

# TOPOLOXÍA DOS ESPAZOS EUCLIDIANOS

---

José Antonio Oubiña Galiñanes e María Elena Vázquez Abal

*Esta é unha versión imprimible das presentacións utilizadas para impartir as clases expositivas da materia "Topoloxía dos Espazos Euclidianos" no primeiro curso do Grao de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela en 2022.*

## Contidos

- 1 Os espazos euclidianos
- 2 A topoloxía do espazo euclidiano
- 3 Converxencia e completude
- 4 Continuidade
- 5 Conexión
- 6 Compacidade

## Bibliografía

- 1 Díaz Ramos, J.C., Topoloxía dos espazos euclidianos. Minerva, USC, 2021.  
<http://hdl.handle.net/10347/25150>
- 2 Masa Vázquez, X.M., Curso de topoloxía: dos números reais ao Grupo de Poincaré. USC Editora. Manuais. USC, 2020.

# **1. Os espazos euclidianos**

## 1.1 NOTACIÓN

Recordamos as notacións para os conxuntos

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais,

$\mathbb{Z}$  dos números enteiros,

$\mathbb{Q}$  dos números racionais,

$\mathbb{R}$  dos números reais.

En particular,  $\mathbb{R}$  é un corpo ordenado que ten a propiedade arquimediana, e  $\mathbb{Q}$  é denso en  $\mathbb{R}$ .

Denotaremos  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

## 1.2 (O espazo euclidiano $n$ -dimensional)

O **espazo euclidiano de dimensión  $n$**  (ou  **$n$ -dimensional**) é o conxunto

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \binom{n}{.} \times \mathbb{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

A súa estrutura natural de espazo vectorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$  está dada polas operacións de suma en  $\mathbb{R}^n$  e produto por escalares reais:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{+} \mathbb{R}^n$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$$

$\mathbf{0} = (0, \binom{n}{.}, 0)$  é o elemento neutro para +,

o elemento oposto de  $\mathbf{x}$  é  $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ ,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x},$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{x},$$

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### 1.3 DEFINICIÓN (O PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO)

O *produto escalar euclidiano* en  $\mathbb{R}^n$  é a aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

### 1.4 PROPIEDADES (DO PRODUTO ESCALAR)

(a) É unha aplicación bilineal:  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,$$

$$\langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \cdot \mathbf{y} \rangle.$$

(b) É unha aplicación simétrica:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(c) É unha aplicación definida positiva:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(a) \implies \langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mu \cdot \mathbf{y} \rangle = \lambda \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$(c) \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

## 1.5 TEOREMA (Desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ)

Para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , tense

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right), \quad \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN

Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , a desigualdade verificase de maneira trivial:  $0 \leq 0$ . Podemos supoñer que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ . Agora, para calquera  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tense

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Se consideramos

$$\lambda = - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \in \mathbb{R},$$

entón

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}, \end{aligned}$$

e ao multiplicar os dous membros da desigualdade por o número real positivo  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ , obtense

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2,$$

equivalentemente,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \quad \blacksquare$$

## 1.6 DEFINIÇÃO (A NORMA EUCLIDIANA)

A *norma euclidiana* em  $\mathbb{R}^n$  é a aplicação

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz agora pôde-se escrever

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

## 1.7 PROPIEDADES (DA NORMA)

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(1) \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0; \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$(2) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \quad \text{(homogeneidade)}$$

$$(3) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \text{(desigualdade de MINKOWSKI).}$$

### DEMOSTRAÇÃO

Imos usar as propriedades (a)-(c) do produto escalar, e a desigualdade de Minkowski vai ser consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$(1) \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq 0;$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = 0 \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \stackrel{(c)}{\iff} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(2) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} \stackrel{(a)}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|.$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{(a)}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{(C-S)}{\leq} \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

$$\implies \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$



## 1.8 DEFINIÇÃO (A DISTANCIA EUCLIDIANA)

A *distancia euclidiana* en  $\mathbb{R}^n$  é a aplicación

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

e dise que  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é a **distancia entre os puntos**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

## 1.9 PROPIEDADES (DA DISTANCIA)

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

$$(I) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$(II) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (\text{simetría})$$

$$(III) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (\text{desigualdade triangular}).$$

### DEMOSTRACIÓN

Imos probalo como consecuencia das propiedades (1)-(3) da norma. En particular, a desigualdade triangular séguese da desigualdade de Minkowski.

$$(I) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \stackrel{(1)}{\geq} 0;$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \stackrel{(1)}{\iff} \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

$$(II) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \stackrel{(2)}{=} \|(-1)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

$$(III) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \\ \stackrel{(3)}{\leq} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$



## 1.10 DEFINICIÓNS (BÓLAS ABERTAS, BÓLAS PECHADAS)

Sexan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

A **bóla aberta** en  $\mathbb{R}^n$  de **centro**  $\mathbf{x}$  e **raio**  $r$  é o conxunto

$$B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) = B(\mathbf{x}, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, y) < r\}.$$

A **bóla pechada** en  $\mathbb{R}^n$  de **centro**  $\mathbf{x}$  e **raio**  $r$  é o conxunto

$$B_{\mathbb{R}^n}[\mathbf{x}, r] = B[\mathbf{x}, r] := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, y) \leq r\}.$$

## 1.11 OBSERVACIÓNS

- Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , entón  $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ .
- Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r, s \in \mathbb{R}^+$ ,  $r < s$ , entón

$$B(\mathbf{x}, r) \subset B[\mathbf{x}, r] \subset B(\mathbf{x}, s) \subset B[\mathbf{x}, s].$$

- Caso  $n = 1$ .
  - Se  $x \in \mathbb{R}$ , entón  $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ ;  
para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ , é  $d(x, y) = |x - y|$ .
  - Se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ , entón

$$B(x, r) = (x - r, x + r), \quad B[x, r] = [x - r, x + r].$$

Se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , entón os intervalos abertos  $(a, b)$  e  $[a, b]$  son

$$(a, b) = (x - r, x + r), \quad [a, b] = [x - r, x + r],$$

onde

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad r = x - a = b - x = \frac{b - a}{2}.$$

### 1.12 DEFINICIÓN (CONXUNTO ACOUTADO)

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $A$  é un conxunto **acoutado** se existen  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ , tales que  $A \subset B(\mathbf{x}_0, r_0)$ .

### 1.13 PROPOSICIÓN (Caracterizacións dos conxuntos acoutados)

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , as seguintes condicións son equivalentes:

- (i)  $A$  é acoutado,
- (ii)  $\exists r \in \mathbb{R}^+ \mid A \subset B(\mathbf{0}, r)$ ,
- (iii)  $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \|x\| \leq M \quad \forall x \in A$ .

#### DEMOSTRACIÓN

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)**  $A$  acoutado  $\implies \exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r_0 \in \mathbb{R}^+ \mid A \subset B(\mathbf{x}_0, r_0)$ .

Se  $\mathbf{x} \in A$ , pola desigualdade triangular da distancia,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) < r_0 + \|\mathbf{x}_0\|,$$

así que  $r = r_0 + \|\mathbf{x}_0\| > 0$  é tal que  $A \subset B(\mathbf{0}, r)$ .

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii)**  $\mathbf{x} \in A \implies \|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < r$

$$\implies M = r \in \mathbb{R}^+ \text{ é tal que } \|\mathbf{x}\| \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

**(iii)  $\Rightarrow$  (i)** Se tomamos  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , entón  $r_0 = M + 1$  é tal que

$$\mathbf{x} \in A \implies d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\| \leq M < M + 1 \implies \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, M + 1),$$

logo, se poñemos  $r_0 = M + 1$ , tense que  $A \subset B(\mathbf{0}, r_0)$ , conque  $A$  é acoutado.

### 1.14 CUESTIÓN

¿É o conxunto baleiro  $\emptyset$  un conxunto acoutado?

### 1.15 DEFINIÇÃO (DIÁMETRO DUN CONXUNTO)

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é un conxunto acoutado,  $A \neq \emptyset$ , o *diámetro* de  $A$  é

$$\delta(A) = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}.$$

### 1.16 DEFINIÇÃO (DISTANCIA ENTRE CONXUNTOS)

Se  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ , a *distancia entre os conxuntos*  $A$  e  $B$  é

$$d(A, B) = \inf\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}.$$

## **2. A topoloxía do espazo euclidiano**

## 2.1 DEFINIÇÃO (CONJUNTO ABERTO)

Se  $U \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $U$  é un conxunto **aberto** en  $\mathbb{R}^n$  se cada punto de  $U$  é centro dunha bóla aberta contida en  $U$ , é dicir, se

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(\mathbf{x}, r) \subset U.$$

Se dicimos que un subconxunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  é un **aberto** entenderemos que é aberto en  $\mathbb{R}^n$ . Consideraremos tamén abertos en subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$ , pero en caso necesario especificaremos *onde un conxunto é aberto* para evitar ambigüidades.

## 2.2 PROPOSICIÓ

*Toda bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  é un conxunto aberto.*

### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ . Para ver que  $U = B(\mathbf{x}_0, r_0)$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$  tomamos un punto arbitrario  $\mathbf{x} \in U$ , así que  $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r_0$ , e vemos que se  $r = r_0 - d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > 0$ , entón  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r) &\implies \begin{cases} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r \quad (*) \\ d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \underbrace{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + r}_{r = r_0 - d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} = r_0 \end{cases} \\ &\implies \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, r_0) = U. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.3 COROLARIO

*Calquera intervalo aberto acoutado  $(a, b)$  de números reais é aberto en  $\mathbb{R}$ .*

En efecto, se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , e tomamos  $x_0 = (a + b)/2$  e  $r_0 = (b - a)/2$ , entón  $(a, b) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = B_{\mathbb{R}}(x_0, r_0)$  é una bóla aberta en  $\mathbb{R}$ .

