



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introducción a las bifurcaciones en las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ana Gómez Lorenzo

Febrero, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grao

Introducción a las bifurcaciones en las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ana Gómez Lorenzo

Febrero, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de conocimiento: Análisis Matemático
Título: Introducción a las bifurcaciones en las ecuaciones diferenciales ordinarias
Breve descripción del contenido
<p>En este trabajo se pretende que la alumna amplíe su formación en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias profundizando en el concepto de bifurcación y en sus tipos.</p> <p>En primer lugar, se revisará el retrato de fases de las ecuaciones diferenciales en dimensiones uno y dos que dependen de un parámetro, apoyándose en ejemplos motivadores. Esto servirá para introducir el concepto de bifurcación como cambio cualitativo en la estructura del retrato.</p> <p>A continuación, se abordará el marco teórico de las bifurcaciones en el anterior contexto, obteniendo condiciones sobre el campo de vectores que permiten distinguir los diferentes tipos de bifurcación, por ejemplo, la silla-nodo, la transcítica, la tridente y la de Hopf.</p>
Recomendaciones
Manejar con soltura los conceptos estudiados en las materias obligatorias de Análisis Matemático y, en particular, en las relacionadas con las ecuaciones diferenciales.

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Resultados generales	1
1.2. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	2
1.3. Retrato de fases en \mathbb{R}^n y estabilidad	4
1.3.1. Caso $n = 1$: ecuaciones diferenciales escalares	6
1.3.2. Caso $n = 2$: sistemas de ecuaciones en el plano	9
2. Bifurcaciones	13
2.1. Introducción a las bifurcaciones	13
2.2. Formalización de conceptos	19
2.3. Bifurcaciones en ecuaciones unidimensionales	20
2.3.1. Bifurcación Silla-Nodo	21
2.3.2. Bifurcación Transcrítica	25
2.3.3. Bifurcación Tridente	29
2.4. Bifurcaciones en sistemas: la bifurcación de Hopf	34
2.4.1. Preliminares de la bifurcación de Hopf	36
2.4.2. La bifurcación de Hopf	37

2.4.3. Forma normal de la bifurcación de Hopf	46
Bibliografía	55

Resumen

El estudio del comportamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales busca obtener propiedades de las soluciones sin necesidad de conocerlas explícitamente. Este enfoque cobra especial relevancia cuando se incorporan parámetros en la ecuación, pues pequeñas variaciones en ellos pueden suponer cambios muy significativos, influyendo en el número de puntos singulares, en su estabilidad o en la aparición de soluciones oscilatorias. Esta es la idea de la teoría de las bifurcaciones, en la que se profundizará mediante los ejemplos más típicos en una y dos dimensiones: las bifurcaciones tangenciales, transcriticals, tridentales y de Hopf. Para cada una de ellas se explorará el comportamiento cualitativo de una ecuación tipo, para continuar realizando un estudio genérico en el que se obtendrán condiciones que la caracterizan.

Abstract

The study of the qualitative behaviour of differential equations seeks to obtain properties of the solutions without the need to know them explicitly. This approach acquires special relevance when parameters are incorporated into the equation, since small variations in them can lead to very significant changes, having effects on the number of singular points, their stability or the appearance of oscillatory solutions. This is the idea behind the theory of bifurcations, which will be explored in depth by means of the most typical examples in one and two dimensions: the tangent, transcritical, pitchfork and Hopf bifurcations. For each of them, the qualitative behaviour of a type equation will be explored, followed by a generic study in which the conditions that characterise it will be obtained.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias permiten estudiar cómo evoluciona un sistema a medida que avanza el tiempo. Tienen aplicaciones en campos tan diversos que recorren desde ciencias formales y naturales como la tecnología, la física y la biología, hasta ciencias sociales como la economía o la psicología. En concreto, son especialmente relevantes las ecuaciones con dependencia paramétrica, cuya variación puede provocar cambios en el comportamiento cualitativo del sistema. Este fenómeno es la base de la teoría de las bifurcaciones, temática central del presente trabajo.

Este trabajo tiene como principal objetivo introducir y analizar las bifurcaciones que se producen en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, se utilizarán gran parte de los conceptos vistos durante el grado sobre el estudio del comportamiento cualitativo de sistemas autónomos en el plano, entre los que se incluyen los retratos de fases y el análisis en torno a puntos singulares hiperbólicos. En el trabajo se amplía esta base para explorar más allá del comportamiento lineal, estudiando cuales son los cambios cualitativos que se producen en puntos no hiperbólicos, donde pueden aparecer las bifurcaciones. Las bifurcaciones se caracterizan por cambios en el sistema para ciertos valores de un parámetro. Estos cambios incluyen desde variaciones en el número de puntos singulares y su estabilidad, hasta la aparición de órbitas periódicas.

El trabajo se divide en dos capítulos principales. En el primero de ellos, *Preliminares*, se recogen los conceptos fundamentales que serán de gran utilidad durante todo el desarrollo. En primer lugar, se incluyen resultados generales necesarios para determinar formalmente las condiciones que caracterizan las bifurcaciones, tales como el Teorema de la implícita o el Teorema de Taylor. En segundo lugar, se presenta un apartado con la teoría básica de las ecuaciones diferenciales ordinarias, incorporando explicaciones sobre ecuaciones autónomas y resultados como la existencia y unicidad de soluciones. Por último, se tratan cuestiones relacionadas con la teoría cualitativa como los retratos de fases, la estabilidad de las órbitas y de los puntos singulares y el método de linealización.

El segundo capítulo, *Bifurcaciones*, es la parte central del trabajo. En ella se introducen las ecuaciones paramétricas y se profundiza en el estudio del comportamiento cualitativo de la ecuación

a partir de pequeñas variaciones en los parámetros. En primer lugar, se formalizan las definiciones y conceptos más relevantes de la teoría de las bifurcaciones, tales como la estabilidad estructural o el diagrama de bifurcación. En la segunda parte de este capítulo se presentan las bifurcaciones en ecuaciones unidimensionales, analizando el comportamiento característico y las condiciones necesarias para que se produzcan las bifurcaciones de tipo tangencial, transcítica y tridente. La tercera parte del capítulo trata de las bifurcaciones en sistemas planos, analizando en profundidad el caso particular de la bifurcación de Hopf.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se desarrolla una base teórica sólida para profundizar, en la parte principal del trabajo, el estudio de las bifurcaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias. Se empieza recordando los Teoremas de la función implícita y de Taylor, para posteriormente revisar aspectos relativos a la teoría de las ecuaciones diferenciales. A continuación, se recuerdan algunos resultados de existencia y unicidad de solución (maximal) para continuar hablando de retratos de fases y estabilidad. Para ello se han utilizado principalmente los trabajos de [Wig03] y [FVV03]. Cabe mencionar que la mayoría de estos aspectos ya habían sido trabajados durante el grado.

1.1. Resultados generales

Se recogen en este apartado los Teoremas de la implícita y de Taylor, que serán de gran utilidad en el estudio formal de las bifurcaciones.

Teorema 1.1. *(de la función implícita)[KP03]*

Dado un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$, una función $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(D)$ y un punto $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si se verifica:

- $F(x_0, \mu_0) = 0$,
- $\frac{\partial F}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$.

Entonces existe un intervalo abierto $(x_0 - h, x_0 + h)$ para algún $h > 0$ y una función $f : (x_0 - h, x_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}$, de la misma regularidad que F , tal que $f(x_0) = \mu_0$ y $F(x, f(x)) = 0$.

Teorema 1.2. *(de Taylor)*

Se considera el abierto $D \in \mathbb{R}^n$ y dos puntos $x, x_0 \in D$ tales que el segmento que une x y x_0

está contenido en D . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es $m + 1$ veces diferenciable en D , entonces existe un c en el segmento que une x y x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!}d^m f(x_0)(x - x_0)^m + \frac{1}{(m + 1)!}d^{m+1}f(c)(x - x_0)^{m+1}.$$

En este caso,

$$P_{m,x_0}^f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!}d^m f(x_0)(x - x_0)^m$$

es el polinomio de Taylor de orden m de f centrado en x_0 y

$$R_{m,x_0}^f(x) = \frac{1}{(m + 1)!}d^{m+1}f(c)(x - x_0)^{m+1}$$

es el resto de Lagrange.

1.2. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

De manera informal, se puede definir una ecuación diferencial ordinaria (EDO) como una relación en la que la incógnita es una función x de una variable independiente t , y tal que en su expresión aparecen algunas de las derivadas de la función x :

$$\frac{dx(t)}{dt}, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^nx(t)}{dt^n}.$$

Se llama orden de la EDO al mayor orden de las derivadas que aparezca en la ecuación.

Definición 1.3. Se define la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y dimensión n mediante:

$$x'(t) = f(t, x) \tag{1.1}$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, y D es un abierto. Cuando $(n > 1)$, la ecuación (1.1) se denomina sistema de EDOs.

Nota 1.4. En la definición anterior hemos considerado la hipótesis $f \in C^1(D)$, es decir, que tanto f como su derivada f' son funciones continuas en D . Esta regularidad no es necesaria para definir el concepto de EDO, pero se ha considerado porque será un requisito indispensable para los resultados recogidos en el capítulo principal del trabajo.

Definición 1.5. Se denomina **solución** de la ecuación (1.1) a una función $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clase $f \in C^1(I)$, donde I es un intervalo abierto, tal que satisface la ecuación (1.1) en todo el intervalo I y los pares $(t, x(t)) \in D$, $\forall t \in I$.

Definición 1.6. Dada la ecuación diferencial (1.1) y el punto $(t_0, x_0) \in D$, el siguiente problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que consiste en encontrar una solución $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un entorno de t_0 y tal que $x(t_0) = x_0$, se denomina **Problema de Valor Inicial (PVI)**. El par (t_0, x_0) son las condiciones iniciales del PVI.

Teorema 1.7. *(De existencia y unicidad de solución del PVI)*

Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, para cada punto $(t_0, x_0) \in D$, existe un número $h > 0$ tal que el PVI asociado tiene solución única en el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$.

Definición 1.8. Sea $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de la ecuación diferencial (1.1). Se dice que $v(t)$ es una prolongación de $u(t)$ si:

- $v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación diferencial con $I_u \subset I_v$,
- $v(t) = u(t)$, para todo $t \in I_u$.

Definición 1.9. Se dice que $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, es una solución **maximal** del PVI si no admite ninguna prolongación.

Teorema 1.10. *(de existencia de solución maximal)*

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con D abierto, tal que $f \in \mathcal{C}^1(D)$, se tiene:

Dado $(t_0, x_0) \in D$, existe una solución maximal del PVI asociado $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I = (\alpha, \omega)$ intervalo abierto.

Teorema 1.11. *(de unicidad de solución maximal)*

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con D abierto, tal que $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Si $u(t)$ y $v(t)$ son dos soluciones del sistema $x' = f(t, x)$, definidas en un mismo intervalo J y verificando $u(t_0) = v(t_0)$ para un cierto $t_0 \in J$, entonces $u(t) = v(t)$ para todo $t \in J$. Por tanto, la solución maximal de un cierto PVI es única.

Hasta este punto se han considerado sistemas de EDOs generales. Sin embargo, de ahora en adelante se trabajará con ecuaciones autónomas, donde la expresión de la función que determina el sistema no depende explícitamente de la variable independiente t .

Ejemplo 1.12. Las ecuaciones $x'(t) = x^2(t)$ y $x'(t) = 2t$ son ejemplos de EDOs de primer orden. En la primera no aparece explícitamente la variable independiente t y en la segunda sí.

Definición 1.13. Se dice que la ecuación (1.1) es **autónoma** si la función f no depende explícitamente de la variable independiente t , es decir, si la ecuación (1.1) es de la forma:

$$x' = f(x),$$

con $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D abierto y $f \in C^1(D)$.

Además, en el capítulo central de este trabajo, cobrarán mucha importancia las ecuaciones diferenciales que dependen de parámetros, los cuales pueden influir de manera significativa en el comportamiento del sistema y sus soluciones. Se trata de sistemas de la forma:

$$x' = f(x, \mu), \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p.$$

1.3. Retrato de fases en \mathbb{R}^n y estabilidad

Se considera la ecuación autónoma:

$$x' = f(x), \tag{1.2}$$

con $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D)$ y D un abierto.

Definición 1.14. Dada la ecuación (1.2), se denomina **órbita o trayectoria** del punto $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ al recorrido de la solución maximal $x : I = (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ del PVI asociado dado por:

$$\gamma_{x_0} = \{x(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Cuando se consideran únicamente tiempos positivos $t \in I \cap [0, +\infty)$, o negativos $t \in I \cap (-\infty, 0]$, se habla respectivamente de órbita positiva, $\gamma_{x_0}^+$, y negativa, $\gamma_{x_0}^-$.

Definición 1.15. Se define el **retrato de fases** del sistema (1.2) como la unión disjunta de todas las órbitas que pasan por todos los puntos de D .

A continuación se definen dos tipos particulares de órbitas, las singularidades y las órbitas periódicas, de gran relevancia cuando trabajemos con bifurcaciones.

Definición 1.16. Se dice que un punto $x_0 \in D$ es un punto **singular** del sistema (1.2) si $f(x_0) = 0$. En caso contrario, se dice que x_0 es un punto **regular**.

Es habitual referirse a un punto singular con otras denominaciones como singularidad, punto crítico, punto de equilibrio o punto fijo.

Definición 1.17. Se dice que una órbita de (1.2) es **periódica** de periodo T si existe un $T > 0$ tal que $x(t) = x(t + T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Ahora se presenta un resultado que permite simplificar en gran medida el estudio de las ecuaciones y sistemas autónomos. Se trata de la propiedad de invarianza por traslaciones en el tiempo.

Proposición 1.18. *Si $x : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de (1.2), entonces, para cada $c \in \mathbb{R}$, $z : (\alpha - c, \omega - c) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $z(t) := x(t + c)$ también es solución.*

Se tiene en particular el siguiente corolario:

Corolario 1.19. *Si $x : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida en (α, ω) , es solución del PVI:*

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

entonces $z(t) = x(t + t_0)$, definida en $(\alpha - t_0, \omega - t_0)$ es solución del PVI:

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Estos dos resultados permiten considerar, sin pérdida de generalidad, el instante inicial $t_0 = 0$ en el estudio de las ecuaciones autónomas. Esto se debe a que las soluciones de un sistema autónomo son las mismas trasladadas en el tiempo.

