aligned} \|u\|^2\|v\|^2 \operatorname{sen}^2 \angle(u,v) =& \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2 \angle(u,v) \\ =& (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ =& \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \|u \wedge v\|^2. \end{aligned}$$

(5) $\wedge$ es antisimétrica:

$$v \wedge u = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = -(u \wedge v).$$

□

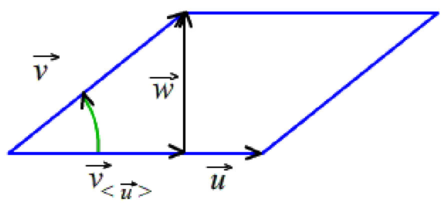
2.6.3. **Proposición.** Si u y v son vectores linealmente independientes, entonces $u\wedge v$ está determinado por (2), (3) y (4). Así, $u \wedge v$ no depende de la base ortonormal de orientación positiva considerada.

Demostración. Sea w un vector ortogonal a u y a v tal que (u, v, w) es una base de orientación positiva y $\|w\| = \|u\|\|v\|\operatorname{sen}\angle(u, v)$. Se tiene que $\langle u\wedge v\rangle = \langle u, v\rangle^\perp = \langle w\rangle$, luego existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $w = \lambda\,(u\wedge v)$. Dado que $\|w\| = \|u \wedge v\|$, se obtiene que $\|w\| =\mid \lambda \mid\ \|u \wedge v\| = \|u \wedge v\|$, luego $\mid \lambda \mid= 1$. Por tener las bases $(u, v, u \wedge v)$ y (u, v, w) la misma orientación,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda > 0.$$

Por tanto, $\lambda = 1$. □

2.6.4. **Ejemplo.** En el espacio vectorial euclídeo V_3 de vectores libres del espacio, si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores libres linealmente independientes, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ es un vector libre ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ cuyo módulo es el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$,



$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{w}|,$$

y cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos situado en la dirección de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ que gira de $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ siguiendo el menor ángulo.

2.6.5. ***Observación.*** Si (u, v, w) es una base ortonormal de V de orientación positiva, entonces $w = u \wedge v$. En efecto, w verifica las condiciones (2), (3) y (4) de la proposición 2.6.2.

2.6.6. **Ejemplo.** En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ del ejemplo 2.1.23 vamos a calcular el producto vectorial $(1, 2, 0) \wedge (2, 3, 1)$, utilizando la base ortonormal

$$B = \big(v_1 = (\sqrt{2}/2, 0, 0)\,,\ v_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, 0)\,,\ v_3 = (1, 2, 1)\big),$$

obtenida en el ejemplo 2.1.23. La base B es de orientación positiva, puesto que $\det(\mathrm{id}_{BC}) = 2 > 0$. Dado que $(1, 2, 0) = \sqrt{2}\, v_2$ y que $(2, 3, 1) = \sqrt{2}/2\, v_1 + \sqrt{2}/2\, v_2 + v_3$, se tiene

$$(1, 2, 0) \wedge (2, 3, 1) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}\, v_1 - v_3 = (0, -2, -1).$$

2.6.7. **Producto mixto.** Sea B una base ortonormal de V de orientación positiva. Sean u, v y w vectores V. Se llama *producto mixto* de la terna (u, v, w) al número real

$$(u\, v\, w) = u \cdot (v \wedge w).$$

2.6.8. **Propiedades del producto mixto.**

(1) Sea $B = (v_1, v_2, v_3)$ una base ortonormal de V de orientación positiva. Sean u,v y w vectores de coordenadas (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) y (z_1, z_2, z_3), respectivamente, en la base B. Se tiene

$$(u\,v\,w) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

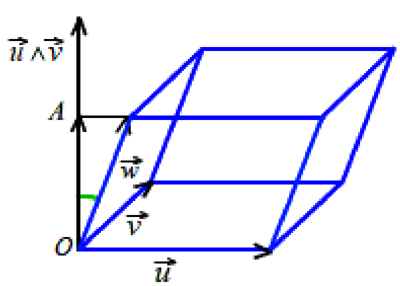
(2) $(\,u\,v\,w\,) = (\,v\,w\,u\,) = (\,w\,u\,v\,)$.

Demostración. (1)

$$\begin{aligned}(u\,v\,w) =&(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} v_1 + \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} v_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} v_3 \right) \\ =&x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $(u\,v\,w) = -(v\,u\,w) = (v\,w\,u) = -(w\,v\,u) = (w\,u\,v)$. □

2.6.9. **Ejemplo.** En el espacio vectorial euclídeo V_3 de los vectores libres del espacio, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores libres linealmente independientes, entonces el valor absoluto del producto mixto $(\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \overrightarrow{w})$ es igual al volumen del paralelepípedo determinado por estos tres vectores.



$$|(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{w}|\,|\cos\angle(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}, w)| = |\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{OA}|.$$

2.7. Ejercicios.

(1) Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Demuestra que el método de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a una base B proporciona una base ortogonal de V con la misma orientación que B.

(2) Sea V un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión finita y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Prueba que si $f \in \mathcal{O}^+(V)$, entonces B y $f(B) = (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ tienen la misma orientación, y que si $f \in \mathcal{O}^-(V)$, B y $f(B)$ tienen distinta orientación.

(3) Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sean $u, v, w \in V - \{0\}$, $u, v \notin \langle w \rangle$, tales que la proyección ortogonal de u sobre $\langle w \rangle$ coincide con la proyección ortogonal de v sobre $\langle w \rangle$. Prueba que si $\|u\| = \|v\|$, entonces existe un único giro $f \in \mathcal{O}^+(V)$ de eje $\langle w \rangle$ tal que $f(u) = v$. Prueba que todo giro de V está determinado conocidos el eje de giro y la imagen de un vector no nulo que no está en el eje de giro.

(4) Calcula las ecuaciones en la base canónica del giro f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(0, 1, -1) = (0, 1, -1)$ y $f(1, 0, 1) = (-1, -1, 0)$.

(5) Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado. Prueba que si f es un giro de V, entonces $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$, para todo $u, v \in V$. Prueba que si f es una reflexión de V, entonces $f(u \wedge v) = f(v) \wedge f(u)$, para todo $u, v \in V$.

(6) Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n. Prueba que si $n = 1$, entonces $\mathcal{O}(V) = \{1_V, -1_V\}$. Prueba que si $n \geq 2$, entonces toda transformación ortogonal se puede escribir como composición de $r \leq n$ simetrías (Teorema de Cartan-Dieudonné).

(7) Considera en $\mathbb{R}^4$ la forma bilineal σ dada por:

$$\sigma((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4.$$

(a) ¿Es $(\mathbb{R}^4, \sigma)$ un espacio vectorial euclídeo?

(b) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación en la base canónica es $y = 0$. ¿Es U con la forma bilineal inducida un espacio vectorial euclídeo? En caso afirmativo, calcula una base ortonormal de U.

(c) Calcula una isometría $f : U \to \mathbb{R}^m$, para algún m, considerando en $\mathbb{R}^m$ el producto escalar usual.

(8) Considera la forma bilineal $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\sigma((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

(a) Demuestra que σ es un producto escalar y calcula una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \sigma)$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica C es

$$f_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prueba que f es una transformación ortogonal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \sigma)$. Clasifica f y calcula sus elementos geométricos.

(9) Calcula las ecuaciones en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la simetría respecto al plano vectorial U cuya ecuación en la base canónica es $x + y + z = 0$.

(10) Calcula las ecuaciones en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ del giro de eje orientado la recta vectorial $\langle (1, 1, 1) \rangle$ y cuyo ángulo es $\dfrac{\pi}{6}$.

3. ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

En este tema se estudian los espacios afines euclídeos. Utilizando la estructura del espacio vectorial euclídeo asociado al espacio afín, se introducen los conceptos geométricos de perpendicularidad entre variedades lineales y distancia. Se estudian los movimientos de un espacio afín euclídeo y se clasifican en dimensiones 2 y 3.

3.1. Espacios afines euclídeos

3.1.1. **Definición.** ([3, p. 503]) Se dice que un espacio afín $\mathbb{A}$ sobre V es un *espacio afín euclídeo* si V es un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un espacio afín euclídeo sobre V es *orientado* si el espacio vectorial V está orientado. Si V es un espacio vectorial euclídeo denotaremos por V el espacio afín de V.

En esta sección vamos a considerar espacios afines euclídeos de dimensión finita.

3.1.2. **Definición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V y sean P y Q dos puntos de $\mathbb{A}$. Se llama *distancia* entre P y Q a la longitud del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \|.$$

3.1.3. **Propiedades de la distancia.**

(1) $d(P,Q) \geq 0$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(2) $d(P,Q) = 0$ si, y solo si, $P = Q$.

(3) $d(P,Q) = d(Q,P)$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(4) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$, para todo $P, Q, R \in \mathbb{A}$ (Desigualdad triangular).

(5) Si P, Q y R son tres puntos de $\mathbb{A}$ y $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ son vectores ortogonales, entonces

$$d(P,Q)^2 = d(P,R)^2 + d(R,Q)^2.$$

3.1.4. **Definición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V. Se dice que una referencia $\mathcal{R} = \{E_1, \dots, E_n; O\}$ de $\mathbb{A}$ es una *referencia rectangular* si la base $B_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{OE_1}, \dots, \overrightarrow{OE_n})$ es una base ortonormal de V. Si $\mathcal{R}$ es una referencia rectangular de $\mathbb{A}$, las coordenadas de un punto P en $\mathcal{R}$ se dice que son las *coordenadas rectangulares* de P en $\mathcal{R}$.

Todo espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ sobre V de dimensión finita tiene referencias rectangulares. En efecto, si $B = (v_1, \dots, v_n)$ es una base ortonormal de V y $P \in \mathbb{A}$, entonces se tiene la referencia rectangular $\mathcal{R} = \{P + v_1, \dots, P + v_n; P\}$.

La referencia canónica de $\mathbb{R}^n$ es una referencia rectangular de $\mathbb{R}^n$ cuando se considera en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar usual. También son referencias rectangulares las referencias canónicas del plano y espacio ordinario.

3.1.5. **Proposición.** Sea $\mathcal{R} = \{E_1, \dots, E_n; O\}$ una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ y $\mathcal{R}' = \{P_1, \dots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$. Sea P un punto de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la referencia $\mathcal{R}$ y coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$ en la referencia $\mathcal{R}'$. Consideremos la ecuación del cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

La referencia $\mathcal{R}'$ es rectangular si, y solo si, la matriz $(a_{ij}) = \mathrm{id}_{B_{\mathcal{R}'}\,B_{\mathcal{R}}}$ es una matriz ortogonal.

Demostración. La referencia $\mathcal{R}'$ es rectangular si, y solo si, la base $B_{\mathcal{R}'}$ es ortonormal, equivalentemente, por el lema 2.2.10, la matriz $\mathrm{id}_{B'_{\mathcal{R}}, B_{\mathcal{R}}}$ es una matriz ortogonal. $\square$

Si la matriz (a_{ij}) es una matriz ortogonal, se dice que la ecuación $(\star)$ es la *ecuación matricial de cambio de coordenadas rectangulares* de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

3.1.6. **Definición** Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines euclídeos sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Una aplicación $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ se dice que es un *isomorfismo de espacios afines euclídeos* si es una afinidad cuya aplicación lineal asociada $\overrightarrow{\alpha}\colon V \to V'$ es una isometría. Se dice que los espacios afines euclídeos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ *son isomorfos* si existe un isomorfismo de espacios afines euclídeos $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$.

3.1.7. **Proposition** Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo sobre V de dimensión n, entonces $\mathbb{A}$ es isomorfo al espacio afín euclídeo de $\mathbb{R}^n$ considerando en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar usual.

Demostración. Sea $\mathcal{R} = \{E_1, \dots, E_n; O\}$ una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ cuya base asociada es $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \dots, v_n)$. La aplicación del ejemplo 1.3.12 (2),

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{R}}\colon \mathbb{A} &\longrightarrow K^n \\ P &\longmapsto (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

donde $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de P en $\mathcal{R}$, es un isomorfismo de espacios afines euclideos, puesto que su aplicación lineal asociada

$$\overrightarrow{\alpha_{\mathcal{R}}}\colon V \longrightarrow K^n, \quad \overrightarrow{\alpha_{\mathcal{R}}}(v_i) = e_i,\ i = 1, \dots, n,$$

donde $C = (e_1, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es una isometría. En efecto,

$$\overrightarrow{\alpha_{\mathcal{R}}}(v_i) \cdot \overrightarrow{\alpha_{\mathcal{R}}}(v_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = v_i \cdot v_j,$$

para $i, j = 1, \dots, n$. $\square$

En particular, si $\mathbb{A}$ es el plano (espacio) afín euclídeo ordinario y $\mathcal{C}$ es la referencia canónica, el isomorfismo $\alpha_{\mathcal{C}}$ permite identificar el plano (espacio) afín euclídeo ordinario con $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$).

3.1.8. **Proposition.** Sea $\mathcal{R} = \{E_1, \ldots, E_n; O\}$ una referencia rectangular del espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ y sean P y P' puntos cuyas coordenadas en $\mathcal{R}$ son $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$, respectivamente. Se tiene

$$d(P, P') = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Demostración. Sea $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$. Se tiene

$$d(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \| -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\| = \|\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)\, v_i\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \qquad \square$$

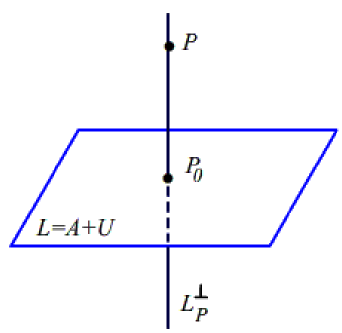
3.1.9. **Definición.** Consideremos el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ sobre V. Se dice que dos variedades lineales no vacías $L_1 = A_1 + U_1$ y $L_2 = A_2 + U_2$ son *perpendiculares* si el subespacio U_1 es ortogonal al subespacio U_2.

3.1.10. **Definición.** Consideremos el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ sobre V. Sea $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $L \neq \varnothing$, y $P \in \mathbb{A}$. Se llama *variedad perpendicular* a L *que pasa por* P a la variedad lineal $L_P^{\perp} = P + U^{\perp}$.

3.1.11. **Proposición.** Las variedades lineales L y $L_P^{\perp}$ se cortan en un único punto.

Demostración. Si $L = A + U$, entonces $L_P^{\perp} = P + U^{\perp}$. Dado que $\overrightarrow{AP} \in V = U \perp U^{\perp}$, es $L \cap L_P^{\perp} \neq \varnothing$. Sea $P_0 \in L \cap L_P^{\perp}$. Se tiene

$$L \cap L_P^{\perp} = P_0 + (U \cap U^{\perp}) = \{P_0\}.$$



$\square$

3.1.12. **Definición.** Consideremos el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ sobre V. Se llama *proyección ortogonal del punto* P *sobre la variedad lineal* L al punto de corte de L y $L_P^{\perp}$; es decir, es el punto $P_0 \in L$, tal que la recta que pasa por P y P_0 es perpendicular a L.

3.1.13. **Definición.** Sean L_1 y L_2 variedades lineales del espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ sobre V, $L_1 \neq \varnothing$, $L_2 \neq \varnothing$. Se llama *distancia* de L_1 a L_2 al número real

$$d(L_1, L_2) = \text{ínf}\, \{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in L_1, P_2 \in L_2\}.$$

3.1.14. **Distancia de un punto a una variedad lineal.** Consideremos el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ sobre el espacio vectorial V. Sea L una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $L \neq \varnothing$ y sea $P \in \mathbb{A}$. Se define $d(P, L) = d(\{P\}, L)$. Entonces

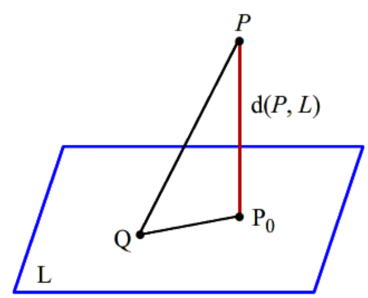
$$d(P, L) = d(P, P_0),$$

siendo P_0 la proyección ortogonal de P sobre L.

Demostración. Se tiene

$$d(P, Q)^2 = d(P, P_0)^2 + d(P_0, Q)^2 \geq d(P, P_0)^2,$$

para todo $Q \in L$.



□

Obsérvese que

$$d(P, L) = d(P, P_0) = \text{mín}\, \{d(P, Q) \mid Q \in L\}.$$

3.1.15. **Distancia de un punto a un hiperplano.** Sea $\mathcal{R} = \{E_1, \ldots, E_n; O\}$ una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ y sea $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$. Si P es el punto de coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$ en $\mathcal{R}$ y H el hiperplano cuya ecuación en $\mathcal{R}$ es

$$H \equiv a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + d = 0,$$

entonces

$$d(P, H) \quad = \quad \frac{|a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Demostración. $d\,(P, H) = d\,(P, P_0)$, siendo P_0 la proyección ortogonal de P sobre H. Dado que $\overrightarrow{PP_0} = \lambda(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\overrightarrow{QP_0} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP_0} = (z_1 + \lambda a_1) v_1 + \ldots + (z_n + \lambda a_n) v_n$. Puesto que $P_0 \in H$,

$$\lambda = -\frac{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + d}{a_1^2 + \ldots + a_n^2},$$

y así,

$$d(P, H) = d(P, P_0) = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \ldots + \lambda^2 a_n^2} = |\lambda| \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \frac{|a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}. \qquad \square$$

3.1.16. **Distancia entre dos variedades lineales.** ([2, p. 519]) Si $L_1 = A_1 + U_1$ y $L_2 = A_2 + U_2$ son variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

$$d(L_1, L_2) = d(A_1, L_2'),$$

siendo L_2' la menor lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a L_2 y es paralela a L_1.

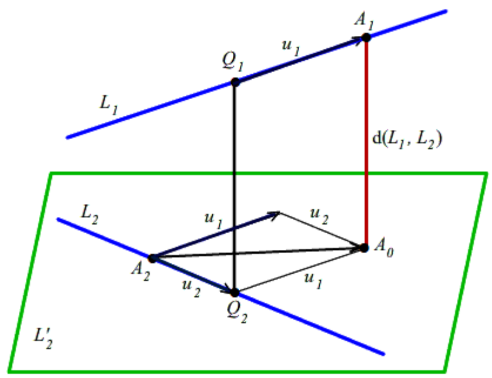
Demostración. Se tiene que $L_2' = A_2 + U_1 + U_2$. Sea A_0 la proyección ortogonal de A_1 sobre L_2'. Por 3.1.14, $d(A_1, L_2') = d(A_1, A_0)$. Dado que $\overrightarrow{A_1A_0} \in (U_1 + U_2)^\perp$, para cada $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$,

$$d(P_1, P_2)^2 = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2 = \|\overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0P_2}\|^2 = \|\overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_0P_2}\|^2 + \|\overrightarrow{A_1A_0}\|^2 \geq d(A_1, A_0)^2.$$

Así, $d(A_1, A_0) \leq d(P_1, P_2)$, para cada $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$.

Dado que $A_0 \in L_2'$, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $A_0 = A_2 + u_1 + u_2$. Pongamos

$$Q_1 = A_1 - u_1 \in L_1, \quad Q_2 = A_0 - u_1 = A_2 + u_2 \in L_2.$$



Se tiene

$$\overrightarrow{Q_1, Q_2} = \overrightarrow{A_1 - u_1, A_0 - u_1} = \overrightarrow{A_1 - u_1, A_1} + \overrightarrow{A_1, A_0} + \overrightarrow{A_0, A_0 - u_1} = \overrightarrow{A_1A_0}.$$

Luego, $d(Q_1, Q_2) = d(A_1, A_0) =\leq d(P_1, P_2)$, para cada $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$. Por tanto,

$$d(L_1, L_2) = d(Q_1, Q_2) = d(A_1, A_0) = d(A_1, L_2'). \qquad \square$$

Obsérvese que

$$d(L_1, L_2) = \text{mín}\,\{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in L_1, P_2 \in L_2\}.$$

3.1.17. **Ejemplo.** Con la forma bilineal σ dada por

$$\sigma((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3,$$

el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial euclídeo. En efecto, la matriz de Gram de σ en la base canónica $C = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ es

$$G_\sigma^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La forma bilineal σ es simétrica, puesto que $(G_\sigma^C)^t = G_\sigma^C$. Se tiene

$$\det(1) = 1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \det(G_\sigma^C) = 1 > 0.$$

Por el criterio de Sylvester, σ es definida positiva. Vamos a calcular la distancia entre las rectas $r = (1, 0, -3) + \langle (1, 1, 0) \rangle$ y $s = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, 1) \rangle$. Las rectas r y s se cruzan, luego

$$d\,(r, s) = d\,((1, 0, -3), \Pi) = d\,((1, 0, -3), P_0).$$

donde $\Pi = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$ es el plano que contiene a s y es paralelo a r, y P_0 es la proyección ortogonal de $P = (1, 0, -3)$ sobre Π. Dado que $P_0 \in \Pi$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $P_0 = (\lambda+\mu, 1+\mu, 1+\lambda)$ y puesto que

$$\overrightarrow{PP_0} = P_0 - (1, 0, -3) = (\lambda + \mu - 1, 1 + \mu, 4 + \lambda) \in \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle^\perp,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \sigma((1, 0, 1), (\lambda + \mu - 1, 1 + \mu, 4 + \lambda)) = 0 &\iff 3\lambda + \mu + 7 = 0, \\ \sigma((1, 1, 0), (\lambda + \mu - 1, 1 + \mu, 4 + \lambda)) = 0 &\iff \lambda + \mu + 5 = 0, \end{aligned}$$

luego $\lambda = -1$ y $\mu = -4$. Por tanto, $P_0 = (-5, -3, 0)$. Así,

$$d(r, s) = \|(-6, -3, 3)\| = \sqrt{\sigma((-6, -3, 3), (-6, -3, 3))} = 3\sqrt{2}.$$

3.2. El espacio afín euclídeo tridimensional

Consideraremos en esta sección un espacio afín euclídeo tridimensional orientado $\mathbb{A}$ sobre V.

3.2.1. **Distancia de un punto a una recta.** Si P es un punto de $\mathbb{A}$ y $r = A + \langle\, v \,\rangle$ una recta, entonces

$$d(P, r) = \frac{\|\, \overrightarrow{AP} \wedge v \,\|}{\|\, v \,\|}\,.$$

Demostración. Sea P_0 la proyección ortogonal de P sobre r. Entonces

$$\overrightarrow{AP} \wedge v \;=\; (\overrightarrow{AP_0} + \overrightarrow{P_0P}) \wedge v = \overrightarrow{P_0P} \wedge v.$$

Así,

$$\|\overrightarrow{AP} \wedge v\| = \|\overrightarrow{P_0P}\|\,\|v\| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{P_0P}, v) = d(P, r)\,\|\, v \,\|,$$

puesto que $\overrightarrow{PP_0}$ y v son ortogonales.

3.2.2. **Distancia entre dos planos paralelos.** Sean Π y Π' planos de $\mathbb{A}$ paralelos. Se tiene

$$d(\Pi, \Pi') = d(P, \Pi')\,,$$

siendo $P \in \Pi$ un punto cualquiera de Π. Si $\mathcal{R} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ es una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ y Π y Π' son los planos de ecuaciones

$$\Pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d = 0, \quad \Pi' \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d' = 0,$$

en $\mathcal{R}$, entonces

$$d(\Pi, \Pi') = \frac{|\; d - d' \;|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Demostración. Se sigue de 3.1.15. $\square$

3.2.3. **Distancia entre dos rectas.** Sean $r = A + \langle u \rangle$ y $s = B + \langle v \rangle$ rectas de $\mathbb{A}$. Entonces

(1) Si $r \cap s \neq \emptyset$, $d(r, s) = 0$.

(2) Si $r \parallel s$, $r \neq s$, $d(r, s) = d(P, s)$, siendo P un punto cualquiera de r.

(3) Si r y s de cruzan,

$$d\,(r, s) = \frac{|(\overrightarrow{AB} \quad u \quad v)|}{\|\, u \wedge v \,\|}\ .$$

Demostración. (3) Si r y s se cruzan, entonces

$$d(r, s) = d(A, B + \langle u, v \rangle\ )\ .$$

Sea A_0 la proyección ortogonal de A sobre $B + \langle u, v \rangle$. Se tiene que $A_0 = B + \alpha\, u + \beta\, v$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned} d(r, s)\, \|u \wedge v\| =& d(A, A_0)\, \|u \wedge v\| = |\overrightarrow{AA_0} \cdot (u \wedge v)| \\ =& |(\overrightarrow{AB} + \alpha\, u + \beta\, v)\ \cdot\ (u \wedge\ v\,)| = |\overrightarrow{AB}\ \cdot (\,u \wedge v\,)| \\ =& |\,(\,\overrightarrow{AB} \quad u \quad v\,)|\ . \quad \square \end{aligned}$$

3.2.4. **Ejemplo.** Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ del ejemplo 3.1.17, donde

$$\sigma((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

Aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ obtenemos la base ortonormal $B = \big(v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, -1, 1)\big)$ de orientación positiva.

Las rectas $r = (2, 0, 0) + \langle (1, 0, -1) \rangle$ y $s = ((0, 1, 1) + \langle (1, 0, -1) \rangle$ son paralelas y $r \neq s$, puesto que $(2, 0, 0) \notin s$. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ sobre el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \sigma)$, $d(r, s) = d((2, 0, 0), s)$, por la proposición 3.1.16.

Por 3.2.1, se tiene

$$d((2, 0, 0), s) = \frac{\|\,((2, 0, 0) - (0, 1, 1)) \wedge (1, 0, -1)\,\|}{\|\,(1, 0, -1)\,\|} = \frac{\|\,(2, -1, -1) \wedge (1, 0, -1)\,\|}{\|\,(1, 0, -1)\,\|}.$$

Las coordenadas del vector $(2, -1, -1)$ en B son $(3, -2, -1)$ y las coordenadas del vector $(1, 0, -1)$ en B son $(1, -1, -1)$. Se tiene

$$(2, -1, -1) \wedge (1, 0, -1) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = v_1 + 2v_2 - v_3.$$

Por tanto,

$$d(r, s) = \frac{\|v_1 + 2v_2 - v_3\|}{\|v_1 - v_2 - v_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

3.3. Movimientos

Los movimientos son aplicaciones de un espacio afín euclídeo en sí mismo que conservan las distancias. Cuando el espacio afín euclídeo tiene dimensión finita se pueden caracterizar algebraicamente como aplicaciones afines cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal; en este caso, el conjunto de movimientos es un grupo con la operación composición.

3.3.1. **Definición.** Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V. Se dice que la aplicación $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es *un movimiento* de $\mathbb{A}$ si conserva las distancias entre los puntos, es decir, si

$$d(P,Q) = d(M(P), M(Q)), \quad P, Q \in \mathbb{A}.$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ el conjunto de movimientos de $\mathbb{A}$.

3.3.2. **Teorema.** Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión finita sobre V y sea $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación. Son equivalentes:

(1) M es un movimiento.

(2) M es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal.

Demostración. Veamos (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $A \in \mathbb{A}$. Tenemos que probar que la aplicación $\overrightarrow{M}\colon V \to V$ dada por

$$\overrightarrow{M}(v) = \overrightarrow{M(A)\, M(A+v)}, \quad v \in V,$$

es una transformación ortogonal.

La aplicación $\overrightarrow{M}$ verifica que $\overrightarrow{M}(0) = 0$ y además para cada $v, w \in V$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{M}(v) - \overrightarrow{M}(w)\| &= \|\overrightarrow{M(A), M(A+v)} - \overrightarrow{M(A), M(A+w)}\| = \|\overrightarrow{M(A+w), M(A+v)}\| \\ &= d(\, M(A+w)\ , M(A+v)) = d(\, A+w\, ,\ A+v) = \|\overrightarrow{A+w, A+v}\| \\ &= \|v-w\|.\end{aligned}$$

En particular, $\|\overrightarrow{M}(v)\| = \|v\|$, para cada $v \in V$. Veamos que $\overrightarrow{M}$ conserva productos escalares. En efecto, dado que

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\, v\cdot w = \|v-w\|^2 = \|\overrightarrow{M}(v) - \overrightarrow{M}(w)\|^2 = \|\overrightarrow{M}(v)\|^2 + \|\overrightarrow{M}(w)\|^2 - 2\, \overrightarrow{M}(v)\cdot \overrightarrow{M}(w),$$

se tiene

$$v \cdot w = \overrightarrow{M}(v) \cdot \overrightarrow{M}(w),$$

y por la proposición 2.2.6, $\overrightarrow{M}$ es una transformación ortogonal. Por tanto, M es una afinidad cuya aplicación lineal asociada $\overrightarrow{M}$ es una transformación ortogonal.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $A \in \mathbb{A}$. Por ser $\overrightarrow{M}$ una transformación ortogonal, es

$$\begin{aligned}d(M(P), M(P')\,) &= \|\overrightarrow{M(P), M(P')}\| = \|\overrightarrow{M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}), M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP'})}\| \\ &= \| - \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP'})\| = \|\overrightarrow{M}(\overrightarrow{PP'})\| = \|\overrightarrow{PP'}\| = d(P,P').\end{aligned}$$

Obsérvese que para la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) no hace falta que el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ tenga dimensión finita. $\square$

3.3.3. **Ejemplos.**

(1) Sea A un espacio afín euclídeo. La aplicación identidad $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es un movimiento.

(2) Sea A un espacio afín euclídeo. La aplicación traslación por un vector $v \in V$, $t_v\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, dada por $t_v(P) = P + v$, es un movimiento.

(3) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo y M_1 y M_2 son movimientos de $\mathbb{A}$, entonces $M_2 \circ M_1$ es un movimiento. En efecto,

$$d(P,Q) = d(M_1(P), M_1(Q)) = d(M_2(M_1(P)), M_2(M_1(Q))) = d((M_2 \circ M_1)(P), (M_2 \circ M_1)(Q)),$$

para todo $P, Q \in \mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo de dimensión finita y M_1 y M_2 son movimientos de $\mathbb{A}$, entonces $M_2 \circ M_1$ es un movimiento y $\overrightarrow{M_2 \circ M_1} = \overrightarrow{M_2} \circ \overrightarrow{M_1}$; este resultado se sigue de la proposición 1.3.9 y del teorema 3.3.2.

(4) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo sobre V y f es una transformación ortogonal de V, entonces por la proposición 1.3.5 (1) y el teorema 3.3.2, la aplicación $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por

$$M(P) = A' + f(\overrightarrow{AP}), \quad P \in \mathbb{A},$$

donde $A, A' \in \mathbb{A}$, es un movimiento.

(5) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo de dimensión finita y M es un movimiento de A, la aplicación M^{-1} es un movimiento. En efecto, si M es un movimiento, $\overrightarrow{M}$ es una transformación ortogonal, luego $\overrightarrow{M}^{-1}$ es una transformación ortogonal y por la demostración de la proposición 1.3.9 (1), M^{-1} es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{M}^{-1}$.

(6) Si V es un espacio vectorial euclídeo, $v \in V$ y f es una transformación ortogonal de V, entonces $t_v \circ f$ es un movimiento, por ser composición movimientos. Recíprocamente, si V tiene dimensión finita y M es un movimiento de V, por el teorema 3.3.2 y el ejemplo (3) de 1.3.12, $M = t_{M(0)} \circ \overrightarrow{M}$.

3.3.4. **Teorema.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión finita sobre V. El conjunto $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ de movimientos de $\mathbb{A}$ es un grupo con la operación composición; además, los grupos $\mathcal{M}(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})$ y $\mathcal{O}(V)$ son isomorfos.