## 2.4 TEOREMA (Propiedades fundamentales dos conjuntos abertos)

- (i)  $\mathbb{R}^n$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\emptyset$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) A unión de calquera familia de abertos en  $\mathbb{R}^n$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iv) A intersección finita de abertos en  $\mathbb{R}^n$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n$ .

### DEMOSTRACIÓN

(i)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$  (basta tomar  $r = 1$ )  
 $\implies \mathbb{R}^n$  é aberto.

(ii)  $\nexists \mathbf{x} \in \emptyset \mid \mathbf{x}$  non é centro de ningunha bóla aberta contida en  $\emptyset$   
 $\implies \emptyset$  é aberto.

(iii) Sexa  $\{U_i\}_{i \in I}$  unha familia de abertos e  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ .  
 $\mathbf{x} \in U \implies \exists j \in I \mid \mathbf{x} \in U_j \implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset U_j$   
 $\implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset U$   
 $\implies U = \bigcup_{i \in I} U_i$  é aberto.

(iv) Sexan  $U_1, \dots, U_k$  abertos e  $V = U_1 \cap \dots \cap U_k$ .  
 $\mathbf{x} \in V \implies \mathbf{x} \in U_i \quad \forall i = 1, \dots, k$   
 $\implies \exists r_i \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_i) \subset U_i \quad (\forall i = 1, \dots, k)$   
 $\implies r = \min \{r_1, \dots, r_k\} > 0$  é tal que  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset U_i \quad (\forall i)$   
 $\implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset V$ .  
 $\implies V = U_1 \cap \dots \cap U_k$  é aberto. ■

## 2.5 OBSERVACIÓN

A intersección dunha familia arbitraria de abertos non é necesariamente un aberto. Por exemplo,  $\{(-1/n, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é unha familia de abertos en  $\mathbb{R}$ , pero

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

non é aberto en  $\mathbb{R}$ .

## 2.6 EXEMPLO

Os intervalos abertos non acoutados de números reais son abertos en  $\mathbb{R}$ , xa que son unións de bólas abertas, logo unións de abertos:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, a + n),$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b - n, b).$$

## 2.7 PROPOSICIÓN

Se  $U \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$U$  é aberto en  $\mathbb{R}^n \iff U$  é unión de bólas abertas en  $\mathbb{R}^n$ .

### DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad U \text{ aberto} &\implies \forall \mathbf{x} \in U \exists r_x \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x) \subset U \\ &\implies \{\mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x)\}_{\mathbf{x} \in U} \text{ familia de abertos, } \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x) \subset U \\ &\implies \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x) = U \text{ xa que} \\ &\quad \mathbf{y} \in U \implies \mathbf{y} \in \mathbf{B}(\mathbf{y}, r_y) \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Dado que as bólas abertas en  $\mathbb{R}^n$  son abertos e a unión de abertos é aberto, conclúese que  $U$  é aberto. ■

## 2.8 NOTA

Sexa  $X$  un conxunto e  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ .

Dise que  $\mathcal{T}$  é unha **topoloxía** en  $X$  se se verifican as seguintes condicións:

- (i)  $X \in \mathcal{T}$ ,
- (ii)  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,
- (iii)  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $U_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ ,
- (iv)  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}$ .

Se  $\mathcal{T}$  é unha topoloxía en  $X$  dise que  $(X, \tau)$  é un **espazo topolóxico**, e os membros de  $\mathcal{T}$  chámanse **abertos** no espazo topolóxico  $(X, \mathcal{T})$ .

En particular,  $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n\}$  é unha topoloxía en  $\mathbb{R}^n$  que se chama a **topoloxía euclidiana** de  $\mathbb{R}^n$ . Así,  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$  é un espazo topolóxico, que se chama o **espazo topolóxico euclidiano**  $n$ -dimensional.

Se  $X$  é un conxunto calquera,  $\mathcal{P}(X)$  é unha topoloxía en  $X$  que se chama a **topoloxía discreta** de  $X$ , e  $(X, \mathcal{P}(X))$  dise que é un **espazo discreto**.

A **topoloxía indiscreta** dun conxunto  $X$  é  $\{X, \emptyset\}$ , e  $(X, \{X, \emptyset\})$  dise que é un **espazo indiscreto**.

## 2.9 DEFINICIÓN (CONXUNTO PECHADO)

Se  $F \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $F$  é un conxunto *pechado* en  $\mathbb{R}^n$  se o seu complementario  $\mathbb{R}^n \setminus F$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.10 OBSERVACIÓN

As propiedades de ser abertos e de ser pechados non son excluíntes: un conxunto pode ser aberto e pechado á vez, e pode non ser nin aberto nin pechado.

## 2.11 TEOREMA (Propiedades fundamentais dos conxuntos pechados)

- (i)  $\emptyset$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\mathbb{R}^n$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) A intersección de calquera familia de pechados en  $\mathbb{R}^n$  é un pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iv) A unión finita de pechados en  $\mathbb{R}^n$  é un pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

### DEMOSTRACIÓN

- (i)  $\emptyset$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  porque  $\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$  é aberto.
- (ii)  $\mathbb{R}^n$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  porque  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$  é aberto.
- (iii) Se  $\{F_i\}_{i \in I}$  é unha familia de pechados en  $\mathbb{R}^n$ , por unha das leis de De Morgan,

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^n \setminus F_i)$$

é aberto en  $\mathbb{R}^n$  por ser unión de abertos, logo  $\bigcap_{i \in I} F_i$  é pechado.

- (iv) Se  $F_1, \dots, F_k$  son pechados en  $\mathbb{R}^n$ , entón  $F_1 \cup \dots \cup F_k$  é pechado, xa que o seu complementario é intersección finita de abertos:

$$\mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k) = (\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cap \dots \cap (\mathbb{R}^n \setminus F_k).$$



## 2.12 PROPOSICIÓN

Toda bóla pechada en  $\mathbb{R}^n$  é un conxunto pechado.

### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ , e consideremos a bóla pechada  $F = B[\mathbf{x}_0, r_0]$ . Debemos comprobar que  $\mathbb{R}^n \setminus F$  é aberto, así que tomamos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$  e imos ver que é o centro dunha bóla aberta contida en  $\mathbb{R}^n \setminus F$ .

Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$ , entón  $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > r_0$ , e tense que se  $r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - r_0$ , entón  $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ , xa que

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r) &\implies d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + r \\ &\implies d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) > d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - r = r_0 \\ &\implies \mathbf{y} \notin B[\mathbf{x}_0, r_0] \implies \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}_0, r_0]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.13 EXEMPLO

Calquera intervalo pechado de números reais  $[a, b]$  é un pechado en  $\mathbb{R}$ . Os intervalos  $[a, +\infty)$  e  $(-\infty, b]$  tamén son pechados en  $\mathbb{R}$ .

## 2.14 OBSERVACIÓN

A unión dunha familia arbitraria de pechados pode non ser un pechado. Por exemplo,  $\{[a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}^+}$  é unha familia de pechados en  $\mathbb{R}$ , pero a súa unión

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} [a, +\infty) = (0, +\infty)$$

non é pechado en  $\mathbb{R}$ .

### 2.15 DEFINICIÓN

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{x} \in X$  e  $r \in \mathbb{R}^+$ , a **bóla aberta en  $X$**  (ou bóla aberta *relativa* a  $X$ ) de **centro**  $\mathbf{x}$  e **raio**  $r$  é o conxunto

$$B_X(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} \in X \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X.$$

### 2.16 DEFINICIÓN (ABERTO RELATIVO)

Se  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $U$  é **aberto en  $X$**  (ou aberto *relativo* de  $X$ ) se

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r) \subset U.$$

### 2.17 PROPOSICIÓN

Se  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$U \text{ é aberto en } X \iff \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid U = V \cap X.$$

### DEMOSTRACIÓN

$$\Rightarrow U \text{ aberto en } X \implies \forall \mathbf{x} \in U \exists r_x \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r_x) \subset U.$$

O conxunto  $V = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_x)$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ , e tense:

$$V \cap X = \left( \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_x) \right) \cap X = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} (B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_x) \cap X) = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_X(\mathbf{x}, r_x) = U.$$

$\Leftarrow$  Supoñemos  $U = V \cap X$ , onde  $V$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ . Entón

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in U &\implies \mathbf{x} \in V \xRightarrow{\substack{\text{V abto en } \mathbb{R}^n}} \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \subset V \\ &\implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r) = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X \subset V \cap X = U, \end{aligned}$$

logo  $\forall \mathbf{x} \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r) \subset U$ , así que  $U$  é aberto en  $X$ . ■

## 2.18 DEFINICIÓN (PECHADO RELATIVO)

Se  $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $F$  é **pechado en**  $X$  (ou pechado **relativo** de  $X$ ) se  $X \setminus F$  é aberto en  $X$ .

## 2.19 PROPOSICIÓN

Se  $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$F \text{ é pechado en } X \iff \exists G \text{ pechado en } \mathbb{R}^n \mid F = G \cap X.$$

### DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad F \text{ é pechado en } X &\implies X \setminus F \text{ é aberto en } X \\ &\implies \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid X \setminus F = V \cap X \\ &\implies F = X \setminus (V \cap X) = (\mathbb{R}^n \setminus V) \cap X \\ &= G \cap X, \quad G = \mathbb{R}^n \setminus V \text{ pechado en } \mathbb{R}^n. \\ \Leftarrow \quad F = G \cap X, \quad G \text{ pechado en } \mathbb{R}^n &\implies X \setminus F = X \setminus (G \cap X) \\ &= (\mathbb{R}^n \setminus G) \cap X, \quad \mathbb{R}^n \setminus G \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \\ &\implies X \setminus F \text{ aberto en } X \\ &\implies F \text{ pechado en } X. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.20 NOTA

Se  $C \subset X \subset \mathbb{R}^n$  e  $U$  é aberto en  $X$ , entón  $U \cap C$  é aberto en  $C$ , xa que

$$\begin{aligned}U \text{ aberto en } X &\implies \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid U = V \cap X \\&\implies U \cap C = (V \cap X) \cap C = V \cap (X \cap C) = V \cap C \\&\implies U \cap C \text{ é aberto en } C.\end{aligned}$$

Analogamente, a intersección de calquera pechado en  $X$  con un subconxunto  $C$  de  $X$  é un pechado en  $C$ .