La estabilidad es una propiedad clave para analizar el comportamiento de las soluciones en un sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.20. Sea $x : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución maximal del sistema (1.2) tal que $[0, \infty) \subset (\alpha, \omega)$ y $x(0) = x_0$. Se denota por ϕ una solución cualquiera del sistema. Se dice que x

- Es estable si dada otra solución ϕ del sistema, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\|\phi(0) - x_0\| \leq \delta$, entonces $\phi(t)$ está definida $\forall t \geq 0$ y $\|\phi(t) - x(t)\| \leq \epsilon$.
- Es asintóticamente estable si es estable y además existe $\eta > 0$ tal que, si $\|\phi(0) - x_0\| \leq \eta$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t) - x(t)\| = 0$.
- Es inestable si no es estable.

De la definición anterior se puede interpretar que, dada una solución $x(t)$ del sistema (1.2), se dice que es estable si las soluciones que comienzan cerca de esta en un tiempo dado, también mantienen esa proximidad en tiempos arbitrariamente elevados. Además, se dice que es asintóticamente estable si, las soluciones que parten de puntos suficientemente cercanos a $x(t)$ en un tiempo dado convergen a $x(t)$. Por último, la inestabilidad se traduce en que es posible encontrar una solución

que parte de un punto tan cercano como se quiera a $x(t)$ en un tiempo dado, pero no es posible mantenerla cerca para todos los instantes posteriores.

Dada la importancia de los puntos singulares en el retrato de fases, es interesante adaptar la definición anterior al caso particular de que la solución sea un punto singular.

Definición 1.21. Dado \bar{x} un punto singular del sistema (1.2), se dice que:

- \bar{x} es **estable** si dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, $\delta \leq \epsilon$, tal que, para todo x_0 que satisfaga $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$, la solución la solución ϕ del sistema tal que $\phi(0) = x_0$ está definida para todo $t \geq 0$ y verifica $\|\phi(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$, para todo $t \geq 0$.
- \bar{x} es **asintóticamente estable** si es estable y existe $\eta > 0$ tal que si $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \eta$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \bar{x}$.
- \bar{x} es **inestable** si no es estable.

1.3.1. Caso $n = 1$: ecuaciones diferenciales escalares

En este apartado se estudiarán las órbitas y los retratos de fases de las ecuaciones autónomas escalares de la forma (1.2) con $n = 1$:

$$x' = f(x), \quad f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(I), \quad I \text{ abierto.} \quad (1.3)$$

Los puntos singulares constituyen la parte central de los retratos de fases en ecuaciones escalares, pues dividen el eje real en intervalos donde el signo de la función f determina la dirección del flujo de la ecuación y permiten representar fácilmente el comportamiento cualitativo de la ecuación, destacando las regiones donde las soluciones se dirigen hacia los puntos singulares, puntos atractores, o se alejan de ellos, puntos repulsores.

En primer lugar, se adapta la Definición 1.20 al caso escalar y se presentan una serie de resultados que proporcionan condiciones necesarias y suficientes para estudiar la estabilidad de los puntos singulares en ecuaciones escalares.

Definición 1.22. Sea x_0 un punto singular de la ecuación (1.3):

- x_0 es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo z que satisfaga $|z - x_0| < \delta$, la solución ϕ del sistema que cumple $\phi(0) = z$ está definida para todo $t \geq 0$ y verifica $|x(t) - x_0| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.
- x_0 es inestable si no es estable.

- x_0 es atractor (local) si existe un $\rho > 0$ tal que para todo z que verifique $|z - x_0| < \rho$ se tiene que la solución ϕ_z del sistema que cumple $\phi_z(0) = z$ está definida para todo $t \geq 0$ y verifica $\phi_z(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow \infty$. La región de atracción de x_0 es el conjunto de los $z \in \mathbb{R}$ tales que $\phi_z(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se designa por $A(x_0)$. Así, se dice que x_0 es atractor global si su región de atracción es todo \mathbb{R} .
- x_0 es asintóticamente estable si es estable y atractor. Es globalmente asintóticamente estable si es estable y atractor global.
- x_0 es repulsor si existe un $\rho > 0$ tal que para todo z con $|z - x_0| < \rho$, se tiene que la solución ϕ del sistema que cumple $\phi(0) = z$ está definida para todo $t \leq 0$ y verifica $\phi(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Es importante dejar claro que estas propiedades son exclusivas del caso unidimensional, ya que en dimensiones superiores carecen de sentido.

Proposición 1.23. *Dado x_0 un punto singular de la ecuación (1.3):*

1. *Si existe δ tal que $f(x) \geq 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f(x) \leq 0$ para $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces x_0 es estable.*
2. *El punto $z < x_0$ pertenece a la región de atracción de x_0 si y sólo si $f(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon \in [z, x_0)$. El punto $z > x_0$ pertenece a la región de atracción de x_0 si y sólo si $f(\epsilon) < 0$ para todo $\epsilon \in (x_0, z]$.*
3. *x_0 es asintóticamente estable si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f(x) < 0$ para $x_0 < x < x_0 + \delta$.*
4. *Si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0$ o bien $f(x) > 0$ para $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces x_0 es inestable.*
 x_0 es repulsor si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f(x) = 0$ para $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Proposición 1.24. *Dado x_0 un punto singular de la ecuación (1.3):*

1. *Si $f'(x_0) \neq 0$:*
 - *x_0 es atractor si y sólo si $f'(x_0) < 0$.*
 - *x_0 es repulsor si y sólo si $f'(x_0) > 0$.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$, se necesitan más datos sobre f para decidir la estabilidad o inestabilidad de x_0 .*

Se concluye este apartado presentando una serie de ejemplos de retratos de fases de ecuaciones autónomas unidimensionales. En las EDOs escalares las órbitas se clasifican en puntos singulares e intervalos abiertos, donde las direcciones están determinadas por el signo de la función f .

Ejemplo 1.25. Se considera la ecuación

$$x' = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dado que $x' = 0 \iff x = 0$, se tiene que $x_0 = 0$ es el único punto singular. Como $f'(0) = 0$, no se cumplen las condiciones para determinar la dinámica que ofrece la Proposición 1.24. Por tanto, hay que evaluar la función en los valores negativos y positivos de x . Se tiene que $f(x) = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, por tanto, de la Proposición 1.23, $x_0 = 0$ es inestable. El retrato de fases se recoge en la Figura 1.1.

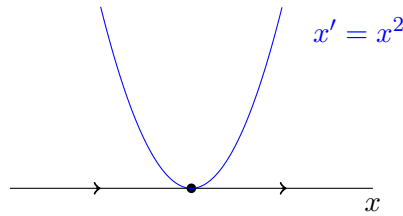


Figura 1.1: Retrato de fases de $x' = x^2$

Ejemplo 1.26. Se considera la ecuación paramétrica:

$$x' = \mu x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Se tienen tres retratos de fases diferentes en función del valor del parámetro μ :

- $\mu < 0$: dado que $x' = 0 \iff x = 0$, el único punto singular es $x_0 = 0$. Además, como $f'(0) = \mu < 0$, por la Proposición 1.24 se tiene que el punto singular es atractor.
- $\mu = 0$: se verifica $x' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que todos los puntos de la recta son singularidades.
- $\mu > 0$: de nuevo $x = 0$ es el único punto singular. Esta vez, como $f'(0) = \mu > 0$, el punto singular es repulsor.

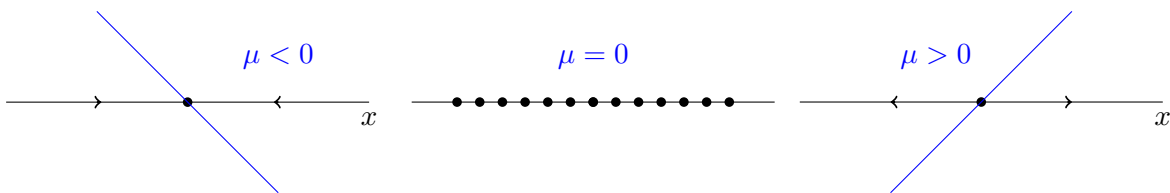


Figura 1.2: Retrato de fases de $x' = \mu x$

1.3.2. Caso $n = 2$: sistemas de ecuaciones en el plano

El análisis de los sistemas de ecuaciones diferenciales resulta más sencillo en el caso lineal, pues se puede determinar la estructura de sus diagramas de fases mediante un estudio de los autovalores de la matriz que los determinan. Por este motivo se iniciará el apartado abordando la posibilidad de entender el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal a partir de su sistema lineal asociado. En segundo lugar, se recordarán los tipos de retratos de fases para los sistemas lineales planos.

Se consideran sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales de dimensión $n = 2$ de la forma:

$$x' = f(x) \iff \begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con D un abierto de \mathbb{R}^2 y $f \in \mathcal{C}^2(D)$.

Dado el sistema (1.4), y un punto de equilibrio $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Expresando cada una de las componentes de f mediante un desarrollo de Taylor alrededor del punto singular se tiene:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)h_2 + g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h_1, h_2) \\ f_2(x_1, x_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)h_2 + g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h_1, h_2) \end{cases},$$

donde las funciones $h = (h_1, h_2) = (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)$ y $g_i(\bar{x}, h)$ verifican $g_i(\bar{x}, h)/\|h\| \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$. Es importante destacar que la expresión anterior es cierta por las hipótesis de que $f \in \mathcal{C}^1(D)$, por lo que tanto las funciones $f_i(x_1, \dots, x_n)$ como $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, n$ son continuas.

En forma vectorial, el sistema se expresa como:

$$x' = f(x) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + g(x, \bar{x}),$$

donde $Df(\bar{x})$ es la matriz jacobiana de f evaluada en \bar{x} .

Para determinar la estabilidad y propiedades de \bar{x} se debe comprender la naturaleza de sus soluciones cercanas. Para ello se define la variable $y = x - \bar{x}$, que representa la desviación del estado del sistema respecto del equilibrio \bar{x} .

Sustituyendo la expresión anterior en el sistema en forma vectorial se llega a:

$$x' = \bar{x}' + y' = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y + O(|y|^2),$$

que teniendo en cuenta que $f(\bar{x}) = 0$, se reduce a:

$$y' = Df(\bar{x})y + O(|y|^2),$$

Cerca del $y = 0$ los términos de orden superior son mucho más pequeños que los términos lineales, por lo que muchas cuestiones sobre el comportamiento del sistema no lineal alrededor de un punto singular pueden responderse estudiando el sistema lineal asociado en las proximidades del origen, es decir,

$$y' = Df(\bar{x})y.$$

Definición 1.27. Dado el sistema no lineal (1.4), y \bar{x} un punto de equilibrio. El sistema lineal autónomo:

$$y' = Df(\bar{x})y, \quad Df(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)_{i,j=1,2}$$

se denomina linealización, aproximación lineal o primera aproximación de $x' = f(x)$ en \bar{x} .

Definición 1.28. Un punto singular de $x' = f(x)$ se denomina **hiperbólico** si todo autovalor λ de la matriz jacobiana $Df(\bar{x}) \neq 0$ tiene parte real distinta de cero, $Re(\lambda) \neq 0$.

El análisis de sistemas no lineales en torno a un punto singular puede simplificarse considerablemente cuando el punto de equilibrio \bar{x} es hiperbólico, pues el comportamiento cualitativo del sistema no lineal en un entorno de \bar{x} , puede determinarse a partir del sistema linealizado. En el caso de los puntos no hiperbólicos $Re(\lambda) = 0$ la dinámica depende de los términos de orden superior del desarrollo de Taylor que fueron eliminados en esta explicación. Son precisamente los puntos no hiperbólicos aquellos en los que se centra la teoría de las bifurcaciones y que tendrán mucha más relevancia en los siguientes capítulos. Se explica ahora como determinar la estabilidad del sistema no lineal en función de los autovalores de la matriz Jacobiana:

Teorema 1.29. Sea \bar{x} un punto de equilibrio de (1.4) y sea $Df(\bar{x})$ la matriz jacobiana de f en dicho punto, se tiene:

1. Si todos los autovalores de la matriz $Df(\bar{x})$ tienen parte real negativa, entonces \bar{x} es asintóticamente estable.
2. Si existe un autovalor de $Df(\bar{x})$ con parte real positiva, entonces \bar{x} es inestable.
3. Si alguno de los autovalores de $Df(\bar{x})$ tiene parte real cero (\bar{x} no hiperbólico), entonces el mero estudio de los autovalores no permite sacar conclusiones acerca de la estabilidad del punto \bar{x} .

Además, también es posible establecer una relación entre las órbitas del sistema no lineal y su sistema lineal asociado mediante el siguiente teorema. Se considera el sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x),$$

y el lineal asociado

$$\dot{x} = Ax, \quad A = Df(x_0).$$

Teorema 1.30. (De Grobman-Hartman) Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(D)$ una cierta función y ϕ el flujo del sistema de EDO $x' = f(x)$. Si $x_0 \in D$ es un punto singular hiperbólico, entonces existen un par de entornos abiertos $U \subset D$, de x_0 , y V , del origen; un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ y un intervalo real I que contiene al cero tal que para todo $(t, x) \in I \times U$ se cumple que:

$$H \circ \phi_t(x) = e^{At}H(x).$$

Es decir, H lleva las trayectorias del sistema no lineal a las trayectorias del lineal cerca del origen.

La idea principal del Teorema 1.30 es que en un entorno de una singularidad hiperbólica, el retrato de fases del sistema no lineal mantiene la misma configuración que el de su sistema lineal asociado alrededor del origen.

Retratos de fases de sistemas lineales planos

En este apartado se presenta un breve resumen para recordar como determinar el retrato de fases en el caso lineal bidimensional. Atendiendo al Teorema de Gobman-Hartman, dicho estudio proporciona una base clara para interpretar el comportamiento dinámico de sistemas no lineales en las proximidades de un punto singular hiperbólico.

Se parte del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \iff x' = Ax, \quad (1.5)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2},$$

es la matriz de coeficientes del sistema.

El primer paso para obtener el diagrama de fases del sistema consiste en hallar los autovalores λ_1, λ_2 de la matriz A , o equivalentemente, las raíces de su ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Las siguientes tablas muestran los diferentes retratos de fases en el origen en función de los autovalores. Los términos de las segundas columnas reciben tales nombres en base a sus diagramas de fases. Un poco más adelante se encuentran las representaciones de aquellos que serán realmente útiles en el siguiente capítulo.