Demostración. Por los ejemplos (1), (3) y (5) de 3.3.3, $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ es un grupo. La aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{M}(\mathbb{A}) &\longrightarrow \mathcal{O}(V) \\ M &\longmapsto \overrightarrow{M} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos suprayectivo cuyo núcleo es $T(\mathbb{A})$. En efecto, si $\phi(M) = \mathrm{id}_V$, por el lema 1.3.10, $M \in T(\mathbb{A})$. La aplicación ϕ es suprayectiva, puesto que si $f \in \mathcal{O}(V)$, el movimiento $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dado por $M(P) = A + f(\overrightarrow{AP})$, donde $A \in \mathbb{A}$, verifica que $\overrightarrow{M} = f$. Por tanto, la aplicación

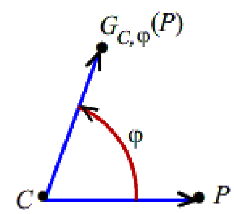
$$\begin{aligned} \bar{\phi}\colon M(\mathbb{A})/T(\mathbb{A}) &\longrightarrow \mathcal{O}(V) \\ M \circ T(\mathbb{A}) &\longmapsto \overrightarrow{M} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. $\square$

3.4. Movimientos en el plano afín euclídeo. Clasificación

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín euclídeo orientado sobre V. Describiremos y clasificaremos los movimientos en un plano afín euclídeo orientado utilizando el estudio de las transformaciones ortogonales y la clasificación de transformaciones ortogonales dada en un plano vectorial euclídeo.

3.4.1. **Definición.** Se llama *giro de centro el punto C y ángulo φ* a la aplicación $G_{C,\varphi}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $G_{C,\varphi}(P) = C + G_\varphi(\overrightarrow{CP})$, donde $G_\varphi \in \mathbb{O}^+(V)$ es el giro de ángulo φ. Si $\varphi = \pi$, se dice que $G_{C,\pi}$ es una *simetría central de centro C*.



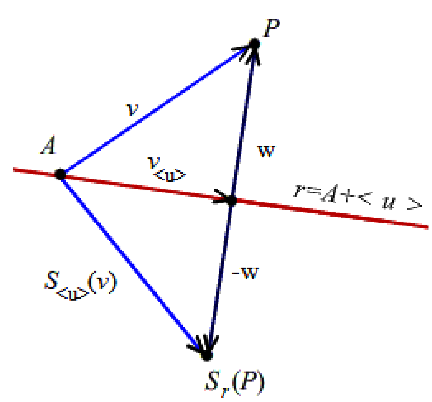
Por 3.3.3 (4), $G_{C,\varphi}$ es un movimiento.

3.4.2. **Proposición.** El único punto fijo del giro de centro C y ángulo φ, si $\varphi \neq 0$, es C.

Demostración. Se tiene

$$G_{C,\varphi}(P) = P \Longleftrightarrow C + G_\varphi(\overrightarrow{CP}) = P \Longleftrightarrow G_\varphi(\overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{CP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{CP} = 0 \Longleftrightarrow P = C. \qquad \square$$

3.4.3. **Definición.** Se llama *simetría respecto a la recta* $r = A + \langle u\rangle$ a la aplicación $S_r\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, dada por $S_r(P) = A + S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{AP})$, donde $S_{\langle u\rangle}$ es la simetría respecto a $\langle u\rangle$.



Por 3.3.3 (4), S_r es un movimiento.

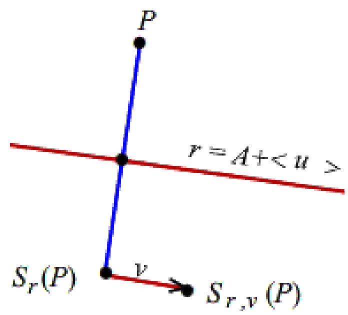
3.4.4. ***Observación.*** Si $A' \in r$, entonces $A + S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{AP}) = A' + S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{A'P})$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in \langle u\rangle$, se tiene $S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$ y por tanto $S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{AP}) = S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{AA' + A'P}) = \overrightarrow{AA'} + S_{\langle u\rangle}(\overrightarrow{A'P})$.

3.4.5. **Proposición.** Los únicos puntos fijos de la simetría S_r son los puntos de r.

Demostración. Se tiene

$$S_r(P) = P \iff A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = P \iff S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{AP} \in \langle u \rangle \iff P \in r. \qquad \square$$

3.4.6. **Definición.** Se llama *simetría deslizante respecto a la recta* $r = A + \langle u \rangle$ y *vector de traslación* $v \in \langle u \rangle$, $v \neq 0$ a la aplicación $S_{r,v} = t_v \circ S_r$, donde S_r es la simetría respecto a la recta r.



Por 3.3.3 (3), S_r es un movimiento.

3.4.7. **Proposición.** La simetría deslizante $S_{r,v}$ no tiene puntos fijos.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo: Si P es un punto fijo de $S_{r,v}$, entonces

$$S_{r,v}(P) = P \iff A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) + v = P \iff S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) + v = \overrightarrow{AP}.$$

Dado que además, $S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} + v$, se tiene $v = 0$, lo cual contradice la definición de simetría deslizante. $\square$

3.4.8. **Ejercicio.** Prueba que la descomposición de una simetría deslizante como composición de la simetría respecto a una recta y una traslación por un vector de la dirección de la recta es única.

3.4.9. **Teorema.** (Teorema de clasificación de los movimientos del plano afín euclídeo) Sea $\mathbb{A}$ un plano afín euclídeo orientado sobre V, $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento y A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. Pongamos $V_1 = \operatorname{Nuc}(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)$. Se tiene

(1) Si $\overrightarrow{M} = \mathrm{id}_V$, entonces $M = t_v$ es una traslación con $v = \overrightarrow{AM(A)}$.

(2) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^+(V)$ y $\overrightarrow{M} \neq \mathrm{id}_V$, entonces $\overrightarrow{M}$ es un giro de ángulo $\varphi \neq 0$ y M es el giro de centro $C = A - v$ y ángulo φ, siendo v el vector que verifica $\overrightarrow{M}(v) - v = \overrightarrow{AM(A)}$.

(3) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ y $\overrightarrow{AM(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría respecto a la recta $r = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM(A)} + V_1$.

(4) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ y $\overrightarrow{AM(A)} \notin (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría deslizante respecto a la recta $r = A + \dfrac{1}{2}\, v_2 + V_1$, donde $\overrightarrow{AM(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in (V_1)^\perp$, y el vector de traslación de M es v_1.

Demostración. (1) Se sigue del lema 1.3.10.

(2) Por la proposición 2.3.13, $\overrightarrow{M} = G_\varphi$. Dado que $\operatorname{Nuc}(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V) = 0$, se tiene que $\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V$ es un isomorfismo y por tanto existe un único $v \in V$ tal que $(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)(v) = \overrightarrow{AM(A)}$. Pongamos $C = A - v$. Se tiene
$$M(P) = M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{AM(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A - v + \overrightarrow{M}(v) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = C + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{CP}) = G_{C,\varphi}(P).$$

(3) Del teorema 2.4.1 se sigue que $\overrightarrow{M} = S_{V_1}$ (simetría respecto a V_1). Poniendo $r = A + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AM(A)} + V_1$,
$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{AM(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AM(A)} + \overrightarrow{M}\Big(\overrightarrow{A + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AM(A)}, A}\Big) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = S_r(P). \end{aligned}$$

(4) Dado que $\overrightarrow{M} = S_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1} \perp (-\mathrm{id}_{(V_1)^\perp})$, si $\overrightarrow{AM(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, y ponemos $r = A + \dfrac{1}{2}\, v_2 + V_1$, se tiene
$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{AM(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}\, v_2 + \overrightarrow{M}\Big(\overrightarrow{A + \frac{1}{2}\, v_2, A}\Big) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) + v_1 \\ &= S_r(P) + v_1 = S_{r,v_1}(P). \end{aligned}$$

El vector v_1 es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ sobre V_1. □

Obsérvese que $\overrightarrow{AM(A)} \in (V_1)^\perp$ si, y solo si, $\overrightarrow{PM(P)} \in (V_1)^\perp$, para todo punto P de $\mathbb{A}$. En efecto,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM(P)} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM(A)} + \overrightarrow{M(A), M(P)} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= (\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AM(A)}. \end{aligned}$$
y $(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{AP}) \in (V_1)^\perp$, por el lema 2.2.9.

3.4.10. **Corolario.** Sea A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$, $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento y $V_1 = \operatorname{Nuc}(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)$. Se tiene

(1) Si $\overrightarrow{M} \in \mathcal{O}^+(V)$, $\overrightarrow{M} \neq \mathrm{id}_V$, M tiene un único punto fijo y M es un giro de centro ese punto y ángulo el ángulo del giro $\overrightarrow{M}$.

(2) Si $\overrightarrow{M} \in \mathcal{O}^-(V)$ y $\overrightarrow{AM(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces el conjunto de puntos fijos de M es una recta y M es una simetría respecto a esa recta.

(3) Si $\overrightarrow{M} \in \mathcal{O}^-(V)$ y $\overrightarrow{AM(A)} \notin (V_1)^\perp$, entonces M no tiene puntos fijos y M es una simetría deslizante. El vector de traslación v de M es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ sobre el subespacio V_1 de vectores fijos de f y la recta de simetría de M es la de la simetría $t_{-v} \circ M$.

3.4.11. **Corolario.** Sea $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento. Se tiene

(1) Si M tiene un único punto fijo, entonces M es un giro de centro ese punto y el ángulo de M es el ángulo del giro $\overrightarrow{M}$.

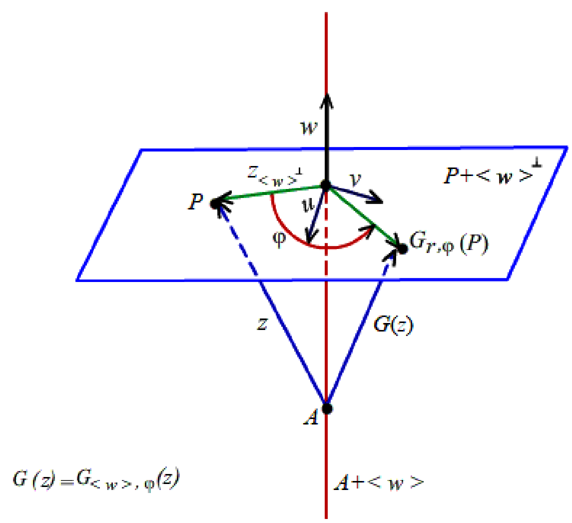
(2) Si M tiene solamente una recta de puntos fijos, entonces M es una simetría respecto a esa recta.

(3) Si M no tiene puntos fijos y no es una traslación, entonces M es una simetría deslizante.

3.5. Movimientos en el espacio afín euclídeo tridimensional

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3 sobre V. Vamos a describir y clasificar los movimientos de $\mathbb{A}$; para esto utilizaremos el teorema 2.5.5 de clasificación de las transformaciones ortogonales.

3.5.1. **Definición.** Se llama *giro de eje orientado la recta* $r = A + \langle w \rangle$ y *ángulo* $\varphi \in [0, 2\pi)$, a la aplicación $G_{r,\varphi}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $G_{r,\varphi}(P) = A + G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP})$, donde $G_{\langle w \rangle,\varphi} \in \mathbb{O}^+(V)$ es un giro de eje orientado $\langle w \rangle$ y ángulo φ.



Por 3.3.3 (4), $G_{r,\varphi}$ es un movimiento.

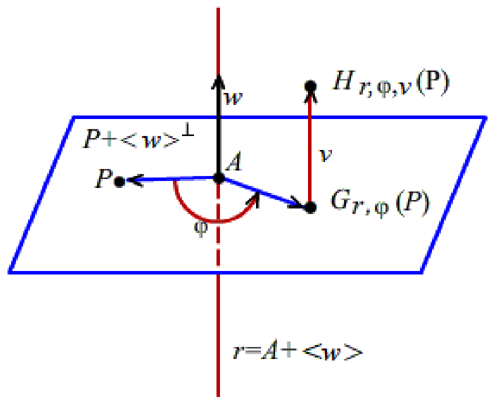
3.5.2. ***Observación.*** Si $A' \in r$, entonces $A + G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) = A' + G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{A'P})$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in \langle w \rangle$, se tiene que $G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$.

3.5.3. **Proposición.** Los únicos puntos fijos del giro $G_{r,\varphi}$, si $\varphi \neq 0$, son los puntos del eje $r = A + \langle w \rangle$.

Demostración. Se tiene

$$G_{r,\varphi}(P) = P \iff A + G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) = P \iff G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{AP} \in \langle w \rangle \iff P \in r. \qquad \square$$

3.5.4. **Definición.** Sea $r = A + \langle w \rangle$ una recta y sea $v \in \langle w \rangle$, $v \neq 0$. Se llama *movimiento helicoidal de eje la recta* r, *ángulo* $\varphi \neq 0$ y *vector de traslación* v, a la aplicación $H_{r,v,\varphi} = t_v \circ G_{r,\varphi}$ donde $G_{r,\varphi}$ es el giro de eje r y ángulo φ.



Por 3.3.3 (3), $H_{r,v,\varphi}$ es un movimiento.

3.5.5. **Proposición.** Un movimiento helicoidal $H_{r,v,\varphi}$ no tiene puntos fijos.

Demostración. Sea $H_{r,v,\varphi} = t_v \circ G_{r,\varphi}$. Por el lema 2.2.9,

$$\mathrm{Im}(G_{\langle w \rangle,\varphi} - \mathrm{id}_V) = \mathrm{Nuc}(G_{\langle w \rangle,\varphi} - \mathrm{id}_V)^{\perp} = \langle w \rangle^{\perp}.$$

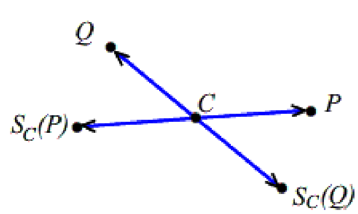
Razonemos por reducción al absurdo: Si P es un punto fijo de $H_{r,v,\varphi}$, entonces

$$H_{r,v,\alpha}(P) = P \Longleftrightarrow A + G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) + v = P \Longleftrightarrow G_{\langle w \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) + v = \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow (G_{\langle w \rangle,\varphi} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{AP}) = -v.$$

Luego $v \in \langle w \rangle \bigcap \mathrm{Im}(G_{\langle w \rangle,\varphi} - \mathrm{id}_V) = \langle w \rangle \bigcap \langle w \rangle^{\perp} = 0$. □

3.5.6. **Ejercicio.** Prueba que la descomposición de un movimiento helicoidal como composición de un giro y una traslación de vector traslación en la dirección del eje de giro es única.

3.5.7. **Definición.** Se llama *simetría central de centro* C a la aplicación $S_C \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $S_C(P) = C - \overrightarrow{CP}$, para todo $P \in \mathbb{A}$.



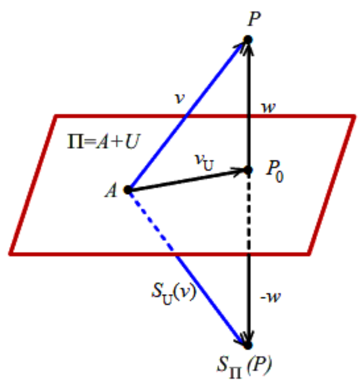
Por 3.3.3 (4), S_C es un movimiento.

3.5.8. **Proposición.** El único punto fijo de una simetría central de centro C es el punto C.

Demostración. Si P es un punto fijo de S_C, entonces

$$C - \overrightarrow{CP} = P \iff -\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CP} \iff C = P. \qquad \square$$

3.5.9. **Definición.** Se llama *simetría respecto al plano* $\Pi = A + U$ a la aplicación $S_\Pi \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $S_\Pi(P) = A + S_U(\overrightarrow{AP})$, donde $S_U \in \mathbb{O}^-(V)$ es la simetría respecto al subespacio U.



Por 3.3.3 (4), S_Π es un movimiento.

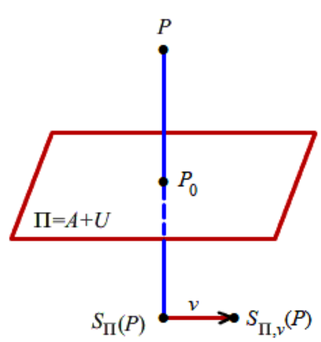
3.5.10. ***Observación.*** Si $A' \in \Pi$, entonces $A + S_U(\overrightarrow{AP}) = A' + S_U(\overrightarrow{A'P})$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in U$, se tiene que $S_U(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$.

3.5.11. **Proposición.** Los únicos puntos fijos de la simetría S_Π son los puntos del plano Π.

Demostración. Si $\Pi = A + U$, entonces

$$S_\Pi(P) = P \iff A + S_U(\overrightarrow{AP}) = P \iff S_U(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{AP} \in U \iff P \in \Pi. \qquad \square$$

3.5.12. **Definición.** Se llama *simetría deslizante respecto al plano* $\Pi = A + U$ y *vector de traslación* $v \in U$, $v \neq 0$, a la composición $S_{\Pi,v} = t_v \circ S_\Pi$, donde S_Π es la simetría respecto al plano Π.



Por 3.3.3 (3), $S_{r,v}$ es un movimiento.

3.5.13. **Proposición.** La simetría deslizante $S_{\Pi,v}$ no tiene puntos fijos.

Demostración. Sea $\Pi = A + U$. Razonemos por reducción al absurdo: Si P es un punto fijo de $S_{\Pi,v}$, entonces

$$S_{\Pi,v}(P) = P \iff A + S_U(\overrightarrow{AP}) + v = P \iff \overrightarrow{AP} = S_U(\overrightarrow{AP}) + v.$$

Dado que además $S_U(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} + v$, se tiene que $v = 0$. □

3.5.14. **Ejercicio.** Prueba que la descomposición de una simetría deslizante como composición de la simetría respecto a un plano y una traslación por un vector de la dirección del plano es única.

3.5.15. **Ejemplo.** El giro de eje orientado $r = (1, 2, -1) + \langle(1, 1, -1)\rangle$ y ángulo $4\pi/3$ es el movimiento dado por

$$G_{r,4\pi/3}(x, y, z) = (1, 2, -1) + G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3}(x - 1, y - 2, z + 1),$$

donde $G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3}$ es el giro de eje orientado $\langle(1, 1, -1)\rangle$ y ángulo $4\pi/3$, es decir,

$$G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3} = G_{4\pi/3} \perp \mathrm{id}_{\langle(1,1,-1)\rangle}, \quad G_{4\pi/3} \in \mathcal{O}^+(\langle(1, 1, -1)\rangle^\perp).$$

Una base ortonormal de $\langle(1, 1, -1)\rangle^\perp$ es

$$B_1 = ((0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)).$$

Pongamos

$$B = ((0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6), (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)).$$

La base B es una base de orientación positiva, puesto que $\det(1_{BC}) > 0$. Por tanto, B_1 es una base ortonormal de $\langle(1, 1, -1)\rangle^\perp$ de orientación positiva. Así,

$$(G_{4\pi/3})_{B_1} = \begin{pmatrix} \cos 4\pi/3 & -\operatorname{sen} 4\pi/3 \\ \operatorname{sen} 4\pi/3 & \cos 4\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

luego

$$(G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3})_B = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}(G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3})_C &= \mathrm{id}_{BC}\,(G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3})_B\,\mathrm{id}_{CB} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde $\mathrm{id}_{CB} = (\mathrm{id}_{BC})^t$ por ser la base B ortogonal. Por tanto,

$$G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3}(x,y,z) = (-z,x,-y),$$

luego

$$\begin{aligned} G_{r,4\pi/3}(x,y,z) =& (1,2,-1) + G_{\langle(1,1,-1),4\pi/3}(x-1,y-2,z+1) \\ =& (1,2,-1) + (-z-1,x-1,-y+2) = (-z,1+x,1-y). \end{aligned}$$

Las ecuaciones del giro de eje $r = (1,2,-1) + \langle(1,1,-1)\rangle$ y ángulo $4\pi/3$ en la referencia canónica son

$$x' = -z, \quad y' = 1+x, \quad z' = 1-y.$$

3.5.16. **Ejemplo.** La simetría deslizante respecto al plano de Π cuya ecuación en la referencia canónica es $x+y+3=0$, y con vector de traslación $v = (-2,2,3)$, es el movimiento

$$S_{\Pi,v} = t_v \circ S_\Pi,$$

donde S_Π es la simetría respecto al plano Π. Dado que $\Pi = (-3,0,0) + \langle(1,-1,0),(0,0,1)\rangle$,

$$S_\Pi(x,y,z) = (-3,0,0) + S_U(x+3,y,z),$$

donde $U = \langle(1,-1,0),(0,0,1)\rangle$ y $S_U = \mathrm{id}_U \perp (-\mathrm{id}_{U^\perp})$. Se tiene que $U^\perp = \langle(1,1,0)\rangle$. La transformación ortogonal $S_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal dada por:

$$S_U(1,-1,0) = (1,-1,0), \quad S_U(0,0,1) = (0,0,1), \quad S_U(1,1, = (-1,-1,0).$$

Sea $B = ((1,-1,0),(0,0,1),(1,1,0))$. Se tiene

$$(S_U)_C = (S_U)_{BC}\,\mathrm{id}_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego $S_U(x,y,z) = (-y,-x,z)$. Por tanto,

$$S_\Pi(x,y,z) = (-3,0,0) + S_U(x+3\,,y\,,z) = (-3,0,0) + (-y\,,-3-x,z) = (-3-y\,,-3-x\,,\,z).$$

Así,

$$S_{\Pi,v}(x,y,z) = S_\Pi(x,y,z) + (-2,2,3) = (-3-y\,,-3-x\,,z) + (-2,2,3) = (-5-y\,,-1-x,\,3+z).$$

Las ecuaciones de $S_{\Pi,v}$ en la referencia canónica son

$$x' = -5-y, \quad y' = -1-x, \quad z' = 3+z.$$

3.5.17. **Teorema.** (Teorema de clasificación de los movimientos del espacio afín euclídeo tridimensional) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3, M un movimiento de $\mathbb{A}$ y A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. Sean $V_1 = \mathrm{Nuc}\,(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)$ y $V_{-1} = \mathrm{Nuc}\,(\overrightarrow{M} + \mathrm{id}_V)$. Se tiene:

(1) Si $\overrightarrow{M} = \mathrm{id}_V$, entonces $M = t_v$ es una traslación con $v = \overrightarrow{A, M(A)}$.

(2) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^+(V)$ y $\overrightarrow{M} \neq \mathrm{id}_V$, entonces $\overrightarrow{M}$ es un giro de eje V_1 y ángulo φ, $\varphi \neq 0$, que depende de la orientación de V_1.

  (a) Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es un giro de eje orientado $r = A - v + V_1$ y ángulo φ, siendo v un vector que verifica $\overrightarrow{M}(v) - v = \overrightarrow{A, M(A)}$.

  (b) Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$ y $\overrightarrow{AM(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, se tiene que M es un movimiento helicoidal de eje $r = A - v + V_1$, ángulo φ y vector de traslación v_1, siendo v un vector que verifica $\overrightarrow{M}(v) - v = v_2$.

(3) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ es la simetría respecto al subespacio V_1 de dimensión 2, se tienen dos casos:

  (a) Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría respecto al plano $\Pi = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + V_1$.

  (b) Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, poniendo $\overrightarrow{A, M(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, se tiene que M es la simetría deslizante respecto al plano $\Pi = A + \frac{1}{2}\, v_2 + V_1$ y vector de traslación v_1.

(4) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ es la composición de un giro de eje V_{-1} y la simetría respecto al plano $(V_{-1})^\perp$ (i.e., los autovalores de $\overrightarrow{M}$ son -1 y $a \pm bi \neq \pm 1$), entonces M tiene un único punto fijo C y M es la composición del giro de eje orientado $C + V_{-1}$ y ángulo φ que depende de la orientación de V_{-1} y la simetría respecto al plano $C + (V_{-1})^\perp$.

(5) Si $\overrightarrow{M} = -\mathrm{id}_V$, entonces M es la simetría central de centro $C = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}$.

Demostración. (1) Se sigue del lema 1.3.10.

(2) Sea $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^+(V)$ el giro de eje orientado V_1 y ángulo φ.

(2) (a) Dado que $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp = \mathrm{Im}(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)$, existe $v \in V$ tal que $(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)(v) = \overrightarrow{AM(A)}$. Consideremos la recta $r = A - v + V_1$. Para todo $P \in \mathbb{A}$,

$$M(P) = M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A - v + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{A - v, P}) = G_{r,\varphi}(P).$$

(2)(b) Si $\overrightarrow{A, M(A)} = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, como $(V_1)^\perp = \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)$, existe $v \in V$ tal que $\overrightarrow{M}(v) - v = v_2$. Si $r = A - v + V_1$ y $P \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + v_1 + v_2 + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A - v + \overrightarrow{M}(v) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) + v_1 = A - v + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{A - v\ P}) + v_1 \\ &= G_{r,\varphi}(P) + v_1 = H_{r,\varphi,v_1}(P). \end{aligned}$$

(3) Sea $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ la simetría respecto al subespacio V_1 de dimensión 2.

(3) (a) Si $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, $\Pi = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + V_1$ y $P \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} - \overrightarrow{M}(\frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}, P}) = S_\Pi(P). \end{aligned}$$

(3) (b) Si $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, $\overrightarrow{A, M(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in (V_1)^\perp$, $\Pi = A + \frac{1}{2}v_2 + V_1$ y $P \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + v_1 + v_2 + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}v_2 - \overrightarrow{M}(\frac{1}{2}v_2) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) + v_1 = A + \frac{1}{2}v_2 + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{A + \frac{1}{2}v_2, P}) + v_1 \\ &= S_{\Pi, v_1}(P). \end{aligned}$$

(4) Sea $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ tal que $\overrightarrow{M} = h \circ g$, donde g es el giro de eje orientado V_{-1} y ángulo φ y h es la simetría respecto al subespacio $(V_{-1})^\perp$. Dado que $\mathrm{Nuc}(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V) = 0$, la aplicación $\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V$ es un isomorfismo y por tanto existe un único vector v tal que $(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)(v) = \overrightarrow{AM(A)}$. Consideremos la recta $r = A - v + V_{-1}$ y el plano $\Pi = A - v + (V_{-1})^\perp$. Para todo $P \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A - v + \overrightarrow{M}(v) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) \\ &= A - v + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{A - v, P}) = A - v + h(g(\overrightarrow{A - v, P})) = A - v + h(\overrightarrow{A - v, A - v + g(\overrightarrow{A - v, P})}) \\ &= S_\Pi(A - v + g(\overrightarrow{A - v, P}) = (S_\Pi \circ G_{r,\varphi})(P). \end{aligned}$$

Obsérvese que $A - v$ es el único punto fijo M. En efecto,

$$M(P) = M(A) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = A - v + \overrightarrow{M}(v) + \overrightarrow{M}(\overrightarrow{AP}) = P$$

si, y solo si, $(\overrightarrow{M} - \mathrm{id}_V)(v + \overrightarrow{AP}) = 0$. Así, $\overrightarrow{AP} = -v$ y por tanto $P = A - v$.

(5) Si $\overrightarrow{M} = -\mathrm{id}_V$ y $C = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}$, entonces para todo $P \in \mathbb{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) - \overrightarrow{AP} = A + \overrightarrow{A, M(A)} - \overrightarrow{AP} \\ &= C - \overrightarrow{A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}, A} - \overrightarrow{AP} = C - \overrightarrow{CP} = S_C(P). \end{aligned}$$

En este caso, obsérvese que si $B = (v_1, v_2, v_3)$ es una base ortonormal de V, entonces la recta $r = C + \langle v_1 \rangle$ y el plano $\Pi = C + \langle v_2, v_3 \rangle$ son perpendiculares y $S_C = G_{r,\pi} \circ S_\Pi$. □

3.5.18. **Corolario.** Sea M un movimiento de $\mathbb{A}$ y A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. Se tiene:

(1) Si $\overrightarrow{M} \in \mathcal{O}^+(V)$ y $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces el conjunto de puntos fijos de M es una recta y M es un giro de eje orientado esa recta y el ángulo del giro M es el ángulo del giro $\overrightarrow{M}$.

(2) Si $\overrightarrow{M} \in \mathcal{O}^+(V)$, $\overrightarrow{M} \neq \mathrm{id}_V$ y $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, entonces M no tiene puntos fijos y es un movimiento helicoidal. El vector de traslación v de M es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ sobre el subespacio V_1 de vectores fijos de $\overrightarrow{M}$, el ángulo de M es el del giro $\overrightarrow{M}$ y el eje de M es el ángulo del giro $t_{-v} \circ M$.

(3) Si $\overrightarrow{M} \in \mathcal{O}^-(V)$ es la simetría respecto al subespacio V_1 y $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces el conjunto de puntos fijos de M es un plano y M es la simetría respecto a ese plano.

(4) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ es la simetría respecto al subespacio V_1 y $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, entonces M no tiene puntos fijos y es una simetría deslizante respecto a un plano Π. El vector de traslación v es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ sobre el subespacio V_1 de vectores fijos de $\overrightarrow{M}$ y el plano Π es el plano de simetría de la simetría $t_{-v} \circ M$.

(5) Si $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ y $\overrightarrow{M} = h \circ g$, donde g es un giro de eje orientado V_{-1}, y h la simetría respecto a $(V_{-1})^\perp$, entonces M tiene un único punto fijo C y M es la composición del giro de eje orientado $r = C + V_{-1}$ y ángulo el ángulo del giro g y la simetría respecto al plano $\Pi = C + (V_{-1})^\perp$.

(6) Si $\overrightarrow{M} = -\mathrm{id}_V$, entonces M es la simetría central de centro el único punto fijo de M.

3.5.19. **Corolario.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3 y M un movimiento de $\mathbb{A}$. Se tiene:

(1) Si el conjunto de puntos fijos de M es una recta, entonces M es un giro de eje esa recta.

(2) Si el conjunto de puntos fijos de M es un plano, entonces M es la simetría respecto a ese plano.

(3) Si M tiene un único punto fijo, entonces M es la composición de un giro y una simetría, y el eje de giro y el plano de simetría son perpendiculares.

(4) Si M no tiene puntos fijos, no es una traslación y $f \in \mathbb{O}^+(V)$, entonces M es un movimiento helicoidal.

(5) Si M no tiene puntos fijos y $\overrightarrow{M} \in \mathbb{O}^-(V)$, entonces M es una simetría deslizante.

3.5.20. **Ejemplo.** La aplicación $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$M(x, y, z) = (-x, -1 - z, 3 - y)$$

es un movimiento. En efecto, M es una aplicación afín, puesto que la aplicación $\overrightarrow{M}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}(x, y, z) &= \overrightarrow{M(0,0,0), M(x, y, z)} = M(x, y, z) - M(0,0,0)\\ &= (-x, -1 - z, 3 - y) - (0, -1, 3) = (-x, -z, -y)\end{aligned}$$

es una aplicación lineal, o también porque $M = t_{(0,-1,3)} \circ \overrightarrow{M}$ es composición de dos aplicaciones afines.

La aplicación $\overrightarrow{M}$ es una transformación ortogonal, ya que su matriz asociada respecto a la base canónica

$$\overrightarrow{M}_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal; además, dado que $\det(\overrightarrow{M}) = 1$, $\overrightarrow{M}$ es un giro. El polinomio característico de $\overrightarrow{M}$ es

$$P_{\overrightarrow{M}}(X) = P_{\overrightarrow{M}_C}(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = (-1-X)\,(X^2-1).$$

Los autovalores de $\overrightarrow{M}$ son -1 (de multiplicidad 2) y 1 (de multiplicidad 1), y por el corolario 2.5.6, el ángulo de $\overrightarrow{M}$ es π.

Se tiene que $V_1 = \mathrm{Nuc}\,(\overrightarrow{M} - 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle (0,1,-1) \rangle$ y $V_1^{\perp} = \langle (0,1,1), (1,0,0) \rangle$. El vector $(0,-1,3) \notin V_1^{\perp}$ y dado que $\overrightarrow{M}$ es un giro, M es un movimiento helicoidal (por el corolario 3.5.19). El vector de traslación v de M es la proyección ortogonal del vector $(0,-1,3)$ sobre el subespacio V_1, puesto que

$$(0,-1,3) = -2(0,1,-1) + (0,1,1) + 0(1,0,0),$$

luego $v = (0,-2,2)$.

El eje de M es el eje del giro $t_{-v} \circ M$ dado por

$$(t_{-v} \circ M)(x,y,z) = (0,2,-2) + (-x,-1-z,3-y) = (-x,1-z,1-y),$$

y como

$$(t_{-v} \circ M)(x,y,z) = (x,y,z) \Longleftrightarrow -x = x, \quad 1-z = y, \quad 1-y = z,$$

el eje del giro $t_{-v} \circ M$ es la recta cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

El ángulo de M es π, que es el ángulo del giro $\overrightarrow{M}$. Así, M es el movimiento helicoidal de eje la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1, \end{cases}$$

ángulo π y vector de traslación $(0,-2,2)$.