## 2.21 EXERCICIO

- ◇  $U$  aberto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset X \implies U$  aberto en  $X$ .
- ◇  $U$  aberto en  $X$ ,  $X$  aberto en  $\mathbb{R}^n \implies U$  aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- ◇  $F$  pechado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $F \subset X \implies F$  pechado en  $X$ .
- ◇  $F$  pechado en  $X$ ,  $X$  pechado en  $\mathbb{R}^n \implies F$  pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.22 OBSERVACIÓN

A familia de abertos relativos dun subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é a **topoloxía relativa** de  $X$ :  $X$  e  $\emptyset$  son abertos en  $X$ , a unión de abertos en  $X$  é aberto en  $X$ , e a intersección finita de abertos en  $X$  é aberto en  $X$ .

As propiedades fundamentais dos pechados tamén se trasladan a  $X$ : o conxunto baleiro e  $X$  son pechados en  $X$ , a intersección arbitraria de pechados en  $X$  é pechado en  $X$ , e a unión finita de pechados en  $X$  é pechado en  $X$ .

## 2.23 NOTA

Un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é un **conxunto discreto** se todos os subconxuntos de  $X$  son abertos en  $X$  (e, polo tanto, todos os subconxuntos de  $X$  tamén son pechados en  $X$ ), é dicir, se a topoloxía relativa de  $X$  é a topoloxía discreta.

## 2.24 EXERCICIO

Estúdese cales dos seguintes subconxuntos de  $\mathbb{R}$  son conxuntos discretos:

- $\{1, 2\}$ ,
- $\mathbb{N}$ ,
- $\mathbb{Z}$ ,
- $\mathbb{Q}$ ,
- $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,
- $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .

## 2.25 DEFINICIÓNS

Sexan  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{x}$  é **punto interior** de  $A$  :  $\iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(\mathbf{x}, r) \subset A$ ,

$\mathbf{x}$  é **punto clausura** (ou **adherente**) de  $A$  :  $\iff \forall r \in \mathbb{R}^+, B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Interior** de  $A$  :  $\text{Int}(A) = \overset{\circ}{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto interior de } A\}$ ,

**Clausura** de  $A$  :  $\text{Cl}(A) = \bar{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto clausura de } A\}$ .

## 2.26 EXERCICIO

$$\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A},$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \bar{A} = (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

## 2.27 PROPIEDADES

Sexa  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

- O interior de  $A$  é o maior aberto en  $\mathbb{R}^n$  contido en  $A$ :
  - ◇  $\overset{\circ}{A} \subset A$ ,
  - ◇ Se  $U$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset A \Rightarrow U \subset \overset{\circ}{A}$ .
  - ◇  $\overset{\circ}{A}$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- $A$  é aberto en  $\mathbb{R}^n \iff A = \overset{\circ}{A}$ .
- A clausura de  $A$  é o menor pechado en  $\mathbb{R}^n$  que contén a  $A$ :
  - $A \subset \bar{A}$ ,
  - Se  $F$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$ .
  - $\bar{A}$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- $A$  é pechado en  $\mathbb{R}^n \iff A = \bar{A}$ .

## 2.28 DEFINIÇÃO

Sexan  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$x$  é **punto fronteira** de  $A$  :  $\iff \forall r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\begin{matrix} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset. \end{matrix}$

**Fronteira** de  $A$ :  $\text{Fr}(A) = \partial(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto fronteira de } A\}$ .

Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ , a **bóla perforada** de centro  $\mathbf{x}$  e raio  $r$  é

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{x}, r) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}.$$

## 2.29 DEFINIÇÃO

Sexan  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{x}$  é **punto de acumulación** de  $A$  :  $\iff \forall r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbf{B}^*(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$

**Conxunto derivado** de  $A$ :  $A' := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto de acumulación de } A\}$ .

## 2.30 EXERCICIO

Sexan  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{x}$  é un punto de acumulación de  $A$ , entón toda bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  de centro  $\mathbf{x}$  contén infinitos puntos de  $A$ .

## 2.31 DEFINIÇÃO

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{x}$  é **punto illado** de  $A$  :  $\iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \cap A = \{\mathbf{x}\}$ .

### **3. Converxencia e completude**

## 3.1 DEFINICIÓN (SUCESIÓN)

Unha **sucesión** nun conxunto  $X$  é unha aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{x}: \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ k &\longmapsto \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

e dise que  $\mathbf{x}_k$  é o *termo*  $k$ -ésimo da sucesión.

## 3.2 OBSERVACIÓN

A sucesión  $\mathbf{x}$  denotarase  $\{\mathbf{x}_k\}$ , e diremos que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión en  $X$ .

O conxunto imaxe da sucesión  $\mathbf{x}: \mathbb{N} \longrightarrow X$  é  $\{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , e é habitual escribir  $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$  para dicir que o conxunto  $\{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  de termos da sucesión está contido nun subconxunto  $A$  de  $X$ .

## 3.3 DEFINICIÓN (CONVERXENCIA)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Dise que a sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  **converxe** a  $\mathbf{x}_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N,$$

equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall k \geq N,$$

e escríbese  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0$  ou  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ .

Se unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  converxe a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  dise que

$\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión **converxente**,  
 $\mathbf{x}_0$  é o **límite** da sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$ ,

e se  $\mathbf{x}_0 \in X$ , tamén diremos que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é **converxente en  $X$**  ou que **converxe en  $X$** .

### 3.4 PROPOSICIÓN

Se unha sucesión é converxente, entón ten un único límite.

#### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X \subset \mathbb{R}^n$  e supoñamos que existen  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  que son límites de  $\{\mathbf{x}_k\}$ . Se  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$ , entón  $r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) > 0$ , logo

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \text{dado } \varepsilon = \frac{r}{2} > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \forall k \geq N_1,$$

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{y}_0 \implies \text{dado } \varepsilon = \frac{r}{2} > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \forall k \geq N_2.$$

Polo tanto, se  $k \geq \max\{N_1, N_2\}$ , utilizando a desigualdade triangular, tense

$$r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_0) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

conque chegamos a unha contradición, así que debe ser  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$ . ■

### 3.5 PROPOSICIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \iff \forall U \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_0 \in U, \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in U \forall k \geq N.$$

#### DEMOSTRACIÓN

⇒

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } U \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_0 \in U \implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, r) \subset U \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \text{dado } \varepsilon = r > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, r) \forall k \geq N \end{array} \right\} \\ \implies \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in U \forall k \geq N.$$

⇐

Dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar o aberto  $U = \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ , e ao aplicar a hipótese,

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in U = \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \forall k \geq N, \text{ logo } \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad \blacksquare$$

## PROPIEDAD DE HAUSDORFF

A unicidade do límite dunha sucesión converxente séguese da **propiedade de separación de Hausdorff**:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \exists U, V \text{ abertos} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \in U, \\ \mathbf{y} \in V, \end{array} \right. U \cap V = \emptyset,$$

polo que dicimos que o espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é un **espazo Hausdorff**.

En efecto, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , entón  $r = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ , e se tomamos  $\varepsilon = r/2 > 0$ , entón  $U = B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  e  $V = B(\mathbf{y}, \varepsilon)$  son abertos en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in V, U \cap V = \emptyset$ .

### 3.6 OBSERVACIÓN

A converxencia dunha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pódese expresar en termos da converxencia a 0 da sucesión de números reais  $\{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\}$ .

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 : &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\iff \{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Por outra parte, imos ver que a converxencia dunha sucesión no espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  está determinada pola converxencia de  $n$  sucesións de números reais.

Utilizaremos na proba un lema que relaciona a norma dun vector de  $\mathbb{R}^n$  e os valores absolutos das súas compoñentes.

### 3.7 LEMA

Se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , entón

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Polo tanto, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , para cada  $i = 1, \dots, n$  tense

$$|x_i - y_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

### DEMOSTRACIÓN

A primeira desigualdade é inmediata:

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2} = \|\mathbf{x}\|.$$

Para probar a segunda desigualdade, se temos en conta que, para algún  $j = 1, \dots, n$ , é  $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_j|$ , tense

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{x_j^2 + \overset{(n)}{\dots} + x_j^2} \\ &= \sqrt{nx_j^2} = \sqrt{n} |x_j| = \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.\end{aligned}$$



### 3.8 TEOREMA

Sea  $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$  una sucesión en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  un punto de  $\mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} \iff \{x_{ki}\} \rightarrow a_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

#### DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$  Polo lema previo,  $|x_{ki} - a_i| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \quad \forall i = 1, \dots, n$ , logo

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid |x_{ki} - a_i| \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\implies \{x_{ki}\} \rightarrow a_i. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Dado  $\varepsilon > 0$ , consideramos  $\varepsilon/\sqrt{n} > 0$ , e usamos a hipótese: Para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\{x_{ki}\} \rightarrow a_i \implies \text{dado } \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0, \exists N_i \in \mathbb{N} \mid |x_{ki} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k \geq N_i,$$

así que se tomamos  $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$ ,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) &\stackrel{3.7}{\leq} \sqrt{n} \max\{|x_{k1} - a_1|, \dots, |x_{kn} - a_n|\} \\ &< \sqrt{n} \max\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\} = \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a}$ . ■

## 3.9 DEFINICIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión nun conxunto  $X$ , definida por  $\mathbf{x}: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

Se  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é unha aplicación estritamente crecente consideramos a composición

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \circ \varphi: \mathbb{N} &\rightarrow X \\ k &\mapsto \mathbf{x}_{\varphi(k)},\end{aligned}$$

e dise que  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  é unha **subsucesión** de  $\{\mathbf{x}_k\}$  (ou que  $\mathbf{x} \circ \varphi$  é unha **subsucesión** de  $\mathbf{x}$ ).