Autovalores reales	Retrato de fases	Estabilidad
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Nodo repulsor	Inestable
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Nodo atractor	Asintóticamente estable
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Punto de silla	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0, A$ diagonalizable	Nodo repulsor de transición	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, A$ diagonalizable	Nodo atractor de transición	Asintóticamente estable
$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda > 0, A$ no diagonalizable	Nodo repulsor impropio	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda < 0, A$ no diagonalizable	Nodo atractor impropio	Asintóticamente estable

Cuadro 1.1: Retratos de fases con autovalores reales.

Autovalores complejos	Retrato de fases	Estabilidad
$\lambda = a \pm bi, a > 0$	Foco repulsor	Inestable
$\lambda = a \pm bi, a < 0$	Foco atractor	Asintóticamente estable
$\lambda = \pm bi, a = 0$	Centro	Estable, pero no asintóticamente

Cuadro 1.2: Retratos de fases con autovalores complejos.

De manera general, en lo referido a la conservación del carácter de un punto singular, se verifica que:

- Los nodos, focos y puntos de silla (todos ellos hiperbólicos) se conservan.
- Sin embargo, los centros no se conservan necesariamente, debido a la influencia de la parte no lineal de la función.

Son los centros y los focos los que tendrán mayor relevancia a lo largo del trabajo, por lo que a continuación se representan de forma muy sencilla y en las proximidades del origen.

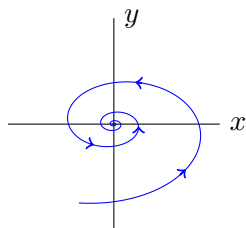


Figura 1.3: Foco atractor.

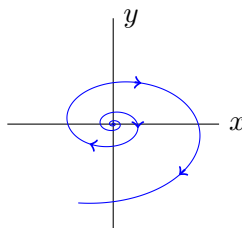


Figura 1.4: Foco repulsor.

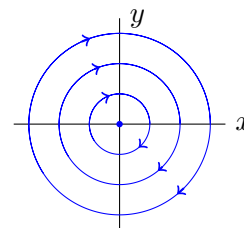


Figura 1.5: Centro.

Capítulo 2

Bifurcaciones

De ahora en adelante, se considerarán sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas con dependencia paramétrica, es decir,

$$x' = f(x, \mu), \quad (2.1)$$

con $f \in C^1(D)$, D abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Ya se ha mencionado anteriormente que para este tipo de sistemas con dependencia paramétrica lo que interesa es estudiar cuando pequeñas variaciones en los parámetros producen cambios significativos en la estructura del retrato de fases del sistema, que es la esencia de la teoría de las bifurcaciones. En este capítulo se profundizará en dicha teoría para los casos $n = 1, 2$ (ecuaciones escalares y sistemas planos) y $p = 1$ (un único parámetro). Se ha seguido principalmente el enfoque desarrollado en [Wig03], aunque también se han consultado otras referencias como el [Per01] y [FVV03].

Este capítulo se centrará principalmente en el estudio local de las bifurcaciones cerca de puntos de equilibrio no hiperbólicos. Para comenzar, se partirá del caso unidimensional para introducir los conceptos más básicos a través de ejemplos sencillos. Posteriormente, se desarrollarán los conceptos teóricos necesarios para profundizar en la teoría de las bifurcaciones y, para finalizar, se estudiarán detalladamente los ejemplos más típicos de bifurcaciones en dimensiones uno y dos.

2.1. Introducción a las bifurcaciones

Se consideran a continuación cuatro ejemplos de ecuaciones diferenciales escalares que dependen de un parámetro para introducir la idea de estabilidad estructural, así como el concepto de bifurcación y el cambio de comportamiento cualitativo que se produce en las tres bifurcaciones posibles para este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 2.1. Se considera la ecuación:

$$x' = x - \mu, \quad x, \mu \in \mathbb{R}.$$

Los puntos singulares son los de la curva $x = \mu$ y todos son hiperbólicos ya que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analizando el signo de f según los valores de μ se obtiene el siguiente diagrama de bifurcación del sistema que se ilustra en la Figura 2.1.

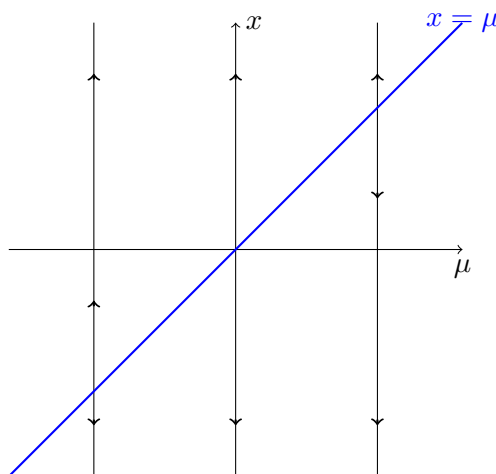


Figura 2.1: Diagrama de bifurcación del sistema $x' = x - \mu$, $x, \mu \in \mathbb{R}$ que muestra un ejemplo de sistema estructuralmente estable. Para cada valor de μ fijado se representa en vertical el retrato de fases de la ecuación unidimensional correspondiente. Los puntos de equilibrio se encuentran sobre la recta $x = \mu$ representada en azul.

Estos diagramas de bifurcación de ecuaciones escalares uniparamétricas son una representación gráfica que almacena información sobre cómo varían los puntos singulares y su estabilidad en función del parámetro μ . Para construirlos, para cada valor de μ , se traza una línea vertical en el plano $(, x)$ en la que se representa el retrato de fases de la ecuación diferencial unidimensional correspondiente como se explicaba en Capítulo de Preliminares, es decir, dibujando los puntos singulares y la dirección del campo.

Se puede observar que la estructura del retrato de fases no varía en función del valor que tome el parámetro μ . En los tres casos, $\mu < 0, \mu = 0, \mu > 0$, la situación es la misma: existe un único punto singular y es repulsor. Que sea repulsor también se puede comprobar mediante la Proposición 1.24, pues $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = 1 > 0$.

Estamos ante un ejemplo de sistema **estructuralmente estable**, pues el comportamiento cualitativo del sistema no cambia al variar ligeramente el parámetro μ .

La estabilidad estructural se debe a que los puntos singulares son hiperbólicos. Como se demostra-

rá más adelante, los puntos singulares hiperbólicos son estructuralmente estables y no permiten la alteración cualitativa del sistema frente a pequeñas perturbaciones de los parámetros. Esto es lo que ocurre en el anterior ejemplo.

Son precisamente los puntos singulares no hiperbólicos aquellos en cuyas proximidades ocurren las bifurcaciones. Se presentan a continuación una serie de ejemplos donde aparecerán tres configuraciones de retratos de fases diferentes.

Ejemplo 2.2. Dada la ecuación

$$x' = \mu - x^2, \text{ con } x, \mu \in \mathbb{R},$$

los puntos singulares son los de la curva $\mu = x^2$, en concreto, $x = \pm\sqrt{\mu}$. Entonces:

- Para $\mu < 0$ no hay puntos singulares en \mathbb{R} .
- Para $\mu = 0$ hay un único punto singular en $x_0 = 0$.
- Para $\mu > 0$ existen dos puntos singulares: $x_1 = +\sqrt{\mu}$ y $x_2 = -\sqrt{\mu}$.

Para $\mu > 0$, se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2 \pm \sqrt{\mu}$, por tanto, se tiene que todos los puntos singulares son hiperbólicos. En cambio, cuando $\mu = 0$ el único punto singular que existe, $x = 0$, no es hiperbólico, y es en un entorno de este punto donde se produce la bifurcación. Analizando el signo de f para cada valor de μ se obtiene el diagrama de bifurcación representado en la Figura 2.2.

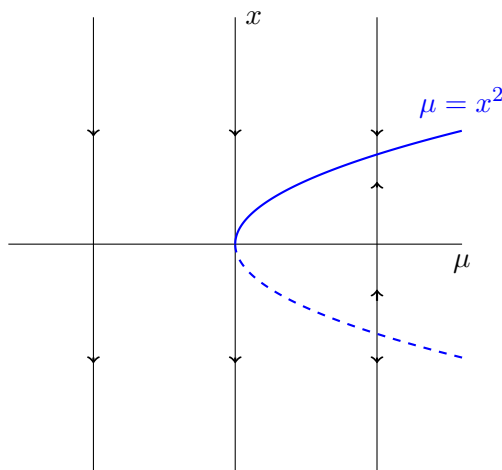


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación del sistema $x' = \mu - x^2$, $x, \mu \in \mathbb{R}$, que muestra una bifurcación silla-nodo o tangente. Para cada valor de μ fijado se representa en vertical el retrato de fases de la ecuación unidimensional correspondiente. Los puntos de equilibrio se encuentran sobre la curva $\mu = x^2$ representada en azul, distinguiendo su estabilidad mediante el trazo continuo (atractor) y discontinuo (repulsor).

El valor $\mu = 0$ y el punto $(x, \mu) = (0, 0)$ se conocen respectivamente como valor y punto de bifurcación. Este es uno de los ejemplos más simples de bifurcación, en concreto, la bifurcación **silla-nodo** o **tangente**, que se caracteriza por la aparición de dos puntos singulares (atractor y repulsor) al variar el parámetro μ , en este caso, cuando μ aumenta desde valores negativos a positivos pasando por $\mu = 0$.

La estabilidad de los puntos de equilibrio en el caso $\mu > 0$ también se puede estudiar mediante la Proposición 1.24. Para un valor fijado $\mu > 0$:

- $f'(\sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu} < 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{\mu}$ es atractor.
- $f'(-\sqrt{\mu}) = -2 - \sqrt{\mu} > 0 \rightarrow x_2 = -\sqrt{\mu}$ es repulsor.

Ejemplo 2.3. Se considera la ecuación

$$x' = \mu x - x^2, \text{ con } x, \mu \in \mathbb{R}.$$

El conjunto de puntos singulares viene dado por los puntos que satisfacen la ecuación $x' = x(\mu - x) = 0$, es decir, las curvas $x = 0$ y $x = \mu$.

Estudiando el signo de la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = \mu - 2x$ en las rectas de singularidades $x = 0$ y $x = \mu$ se llega a que el único punto fijo no hiperbólico es $x = 0$ cuando $\mu = 0$. Analizando el signo de f para cada valor de μ se obtiene el diagrama de bifurcación representado en la Figura 2.3, en el que se puede ver que se produce una bifurcación en el punto no hiperbólico $(x, \mu) = (0, 0)$ que se puede describir como sigue:

- Para los valores $\mu < 0$ hay un punto singular atractor en $x = 0$ y un punto singular repulsor en $x = \mu$.
- Al cruzar el valor $\mu = 0$, para los valores positivos $\mu > 0$ del parámetro, se conservan dos puntos de equilibrio pero cambiando su estabilidad, $x = 0$ es repulsor y $x = \mu$ es atractor.

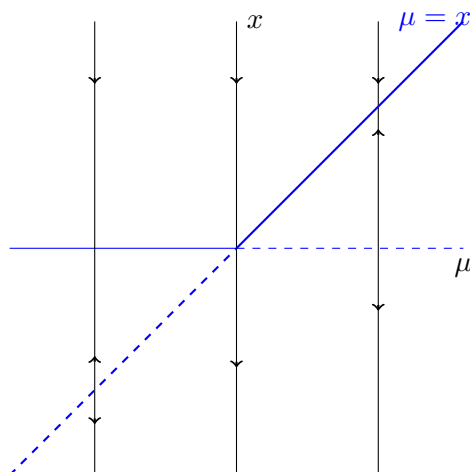


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación del sistema $x' = \mu x - x^2$, $x, \mu \in \mathbb{R}$, que muestra una bifurcación transcritical. Para cada valor de μ fijado se representa en vertical el retrato de fases de la ecuación unidimensional correspondiente. Los puntos de equilibrio se encuentran sobre las curvas $x = 0$ y $\mu = x$ representadas en azul, distinguiendo su estabilidad mediante el trazo continuo (atractor) y discontinuo (repulsor), lo que permite observar el intercambio de estabilidad cuando aumenta el parámetro a través de $\mu = 0$.

De nuevo, también se puede utilizar la Proposición 1.24 para estudiar la estabilidad de los puntos singulares al fijar el parámetro. Como $f'(x) = \mu - 2x$, se tiene:

- Al evaluar la derivada en los puntos de la curva $x = 0$, $f'(0) = \mu$. Por tanto, el punto $(0, 0)$ será atractor para valores negativos de μ y repulsor para valores positivos.
- Sin embargo, en la curva $x = \mu$, $f'(\mu) = \mu - 2\mu = -\mu$, por lo que los puntos (μ, μ) serán repulsores para valores negativos de μ y atractores para valores positivos.

Este tipo de bifurcación, que se caracteriza por la presencia de dos curvas de puntos de equilibrio a ambos lados del valor de bifurcación que intercambian su estabilidad, recibe el nombre de bifurcación **transcritical**.

Ejemplo 2.4. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = \mu x - x^3, \text{ con } x, \mu \in \mathbb{R}.$$

Los puntos singulares son los de las curvas $x = 0$ y $\mu = x^2$. Analizando el signo de f para cada valor de μ se obtiene el diagrama de bifurcación representado en la Figura 2.4, en el que podemos ver que se produce una bifurcación en el punto no hiperbólico $(x, \mu) = (0, 0)$. Esta es conocida como bifurcación **tridente** y se puede describir como sigue:

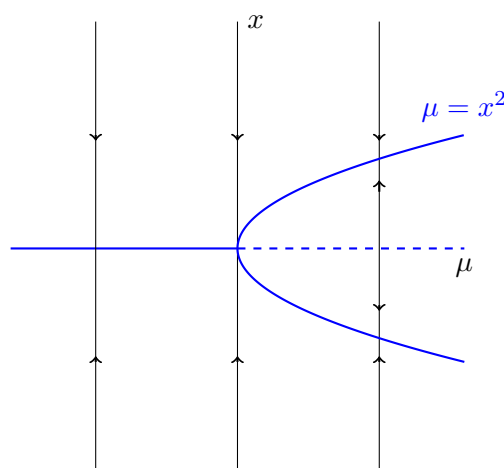


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación del sistema $x' = \mu x - x^3$, $x, \mu \in \mathbb{R}$, que muestra una bifurcación tridente. Para cada valor de μ fijado se representa en vertical el retrato de fases de la ecuación unidimensional correspondiente. Los puntos de equilibrio se encuentran sobre las curvas $x = 0$ y $\mu = x^2$ representadas en azul, distinguiendo su estabilidad mediante el trazo continuo (atractor) y discontinuo (repulsor), lo que permite observar la creación de nuevos equilibrios y el simultáneo intercambio de estabilidad cuando aumenta el parámetro a través de $\mu = 0$.