3.5.21. **Ejemplo.** La aplicación $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$M(x,y,z) = (1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,z, -1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z)$$

es un movimiento. En efecto, M es una aplicación afín puesto que la aplicación $\overrightarrow{M}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$\overrightarrow{M}_C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz $\overrightarrow{M}_C$ es ortogonal, $\overrightarrow{M}$ es una transformación ortogonal. Así, M es un movimiento. El conjunto de puntos fijos de M es el plano Π cuya ecuación en la referencia canónica es $x - \sqrt{2}\,y - z - 2 = 0$. Por el corolario 3.5.19, M es la simetría respecto al plano $\Pi \equiv x - \sqrt{2}\,y - z - 2 = 0$.

3.5.22. **Ejemplo.** Sea H el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación en la referencia canónica es $x+y+z-t=2$. Veamos que la aplicación $M\colon H \to H$ dada por

$$M(x, y, z, x+y+z-2) = (-z, -y, -x, -x-y-z-2)$$

es un movimiento. En efecto, si $P = (x, y, z, x+y+z-2)$ y $Q = (x', y', z', x'+y'+z'-2)$,

$$\begin{aligned} d(M(P), M(Q)) =& \|(-z+z', -y+y', -x+x', -x+x'-y+y'-z+z')\| \\ =& \sqrt{(-z'+z)^2 + (-y'+y)^2 + (-x'+x)^2 + (-x'-y'-z'+x+y+z)^2} \\ =& \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 + (x'+y'+z'-x-y-z)^2} \\ =& d\left((x, y, z, x+y+z-2),\, (x', y', z', x'+y'+z'-2)\right) = d(P, Q). \end{aligned}$$

El subespacio U dirección de H tiene la ecuación $x+y+z-t=0$ en la base canónica. La transformación ortogonal $\overrightarrow{M}\colon U \to U$ asociada a M está dada por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}(x, y, x, x+y+z) =& \overrightarrow{M(0,0,0,-2), M(x,y,z,x+y+z-2)} = M(x,y,z,x+y+z-2) - M(0,0,0,-2) \\ =& (-z, -y, -x, -x-y-z-2) - (0,0,0,-2) = (-z, -y, -x, -x-y-z). \end{aligned}$$

La matriz asociada a $\overrightarrow{M}$ respecto a la base $B = ((1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1))$ es

$$\overrightarrow{M}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $\det(\overrightarrow{M}) = \det(\overrightarrow{M}_B) = 1$, $\overrightarrow{M}$ es un giro. El polinomio característico de $\overrightarrow{M}$ es

$$P_{\overrightarrow{M}}(X) = P_{\overrightarrow{M}_B}(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ 0 & -1-X & 0 \\ -1 & 0 & -X \end{vmatrix} = (-1-X)\,(X^2-1).$$

Los autovalores de $\overrightarrow{M}$ son 1 (de multiplicidad 1) y -1 (de multiplicidad 2), luego el ángulo del giro $\overrightarrow{M}$ es π. El conjunto de puntos fijos de M es la recta

$$r = \{(x, 0, -x, -2) \mid x \in \mathbb{R}\} = (0,0,0,-2) + \langle (1,0,-1,0) \rangle.$$

Entonces M es el giro de eje la recta r y ángulo π.

3.6. Ejercicios.

(1) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo y $L_1 = P_1 + U_1$, $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$ que se cruzan. Prueba:

(a) Existen $Q_1 \in L_1$ y $Q_2 \in L_2$ tales que la recta $Q_1 \circ Q_2$ es perpendicular a L_1 y a L_2.
(b) $d(L_1, L_2) = d(Q_1, Q_2)$.

(2) Calcula la distancia entre los planos Π_1 y Π_2 en $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$\Pi_1 \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y - t - 1 = 0, \end{cases} \qquad \Pi_2 \equiv \begin{cases} x + z + t - 1 = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

(3) Considera los planos en $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Pi_1 & \equiv & x & - & y & + & 2z & + & 4 & = & 0, \\ \Pi_2 & \equiv & x & + & y & + & & & 4 & = & 0, \\ \Pi_3 & \equiv & -x & + & y & + & z & & & = & 0. \end{array}$$

Halla las ecuaciones de las rectas r que cortan al plano Π_1 y tales que $d(r, \Pi_2) = 4/\sqrt{2}$ y $d(r, \Pi_3) = 2/\sqrt{3}$.

(4) Considera en $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal σ dada por

$$\sigma(v, w) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3,$$

donde $v = (x_1, x_2, x_3)$, $w = (y_1, y_2, y_3)$. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ sobre el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \sigma)$, calcula la distancia entre la recta $r = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, 1) \rangle$ y el plano Π cuya ecuación en la referencia canónica es $x - y - z - 4 = 0$.

(5) Sea r la recta en $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación en la referencia canónica es $2x + y - 3 = 0$. Calcula las ecuaciones en la referencia canónica de la simetría deslizante de $\mathbb{R}^2$ de eje paralelo a la recta r y que lleva el punto $(2, 1)$ al punto $(1, 0)$. Calcula el eje y el vector de traslación.

(6) Calcula las ecuaciones en la referencia canónica del giro de $\mathbb{R}^2$ que lleva $(2, 0)$ en $(-1, 1)$ y $(4, 1)$ en $(0, -1)$.

(7) Prueba que las siguientes afinidades de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones en la referencia canónica

(a) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(b) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

son movimientos. Clasifícalas y calcula sus elementos geométricos.

(8) Calcula las ecuaciones, en la referencia canónica de $\mathbb{R}^3$, de la simetría respecto al plano que pasa por $(0, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta r cuyas ecuaciones son $x - 2y = 0$, $y - z = 0$.

(9) Calcula las ecuaciones en la referencia canónica de $\mathbb{R}^3$ del movimiento helicoidal cuyo eje es la recta $r = (-2, 2, 0) + \langle (1, -1, 0) \rangle$, su ángulo es π y su vector de traslación es $v = (2, -2, 0)$.

(10) Prueba que las aplicaciones $M_i \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, dadas por

(a) $M_1(x, y, z) = (-1 - z, 1 + y, -1 + x)$,

(b) $M_2(x, y, z) = 2 + (1/3)\,(6 - x + 2y + 2z, -3 + 2x - y + 2z, -3 + 2x + 2y - z)$,

(c) $M_3(x, y, z) = (1/9)\,(-9 - x + 8y + 4z, -9 + 8x - y + 4z, 36 + 4x + 4y - 7z)$,

son movimientos. Clasifícalos y calcula sus elementos geométricos.

4. CÓNICAS Y CUÁDRICAS

Las secciones cónicas tienen su origen en la geometría griega, que las consideraba como las intersecciones de un cono con un plano; esta interpretación geométrica de las secciones de un cono fue sustituida posteriormente por otra que utilizaba los conceptos de coordenadas y distancia.

En este tema se estudian la elipse, la hipérbola y la parábola como lugares geométricos del plano afín euclídeo. Se definen las cónicas y cuádricas afines como curvas en el plano y superficies en el espacio, respectivamente, cuyas ecuaciones son ecuaciones polinómicas de segundo grado.

Calcularemos la ecuación reducida de una cónica o cuádrica y sus ejes principales. Veremos que en un plano afín euclídeo una cónica es una sección cónica o un par de rectas paralelas. Estudiaremos las cónicas y las cuádricas desde los puntos de vista afín y euclídeo.

4.1. Lugares geométricos en el plano afín euclídeo: Circunferencia, Elipse, Hipérbola y Parábola

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín euclídeo sobre el espacio vectorial V.

4.1.1. **Definición.** Dado un punto O y un número real $r > 0$, una *circunferencia de centro* O y *radio* r es el lugar geométrico $\boldsymbol{C}$ de los puntos del plano $\mathbb{A}$ cuya distancia al punto O es r,

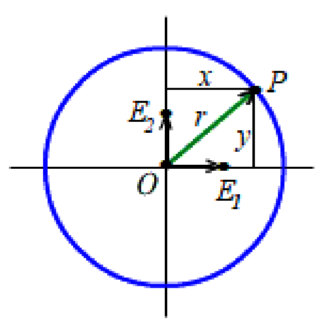
$$\boldsymbol{C} = \{P \in \mathbb{A} \mid d(P, O) = r\}.$$

4.1.2. **Proposición.** Sea $\mathcal{R} = \{E_1, E_2; O\}$ una referencia rectangular de $\mathbb{A}$. La ecuación en la referencia $\mathcal{R}$ de la circunferencia de centro O y radio r es

$$\boldsymbol{C} \equiv x^2 + y^2 = r^2.$$

Demostración. Si P es el punto de coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$, entonces

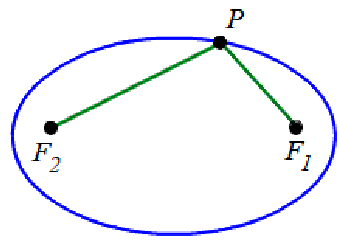
$$P \in C \iff d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2} = r. \qquad \square$$



4.1.3. **Definición.** Sean F_1 y F_2 puntos distintos del plano $\mathbb{A}$ y sea $a > 0$ un número real tal que $2a > d(F_1, F_2)$. El lugar geométrico $\boldsymbol{C}$ de los puntos del plano $\mathbb{A}$ cuya suma de distancias a los puntos F_1 y F_2 es $2a$ se dice que es una *elipse*,

$$\boldsymbol{C} = \{P \in \mathbb{A} \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Los puntos F_1 y F_2 se llaman los *focos de la elipse.*



4.1.4. **Proposición.** Existe una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ donde la elipse admite una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \ \ b > 0, \ \ a > b. \qquad (\star)$$

La ecuación $(\star)$ se llama *ecuación canónica* de la elipse.

Demostración. ([12, Cap. 8]) Sea $\boldsymbol{C}$ la elipse formada por los puntos de $\mathbb{A}$ cuya suma de distancias a los puntos F_1 y F_2 es $2a > d(F_1, F_2) = 2c$. Sea O el punto medio de F_1 y F_2. Pongamos

$$v_1 = \frac{\overrightarrow{OF_1}}{\|\overrightarrow{OF_1}\|}, \quad v_2 \in \langle v_1 \rangle^{\perp}, \quad \|v_2\| = 1.$$

Consideremos la referencia rectangular $\mathcal{R} = \{E_1 = O + v_1, E_2 = O + v_2; O\}$. Las coordenadas de F_1 y F_2 en $\mathcal{R}$ son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, puesto que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OF_1} &= \|\overrightarrow{OF_1}\|\, v_1 = \|\frac{1}{2}\,\overrightarrow{F_1F_2}\|\, v_1 = \frac{1}{2}\, d(F_1, F_2)\, v_1 = c\, v_1, \\
\overrightarrow{OF_2} &= -\,\overrightarrow{OF_1} = -c\, v_1.
\end{aligned}$$

Si P es el punto de coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
P \in \boldsymbol{C} &\iff d(P, F_1) + d(\,P, F_2) = 2a \iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado los dos mienbros de la última igualdad,

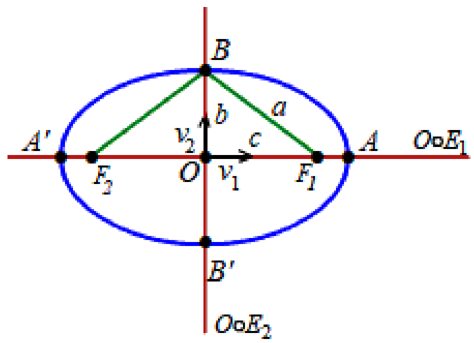
$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \iff a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

y volviendo a elevar al cuadrado,

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Dado que $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$, y poniendo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ se tiene que $b < a$. Así, si P es un punto de $\boldsymbol{C}$, entonces sus coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$ verifican la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Recíprocamente, si P es un punto cuyas coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$ verifican la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

entonces $P \in \boldsymbol{C}$, es decir, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. En efecto,

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{\frac{(a^2 - cx)^2}{a^2}} = \left|\frac{(a^2 - cx)}{a}\right| = \left|a - \frac{c}{a}\,x\right|,$$

y, análogamente, $d(P, F_2) = \left|\,a + \dfrac{c}{a}\,x\right|$; dado que $x^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{a^2 - c^2}\,y^2 \leq a^2$, es $-a \leq x \leq a$, luego

$$-c \leq \frac{c}{a}\,x \leq c, \quad -c \leq -\frac{c}{a}\,x \leq c,$$

y por tanto,

$$0 < a - c \leq a + \frac{c}{a}\,x, \quad 0 < a - c \leq a - \frac{c}{a}\,x,$$

de donde se sigue que

$$d(P, F_1) = a - \frac{c}{a}\,x, \quad d(P, F_2) = a + \frac{c}{a}\,x,$$

y como consecuencia

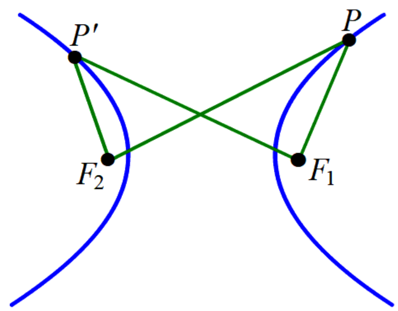
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \qquad \square$$

Las rectas $O \circ E_1$ y $O \circ E_2$ se llaman *ejes principales* de la elipse, por ser sus ejes de simetría. La recta $O \circ E_1 = F_1 \circ F_2$ se llama *eje focal o mayor* y la recta $O \circ E_2$ se llama *eje menor o secundario*. Los números a y b se llaman *longitudes de los semiejes* y c es la *semidistancia focal*. Los puntos A, A', B y B', que son las puntos de corte de la elipse con los ejes principales, se llaman *vértices* de la elipse. El punto O se llama *centro*.

4.1.5. **Definición.** Sean F_1 y F_2 puntos distintos de plano $\mathbb{A}$ y sea $a > 0$ un número real tal que $2a < d(F_1, F_2)$. El lugar geométrico $\boldsymbol{C}$ de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias a los puntos F_1 y F_2 es $2a$ se dice que es una *hipérbola.*

$$\boldsymbol{C} = \{P \in \mathbb{A} \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a|\}.$$

Los puntos F_1 y F_2 se llaman los focos de la hipérbola



4.1.6. **Proposición.** Existe una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ donde la hipérbola admite una ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \;\; b > 0. \tag{$\star$}$$

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{C}$ es la hipérbola formada por los puntos de $\mathbb{A}$ tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias a los puntos F_1 y F_2 es $2a < d(F_1, F_2) = 2c$. Sea O el punto medio de F_1 y F_2. Tomemos

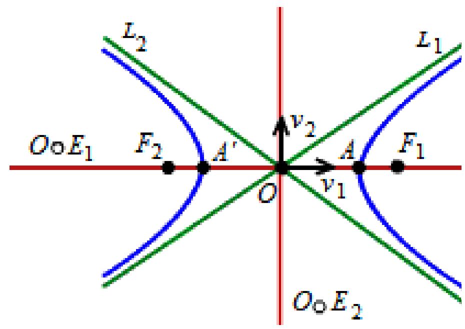
$$v_1 = \frac{\overrightarrow{OF_1}}{\|\overrightarrow{OF_1}\|}, \quad v_2 \in \langle v_1 \rangle^{\perp}, \quad \|v_2\| = 1.$$

Consideremos la referencia rectangular $\mathcal{R} = \{E_1 = O + v_1, E_2 = O + v_2; O\}$. Las coordenadas de F_1 y F_2 en $\mathcal{R}$ son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente. Si P es el punto de coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
P \in \boldsymbol{C} &\iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \\
&\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\Longrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\iff a^2 + cx = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\Longrightarrow a^2(c^2 - a^2) = x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2.
\end{aligned}$$

Dado que $c > a$, $c^2 - a^2 > 0$, y poniendo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ se tiene que $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Así, si P es un punto de $\boldsymbol{C}$, sus coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$ verifican la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Recíprocamente, sea P un punto cuyas coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$ verifican la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad a > 0, \quad b > 0,$$

y veamos que $P \in C$, es decir que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$. Se tiene

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \sqrt{\frac{(a^2 - cx)^2}{a^2}} = \left|\frac{a^2 - cx}{a}\right| = \left|a - \frac{c}{a}\,x\right|.$$

Análogamente, $d(P, F_2) = \left|a + \frac{c}{a}\,x\right|$, y puesto que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es $x \geq a$ o $x \leq -a$. Si $x \geq a$,

$$d(P, F_1) = \left|a - \frac{c}{a}\,x\right| = \frac{c}{a}\,x - a, \quad d(P, F_2) = \left|a + \frac{c}{a}\,x\right| = \frac{c}{a}\,x + a,$$

y así, $d(P, F_1) - d(F_1, F_2) = -2a$. Si $x \leq -a$,

$$d(P, F_1) = \left|a - \frac{c}{a}\,x\right| = a - \frac{c}{a}\,x, \quad d(P, F_2) = \left|a + \frac{c}{a}\,x\right| = -a - \frac{c}{a}\,x,$$

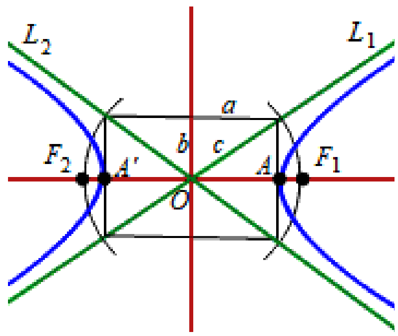
luego $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$. □

La ecuación $(\star)$ se llama *ecuación canónica* de la hipérbola. Las rectas $O \circ E_1$ y $O \circ E_2$ se llaman *ejes principales* de la hipérbola, por ser sus ejes de simetría; el eje $O \circ E_1 = F_1 \circ F_2$ se llama *eje focal* y el eje $O \circ E_2$ *eje secundario*. La hipérbola tiene dos ramas: una formada por los puntos de la hipérbola de coordenadas (x, y) con $x \geq a$ y otra formada por los puntos de la hipérbola de coordenadas (x, y) con $x \leq -a$.

Los *vértices* de la hipérbola son los puntos de corte A y A' del eje focal con la hipérbola y sus coordenadas en $\mathcal{R}$ son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente. El eje secundario no corta a la hipérbola. La hipérbola tiene dos *asíntotas*, que son las rectas de ecuaciones

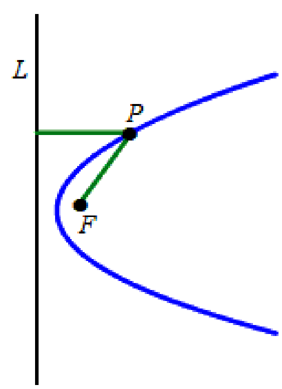
$$L_1 \equiv \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \qquad L_2 \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Las rectas L_1 y L_2 verifican que al alejarse un punto P de la hipérbola del origen O, la distancia entre P y alguna de estas dos rectas tiende a cero.



4.1.7. **Definición.** Sea F un punto y L una recta de $\mathbb{A}$ tal que $F \notin L$. El lugar geométrico $\boldsymbol{C}$ de los puntos del plano cuya distancia al punto F coincide con la distancia a la recta L se dice que es una *parábola* La distancia $p = d(F, L)$ se llama *parámetro* de la parábola, el punto F se llama *foco* y la recta L *directriz.*

$$\boldsymbol{C} = \{P \in \mathbb{A} \mid d(P, F) = d(P, L)\}.$$



4.1.8. **Proposición.** Existe una referencia rectangular de $\mathbb{A}$ donde la ecuación de la parábola es

$$\boldsymbol{C} \equiv y^2 = 2\,p\,x, \quad p > 0. \tag{$\star$}$$

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{C}$ es la parábola formada por los puntos de $\mathbb{A}$ cuya distancia al punto F es igual a la distancia a la recta L y sea $p = d(\,F, L\,)$. Sea F_0 la proyeción ortogonal de F sobre L y sea O el punto medio de F y F_0. Pongamos

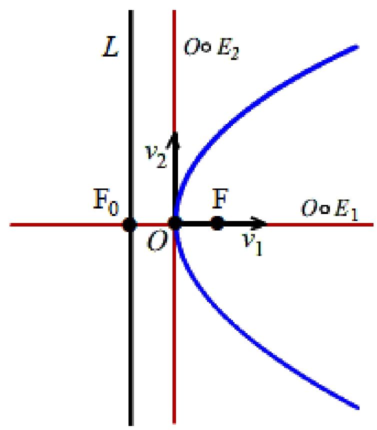
$$v_1 = \frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}, \quad v_2 \in \langle v_1\rangle^{\perp}, \quad \|v_2\| = 1.$$

En la referencia rectangular $\mathcal{R} = \{E_1 = O + v_1, E_2 = O + v_2; O\}$, las coordenadas del foco F son $(\frac{p}{2}, 0)$, las de F_0 son $(-\frac{p}{2}, 0)$, y la ecuación de la directriz $L = F_0 + \langle v_2 \rangle$ es

$$L \equiv x + \frac{p}{2} = 0.$$

Si P es el punto de coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$, entonces

$$d(P, F) = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}, \quad d(P, L) = \left| x + \frac{p}{2} \right|.$$



Así,

$$P \in \boldsymbol{C} \iff \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right| \Longrightarrow (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \iff y^2 = 2\,p\,x.$$

Recíprocamene, sea P un punto cuyas coordenadas (x, y) en $\mathcal{R}$ verifican la ecuación:

$$y^2 = 2\,p\,x, \quad p > 0,$$

con $p > 0$. Veamos que $P \in \boldsymbol{C}$, es decir que $d(P, F) = d(P, L)$. Se tiene

$$d(P, F) = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}\,, \quad d(P, L) = \left| x + \frac{p}{2} \right|,$$

luego

$$d(P, F) = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + 2\,p\,x} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right| = d(P, L). \qquad \square$$

La ecuación $(\star)$ se llama *ecuación canónica* de la parábola. El punto F es el foco, la recta L la directriz, y el punto O se llama *vértice de la parábola*. Las rectas $O \circ E_1$ y $O \circ E_2$ se llaman *ejes principales de la parábola*, la recta $O \circ E_1$ se llama además *eje focal* y es su eje de simetría, y p es el parámetro de la parábola.

4.2. Cónicas.

Sea K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre K y $\mathbb{A}$ un plano afín sobre V.

Si $K=\mathbb{R}$, entonces toda matriz real simétrica A es congruente a una matriz diagonal D y se llama *signatura* de A al par (p,q) de números enteros ≥ 0, donde p y q indican el número de elementos positivos y elementos negativos en D, respectivamente; además, por la ley de inercia de Sylvester el par (p,q) no depende de la matriz diagonal congruente a la matriz A considerada.

4.2.1. **Definición** Una *cónica* $\boldsymbol{C}$ en $\mathbb{A}$ es el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}$ cuyas coordenadas (x,y) respecto a una referencia $\mathcal{R}=\{P_1,P_2;Q\}$ verifican una ecuación polinómica de segundo grado con coeficientes en K,

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_1x+2a_2y+a_0=0. \qquad (\star)$$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices simétricas:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La ecuación $(\star)$ se expresa matricialmente como

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Se llaman *ecuaciones de la cónica* $\boldsymbol{C}$ *en* $\mathcal{R}$ a las ecuaciones que se obtienen multiplicando por un escalar no nulo la ecuación $(\star)$. La matriz $\mathcal{B}$ o cualquiera de sus proporcionales se dice que es una *matriz de la cónica* en $\mathcal{R}$ y la matriz $\mathcal{A}$ se llama *matriz de términos cuadráticos de la cónica* en $\mathcal{R}$.

4.2.2. **Ecuación de la cónica en otra referencia afín.** ([3, p. 603]) Sea $\mathcal{R}'=\{P_1',P_2';Q'\}$ otra referencia de $\mathbb{A}$. Sea P un punto de coordenadas (x,y) en $\mathcal{R}$ y de coordenadas (x',y') en $\mathcal{R}'$. Consideremos la ecuación de cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

donde (b,c) son las coordenadas del punto Q' en $\mathcal{R}$ y

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = 1_{B_{\mathcal{R}'}B_{\mathcal{R}}}$$

es la matriz del cambio de base de $B_{\mathcal{R}'}$ a $B_{\mathcal{R}}$. Si ponemos

$$\bar{\mathcal{P}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & p_{11} & p_{12} \\ c & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

La matriz $\bar{\mathcal{P}}$ se llama *matriz del cambio de coordenadas* de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Sustituyendo en la ecuación matricial de $\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t \mathcal{B} \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

Si consideramos las matrices

$$\mathcal{B}' = \bar{\mathcal{P}}^t \mathcal{B} \bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} a_0' & a_1' & a_2' \\ a_1' & a_{11}' & a_{12}' \\ a_2' & a_{12}' & a_{22}' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{pmatrix} = \mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} = \mathcal{A}',$$

la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en la referencia $\mathcal{R}'$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}' x^{'2} + a_{22}' y'^2 + 2a_{12}' x' y' + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a_0' = 0.$$

Dado que $\mathcal{A}' = \mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P}$ y $\mathcal{A} \neq 0$, es $\mathcal{A}' \neq 0$. Así, la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en $\mathcal{R}'$ es una ecuación polinómica de grado 2. Las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son congruentes y también lo son las matrices $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, y por tanto

$$\operatorname{rango}(\mathcal{A}) = \operatorname{rango}(\mathcal{A}'), \quad \operatorname{rango}(\mathcal{B}) = \operatorname{rango}(\mathcal{B}').$$

Además, si $K = \mathbb{R}$,

$$\operatorname{signatura}(\mathcal{A}) = \operatorname{signatura}(\mathcal{A}'), \quad \operatorname{signatura}(\mathcal{B}) = \operatorname{signatura}(\mathcal{B}').$$

Si $\mathbb{A}$ es un plano afín euclídeo y $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son referencias rectangulares, entonces las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son semejantes y por tanto tienen igual traza, determinante y los mismos autovalores; en este caso, dado que $\det(\bar{\mathcal{P}}) = \det(\mathcal{P})$ y que $\mathcal{P}$ es una matriz ortogonal, se tiene $\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}')$.

4.2.3. **Definición.** Sea $\boldsymbol{C}$ la cónica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en una referencia $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0,$$

Se dice que la cónica $\boldsymbol{C}$ es *no degenerada* si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$ o, equivalentemente, si $\operatorname{rango}(\mathcal{B}) = 3$, siendo $\mathcal{B}$ la matriz de la cónica en $\mathcal{R}$.

Por 4.2.2, el hecho de que la cónica sea no degenerada no depende de la referencia afín considerada.

Vamos a clasificar las cónicas por sus ecuaciones y considerar como cónicas distintas aquellas cuyas ecuaciones en una misma referencia no son proporcionales.

4.2.4. **Definición.** Se dice que las cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathbb{A}$ son *afínmente equivalentes* si existen referencias $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{C}_1$ en $\mathcal{R}_1$ es igual a una ecuación de $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}_2$.

En el conjunto de las cónicas en el plano $\mathbb{A}$, la relación "ser afínmente equivalentes" es una relación de equivalencia.

4.2.5. **Proposición.** Sean $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ las cónicas en $\mathbb{A}$ cuyas ecuaciones en la referencia $\mathcal{R}$ son

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_1 &\equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,\\ \boldsymbol{C}_2 &\equiv a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0.\end{aligned}$$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cónica $\boldsymbol{C}_1$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}$. Si $\boldsymbol{C}_1$ es afínmente equivalente a $\boldsymbol{C}_2$, existe $\rho \in K - \{0\}$ tal que las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\,\mathcal{A}$ son congruentes y las matrices $\mathcal{B}'$ y $\rho\,\mathcal{B}$ son congruentes; en particular,

$$\operatorname{rango}(\mathcal{A}) = \operatorname{rango}(\mathcal{A}'), \qquad \operatorname{rango}(\mathcal{B}) = \operatorname{rango}(\mathcal{B}').$$

Si $K = \mathbb{R}$ y $\operatorname{signatura}(\mathcal{A}) = (p, q)$, entonces $\operatorname{signatura}(\mathcal{A}') = (p, q)$ o (q, p) y si $\operatorname{signatura}(\mathcal{B}) = (r, s)$, entonces $\operatorname{signatura}(\mathcal{B}') = (r, s)$ o (s, r).

Demostración. Existen referencias afines $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{C}_1$ en $\mathcal{R}_1$ coincide con una ecuación de $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}_2$. Sean

$$\boldsymbol{C}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}_1}^t\, \mathcal{B}\, \bar{\mathcal{P}_1} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \boldsymbol{C}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}_2}^t\, \mathcal{B}'\, \bar{\mathcal{P}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

las ecuaciones de $\boldsymbol{C}_1$ en $\mathcal{R}_1$ y de $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}_2$, siendo las matrices $\bar{\mathcal{P}_1}$ y $\bar{\mathcal{P}_2}$ las matrices del cambio de coordenadas de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}$, respectivamente. Existe $\rho \in K - \{0\}$ tal que

$$\bar{\mathcal{P}_2}^t\, \mathcal{B}'\, \bar{\mathcal{P}_2} = \rho\, \bar{\mathcal{P}_1}^t\, \mathcal{B}\, \bar{\mathcal{P}_1} = \bar{\mathcal{P}_1}^t\, (\rho\, \mathcal{B})\, \bar{\mathcal{P}_1},$$

y por tanto

$$\mathcal{P}_2{}^t\, \mathcal{A}'\, \mathcal{P}_2 = \rho\, \mathcal{P}_1^t\, \mathcal{A}\, \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1{}^t\, (\rho\, \mathcal{A})\, \mathcal{P}_1. \qquad \square$$

4.2.6. ***Observación.*** Utilizando el teorema de Witt ([1, Ch. VI, Proposition 5.1, Theorem 8.10]), se puede probar que si $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son cónicas no degeneradas y existen escalares $\rho, \mu \in K - \{0\}$ tales que las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\,\mathcal{A}$ son congruentes y las matrices $\mathcal{B}'$ y $\mu\,\mathcal{B}$ son congruentes, entonces las cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son afínmente equivalentes.

4.2.7. **Lema.** Si $\boldsymbol{C}$ es una cónica y $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad, entonces $\alpha(\boldsymbol{C})$ es una cónica.

Demostración. Sea $\boldsymbol{C}$ la cónica cuya ecuación en la referencia $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

y $\mathcal{A}$ la matriz de términos cuadráticos de $\boldsymbol{C}$ en $\mathcal{R}$. Sean (x, y) son las coordenadas de un punto P en $\mathcal{R}$ y (x', y') son las coordenadas de $\alpha^{-1}(P)$ en $\mathcal{R}$. Si la ecuación de la afinidad α^{-1} en $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

entonces una ecuación de $\alpha(\boldsymbol{C})$ en $\mathcal{R}$ es

$$\alpha(\boldsymbol{C}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t\, \mathcal{B}\, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad \bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & p_{11} & p_{12} \\ c & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Dado que $\mathcal{P}^t\, \mathcal{A}\, \mathcal{P} \neq 0$, $\alpha(\boldsymbol{C})$ es una cónica. □

4.2.8. **Proposición.** Si las cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathbb{A}$ son afínmente equivalentes, entonces existe una afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$.