## 3.10 NOTA

Se  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é estritamente crecente, entón  $\varphi(k) \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

En efecto, por indución:

$\varphi(1) \geq 1$ , e se supoñemos que  $\varphi(k-1) \geq k-1$ , entón

$$k > k-1 \implies \varphi(k) > \varphi(k-1) \geq k-1 \implies \varphi(k) > k-1 \implies \varphi(k) \geq k.$$

## 3.11 PROPOSICIÓN

Se unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$  converge a  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón calquera subsucesión  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  de  $\{\mathbf{x}_k\}$  tamén converge a  $\mathbf{x}_0$ .

## DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \\ &\quad \downarrow \varphi(k) \geq k \geq N \\ \mathbf{x}_{\varphi(k)} &\in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \\ &\implies \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$



## 3.12 LEMA (Construción de sucesións converxentes)

Sexa  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sexa  $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, 1/k)$ . Entón,  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión que converxe a  $\mathbf{x}_0$ .

DEMOSTRACIÓN

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_k \in B\left(\mathbf{x}_0, \frac{1}{k}\right) \implies d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{1}{k},$$

e polo teorema de compresión,

$$\begin{aligned} 0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{1}{k} &\implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \text{ e } 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \\ &\implies \{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\} \rightarrow 0 \implies \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.13 PROPOSICIÓN

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón

$$\mathbf{x}_0 \in \bar{A} \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \implies \mathbf{x}_0 \in \bar{A} &\implies \forall r > 0, B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset \implies \forall k \in \mathbb{N}, B(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \\ &\implies \{\mathbf{x}_k\} \subset A \text{ es tal que } \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Lema 3.12

$$\begin{aligned} \impliedby \text{Para probar que } \mathbf{x}_0 \in \bar{A} \text{ imos ver que } \forall r > 0, B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset. \text{ Para isto,} \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \text{ dado } \varepsilon = r > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \forall k \geq N \\ &\implies \mathbf{x}_N \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap A \xrightarrow{\varepsilon=r} B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.14 COROLARIO

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$A \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in A]$$

DEMOSTRACIÓN

$$\Rightarrow \text{ Se } \{\mathbf{x}_k\} \text{ é sucesión en } A, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{Proposición 3.13}} \mathbf{x}_0 \in \bar{A} \xRightarrow{A \text{ pechado}} \mathbf{x}_0 \in A.$$

$\Leftarrow$  Basta ver que  $\bar{A} = A$ , é dicir, que  $\bar{A} \subset A$ . Pois ben,

$$\mathbf{x}_0 \in \bar{A} \xRightarrow{\text{Proposición 3.13}} \exists \{\mathbf{x}_k\} \subset A \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \xRightarrow{\text{hipótese}} \mathbf{x}_0 \in A. \quad \blacksquare$$

$$A \text{ non é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \notin A.$$

### 3.15 COROLARIO

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$A \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 \notin A]$$

$$A \text{ non é aberto en } \mathbb{R}^n \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in A.$$

### 3.16 COROLARIO

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón

$$\mathbf{x}_0 \notin \overset{\circ}{A} \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A} \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A, \{\mathbf{x}_k\} \not\rightarrow \mathbf{x}_0.$$

Séguese da proposición 3.13 e da igualdade  $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ .

### 3.17 PROPOSICIÓN

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A'$  o conjunto derivado de  $A$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\mathbf{x}_0 \in A' \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACIÓN



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \text{ punto de acumulación de } A &\implies \forall r > 0, B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, B^*(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{x}_k \in B^*(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \\ &\implies \{\mathbf{x}_k\} \subset A \text{ é tal que } \begin{cases} \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \end{cases} \end{aligned}$$



Para comprobar que  $\mathbf{x}_0$  é punto de acumulación de  $A$  temos que ver que  $\forall r > 0, B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset$ . Para isto, como por hipótese existe unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  que converge a  $\mathbf{x}_0$  e tal que os seus termos están todos en  $A$  e son todos distintos de  $\mathbf{x}_0$ , fixado  $\varepsilon = r > 0$  temos

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N} &\implies \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B^*(\mathbf{x}_0, r) \quad \forall k \geq N \\ &\implies \mathbf{x}_k \in B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \quad \forall k \geq N \\ &\implies B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$



## 3.18 DEFINICIÓN (SUCESIÓN DE CAUCHY)

Unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$  dise que é unha *sucesión de Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N.$$

## 3.19 PROPOSICIÓN

*Toda sucesión converxente é unha sucesión de Cauchy.*

### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X \subset \mathbb{R}^n$  converxente a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , e fixamos  $\varepsilon > 0$ . Entón,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \text{dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N \\ &\implies \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall k, l \geq N. \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.20 PROPOSICIÓN

*O conxunto de puntos de calquera sucesión de Cauchy (e, polo tanto, de calquera sucesión converxente) é un conxunto acoutado.*

### DEMOSTRACIÓN

Se  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión de Cauchy,

$$\begin{aligned} \text{dado } \varepsilon = 1 &\implies \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < 1 \quad \forall k, l \geq N \\ &\implies d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_N) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| < 1 \quad \forall k \geq N \\ &\implies \|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| + \|\mathbf{x}_N\| < 1 + \|\mathbf{x}_N\| \quad \forall k \geq N \\ &\implies \|\mathbf{x}_k\| \leq \max\{\|\mathbf{x}_1\|, \dots, \|\mathbf{x}_{N-1}\|, 1 + \|\mathbf{x}_N\|\} = M \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\implies \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, M + 1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.21 PROPOSICIÓN

*Toda subsucesión dunha sucesión de Cauchy é unha sucesión de Cauchy*

#### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión de Cauchy e  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  unha subsucesión de  $\{\mathbf{x}_k\}$ , (onde  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é unha aplicación estritamente crecente).

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N \\ &\qquad\qquad\qquad \Downarrow \begin{array}{l} \varphi(k) \geq k \geq N \\ \varphi(l) \geq l \geq N \end{array} \\ &\qquad\qquad\qquad d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_{\varphi(l)}) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N \\ &\Rightarrow \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \text{ sucesión de Cauchy} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.22 PROPOSICIÓN

*Se unha sucesión de Cauchy  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$  ten unha subsucesión  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  que converxe a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón  $\{\mathbf{x}_k\}$  tamén converxe a  $\mathbf{x}_0$ .*

#### DEMOSTRACIÓN

Temos que demostrar que  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall k \geq N$ .

Fixamos  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} &\Rightarrow \text{dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k, l \geq N_1 \\ \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\Rightarrow \text{dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N_2. \end{aligned}$$

Se  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , e  $k \geq N$ , entón  $\varphi(k) \geq k \geq \max\{N_1, N_2\}$ , así que

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \leq \underbrace{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{\varphi(k)})}_{k, \varphi(k) \geq N_1} + \underbrace{d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_0)}_{\varphi(k) \geq N_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

### 3.23 DEFINICIÓN

Dise que un conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é **completo** se toda sucesión de Cauchy en  $X$  é converxente en  $X$ .

### 3.24 EXEMPLOS

- (a)  $\mathbb{Q}$  non é completo.
- (b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  non é completo.
- (c)  $\mathbb{R}^+$  non é completo.
- (d)  $\mathbb{R}$  é completo.

### 3.25 TEOREMA (Completeness of $\mathbb{R}^n$ )

*O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é completo.*

#### DEMOSTRACIÓN

Consideramos unha sucesión de Cauchy  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , e imos comprobar que existe  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a}$ , para o que utilizaremos o carácter completo de  $\mathbb{R}$ .

Poñemos  $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$ , e temos as sucesións  $\{x_{ki}\}$  de números reais,  $1 \leq i \leq n$ . Polo lema 3.7, tense

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (*)$$

e polo teorema 3.8,

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \iff \{x_{ki}\} \rightarrow a_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (**)$$

Por tanto,

$$\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid |x_{ki} - x_{li}| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N$$

(\*)

$$\implies \{x_{ki}\} \text{ é unha sucesión de Cauchy en } \mathbb{R}, \quad \forall i$$

$$\implies \exists a_i \in \mathbb{R} \mid \{x_{ki}\} \rightarrow a_i, \quad \forall i$$

$\mathbb{R}$  é completo

$$\implies \{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\} \rightarrow (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{a}. \quad \blacksquare$$

(\*\*)

### 3.26 PROPOSICIÓN

Se  $X$  é un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$ , entón

$$X \text{ é completo} \iff X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n.$$

#### DEMOSTRACIÓN

É consecuencia inmediata da caracterización ([corolario 3.14](#)) dun conxunto pechado en  $\mathbb{R}^n$  como aquel que contén ao límite de cada sucesión converxente de puntos no conxunto e de que  $\mathbb{R}^n$  é completo:

Se  $X$  é un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$ , entón

$$X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in X]$$

$$\iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \text{ converxente en } \mathbb{R}^n \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ converge en } X]$$

$$\stackrel{\mathbb{R}^n \text{ completo}}{\iff} \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ converge en } X]$$

$$\iff X \text{ é completo.}$$



## **4. Continuidade**

### 4.1 DEFINICIÓN (APLICACIÓN CONTINUA NUN PUNTO)

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación,  $\mathbf{x}_0 \in X$ .