- Para $\mu < 0$ hay un único punto singular en $x = 0$ que es atractor.
- En $\mu = 0$ la situación continúa siendo la misma. Es a partir de este punto cuando aparecen las dos nuevas ramas bifurcadas formadas por los puntos singulares $\sqrt{\mu}$ y $-\sqrt{\mu}$. En este proceso, para los valores $\mu > 0$ la singularidad $x = 0$ se vuelve repulsora, mientras que los dos nuevos puntos singulares son atractores.

De nuevo, la estabilidad de los puntos de equilibrio se puede estudiar haciendo uso de la Proposición (1.24) mediante el signo de la derivada. En la curva $x = 0$, $f'(0) = \mu$, por lo que el punto $(0,0)$ es atractor para $\mu < 0$ y repulsor para $\mu > 0$. En la curva $\mu = x^2$, $f'(\pm\sqrt{\mu}) = -2\mu$, y como $\mu > 0$, ambos son atractores.

Nota 2.5. Las expresiones $x' = \mu \pm x^2$, $x' = \mu x \pm x^2$ y $x' = \mu x \pm x^3$ recogen las características esenciales de las bifurcaciones que pueden ocurrir en las ecuaciones escalares y ayudan a entender que ocurre en puntos no hiperbólicos de sistemas más complejos. Todo esto tiene detrás la teoría de las formas normales que busca estudiar el comportamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales en el entorno de un punto de interés obteniendo una expresión lo más sencilla posible pero que conserve la dinámica. En el caso de las bifurcaciones silla-nodo, transcítica y tridente, veremos que esas expresiones pueden ser vistas como su forma normal.

En los tres ejemplos anteriores se ha trabajado con el signo negativo delante del término x . El caso positivo es completamente análogo, diferenciándose en el lado del valor $\mu = 0$ donde se

encuentran las curvas de puntos singulares y en la asignación de la estabilidad.

2.2. Formalización de conceptos

En este apartado se formalizarán todos los conceptos que han ido surgiendo entorno a la idea de bifurcación.

Para entender qué es una bifurcación primero es necesario conocer el concepto de estabilidad estructural. Como se veía en el Ejemplo 2.1, se basa en la idea de que la estructura de el retrato de fases del sistema no cambia bajo posibles perturbaciones del parámetro. Veamos como formalizar este concepto para el sistema (2.1).

Definición 2.6. Dos sistemas de la forma,

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$y' = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

Se dice que son **topológicamente equivalentes** si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(\phi_f(t, x)) = \phi_g(t, y)$, donde ϕ_f, ϕ_g denotan el flujo de la ecuación diferencial correspondiente, es decir, lleva las órbitas del primer sistema en las órbitas del segundo sistema.

Dado que este estudio se centra en la teoría local de las bifurcaciones, resulta útil adaptar esta definición a nivel local. De esta manera, se dice que los sistemas anteriores son **localmente topológicamente equivalentes** cerca de los puntos x_0 e y_0 si existen U_{x_0}, V_{y_0} entornos de x_0, y_0 y un homeomorfismo $h : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$ tales que para algún $h > 0, h(\phi_f(t, x)) = \phi_g(t, y)$ para todo $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ (siendo t_0 tal que $\phi_f(t_0, x_0) = x_0, \phi_g(t_0, y_0) = y_0$).

Definición 2.7. Se dice que el sistema (2.1) es **estructuralmente estable** para $\mu = \mu_0$ si existe un $\delta > 0$ tal que $x' = f(x, \mu)$ es topológicamente equivalente a $x' = f(x, \mu_0)$ para todo μ con $|\mu - \mu_0| < \delta$.

Igualmente, se dice que es localmente estructuralmente estable si se verifica la condición anterior pidiendo que los sistemas sean localmente topológicamente equivalentes.

Definición 2.8. Se dice que el sistema (2.1) tiene una **bifurcación** para el valor del parámetro $\mu = \mu_0$ si el sistema no es localmente estructuralmente estable para $\mu = \mu_0$, o equivalentemente, si existen valores de μ arbitrariamente próximos a μ_0 para los cuales $x' = f(x, \mu)$ no es localmente topológicamente equivalente a $x' = f(x, \mu_0)$.

El valor $\mu = \mu_0$ y el punto $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$ para los que ocurre una bifurcación se denominan respectivamente **valor y punto de bifurcación**.

Concluimos esta sección probando un resultado que da luz a algo que hemos afirmado varias veces a lo largo del trabajo, que no es más que la necesidad de tener un punto de equilibrio no hiperbólico para que se produzca una bifurcación. Sin embargo, veremos con un ejemplo que esta no es una condición suficiente, por lo que necesitaremos condiciones extra sobre f para determinar nuestras bifurcaciones.

Teorema 2.9. *Sea (x_0, μ_0) una singularidad de (2.1). Si dicha singularidad es hiperbólica, entonces en un entorno de (x_0, μ_0) el sistema conserva un punto de equilibrio hiperbólico que no modifica su estabilidad.*

Demostración. Se considera el sistema (2.1), donde f es una función de clase 1 definida en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Dado que en (x_0, μ_0) hay una singularidad y es hiperbólica, se verifican las siguientes condiciones: $f(x_0, \mu_0) = 0$ y todos los autovalores de $D_x f(x_0, \mu_0)$ tienen parte real no negativa. Entonces se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita, por lo que existe una función $x(\mu)$, definida en un entorno U_{μ_0} de μ_0 tal que $x \in \mathcal{C}^1(U_{\mu_0})$ y verificando:

$$f(x(\mu), \mu) = 0, \quad x(\mu_0) = x_0.$$

De todo esto podemos deducir la continuidad de los autovalores de la matriz $D_x f(x(\mu), \mu)$, por lo que para valores de μ suficientemente cercanos a μ_0 , tenemos que los autovalores conservan el signo. Por lo tanto, para un μ próximo a μ_0 , por el Teorema 1.30 tenemos un punto singular hiperbólico aislado que mantiene la estabilidad de (x_0, μ_0) . \square

Ejemplo 2.10. En la ecuación diferencial

$$x' = \mu - x^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R},$$

los puntos de equilibrio está sobre la curva $\mu = x^3$ (o equivalentemente sobre $x = \sqrt[3]{\mu}$). Estudiando el signo de f para cada valor de μ , vemos que el punto de equilibrio es siempre atractor. Por lo que a pesar de tener un punto de equilibrio no hiperbólico para $\mu = 0$, pues $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = -3x^2$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, vemos que no se produce una bifurcación.

Es importante destacar que en este ejemplo, a pesar de que exista una singularidad no hiperbólica en el punto $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$, no ocurre una bifurcación. Por tanto, que un punto singular sea no hiperbólico es una condición necesaria, pero no suficiente, para que exista una bifurcación en ese punto. Por eso es interesante determinar qué condiciones sobre $f(x, \mu)$ permiten asegurar que ocurran cada una de las bifurcaciones anteriores.

2.3. Bifurcaciones en ecuaciones unidimensionales

En este apartado se establecerán las condiciones para caracterizar los tres tipos de bifurcaciones vistos para ecuaciones escalares uniparamétricas alrededor de la singularidad hiperbólica

$(x_0, \mu_0) = (0, 0)$, pues son representativas de las bifurcaciones que podemos encontrar en este tipo de ecuaciones.

En los ejemplos tratados, el análisis resulta sencillo porque las ecuaciones son muy simples, pero en casos de mayor complejidad, resulta mucho más práctico verificar si una ecuación diferencial satisface una serie de condiciones que garantizan la existencia de bifurcaciones.

2.3.1. Bifurcación Silla-Nodo

La bifurcación silla-nodo, también conocida como bifurcación tangente o de pliegue, ocurre cuando en una ecuación unidimensional aparecen (o desaparecen) dos singularidades, una estable y otra inestable, al variar el parámetro μ .

Los términos aparecer y desaparecer tienen que ver con como consideramos la variación del parámetro, por ejemplo, en la ecuación $x' = \mu - x^2$ del Ejemplo ?? si aumentamos el valor de μ pasando por $\mu_0 = 0$ los puntos de equilibrio aparecen, pero si lo disminuimos, entonces desaparecen. Además, en otras ecuaciones como $x' = \mu + x^2$ pueden desaparecer los puntos de equilibrio cuando aumenta μ pasando por $\mu = 0$, puesto que este caso las singularidades dadas por $\mu = \pm\sqrt{-\mu}$ existen para $\mu < 0$.

Caracterización

El objetivo de este apartado es determinar las condiciones concretas que garantizan la existencia de una bifurcación silla-nodo en el caso general. Para conseguirlo se parte del Ejemplo 2.2 con la ecuación:

$$x' = \mu - x^2, \text{ con } x, \mu \in \mathbb{R}$$

Recordemos que en este caso existe una única curva de puntos singulares que se encuentra completamente a un lado de $\mu = 0$. Ahora se trata de ver que condiciones le tenemos que pedir a un sistema general de la forma

$$x' = f(x, \mu), \quad (x, \mu) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

tal que $f \in \mathcal{C}^1(D)$ para tener el mismo comportamiento. Empecemos por considerar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio no hiperbólico.

1. Existe en $(0, 0)$ una singularidad: $f(0, 0) = 0$.
2. Dicha singularidad es no hiperbólica: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Si a mayores suponemos que $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$, se cumplen las condiciones del Teorema de la implícita (Teorema 1.1) y este garantiza que existe una única función $\mu = \mu(x)$, en un entorno de $x = 0$, de la misma regularidad que f verificando $\mu(0) = 0$ y $f(x, \mu(x)) = 0$.

Es inmediato comprobar que en el Ejemplo 2.2 se cumplen las condiciones sobre la función y la curva: $(0,0)$ es punto de equilibrio hiperbólico y $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0$. Además, la curva viene dada por $\mu(x) = x^2$ que mantiene la regularidad de f por ser ambas expresiones polinómicas.

Ahora, tenemos que pedir dos condiciones adicionales a la curva:

1. $\frac{\partial \mu}{\partial x}(0) = 0$, para que sea tangente a $\mu = 0$ en $x = 0$,
2. $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(0) \neq 0$, para que la curva se encuentre completamente a un lado de $\mu = 0$.

Y llegados a este punto, tendremos que derivar implícitamente para expresar estas condiciones mediante la función f . Por un lado,

$$\frac{df}{dx}(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x)$$

evaluando las derivadas en el punto singular $(0,0)$,

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)} = 0.$$

Si volvemos a derivar en la primera expresión, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2}(x, \mu(x)) = 0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x, \mu(x)) \left(\frac{d\mu}{dx}(x) \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d^2 \mu}{dx^2}(x) \end{aligned}$$

evaluando las derivadas en el $(0,0)$:

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)} \neq 0.$$

Con todo esto se puede concluir que la ecuación escalar considerada tendrá una bifurcación silla-nodo en el punto $(0,0)$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. $f(0,0) = 0$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
3. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$

$$4. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0.$$

Bajo dichas condiciones la dinámica del sistema general alrededor del punto $(x, \mu) = (0, 0)$ es la misma que la del Ejemplo 2.2 y su caso análogo. Veremos a continuación que la ecuación

$$x' = \mu \pm x^2, \quad \text{con } \mu, x \in \mathbb{R}.$$

puede ser vista como la forma normal de la bifurcación silla-nodo cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$.

Nota 2.11. La expresión

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)} \neq 0.$$

indica además en qué lado del valor $\mu = 0$ se encuentra la curva de puntos fijos:

- $\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) < 0$: la curva estará en el lado izquierdo de $\mu = 0$ y se denomina subcrítica (antes del valor crítico del parámetro). Se corresponde con la "forma normal" $x' = \mu + x^2$.
- $\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) > 0$: la curva estará en el lado derecho de $\mu = 0$ y se denomina supercrítica (más allá del valor crítico del parámetro). Se corresponde con la "forma normal" $x' = \mu - x^2$.

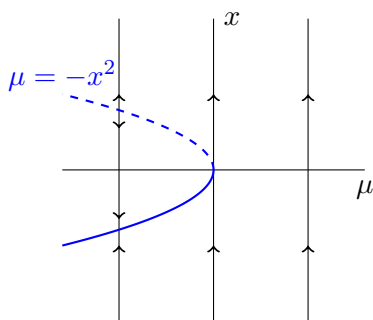


Figura 2.5: Silla-nodo subcrítica

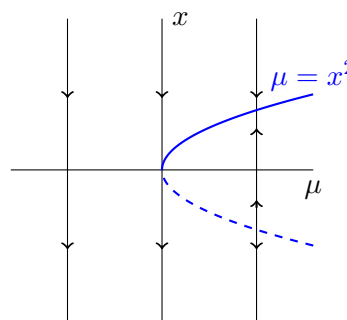


Figura 2.6: Silla-nodo supercrítica

Forma normal de la bifurcación silla-nodo

Antes se comentaba que la ecuación utilizada como base para el desarrollo previo,

$$\dot{x} = \mu \pm x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

podía ser vista como "la forma normal de la bifurcación silla-nodo". Sin embargo, esta ecuación no es estrictamente la forma normal, sino otra ecuación que se comporta cualitativamente igual

cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$. De todas formas, es posible calcular la forma normal de este tipo de bifurcación a partir de ecuación genérica $x' = f(x, \mu)$, con $f \in \mathcal{C}^2(D)$, siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y llegar a la expresión anterior.

Para un $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fijado, el primer paso es realizar el desarrollo de Taylor de orden dos para $f(x, \mu) \equiv f_\mu(x)$ en torno a $x = 0$:

$$f(x, \mu) \equiv f_\mu(x) = f_\mu(0) + f'_\mu(0)x + \frac{f''_\mu(0)}{2}x^2 + O(|x|^3), \quad (2.3)$$

donde todos los coeficientes dependen del parámetro μ . Denotando $a(\mu) = f_\mu(0)$, $b(\mu) = f'_\mu(0)$, $c(\mu) = f''_\mu(0)/2$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$f(x, \mu) = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 + O(|x|^3), \quad (2.4)$$

que es la forma normal para la bifurcación silla-nodo. Se va a trabajar sobre la ecuación (2.4) para obtener una expresión más sencilla que conserve el comportamiento cualitativo de la forma normal cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$.