Demostración. Sean $\mathcal{R} = \{P_1, P_2; Q\}$ y $\mathcal{R}' = \{P_1', P_2'; Q'\}$ referencias de $\mathbb{A}$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{C}_1$ en $\mathcal{R}'$ es igual a una ecuación de $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}$. Si unas ecuaciones de $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}$ son

$$\boldsymbol{C}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{C}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \mathcal{B}' \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

entonces $\bar{\mathcal{P}}^t\, \mathcal{B}\, \bar{\mathcal{P}} = \lambda\, \mathcal{B}'$, para algún $\lambda \in K - \{0\}$, donde

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & p_{11} & p_{12} \\ c & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Consideremos la afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(P_1') = P_1$, $\alpha(P_2') = P_2$ y $\alpha(Q') = Q$. Dado que la ecuación matricial de α^{-1} en $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde (x, y) son las coordenadas de un punto P en $\mathcal{R}$ y (x', y') son las coordenadas de $\alpha^{-1}(P)$ en $\mathcal{R}$, se tiene que $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$. □

4.2.9. ***Observación.*** Si $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son dos cónicas reales no vacías o dos cónicas complejas y existe una afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$, entonces las cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son afínmente equivalentes. En efecto, si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una afinidad tal que $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$ y la ecuación matricial de la afinidad α^{-1} en la referencia $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

entonces la ecuación de cambio de coordenadas de la referencia $\alpha^{-1}(\mathcal{R}) = \{\alpha^{-1}(P_1), \alpha^{-1}(P_2); \alpha^{-1}(Q)\}$ a la referencia $\mathcal{R}$ es

$$\bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

donde (x, y) son las coordenadas de un punto P en $\mathcal{R}$ y (x', y') son las coordenadas de P en $\alpha^{-1}(\mathcal{R})$. Luego, una ecuación de $\boldsymbol{C}_1$ en $\alpha^{-1}(\mathcal{R})$ es

$$\boldsymbol{C}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t\, \mathcal{B}\, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

Por ([13, p. 123]), si $K = \mathbb{R}$ dos ecuaciones cualesquiera en la misma referencia de una cónica con más de un punto son proporcionales y si $K = \mathbb{C}$ dos ecuaciones cualesquiera en la misma referencia también lo son ([13, p. 123]). Si $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son dos cónicas reales con mas de un punto o dos cónicas complejas, entonces existe $\lambda \in K$ tal que $\bar{\mathcal{P}}^t\,\mathcal{B}\bar{\mathcal{P}} = \lambda\mathcal{B}'$. Si Si $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son dos cónicas reales que están formadas por un punto, entonces son afínmente equivalentes (véase el teorema 4.4.1).

4.3. Cónicas en el plano afín euclídeo. Ecuación reducida de una cónica

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín euclídeo sobre el espacio vectorial real V.

4.3.1. **Definición.** Se dice que las cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathbb{A}$ son *métricamente equivalentes* si existen referencias rectangulares $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{C}_1$ en $\mathcal{R}_1$ es igual a una ecuación de $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}_2$.

En el conjunto de las cónicas en el plano $\mathbb{A}$, la relación “ser métricamente equivalentes” es una relación de equivalencia.

4.3.2. ***Observación.*** Si dos cónicas son métricamente equivalentes, entonces son afínmente equivalentes.

4.3.3. **Proposición.** Consideremos la cónica $\boldsymbol{C}$ en $\mathbb{A}$ de ecuaciones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} \equiv \quad & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \\ \boldsymbol{C} \equiv \quad & a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0. \end{aligned}$$

en las referencias rectangulares $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, respectivamente. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a ecuación de la cónica en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a la ecuación de la cónica en $\mathcal{R}'$. Existe $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\,\mathcal{A}$ son semejantes y las matrices $\mathcal{B}'$ y $\rho\,\mathcal{B}$ son congruentes. Se tiene que $\det(\mathcal{A}') = \rho^2 \det(\mathcal{A})$, traza $(\mathcal{A}') = \rho$ traza $(\mathcal{A})$ y si los autovalores de $\mathcal{A}$ son λ_1 y λ_2 y los de $\mathcal{A}'$ son λ'_1 y λ'_2, entonces

$$\lambda'_1 = \rho\,\lambda_1, \quad \lambda'_2 = \rho\,\lambda_2.$$

Además, $\det(\mathcal{B}') = \rho^3 \det(\mathcal{B})$.

Demostración. Consideremos la ecuación de cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

donde

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & p_{11} & p_{12} \\ c & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathcal{P}$ es ortogonal. Existe $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que

$$\bar{\mathcal{P}}^t\,\rho\,\mathcal{B}\,\bar{\mathcal{P}} = \rho\,\bar{\mathcal{P}}^t\,\mathcal{B}\,\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{B}'$$

y entonces

$$\mathcal{P}^t\,\rho\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} = \rho\,\mathcal{P}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} = \mathcal{A}'.$$

Como la matriz $\mathcal{P}$ es ortogonal, las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\mathcal{A}$ son semejantes y entonces tienen igual determinante, traza y los mismos autovalores. Dado que $\det(\bar{\mathcal{P}}) = \det(\mathcal{P})$ y que $\mathcal{P}$ es una matriz ortogonal, se tienen que $\det(\mathcal{B}') = \det(\rho\,\mathcal{B})) = \rho^3\,\det(\mathcal{B})$. $\square$

4.3.4. **Definición.** ([3, p. 625]) Sea $\boldsymbol{C}$ la cónica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en una referencia rectangular $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a $\boldsymbol{C}$. Los números $\det(\mathcal{B})$, $\det(\mathcal{A})$, $\operatorname{traza}(\mathcal{A})$ y los autovalores $\mathcal{A}$ se llaman *invariantes métricos* de la cónica $\boldsymbol{C}$.

4.3.5. **Proposición.** Si las cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathbb{A}$ son métricamente equivalentes, entonces existe un movimiento $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$.

Demostración. Sean $\mathcal{R} = \{E_1, E_2; O\}$ y $\mathcal{R}' = \{E_1', E_2'; O'\}$ referencias rectangulares de $\mathbb{A}$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{C}_1$ en $\mathcal{R}'$ es igual a una ecuación de $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}$. Si unas ecuaciones de $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ en $\mathcal{R}$ son

$$\boldsymbol{C}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{C}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \mathcal{B}' \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

entonces $\bar{\mathcal{P}}^t\,\mathcal{B}\,\bar{\mathcal{P}} = \lambda\,\mathcal{B}'$, para algún $\lambda \in K - \{0\}$, donde

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & p_{11} & p_{12} \\ c & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Consideremos el movimiento $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(E_1') = E_1$, $\alpha(E_2') = E_2$ y $\alpha(O') = O$. La ecuación matricial de α^{-1} en $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde (x, y) son las coordenadas de un punto P en $\mathcal{R}$ y (x', y') son las coordenadas de $\alpha^{-1}(P)$ en $\mathcal{R}$. Por tanto, $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$. $\square$

4.3.6. ***Observación.*** Si $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son dos cónicas reales con más de un punto o dos cónicas complejas y existe un movimiento $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{C}_1) = \boldsymbol{C}_2$, entonces razonando como en la observación 4.2.9 se tiene que $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son cónicas métricamente equivalentes.

Para clasificar métricamente las cónicas, vamos a hacer cambios de coordenadas rectangulares en la ecuación de la cónica hasta llegar a su ecuación canónica ([4, Cap. VII]).

4.3.7. **Teorema.** Sea $\boldsymbol{C}$ la cónica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en una referencia rectangular $\mathcal{R} = \{E_1, E_2; O\}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Existe una referencia rectangular $\mathcal{R}' = \{E_1', E_2'; O\}$ de $\mathbb{A}$ respecto a la cual la cónica tiene la ecuación

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + a_0 = 0.$$

Demostración. Aplicando el teorema espectral a la matriz simétrica A, podemos encontrar una matriz ortogonal

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

tal que

$$\mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Por ser $\mathcal{P}$ una matriz ortogonal, si $B_{\mathcal{R}} = (v_1, v_2)$, entonces

$$B' = (v_1' = p_{11}v_1 + p_{21}v_2,\ v_2' = p_{12}v_1 + p_{22}v_2)$$

es una base ortonormal de V y $\mathcal{P} = 1_{B'B_{\mathcal{R}}}$. La referencia $\mathcal{R}' = \{E_1' = O + v_1',\ E_2' = O + v_2';\ O\}$ es una referencia rectangular de $\mathbb{A}$. Si P es un punto de coordenadas (x, y) en $\mathcal{R} = \{E_1, E_2; O\}$ y de coordenadas (x', y') en $\mathcal{R}'$, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

y poniendo

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene la ecuación de cambio de coordenadas rectangulares

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación de $\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

se obtiene la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en $\mathcal{R}'$,

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & \lambda_1 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_0 = 0,$$

donde

$$(\, b_1\ b_2 \,) = (\, a_1\ a_2 \,)\, \mathcal{P}. \qquad \square$$

4.3.8. **Obtención de la ecuación reducida de una cónica.**

A partir de la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en la referencia $\mathcal{R}'$,

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_0 = 0,$$

se tienen los siguientes casos:

(1) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, completando cuadrados

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + a_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0 \, .$$

Se tiene

$$\delta = -a_0 + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & \lambda_1 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\det(\mathcal{B})}{\det(\mathcal{A})}.$$

Con el cambio de coordenadas

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

si O'' es el punto de coordenadas $(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2)$ en la referencia $\mathcal{R}'$, $E_1'' = O'' + v_1'$, $E_2'' = O'' + v_2'$ y $\mathcal{R}'' = \{E_1'', E_2''; O''\}$, entonces la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}''$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \delta.$$

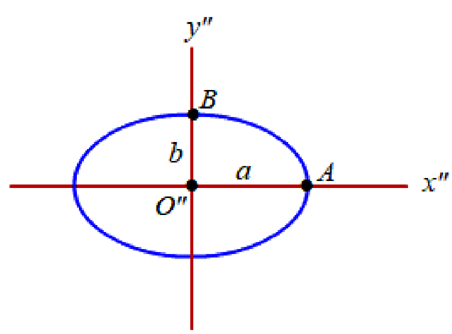
Esta ecuación se llama *ecuación reducida* de $\boldsymbol{C}$ y las rectas de ecuaciones $x'' = 0$ e $y'' = 0$ en $\mathcal{R}''$ son los ejes principales de la cónica.

(a) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ y $\delta \neq 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ y $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, se tienen los siguientes casos:

(i) Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\delta)$, es decir, si $\det(\mathcal{A}) > 0$ y $\det(\mathcal{B})\,\text{traza}(\mathcal{A}) < 0$, y si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces la cónica es una elipse cuya ecuación reducida es

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{\delta}{\lambda_2},$$

y si $a > b > 0$, esta ecuación es su ecuación canónica.



Los vértices A y B tienen coordenadas $(a, 0)$ y $(0, b)$ en $\mathcal{R}''$, respectivamente, y la recta $O'' \circ E_1''$ o eje $O''x''$ es el eje focal. Si $a < b$, haciendo el cambio de coordenadas rectangulares $x_1 = y''$, $y_1 = x''$ la ecuación canónica de la cónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{{y_1}^2}{a^2} \;=\; 1.$$

y el eje focal es el eje $O''x_1 =$ eje $O''y''$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces $\boldsymbol{C}$ es una circunferencia.

(ii) Si signo(λ_1)=signo$(\lambda_2)\neq$signo(δ) o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A})>0$ y $\det(\mathcal{B})$traza$(\mathcal{A})>0$, su ecuación reducida es

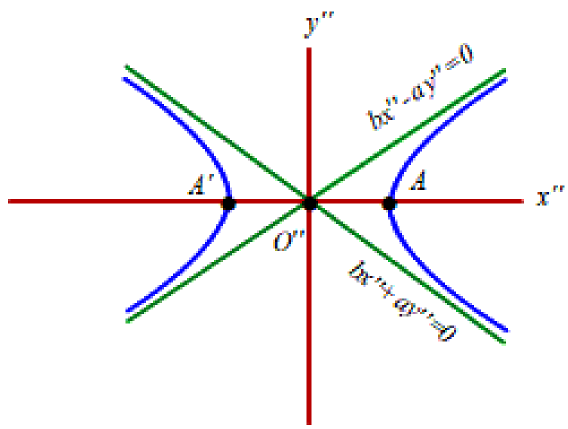
$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} \;=\; -1, \quad a^2 = -\frac{\delta}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{\delta}{\lambda_2},$$

y si $a > b > 0$, esta ecuación llama *ecuación canónica* de $\boldsymbol{C}$. Se dice que $\boldsymbol{C}$ es *una elipse imaginaria*; $\boldsymbol{C}$ es el conjunto vacío. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *circunferencia imaginaria*; $\boldsymbol{C}$ es el conjunto vacío.

(iii) Si signo$(\lambda_1) \neq$ signo(λ_2) o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A}) < 0$, la cónica es una hipérbola. Si signo$(\lambda_1) =$ signo(δ), entonces su ecuación canónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} \;=\; 1, \quad a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{\delta}{\lambda_2},$$

donde $a > 0$ y $b > 0$.



En $\mathcal{R}''$, los vértices A y A' tienen coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la recta $O'' \circ E_1''$ o eje $O''x''$ es el eje focal. Si signo$(\lambda_2) =$ signo(δ), entonces haciendo el cambio de coordenadas rectangulares $x_1 = y''$, $y_1 = x''$, la ecuación canónica de la cónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x_1^2}{b^2} - \frac{{y_1}^2}{a^2} \;=\; 1.$$

y el eje focal es el eje $O''x_1 =$ eje $O''y''$.

(b) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ y $\delta = 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ y $\det(\mathcal{B}) = 0$,

$$\boldsymbol{C} \equiv \; \lambda_1 \, x''^2 + \lambda_2 \, y''^2 = 0,$$

se pueden presentar los siguientes casos:

(i) Si signo(λ_1) = signo(λ_2), es decir, $\det(\mathcal{A}) > 0$, entonces su *ecuación canónica* es

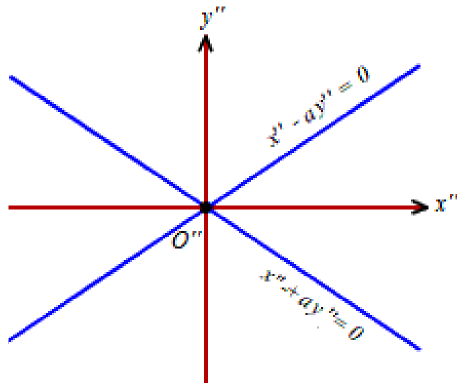
$$\boldsymbol{C} \equiv\ x''^2 + a^2\, y''^2 = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

y se dice que $\boldsymbol{C}$ está formada por un par de *rectas imaginarias que se cortan en un punto real*; $\boldsymbol{C}$ es el conjunto formado por el punto de coordenadas $(0,0)$ en $\mathcal{R}''$

(ii) Si signo$(\lambda_1) \neq$ signo(λ_2), es decir, $\det(\mathcal{A}) < 0$, su *ecuación canónica* es

$$\boldsymbol{C} \equiv x''^2 - a^2 y''^2 = (x'' + ay'')(x'' - ay'') = 0, \quad a^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

La cónica está formada por dos rectas que se cortan en el punto de coordenadas $(0,0)$ en $\mathcal{R}''$



(2) Si $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A}) = 0$ (solo uno de los dos autovalores de $\mathcal{A}$ puede ser 0, puesto que rango$(\mathcal{A}) \geq 1$), vamos a suponer que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$,

$$\boldsymbol{C} \equiv\ \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_0 = 0.$$

Completando cuadrados en la variable y' se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv\ \lambda_2\,(\,y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\,)^2\ +\ 2b_1\,x'\ +\ a_0\ -\ \frac{b_2^2}{\lambda_2}\ =\ 0.$$

Poniendo $k = a_0 - \dfrac{b_2^2}{\lambda_2}$,

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_2\,(\,y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\,)^2\ +\ 2b_1\,x'\ +\ k = 0\,,$$

y se pueden presentar los siguientes casos:

(a) Si $b_1 \neq 0$ o, equivalentemente, si $\det(\mathcal{A}) = 0$ y $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, entonces $\boldsymbol{C}$ es una parábola. Con el cambio de coordenadas

$$x'' = x' + \frac{k}{2b_1}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

si O'' es el punto de coordenadas $(-k/(2b_1), -b_2/\lambda_2)$ en la referencia $\mathcal{R}'$, entonces una *ecuación reducida* de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{O'' + v_1', O'' + v_2'\,;\, O''\}$ es

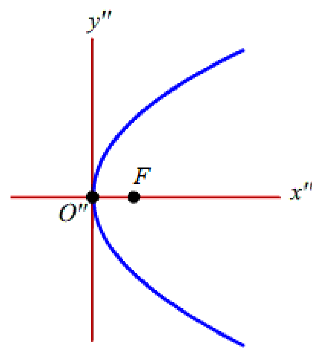
$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_2\, y''^2 \;+\; 2b_1\, x'' \;=\; 0,$$

o también

$$\boldsymbol{C} \equiv y''^2 = -\frac{2b_1}{\lambda_2}\, x'',$$

que es la ecuación canónica de la parábola si $b_1/\lambda_2 < 0$. El parámetro p de $\boldsymbol{C}$ está dado por

$$p = |\frac{b_1}{\lambda_2}| = \sqrt{-\frac{\det(\mathcal{B})}{(\text{traza}(\mathcal{A}))^3}}.$$



Los rectas de ecuaciones $x'' = 0$ e $y'' = 0$ son los ejes principales de la parábola. Si $b_1/\lambda_2 > 0$, haciendo el cambio de coordenadas $x_1 = -x''$, $y_1 = y''$, se obtiene la ecuación canónica de la parábola

$$\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 = \frac{2b_1}{\lambda_2}\, x_1,$$

que es la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en la referencia $\mathcal{R}_1 = \{O'' - v_1', O'' + v_2'; O''\}$.

(b) Si $b_1 = 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{A}) = 0$ y $\det(\mathcal{B}) = 0$, entonces

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_2\,(\,y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 \;+\; k \;=\; 0.$$

Con el cambio de coordenadas

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

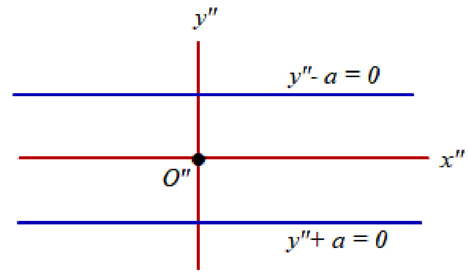
si O'' es el punto de coordenadas $(0, -b_2/\lambda_2)$ en la referencia $\mathcal{R}'$, entonces una *ecuación reducida* de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{O'' + v_1', O'' + v_2'\,;\, O''\}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv \lambda_2\, y''^2 \;+\; k \;=\; 0.$$

(i) Si $k = 0$, el rango de $\mathcal{B}$ es 1. En este caso se dice que $\boldsymbol{C}$ es la *recta doble* de *ecuación canónica* $y''^2 = 0$; el conjunto de puntos de $\boldsymbol{C}$ es el de la recta de ecuación $y'' = 0$.

(ii) Si $k \neq 0$ y signo$(\lambda_2) \neq$ signo(k) o, equivalentemente, si signatura$(\mathcal{B}) = (1,1)$, entonces $\boldsymbol{C}$ está formada por dos rectas paralelas. Su *ecuación canónica* es

$$\boldsymbol{C} \equiv y''^2 - a^2 = 0, \quad a^2 = -\frac{k}{\lambda_2}.$$



(iii) Si $k \neq 0$ y signo$(\lambda_2) =$ signo(k), es decir, si signatura$(\mathcal{B}) = (2,0)$, entonces *su ecuación canónica* es

$$\boldsymbol{C} \equiv y''^2 + a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{k}{\lambda_2};$$

y se dice que $\boldsymbol{C}$ está formada por *dos rectas paralelas imaginarias*; $\boldsymbol{C}$ es el conjunto vacío.

4.3.9. **Teorema de clasificación de cónicas en un plano afín euclídeo.** Dos cónicas $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son métricamente equivalentes si, y solo si, tienen la misma ecuación canónica.

Demostración. Se sigue de la proposición 4.3.3 (véase también su prueba), del teorema 4.3.7 y de 4.3.8. □

4.4. Clasificación afín de cónicas reales y complejas

Sea K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre K y $\mathbb{A}$ un plano afín sobre V. Sea $\boldsymbol{C}$ la cónica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en una referencia $\mathcal{R} = \{P_1, P_2; Q\}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Dado que toda matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal y $\mathcal{A}$ es una matriz simétrica, existe una matriz no singular

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

tal que

$$\mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Si $B_{\mathcal{R}} = (v_1, v_2)$, entonces

$$B' = (v_1' = p_{11}v_1 + p_{21}v_2,\ v_2' = p_{12}v_1 + p_{22}v_2)$$

es una base de $\mathbb{A}$ y $\mathcal{P} = 1_{B'B_{\mathcal{R}}}$. Razonando como en el teorema 4.3.7, si denotamos por (x', y') las coordenadas de un punto en la referencia $\mathcal{R}' = \{O + v_1', O + v_2'; O\}$, entonces la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en $\mathcal{R}'$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv d_1 x'^2 + d_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_0 = 0,$$

donde

$$(\, b_1\, b_2\,) \;=\; (\, a_1\, a_2\,)\, \mathcal{P}.$$

En los casos en que $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$ vamos a clasificar las cónicas en $\mathbb{A}$ por sus ecuaciones.

4.4.1. **Teorema de clasificación afín de cónicas reales.** ([3, p 117]) Sea $\mathbb{A}$ un plano afín real. Existe una referencia de $\mathbb{A}$ respecto a la cual la ecuación de la cónica es de una de las siguientes formas, que se llama *ecuación canónica* de la cónica afín:

(1) Si $\det(\mathcal{A}) \neq 0$,

- (a) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 1$, si $\det(\mathcal{A}) > 0$ y signatura$(\mathcal{B}) = (2,1)$ o $(1,2)$; en este caso se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *elipse*.
- (b) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = -1$, si $\det(\mathcal{A}) > 0$ y signatura$(\mathcal{B}) = (3,0)$ o $(0,3)$; se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *elipse imaginaria*; $\boldsymbol{C}$ es el conjunto vacío.
- (c) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 - y_1^2 = 1$, si $\det(\mathcal{A}) < 0$ y $\det(\mathcal{B}) \neq 0$; se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *hipérbola*.
- (d) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 - y_1^2 = 0$, si $\det(\mathcal{A}) < 0$ y $\det(\mathcal{B}) = 0$; $\boldsymbol{C}$ está formada por dos rectas que se cortan en un punto.
- (e) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 0$, si $\det(\mathcal{A}) > 0$ y $\det(\mathcal{B}) = 0$; se dice que $\boldsymbol{C}$ es *un par de rectas imaginarias no paralelas* que se cortan en un punto de $\mathbb{A}$; $\boldsymbol{C}$ es un punto.

(2) Si $\det(\mathcal{A}) = 0$,

- (a) $\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 + x_1 = 0$, si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$; se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *parábola*.
- (b) $\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 - 1 = 0$, si signatura$(\mathcal{B}) = (1,1)$; $\boldsymbol{C}$ es un par de rectas paralelas.
- (c) $\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 + 1 = 0$, si signatura$(\mathcal{B}) = (2,0)$ o $(0,2)$; se dice que $\boldsymbol{C}$ es *un par de rectas paralelas imaginarias*; $\boldsymbol{C}$ es el conjunto vacío.
- (d) $\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 = 0$, si rango$(\mathcal{B}) = 1$; se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *recta doble*.

Demostración. Razonaremos como en 4.3.8 pero haciendo cambios de coordenadas afines.

(1) Si $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, completando cuadrados se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv d_1\, (\, x' + \frac{b_1}{d_1}\,)^2 \;+\; d_2\, (\, y' + \frac{b_2}{d_2}\,)^2 \;+ a_0 \;-\; \frac{b_1^2}{d_1} \;-\; \frac{b_2^2}{d_2} \;= 0.$$

Pongamos

$$\delta = \; -a_0 \;+\; \frac{b_1^2}{d_1} \;+\; \frac{b_2^2}{d_2}.$$

(a) Si $\det(\mathcal{A}) > 0$ y signatura$(\mathcal{B}) = (2,1)$ o $(1,2)$, haciendo el cambio de coordenadas

$$x_1 = \sqrt{\frac{d_1}{\delta}}\ \left(x' + \frac{b_1}{d_1}\right), \quad y_1 = \sqrt{\frac{d_2}{\delta}}\ \left(y' + \frac{b_2}{d_2}\right),$$

una ecuación de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 1.$$

(b) Si $\det(\mathcal{A}) > 0$ y signatura$(\mathcal{B}) = (3,0)$ o $(0,3)$, con el cambio de coordenadas

$$x_1 = \sqrt{-\frac{d_1}{\delta}}\ \left(x' + \frac{b_1}{d_1}\right), \quad y_1 = \sqrt{-\frac{d_2}{\delta}}\ \left(y' + \frac{b_2}{d_2}\right),$$

una ecuación de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = -1.$$

(c) Si $\det(\mathcal{A}) < 0$ y signo$(d_1) =$ signo(δ), con el cambio de coordenadas

$$x_1 = \sqrt{\frac{d_1}{\delta}}\ \left(x' + \frac{b_1}{d_1}\right), \quad y_1 = \sqrt{-\frac{d_2}{\delta}}\ \left(y' + \frac{b_2}{d_2}\right),$$

se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 - y_1^2 = 1.$$

(d) Si $\det(\mathcal{B}) = 0$ y $\det(\mathcal{A}) > 0$ o, equivalentemente, $\delta = 0$ y signo$(d_1) =$ signo(d_2), con el cambio de coordenadas

$$x_1 = x' + \frac{b_1}{d_1}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\ \left(y' + \frac{b_2}{d_2}\right),$$

una ecuación de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 0.$$

(e) Si $\det(\mathcal{B}) = 0$ o, es decir, $\delta = 0$ y $\det(\mathcal{A}) < 0$ o, equivalentemente, signo$(d_1) \neq$ signo(d_2), con el cambio de coordenadas

$$x_1 = x' + \frac{b_1}{d_1}, \quad y_1 = \sqrt{-\frac{d_2}{d_1}}\ \left(y' + \frac{b_2}{d_2}\right),$$

una ecuación de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 - y_1^2 = 0.$$

(2) Si $\det(\mathcal{A}) = 0$ y suponemos que $d_1 = 0$, entonces

$$\boldsymbol{C} \equiv d_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + a_0 = 0.$$

Completando cuadrados y poniendo $k = a_0 - \dfrac{b_2^2}{d_2}$, se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv d_2 \left(y' + \frac{b_2}{d_2}\right)^2 + 2b_1 x' + k = 0.$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

(a) Si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$ o, equivalentemente, si $b_1 \neq 0$, haciendo el cambio de coordenadas

$$x_1 = \frac{2b_1}{d_2}x' + \frac{k}{d_2}, \quad y_1 = y' + \frac{b_2}{d_2},$$

una ecuación de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 + x_1 = 0.$$

(b) Si $\det(\mathcal{A}) = 0$, $\det(\mathcal{B}) = 0$, entonces haciendo el cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{C} \equiv d_2 \left(y' + \frac{b_2}{d_2} \right)^2 + k = 0.$$

(i) Si signatura$(\mathcal{B}) = (2,0)$ o $(0,2)$, con el cambio de coordenadas

$$x_1 = x', \quad y_1 = \sqrt{\frac{d_2}{k}} \left(y' + \frac{b_2}{d_2} \right),$$

se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 + 1 = 0.$$

(ii) Si signatura$(\mathcal{B}) = (1,1)$, con el cambio de coordenadas

$$x_1 = x', \quad y_1 = \sqrt{-\frac{d_2}{k}} \left(y' + \frac{b_2}{d_2} \right),$$

una ecuación de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 - 1 = 0.$$

(iii) Si rango$(\mathcal{B}) = 1$, con el cambio de coordenadas

$$x_1 = x', \quad y_1 = y' + \frac{b_2}{d_2},$$

se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 = 0.$$

□

4.4.2. **Teorema.** Sean $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ cónicas reales, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cónica $\boldsymbol{C}_1$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a la cónica $\boldsymbol{C}_2$, signatura$(\mathcal{A}) = (p,q)$ y signatura$(\mathcal{B}) = (r,s)$. Se tiene que $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son afínmente equivalentes si, y solo si, signatura$(\mathcal{A}') = (p,q)$ o (q,p) y signatura$(\mathcal{B}') = (r,s)$ o (s,r).

Demostración. Se sigue de la proposición 4.2.5 y de 4.4.1. □

4.4.3. ***Observación.*** Obsérvese que por la proposición 4.2.5 y el teorema de clasificación de cónicas afines, en un plano afín euclídeo todas las elipses son afínmente equivalentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, todas las hipérbolas son afínmente equivalentes a la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ y todas las parábolas son afínmente equivalentes a la parábola de ecuación $y^2 = x$.

4.4.4. **Clasificación afín de cónicas complejas.** Sea $\mathbb{A}$ un plano afín complejo y $\boldsymbol{C}$ la cónica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en una referencia afín es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

y sean $\mathcal{B}$ la matriz de la cónica y $\mathcal{A}$ la matriz de los términos cuadráticos. Existe una referencia de $\mathbb{A}$ respecto a la cual la ecuación de la cónica es de una de las siguientes formas, que se llama *ecuación canónica* de la cónica afín:

(1) Si $\det(\mathcal{A}) \neq 0$,

- (a) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 1$, si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$.
- (b) $\boldsymbol{C} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 0$, si $\det(\mathcal{B}) = 0$, y $\boldsymbol{C}$ está formada por dos rectas que se cortan en un punto.

(2) Si $\det(\mathcal{A}) = 0$,

- (a) $\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 + x_1 = 0$, si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$.
- (b) $\boldsymbol{C} \equiv y_1^2 + 1 = 0$, si $\mathrm{rango}(\mathcal{B}) = 2$, y $\boldsymbol{C}$ es un par de rectas paralelas.
- (c) $\mathbb{C} \equiv y_1^2 = 0$, si $\mathrm{rango}(\mathcal{B}) = 1$ y se dice que $\boldsymbol{C}$ es una *recta doble*.

Demostración. Se razona como en 4.4.1 pero teniendo en cuenta que todo número complejo es un cuadrado. $\square$

4.4.5. **Teorema.** Sean $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ cónicas complejas, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cónica $\boldsymbol{C}_1$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a la cónica $\boldsymbol{C}_2$. Se tiene que $\boldsymbol{C}_1$ y $\boldsymbol{C}_2$ son afínmente equivalentes si, y solo si, $\mathrm{rango}(\mathcal{A}') = \mathrm{rango}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{rango}(\mathcal{B}') = \mathrm{rango}(\mathcal{B})$.

Demostración. Se sigue de la proposición 4.2.5 y de que si $\mathrm{rango}(\mathcal{A}') = \mathrm{rango}(\mathcal{A}')$ y $\mathrm{rango}(\mathcal{B}') = \mathrm{rango}(\mathcal{B})$, entonces por 4.4.4 las cónicas tienen la misma ecuación canónica. $\square$

4.5. Centro de una cónica

Sea K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial sobre K y $\mathbb{A}$ un plano afín sobre V.

4.5.1. **Definición.** Sea $\boldsymbol{C}$ una cónica. Se dice que un punto $P_{\boldsymbol{C}} \in \mathbb{A}$ es *centro* o *centro de simetría de la cónica* si toda recta que pasa por $P_{\boldsymbol{C}}$ y corta a la cónica en un punto la corta también en su simétrico respecto a $P_{\boldsymbol{C}}$.

4.5.2. **Definición.** Se dice que una cónica es *central* si, y sólo si, tiene un único centro de simetría.

4.5.3. **Proposición.** Sea $\mathbb{A}$ un plano afín real o complejo, $\mathcal{R} = \{P_1, P_2; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $\boldsymbol{C}$ la cónica cuya ecuación en $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

y

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces un punto $P_{\boldsymbol{C}}$ de coordenadas (x_0, y_0) en $\mathcal{R}$ es centro de $\boldsymbol{C}$ si, y solo si,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

y la cónica $\boldsymbol{C}$ es una cónica central, si y solo si, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$.