Dise que  $f: X \rightarrow Y$  é **continua en  $\mathbf{x}_0$**  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x} \in X, d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon,$$

equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

### 4.2 OBSERVACIÓN

A continuidade de  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  non depende do codominio de  $f$ .

Se consideramos a aplicación

$$\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

e  $\mathbf{x}_0 \in X$ , tense que  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  se, e só se,  $\tilde{f}$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ , xa que, posto que  $f(X) \subset Y$ ,

$$f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \iff f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Se, ademais,  $f(X) \subset Z \subset \mathbb{R}^m$ , tamén ten sentido considerar a aplicación

$\bar{f}: X \rightarrow Z$  dada por  $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ , e tense

$$f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \iff \tilde{f} \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \iff \bar{f} \text{ é continua en } \mathbf{x}_0,$$

xa que

$$f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \iff f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Z(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

### 4.3 DEFINICIÓN (APLICACIÓN CONTINUA (globalmente))

Unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é **continua** se  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  para cada punto  $\mathbf{x}_0 \in X$ .

### 4.4 EXEMPLOS

Son aplicacións continuas:

- Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , a aplicación **identidade** en  $X$ ,

$$\begin{aligned}\text{id}_X: X &\longrightarrow X \\ \mathbf{x} &\longmapsto \text{id}_X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- Se  $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ , a **inclusión** de  $X$  en  $Y$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{i}: X &\hookrightarrow Y \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{i}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

En particular, a inclusión de  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{i}: X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .

- As **aplicacións constantes**: se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ , para calquera punto  $\mathbf{y}_0 \in Y$ , a aplicación constante

$$\begin{aligned}\text{cte}_{\mathbf{y}_0}: X &\longrightarrow Y \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{y}_0.\end{aligned}$$

O seguinte teorema será moi útil para comprobar, dunha forma simple, o carácter aberto e o carácter pechado de subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 4.5 TEOREMA (Caracterizacións da continuidade global)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación. Entón, as seguintes propiedades son equivalentes:

- (a) A aplicación  $f: X \rightarrow Y$  é continua.
- (b) A imaxe inversa  $f^{-1}(V)$  de cada aberto  $V$  en  $Y$  é un aberto en  $X$ .
- (c) A imaxe inversa  $f^{-1}(F)$  de cada pechado  $F$  en  $Y$  é un pechado en  $X$ .

DEMOSTRACIÓN

(a)  $\Rightarrow$  (b) Consideramos un aberto  $V$  en  $Y$  e imos comprobar que  $f^{-1}(V)$  é aberto en  $X$ , é dicir, que todo punto  $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$  é centro dunha bóla aberta relativa a  $X$  contida en  $f^{-1}(V)$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V) &\implies f(\mathbf{x}_0) \in V \implies \exists \varepsilon > 0 \mid B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \subset V \\ &\stackrel{(a)}{\implies} \exists \delta > 0 \mid f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \subset V \\ &\implies \exists \delta > 0 \mid B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}\left(f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta))\right) \subset f^{-1}(V).\end{aligned}$$

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sexa  $\mathbf{x}_0 \in X$ , e dado  $\varepsilon > 0$  imos comprobar que existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$ .

$$\begin{aligned}V = B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \text{ aberto en } Y, f(\mathbf{x}_0) \in V &\stackrel{(b)}{\implies} \mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V) \text{ aberto en } X \\ &\implies \exists \delta > 0 \mid B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(V) \\ &\implies f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V = B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).\end{aligned}$$

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) séguese de que  $\forall C \subset Y, f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$  e de que os subconjuntos pechados de  $Y$  (e de  $X$ ) son complementarios dos abertos en  $Y$  (e en  $X$ , respectivamente). ■

## 4.6 PROPOSICIÓN

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Z \subset \mathbb{R}^l$ , e consideremos as aplicacións  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ . Se  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0 \in X$  e  $g$  é continua en  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in Y$ , entón  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ .

### DEMOSTRACIÓN

Temos que probar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid (g \circ f)(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Z((g \circ f)(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Para isto tomamos  $\varepsilon > 0$ , e temos:

$$g \text{ continua en } \mathbf{y}_0 \implies \exists \eta > 0 \mid g(B_Y(\mathbf{y}_0, \eta)) \subset B_Z((g(\mathbf{y}_0), \varepsilon)), \quad (*)$$

e se agora tomamos  $\eta > 0$ ,

$$f \text{ continua en } \mathbf{x}_0 \implies \exists \delta > 0 \mid f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y((f(\mathbf{x}_0), \eta). \quad (**)$$

Polo tanto,

$$(g \circ f)(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) = g\left(f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta))\right) \underset{(**)}{\subset} g(B_Y(f(\mathbf{x}_0), \eta)) \underset{(*)}{\subset} B_Z(g(f(\mathbf{x}_0)), \varepsilon). \quad \blacksquare$$

## 4.7 COROLARIO

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  e  $g: Y \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^l$  son aplicacións continuas, entón a composición  $g \circ f: X \rightarrow Z$  tamén é continua.

4.8 TEOREMA (Caracterización secuencial da continuidade)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación e  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Entón,  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  se, e só se,  $f$  é **secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$** , é dicir,

$$\forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow \{f(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f(\mathbf{x}_0)].$$

DEMOSTRACIÓN

Supoñamos que  $f: X \rightarrow Y$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ . Consideramos unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  que converxe a  $\mathbf{x}_0$  e imos comprobar que a sucesión  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  en  $Y$  converxe a  $f(\mathbf{x}_0)$ . Para isto, tomamos  $\varepsilon > 0$  e temos que atopar un número natural  $N$  tal que, a partir del, todos os termos da sucesión  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  están en  $B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$ :

$$\left. \begin{aligned} f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 &\implies \text{ dado } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \\ \{\mathbf{x}_k\} \subset X, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \text{ dado } \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \forall k \geq N \end{aligned} \right\}$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid f(\mathbf{x}_k) \in B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \forall k \geq N$$

$$\implies \{f(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f(\mathbf{x}_0).$$

Para probar a implicación recíproca, supoñemos que  $f$  non é continua en  $\mathbf{x}_0$  e imos ver que nese caso  $f$  non é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ . Usaremos a construción de sucesións converxentes no lema 3.9 para obter unha sucesión en  $X$  que converxe a  $\mathbf{x}_0$  pero tal que a sucesión das imaxes non converxe a  $f(\mathbf{x}_0)$ :

$$\begin{aligned} f \text{ non é continua en } \mathbf{x}_0 &\implies \exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0, f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \not\subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, \text{ dado } \delta_k = \frac{1}{k} \exists \mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, \delta_k) \mid f(\mathbf{x}_k) \notin B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \\ &\stackrel{3.9}{\implies} \exists \varepsilon > 0 \text{ e } \exists \{\mathbf{x}_k\} \subset X \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0, \text{ pero } d(f(\mathbf{x}_k), f(\mathbf{x}_0)) \geq \varepsilon \forall k \\ &\implies \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \text{ pero } \{f(\mathbf{x}_k)\} \not\rightarrow f(\mathbf{x}_0) \\ &\implies f \text{ non é secuencialmente continua en } \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

#### 4.9 DEFINICIÓN (PROYECCIONES)

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , a **proyección**  $i$ -ésima de  $\mathbb{R}^n$  é a aplicación

$$\begin{aligned}\pi_i: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \pi_i(\mathbf{x}) = x_i.\end{aligned}$$

#### 4.10 PROPOSICIÓN

Cada proyección  $\pi_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  é unha aplicación continua.

#### DEMOSTRACIÓN

Para probar que cada  $\pi_i$  é secuencialmente continua imos utilizar que unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$  converge a un punto  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  se, e só se, cada sucesión de compoñentes  $i$ -ésimas  $\{\mathbf{x}_{ki}\}$  converge a  $a_i$  (teorema 3.8).

Sexa  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  e sexa  $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$  unha sucesión en  $\mathbb{R}^n$  que converge a  $\mathbf{a}$ . Entón

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} \xrightarrow[3.8]{\implies} \{\mathbf{x}_{ki}\} \rightarrow a_i \quad \forall i \implies \{\pi_i(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow \pi_i(\mathbf{a}) \quad \forall i,$$

logo  $\pi_i$  é secuencialmente continua para cada  $i = 1, \dots, n$ . ■

#### 4.11 DEFINICIÓN (COMPOÑENTES DUNHA APLICACIÓN)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  unha aplicación. Para cada  $j = 1, \dots, m$ , a **compoñente**  $j$ -ésima de  $f$  é a composición

$$\begin{array}{ccc} & \overset{f_j = \pi_j \circ f}{\frown} & \\ X \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R} \\ & \searrow & \nearrow \\ \mathbf{x} & \longmapsto & f(\mathbf{x}) \longmapsto f_j(\mathbf{x}) = \pi_j(f(\mathbf{x})), \end{array}$$

así que  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ , e tamén se escribe  $\underline{f} = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ .

## 4.12 PROPOSICIÓN

Sea  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{x}_0 \in X$ , entón  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  se, e só se, o é cada compoñente:

$$f = (f_1, \dots, f_m) \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \iff f_j = \pi_j \circ f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \quad \forall j.$$

### DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n \\ \pi_j \text{ é continua en } f(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} \implies f_j = \pi_j \circ f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0.$$

$\Leftarrow$  Supoñemos que cada  $f_j$  é continua ( $j = 1, \dots, m$ ) en  $\mathbf{x}_0$  e imos ver que o é  $f$  comprobando que é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ f_j \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \in X \end{array} \right\} \implies \{f_j(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f_j(\mathbf{x}_0)$$
$$\stackrel{3.8}{\implies} \{f(\mathbf{x}_k)\} = \{(f_1(\mathbf{x}_k), \dots, f_m(\mathbf{x}_k))\} \rightarrow (f_1(\mathbf{x}_0), \dots, f_m(\mathbf{x}_0)) = f(\mathbf{x}_0),$$

conque  $f$  é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ . ■

## 4.13 COROLARIO

Unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é continua se, e só se, o é cada compoñente  $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

#### 4.14 OBSERVACIÓN

Como consecuencia da proposición e corolario anteriores, estudar a continuidade de aplicacións definidas en subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$  con valores en  $\mathbb{R}^m$  (ou en subconxuntos de  $\mathbb{R}^m$ ) equivale a estudar a continuidade de funcións con valores en  $\mathbb{R}$ . Para isto, é útil ter en conta que se  $f, g: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funcións continuas (en  $\mathbf{x}_0 \in X$ ) tamén son continuas (en  $\mathbf{x}_0$ ) as funcións

$$X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f + g: \mathbf{x} \mapsto (f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}),$$

$$f \cdot g: \mathbf{x} \mapsto (f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}),$$

$$\text{se } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f: \mathbf{x} \mapsto (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}),$$

$$\text{se } g(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in X, \quad \frac{f}{g}: \mathbf{x} \mapsto \frac{f}{g}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}.$$

En efecto, por exemplo  $f + g$  é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ , xa que para calquera sucesión en  $X$  tal que  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , tense

$$\{(f + g)(\mathbf{x}_k)\} = \{f(\mathbf{x}_k) + g(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0) = (f + g)(\mathbf{x}_0),$$

posto que o límite da suma de dúas sucesións converxentes de números reais é a suma dos límites. De modo análogo, tense a continuidade en cada un dos outros casos.

#### 4.15 PROPOSICIÓN

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua e  $A \subset X$ , entón a **restrición** de  $f$  a  $A$ ,  $f|_A: A \rightarrow Y$ , tamén é continua.

#### DEMOSTRACIÓN

É consecuencia inmediata de que  $f|_A = f \circ i$  é composición de dúas aplicacións continuas,

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{i} & X \xrightarrow{f} Y \\ x & \longmapsto & x \longmapsto f(x) \end{array} \quad \blacksquare$$

#### 4.16 OBSERVACIÓN

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua, entón a súa restrición a calquera subconxunto  $A$  de  $X$  é continua en todos os puntos de  $A$ .

Agora ben, pode suceder que  $f: X \rightarrow Y$  sexa tal que a súa restrición  $f|_A: A \rightarrow Y$  sexa continua para algún subconxunto  $A$  de  $X$  pero que  $f$  non sexa continua en puntos de  $A$ .

Por exemplo, a función de Dirichlet

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

é tal que as súas restricións  $f|_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas (son aplicacións constantes) pero  $f$  non é continua en ningún punto de  $\mathbb{R}$ .

Non obstante, cúmprese que se  $A$  é aberto en  $X$  e  $f|_A$  é continua, entón  $f$  é continua en todos os puntos de  $A$ , como se ve na seguinte proposición.

## 4.17 PROPOSICIÓN

Sea  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación.

Se  $A$  é aberto en  $X$  e  $f|_A: A \rightarrow Y$  é continua, entón  $f$  é continua en todos os puntos de  $A$ .

### DEMOSTRACIÓN

Sea  $\mathbf{x}_0 \in A$  e vexamos que se  $f|_A$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ , entón  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ , é dicir, que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$f|_A \text{ continua en } \mathbf{x}_0 \implies \exists \delta_1 > 0 \mid f|_A(\mathbf{B}_A(\mathbf{x}_0, \delta_1)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Agora,

$\mathbf{B}_A(\mathbf{x}_0, \delta_1) = \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap A \stackrel{A \subseteq X}{=} \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap X \cap A = \mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap A$  é aberto en  $X$ , (porque é a intersección de dous abertos en  $X$ ), logo

$$\exists \delta > 0 \mid \mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset \mathbf{B}_A(\mathbf{x}_0, \delta_1)$$

$\Downarrow$

$$f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset f(\mathbf{B}_A(\mathbf{x}_0, \delta_1)) = f|_A(\mathbf{B}_A(\mathbf{x}_0, \delta_1)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon). \quad \blacksquare$$

## 4.18 EXEMPLO

A aplicación

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é continua en todos os puntos de  $A = (0, +\infty)$  e de  $B = (-\infty, 0)$ , posto que  $A$  e  $B$  son abertos en  $\mathbb{R}$  e

$$f|_A: x \in A \mapsto 1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f|_B: x \in B \mapsto 0 \in \mathbb{R}$$

son aplicacións continuas, xa que son constantes.

## 4.19 EXERCICIO

Consideramos a aplicación  $f: X = \mathbb{R}^2 \rightarrow Y = \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } xy > 0, \\ 0 & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

Utilizando a proposición anterior próbase que  $f$  é continua en todos os puntos de  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ .

### SOLUCIÓN

Sexan

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}, \quad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}.$$

Estos dous conxuntos son abertos en  $\mathbb{R}^2$ ; un modo de comprobalo consiste en utilizar a caracterización da continuidade (teorema 4.5), mostrando que se poden escribir como imaxes inversas de abertos, neste caso en  $\mathbb{R}$ , por algunha aplicación continua. En efecto, se consideramos a aplicación  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x, y) = xy,$$

entón  $h$  é continua, xa que  $h = \pi_1 \pi_2$  é produto de dúas aplicacións continuas, e

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) \in (0, +\infty)\} = h^{-1}(0, +\infty),$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) \in (-\infty, 0)\} = h^{-1}(-\infty, 0).$$

Agora,  $f|_U = (\pi_1)|_U$  é continua xa que é a restricción da proxección  $\pi_1$  a  $U$ , e posto que  $U$  é aberto en  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  é continua en todos os puntos de  $U$ .

Ademais,  $f|_V$  é a aplicación constante 0, logo é continua e, posto que  $V$  é aberto en  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  tamén é continua en todos os puntos de  $V$ .

Conclúese que  $f$  é continua en cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $xy \neq 0$  (aínda que hai máis puntos de  $\mathbb{R}^2$  nos que  $f$  é continua!).

#### 4.20 DEFINICIÓN (APLICACIÓN COMBINADA)

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ , e supoñamos que  $A$  e  $B$  son subconxuntos de  $X$  tales que  $A \cup B = X$ . Se  $g: A \rightarrow Y$  e  $h: B \rightarrow Y$  son aplicacións tales que  $g|_{A \cap B} = h|_{A \cap B}$ , entón está ben definida a aplicación  $f: X \rightarrow Y$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A, \\ h(x) & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

e dise que  $f$  é a **aplicación combinada** de  $g$  e  $h$ .

#### 4.21 EXEMPLO

A aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 - y^2 + 1 & \text{se } y \geq x, \\ e^{x-y} & \text{se } y \leq x, \end{cases}$$

é a aplicación combinada das aplicacións

$$g: A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 1,$$

e

$$h: B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{x-y}.$$

## 4.22 PROPOSICIÓN

Sexa  $f: X = A \cup B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  a aplicación combinada de  $g: A \rightarrow Y$  e  $h: B \rightarrow Y$  e supoñamos que  $g$  e  $h$  son continuas.

- (1) Se  $A$  e  $B$  son pechados en  $X$ , entón  $f$  é continua.
- (2) Se  $A$  e  $B$  son abertos en  $X$ , entón  $f$  é continua.

### DEMOSTRACIÓN

(1) Sexa  $F$  un pechado en  $Y$  e vexamos que a súa imaxe inversa por  $f$  é un pechado en  $X$ .

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{ \mathbf{x} \in X = A \cup B \mid f(\mathbf{x}) \in F \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \in F \} \cup \{ \mathbf{x} \in B \mid f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \in F \} \\ &= g^{-1}(F) \cup h^{-1}(F). \end{aligned}$$

Agora,

$$\left. \begin{array}{l} g: A \rightarrow Y \text{ continua} \xRightarrow[\text{F pechado en Y}]{\text{A pechado en X}} g^{-1}(F) \text{ pechado en } A \xRightarrow[\text{A pechado en X}]{\text{F pechado en Y}} g^{-1}(F) \text{ pechado en } X \\ h: B \rightarrow Y \text{ continua} \xRightarrow[\text{F pechado en Y}]{\text{B pechado en X}} h^{-1}(F) \text{ pechado en } B \xRightarrow[\text{B pechado en X}]{\text{F pechado en Y}} h^{-1}(F) \text{ pechado en } X \end{array} \right\}$$
$$\implies f^{-1}(F) = g^{-1}(F) \cup h^{-1}(F) \text{ é pechado en } X.$$

(2) A proba sería como a anterior cambiando “pechado” por “aberto”. Ou ben, pode obterse directamente como consecuencia de que  $g = f|_A$ ,  $h = f|_B$  e da proposición 4.17, é dicir, usando que se a restrición de  $f$  ao aberto  $A$  e ao aberto  $B$  en  $X$  é continua, entón  $f$  é continua en todos os puntos de cada aberto. ■

#### 4.23 DEFINIÇÃO (APLICACIÓN UNIFORMEMENTE CONTINUA)

Unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é *uniformemente continua* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon.$$

#### 4.24 OBSERVACIÓNS

Toda aplicación uniformemente continua é continua xa que se  $f: X \rightarrow Y$  é uniformemente continua, entón, para cada punto  $\mathbf{x} \in X$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{y} \in X, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon.$$

Ademais, dise que  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é *lipschitziana* se existe  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 0$ , tal que

$$d_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq M d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$$

e  $M$  chámase unha *constante de Lipschitz*; se  $M < 1$  tamén se di que  $f$  é unha *aplicación contractiva*.