El siguiente paso para llegar a dicha expresión es realizar el desarrollo de Taylor de los coeficientes anteriores en torno a $\mu = 0$ hasta el orden correspondiente para llegar a (2.2), es decir:

$$a(\mu) = a(0) + a'(0)\mu + O(|\mu|^2),$$

$$b(\mu) = b(0) + O(|\mu|),$$

$$c(\mu) = c(0) + O(|\mu|),$$

y sustituyendo en (2.4):

$$f(x, \mu) = a(0) + a'(0)\mu + b(0)x + c(0)x^2 + O(\mu^2, |\mu||x|, |\mu|x^2).$$

Ahora, teniendo en cuenta las condiciones que caracterizan a las bifurcaciones silla-nodo:

$$f(0, 0) = a(0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = b(0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = a'(0) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = c(0) \neq 0,$$

tomando $a'(0) = a \neq 0$ y $c(0) = b \neq 0$ se llega a la siguiente ecuación que conserva la dinámica cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$:

$$\dot{x} = a\mu + bx^2 + O(\mu^2, |\mu||x|, |\mu|x^2), \quad x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Se considera ahora la forma truncada de la ecuación (2.5) que se obtiene al eliminar los términos de orden superior:

$$\dot{x} = a\mu + bx^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Al tomar (x, μ) suficientemente pequeños, próximos a $(0, 0)$, los términos de orden superior pueden hacerse mucho más pequeños que los que coinciden con la forma truncada, por lo que pueden considerarse nulos. Por tanto, en un entorno de $(x, \mu) = (0, 0)$, estudiar el comportamiento cualitativo de la ecuación (2.5) es equivalente a estudiar el comportamiento de su forma truncada (2.6). Por último, para simplificar más la ecuación (2.6), se realiza el cambio de variable $y = \frac{x}{a}$, $a \neq 0$:

$$\dot{y} = \frac{1}{a}\dot{x} = \frac{1}{a}(a\mu + ba^2y^2) = \mu + bay^2, \quad (2.7)$$

tomando $c = ba \neq 0$:

$$\dot{y} = \mu + cy^2 \quad (2.8)$$

Por último, con razonamientos similares a los del Ejemplo 2.2, se ve fácilmente que el diagrama es el mismo para todo $c < 0$ y para todo $c > 0$. Por tanto, se pueden tomar como representantes $c = -1$ y $c = 1$ y así llegar a la expresión (2.2) que se comentaba al principio.

2.3.2. Bifurcación Transcrítica

La bifurcación transcritical se caracteriza por la existencia de dos curvas de puntos singulares que intercambian su estabilidad al pasar por el punto de bifurcación. La diferencia más significativa con el caso anterior es que ahora nos encontramos con más de una curva de puntos singulares.

Caracterización

Procediendo de la misma manera que con la bifurcación silla-nodo, se va a analizar el Ejemplo 2.3, considerando la ecuación

$$x' = \mu x - x^2, \quad \text{con } x, \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

para determinar las condiciones que garantizan la existencia de una bifurcación transcritical. Aquí existen dos curvas de puntos fijos, $x = 0$ y $x = \mu$, que al pasar por $(x, \mu) = (0, 0)$ y que intercambian su estabilidad. Ahora se trata de ver que condiciones le tenemos que pedir a un sistema general de la forma

$$x' = f(x, \mu), \quad (x, \mu) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

tal que $f \in \mathcal{C}^2(D)$ para tener el mismo comportamiento. Empecemos por considerar:

1. Existe en $(0, 0)$ una singularidad: $f(0, 0) = 0$.

2. Dicha singularidad es no hiperbólica: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
3. Las dos curvas existen a ambos lados de $\mu = 0$: $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$.

Es inmediato verificar que el Ejemplo 2.3 verifica estas condiciones. La última de ellas es la clave por la que no se puede proceder como en el caso anterior, pues no se puede aplicar el teorema de la función implícita.

En las bifurcaciones que parten de la rama trivial $x = 0$ de puntos de equilibrio, se tiene que $f(0, \mu) = 0$ para cualquier valor de μ . Esto permite factorizar la función f como:

$$f(x, \mu) = xg(x, \mu) = 0,$$

donde se distinguen la rama trivial $x = 0$ y la curva $g(x, \mu) = 0$. La función g se define de la siguiente manera para asegurar que sea continua en todo su dominio, en particular en $x = 0$, y poder hacer uso a continuación del Teorema de la implícita:

$$g(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x, \mu)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se buscan condiciones sobre la función g que garanticen la existencia de una curva de puntos singulares pasando por $(0,0)$, distinta de $x = 0$ y única mediante el Teorema de la implícita. Para esto tenemos las dos siguientes condiciones por la definición de g y pedimos la última:

- $g \in \mathcal{C}^1(D)$.
- $g(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, por la condición de no hiperbolicidad.
- $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0$.

Bajo estas condiciones, por el Teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función $\mu = \mu(x)$, definida para un x suficientemente pequeño, que en particular verifica $\mu(0) = 0$ y $g(x, \mu(x)) = 0$. Es inmediato comprobar que el Ejemplo 2.3 cumple estas hipótesis. Se parte de $x' = xg(x, \mu) = x(\mu - x)$ y se tiene que: la regularidad de g es trivial por ser una función polinómica, en $(0,0)$ tiene valor cero y $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0$. Adicionalmente, la nueva curva de singularidades $\mu(x)$ debe verificar:

$$0 < \left| \frac{d\mu}{dx}(0) \right| < \infty.$$

Esta condición, que expresa que la pendiente de la curva sea finita y no cero, es necesaria para que exista una segunda curva de singularidades distinta de la trivial para valores positivos y negativos del parámetro. Ahora ya se puede proceder como en el caso silla-nodo, para obtener

esta expresión en función de las derivadas de f . Se empieza por aplicar la regla de la cadena sobre $g(x, \mu(x)) = 0$.

$$\frac{dg}{dx}(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial g}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x),$$

evaluando la expresión en el $(0, 0)$,

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0)} \neq 0.$$

Sin más que calcular las derivadas de g se llega a:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} \neq 0.$$

Donde tanto el numerador como el denominador deben ser distintos de cero.

Con todo esto se puede concluir que la ecuación escalar considerada tendrá una bifurcación transcítica en el punto $(0, 0)$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. $f(0, 0) = 0$,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$,
3. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$,
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$,
5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$.

Bajo dichas condiciones la dinámica del sistema general alrededor del punto $(x, \mu) = (0, 0)$ es la misma que la del Ejemplo 2.3 y su caso análogo. Veremos que la ecuación

$$x' = \mu x \pm x^2, x, \mu \in \mathbb{R}$$

se comporta cualitativamente igual que la forma normal de las bifurcaciones transcíticas cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$.

Nota 2.12. La expresión

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} \neq 0$$

indica además si la pendiente es positiva o negativa. En caso de que la expresión anterior sea positiva, se tiene que la recta no trivial es creciente, y en caso contrario, decreciente.

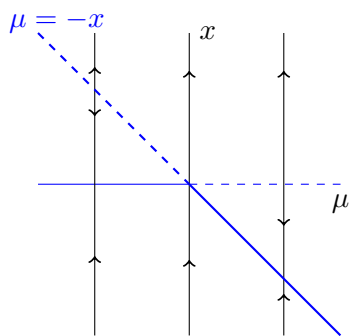


Figura 2.7: Transcritical decreciente.

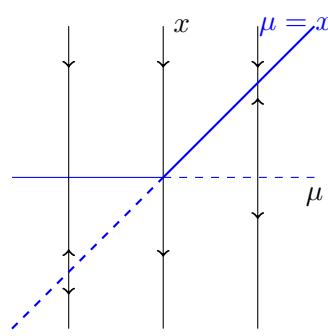


Figura 2.8: Transcritical creciente.

Forma normal de la bifurcación transcritical

De manera similar a la bifurcación silla-nodo, se va a trabajar sobre la ecuación genérica $x' = f(x, \mu)$, con $f \in \mathcal{C}^2(D)$, siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, para obtener la ecuación que utilizamos como "forma normal de la bifurcación transcritical",

$$\dot{x} = \mu x \pm x^2, x, \mu \in \mathbb{R}.$$

Para $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fijado, se realiza el desarrollo de Taylor de orden dos para $f(x, \mu) \equiv f_\mu(x)$ en torno a $x = 0$:

$$f(x, \mu) \equiv f_\mu(x) = f_\mu(0) + f'_\mu(0)x + \frac{f''_\mu(0)}{2}x^2 + O(|x|^3),$$

donde los coeficientes dependen de μ y se puede establecer la notación $a(\mu) = f_\mu(0)$, $b(\mu) = f'_\mu(0)$, $c(\mu) = f''_\mu(0)/2$:

$$f(x, \mu) = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 + O(|x|^3). \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es la forma normal de la bifurcación transcritical y sobre la que se va a trabajar para obtener una expresión mucho más sencilla que conserve el comportamiento cualitativo cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$. Desarrollamos los coeficientes en torno a $\mu = 0$, cada uno hasta el orden que corresponda:

$$a(\mu) = a(0) + a'(0)\mu + O(|\mu|^2),$$

$$b(\mu) = b(0) + b'(0)\mu + O(|\mu|^2),$$

$$c(\mu) = c(0) + O(|\mu|),$$

y sustituyendo en (2.10):

$$f(x, \mu) = a(0) + a'(0)\mu + b(0)x + b'(0)\mu x + c(0)x^2 + O(\mu^2, \mu^2|x|, |\mu|x^2). \quad (2.11)$$

y considerando las condiciones generales de la bifurcación transcritical:

$$f(0, 0) = a(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= b(0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) &= a'(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) &= b'(0) \neq 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 2c(0) \neq 0,\end{aligned}$$

tomando $b'(0) = a$, $c(0) = b$ y sustituyendo en (2.3.1) se llega a:

$$f(x, \mu) = a\mu x + bx^2 + O(\mu^2, \mu^2|x|, |\mu|x^2). \quad (2.12)$$

Descartando los términos de orden superior, se obtiene la ecuación truncada:

$$f(x, \mu) = a\mu x + bx^2. \quad (2.13)$$

Razonando de manera similar al caso silla-nodo, el comportamiento cualitativo de la ecuación completa (2.12) se corresponde en un entorno de $(0,0)$ con el de la ecuación truncada (2.13). Por último, utilizando el cambio de variable $y = \frac{x}{a^2}$, $a \neq 0$ se puede simplificar aún más la ecuación:

$$\dot{y} = \frac{1}{a^2}\dot{x} = \frac{1}{a^2}(a^2\mu y + ba^4y^2) = \mu y + ba^2y^2, \quad (2.14)$$

De nuevo, tomando $c = ba^2$ y siguiendo razonamientos análogos a los del Ejemplo 2.3, se puede ver el comportamiento del sistema es el mismo para $c < 0$ y $c > 0$, por lo que se pueden tomar $c = -1$ y $c = 1$ como representantes, obteniendo la expresión inicial:

$$\dot{y} = \mu y \pm y^2, y, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

2.3.3. Bifurcación Tridente

La bifurcación tridente ocurre en una ecuación diferencial unidimensional cuando al variar ligeramente un parámetro, una singularidad cambia su estabilidad y genera dos nuevas singularidades con estabilidad opuesta a ella.

Caracterización

El proceso de obtención de condiciones necesarias para garantizar la existencia de una bifurcación tridente es muy similar al caso transcrito. Se parte del Ejemplo 2.4 considerando la ecuación:

$$x' = \mu x - x^3, \text{ con } x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

En este caso existen dos curvas de puntos fijos pasando por $(0,0)$: $x = 0$ y $\mu = x^2$. La primera de ellas existe a ambos lados de $\mu = 0$ y su estabilidad cambia al cruzar este valor. La segunda existe a un único lado de $\mu = 0$ y sus puntos tienen el mismo tipo de estabilidad. Ahora se trata de ver que condiciones le tenemos que pedir a un sistema general de la forma

$$x' = f(x, \mu), \quad (x, \mu) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

tal que $f \in \mathcal{C}^2(D)$ para tener el mismo comportamiento. Empecemos por considerar:

1. Existe en $(0,0)$ una singularidad: $f(0,0) = 0$.
2. Dicha singularidad es no hiperbólica: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
3. Existen dos curvas de puntos singulares pasando por $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$.

Es inmediato verificar que el Ejemplo 2.4 verifica estas condiciones. La última de ellas vuelve a ser la clave por la que no se puede aplicar el teorema de la implícita y se vuelve a proceder como en el caso transcrito.

Se considera la factorización $f(x, \mu) = xg(x, \mu) = 0$, donde se distinguen la rama trivial $x = 0$ y la curva $g(x, \mu) = 0$. La función g se vuelve a definir de la siguiente manera para asegurar que sea continua en todo su dominio, en particular en $x = 0$, y poder hacer uso más adelante del Teorema de la implícita.

$$g(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x, \mu)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función cumple las dos primeras condiciones y a mayores se le pide la tercera:

- g es suficientemente regular en un entorno del origen.
- $g(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, por la condición de no hiperbolicidad.
- $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0$.

Bajo estas condiciones, el Teorema de la función implícita garantiza la existencia de una aplicación $\mu = \mu(x)$, definida para un x suficientemente pequeño, que en particular verifica $\mu(0) = 0$ y $g(x, \mu(x)) = 0$.

Es inmediato comprobar que el Ejemplo 2.4 cumple estas hipótesis. Se parte de $x' = xg(x, \mu) = x(\mu - x^2)$ y se tiene que: la regularidad de g es trivial por ser una función polinómica, en $(0,0)$ tiene valor cero y $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0$.

Para garantizar que la nueva curva de singularidades $\mu(x)$ no coincida con $x = 0$ y exista a un único lado de $\mu = 0$, se debe verificar:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0.$$

Aplicando la regla de la cadena sobre $g(x, \mu(x)) = 0$, se pueden obtener las condiciones anteriores en función de las derivadas de f . En primer lugar,

$$\frac{dg}{dx}(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial g}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x)$$

evaluando la expresión anterior en el origen,

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0)} = 0.$$

En segundo lugar,

$$\begin{aligned} \frac{d^2g}{dx^2}(x, \mu(x)) = 0 &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial x}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2}(x, \mu(x)) \left(\frac{d\mu}{dx}(x) \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d^2\mu}{dx^2}(x) \end{aligned}$$

y evaluando de nuevo la expresión anterior en el origen,

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0)} \neq 0.$$

Ahora, sin más que calcular las derivadas de g por su definición se llega a:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} = 0.$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} \neq 0$$

Con todo esto se puede concluir que la ecuación escalar considerada tendrá una bifurcación tridente en el punto $(0, 0)$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. $f(0, 0) = 0$,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$,
3. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$,
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$,

$$5. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0,$$

$$6. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0.$$

Bajo dichas condiciones la dinámica del sistema general alrededor del punto $(x, \mu) = (0, 0)$ es la misma que la del Ejemplo 2.4 y su caso análogo. Veremos que la ecuación

$$x' = \mu x \pm x^3$$

tiene un comportamiento similar en torno a $(x, \mu) = (0, 0)$ a la forma normal de las bifurcaciones tridente.