Demostración. Un punto $P_{\boldsymbol{C}}$ es un centro de la cónica $\boldsymbol{C}$ si para cada $P \in \boldsymbol{C}$, el punto $P' = P_{\boldsymbol{C}} - \overrightarrow{P_{\boldsymbol{C}}P}$ pertenece a $\boldsymbol{C}$. Si la cónica $\boldsymbol{C}$ no está contenida en una recta y el punto $P_{\boldsymbol{C}}$ es un centro de la cónica, entonces existen puntos P_1 y P_2 en $\boldsymbol{C}$ tales que $P_{\boldsymbol{C}}$, P_1 y P_2 no están alineados. En efecto, existe $P_1 \in \boldsymbol{C}$ tal que $P_1 \neq P_{\boldsymbol{C}}$ y dado que $\boldsymbol{C} \not\subset P_{\boldsymbol{C}} \circ P_1$, existe $P_2 \in \boldsymbol{C}$ tal que $P_2 \notin P_{\boldsymbol{C}} \circ P_1$. Así, los puntos $P_{\boldsymbol{C}}$, P_1 y P_2 no están alineados. Si las coordenadas de $P_{\boldsymbol{C}}$ en $\mathcal{R}$ son (x_0, y_0) y las coordenadas de $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{C}}P_i}$ en $B_{\mathcal{R}}$ son (h_i, k_i), para $i = 1, 2$, entonces las coordenadas de P_i en $\mathcal{R}$ son $(x_0 + h_i, y_0 + k_i)$ y las de $P'_i = P_{\boldsymbol{C}} - \overrightarrow{P_{\boldsymbol{C}}P_i}$ son $(x_0 - h_i, y_0 - k_i)$, para $i = 1, 2$. Dado que $P_{\boldsymbol{C}}$ es un centro de la cónica, se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}(x_0 + h_i)^2 + a_{22}(y_0 + t_i)^2 + 2a_{12}(x_0 + h_i)(y_0 + k_i) + 2a_1(x_0 + h_i) + 2a_2(y_0 + k_i) + a_0 = 0, \\ a_{11}(x_0 - h_i)^2 + a_{22}(y_0 - k_i)^2 + 2a_{12}(x_0 - h_i)(y_0 - k_i) + 2a_1(x_0 - h_i) + 2a_2(y_0 - k_i) + a_0 = 0, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Como consecuencia,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)h_i + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)k_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que los vectores $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{C}}P_1}$ y $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{C}}P_2}$ son linealmente independientes,

$$\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego se tiene (1),

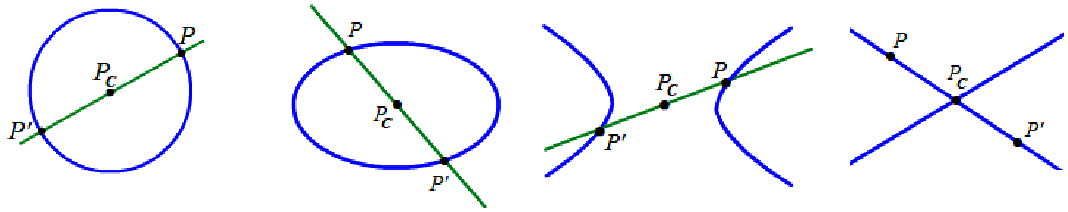
$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0.$$

Recíprocamente, si las coordenadas (x_0, y_0) de un punto de $\mathbb{A}$ verifican las ecuaciones (1), entonces ese punto es un centro de $\boldsymbol{C}$.

Si $\boldsymbol{C}$ es una recta doble, entonces los puntos de $\boldsymbol{C}$ son los centros de simetría de $\boldsymbol{C}$ y son los puntos que verifican la ecuación (1). En un plano afín real, si la cónica $\boldsymbol{C}$ es un par de rectas imaginarias no paralelas que se cortan en un punto, entonces ese punto es el centro de simetría de $\boldsymbol{C}$ y es el único punto cuyas coordenadas verifican la ecuación (1). $\square$

4.5.4. **Ejemplos.** Si $\mathbb{A}$ es un plano afín real, la elipse, la hipérbola y un par de rectas (paralelas o no) tienen centros de simetría.

4.5.5. **Ejemplos.** Si $\mathbb{A}$ es un plano afín real, entonces las cónicas centrales son las elipses, la hipérbolas, los pares de rectas que se cortan en un punto y las formadas por un punto. En un plano afín euclídeo las cónicas centrales son las circunferencias, la elipses, las hipérbolas y los pares de rectas que se cortan en un punto y las formadas por un punto.



4.5.6. ***Observación.*** Si $\mathbb{A}$ es un plano afín real, la parábola no tiene centro, puesto que la matriz

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tiene rango 3, luego la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Dado que el rango de la matriz $\mathcal{A}$ es 1, el sistema (1) de la proposición 4.5.3 no tiene solución.

4.5.7. ***Observación.*** Si $\mathbb{A}$ es un plano afín euclídeo, la referencia $\mathcal{R}$ es rectangular y la cónica $\boldsymbol{C}$ es central, entonces el centro de simetría de la cónica es el punto de corte de los ejes principales de la cónica. En efecto, si la ecuación reducida de $\boldsymbol{C}$ en una referencia $\mathcal{R}_1$ es

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = \delta,$$

el centro de $\boldsymbol{C}$ es el punto de coordenadas $(0,0)$ en $\mathcal{R}_1$. En efecto, si $P_{\boldsymbol{C}}$ tiene coordenadas (x_0, y_0) en $\mathcal{R}_1$, entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = 0,\ y_0 = 0.$$

Por tanto si $\boldsymbol{C}$ es una cónica central, la ecuación (1) da las coordenadas en la referencia $\mathcal{R}$ del punto de corte de los ejes principales de la cónica.

4.6. Ejemplos de cónicas

4.6.1. **Ejemplo.** Consideremos la cónica en $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x + 4y - 4 = 0.$$

Las matrices de la cónica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}) = 8 > 0, \quad \det(\mathcal{B}) = -64.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cónica $\boldsymbol{C}$ no es degenerada, y como $\det(A) > 0$, $\boldsymbol{C}$ es una elipse. Además, $\boldsymbol{C}$ es una cónica central. Vamos a calcular la ecuación reducida, el centro y los ejes principales de $\boldsymbol{C}$ siguiendo el teorema 4.3.7 y 4.3.8.

Por el teorema espectral, la matriz simétrica $\mathcal{A}$ es diagonalizable y existe una matriz de paso ortogonal. Para calcular una matriz de paso $\mathcal{P}$ ortogonal calculamos el polinomio característico de $\mathcal{A}$,

$$P_{\mathcal{A}}(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4).$$

Los autovalores de $\mathcal{A}$ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Los subespacios propios asociados a los autovalores son

$$V_2 = \mathrm{Nuc}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,-1) \rangle, \quad V_4 = \mathrm{Nuc}\,(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,1) \rangle,$$

donde f es el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada en la base canónica es $\mathcal{A}$. La matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal y verifica $\mathcal{P}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} = \mathrm{diag}\,(2\;\;4)$. La base

$$B = (v_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2),\, v_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{BC}$. El centro de la cónica es el punto $O'' = (x_0, y_0)$ dado por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $O'' = (1,-1)$. La ecuación reducida de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{E_1'' = O'' + v_1,\, E_2'' = O'' + v_2;\, O''\}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv 2\,x''^2 + 4\,y''^2 = \delta, \quad \delta = -\frac{\det(\mathcal{B})}{\det(\mathcal{A})} = -\frac{-64}{18} = 8,$$

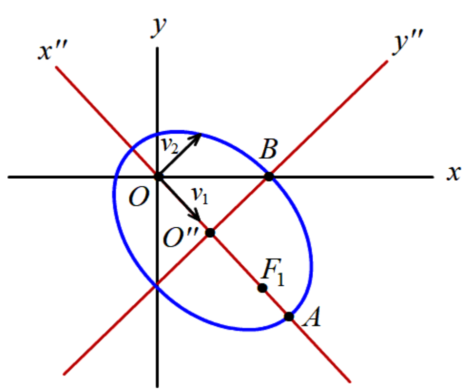
equivalentemente,

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{2} = 1.$$

Los ejes principales de la elipse son

$$\text{eje } O''x'' = O'' \circ E_1'' = (1,-1) + \langle (1,-1) \rangle, \qquad \text{eje } O''y'' = O'' \circ E_2'' = (1,-1) + \langle (1,1) \rangle.$$

El eje focal o eje mayor de la elipse es el eje $O''x''$.



La ecuación del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}''$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Los vértices A y B de $\boldsymbol{C}$ son los puntos de coordenadas $(2,0)$ y $(0,\sqrt{2})$ en $\mathcal{R}''$ y los focos F_1 y F_2 son los puntos de coordenadas $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$ en $\mathcal{R}''$. Por tanto, $A = (1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$, $B = (2,0)$, $F_1 = (2,-2)$ y $F_2 = (0,0) = O$.

4.6.2. **Ejemplo.** Consideremos la cónica en $\mathbb{R}^2$ de ecuación en la referencia canónica

$$\boldsymbol{C} \equiv 12y^2 - 16xy - 8x + 28y + 15 = 0.$$

Las matrices de la cónica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 15 & -4 & 14 \\ -4 & 0 & -8 \\ 14 & -8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}) = -64 < 0, \quad \det(\mathcal{B}) = -256.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cónica $\boldsymbol{C}$ es no degenerada. Dado que $\det(\mathcal{A}) < 0$, $\boldsymbol{C}$ es una hipérbola. La cónica $\boldsymbol{C}$ es una cónica central Vamos a calcular la ecuación reducida. el centro y los ejes principales de $\boldsymbol{C}$ siguiendo el teorema 4.3.7 y 4.3.8.

Por el teorema espectral, la matriz simétrica $\mathcal{A}$ es diagonalizable y existe una matriz de paso ortogonal. Para calcular una matriz de paso $\mathcal{P}$ ortogonal calculamos el polinomio característico de $\mathcal{A}$,

$$P_{\mathcal{A}}(X) = \begin{vmatrix} -X & -8 \\ -8 & 12-X \end{vmatrix} = X^2 - 12X - 64 = (X+4)(X-16).$$

Los autovalores de $\mathcal{A}$ son $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 16$. Los subespacios propios asociados a los autovalores son

$$V_{-4} = \mathrm{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \langle (2,1) \rangle, \quad V_{16} = \mathrm{Nuc}(f - 16\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \langle (1,-2) \rangle,$$

donde f es el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada en la base canónica es $\mathcal{A}$. La matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

es ortogonal y es una matriz de paso, es decir, $\mathcal{P}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} = \mathrm{diag}\,(\,-4 \quad 16\,)$. La base

$$B = (v_1 = (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5),\, v_2 = (\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5))$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{BC}$. El centro de la cónica es el punto $O'' = (x_0, y_0)$ cuyas coordenadas verifican la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $O'' = (1, -1/2)$. La ecuación reducida de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{E''_1 = O'' + v_1,\ E''_2 = O'' + v_2;\ O''\}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv -4\, x''^2 + 16\, y''^2 = \delta, \quad \delta = -\frac{\det(B)}{\det(A)} = -4.$$

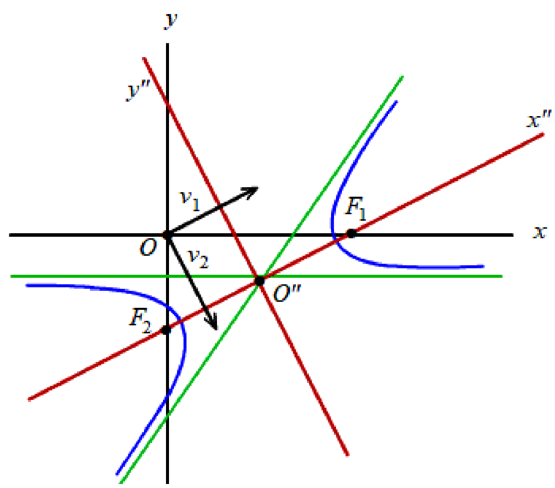
La ecuación canónica de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv x''^2 - \frac{y''^2}{1/4} = 1.$$

Los ejes principales son las rectas

$$\text{eje}\, O''x'' = O'' \circ E''_1 = (1, -1/2) + \langle (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5) \rangle, \ \text{eje}\, O''y'' = O'' \circ E''_2 = (1, -1/2) + \langle (\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5) \rangle.$$

El eje focal es el eje $O''x''$.



La ecuación del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}''$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

En la referencia $\mathcal{R}''$, los focos F_1 y F_2 son los puntos de coordenadas $(\sqrt{5}/2, 0)$ y $(-\sqrt{5}/2, 0)$, respectivamente. Por tanto, $F_1 = (2, 0)$ y $F_2 = (0, -1)$.

4.6.3. **Ejemplo.** Consideremos la cónica en $\mathbb{R}^2$ de ecuación en la referencia canónica

$$\boldsymbol{C} \equiv x^2 + y^2 - 2xy - 14x - 2y + 49 = 0.$$

Las matrices de la cónica son:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 49 & -7 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los determinantes de estas matrices son

$$\det(\mathcal{A}) = 0, \quad \det(\mathcal{B}) = -64.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cónica $\boldsymbol{C}$ es no degenerada. Dado que $\det(\mathcal{A}) = 0$, $\boldsymbol{C}$ es un parábola. Además, $\boldsymbol{C}$ es una cónica sin centro. El parámetro de la parábola es

$$p = \sqrt{-\frac{\det(\mathcal{B})}{(\mathrm{traza}(\mathcal{A}))^3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Siguiendo el teorema 4.3.7 vamos a hacer un cambio de coordenadas rectangulares para suprimir en la ecuación de la cónica el polinomio $-2xy$. Por el teorema espectral, la matriz simétrica $\mathcal{A}$ es diagonalizable y existe una matriz de paso $\mathcal{P}$ ortogonal. Calculamos el polinomio característico de $\mathcal{A}$,

$$P_{\mathcal{A}}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = X^2 - 2X = X(X-2).$$

Los autovalores de $\mathcal{A}$ son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2,$$

y los subespacios propios asociados a estos autovalores son

$$V_0 = \langle(1,1)\rangle, \quad V_2 = \langle(1,-1)\rangle.$$

La matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

es ortogonal y es una matriz de paso, es decir, $\mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} = \mathrm{diag}\,(0 \;\; 2)$. La base

$$B = (v_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2),\, v_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2))$$

es ortonormal y $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{BC}$. Consideremos la referencia rectangular

$$\mathcal{R}' = \{E_1' = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2),\, E_2' = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\,;\, O = (0,0)\}.$$

La ecuación de cambio de coordenadas rectangulares de $\mathcal{R}'$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El cálculo

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

da la ecuación

$$\boldsymbol{C} \equiv 2{y'}^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' + 49 = 0,$$

que es la ecuación de la cónica $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'$. Completando cuadrados en la variable y' se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv 2(y' - 3\sqrt{2}/2)^2 - 8\sqrt{2}x' + 40 = 0,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{C} \equiv 2\,(y' - 3\sqrt{2}/2)^2 - 8\sqrt{2}\,(x' - 5\sqrt{2}/2) = 0.$$

Haciendo el cambio de coordenadas rectangulares

$$x'' = x' - 5\sqrt{2}/2, \quad y'' = y' - 3\sqrt{2}/2,$$

se obtiene la ecuación reducida

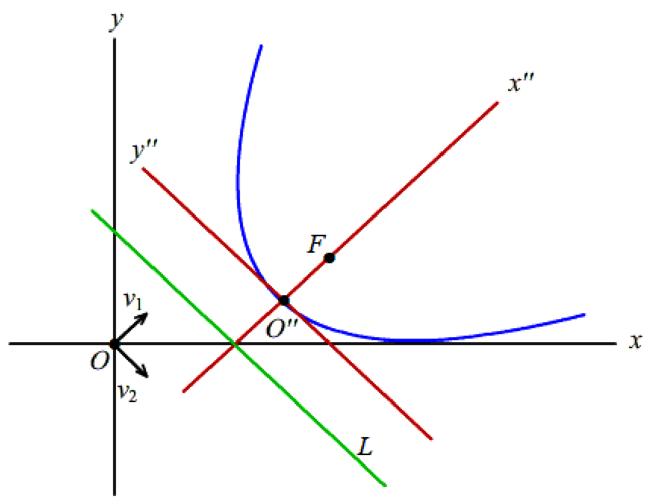
$$\boldsymbol{C} \equiv 2\,y''^2 - 8\sqrt{2}\,x'' = 0,$$

que es la ecuación de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{E_1'' = O'' + v_1,\ E_2'' = O'' + v_2\,;\ O''\}$, donde O'' es el punto de coordenadas $(5\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ en $\mathcal{R}'$. Se tiene que $O'' = (4,1)$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}/2 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación canónica de la parábola es

$$\boldsymbol{C} \equiv y''^2 = 4\sqrt{2}\,x''.$$



Los ejes principales son

$$\text{eje}\, O''x'' = O'' \circ E_1'' = (4,1) + \langle (1,1) \rangle, \qquad \text{eje}\, O''y'' = O'' \circ E_2'' = (4,1) + \langle (1,-1) \rangle,$$

y el eje focal es el eje $O''x''$. La ecuación del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}''$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

El parámetro de la parábola es $p = 2\sqrt{2}$, el foco F es el punto de coordenadas $(\sqrt{2}, 0)$ en $\mathcal{R}''$ y la directriz es la recta L cuya ecuación en la referencia $\mathcal{R}''$ es $L \equiv x'' + \sqrt{2} = 0$. Por tanto, $F = (5,2)$ y la ecuación de L en la referencia canónica es

$$L \equiv x + y - 3 = 0.$$

4.6.4. **Ejemplo.** Consideremos la cónica en $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv 2x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 5y + 4 = 0.$$

Las matrices de la cónica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5/2 \\ -3 & 2 & 3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}) = -1/4, \quad \det(\mathcal{B}) = 0.$$

La cónica $\boldsymbol{C}$ es una cónica degenerada. Dado que $\det(\mathcal{A}) < 0$, $\boldsymbol{C}$ es un par de rectas que se cortan en un punto. Para calcular las rectas que forman la cónica resolvemos su ecuación como una ecuación de segundo grado en x,

$$2x^2 + (3y - 6)x + y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Se tiene

$$x = \frac{-3y + 6 \pm \sqrt{(3y-6)^2 - 8(y^2 - 5y + 4)}}{4} = \frac{-3y + 6 \pm \sqrt{y^2 + 4y + 4}}{4} = \frac{-3y + 6 \pm (y+2)}{4}.$$

Por tanto,

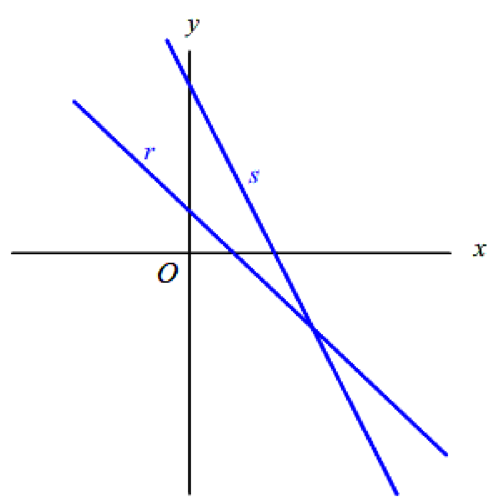
$$x = \frac{-2y + 8}{4} \quad \text{o} \quad x = -y + 1.$$

Así,

$$\boldsymbol{C} \equiv (2x + y - 4)(x + y - 1) = 0.$$

Los puntos de $\boldsymbol{C}$ son los puntos de $\mathbb{R}^2$ que están en la rectas r y s cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$r \equiv x + y - 1 = 0, \quad s \equiv 2x + y - 4 = 0.$$



4.6.5. **Ejemplo.** Sea $\boldsymbol{C}$ la cónica en $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv 3x^2 + 20y^2 + 16xy - 8x - 16y + 4 = 0. \qquad (\star)$$

Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el producto escalar $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\sigma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ es $B = (v_1 = (1, 0), v_2 = (-2, 1))$. Una referencia rectangular del plano afín $\mathbb{R}^2$ sobre el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ es $\mathcal{R} = \{(1, 0), (-2, 1); (0, 0)\}$. Las matrices de la cónica $\boldsymbol{C}$ en la referencia canónica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 \\ -4 & 3 & 8 \\ -8 & 8 & 20 \end{pmatrix}.$$

Dado que $\det(\mathcal{A}) = -4 > 0$ y $\det(\mathcal{B}) = -16 \neq 0$, la cónica $\boldsymbol{C}$ es una hipérbola. La ecuación del cambio de coordenadas de $\mathcal{R}$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Pongamos

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación matricial de $\boldsymbol{C}$ se tiene

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \mathcal{P}^t \, B \, \mathcal{P} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{C} \equiv 3x_1^2 + 4x_1y_1 - 8x_1 + 4 = 0.$$

Las matrices de $\boldsymbol{C}$ en $\mathcal{R}$ son

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el teorema espectral, dado que $\mathcal{A}$ es una matriz real simétrica, es diagonalizable y existe una matriz de paso ortogonal. Los autovalores de $\mathcal{A}'$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$. Los subespacios propios asociados a estos autovalores son

$$V_{-1} = \langle (1,-2) \rangle, \quad V_4 = \langle (2,1) \rangle.$$

La matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal y $\mathcal{P}^t \, A' \, \mathcal{P} = \operatorname{diag}(-1 \;\; 4)$. La base $B' = (v_1', v_2')$ dada por

$$v_1' = \sqrt{5}/5\, v_1 - 2\sqrt{5}/5\, v_2 = (\sqrt{5}, -2\sqrt{5}/5), \quad v_2' = 2\sqrt{5}/5\, v_1 + \sqrt{5}/5\, v_2 = (0, \sqrt{5}/5),$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \sigma)$. El centro de la cónica y origen de los ejes principales es el punto $O'' = (x_0, y_0)$ que verifica la ecuación

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix},$$

es decir, $O'' = (-4, 2)$. La ecuación reducida de $\boldsymbol{C}$ en la referencia rectangular

$$\mathcal{R}'' = \{E_1'' = O'' + v_1',\, E_2'' = O'' + v_2'; O''\} = \{(-4+\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5}/5),\, (-4, 2+\sqrt{5}/5)\,;\, (-4,2)\}$$

es

$$\boldsymbol{C} \equiv -x_1''^2 + 4\, y_1''^2 = \delta, \quad \delta = -\frac{\det(B')}{\det(A')} = -\frac{-16}{-4} = -4.$$

La ecuación canónica de $\boldsymbol{C}$ es

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{x_1''^2}{4} - y_1''^2 = 1.$$

Los ejes principales son

$$\text{eje } O''x_1'' = O'' \circ E_1'' = (-4,2) + \langle (5,-2) \rangle, \quad \text{eje } O''y_1'' = O'' \circ E_2'' = (-4,2) + \langle (0,1) \rangle.$$

y el eje focal es el eje $O''x_1''$.

4.6.6. **Ejemplo.** Consideremos la cónica en $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{C} \equiv x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x + 4y - 2 = 0.$$

Vamos a clasificar afínmente $\boldsymbol{C}$. Las matrices de la cónica son:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Los determinantes de estas matrices son

$$\det(\mathcal{A}) = 0, \quad \det(\mathcal{B}) = 0.$$

Además, como signatura$(B) = (1,1)$, la cónica $\boldsymbol{C}$ está formada por dos rectas paralelas y distintas.

4.7. Cuádricas

Sean K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial sobre K de dimensión 3 y $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V.

4.7.1. **Definición.** Una *cuádrica* $\boldsymbol{S}$ en $\mathbb{A}$ es el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}$ cuyas coordenadas (x, y, z) respecto a una referencia $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; Q\}$ verifican una ecuación polinómica de segundo grado con coeficientes en K,

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \qquad (\star)$$

Denotaremos por A y B las matrices simétricas:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La ecuación $(\star)$ de $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}$ se expresa matricialmente como

$$\boldsymbol{S} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Se llaman *ecuaciones de la cuádrica* $\boldsymbol{S}$ *en* $\mathcal{R}$ a las ecuaciones que se obtienen multiplicando por un escalar no nulo la ecuación $(\star)$. La matriz $\mathcal{B}$ o cualquiera de sus proporcionales se llama *matriz de la cuádrica* en $\mathcal{R}$ y la matriz $\mathcal{A}$ se dice que es la *matriz de términos cuadráticos de la cuádrica.*

4.7.2. **Ecuación de la cuádrica en otra referencia afín.** ([3, p. 635]) Si $\mathcal{R}' = \{P_1', P_2', P_3'; Q'\}$ es otra referencia de $\mathbb{A}$, (x, y, z) son las coordenadas de un punto en la referencia $\mathcal{R}$ y (x', y', z') sus coordenadas en $\mathcal{R}'$, se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

donde (b, c, d) son las coordenadas de Q' en $\mathcal{R}$ y

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = 1_{B_{\mathcal{R}'} B_{\mathcal{R}}},$$

siendo $B_{\mathcal{R}}$ y $B_{\mathcal{R}'}$ las bases asociadas a las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, respectivamente. La matriz

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ c & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ d & p_{31} & p_{32} & p_{33}, \end{pmatrix}$$

se llama *matriz del cambio de coordenadas* de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación de la cuádrica $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}$,

$$\boldsymbol{S} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t \, \mathcal{B} \, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0.$$

Si

$$\mathcal{A}' = \mathcal{P}^t \, \mathcal{A} \, \mathcal{P} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}' = \bar{P}^t \, \mathcal{B} \, \bar{P} = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_1 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_2 & a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_3 & a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en la referencia $\mathcal{R}'$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a'_0 = 0.$$

Dado que $\mathcal{A}' = \mathcal{P}^t \, \mathcal{A} \, \mathcal{P}$ y $\mathcal{A} \neq 0$, es $\mathcal{A}' \neq 0$. Así, la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}'$ es una ecuación polinómica de grado 2; es decir, el hecho de que una curva sea una cónica, no depende de la referencia afín considerada. Las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ y las matrices $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son matrices congruentes. Además, si $K = \mathbb{R}$,

$$\text{signatura}\,(\mathcal{A}) = \text{signatura}\,(\mathcal{A}'), \quad \text{signatura}\,(\mathcal{B}) = \text{signatura}(B').$$

Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo y $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son referencias rectangulares, entonces las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son semejantes y $\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}')$.

4.7.3. **Definición.** Sea $\boldsymbol{S}$ la cuádrica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en una referencia afín es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Se dice que la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es no *degenerada* si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, siendo $\mathcal{B}$ la matriz de la cuádrica.

Por 4.7.2, el hecho de que la cuádrica sea no degenerada no depende de la referencia afín considerada.

Vamos a clasificar las cuádricas por sus ecuaciones y considerar como cuádricas distintas aquellas cuyas ecuaciones en una misma referencia no son proporcionales.

4.7.4. **Proposición.** Se dice que las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ en $\mathbb{A}$ son *afínmente equivalentes* si existen referencias $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{S}_1$ en $\mathcal{R}_1$ coincide con una ecuación de $\boldsymbol{S}_2$ en $\mathcal{R}_2$.

La relación "ser afínmente equivalentes" es una relación de equivalencia en el conjunto de las cuádricas en $\mathbb{A}$.

4.7.5. **Proposición.** Sean $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ las cuádricas en $\mathbb{A}$ cuyas ecuaciones en la referencia afín $\mathcal{R}$ son

$$\boldsymbol{S}_1 \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + a_3z + a_0 = 0,$$
$$\boldsymbol{S}_2 \equiv a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + 2a'_1x + 2a'_2y + 2a'_3x + a'_0 = 0.$$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cuádrica $\boldsymbol{S}_1$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a $\boldsymbol{S}_2$. Si $\boldsymbol{S}_1$ es afínmente equivalente a $\boldsymbol{S}_2$, entonces existe $\rho \in K$ tal que las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\mathcal{A}$ son congruentes y las matrices $\mathcal{B}'$ y $\rho\mathcal{B}$ son congruentes; en particular,

$$\operatorname{rango}(\mathcal{A}) = \operatorname{rango}(\mathcal{A}'), \qquad \operatorname{rango}(\mathcal{B}) = \operatorname{rango}(\mathcal{B}').$$

Si $K = \mathbb{R}$ y signatura$(\mathcal{A}) = (p, q)$, entonces signatura$(\mathcal{A}') = (p, q)$ o (q, p) y si signatura$(\mathcal{B}) = (r, s)$, entonces signatura$(\mathcal{B}') = (r, s)$ o (s, r).

Demostración. Es análoga a la de la proposición 4.2.5. □

4.7.6. ***Observación.*** De la misma forma que en el caso de las cónicas se puede probar, utilizando el teorema de Witt ([1, Ch. VI, Proposition 5.1, Theorem 8.10]), que si $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son cuádricas no degeneradas y existen escalares $\rho, \mu \in K - \{0\}$ tales que las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\,\mathcal{A}$ son congruentes y las matrices $\mathcal{B}'$ y $\mu\,\mathcal{B}$ son congruentes, entonces las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son afínmente equivalentes.

4.7.7. **Lema.** Si $\boldsymbol{S}$ es una cuádrica en $\mathbb{A}$ y $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad, entonces $\alpha(\boldsymbol{S})$ es una cuádrica.

Demostración. Se razona como en el lema 4.2.7. □

4.7.8. **Proposición.** Si las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son afínmente equivalentes, entonces existe una afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{S}_1) = \boldsymbol{S}_2$.

Demostración. Se razona como en la proposición 4.2.8. □

4.7.9. ***Observación.*** Razonando como en 4.2.9 y teniendo en cuenta ([13, p. 126]), se prueba que si $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son dos cuádricas reales no vacías o dos cúádricas complejas, y existe una afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{S}_1) = \boldsymbol{S}_2$, entonces $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son cuádricas afínmente equivalentes. Si $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son dos cuádricas reales formadas por un punto, entonces son afínmente equivalentes y si $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son dos rectas entonces también son afínmente equivalentes (véase el teorema 4.9.1).

4.8. Cuádricas en el espacio afín euclídeo tridimensional. Ecuación reducida de una cuádrica

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo tridimensional sobre un espacio vectorial real V.

4.8.1. **Definición.** Se dice que las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ en $\mathbb{A}$ son *métricamente equivalentes* si existen referencias rectangulares $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tales que una ecuación de $\boldsymbol{S}_1$ en $\mathcal{R}_1$ coincide con una ecuación de $\boldsymbol{S}_2$ en $\mathcal{R}_2$.

En el conjunto de las cuádricas en $\mathbb{A}$, la relación "ser métricamente equivalentes" es una relación de equivalencia.

4.8.2. ***Observación.*** Si dos cuádricas son métricamente equivalentes, entonces son afínmente equivalentes.

4.8.3. **Proposición.** Sea $\boldsymbol{S}$ la cuádrica en $\mathbb{A}$ de ecuaciones

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + a_3z + a_0 = 0,$$
$$\boldsymbol{S} \equiv a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + 2a'_1x + 2a'_2y + 2a'_3x + a'_0 = 0.$$

en las referencias rectangulares $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, respectivamente. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cuádrica $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matricas asociadas a $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}$. Existe $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que las matrices $\mathcal{A}'$ y $\rho\,\mathcal{A}$ son semejantes, las matrices $\mathcal{B}'$ y $\rho\,\mathcal{B}$ son congruentes; como consecuencia $\det(\mathcal{A}') = \rho^3 \det(\mathcal{A})$, traza$\,(\mathcal{A}') = \rho$ traza$\,(\mathcal{A})$ y si los autovalores de $\mathcal{A}$ son λ_1, λ_2 y λ_3 y los de $\mathcal{A}'$ son λ'_1, λ'_2 y λ'_3, entonces

$$\lambda'_1 = \rho\,\lambda_1, \quad \lambda'_2 = \rho\,\lambda_2, \quad \lambda'_3 = \rho\,\lambda_3.$$

Además, $\det(\mathcal{B}') = \rho^4 \det(\mathcal{B})$.

Demostración. Es análoga a la de la proposición 4.3.3. □

4.8.4. **Definición.** ([3, p. 671]) Sea $\boldsymbol{S}$ la cuádrica en $\mathbb{A}$ cuya ecuación en la referencia rectangular $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a $\boldsymbol{S}$. Los números $\det(\mathcal{A})$, $\det(\mathcal{B})$, traza$(\mathcal{A})$ y los autovalores $\mathcal{A}$ se llaman *invariantes métricos* de la cuádrica.

4.8.5. **Proposición.** Si las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ en $\mathbb{A}$ son métricamente equivalentes, entonces existe un movimiento $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{S}_1) = \boldsymbol{S}_2$.

Demostración. Se razona como en la proposición 4.3.5. □

4.8.6. ***Observación.*** Razonando como en 4.2.9 se prueba que si $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son dos cuádricas reales con más de un punto y que no son rectas o dos cúádricas complejas, y existe un movimiento $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\alpha(\boldsymbol{S}_1) = \boldsymbol{S}_2$, entonces $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son cuádricas métricamente equivalentes.