Toda aplicación lipschitziana é uniformemente continua.

#### 4.25 EXERCICIO

Se  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación uniformemente continua e  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión de Cauchy en  $X$ , entón  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  é unha sucesión de Cauchy en  $Y$ .

## 4.26 OBSERVACIÓN

Se unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é continua, entón a imaxe inversa de calquera aberto (ou pechado) en  $Y$  é un aberto (ou pechado) en  $X$ . Pero a imaxe directa dun aberto ou pechado en  $X$  por unha aplicación continua pode non ser nin aberto nin pechado en  $Y$ .

## 4.27 EXEMPLOS

- A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  é continua e  $A = (-1, 1)$  é aberto en  $\mathbb{R}$ , pero  $f(A) = [0, 1)$  non é aberto en  $\mathbb{R}$ .
- A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^x$  é continua e  $B = (-\infty, 0]$  é pechado en  $\mathbb{R}$ , pero  $f(B) = (0, 1]$  non é pechado en  $\mathbb{R}$ .

## 4.28 DEFINICIÓNS (APLICACIÓNS ABERTAS, PECHADAS)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ .

$f$  é unha aplicación **aberta** :  $\iff [\forall U$  aberto en  $X \Rightarrow f(U)$  aberto en  $Y$ ];

$f$  é unha aplicación **pechada** :  $\iff [\forall F$  pechado en  $X \Rightarrow f(F)$  pechado en  $Y$ ].

## 4.29 EXEMPLO

Sexa  $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$  e  $i: A \rightarrow X$  a inclusión.

- Se  $A$  é aberto en  $X$ , entón a inclusión  $i$  é aberta.
- Se  $A$  é pechado en  $X$ , entón a inclusión  $i$  é pechada.

## 4.30 NOTA

Se a aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é bixectiva, entón  $f$  é aberta se, e só se,  $f$  é pechada. Isto é consecuencia inmediata de que para unha aplicación bixectiva  $f: X \rightarrow Y$ , tense

$$\forall A \subset X, \quad f(X \setminus A) = Y \setminus f(A).$$

## 4.31 DEFINICIÓN (HOMEOMORFISMO)

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  dise que é un **homeomorfismo** se é bixectiva, continua e a súa inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  tamén é continua.

## 4.32 NOTA

$$f: X \rightarrow Y \text{ é un homeomorfismo} \iff \begin{cases} f \text{ é bixectiva} \\ f \text{ é continua} \\ f \text{ é aberta} \end{cases} \iff \begin{cases} f \text{ é bixectiva} \\ f \text{ é continua} \\ f \text{ é pechada.} \end{cases}$$

## 4.33 DEFINICIÓN (CONXUNTOS HOMEOMORFOS)

Se existe un homeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  dise que os conxuntos  $X$  e  $Y$  son **homeomorfos** e escribiremos  $X \approx Y$ .

## 4.34 NOTA

A relación  $\approx$  (“*ser homeomorfos*”) é unha relación de equivalencia na familia de todos os subconxuntos de todos os espazos euclidianos; é dicir, se  $X, Y, Z$  son subconxuntos de espazos euclidianos de calquera dimensión, tense

$$(1) X \approx X; (2) X \approx Y \Rightarrow Y \approx X; (3) X \approx Y, Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z,$$

como consecuencia, respectivamente, de que **a identidade é un homeomorfismo**, **a inversa dun homeomorfismo tamén o é**, e **a composición de homeomorfismos é un homeomorfismo** (téñase en conta que se  $f$  e  $g$  son bixectivas, entón  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ).

### 4.35 EXEMPLO

Todos os intervalos pechados acoutados en  $\mathbb{R}$  son homeomorfos entre si.

Posto que a relación  $\approx$  é de equivalencia, basta comprobar que todos os intervalos pechados son homeomorfos ao intervalo  $[0, 1]$ .

Pois ben, para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , as aplicacións

$$\begin{aligned} [0, 1] &\xrightarrow{f} [a, b] & [a, b] &\xrightarrow{g} [0, 1] \\ t &\mapsto a + t(b - a), & s &\mapsto \frac{s - a}{b - a}, \end{aligned}$$

son tales que  $g = f^{-1}$ , así que son bixectivas; e tamén son continuas, logo  $f$  é un homeomorfismo e  $[0, 1] \approx [a, b]$ .

### 4.36 EXEMPLO

Todos os intervalos abertos (acoutados ou non) de números reais son homeomorfos entre si e homeomorfos a  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

En efecto, téñense os seguintes homeomorfismos:

$$\begin{aligned} (0, 1) &\xrightarrow{f} (a, b) & \mathbb{R} &\xrightarrow{g} (-1, 1) \\ t &\mapsto a + t(b - a), & x &\mapsto \frac{x}{1 + |x|}, \\ \frac{s - a}{b - a} &\longleftarrow s & \frac{y}{1 - |y|} &\longleftarrow y \end{aligned}$$

que mostran que todos os intervalos abertos acoutados son homeomorfos entre si e homemorfos a  $\mathbb{R}$ . E tamén son homeomorfos a todos os intervalos abertos non acoutados:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow (0, +\infty) \longrightarrow (a, +\infty) \longrightarrow (-\infty, -a) \\ t &\mapsto e^t & y &\mapsto -y \\ \log x &\longleftarrow x & &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

#### 4.37 EJEMPLO

Un homeomorfismo entre los intervalos  $(0, 1]$  e  $[1, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} (0, 1] &\xrightarrow{h} [1, +\infty) \\ t &\mapsto 1/t \\ 1/s &\longleftarrow s \end{aligned}$$

#### 4.38 EJERCICIO

Todos los intervalos de la forma  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, +\infty)$  e  $[-\infty, b)$  son homeomorfos entre sí.

#### 4.39 EJEMPLO

Son homeomorfismos:

- $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , a *traslación* (con respecto a  $\mathbf{v}$ )  $T_{\mathbf{v}}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}$ ,  $T_{\mathbf{v}}^{-1} = T_{-\mathbf{v}}$ ,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ , a *homotecia* (de razón  $\lambda$ )  $H_{\lambda}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \lambda \cdot \mathbf{x}$ ,  $H_{\lambda}^{-1} = H_{1/\lambda}$ .

#### 4.40 EJEMPLO

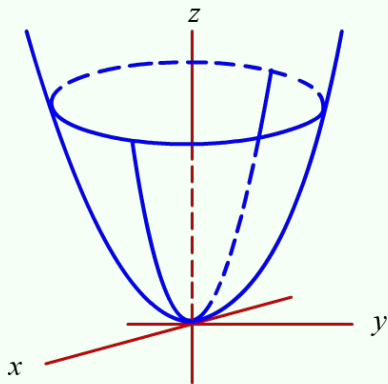
Todas las bolas abiertas en  $\mathbb{R}^n$  son homeomorfas entre sí e homeomorfas a  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} f: B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1) &\xrightarrow{\approx} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{a}, r) & g: B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1) &\xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto r\mathbf{x} + \mathbf{a}, & \mathbf{x} &\longmapsto \frac{\mathbf{x}}{1 - \|\mathbf{x}\|}, \\ \frac{1}{r}(\mathbf{y} - \mathbf{a}) &\longleftarrow \mathbf{y} & \frac{\mathbf{y}}{1 + \|\mathbf{y}\|} &\longleftarrow \mathbf{y} \end{aligned}$$

#### 4.41 EJERCICIO

Todas las bolas cerradas en  $\mathbb{R}^n$  son homeomorfas entre sí.

#### 4.42 EJEMPLO



$\mathbb{R}^2$  e o paraboloide  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$  son homeomorfos. En efecto, a aplicación

$$f: P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x, y),$$

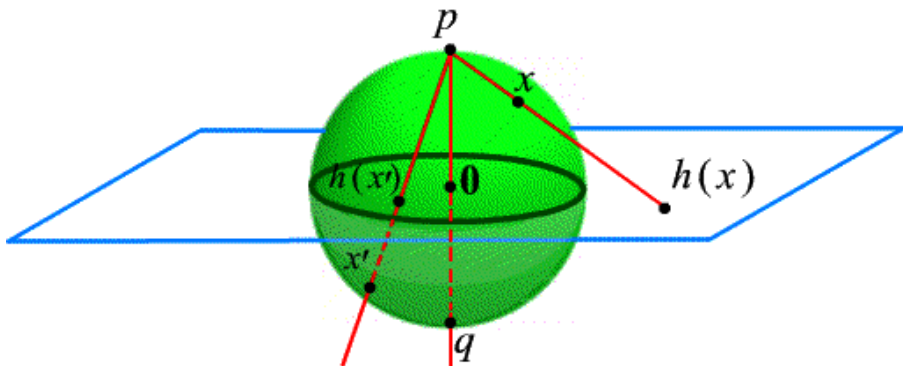
é bixectiva: A aplicación

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

é tal que  $g \circ f = \text{id}_P$  e  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ , así que  $g = f^{-1}$ , e tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son continuas (o son as compoñentes de cada unha). Logo  $f$  é un homeomorfismo (e tamén  $f^{-1}$ ) e  $P \approx \mathbb{R}^2$ .

#### 4.43 EXERCICIO

Sexa  $\mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  o polo norte da esfera  $\mathbb{S}^n$ . Defínese unha aplicación  $h: \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{p}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , chamada *proxección estereográfica*, como segue: se  $\mathbf{x}$  é un punto de  $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{p}\}$ , entón  $h(\mathbf{x})$  é o punto de intersección da recta determinada por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{x}$  con  $\mathbb{R}^n$  (considerado como o subconxunto  $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Constrúe  $h$  e probade que é un homeomorfismo.