Nota 2.13. Análogamente a la Nota 2.11 del caso silla-nodo, si la siguiente expresión es negativa se trata de una bifurcación subcrítica y si es positiva supercrítica:

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0)} \neq 0.$$

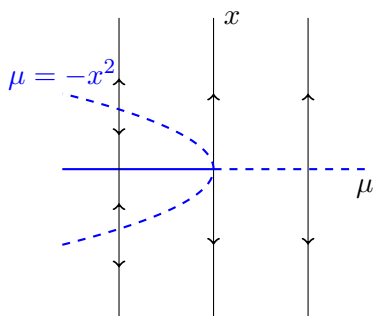


Figura 2.9: Pitchfork subcrítica.

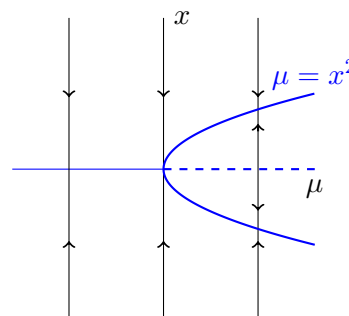


Figura 2.10: Pitchfork supercrítica.

Forma normal de la bifurcación tridente

Como en los dos casos anteriores, se va a obtener la ecuación que se utiliza como "forma normal de la bifurcación de tridente",

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3, x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Consideramos la ecuación genérica $x' = f(x, \mu)$, con $f \in \mathcal{C}^3(D)$, siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y para un $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fijado, el primer paso es realizar el desarrollo de Taylor de orden tres para $f(x, \mu)$ en torno a $x = 0$:

$$f(x, \mu) = f_\mu(0) + f'_\mu(0)x + \frac{f''_\mu(0)}{2}x^2 + \frac{f'''_\mu(0)}{6}x^3 + O(|x|^4), \quad (2.18)$$

denotando $a(\mu) = f_\mu(0)$, $b(\mu) = f'_\mu(0)$, $c(\mu) = f''_\mu(0)/2$, $d(\mu) = \frac{f'''_\mu(0)}{6}$ se obtiene:

$$f(x, \mu) = a(\mu) + b(\mu)x + c(\mu)x^2 + d(\mu)x^3 + O(|x|^4), \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) es la forma normal de la bifurcación tridente y sobre la que se va a trabajar para obtener una expresión mucho más sencilla que conserve el comportamiento cualitativo cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$. Ahora se realiza el desarrollo de Taylor de los coeficientes anteriores en torno a $\mu = 0$ hasta el orden correspondiente para llegar a (2.17), es decir:

$$a(\mu) = a(0) + a'(0)\mu + O(|\mu|^2),$$

$$b(\mu) = b(0) + b'(0)\mu + O(|\mu|^2),$$

$$c(\mu) = c(0) + O(|\mu|),$$

$$d(\mu) = d(0) + O(|\mu|),$$

y sustituyendo en (2.19):

$$f(x, \mu) = a(0) + a'(0)\mu + b(0)x + b'(0)\mu x + c(0)x^2 + d(0)x^3 + O(\mu^2, \mu^2|x|, |\mu|x^2, |x|^3). \quad (2.20)$$

Aplicando las condiciones que caracterizan las bifurcaciones tridente:

$$f(0, 0) = a(0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = b(0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = a'(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = c(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) = b'(0) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = d(0) \neq 0,$$

tomando $b'(0) = a \neq 0$ y $d(0) = b \neq 0$ se llega a la siguiente ecuación que conserva la dinámica cerca de $(x, \mu) = (0, 0)$:

$$\dot{x} = a\mu x + bx^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R} + O(\mu^2, \mu^2|x|, |\mu|x^2, |x|^3). \quad (2.21)$$

Se considera ahora la forma truncada de la ecuación (2.21) que se obtiene al eliminar los términos de orden superior:

$$\dot{x} = a\mu x + bx^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

y, como en los casos anteriores, el comportamiento cualitativo de la ecuación completa (2.21) es similar al de la ecuación truncada (2.22) en las proximidades de $(0, 0)$. Por último, para simplificar más la ecuación (2.22), se realiza el cambio de variable $y = \frac{x}{a^2}$, $a \neq 0$:

$$\dot{y} = \frac{1}{a^2} \dot{x} = \frac{1}{a^2} f(a^2 y, \mu) = \frac{1}{a^2} (a^2 \mu y + ba^3 y^3) = \mu y + bay^3, \quad (2.23)$$

tomando $c = ba \neq 0$:

$$\dot{y} = \mu y + cy^3. \quad (2.24)$$

Y como en los casos anteriores, siguiendo razonamientos similares a los del Ejemplo 2.4, se ve que el diagrama es el mismo para todo $c < 0$ y para todo $c > 0$. Por tanto, se pueden tomar como representantes $c = -1$ y $c = 1$ y así llegar a la expresión (2.17) del principio.

La siguiente tabla muestra un resumen de las condiciones para la existencia de los tres tipos de bifurcaciones anteriores junto con las expresiones que las representan. Es evidente que las tres deben cumplir las dos condiciones comunes de existencia de un punto fijo no hiperbólico en el origen: $f(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Tipo de bifurcación	Forma normal	Condiciones sobre f
Silla-nodo	$x' = \mu \pm x^2$	$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$.
Transcrítica	$x' = \mu x \pm x^2$	$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$
Tridente	$x' = \mu x \pm x^3$	$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$

Cuadro 2.1: Resumen bifurcaciones unidimensionales.

2.4. Bifurcaciones en sistemas: la bifurcación de Hopf.

Hasta ahora se han estudiado ejemplos de bifurcaciones en ecuaciones unidimensionales, donde el análisis se basaba en el número de puntos críticos y su estabilidad. Este apartado se centrará en las bifurcaciones que ocurren para sistemas de ecuaciones diferenciales y, en concreto, en el caso particular de la bifurcación de Hopf para $n = 2$. Los comportamientos que surgen al considerar dimensiones superiores son más complejos y suelen caracterizarse por la presencia de órbitas periódicas.

Como en el capítulo anterior, primero se presenta la idea a través de un ejemplo concreto para profundizar más adelante en el caso general.

Ejemplo 2.14. Se considera el sistema bidimensional:

$$\begin{cases} x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

con un punto singular en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ para cualquier valor del parámetro μ . Evaluando la matriz jacobiana del sistema en el punto crítico se llega a los autovalores:

$$|D_f(0, 0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 \\ 1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - (2\mu)\lambda + (\mu^2 + 1) = 0 \iff \lambda_{1,2} = \mu \pm i.$$

Se tienen dos autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ cuya parte real determina la estabilidad del punto singular $(0, 0)$ de la siguiente manera:

- $\mu < 0$: los dos autovalores tienen parte real negativa, $Re(\lambda_{1,2}) = \mu < 0$, por lo que el origen es asintóticamente estable. Además, como el punto singular es hiperbólico, por el Teorema 1.30 (Teorema de Grobman-Hartman) se conserva la configuración del sistema lineal de foco atractor en un entorno del origen.
- $\mu = 0$: la parte real es nula, por lo que la singularidad se vuelve no hiperbólica, y no se puede deducir nada estudiando el sistema linealizado.
- $\mu > 0$: los dos autovalores tienen parte real positiva, $Re(\lambda_{1,2}) = \mu > 0$, por lo que el origen es inestable. De nuevo, por el teorema 1.30 (Teorema de Grobman-Hartman), en un entorno del origen se mantiene la configuración de foco repulsor.

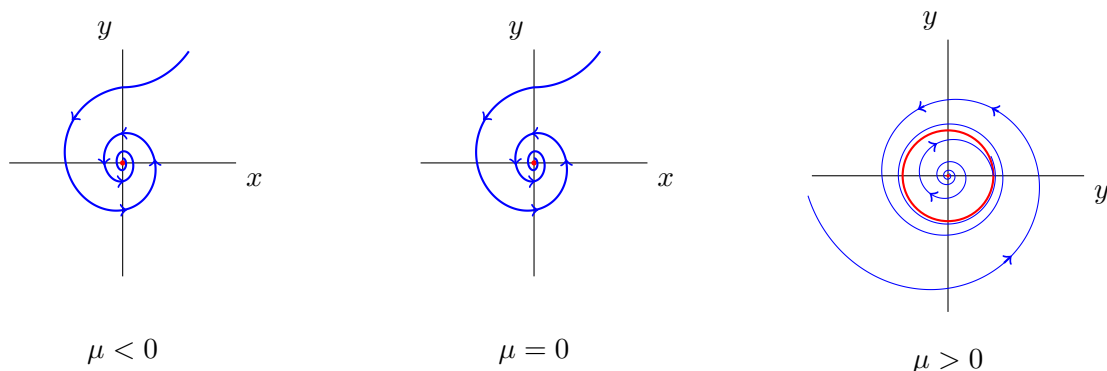
Al variar ligeramente el parámetro μ , el comportamiento cualitativo del sistema cambia. Por tanto se puede afirmar que el sistema tiene una bifurcación en el origen para el valor del parámetro $\mu = 0$. Pero en este caso se puede obtener mucha más información acerca del sistema realizando un cambio a coordenadas polares. Tomando $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, con $r > 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$, se obtiene el siguiente sistema equivalente que describe la evolución del radio r con el tiempo:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Según los valores de μ existen los siguientes comportamientos.

- $\mu < 0$: como r solo toma valores positivos, se tiene que $\mu - r^2 < 0$, y por tanto, $\dot{r} < 0$. Esto significa que r disminuye con el tiempo y tiende a cero. En este caso, el origen es un foco estable.

- $\mu = 0$: el origen continúa siendo un punto crítico atractor.
- $\mu > 0$: en un entorno del origen, si r toma valores suficientemente pequeños se tiene que $\dot{r} > 0$ (el origen se vuelve un foco inestable), y a medida que aumenta r en algún momento se tendrá $\dot{r} < 0$. En este caso, el sistema tiene una órbita periódica de radio $\sqrt{\mu}$. Dicha órbita es estable, pues $\dot{r} > 0$ en su interior y $\dot{r} < 0$ en su exterior.



Se puede adelantar que este ejemplo concreto representa el comportamiento típico de una bifurcación de Hopf supercrítica, en la que el punto singular pierde estabilidad y aparece una órbita periódica.

2.4.1. Preliminares de la bifurcación de Hopf

Durante el desarrollo de la teoría de la bifurcación de Hopf tendrá especial relevancia el Teorema de Poincaré-Bendixson y otros conceptos fundamentales. Se incluye este apartado para recordar estas ideas. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una cierta función de clase 1. Bajo estas hipótesis, en esta subsección se hará referencia a la ecuación

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.25)$$

Cuando sea necesario, se denotará por ϕ_{x_0} a la solución maximal de esta ecuación con condición inicial $(0, x_0)$.

Definición 2.15. Se dice que $A \subset \Omega$ es un conjunto invariante para la EDO (2.25) si, para cualquier $x_0 \in A$, la solución maximal ϕ_{x_0} está definida en todo \mathbb{R} y $\phi_{x_0}(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Cuando esta definición se restringe a tiempos positivos, $t \geq 0$, o negativos, $t \leq 0$ se denominan respectivamente conjuntos positivamente o negativamente invariantes.

Un conjunto invariante se caracteriza porque cualquier solución que se inicia dentro de él, permanece completamente contenida tanto en tiempos futuros como pasados.

Definición 2.16. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \Omega$. Consideremos también una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal forma que exista una única solución maximal ϕ de $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $(0, x_0)$ y definida para todo $t \geq 0$. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ se dice **punto ω -límite** de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $t_n \rightarrow \infty$, tal que:

$$\phi(t_n) \rightarrow p.$$

El conjunto de puntos ω -límite de $x \in \mathbb{R}^n$ se denota por $\omega(x)$. Los puntos α -límite se definen de forma similar, tomando una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $t_n \rightarrow -\infty$.

De manera general, el ω -límite (α -límite) representa los puntos hacia los que se dirige la trayectoria de x cuando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$) es decir, su destino en tiempos futuros (origen en tiempos pasados). Una vez introducidos estos conceptos, ya se puede enunciar el teorema.

Teorema 2.17. (de Poincaré-Bendixson)

Sean $n = 2$ y A una región positivamente invariante para la EDO 2.25 que no contenga puntos singulares. Dado un punto $p \in A$, se considera su ω -límite, $\omega(p)$. Entonces el conjunto $\omega(x_0)$ es una órbita cerrada para cualquier $x_0 \in A$.

2.4.2. La bifurcación de Hopf

Una vez introducida la idea, el objetivo ahora es ampliar el análisis del Ejemplo (2.14) para estudiar el caso general de la bifurcación de Hopf en dimensión dos. En ella ocurre, de manera muy general, que un punto singular cambia su estabilidad al cruzar un valor concreto de un parámetro y da lugar a la aparición, o desaparición, de soluciones oscilatorias.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en dimensión dos, expresado inicialmente en función de las variables p, q y el parámetro δ .

$$(\dot{p}, \dot{q}) = h((p, q), \delta) \tag{2.26}$$

Sobre él, se realizarán una serie de transformaciones para simplificar el análisis y obtener un sistema más sencillo con la notación que se ha utilizado a lo largo del trabajo: x, y para las variables y μ para el parámetro.

Suponiendo que $(p, q) \in C$, con $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto donde h es una función suficientemente regular y $\delta \in \mathbb{R}$ son tales que $h((p_0, q_0), \delta_0) = (0, 0)$, entonces el sistema (2.26) tiene un punto singular en $((p_0, q_0), \delta_0)$.

Paso 1:

En primer lugar, se realiza un cambio de variable para trasladar el punto singular al origen y el valor del parámetro para el que hay una bifurcación a cero. Sean $(u, v) = (p - p_0, q - q_0)$ y $\mu = \delta - \delta_0$, entonces el sistema (2.26) se convierte en:

$$(\dot{u}, \dot{v}) = (\dot{p}, \dot{q}) = h((p, q), \delta) = h((u + p_0, v + q_0), \mu + \delta_0) =: g((u, v), \mu), \quad (2.27)$$

donde $(u, v) \in B$, $B = \{(p - p_0, q - q_0) / (p, q) \in C\} \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto donde g es una función suficientemente regular y $\mu \in \mathbb{R}$. Como $g((0, 0), 0) = h((p_0, q_0), \delta_0) = (0, 0)$, el punto singular de (2.26) se ha trasladado al origen en (2.27).