4.8.7. ***Observación.*** De forma análoga al estudio que se hizo de la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola como lugares geométricos en un plano afín euclídeo, se puede hacer el estudio de la esfera, el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el paraboloide elíptico, el paraboloide hiperbólico, el cono y los cilindros en un espacio afín euclídeo tridimensional. El estudio del elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico como lugares geométricos se puede ver en [3], Capítulo 13, sección 3. Definiremos las cuádricas en un espacio afín euclídeo tridimensional por su ecuación reducida.

Para clasificar métricamente las cuádricas en un espacio afín euclídeo tridimensioneal vamos a hacer cambios de coordenadas rectangulares en la ecuación de la cuádrica hasta llegar a su ecuación canónica ([4, Cap. VII]) .

4.8.8. **Teorema.** Sea $\boldsymbol{S}$ la cuádrica cuya ecuación en la referencia rectangular $R = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Existe una referencia rectangular $\mathcal{R}' = \{E'_1, E'_2, E'_3; O\}$ de $\mathbb{A}$ respecto a la cual la ecuación de la cuádrica es

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + 2b_3z' + a_0 = 0.$$

Demostración. Aplicando el teorema espectral a la matriz simétrica $\mathcal{A}$, podemos encontrar una matriz ortogonal

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}, \end{pmatrix}$$

tal que

$$\mathcal{P}^t\, \mathcal{A}\, \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz $\mathcal{P}$ es ortogonal, si $B_{\mathcal{R}} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$B = (v'_1 = p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + p_{31}v_3,\ v'_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + p_{32}v_3,\ v'_3 = p_{13}v_1 + p_{23}v_2 + p_{33}v_3)$$

es una base ortonormal de V. Sean (x, y, z) las coordenadas de un punto en la referencia $\mathcal{R} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ y (x', y', z') las coordenadas en la referencia $\mathcal{R}' = \{E'_1, E'_2, E'_3; O\}$, donde $E'_1 = O + v'_1$, $E'_2 = O + v'_2$, $E'_3 = O + v'_3$; entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

y poniendo

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{P} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}$,

$$\boldsymbol{S} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t\, \mathcal{B}\, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0,$$

se obtiene la ecuación

$$\boldsymbol{S} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + 2b_3 z' + a_0 = 0,$$

donde

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \mathcal{P}. \qquad \square$$

4.8.9. **Obtención de la ecuación reducida de una cuádrica.** A partir de la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}'$, se tienen los siguientes casos:

(1) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_3 \neq 0$ o, equivalentemente, si $\det(\mathcal{A}) \neq 0$,

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 \,(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 \,+\, \lambda_2 \,(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 \,+\, \lambda_3 \,(z' + \frac{b_3}{\lambda_3})^2 + a_0 \,-\, \frac{b_1^2}{\lambda_1} \,-\, \frac{b_2^2}{\lambda_2} \,-\, \frac{b_3^2}{\lambda_3} = 0\,.$$

Pongamos

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\,, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\,, \quad z'' = z' + \frac{b_3}{\lambda_3}\,,$$

y

$$\delta = \,-a_0\, +\, \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_3} = -\frac{\det(\mathcal{B})}{\det(\mathcal{A})}.$$

Si O'' es el punto de coordenadas $(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2, -b_3/\lambda_3)$ en $\mathcal{R}'$ y consideramos la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{O'' + v_1', O'' + v_2', O'' + v_3'; O''\}$, la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}''$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1\, {x''}^2 + \lambda_2\, {y''}^2 + \lambda_3\, {z''}^2 = \delta.$$

Esta ecuación se dice que es una *ecuación reducida* de la cuádrica. Las rectas de ecuaciones

$$\text{eje}\, O''x'' \equiv \begin{cases} y'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases}, \quad \text{eje}\, O''y'' \equiv \begin{cases} x'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases}, \quad \text{eje}\, O''z'' \equiv \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$$

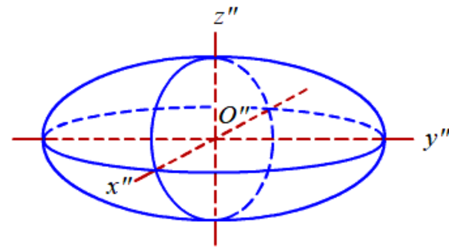
se llaman *ejes principales de la cuádrica.*

(a) Para $\delta \neq 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, se tiene:

(i) Si $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(\lambda_3) = \text{signo}(\delta)$, y λ_1, λ_2 y λ_3 no son iguales, entonces $\boldsymbol{S}$ es un *elipsoide* con *ecuación reducida*

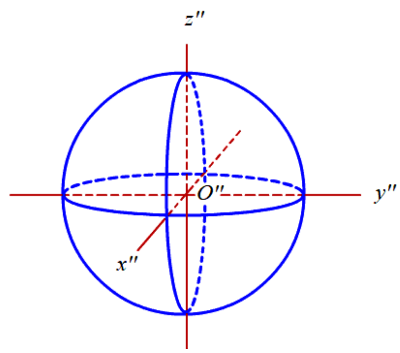
$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{{x''}^2}{a^2} + \frac{{y''}^2}{b^2} + \frac{{z''}^2}{c^2} \,=\, 1, \qquad a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1},\;\; b^2 = \frac{\delta}{\lambda_2},\;\; c^2 = \frac{\delta}{\lambda_3},$$

donde $a, b, c > 0$. Si $a \geq b \geq c$, diremos que es su *ecuación canónica.*



Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, entonces $\boldsymbol{S}$ es una *esfera*.

$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 + y''^2 + z''^2 = r^2, \qquad r = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda_1}}.$$



(ii) Si signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo$(\lambda_3) \neq$ signo(δ), una ecuación reducida de $\boldsymbol{S}$ es

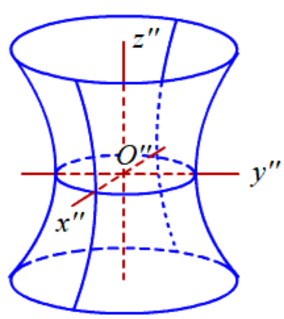
$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = -1, \qquad a^2 = -\frac{\delta}{\lambda_1},\ \ b^2 = -\frac{\delta}{\lambda_2},\ \ c^2 = -\frac{\delta}{\lambda_3},$$

donde $a, b, c > 0$. Si $a \geq b \geq c$, diremos que es su *ecuación canónica*. Se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *elipsoide imaginario*; $\boldsymbol{S}$ es el conjunto vacío. Si además, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, entonces se dice que $\boldsymbol{S}$ es una *esfera imaginaria*; $\boldsymbol{S}$ es el conjunto vacío.

(iii) Si signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo$(\delta) \neq$ signo(λ_3), $\boldsymbol{S}$ es un *hiperboloide de una hoja* con *ecuación reducida*

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1, \qquad a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1},\ \ b^2 = \frac{\delta}{\lambda_2},\ \ c^2 = -\frac{\delta}{\lambda_3},$$

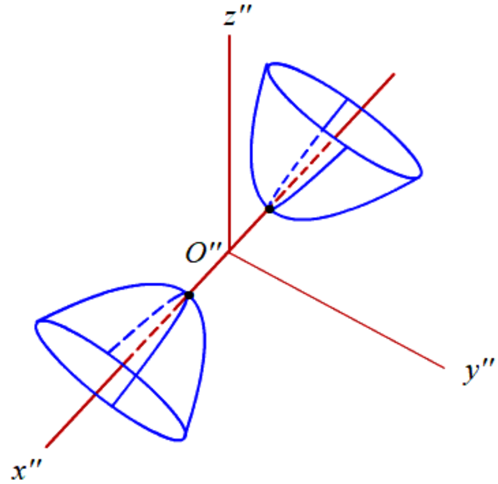
donde $a, b, c > 0$. Si $a \geq b$, diremos que es su *ecuación canónica*.



(iv) Si signo$(\lambda_1) =$ signo$(\delta) \neq$ signo$(\lambda_2) =$ signo(λ_3), $\boldsymbol{S}$ es un *hiperboloide de dos hojas* con *ecuación reducida*

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1, \qquad a^2 = \frac{\delta}{\lambda_1}, \ \ b^2 = -\frac{\delta}{\lambda_2}, \ \ c^2 = -\frac{\delta}{\lambda_3},$$

donde $a, b, c > 0$. Si $b \geq c$, diremos que es su *ecuación canónica.*



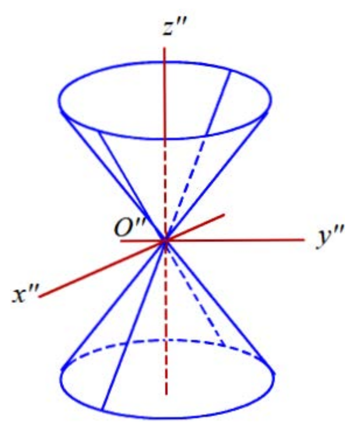
(b) Para $\delta = 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{B}) = 0$, una *ecuación reducida* de $\boldsymbol{S}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 \, x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = 0.$$

(i) Si signo$(\lambda_1) =$ signo$(\lambda_2) \neq$ signo(λ_3), la cuádrica es un *cono* con ecuación

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - z''^2 = 0, \qquad a^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}.$$

donde $a, b, c > 0$. Si $a \geq b$, diremos que es su *ecuación canónica.*



(ii) Si signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo(λ_3), una *ecuación reducida* de $\boldsymbol{S}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + z''^2 \; = \; 0, \qquad a^2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}.$$

donde $a, b, c > 0$. Si $a \geq b$, diremos que es su *ecuación canónica*. Se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cono imaginario*; $\boldsymbol{S}$ está formada por un punto.

(2) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_3 = 0$, entonces

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 \, (\, x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \,)^{\,2} \; + \lambda_2 \, (\, y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \,)^{\,2} \; + \; 2b_3 \, z' \; + \; a_0 \; - \; \frac{b_1^2}{\lambda_1} \; - \; \frac{b_2^2}{\lambda_2} \; = \; 0 \, .$$

Pongamos

$$k = a_0 \; - \; \frac{b_1^2}{\lambda_1} \; - \; \frac{b_2^2}{\lambda_2}.$$

Se tienen los siguientes casos:

(a) Para $b_3 \neq 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, ponemos

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \, , \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \, , \quad z'' = z' + \frac{k}{2b_3}.$$

Sea $\mathcal{R}'' = \{O'' + v_1', \, O'' + v_2', \, O'' + v_3'; \, O''\}$, donde O'' es el punto cuyas coordenadas en la referencia $\mathcal{R}'$ son $(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2, -k/(2b_1))$. En la referencia rectangular $\mathcal{R}''$ la cuádrica tiene la *ecuación reducida*

$$\boldsymbol{S} \equiv \; \lambda_1 \, x''^2 \; + \; \lambda_2 \, y''^2 \; = \; -2b_3 \, z'', \quad | \, b_3 \, | = \sqrt{-\frac{\det(\mathcal{B})}{\lambda_1 \lambda_2}},.$$

Las rectas de ecuaciones

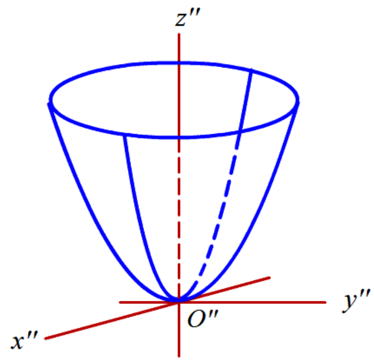
$$\text{eje}\, O''x'' \equiv \begin{cases} y'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases} , \quad \text{eje}\, O''y'' \equiv \begin{cases} x'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases} , \quad \text{eje}\, O''z'' \equiv \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$$

se llaman *ejes principales de la cuádrica.*

(i) Si signo(λ_1) = signo(λ_2) $\neq$ signo(b_3), $\boldsymbol{S}$ es un *paraboloide elíptico* con ecuación reducida

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 2z'', \qquad a^2 = -\frac{b_3}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{b_3}{\lambda_2}.$$

donde $a, b > 0$. Si $a \geq b$, diremos que es su *ecuación canónica.*



Si signo(λ_1) = signo(λ_2) = signo(b_3), $\boldsymbol{S}$ es un *paraboloide elíptico* y haciendo el cambio de coordenadas $x_1 = x''$, $y_1 = y''$, $z_1 = -z''$, obtenemos la ecuación

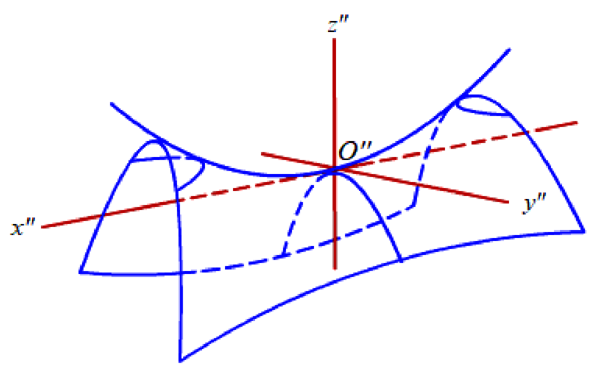
$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 2z_1, \qquad a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{b_3}{\lambda_2}.$$

donde $a, b > 0$. Si $a \geq b$ diremos que es su *ecuación canónica.*

(ii) Si signo$(\lambda_1) \neq$ signo(λ_2) = signo(b_3), $\boldsymbol{S}$ es un *paraboloide hiperbólico* de *ecuación canónica*

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 2\,z'', \qquad a^2 = -\frac{b_3}{\lambda_1}, \;\; b^2 = \frac{b_3}{\lambda_2}.$$

donde $a, b > 0$.



Si signo(λ_1) = signo$(b_3) \neq$ signo(λ_2), $\boldsymbol{S}$ es un *paraboloide hiperbólico* y haciendo el cambio de coordenadas $x_1 = x''$, $y_1 = y''$ y $z_1 = -z''$, se obtiene la *ecuación canónica*

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 2\,z_1, \qquad a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1}, \;\; b^2 = -\frac{b_3}{\lambda_2}.$$

donde $a, b > 0$.

(b) Para $b_3 = 0$ o, equivalentemente, $\det(\mathcal{B}) = 0$, ponemos

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\,, \qquad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\,, \qquad z'' = z'.$$

Sea O'' el punto de coordenadas $(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2, 0)$ y $\mathcal{R}'' = \{O''+v_1', O''+v_2', O''+v_3'; O''\}$. En la referencia rectangular $\mathcal{R}''$ una *ecuación reducida* de $\boldsymbol{S}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 x''^2 + k = 0.$$

Las rectas de ecuaciones

$$\text{eje}\, O''x'' \equiv \begin{cases} y'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{eje}\, O''y'' \equiv \begin{cases} x'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{eje}\, O''z'' \equiv \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$$

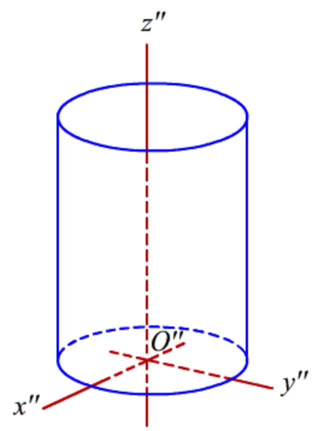
se llaman *ejes principales de la cuádrica.*

(i) Signo$(\lambda_1) =$ signo(λ_2), $k \neq 0$:

(A) Si signo$(\lambda_1) =$ signo$(\lambda_2) \neq$ signo(k), $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro elíptico* de ecuación reducida

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 = \frac{-k}{\lambda_1}, \;\; b^2 = \frac{-k}{\lambda_2},$$

donde $a, b > 0$. Si $a \geq b$, diremos que es su *ecuación canónica.*



(B) Si signo$(\lambda_1) =$ signo$(\lambda_2) =$ signo(k), una ecuación reducida de $\boldsymbol{S}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1, \qquad a^2 = \frac{k}{\lambda_1}, \;\; b^2 = \frac{k}{\lambda_2},$$

donde $a, b > 0$. Si $a \geq b$, diremos que es su *ecuación canónica.* Se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro elíptico imaginario*; $\boldsymbol{S}$ es el conjunto vacío.

(ii) Si signo$(\lambda_1) =$ signo(λ_2), $k = 0$, su *ecuación canónica* es

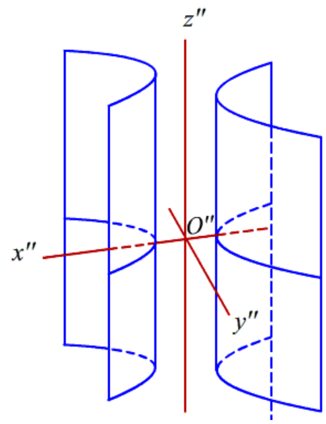
$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 + a^2 y''^2 = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Se dice que $\boldsymbol{S}$ está formada por *dos planos imaginarios que se cortan en una recta real*; $\boldsymbol{S}$ es el conjunto de puntos de la recta de ecuaciones $x'' = 0$, $y'' = 0$.

(iii) Si signo(λ_1) $\neq$ signo(λ_2), $k \neq 0$, entonces $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro hiperbólico*. Si signo(λ_1) $\neq$ signo(k), una ecuación reducida de $\boldsymbol{S}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 = \frac{-k}{\lambda_1}, \;\; b^2 = \frac{k}{\lambda_2},$$

donde $a, b > 0$.

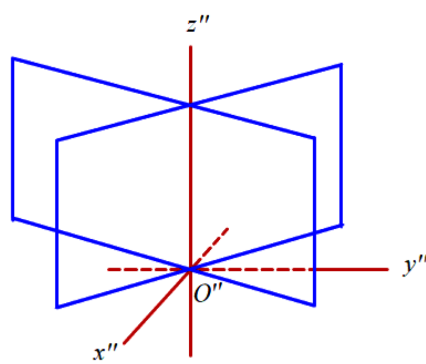


(iv) Si signo(λ_1) $\neq$ signo(λ_2), $k = 0$, su *ecuación canónica* es

$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 - a^2 y''^2 = (x'' - a\,y'')\,(x'' + a\,y'') = 0, \qquad a^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

la cuádrica $\boldsymbol{S}$ está formada por dos planos que se cortan en la recta de ecuaciones

$$x'' = 0, \quad y'' = 0.$$



(3) Si $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, entonces

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2b_2 y' + 2b_3 z' + a_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} = 0.$$

Pongamos

$$\rho = a_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1}.$$

Se tiene

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1\,(\,x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\,)^{\,2} \;+\; 2b_2y' \;+\; 2b_3z' \;+\; \rho \;=\; 0.$$

(a) Si $b_2 \neq 0$ o $b_3 \neq\, 0$, $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro parabólico.*

(i) $b_2 \neq 0$, $b_3 \,=\, 0$, ponemos

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\,, \quad y'' = y' + \frac{\rho}{2b_2}, \quad z'' = z'.$$

Sea $\mathcal{R}'' = \{O'' + v_1',\, O'' + v_2',,\, O'' + v_3';\, O''\}$, donde O'' es el punto cuyas coordenadas en $\mathcal{R}'$ son $(-b_1/\lambda_1, -\rho/2b_2, 0)$. En la referencia rectangular $\mathcal{R}''$ la cuádrica $\boldsymbol{S}$ tiene la *ecuación reducida*

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 x''^2 \;+\; 2b_2y'' \;=\; 0,$$

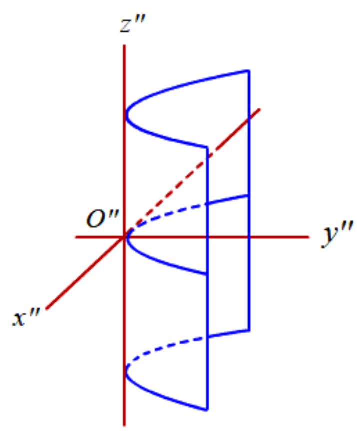
equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 = -2\,\frac{b_2}{\lambda_1}\,y''.$$

Si $b_2/\lambda_1 < 0$, se dice que la ecuación

$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 = 2\,p\,y'', \qquad p = -\frac{b_2}{\lambda_1},$$

es su *ecuación canónica.*



(ii) $b_2 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. Haciendo el cambio de coordenadas rectangulares

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\,, \qquad y'' = \frac{b_2y' + b_3z'}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}\,, \qquad z'' = \frac{-b_3y' + b_2z'}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}\,,$$

se tiene la ecuación reducida

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 x''^2 \;+\; 2\sqrt{b_2^2 + b_3^2}\,y'' \;+\; \rho \;=\; 0,$$

y estamos en el caso anterior.

(b) $b_2 = b_3 = 0$, se tiene la *ecuación reducida*

$$\boldsymbol{S} \equiv \lambda_1 x''^2 + \rho = 0.$$

(i) Si $\rho = 0$, $\boldsymbol{S}$ es un plano doble de *ecuación canónica* $x''^2 = 0$.

(ii) Si $\rho \neq 0$ y signo$(\lambda_1) \neq$ signo(ρ), $\boldsymbol{S}$ es un par de planos paralelos. Su *ecuación canónica* es

$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 - a^2 = (x'' - a)(x'' + a) = 0, \quad a^2 = -\frac{\rho}{\lambda_1}.$$

(iii) Si $\rho \neq 0$ y signo$(\lambda_1) =$ signo(ρ), $\boldsymbol{S}$ está formada por un *par de planos imaginarios paralelos*; es el conjunto vacío. Su *ecuación canónica* es

$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 + a^2 = 0, \qquad a^2 = \frac{\rho}{\lambda_1}.$$

4.8.10. **Teorema.** Las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ en $\mathbb{A}$ son métricamente equivalentes si, y solo si, tienen la misma ecuación canónica.

Demostración. Por la proposición 4.3.3 (véase también la demostración) la ecuación canónica de una cuádrica es única. Si las cuádricas $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son métricamente equivalentes existen referencias rectangulares donde tienen la misma ecuación. Aplicando el proceso del teorema 4.8.8 y de 4.8.9 se encuentran referencias rectangulares donde las dos cuádricas tienen la misma ecuación canónica. El recíproco es trivial. □

4.9. Clasificación afín de cuádricas reales y complejas

4.9.1. **Teorema de clasificación afín de cuádricas reales.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín real tridimensional y $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{A}$. Sea $\boldsymbol{S}$ la cuádrica cuya ecuación en $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

$\mathcal{A}$ la matriz de términos cuadráticos de la cuádrica en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{B}$ la matriz de la cuádrica. Existe una referencia respecto a la cual la ecuación de la cuádrica es de una de las siguientes formas, que se llama *ecuación canónica* de la cuádrica afín:

(1) Si $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ y $\det(\mathcal{B}) \neq 0$:

(a) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 1 = 0$, si signatura$(\mathcal{A}) = (3,0)$ o $(0,3)$ y signatura$(B) = (3,1)$ o $(1,3)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *elipsoide.*

(b) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1 = 0$, si signatura$(\mathcal{A}) = (3,0)$ o $(0,3)$ y signatura$(\mathcal{B}) = (4,0)$ o $(0,4)$. $\boldsymbol{S}$ es el conjunto vacío y se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *elipsoide imaginario.*

(c) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - 1 = 0$, si signatura$(\mathcal{A}) = (2,1)$ o $(1,2)$ y signatura$(\mathcal{B}) = (2,2)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *hiperboloide de una hoja.*

(d) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - 1 = 0$, si signatura$(\mathcal{A}) = (2,1)$ o $(1,2)$ y signatura$(\mathcal{B}) = (1,3)$ o $(3,1)$; se dice que S es un *hiperboloide de dos hojas.*

(2) Si $\det(\mathcal{A}) \neq 0$ y $\det(\mathcal{B}) = 0$:

(a) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = signatura($\mathcal{B}$) = $(3,0)$ o $(0,3)$. $\boldsymbol{S}$ es el conjunto formado por el punto de coordenadas $(0,0,0)$ y se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cono imaginario.*

(b) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = signatura($\mathcal{B}$) = $(2,1)$ o $(1,2)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cono.*

(3) Si rango($\mathcal{A}$) = 2:

(a) $\det(\mathcal{B}) \neq 0$,

(i) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(2,0)$ o $(0,2)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *paraboloide elíptico.*

(ii) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 - y_1^2 + z_1 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(1,1)$; se dice que S es un *paraboloide hiperbólico.*

(b) $\det(\mathcal{B}) = 0$:

(i) rango($\mathcal{B}$) = 3.

(A) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(2,0)$ o $(0,2)$ y signatura($\mathcal{B}$) = $(2,1)$ o $(1,2)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro elíptico.*

(B) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + 1 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(2,0)$ o $(0,2)$ y signatura($\mathcal{B}$) = $(3,0)$ o $(0,3)$. $\boldsymbol{S}$ es el conjunto vacío y se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro elíptico imaginario.*

(C) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 - y_1^2 - 1 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(1,1)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro hiperbólico.*

(ii) rango($\mathcal{B}$) = 2:

(A) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(2,0)$ o $(0,2)$. $\boldsymbol{S}$ es el conjunto de puntos de la recta de ecuaciones $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ y se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *par de planos imaginarios no paralelos* que se cortan en la recta real de ecuaciones $x_1 = 0$, $y_1 = 0$;

(B) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 - y_1^2 = 0$, si signatura($\mathcal{A}$) = $(1,1)$; $\boldsymbol{S}$ es un par de planos que se cortan en la recta de ecuaciones $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

(4) rango($\mathcal{A}$) = 1:

(a) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1 = 0$, si rango($\mathcal{B}$) = 3; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *cilindro parabólico.*

(b) rango($\mathcal{B}$) < 3:

(i) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 = 0$, si rango($\mathcal{B}$) = 1; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *plano doble.*

(ii) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 - 1 = 0$, si rango($\mathcal{B}$) = 2 y signatura($\mathcal{B}$) = $(1,1)$; $\boldsymbol{S}$ es un par de planos paralelos.

(iii) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + 1 = 0$, si rango $(B) = 2$ y signatura($\mathcal{B}$) = $(2,0)$ o $(0,2)$; se dice que $\boldsymbol{S}$ es un *par de planos imaginarios paralelos* y $\boldsymbol{S}$ es el conjunto vacío.

Demostración. Se razona como en 4.4.1. □

4.9.2. **Teorema.** Sean $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ cuádricas reales, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cuádrica $\boldsymbol{S}_1$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a la cuádrica $\boldsymbol{S}_2$, signatura($\mathcal{A}$) = (p,q) y signatura($\mathcal{B}$) = (r,s). Se tiene que $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son afínmente equivalentes si, y solo si, signatura($\mathcal{A}'$) = (p,q) o (q,p) y signatura($\mathcal{B}'$) = (r,s) o (s,r).

Demostración. Se razona como en el teorema 4.4.2, □

4.9.3. ***Observación.*** Por la proposición 4.7.5 y el teorema de clasificación de cuádricas afines, en un espacio afín euclídeo tridimensional todos los elipsoides son afínmente equivalentes, todos los hiperboloides de una hoja son afínmente equivalentes, todos los hiperboloides de dos hojas son afínmente equivalentes, todos los paraboloides elípticos son afínmente equivalentes, etc.

4.9.4. **Clasificación afín de cuádricas complejas.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín complejo tridimensional y $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{A}$. Sea $\boldsymbol{S}$ la cuádrica cuya ecuación en $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

$\mathcal{A}$ la matriz de términos cuadráticos en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{B}$ la matriz de la cuádrica. Existe una referencia de $\mathbb{A}$ respecto a la cual la ecuación de la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es de una de las siguientes formas, que se llama *ecuación canónica* de la cuádrica afín:

(1) $\det(\mathcal{A}) \neq 0$:

- (a) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1 = 0$, si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$,
- (b) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$, si $\det(\mathcal{B}) = 0$.

(2) $\operatorname{rango}(\mathcal{A}) = 2$:

- (a) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1 = 0$, si $\det(\mathcal{B}) \neq 0$,
- (b) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 + 1 = 0$, si $\operatorname{rango}(\mathcal{B}) = 3$,
- (c) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1^2 = 0$, si $\operatorname{rango}(\mathcal{B}) = 2$; $\boldsymbol{S}$ es un par de planos que se cortan en la recta de ecuaciones $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

(3) $\operatorname{rango}(\mathcal{A}) = 1$:

- (a) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + y_1 = 0$, si $\operatorname{rango}(\mathcal{B}) = 3$,
- (b) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 = 0$, si $\operatorname{rango}(\mathcal{B}) = 1$; $\boldsymbol{S}$ es un *plano doble*,
- (c) $\boldsymbol{S} \equiv x_1^2 + 1 = 0$, si $\operatorname{rango}(\mathcal{B}) = 2$; $\boldsymbol{S}$ es un par de planos paralelos.

Demostración. Se razona como en 4.4.4. □

4.9.5. **Teorema.** Sean $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ cuádricas complejas, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las matrices asociadas a la cuádrica $\boldsymbol{S}_1$ y $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ las matrices asociadas a la cuádrica $\boldsymbol{S}_2$. Se tiene que $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son afínmente equivalentes si, y solo si, $\operatorname{rango}(\mathcal{A}') = \operatorname{rango}(\mathcal{A})$ y $\operatorname{rango}(\mathcal{B}') = \operatorname{rango}(\mathcal{B})$.

Demostración. Se razona como en el teorema 4.4.5. □

4.10. Centro de una cuádrica

Sean K un cuerpo de característica distinta de 2, V un espacio vectorial tridimensional sobre K y $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V.

4.10.1. **Definición.** Sea $\boldsymbol{S}$ una cuádrica. Se dice que un punto $P_{\boldsymbol{S}} \in \mathbb{A}$ es *centro* o *centro de simetría* de la cuádrica si toda recta que pasa por $P_{\boldsymbol{S}}$ y corta a la cuádrica en un punto la corta también en su simétrico respecto a $P_{\boldsymbol{S}}$.

4.10.2. **Definición.** Se dice que una cuádrica es *central* si, y sólo si, tiene un único centro de simetría.

4.10.3. **Proposición.** Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín tridimensional real o complejo, $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ y $\boldsymbol{S}$ la cuádrica cuya ecuación en $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

y sea

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matriz de los términos cuadráticos de $\boldsymbol{S}$. Un punto $P_{\boldsymbol{S}}$ de coordenadas (x_0, y_0, z_0) en $\mathcal{R}$ es centro de $\boldsymbol{S}$ si, y solo si,

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La cuádrica $\boldsymbol{S}$ es central si, y solo si, $\det(A) \neq 0$.

Demostración. Un punto $P_{\boldsymbol{S}}$ es centro de la cuádrica $\boldsymbol{S}$ si, para cada punto $P \in \boldsymbol{S}$, el punto $P' = P_{\boldsymbol{S}} - \overrightarrow{P_{\boldsymbol{S}}P}$ pertenece a $\boldsymbol{S}$. Supongamos que la cuádrica $\boldsymbol{S}$ no está contenida en un plano; en este caso, si el punto $P_{\boldsymbol{S}}$ es un centro de la cuádrica, existen puntos P_1, P_2 y P_3 en $\boldsymbol{S}$ tales que $P_{\boldsymbol{S}}$, P_1, P_2 y P_3 no son coplanarios. Si las coordenadas de $P_{\boldsymbol{S}}$ en $\mathcal{R}$ son (x_0, y_0, z_0) y las coordenadas de $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{S}}P_i}$ en $B_{\mathcal{R}}$ son (h_i, k_i, t_i), para $i = 1, 2, 3$, entonces las coordenadas en $\mathcal{R}$ del punto P_i son $(x_0 + h_i, y_0 + k_i, z_0 + t_i)$ y las coordenadas de $P_i' = P_{\boldsymbol{C}} - \overrightarrow{P_{\boldsymbol{C}}P_i}$ en $\mathcal{R}$ son $(x_0 - h_i, y_0 - k_i, z_0 - t_i)$, para $i = 1, 2, 3$. Dado que $P_{\boldsymbol{S}}$ es un centro de la cuádrica, se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} &a_{11}(x_0 + h_i)^2 + a_{22}(y_0 + k_i)^2 + a_{33}(z_0 + t_i)^2 + 2a_{12}(x_0 + h_i)(y_0 + k_i) + 2a_{13}(x_0 + h_i)(z_0 + t_i) \\ &+ 2a_{23}(y_0 + k_i)(z_0 + t_i) + 2a_1(x_0 + h_i) + 2a_2(y_0 + t_i) + 2a_3(x_0 + t_i) + a_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}(x_0 - h_i)^2 + a_{22}(y_0 - k_i)^2 + a_{33}(z_0 - t_i)^2 + 2a_{12}(x_0 - h_i)(y_0 - k_i) + 2a_{13}(x_0 - h_i)(z_0 - t_i) \\ &+ 2a_{23}(y_0 - k_i)(z_0 - t_i) + 2a_1(x_0 - h_i) + 2a_2(y_0 - t_i) + 2a_3(x_0 - t_i) + a_0 = 0, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$. Como consecuencia,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)h_i + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)k_i + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)t_i = 0, \ i = 1, 2, 3,$$

equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} h_1 & k_1 & t_1 \\ h_2 & k_2 & t_2 \\ h_3 & k_3 & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + a_1 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + a_2 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que los vectores $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{S}}P_1}$, $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{S}}P_2}$ y $\overrightarrow{P_{\boldsymbol{S}}P_3}$ son linealmente independientes,

$$\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & t_1 \\ h_2 & k_2 & t_2 \\ h_3 & k_3 & t_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

y se tiene (1),

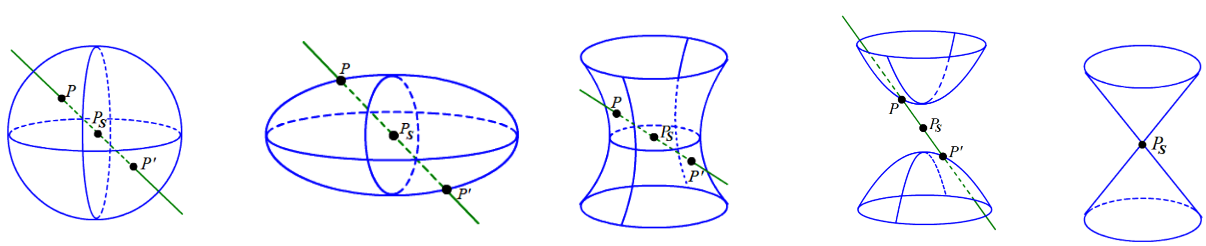
$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + a_1 = 0, \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + a_2 = 0, \quad a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} + a_3 = 0.$$

Recíprocamente, si un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) en $\mathcal{R}$ verifica las ecuaciones (2), ese punto es un centro de $\boldsymbol{S}$.

Si $\boldsymbol{S}$ es un plano doble, entonces los centros de $\boldsymbol{S}$ son los puntos de $\boldsymbol{S}$ y son los puntos que verifican la ecuacion (1). Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín real y la cuádrica es un par de planos imaginarios paralelos que se cortan en una recta, entonces los centros de $\boldsymbol{S}$ son los puntos de esa recta y si $\boldsymbol{S}$ es un cono imaginario el centro es el punto que lo forma. □

4.10.4. **Ejemplos.** Si $\mathbb{A}$ es un espacio afin real tridimensional, entonces el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el cono, el cilindro elíptico, el cilindro hiperbólico y un par de planos (paralelos o no) tienen centros de simetría. El paraboloide elíptico, el paraboloide hiperbólico y el cilindro parabólico no tienen centros de simetría.

4.10.5. **Ejemplos.** Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín tridimensional real, entonces el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el cono y un punto son las cuádricas centrales. En un espacio afín euclídeo tridimensional las cuádricas centrales son: la esfera, el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el cono y un punto.



4.10.6. ***Observación.*** Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo tridimensional, la referencia $\mathcal{R}$ es rectangular y la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es central, entonces el centro de simetría de la cuádrica es el punto de corte de los ejes principales de la cuádrica. Por tanto, si $\boldsymbol{S}$ es una cúádrica central, la ecuación (1) en 4.10.3 da las coordenadas en la referencia $\mathcal{R}$ del punto de corte de los ejes principales de la cuádrica.

4.11. Ejemplos de cuádricas

4.11.1. **Ejemplo.** Consideremos la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv 2x^2 - 2yz - 8x + 8z + 6 = 0.$$

Las matrices de la cuádrica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}) = -2 < 0, \quad \det(\mathcal{B}) = 4.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es no degenerada y puesto que $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es una cuádrica central. Por el teorema espectral, como $\mathcal{A}$ es una matriz real simétrica, es diagonable. El polinomio característico de $\mathcal{A}$ es $P_{\mathcal{A}}(X) = -(X-2)\,(X-1)\,(X+1)$. Los autovalores de $\mathcal{A}$ son 2, 1 y -1 y los subespacios propios asociados a estos autovalores son

$$V_1 = \mathrm{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (0,1,-1) \rangle,\;\; V_2 = \mathrm{Nuc}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,0,0) \rangle,\;\; V_{-1} = \mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (0,1,1) \rangle,$$

donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es $\mathcal{A}$. La base

$$B = (v_1 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2),\, v_2 = (1,0,0),\, v_3 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$$

es ortonormal. El centro de la cuádrica es el punto $O'' = (x_0, y_0, z_0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

es decir, $O'' = (2,4,0)$. Una ecuación reducida de $\boldsymbol{S}$ en la referencia rectangular

$$\mathcal{R}'' = \{E_1'' = O'' + v_1,\, E_2'' = O'' + v_2,\, E_3'' = O'' + v_3;\, O''\}$$

es

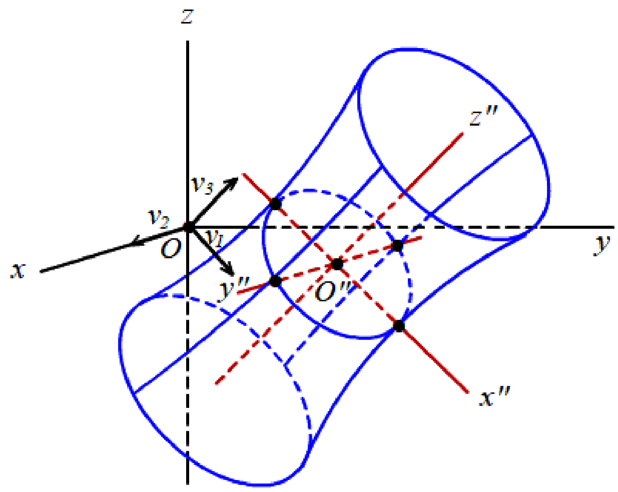
$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 + 2y''^2 - z''^2 = \delta, \quad \delta = -\frac{\det(B)}{\det(A)} = 2,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{2} + y''^2 - \frac{z''^2}{2} = 1.$$

La cuádrica $\boldsymbol{S}$ es un hiperboloide de una hoja.Los ejes principales son las rectas

$$\begin{aligned} \text{eje}\, O''x'' &= (2,4,0) + \langle (0,1,-1) \rangle, \\ \text{eje}\, O''y'' &= (2,4,0) + \langle (1,0,0) \rangle, \\ \text{eje}\, O''z'' &= (2,4,0) + \langle (0,1,1) \rangle. \end{aligned}$$



4.11.2. **Ejemplo.** Consideremos la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv y^2 - 2xz - 2y + 4z + 5 = 0.$$

Las matrices de la cuádrica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}) = -1 < 0, \quad \det(\mathcal{B}) = -4.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es no degenerada, y puesto que $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, $\boldsymbol{S}$ es una cuádrica central. Por el teorema espectral, como la matriz $\mathcal{A}$ es real y simétrica, es diagonable. El polinomio característico de $\mathcal{A}$ es $P_{\mathcal{A}}(X) = -(1-X)^2\,(X+1)$. Los autovalores de $\mathcal{A}$ son -1 (de multiplicidad 1) y 1 (de multiplicidad 2) y los subespacios propios asociados a estos autovalores son

$$V_{-1} = \mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,0,1) \rangle, \quad V_1 = \mathrm{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,0,-1), (0,1,0) \rangle,$$

donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es $\mathcal{A}$. El centro de la cuádrica es el punto $O'' = (x_0, y_0, z_0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

es decir, $O'' = (2,1,0)$. La referencia $\mathcal{R}'' = \{E''_1 = O'' + v_1, E''_2 = O'' + v_2, E''_3 = O'' + v_3; O''\}$, donde

$$v_1 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2),$$

es una referencia rectangular y la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}''$ es la ecuación reducida

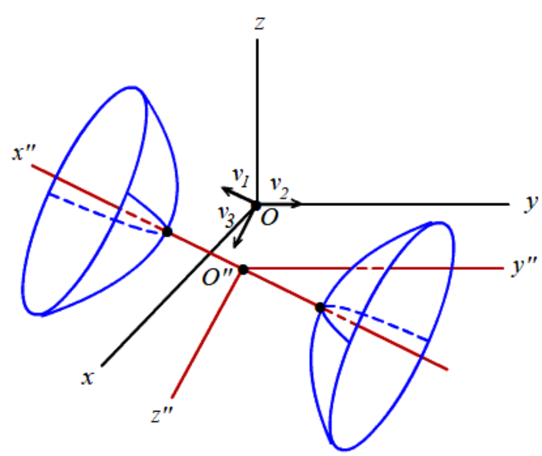
$$\boldsymbol{S} \equiv -x''^2 + y''^2 + z''^2 = \delta, \quad \delta = -\frac{\det(B)}{\det(A)} = -4,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{4} - \frac{z''^2}{4} = 1.$$

$\boldsymbol{S}$ es un hiperboloide de 2 hojas. Los ejes principales son las rectas

$$\text{eje}\, O''x'' = (2,1,0) + \langle (1,0,1) \rangle, \quad \text{eje}\, O''y'' = (2,1,0) + \langle (0,1,0) \rangle, \quad \text{eje}\, O''z'' = (2,1,0) + \langle (1,0,-1) \rangle.$$



4.11.3. **Ejemplo.** Consideremos la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4x + 7 = 0.$$

Las matrices de la cuádrica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y sus determinabtes son

$$\det(\mathcal{A}) = 0, \quad \det(\mathcal{B}) = -8.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es no degenerada. Por el teorema espectral, dado que $\mathcal{A}$ es una matriz real simétrica, es diagonable y existe una matriz de paso ortogonal. El polinomio característico de $\mathcal{A}$ es $P_{\mathcal{A}}(X) = -X(X-2)^2$. Los autovalores de $\mathcal{A}$ son 2 (de multiplicidad 2) y 1 (de multiplicidad 1). $\boldsymbol{S}$ es un paraboloide elíptico. Los subespacios propios asociados a los autovalores 2 y 0 son

$$V_2 = \mathrm{Nuc}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle, \quad V_0 = \mathrm{Nuc}(f) = \langle (1,-1,0) \rangle,$$

donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es $\mathcal{A}$. Una matriz de paso ortogonal, es decir una matriz regular $\mathcal{P}$ tal que

$$\mathcal{P}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base

$$B = \big(v_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0),\ v_2 = (0,0,1),\ v_3 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)\big)$$

es ortonormal y $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{BC}$. La referencia

$$\mathcal{R} = \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), (0,0,1), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), 0);\ (0,0,0)\}$$

es una referencia rectangular de $\mathbb{R}^3$. La ecuación de cambio de coordenadas de $\mathcal{R}$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde (x,y,z) y (x',y',z') son las coordenadas de un punto en las referencia canónica y $\mathcal{R}$, respectivamente. Puesto que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

la ecuación de $\boldsymbol{S}$ en la referencia $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv 2x'^2 + 2y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}z' + 7 = 0.$$

Completando cuadrados se tiene

$$\boldsymbol{S} \equiv 2(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}z' + 6 = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \equiv 2(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}(z' - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = 0.$$

Pongamos

$$x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'' = y', \quad z'' = z' - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Sea O'' el punto de coordenadas $(\sqrt{2}/2, 0, 3\sqrt{2}/2)$ en la referencia $\mathcal{R}$. Consideremos la referencia rectangular $\mathcal{R}'' = \{O''+v_1, O''+v_2, O''+v_3;\ O''\}$. La ecuación del paraboloide elíptico $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}''$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv 2x''^2 + 2y''^2 - 2\sqrt{2}z'' = 0,$$

que es una ecuación reducida de $\boldsymbol{S}$, equivalentemente

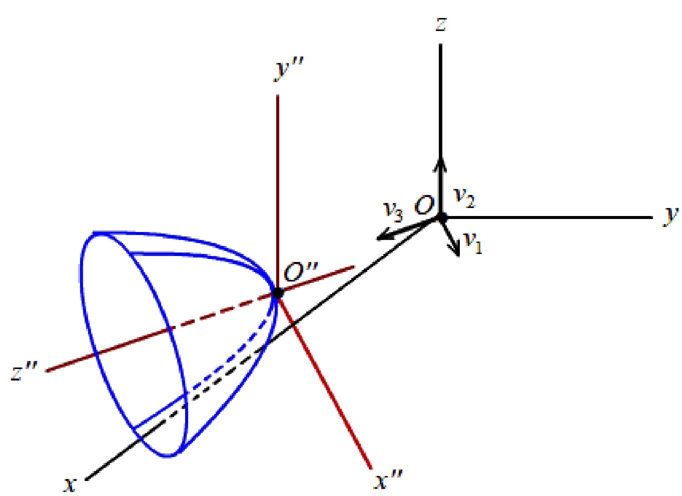
$$\boldsymbol{S} \equiv x''^2 + \ y''^2 = \sqrt{2}z''.$$

Se tiene que $O'' = (2, -1, 0)$, ya que

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los ejes principales son

$$\begin{aligned} \text{eje}\, O''x'' =&(2, -1, 0) + \langle(1, 1, 0)\rangle, \\ \text{eje}\, O''y'' =&(2, -1, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle, \\ \text{eje}\, O''z'' =&(2, -1, 0) + \langle(1, -1, 0)\rangle. \end{aligned}$$



4.11.4. **Ejemplo.** Consideremos la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv 30x^2 + 7y^2 + 13z^2 + 8yz - 60x - 26y + 28z + 67 = 0.$$

Las matrices de la cuádrica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 67 & -30 & -13 & 14 \\ -30 & 30 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & 7 & 4 \\ 14 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}) = 2250 < 0, \quad \det(\mathcal{B}) = 67500.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es no degenerada y puesto que $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es una cuádrica central. Por el teorema espectral, como $\mathcal{A}$ es una matriz real simétrica, es diagonable. El polinomio característico de $\mathcal{A}$ es $P_{\mathcal{A}}(X) = -(X-5)\,(X-15)\,(X-30)$. Los autovalores de $\mathcal{A}$ son 5, 15 y 30 y los subespacios propios asociados a estos autovalores son

$$\begin{aligned} V_5 &= \mathrm{Nuc}(f - 5\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(0,-2,1)\rangle, \quad V_{15} = \mathrm{Nuc}(f - 15\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(0,1,2)\rangle, \\ V_{30} &= \mathrm{Nuc}(f - 30\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(1,0,0)\rangle, \end{aligned}$$

donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es $\mathcal{A}$. La base

$$B = (v_1 = (0, -2\sqrt{5}/5,\ \sqrt{5}/5),\ v_2 = (0, \sqrt{5}/5, 2\,\sqrt{5}/5),\ v_3 = (1,0,0))$$

es ortonormal. El centro de la cuádrica es el punto $O'' = (x_0, y_0, z_0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -30 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix},$$

es decir, $O'' = (1,3,-2)$. La ecuación reducida de $\boldsymbol{S}$ en la referencia rectangular

$$\mathcal{R}'' = \{E_1'' = O'' + v_1,\ E_2'' = O'' + v_2,\ E_3'' = O'' + v_3;\ O''\}$$

es

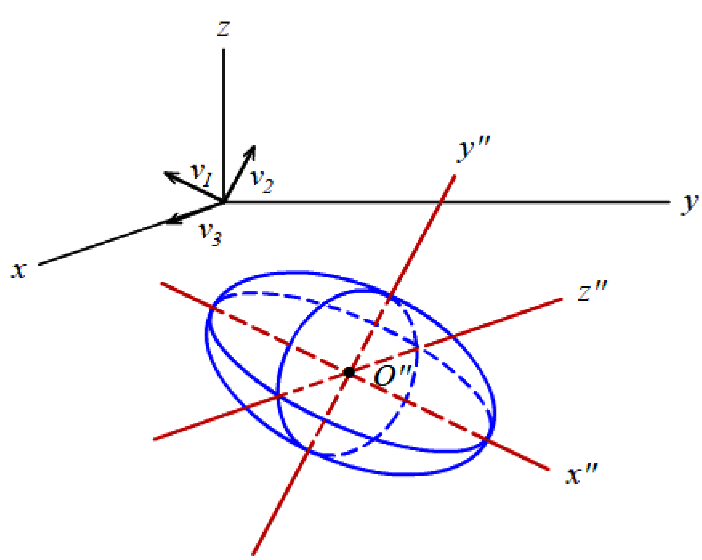
$$\boldsymbol{S} \equiv 5\,{x''}^2 + 15\,{y''}^2 + 30\,{z''}^2 = \delta, \quad \delta = -\frac{\det(B)}{\det(A)} = 30,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \equiv \frac{{x''}^2}{6} + \frac{{y''}^2}{2} + {z''}^2 = 1.$$

La cuádrica $\boldsymbol{S}$ es un elipsoide.Los ejes principales son las rectas

$$\begin{aligned} \text{eje } O''x'' &= (1,3,-2) + \langle(0,-2,1)\rangle, \\ \text{eje } O''y'' &= (1,3,-2) + \langle(0,1,2)\rangle, \\ \text{eje } O''z'' &= (1,3,-2) + \langle(1,0,0)\rangle. \end{aligned}$$



4.11.5. **Ejemplo.** Vamos a clasificar afínmente la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv 2x^2 + 2xz - 2yz + 4y + 1 = 0.$$

Las matrices de la cuádrica son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$\det(\mathcal{A}) = -2, \quad \det(\mathcal{B}) = 2.$$

Dado que $\det(\mathcal{B}) \neq 0$, la cuádrica $\boldsymbol{S}$ es no degenerada y puesto que $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, $\boldsymbol{S}$ es una cuádrica central. La signatura de $\mathcal{A}$ es $(2,1)$ y la signatura de $\mathcal{B}$ es $(2,2)$. Por el teorema de clasificación afín de cuádricas reales, $\boldsymbol{S}$ es un hiperboloide de una hoja.

4.12. Intersección de una cuádrica y un plano

4.12.1. **Proposición.** Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín tridimensional real o complejo, la intersección de una cuádrica central con un plano es una cónica.

Demostración. Sea $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ y $\boldsymbol{S}$ una cuádrica cuya ecuación en $\mathcal{R}$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Sean $\mathcal{A}$ la matriz de términos cuadráticos y $\mathcal{B}$ la matriz de $\boldsymbol{S}$ en $\mathcal{R}$, Π un plano y $\mathcal{R}'$ una referencia de Π. Si la ecuación de cambio de coordenadas de los puntos de Π de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{21} \\ p_{31} & p_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & p_{11} & p_{12} \\ p_2 & p_{21} & p_{22} \\ p_3 & p_{31} & p_{32} \end{pmatrix},$$

la ecuación de cambio de coordenadas de los puntos de Π de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es también

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t \, \mathcal{B} \, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

Sean

$$A' = \mathcal{P}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}, \qquad B' = \bar{\mathcal{P}}^t\,\mathcal{B}\,\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ a'_1 & a'_{11} & a_{12} \\ a'_2 & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}.$$

La ecuación de $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en $\mathcal{R}'$ es

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv a'_{11}{x'}^2 + a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0.$$

Dado que rango$(\mathcal{P}) = 2$, vamos a suponer que

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{21} \end{vmatrix} \neq 0,$$

y consideremos la matriz

$$\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{21} & p_{22} \\ 1 & p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}.$$

Entonces $\det(\mathcal{P}_3) \neq 0$ y

$$\mathcal{P}_3^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & a'_{11} & a'_{12} \\ c_2 & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix},$$

y si $\boldsymbol{S}$ es una cuádrica central, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$. Así,

$$\det(\mathcal{P}_3^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P}_3) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & a'_{11} & a'_{12} \\ c_2 & a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego $\mathcal{A}' \neq 0$. Por tanto, $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ es una cónica. □

4.12.2. ***Observación.*** Si la cuádrica no es central, en general el resultado anterior no es cierto. En efecto, consideremos el paraboloide hiperbólico de ecuación

$$\boldsymbol{S} \equiv z^2 + 2xz + 2yz - 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

en una referencia afín $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; Q\}$. Las matrices de la cuádrica en $\mathcal{R}$ son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(\mathcal{A}) = 0$, $\boldsymbol{S}$ no es una cuádrica central. Sea Π el plano de ecuación $z = 0$ en $\mathcal{R}$ y consideremos la referencia $\mathcal{R}_1 = \{P_1, P_2; Q\}$ de Π. La ecuación de $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en la referencia $\mathcal{R}_1$ es la recta

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv -2x_1 + 2y_1 + 1 = 0,$$

donde (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto de Π en $\mathcal{R}_1$.

4.12.3. ***Observación.*** La intersección de un cono con un plano es siempre una cónica y no es un par de rectas paralelas (ejercicio 4.13 (3)), es decir, es una sección cónica en el sentido de la geometría clásica.

4.12.4. **Ejemplo.** Sea Π el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es

$$\Pi \equiv \sqrt{2}x - y - z - 3\sqrt{2} + 4 = 0.$$

Vamos a clasificar afínmente la cónica intersección del hiperboloide de una hoja $\boldsymbol{S}$ del ejemplo 4.11.4 con el plano Π, y encontrar su ecuación reducida La ecuación de $\boldsymbol{S}$ en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv 2x^2 - 2yz - 8x + 8z + 6 = 0.$$

La matriz de la cuádrica en la referencia canónica es

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$\Pi = (0, -3\sqrt{2}+4, 0) + \langle (1, \sqrt{2}, 0), (0, -1, 1) \rangle = (0, -3\sqrt{2}+4, 0) + \langle (\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2), (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \rangle.$$

Una referencia rectangular de Π es

$$\mathcal{R}_1 = \{(\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2} + 9/2, 1/2), (0, -3\sqrt{2} + 4 - \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2); (0, -3\sqrt{2} + 4, 0))\},$$

y la base asociada a $\mathcal{R}_1$ es $B_1 = \big(u_1 = (\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2), u_2 = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\big)$. La ecuación de cambio de coordenadas de los puntos de Π de la referencia $\mathcal{R}_1$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sqrt{2} + 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{$\star$}$$

donde (x, y, x) son las coordenadas de un punto P de Π en la referencia canónica y (x_1, y_1) son las coordenadas de P en $\mathcal{R}_1$. Poniendo

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -3\sqrt{2} + 4 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

la ecuación de cambio de coordenadas es también

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación matricial de $\boldsymbol{S}$ se tiene

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t \, B \, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{2}/2 & 3 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv (1/2)\, {x_1}^2 + y_1^2 - \sqrt{2}\, x_1 + 6y_1 + 6 = 0,$$

que es la ecuación de la cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en $\mathcal{R}_1$. Las matrices de la cónica $\boldsymbol{C}$ en la referencia $\mathcal{R}_1$ son:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{2}/2 & 3 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\det(\mathcal{A}_1) = 1/2 > 0$ y $\det(\mathcal{B}_1) = -2$. Dado que $\det(\mathcal{B}_1) \neq 0$, la cónica no es degenerada, y como $\det(\mathcal{A}_1) \neq 0$, $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ es una cónica central. Además, $\det(\mathcal{A}_1) > 0$, luego $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ es una elipse, por el teorema de clasificación afín de cónicas reales. Los autovalores de $\mathcal{A}_1$ son $1/2$ y 1. Si las coordenadas del centro $P_{\boldsymbol{C}}$ de la cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en $\mathcal{R}_1$ son (x_0, y_0), entonces

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

luego $P_{\boldsymbol{C}}$ tiene coordenadas $(\sqrt{2}, -3)$ en $\mathcal{R}_1$, y utilizando la ecuación $(\star)$, se tiene que $P_{\boldsymbol{C}} = (1, 4 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Si denotamos $P_{\boldsymbol{C}}$ por O_1'', entonces la ecuación de la elipse $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}_1'' = \{O_1'' + u_1,\, O_1'' + u_2;\, O_1''\}$ es

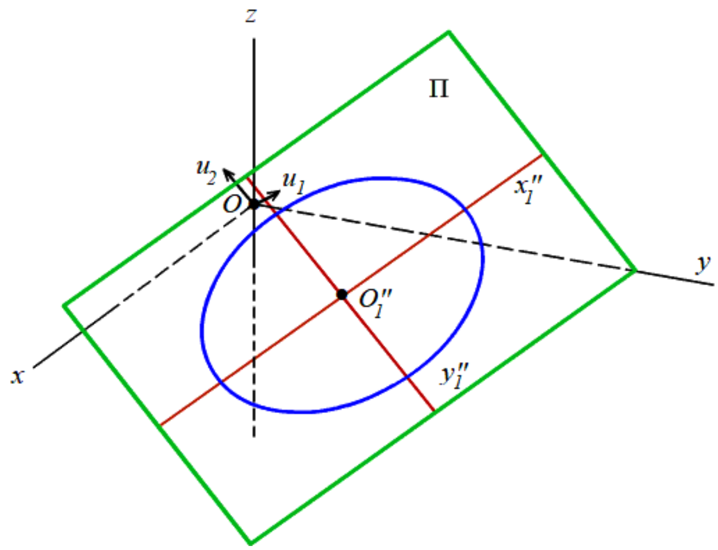
$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv (1/2)\, {x_1''}^2 + {y_1''}^2 = 4.$$

La ecuación canónica de $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ es

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \frac{{x_1''}^2}{8} + \frac{{y_1''}^2}{4} = 1.$$

Los ejes principales son:

$$\text{eje } O_1''x_1'' = (1, 4 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) + \langle (\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2) \rangle, \quad \text{eje } O_1''y_1'' = (1, 4 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) + \langle (0, -1, 1) \rangle.$$



La ecuación de cambio de coordenadas de los puntos de Π de la referencia $\mathcal{R}_1''$ a la canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \end{pmatrix},$$

donde (x_1'', y_1'') son las coordenadas del punto (x, y, z) de Π en $\mathcal{R}_1''$. Los focos son los puntos F_1 y F_2 de coordenadas (2,0) y $(-2, 0)$ en la referencia $\mathcal{R}_1''$, respectivamente. Se tiene que

$$F_1 = (1+\sqrt{2},\, 5-\sqrt{2},\, 1-\sqrt{2}), \quad F_2 = (1-\sqrt{2},\, 3-\sqrt{2},\, -1-\sqrt{2}).$$

4.12.5. **Ejemplo.** Sea Π el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es $x+y+2=0$. Vamos a clasificar afínmente la cónica intersección del hiperboloide de una hoja $\boldsymbol{S}$ del ejemplo 4.11.5 con el plano Π y encontrar su ecuación reducida. La ecuación de $\boldsymbol{S}$ en la referencia canónica es

$$\boldsymbol{S} \equiv 2x^2 + 2xz - 2yz + 4y + 1 = 0.$$

La matriz de $\boldsymbol{S}$ es

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\mathcal{R}_1 = \{(\sqrt{2}/2, -2-\sqrt{2}/2, 0), (0, -2, 1); (0, -2, 0)\}$ es una referencia rectangular de Π. La ecuación del cambio de coordenadas de los puntos de Π de la referencia $\mathcal{R}_1$ a la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad (\star)$$

donde (x_1, y_1) son las coordenadas del punto (x, y, z) de Π en $\mathcal{R}_1$. Poniendo

$$\bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la ecuación de cambio de coordenadas es también

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación matricial de $\boldsymbol{S}$ se tiene

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}^t \, \mathcal{B} \, \bar{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv {x_1}^2 + 2\sqrt{2}\, x_1 y_1 - 2\,\sqrt{2}\, x_1 + 4y_1 - 7 = 0,$$

que es la ecuación de la cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en $\mathcal{R}_1$. Las matrices de la cónica $\boldsymbol{C}$ en la referencia $\mathcal{R}_1$ son

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} -7 & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\det(\mathcal{A}_1) = -2 < 0, \quad \det(\mathcal{B}_1) = 2.$$

Puesto que ambos determinantes son no nulos, la cónica es central y no degenerada. Además, dado que $\det(\mathcal{A}_1) < 0$, $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ es una hipérbola. Si las coordenadas del centro $P_{\boldsymbol{C}}$ de la cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en $\mathcal{R}_1$ son (x_0, y_0), entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego $x_0 = -\sqrt{2}$, $y_0 = 2$, y utilizando la ecuación $(\star)$, se tiene que $P_{\boldsymbol{C}} = (-1, -1, 2)$. La base asociada a la referencia $\mathcal{R}_1$ es $B_1 = \big(v_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0), v_2 = (0, 0, 1)\big)$. El polinomio característico de $\mathcal{A}_1$ es $X^2 - X - 2$, luego los autovalores de $\mathcal{A}_1$ son 2 y -1. Por el teorema espectral, existe una matriz ortogonal $\mathcal{P}$ tal que

$$\mathcal{P}^t \, \mathcal{A}_1 \, \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los subespacios propios asociados a los autovalores 2 y -1 de $\mathcal{A}_1$ son

$$V_2 = \mathrm{Nuc}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \langle(\sqrt{2}, 1)\rangle \quad V_{-1} = \mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \langle(1, -\sqrt{2})\rangle,$$

donde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base canónica es la matriz $\mathcal{A}_1$. Podemos tomar

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}.$$

Consideremos los vectores

$$v_1' = (\sqrt{6}/3)\, v_1 + (\sqrt{3}/3)\, v_2 = \sqrt{3}/3\,(1, -1, 1), \quad v_2' = (\sqrt{3}/3)\, v_1 - (\sqrt{6}/3)\, v_2 = \sqrt{6}/6\,(1, -1, -2).$$

La base $B_1' = (v_1', v_2')$ es una base ortonormal del subespacio dirección de Π y es $\mathrm{id}_{B_1' B_1} = \mathcal{P}$. Si denotamos $P_{\boldsymbol{C}}$ por O_1'', la ecuación de la hipérbola $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ en la referencia rectangular $\mathcal{R}_1'' = \{O_1'' + v_1',\, O_1'' + v_2';\, O_1''\}$ es

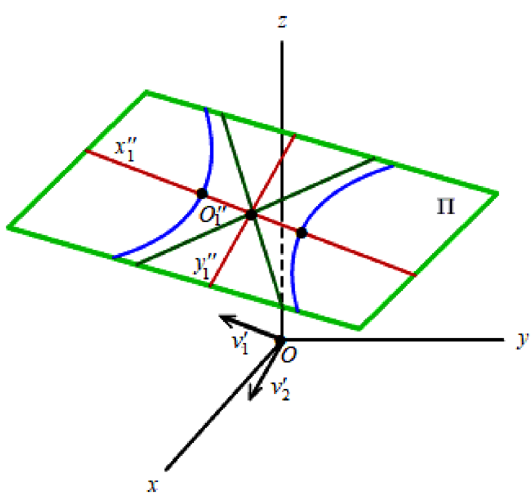
$$2x''^2 - y''^2 = \delta, \quad \delta = -\det(B_1)/\det(A_1) = 1.$$

La ecuación canónica de $\boldsymbol{S} \cap \Pi$ es

$$\boldsymbol{S} \cap \Pi \equiv \frac{x_1''^2}{1/2} - y_1''^2 = 1.$$

Los ejes principales son

$$\text{eje } O_1''x_1'' = (-1, -1, 2) + \langle(1, -1, 1)\rangle, \quad \text{eje } O_1''y_1'' = (-1, -1, 2) + \langle(1, -1, -2)\rangle.$$



4.13. Ejercicios

(1) Clasifica métricamente, calcula la ecuación reducida, los ejes principales y haz una representación las cónicas cuyas ecuaciones en la referencia canónica de $\mathbb{R}^2$ son:

(a) $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x + 3 = 0$,

(b) $3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2x + 2\sqrt{3}\,y = 0$,

(c) $3x^2 + 4xy - 8x + 4 = 0$,
(d) $x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 6y + 3 = 0$,
(e) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$,
(f) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6y + 3 = 0$,
(g) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 4y = 0$,
(h) $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$.