Paso 2:

El sistema (2.27) se puede desglosar en su parte lineal y no lineal como sigue:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A(u, v) + \begin{pmatrix} g_1((u, v), \mu) \\ g_2((u, v), \mu) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

donde g_1 y g_2 son funciones no lineales en u e v que representan los términos no lineales de (2.27).

Ahora se va a realizar un segundo cambio de variable que permita considerar la forma canónica de Jordan. Sea P la matriz de paso, invertible y con coeficientes constantes, tal que $A = PJP^{-1}$, entonces considerando el cambio $(x, y) = P^{-1}(u, v)$ o, equivalentemente, $P(x, y) = (u, v)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = P^{-1}A(u, v) + P^{-1} \begin{pmatrix} g_1((u, v), \mu) \\ g_2((u, v), \mu) \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}AP(x, y) + P^{-1} \begin{pmatrix} g_1(P(x, y), \mu) \\ g_2(P(x, y), \mu) \end{pmatrix}, \mu \end{aligned} \quad (2.29)$$

utilizando que $A = PJP^{-1} \iff J = P^{-1}AP$ se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(x, y) + P^{-1} \begin{pmatrix} g_1(P(x, y), \mu) \\ g_2(P(x, y), \mu) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

tomando $f_i((x, y), \mu) = P^{-1}g_i(P((x, y), \mu))$, con $i \in 1, 2$ se llega finalmente a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(x, y) + \begin{pmatrix} f_1(x, y), \mu \\ f_2(x, y), \mu \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Se ha obtenido una expresión para el sistema (2.27) desglosada en parte lineal y parte no lineal. Se puede comprobar que el sistema (2.31) conserva al origen como punto singular ya que:

$$\begin{aligned}
(f_1((0,0),0), f_2((0,0),0)) &= (P^{-1}g_1(P(0,0),0), P^{-1}g_2(P(0,0),0)) \\
&= (P^{-1}g_1((0,0),0), P^{-1}g_2((0,0),0)) \\
&= P^{-1}g((0,0),0) \\
&= P^{-1}(0,0) = (0,0).
\end{aligned}$$

Ahora, suponiendo que los autovalores $\lambda(\mu)$ y $\overline{\lambda(\mu)}$ son complejos conjugados, entonces la matriz real de Jordan J tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) & -\operatorname{Im}(\lambda(\mu)) \\ \operatorname{Im}(\lambda(\mu)) & \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el sistema (2.31) se puede reescribir de la forma siguiente y es equivalente al sistema de partida:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) & -\operatorname{Im}(\lambda(\mu)) \\ \operatorname{Im}(\lambda(\mu)) & \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1((x,y),\mu) \\ f_2((x,y),\mu) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Nota 2.18. La expresión anterior descompone el sistema en su parte lineal, que describe la dinámica básica cerca del origen, y la parte no lineal, que introduce las correcciones para comprender el sistema completamente. Conviene hacer unos apuntes sobre ella:

- f^1 y f^2 son funciones no lineales en x e y que representan los términos no lineales del sistema.
- $\lambda(\mu)$, y su conjugado $\overline{\lambda(\mu)}$ son los autovalores del sistema linealizado alrededor del origen y en función del parámetro μ . Descomponiendo los autovalores en parte real y parte imaginaria, se obtiene:

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu), \quad \overline{\lambda(\mu)} = \alpha(\mu) - i\omega(\mu),$$

y, dado que para $\mu = 0$ son puramente imaginarios, es evidente que $\alpha(0) = 0$ y $\omega(0) \neq 0$.

Ahora se considera la forma normal del sistema (2.32), que se explicará más adelante en la Subsección (2.4.3).

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^5), \\ \dot{y} = \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^5). \end{cases} \quad (2.33)$$

Se va a realizar un cambio a coordenadas polares para simplificar el estudio del sistema. Sea (x, y) un punto cualquiera de \mathbb{R}^2 la variable r representará la distancia del punto al origen $(0, 0)$

y θ el ángulo que forma el vector del origen al punto (x, y) con el eje real (ver Figura 2.4.2). Es decir:

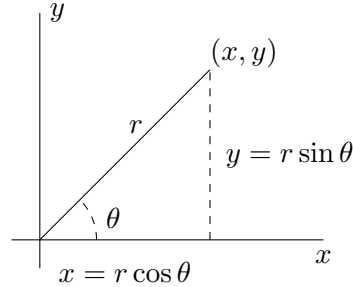


Figura 2.11: Coordenadas polares

De este modo, las coordenadas cartesianas se relacionan con las polares a través de las relaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

donde $r > 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$. Es evidente que:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y/r}{x/r} \rightarrow \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Derivando para r :

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y},$$

sustituyendo,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= \alpha(\mu)x^2 - \omega(\mu)yx + x(a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^6, |y|^5) \\ &\quad + \omega(\mu)xy + \alpha(\mu)y^2 + y(b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^6) \\ &= \alpha(\mu)(x^2 + y^2) + a(\mu)(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) + O(|x|^6, |y|^6) \\ &= \alpha(\mu)r^2 + a(\mu)r^4 + O(r^6), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\dot{r} = \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5). \quad (2.34)$$

Para $\dot{\theta}$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2} \right) = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \\
&= \frac{\omega(\mu)x^2 + \alpha(\mu)yx + x(b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^6, |y|^5)}{r^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(\mu)xy - \omega(\mu)y^2 + y(a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^6)}{r^2} \\
&= \frac{\omega(\mu)r^2 + b(\mu)r^4 + O(r^6)}{r^2} \\
&= \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4).
\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema (2.33) expresado en coordenadas polares se convierte en:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5), \\ \dot{\theta} = \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4). \end{cases} \quad (2.35)$$

Para estudiar la dinámica en torno al parámetro $\mu = 0$, se desarrollan los coeficientes de la ecuación anterior en serie de Taylor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\alpha(\mu) &= \alpha(0) + \alpha'(0)\mu + O(\mu^2), \\
a(\mu) &= a(0) + O(\mu), \\
\omega(\mu) &= \omega(0) + \omega'(0)\mu + O(\mu^2), \\
b(\mu) &= b(0) + O(\mu).
\end{aligned}$$

Sustituyendo y teniendo en cuenta que $\alpha(0) = 0$ por la condición de autovalores puramente imaginarios, se llega a:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5), \\ \dot{\theta} = \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^4). \end{cases} \quad (2.36)$$

Para analizar el sistema en un entorno del origen primero se estudiará el sistema descartando los términos de orden superior y después se demostrará que el comportamiento del sistema original no varía al eliminarlos para valores de μ próximos a 0. Eliminando los términos de orden superior se obtiene la forma truncada de (2.36):

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3, \\ \dot{\theta} = \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2, \end{cases} \quad (2.37)$$

donde se denotan $\alpha'(0) = d, a(0) = a, \omega(0) = \omega, \omega'(0) = c, b(0) = b$, para obtener:

$$\begin{cases} \dot{r} = d\mu r + ar^3, \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2, \end{cases} \quad (2.38)$$

Determinación de las órbitas

Para analizar el comportamiento de este sistema se van a buscar sus soluciones. En concreto, se va a estudiar la presencia de soluciones periódicas. Una condición necesaria para su existencia es que haya valores $r > 0$ y μ para los que $\dot{r} = 0$ y $\dot{\theta} \neq 0$.

$$\boxed{\dot{r} = 0}$$

La condición $\dot{r} = 0$ implica que el radio r , distancia del punto al origen, se mantiene constante.

$$\dot{r} = 0 \iff r(d\mu + ar^2) = 0 \iff r_0 = 0, r_1 = \sqrt{-\frac{\mu d}{a}}$$

La solución $r_0 = 0$ se corresponde con el punto singular del sistema en el origen. Para analizar la solución r_1 se va a estudiar como evoluciona el ángulo θ .

$$\boxed{\dot{\theta} \neq 0}$$

$$\dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2 = \omega + c\mu - \frac{b\mu d}{a}$$

Dado que ω es independiente de μ y no nulo, se deduce directamente que $\dot{\theta} \neq 0$ sin más que tomar un μ suficientemente pequeño. Por tanto, r_1 determina el radio de una órbita periódica.

Para hallar su ángulo se resuelve la ecuación diferencial aplicando el método de variables separadas. Agrupando los términos e integrando con respecto al tiempo t :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + c\mu - \frac{b\mu d}{a} \iff \int_0^t d\theta = \int_0^t \left(\omega + c\mu - \frac{b\mu d}{a} \right) dt \iff \theta(t) = \omega t + \mu t \left(c - \frac{bd}{a} \right) + \theta_0$$

Por tanto, se concluye la existencia de una órbita periódica descrita completamente en el siguiente lema.

Lema 2.19. *Dado un μ suficientemente pequeño tal que $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$, se tiene que:*

$$(r(t), \theta(t)) = \left(\sqrt{-\frac{\mu d}{a}}, \left[\omega + \left(c - \frac{bd}{a} \right) \mu \right] t + \theta_0 \right) \quad (2.39)$$

representa a una órbita periódica del sistema (2.33).

Demostración. El razonamiento anterior prueba la existencia de una órbita periódica para el sistema (2.38) ya que $\dot{r} = 0$ y $\dot{\theta} \neq 0$. Esto se verifica además para un μ suficientemente pequeño tal que $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$ porque:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \theta(t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\omega + c\mu - \frac{b\mu d}{a} \right) = \omega \neq 0.$$

□

Comportamiento de la órbita periódica

En lo que resta, el objetivo será probar que el sistema completo

$$\begin{cases} \dot{r} = d\mu r + ar^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5), \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^4). \end{cases}$$

tiene una órbita periódica, así como analizar su comportamiento. Para conseguirlo, en primer lugar se estudiará este comportamiento para el sistema truncado (2.38),

$$\begin{cases} \dot{r} = d\mu r + ar^3, \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2, \end{cases},$$

y más adelante se demostrará que el comportamiento es exactamente el mismo considerando el sistema completo con los términos de orden superior. El primer paso es comprender como evolucionan las soluciones del sistema con el tiempo, en concreto, como evolucionan las variables $r(t)$ y $\theta(t)$.

- $r(t)$ representa la distancia radial desde el origen, indicando si las trayectorias se acercan o se alejan tanto del origen como de la órbita periódica.
- $\theta(t)$ representa la oscilación angular del sistema, indicando como gira alrededor del origen o de la órbita periódica.

Entonces, se puede deducir que el comportamiento de la órbita periódica y del origen dependerá únicamente de la ecuación $\dot{r} = r(d\mu + ar^2)$ y, en concreto, de los valores de a y d . Estos dos valores determinan la existencia y estabilidad de las órbitas periódicas y conducen a cuatro casos distintos: $[a > 0, d > 0]$, $[a > 0, d < 0]$, $[a < 0, d > 0]$, $[a < 0, d < 0]$.

Nota 2.20. La situación más sencilla ocurre en $\mu = 0$. La primera ecuación del sistema (2.38) se convierte en $\dot{r} = ar^3$. Por tanto, para el valor $\mu = 0$ en un entorno del origen se verifica lo siguiente:

- Si $a < 0$ entonces $\dot{r} < 0$ y el origen es un punto singular estable.
- Si $a > 0$ entonces $\dot{r} > 0$ y el origen es un punto singular inestable.

Con el siguiente teorema se estudiará cada uno de los casos y se demostrará que la situación es la misma al considerar los términos de orden superior en el sistema.

Teorema 2.21. (*Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf*)

Para la forma normal completa descrita en (2.36), y considerando valores de μ suficientemente pequeños, el comportamiento del sistema se clasifica en cuatro casos:

- $a > 0, d > 0$: la órbita periódica existe para los valores $\mu < 0$ y es inestable. El origen es un punto singular asintóticamente estable cuando $\mu < 0$ e inestable cuando $\mu > 0$.
- $a > 0, d < 0$: la órbita periódica existe para los valores $\mu > 0$ y es inestable. El origen es un punto singular inestable cuando $\mu < 0$ y asintóticamente estable cuando $\mu > 0$.
- $a < 0, d > 0$: la órbita periódica existe para los valores $\mu > 0$ y es asintóticamente estable. En el origen hay un punto singular asintóticamente estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$.
- $a < 0, d < 0$: la órbita periódica existe para los valores $\mu < 0$ y es asintóticamente estable. El origen es un punto singular inestable cuando $\mu < 0$ y asintóticamente estable cuando $\mu > 0$.

Demostración. Se comenzará estudiando detalladamente el caso $a < 0, d > 0$. El objetivo es, en primer lugar, demostrar que se cumple el comportamiento enunciado en el teorema cuando $a < 0, d > 0$ y, en segundo lugar, demostrar que este comportamiento no cambia al considerar el sistema completo (con los términos de orden superior). Razonando de manera similar en el resto de casos, quedará demostrado que el comportamiento del sistema completo (2.36) puede reducirse al del sistema truncado (2.38).

$$\boxed{a < 0, d > 0}$$

Comportamiento del sistema truncado

- La existencia de la órbita periódica se sigue de la expresión $r = \sqrt{-\frac{\mu d}{a}}$. La órbita existirá si el interior de la raíz es positivo, es decir, si $\mu > 0$.
- Estabilidad de la órbita periódica:

Se considera un $\mu > 0$ suficientemente pequeño, y la corona A del plano que contiene a la órbita periódica.

$$A = \{(r, \theta) / r_1 \leq r \leq r_2\}, 0 < r_1 < \sqrt{\frac{-d\mu}{a}} < r_2.$$

Como veremos más adelante, una condición suficiente para que la órbita sea asintóticamente estable es que el campo apunte hacia el interior desde el borde superior ($r' < 0$) e inferior ($r' > 0$):

$$d\mu r_1 + ar_1^3 > 0 \stackrel{r_1 > 0}{\iff} d\mu + ar_1^2 > 0 \iff r_1 < \sqrt{\frac{-d\mu}{a}},$$

$$d\mu r_2 + ar_2^3 < 0 \stackrel{r_2 > 0}{\iff} d\mu + ar_2^2 < 0 \iff r_2 > \sqrt{\frac{-d\mu}{a}},$$

y ambas condiciones se verifican por la definición de la corona A .

El conjunto A es positivamente invariante, como vemos en la Figura 2.12 el campo apunta hacia el interior de A en ambos casos y ninguna trayectoria puede escapar del anillo. Entonces, por el Teorema (2.17) (Teorema de Poincaré-Bendixson) se seguiría directamente que A contiene una órbita cerrada, que es una órbita periódica estable.

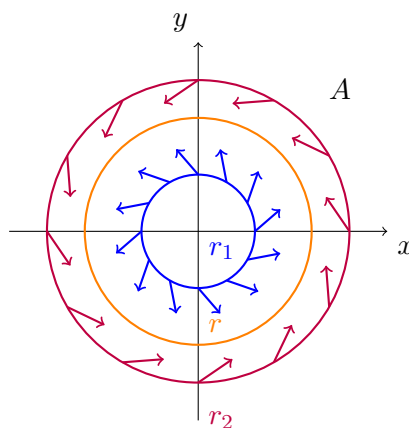


Figura 2.12: Se representa la órbita periódica del sistema (2.38) en color naranja y las dos curvas que delimitan la frontera de la región A en color azul y rojo.

- Estabilidad del origen como punto singular:
 - En $\mu < 0$ se tiene que $\dot{r} = d\mu r + ar^3 < 0$ por los signos de a, d, μ, r , por lo que el origen es asintóticamente estable.
 - En $\mu = 0$ es estable por la Nota 2.20.
 - En $\mu > 0$, la órbita periódica existe y es asintóticamente estable. De hecho, para r arbitrariamente cercano a cero, $r' > 0$: las trayectorias se alejan del origen y este es inestable.

Comportamiento del sistema completo

En la forma normal completa (2.36), al tomar r, μ suficientemente pequeños, los términos de orden superior pueden hacerse mucho más pequeños que los términos que coinciden con la forma truncada (2.38). Entonces, al tomar r_1, r_2 suficientemente pequeños, A sigue siendo una región invariante positiva que no contiene puntos fijos. Aplicando de forma similar el Teorema de Poincaré-Bendixson, A contiene una órbita periódica estable.

□

Nota 2.22. Los tres casos restantes pueden estudiarse siguiendo el mismo razonamiento. En primer lugar analizar el comportamiento del sistema truncado y, en segundo lugar, aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que el comportamiento del sistema completo no cambia. El caso $a < 0, d < 0$ es completamente análogo. En los dos restantes, $a > 0, d < 0$ y $a > 0, d > 0$, la órbita periódica es inestable. Como para aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson la región A debe ser invariante, se considera $t \rightarrow -t$. Por ejemplo:

$$\boxed{a > 0, d > 0}$$

Se considera un $\mu < 0$ suficientemente pequeño, el anillo A definido anteriormente y la ecuación:

$$\dot{r} = -d\mu r - ar^3.$$

Demostrar que la órbita periódica es repulsora para valores t es equivalente a demostrar que es asintóticamente estable para valores $-t$. Se procede como en el caso anterior:

$$-d\mu r_1 - ar_1^3 > 0 \stackrel{r_1 > 0}{\iff} -d\mu - ar_1^2 > 0 \iff r_1 < \sqrt{\frac{-d\mu}{a}},$$

$$-d\mu r_2 + ar_2^3 < 0 \stackrel{r_2 > 0}{\iff} -d\mu - ar_2^2 < 0 \iff r_2 > \sqrt{\frac{-d\mu}{a}},$$

y ahora se puede aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixson y asegurar que el comportamiento es el mismo al considerar los términos de orden superior.

2.4.3. Forma normal de la bifurcación de Hopf

Se quiere calcular la forma normal de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^2 cerca del punto de bifurcación. Para ello, partimos de la expresión (2.31), donde se desglosaba el sistema inicial en su parte lineal y no lineal de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

En cuanto a la parte lineal, como los autovalores son complejos conjugados, en un entorno de la singularidad la matriz J viene dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

El primer paso es expandir la parte no lineal, $F(x, y)$, en serie de Taylor hasta orden cuatro:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(5), \quad (2.42)$$

donde cada F_i representa los términos de grado i y se trabajará de manera similar sobre cada una de ellas para simplificarlas la máximo posible. En el caso general, se considera en primer lugar, la base canónica de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y se denotan por x e y las coordenadas respecto a esa base.

Definición 2.23. Se considerará en cada paso el espacio H_k , que consiste en los polinomios homogéneos de grado k , donde cada uno de sus elementos estará denotada por $h_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. En el caso de la bifurcación de Hopf, bastará con considerar H_2, H_3 y H_4 y sus respectivas bases.

En segundo lugar, se considera la aplicación lineal de H_k en H_k ,

$$h_k(x, y) \rightarrow Dh_k(x, y)J(x, y) - Jh_k(x, y) \quad (2.43)$$

sobre cada elemento de la base de H_k y se denota por $L_J^k(H_k)$ su representación matricial. La razón es que tras hacer un cambio de variable de la forma $(x, y) = (u, v) + h_k(u, v)$ el poder "aniquilar" los términos de grado k depende de la relación entre F_k y el recorrido de L_J^k [Wig03].

El espacio H_k puede expresarse como la suma directa entre $L_J^k(H_k)$ y su espacio complementario G_k , es decir:

$$H_k = L_J^k(H_k) \oplus G_k. \quad (2.44)$$

Una vez aquí hay dos opciones:

- Si $F_k(x, y)$ pertenece al rango de $L_J^k(H_k)$, o equivalentemente, si la matriz $L_J^k(H_k)$ es invertible, entonces todos los términos de grado k pueden ser eliminados.
- Si por el contrario la matriz $L_J^k(H_k)$ no es invertible, entonces existen términos pertenecientes al espacio complementario que no pueden ser eliminados, son los llamados términos resonantes y se representan por $F_k^r(x, y) \in G_k$, siendo G_k un subespacio complementario a $L_J^k(H_k)$.

En el caso concreto de la bifurcación de Hopf, repitiendo este proceso para los términos de orden dos, tres y cuatro, se llegará a la forma normal.

Paso 1: Simplificación de los términos de segundo orden

Se considera H_2 , el espacio vectorial de los polinomios homogéneos vectoriales de grado dos, cuyos elementos son:

$$H_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \quad (2.45)$$

Estudiamos ahora la aplicación L_J^2 .

$$\begin{aligned} H_2 &\rightarrow H_2 \\ h_2(y) &\rightarrow Dh_2(y)Jy - Jh_2(y) \end{aligned} \quad (2.46)$$

sobre cada uno de los elementos de H_2 . Se va a desarrollar el primer caso e indicar el resultado en los siguientes:

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x^2 - 2\omega xy \\ -\omega x^2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha xy - \omega y^2 + \omega x^2 \\ -\omega xy \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\omega xy + \alpha y^2 \\ -\omega y^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega x^2 \\ \alpha x^2 - 2\omega xy \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega xy \\ \alpha xy - \omega y^2 + \omega x^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega y^2 \\ 2\omega xy + \alpha y^2 \end{pmatrix}.$$

La representación matricial según la base escrita en (2.45) de la aplicación viene dada por:

$$L_J^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \omega & 0 & \omega & 0 & 0 \\ -2\omega & \alpha & 2\omega & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & \alpha & 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & 0 & \alpha & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & -2\omega & \alpha & 2\omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

y su determinante es:

$$\det(L_J^2) = \alpha^6 + 9\omega^6 + 19\alpha^2\omega^4 + 11\alpha^4\omega^2 \neq 0.$$

Evaluándolo para $\mu = 0$, el determinante es distinto de cero ya que los autovalores son puramente imaginarios y se tiene que el término “ $9\omega^6$ ” nunca va a ser nulo. Como el determinante no es nulo, la matriz es invertible y no existen términos resonantes. Por tanto, se pueden cancelar todos los términos de orden dos.

Paso 2: Simplificación de los términos de tercer orden

En este paso se procederá de manera similar, con el objetivo de eliminar todos los términos posibles de orden tres. Se considera H_3 , el espacio vectorial de los polinomios homogéneos vectoriales de grado tres, cuyos elementos son:

$$H_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \quad (2.49)$$

Se quiere calcular el efecto de la aplicación,

$$\begin{aligned} H_3 &\rightarrow H_3 \\ h_3(y) &\rightarrow Dh_3(y)Jy - Jh_3(y) \end{aligned} \quad (2.50)$$

sobre cada uno de los elementos de H_3 . Procediendo de manera similar al paso 1:

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha x^3 - 3\omega x^2 y \\ -\omega x^3 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x^2y \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha x^2y - 2\omega xy^2 + \omega x^3 \\ -\omega x^2y \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -\omega y^3 + 2\omega x^2y + 2\alpha xy^2 \\ -\omega xy^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 3\omega xy^2 + 2\alpha y^2 \\ -\omega y^3 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \omega x^3 \\ 2\alpha x^2 - 3\omega x^2y \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 \\ x^2y \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \omega x^2y \\ 2\alpha x^2y - 2\omega xy^2 + \omega x^3 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 \\ xy^2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \omega xy^2 \\ -\omega y^3 + 2\omega x^2y + 2\alpha xy^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \omega y^3 \\ 3\omega xy^2 + 2\alpha y^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$L_J^{(3)} = \begin{pmatrix} 2\alpha & \omega & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ -3\omega & 2\alpha & 2\omega & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 2\alpha & 3\omega & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 & -3\omega & 2\alpha & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & -2\omega & 2\alpha & 3\omega \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & -\omega & 2\alpha \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

y su determinante es:

$$\det(L_J^{(3)}) = 256\alpha^8 + 1024\alpha^2\omega^6 + 2304\alpha^4\omega^4 + 1536\alpha^6\omega^2,$$

como para $\mu = 0$, el determinante es nulo en el punto de bifurcación, entonces hay términos resonantes que no pueden ser eliminados para todos los μ en un entorno de cero. Los autovalores de la matriz $L_J^{(3)}$ son:

$$\lambda_{1,2} = 2\alpha$$

$$\lambda_{3,4} = 2\alpha \pm 2\omega i$$

$$\lambda_{5,6} = 2\alpha \pm 2\omega i$$

$$\lambda_{7,8} = 2\alpha \pm 4\omega i$$

y evaluados en el punto de bifurcación:

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 2\omega i$$

$$\lambda_{5,6} = \pm 2\omega i$$

$$\lambda_{7,8} = \pm 4\omega i$$

Los términos resonantes vienen dados por los autovectores asociados al autovalor nulo, que se obtienen resolviendo el sistema:

$$Av = \lambda v \iff Av = 0 \iff v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el espacio complementario G_3 , que está formado por términos que no se pueden eliminar al hallar la forma normal, es de dimensión dos y está generado por una combinación lineal de estos dos autovectores:

$$a \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -x^2y - y^3 \\ x^3 + xy^2 \end{pmatrix},$$

donde a y b son ciertas constantes reales.

Paso 3: Simplificación de los términos de cuarto orden

En este último paso de simplificación se eliminarán todos los términos posibles de orden tres. Se considera H_4 , el espacio vectorial de los polinomios homogéneos vectoriales de grado cuatro, cuyos elementos son:

$$H_4 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} x^4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^3y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \quad (2.53)$$

Se quiere calcular el efecto de la aplicación,

$$\begin{aligned} H_4 &\rightarrow H_4 \\ h_4(y) &\rightarrow Dh_4(y)Jy - Jh_4(y) \end{aligned} \quad (2.54)$$

sobre cada uno de los elementos de H_4 . Con el primer elemento se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x^4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4x^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha x^4 - 4\omega x^3 y \\ -\omega x^4 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

y procediendo de la misma manera con el resto de términos:

$$\begin{pmatrix} x^3 y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha x^3 y - 3\omega x^2 y^2 + \omega x^4 \\ -\omega x^3 y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x^2 y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha x^2 y^2 - 2\omega x y^3 + 2\omega y x^3 \\ -\omega x^2 y^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x y^3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\omega y^4 + 3\omega x^2 y^2 + 3\alpha x y^3 \\ -\omega x y^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y^4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4\omega x y^3 + 3\alpha y^4 \\ -\omega y^4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega x^4 \\ 3\alpha x^4 - 4\omega x^3 y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^3 y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega x^3 y \\ 3\alpha x^3 y - 3\omega x^2 y^2 + \omega x^4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega x^2 y^2 \\ 3\alpha x^2 y^2 - 2\omega x y^3 + 2\omega x^3 y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x y^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega x y^3 \\ -\omega y^4 + 3\omega x^2 y^2 + 3\alpha x y^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y^4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega y^4 \\ 4\omega x y^3 + 3\alpha y^4 \end{pmatrix}.$$

La representación matricial de esta aplicación viene dada por:

$$L_J^4 = \begin{pmatrix} 3\alpha & \omega & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4\omega & 3\alpha & 2\omega & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\omega & 3\alpha & 3\omega & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 3\alpha & 4\omega & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 3\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\alpha & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & -4\omega & 3\alpha & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & -3\omega & 3\alpha & 3\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & -2\omega & 3\alpha & 4\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & -\omega & 3\alpha \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

y su determinante es:

$$\det(L_J^4) = 59049\alpha^10 + 295245\alpha^8\omega^2 + 450522\alpha^6\omega^4 + 253530\alpha^4\omega^6 + 41229^2\omega^8 + 2025\omega^{10},$$

Como al evaluarlo en el punto singular el término “ $2025\omega^{10}$ ” nunca va a ser nulo, se tiene directamente que la matriz es invertible y no existen términos resonantes. Por tanto, se pueden cancelar todos los términos de orden cuatro.

Paso 4: sistema final

Finalmente, eliminando los términos de orden dos y cuatro y sustituyendo los términos resonantes de orden tres en el sistema de partida (2.57), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(5) \iff \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y + ax^3 + axy^2 - bx^2y - by^3 + O(5) \\ \dot{y} = \omega x + \alpha y + ayx^2 + ay^3 + bx^3 + bxy^2 + O(5) \end{cases}$$

Agrupando los términos e indicando la dependencia respecto de μ , se obtiene la forma normal de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(5) \\ \dot{y} = \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(5). \end{cases} \quad (2.58)$$

Bibliografía

- [KP03] Krantz, S. G., y Parks, H. R. (2003). *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*. Birkhäuser: New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5981-1>
- [FVV03] Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J., y Vegas Montaner, J. M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*. Thomson: Madrid.
- [Per01] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3^a Ed.). Springer: New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>
- [Wig03] Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (2^a Ed.). Springer: New York. <https://doi.org/10.1007/b97481>