(2) Clasifica métricamente, calcula la ecuación reducida, los ejes principales y haz una representación gráfica de las cuádricas cuyas ecuaciones en la referencia canónica de $\mathbb{R}^3$ son:

(a) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz + 16z + 16 = 0$,
(b) $3x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2xz + 8y - 16 = 0$,
(c) $3x^2 + y^2 - 4xz + 2y - 4z + 4 = 0$,
(d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2x + 2y + 2 - 2 = 0$,
(e) $4x^2 + 9y^2 + 5z^2 - 4xy + 12xz + 8yz + 18y + 16 = 0$,
(f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 4y + 4\sqrt{2}z + 2 = 0$,
(g) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2z - 2 = 0$,
(h) $(1/2)\,x^2 - 2y^2 + (1/2)z^2 - xz - 2\sqrt{2}\,z + 1 = 0$,
(i) $2y^2 - 2yz + xy - xz + x + 3y - z + 1 = 0$.

(3) Prueba que la intersección de un cono con un plano no puede ser un par de rectas paralelas.

(4) Clasifica métricamente, calcula la ecuación reducida, los ejes principales y haz una representación gráfica de la cuádrica cuya ecuación en la referencia canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\boldsymbol{S} \equiv 3x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2xz + 8y + 4 = 0.$$

Clasifica métricamente y calcula la ecuación reducida y los ejes principales de las siguientes cónicas:

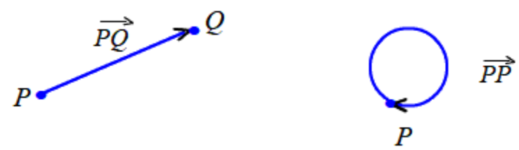
(a) La cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi_1$, donde Π_1 es el plano de ecuación $x + \sqrt{2}\,y + z = 0$ en la referencia canónica.
(b) La cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi_2$, donde Π_2 es el plano de ecuación $x + \sqrt{2}\,y - z - 4\sqrt{2} = 0$ en la referencia canónica.
(c) La cónica $\boldsymbol{S} \cap \Pi_3$, donde Π_3 es el plano de ecuación $x - 3\sqrt{2}/2 = 0$ en la referencia canónica.

5. APÉNDICE

5.1. Vectores

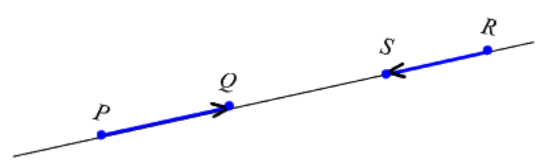
Denotaremos por $\mathbf{E}_2$ ($\mathbf{E}_3$) el plano (espacio) definido por Euclides y estudiado en la geometría elemental. En física aparecen magnitudes a las que usualmente llamamos vectores, que no son solo números sino que además de un valor numérico tienen una dirección y un sentido: las fuerzas que actúan sobre un punto, las velocidades, las aceleraciones,..., se representan mediante vectores. Vamos a describir los conceptos fundamentales de la teoría de vectores y vectores libres.

5.1.1. **Definición.** Un *vector de origen* P y *extremo* Q es un par ordenado $(P,Q) \in \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_2$ ($\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3$). Se suele denotar por $\overrightarrow{PQ}$ y se representa por una flecha que apunta de P a Q. Entre los vectores se encuentran los pares de puntos idénticos (P,P) que se llaman *vectores nulos*.



Se dice que dos vectores tienen *igual dirección* si están situados en rectas paralelas. Se llama *sentido* del vector $\overrightarrow{PQ}$ al sentido de recorrido de la recta que pasa por P y Q cuando nos trasladamos de P a Q.

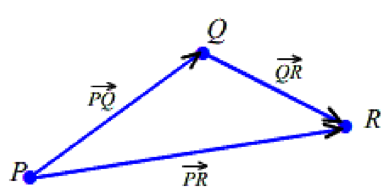
Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ en el siguiente dibujo tienen distinto sentido.



Se llama *módulo* del vector $\overrightarrow{PQ}$ a la distancia entre los puntos P y Q y se denota por $|\overrightarrow{PQ}|$.

El *vector suma* de dos vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ tales que el extremo del primero coincide con el origen del segundo es el vector

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

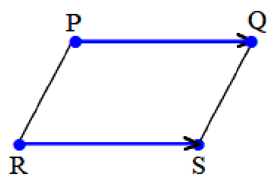


Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, el *vector producto* de λ por el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector

$$\lambda\, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR},$$

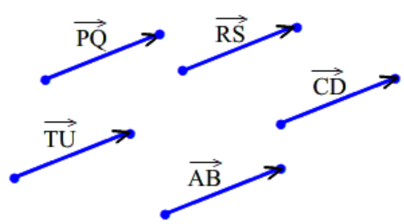
donde R un punto de la recta que pasa por P y Q, $|\overrightarrow{PR}| = |\lambda|\, |\overrightarrow{PQ}|$, y el sentido de $\overrightarrow{PR}$ es el de $\overrightarrow{PQ}$ si $\lambda > 0$ o el opuesto si $\lambda < 0$.

5.1.2. **Definición.** Dos vectores no nulos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ situados sobre una misma recta son *equipotentes* si tienen igual módulo y sentido. Dos vectores no nulos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ no situados sobre una misma recta son *equipotentes* si $PQSR$ es un paralelogramo. Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son equipotentes, escribiremos $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$.



Todos los vectores nulos se consideran equipotentes entre sí.

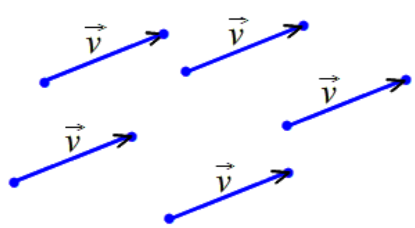
La relación "ser equipotentes" en el conjunto de vectores del plano o espacio es una relación de equivalencia; las clases de equivalencia de esta relación se denominan *vectores libres*.



Los conjuntos cocientes de los vectores del plano y del espacio por la relación "ser equipotentes" se denotarán por V_2 y V_3, respectivamente,

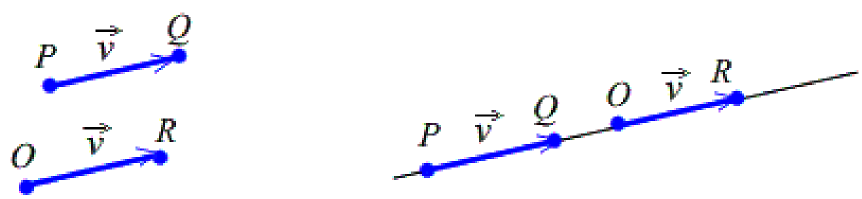
$$V_2 = \frac{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_2}{\sim}, \qquad V_3 = \frac{\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3}{\sim}.$$

Los vectores libres se denotan con las letras $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$,..., y con frecuencia también sus representantes.

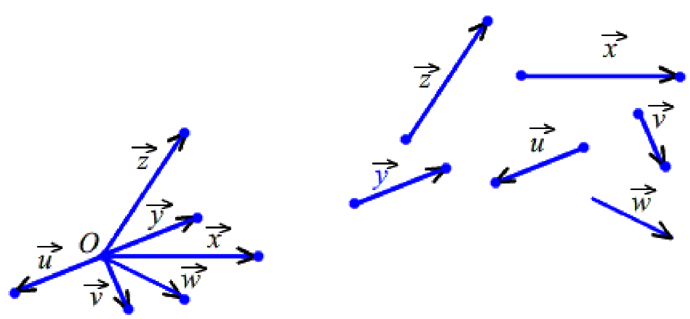


Se llama *módulo* de un vector libre $\overrightarrow{v}$ y se denota por $|\overrightarrow{v}|$ al módulo de uno cualquiera de sus representantes.

Dado un vector libre $\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{PQ}]$ y un punto O existe siempre un único vector de origen O que pertenece a $\overrightarrow{v}$, es decir existe un único vector $\overrightarrow{OR}$ tal que $\overrightarrow{OR} \sim \overrightarrow{PQ}$.



Fijado un punto O, el conjunto de los vectores de origen O es un conjunto de representantes de los vectores libres del plano o del espacio.



5.1.3. **Adición de vectores libres y producto de un vector libre por un número real.** Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores libres del plano (espacio) y P un punto. Existe un único vector $\overrightarrow{PQ}$ tal que $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{PQ}]$ y existe un único vector $\overrightarrow{QR}$ tal que $\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{QR}]$. El *vector libre suma* de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se define por

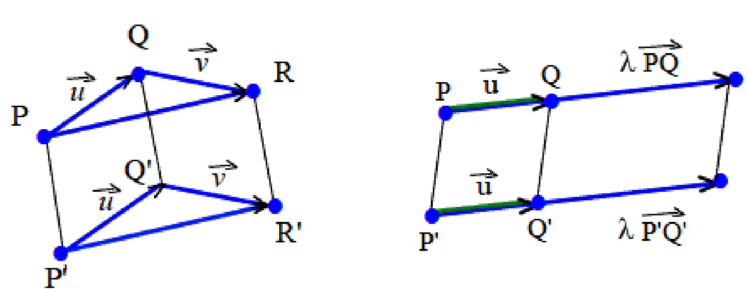
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}] = [\overrightarrow{PR}].$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{PQ}]$, el *vector libre producto* de λ por $\overrightarrow{u}$ se define por

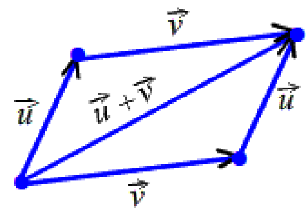
$$\lambda \overrightarrow{u} = [\lambda \overrightarrow{PQ}].$$

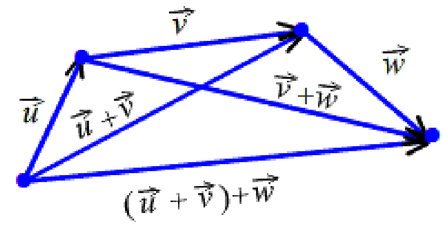
Los vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $\lambda \overrightarrow{u}$ no dependen del punto P considerado:

$$\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{PQ}] = [\overrightarrow{P'Q'}], \quad \overrightarrow{v} = [\overrightarrow{QR}] = [\overrightarrow{Q'R'}] \quad \Longrightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [\overrightarrow{PR}] = [\overrightarrow{P'R'}], \quad \lambda \overrightarrow{u} = [\lambda \overrightarrow{PQ}] = [\lambda \overrightarrow{P'Q'}].$$



Con estas dos operaciones, V_2 y V_3 son espacios vectoriales reales. El elemento neutro para la adición es la clase formada por los vectores nulos $\overrightarrow{0} = [\overrightarrow{PP}]$ y el opuesto del vector libre $[\overrightarrow{PQ}]$ es $[\overrightarrow{QP}]$; la propiedad conmutativa y asociativa quedan ilustradas en el diguiente dibujo:





5.2. Grupos

5.2.1. **Definición.** Un *grupo* es un par $(G, *)$ formado por un conjunto G y una operación interna

$$\begin{aligned} *\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x * y, \end{aligned}$$

donde $x * y$ es la imagen de (x, y) por esta operación, verificándo las siguientes condiciones:

(1) *Asociatividad*: $(x * y) * z = x * (y * z)$, para todo $x, y, z \in G$.

(2) Existe un elemento $e \in G$ tal que $e * x = x * e = x$, para todo $x \in G$; este elemento se llama *elemento neutro*.

(3) Para cada elemento x existe un elemento y tal que $x * y = y * x = e$. Este elemento y se llama *inverso* de x.

Se dice que el grupo $(G, *)$ es abeliano si $x * y = y * x$, para todo $x, y \in G$.

En general, denotaremos $(x * y) * z$ y $x * (y * z)$ por $x * y * z$.

5.2.2. **Propiedades de los elementos.** Sea $(G, *)$ un grupo.

(1) El elemento neutro es único.

(2) Cada elemento x tiene un único inverso, que denotaremos por x^{-1}.

(3) $x * x = x \Rightarrow x = e$, para todo $x \in G$.

(4) $(x^{-1})^{-1} = x$, para todo $x \in G$.

(5) $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$, para todo $x, y \in G$.

Demostración. (1) Sean e y e' elementos neutros de G. Por ser e elemento neutro, $e * e' = e'$, y por ser e' elemento neutro $e * e' = e$. Así, $e = e'$.

(2) Sean y e y' elementos inversos de x. Se tiene

$$y' = y' * e = y' * (x * y) = (y' * x) * y = e * y = y.$$

(3) $x = e * x = (x^{-1} * x) * x = x^{-1} * (x * x) = x^{-1} * x = e$.

(4) $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$.

(5) $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * e * x^{-1} = e, \quad (y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * e * y = y^{-1} * y = e.$ □

5.2.3. **Ejemplos.** $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos y $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo. Si K es un cuerpo, el conjunto

$$GL(n, K) = \{\mathcal{A} \in M_n(K) \mid \det(\mathcal{A}) \neq 0\}$$

es un grupo con la operación de matrices usual y para $n \geq 2$ no es abeliano; por ejemplo, para $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si V es un espacio vectorial sobre K, el grupo lineal general de V, es decir, el conjunto $GL(V) = \{f \colon V \to V \mid f \text{ isomorfismo de espacio vectoriales}\}$, con la operación composición de aplicaciones, es un grupo.

4. Definición. Sea $(G, *)$ un grupo y H un subconjunto de G. Se dice que H es un *subgrupo* de G si

(1) El elemento neutro de G está en H, es decir, $e \in H$.

(2) Si $x, y \in H$, entonces $x * y \in H$.

(3) Si $x \in H$, entonces $x^{-1} \in H$.

Se tiene que H es un subgrupo de G si, y solo si, $(H, *)$ es un grupo con la operación restricción $* \colon H \times H \to H$ del producto $* \colon G \times G \to G$.

Los conjuntos $\{e\}$ y G son subgrupos de $(G, *)$, $(\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$ y $(n\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ y de $(\mathbb{Q}, +)$.

5.2.4. **Definition.** Sean $(G, *)$ y $(G', \star)$ grupos. Se dice que la aplicación $f \colon G \to G'$ es un *homomorfismo* de grupos si verifica

$$f(x * y) = f(x) \star f(y),$$

para todo $x, y \in G$.

Se dice que la aplicación $f \colon G \to G'$ es un *isomorfismo de grupos* si f un homomorfismo de grupos y una aplicación biyectiva.

5.2.5. **Proposition.** Si $f \colon G \to G'$ es un isomorfismo de grupos, entonces $f^{-1} \colon G' \to G$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Para todo $x', y' \in G'$, se tiene

$$f(f^{-1}(x') * f^{-1}(y')) = f(f^{-1}(x')) \star f(f^{-1}(y')) = x' \star y' = f(f^{-1}(x' \star y')),$$

y por ser f un aplicación inyectiva,

$$f^{-1}(x') * f^{-1}(y') = f^{-1}(x' \star y').$$

□

Se dice que los grupos $(G, *)$ y $(G', \star)$ son *isomorfos* y se denota por $G \cong G'$, si existe un isomorfismo de grupos $f \colon G \to G'$.

5.2.6. **Ejemplo.** Si V es un espacio vectorial sobre K de dimensión n, los grupos $GL(V)$ y $GL(n, K)$ son isomorfos. En efecto, si B es una base de V, la aplicación $\psi_B \colon GL(V) \to GL(n, K)$, dada por $\psi_B(f) = f_B$, siendo f_B la matriz asociada a f respecto a la base B, es un isomorfismo de grupos.

5.2.7. **Propiedades.** Si $f\colon G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, se tiene

(1) $f(e) = e'$, donde e' es el elemento neutro de G'.

(2) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Demostración. (1) $f(e) \star f(e) = f(e * e) = f(e) \Longrightarrow f(e) = e'$.

(2) $f(x^{-1}) \star f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e', \quad f(x) \star f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$. Luego, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. □

5.2.8. **Proposición.** Sean $(G, *)$ y $(G', \star)$ grupos y $f\colon G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Se tiene

(1) El conjunto $\mathrm{Nuc}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ es un subgrupo de G, que se llama *núcleo* de f.

(2) El conjunto $f(G) = \{f(x) \mid x \in G\}$ es un subgrupo de G', que se llama *subgrupo imagen* de f.

Demostración. (1) En efecto, dado que $f(e) = e'$, se tiene $e \in \mathrm{Nuc}(f)$. Si $x, y \in \mathrm{Nuc}(f)$, entonces $f(x*y) = f(x)\star f(y) = e'\star e' = e'$, luego $x*y \in \mathrm{Nuc}(f)$. Si $x \in \mathrm{Nuc}(f)$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = {e'}^{-1} = e'$, luego $x^{-1} \in \mathrm{Nuc}(f)$.

(2) $e' = f(e) \in f(G)$. Si $f(x), f(y) \in f(G)$, $f(x) \star f(y) = f(x * y) \in f(G)$. Además, $(f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in f(G)$, para todo $f(x) \in f(G)$. □

5.2.9. **Proposición.** Sea $f\colon G \to G'$ es un isomorfismo de grupos. Se tiene que G es abeliano si, y solo si, G' es abeliano.

Demostración. Es suficiente probar que si G es abeliano, G' es abeliano. Veamos que $(G', \star)$ es un grupo abeliano. En efecto, para todo $x', y' \in G'$, se tiene

$$\begin{aligned} x' \star y' &= f(f^{-1}(x')) \star f(f^{-1}(y')) = f(f^{-1}(x') * f^{-1}(y')) \\ &= f(f^{-1}(y') * f^{-1}(x')) = f(f^{-1}(y')) \star f(f^{-1}(x')) = y' \star x'. \quad \square \end{aligned}$$

Obsérvese que por el ejemplo 5.2.6, el grupo $GL(V)$ no es abeliano, para $\dim_K(V) \geq 2$.

5.2.10. **Proposición.** Sea H un subgrupo del grupo $(G, *)$. La relación $\sim_H$ en G dada por:

$$x, y \in G, \quad x \sim_H y \iff x^{-1} * y \in H,$$

es una relación de equivalencia en G. La clase de equivalencia de $x \in G$ es el conjunto $[x] = \{x * h \mid h \in H\}\}$ y la denotaremos por $x * H$.

Demostración. Veamos que $\sim_H$ es una relación de equivalencia:

- Propiedad reflexiva: Dado que $x^{-1} * x = e \in H$, $x \sim_H x$, para todo $x \in G$.
- Propiedad simétrica:

$$x \sim_H y \Longleftrightarrow x^{-1} * y \in H \Longleftrightarrow y^{-1} * x = (x^{-1} * y)^{-1} \in H \Longleftrightarrow y \sim_H x.$$

- Propiedad transitiva:

$$\begin{aligned} x \sim_H y, \quad y \sim_H z &\Longrightarrow x^{-1} * y \in H,\ y^{-1} * z \in H \\ &\Longrightarrow x^{-1} * z = (x^{-1} * y) * (y^{-1} * z) \in H \\ &\Longrightarrow x \sim_H z. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} [x] =&\{y \in G \mid y \sim_H x\} = \{y \in G \mid x \sim_H y\} \\ =&\{y \in G \mid x^{-1} * y \in H\} = \{y \in G \mid x^{-1} * y = h, \text{ para algún } h \in H\} \\ =&\{x * h \mid h \in H\} = x * H. \quad \square \end{aligned}$$

5.2.11. **Definición.** Se dice que un subgrupo H de G es *normal* si verifica

$$x * H = H * x, \quad \forall\, x \in G,$$

donde $H * x = \{h * x \mid h \in H\}$.

Obsérvese que todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales.

5.2.12. **Proposición.** Si $f\colon G \to G'$ un homomorfismo de grupos, entonces $\mathrm{Nuc}(f)$ es un subgrupo normal de G.

Demostración. En la proposición 5.2.8 se probó que $\mathrm{Nuc}(f)$ es un subgrupo de G. Falta probar que $x * \mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Nuc}(f) * x$, para todo $x \in G$. Se tiene

$$\begin{aligned} z \in x * \mathrm{Nuc}(f) &\Longleftrightarrow x^{-1} * z \in \mathrm{Nuc}(f) \Longleftrightarrow f(x^{-1} * z) = e \\ &\Longleftrightarrow f(x^{-1}) \star f(z) = e \Longleftrightarrow f(z) = f(x) \\ &\Longleftrightarrow f(z) \star f(x)^{-1} = e \Longleftrightarrow f(z * x^{-1}) = e \\ &\Longleftrightarrow z * x^{-1} \in \mathrm{Nuc}(f) \Longleftrightarrow z \in \mathrm{Nuc}(f) * x. \end{aligned}$$

$\square$

13. Proposición. Si H es un subgrupo normal de $(G, *)$, entonces el conjunto cociente $G/\sim_H$ es un grupo con la operación

$$\begin{aligned} *\colon G/\sim_H \times G/\sim_H &\longrightarrow G/\sim_H \\ (x * H\,,\, y * H) &\longmapsto (x * y) * H \end{aligned}$$

Demostración. El conjunto cociente

$$G/\sim_H = \{x * H \mid x \in H\}$$

es una partición de G, donde

$$\begin{aligned} x \sim_H y &\Longleftrightarrow x * H = y * H \\ x \not\sim_H y &\Longleftrightarrow (x * H) \cap (y * H) = \varnothing. \end{aligned}$$

Veamos que la operación producto está bien definida. Supongamos que $x{*}H = x'{*}H$, $y{*}H = y'{*}H$. Por ser H un subgrupo normal de G,

$$(x{*}y){*}H = x{*}(y{*}H) = x{*}(y'{*}H) = x{*}(H{*}y') = (x{*}H){*}y' = (x'{*}H){*}y' = x'{*}(y'{*}H) = (x'{*}y'){*}H.$$

El elemento neutro de esta operación es $[e] = e{*}H = H$ y el inverso de $x{*}H$ es $x^{-1}{*}H$. La asociatividad de la operación en $G/\sim_H$ se sigue de la asociatividad de la operación producto en G:

$$\begin{aligned}((x * H) * (y * H)) * (z * H) =& ((x * y) * H) * (z * H) = ((x * y) * z) * H = (x * (y * z)) * H \\ & (x * H) * ((y * z) * H) = (x * H) * ((y * H) * (z * H)).\end{aligned}$$

□

Denotaremos el grupo $(G/\sim_H, *)$ por $(G/H, *)$ y le llamaremos *grupo cociente* de G por H.

14. Primer teorema de isomorfía. Sea $f\colon G \to G'$ un homomorfismo de grupos. La aplicación

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\colon G/\operatorname{Nuc}(f) &\longrightarrow f(G)\\ x * \operatorname{Nuc}(f) &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. Así, $G/\operatorname{Nuc}(f) \cong f(G)$.

Demostración. La aplicación $\widetilde{f}$ está bien definida:

$$\begin{aligned}x * \operatorname{Nuc}(f) =& y * \operatorname{Nuc}(f) \iff x \sim_{\operatorname{Nuc}(f)} y \iff x^{-1} * y \in \operatorname{Nuc}(f)\\ \iff& f(x^{-1} \star y) = e \iff f(x) = f(y).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}$ es homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x * \operatorname{Nuc}(f)) * (y * \operatorname{Nuc}(f)) =& \widetilde{f}((x * y) * \operatorname{Nuc}(f)) = f(x * y)\\ =& f(x) \star f(y) = \widetilde{f}(x * \operatorname{Nuc}(f)) * \widetilde{f}(y * \operatorname{Nuc}(f)).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}$ es una aplicación inyectiva:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x * \operatorname{Nuc}(f)) = \widetilde{f}(y * \operatorname{Nuc}(f)) &\iff f(x) = f(y)\\ &\iff (f(x))^{-1} \star f(y) = e\\ &\iff f(x^{-1}) \star f(y) = e\\ &\iff f(x^{-1} * y) = e\\ &\iff x^{-1} * y \in \operatorname{Nuc}(f)\\ &\iff x \sim_{\operatorname{Nuc}(f)} y\\ &\iff x * \operatorname{Nuc}(f) = y * \operatorname{Nuc}(f).\end{aligned}$$

$\widetilde{f}$ es una aplicación suprayectiva:

$$f(x) = \widetilde{f}(x * \operatorname{Nuc}(f)), \quad x \in G.$$

□

5.3. Teorema espectral

5.3.1. **Teorema espectral.** Si $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, entonces

(1) Las raices del polinomio característico de $\mathcal{A}$ son números reales.

(2) La matriz $\mathcal{A}$ es diagonalizable y existe una matriz de paso ortogonal, es decir, una matriz ortogonal $\mathcal{P} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{P}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{P} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Demostración. (1) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $\mathcal{A}$ y sea $v = (z_1, \dots, z_n)$ un vector propio de $\mathcal{A}$ asociado a λ. Si denotamos el vector columna $(z_1\,\dots z_n)^t$ por v,

$$\mathcal{A}\,v = \lambda v\,, \qquad v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Pongamos $\bar{v} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, siendo $\bar{z}_i$ el complejo conjugado de $z_i, i = 1, \dots, n$. Si $\mathcal{A} = (a_{ij})$, ponemos $\bar{\mathcal{A}} = (\overline{a_{ij}})$. Se tiene:

$$\begin{aligned} &\bar{v}^t\,\mathcal{A}\,v = \bar{v}^t\,\lambda\,v = \lambda\,\bar{v}^t\,v, \\ &\bar{v}^t\,\mathcal{A}^t\,v = \bar{v}^t\,\bar{\mathcal{A}}\,v = (\bar{\mathcal{A}}\,\bar{v})^t\,v = (\bar{\lambda}\,\bar{v})^t\,v = \bar{\lambda}\,\bar{v}^t\,v. \end{aligned}$$

Así,

$$\lambda\,\bar{v}^t\,v = \bar{\lambda}\bar{v}^t\,v,$$

y por ser $\bar{v}^t\,v \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$.

(2) Razonaremos por inducción sobre n. Para $n = 1$, es trivial. Supongamos el resultado cierto para $n-1$ y sea $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Sea $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un autovalor de $\mathcal{A}$, v un vector propio asociado a λ_1 y $v_1 = v/\|v\|$. Entonces

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1 \rangle \;\perp\; \langle v_1 \rangle^{\perp}.$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica C es $\mathcal{A}$. Sea $(v_2, \dots, v_n)$ una base ortonormal de $\langle v_1 \rangle^{\perp}$. La base $B = (v_1, \dots, v_n)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y la matriz asociada a f en B es

$$f_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & bnn \end{pmatrix} = \;\mathcal{S}^{-1}\,\mathcal{A}\,\mathcal{S},$$

donde $\mathcal{S}$ es la matriz de cambio de base de B a C, que es una matriz ortogonal. Por ser f_B una matriz simétrica,

$$b_{12} = \dots = b_{1n} = 0,$$

así que

$$f_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & bnn \end{pmatrix}.$$

Pongamos

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \dots & bnn \end{pmatrix} \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Por hipótesis de inducción, existe una matriz ortogonal $\mathcal{Q} = (q_{ij}) \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, tal que

$$\mathcal{Q}^t \, \mathcal{D} \, \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{12} & \dots & q_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & q_{n-1\,1} & \dots & q_{n-1\,n-1} \end{pmatrix},$$

entonces $\mathcal{P} = \mathcal{S}\,\mathcal{T}$ es una matriz ortogonal, y se tiene

$$\mathcal{P}^t \, \mathcal{A} \, \mathcal{P} = \mathcal{T}^t \, f_B \, \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

5.3.2. **Corolario.** Toda matriz real simétrica $\mathcal{A}$ es congruente a una matriz diagonal que tiene en la diagonal principal los autovalores de $\mathcal{A}$.

5.3.3. **Lema.** Sea $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y sean λ_1 y λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores de $\mathcal{A}$. Si v es un vector propio asociado a λ_1 y w es un vector propio asociado a λ_2, entonces v y w son vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base canónica es la matriz $\mathcal{A}$, entonces

$$f(v) = \lambda_1 \, v, \quad f(w) = \lambda_2 \, w.$$

Por ser $\mathcal{A}$ una matriz simétrica,

$$v \cdot f(w) = v^t \, \mathcal{A} \, w, \quad f(v) \cdot w = (\mathcal{A}\, v)^t \, w = v^t \, \mathcal{A}^t \, w = v^t \, \mathcal{A} \, w.$$

Por tanto,

$$v \cdot f(w) = f(v) \cdot w \Longleftrightarrow v \cdot (\lambda_2 \, w) = (\lambda_1 \, v) \cdot w \Longleftrightarrow \lambda_2 \, (v \cdot w) = \lambda_1 \, (w \cdot v) \Longleftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \, (v \cdot w) = 0.$$

Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se tiene que $v \cdot w = 0$. $\square$

5.3.4. **Proposición.** Sea $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, los autovalores de $\mathcal{A}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Si $V_{\lambda_i} = \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \, 1_{\mathbb{R}^n})$ son los subespacios propios asociados a los autovalores λ_i, para $i = 1, \ldots, s$, se tiene

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \perp \ldots \perp V_{\lambda_s}.$$

Demostración. Por ser $\mathcal{A}$ una matriz diagonalizable,

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s},$$

y por el lema anterior el subespacio V_{λ_i} es ortogonal al subespacio V_{λ_j}, para todo $i \neq j$. □

5.3.5. ***Observación.*** Si $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, una forma de obtener una matriz de paso ortogonal $\mathcal{P}$ tal que la matriz $\mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P}$ es una matriz diagonal es la siguiente: calculamos una base ortonormal B_i de cada uno de los subespacios V_{λ_i}, para $i = 1, \ldots, s$, luego el conjunto

$$B = \bigcup_{i=1}^{s} B_i$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Para obtener una matriz ortogonal $\mathcal{P}$ de paso, se coloca cada uno de los vectores de B_i como un vector columna de la matriz $\mathcal{P}$.

5.3.6. **Ejemplo.** Vamos a diagonalizar por semejanza la matriz real simétrica

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y encontrar una matriz de paso ortogonal. El polinomio característico de $\mathcal{A}$ es

$$P_{\mathcal{A}}(X) = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = -(X-2)^2(X+1).$$

Los subespacios propios asociados a los autovalores de $\mathcal{A}$ son

$$V_2 = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle, \quad V_{-1} = \langle (1,-1,1) \rangle.$$

Aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ de V_2, obtenemos la base ortogonal $B' = \big((1,1,0),(-1/2,1/2,1)\big)$ de V_2. Multiplicando cada vector de B' por el inverso de su longitud, obtenemos la siguiente base ortonormal de V_2:

$$B'' = \big((\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)\big).$$

La base $B = \big((\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3), (\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)\big)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, luego la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal y

$$\mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

[1] Audin, M., *Geometry.* Springer, Berlin, 2002.

[2] Burgos Román, J. de, *Curso de álgebra y geometría.* Alhambra, Madrid, 1983.

[3] Burgos Román, J. de, *Álgebra lineal.* MacGraw-Hill/Interamericana de España, Madrid, 1993.

[4] Golovina, L. I., *Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones.* Mir, Moscú, 1980.

[5] Hernández Rodríguez, E., *Álgebra y geometría.* Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, DE, 1994.

[6] Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., Zurro Moro M. A., *Álgebra lineal y geometría.* Pearson, Madrid , 2012.

[7] Lang S., *Analisis I.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[8] Martínez Rodríguez, P., Vale Gonsalves M. J., *Teorema fundamental de la geometría afín.* http://hadle.net/10347/19868, AC-Materiais didácticos, 2019.

[9] Roe, J., *Elementary Geometry.* Oxford University Press, New York, 1993.

[10] Sernesi, E., *Linear álgebra. A geometric aproach.* Chapman & Hall, London, 1993.

[11] Snapper E., Troyer R. J., *Metric Affine Geometry.* Academic Press, New York, 1971.

[12] Thomas, G, B., Finney, R. L., *Cálculo con geometría analítica.* Addison-Wesley Wilmington, 1987.

[13] Tisseron, CL., *Géométries affine et euclidienne.* Hermann, Paris, 1998.

[14] Vale Gonsalves M. J. *Movimientos en espacios afines euclídeos. Clasificación.* http://hadle.net/10347/23265, AC-Materiais didácticos, 2020.