### 4.44 NOTA

Unha propiedade  $\mathcal{P}$  aplicable a subconxuntos de espazos euclidianos (ou, dun modo máis xeral, a espazos topolóxicos) dise que é unha **propiedade topolóxica** se é invariante por homeomorfismos, é dicir, se se verifica

$$X \text{ satisface } \mathcal{P}, X \approx Y \Rightarrow Y \text{ satisface } \mathcal{P}.$$

### 4.45 EXEMPLOS

- “Ser finito” e “ser numerable” son propiedades topolóxicas, xa que se existe unha aplicación bixectiva entre dous conxuntos, entón ambos teñen o mesmo cardinal.
- “Ser acoutado” non é unha propiedade topolóxica. Por exemplo,  $\mathbb{R} \approx (-1, 1)$ , pero  $(-1, 1)$  é acoutado e  $\mathbb{R}$  non é acoutado.
- “Ser completo” non é unha propiedade topolóxica. Por exemplo,  $\mathbb{R} \approx (-1, 1)$ , pero  $\mathbb{R}$  é completo e  $(-1, 1)$  non é completo (xa que non é pechado en  $\mathbb{R}$ ).
- “Ser discreto” é unha propiedade topolóxica, xa que se  $X \approx Y$  e  $X$  é discreto, entón  $Y$  tamén é discreto, pois se  $f: X \rightarrow Y$  é un homeomorfismo, en particular  $f$  é bixectiva, e calquera subconxunto de  $Y$  é imaxe directa por  $f$  (aberta) dalgún subconxunto de  $X$  (que sempre é aberto en  $X$ ), así que todo subconxunto de  $Y$  é aberto en  $Y$ .

## **5. Conexión**

Ser **conexo** significa “non estar separado” en partes disxuntas. Houbo diversas definicións matemáticas deste concepto, pero hoxe en día hai unha definición universalmente aceptada, segundo a cal,

un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  **non é conexo** se se pode separar dunha forma natural por certo tipo de subconxuntos disxuntos non baleiros  $U$  e  $V$  tales que a súa unión é  $X$ , así que vai ser que  $X$  **non é conexo** se

$$\exists U, V \text{ abertos en } X \text{ tales que } \begin{aligned} X &= U \cup V, & U \cap V &= \emptyset \\ U &\neq \emptyset, & V &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

### 5.1 DEFINICIÓN (SEPARACIÓN)

Unha **separación** dun conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é un par (non ordenado)  $U|V$  de subconxuntos de  $X$  tales que

- $U$  e  $V$  son abertos en  $X$ ,
- $X = U \cup V$ ,
- $U \cap V = \emptyset$ .

### 5.2 NOTA

Unha separación  $U|V$  de  $X$  dise que é **a separación trivial** de  $X$  se

$$U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset,$$

(logo  $V = X$  ou  $U = X$ , respectivamente); é dicir, a separación trivial de  $X$  é  $\emptyset|X = X|\emptyset$ .

### 5.3 DEFINICIÓN (CONJUNTO CONEXO)

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dese que  $X$  é **conexo** se a única separación que admite é a separación trivial.

$$\begin{aligned} X \text{ é conexo} &\iff [U|V \text{ separación de } X \Rightarrow U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset] \\ &\iff \nexists U, V \text{ abertos en } X \left\{ \begin{array}{l} X = U \cup V, U \cap V = \emptyset \\ U \neq \emptyset, V \neq \emptyset. \end{array} \right. \end{aligned}$$

### 5.4 PROPOSICIÓN

Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é conexo se, e só se, os únicos subconjuntos de  $X$  que son á vez abertos e pechados en  $X$  son  $X$  e  $\emptyset$ .

#### DEMOSTRACIÓN

Imos probar a equivalencia

$$X \text{ conexo} \iff [U \text{ aberto e pechado en } X \Rightarrow U = \emptyset \text{ ou } U = X].$$

$\Rightarrow$  Se  $U$  é aberto e pechado en  $X$ , entón  $U|X \setminus U$  é unha separación de  $X$ . Como, por hipótese,  $X$  é conexo, a separación  $U|X \setminus U$  é a separación trivial, logo  $U = \emptyset$  ou  $X \setminus U = \emptyset$ , é dicir,  $U = \emptyset$  ou  $U = X$ .

$\Leftarrow$  Supoñemos que os únicos abertos e pechados en  $X$  son  $\emptyset$  e  $X$ , e sexa  $U|V$  unha separación de  $X$ ; dado que  $U$  e  $V$  son complementarios en  $X$  ambos son tamén pechados en  $X$ . Entón,

$$\left. \begin{array}{l} U \text{ aberto en } X \\ U \text{ pechado en } X \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{hipótese}]{} U = \emptyset \text{ ou } U = X \xrightarrow[V=X \setminus U]{} U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset,$$

é dicir,  $U|V = \emptyset|X$  é a separación trivial. ■

## 5.5 EXEMPLOS

- $\emptyset$  é conexo.
- Para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , o conxunto unitario  $\{\mathbf{x}\}$  é conexo.
- Calquera subconxunto discreto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  con máis dun punto non é conexo: se  $\mathbf{p} \in X$ , entón  $\{\mathbf{p}\} | X \setminus \{\mathbf{p}\}$  é unha separación non trivial de  $X$ .  
En particular, calquera subconxunto finito de  $\mathbb{R}^n$  con máis dun punto non é conexo;  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  non son conexos.
- $\mathbb{Q}$  non é conexo: por exemplo,  $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} | (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$  é unha separación non trivial de  $\mathbb{Q}$ .

Os únicos subconxuntos conexos de  $\mathbb{Q}$  son os conxuntos unitarios:

en efecto, se  $X \subset \mathbb{Q}$  non é unitario, entón

$$\exists a, b \in X, a < b$$



$$\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid a < r < b \implies (-\infty, r) \cap X | (r, +\infty) \cap X \text{ é unha separación non trivial de } X,$$

$$\implies X \text{ non é conexo.}$$

## 5.6 TEOREMA

O intervalo pechado  $\mathbb{I} = [0, 1]$  é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Supoñemos que  $U|V$  é unha separación non trivial de  $\mathbb{I} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  e imos chegar a unha contradición.

$$\begin{aligned} 1 \in \mathbb{I} = U \cup V &\implies 1 \in U \text{ ou } 1 \in V; \text{ supoñemos } 1 \in V \\ &\implies \exists r > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(1, r) \subset V \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad (1 - r, 1 + r) \cap \mathbb{I} = (1 - r, 1] \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\left. \begin{array}{l} U \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad U \neq \emptyset \implies \exists a = \sup U \\ U \text{ acoutado superiormente} \\ \forall x \in U, x \leq 1 - r \end{array} \right\} \implies a \leq 1 - r < 1.$$

Ademais  $a > 0$ , xa que se  $a = 0$  tense que  $U = \{0\}$ , que non é aberto en  $[0, 1]$ . Logo  $0 < a < 1$ ,  $a \in \mathbb{I} = U \cup V$ , e caben dúas posibilidades:

$$\begin{aligned} a \in U &\implies \exists \varepsilon > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U \\ &\quad \quad \quad (\text{contradí } a = \sup U: a + \varepsilon/2 \text{ sería un elemento de } U \text{ maior que } a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \in V &\implies \exists \varepsilon > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V \\ &\quad \quad \quad (\text{contradí } a = \sup U: a - \varepsilon/2 \text{ sería cota superior de } U \text{ menor que } a), \end{aligned}$$

conque chegamos a unha contradición, logo a separación  $U|V$  de  $\mathbb{I} = [0, 1]$  ten que ser a separación trivial. Polo tanto, o intervalo pechado  $[0, 1]$  é conexo. ■

## 5.7 TEOREMA

Se  $X$  é un subconxunto conexo de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua, entón o subconxunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}^m$  é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Consideramos unha separación  $U|V$  de  $f(X)$  e debemos ver que é a separación trivial de  $f(X)$ .

Como a continuidade de  $f$  non depende do codominio, considerada con valores no conxunto imaxe a aplicación  $f: X \rightarrow \tilde{Y} = f(X)$  é continua, e ademais é sobrexectiva. Entón,

$$\begin{aligned}
 U|V \text{ separación de } \tilde{Y} = f(X) &\implies \begin{cases} f^{-1}(U) \text{ e } f^{-1}(V) \text{ son abertos en } X \\ f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(\tilde{Y}) = X \\ f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \end{cases} \\
 &\implies f^{-1}(U)|f^{-1}(V) \text{ é unha separación de } X \\
 &\implies f^{-1}(U) = \emptyset \text{ ou } f^{-1}(V) = \emptyset \\
 &\quad \text{\color{red} } X \text{ conexo} \\
 &\implies U = f(f^{-1}(U)) = \emptyset \text{ ou } V = f(f^{-1}(V)) = \emptyset \\
 &\quad \text{\color{red} } f: X \rightarrow \tilde{Y} \text{ sobrexectiva} \\
 &\implies U|V \text{ é a separación trivial de } \tilde{Y} = f(X).
 \end{aligned}$$

## 5.8 COROLARIO

A conexión é unha propiedade topolóxica.

### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , e supoñamos que  $X$  é conexo e  $X \approx Y$ , é dicir, que existe un homeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$ . Debemos ver que  $Y$  é conexo. Agora ben, se  $f$  é un homeomorfismo, é continua e sobrexectiva. Polo tanto,  $Y = f(X)$  é conexo, polo teorema anterior. ■

## 5.9 COROLARIO

Calquera intervalo pechado  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ) é conexo.

DEMOSTRACIÓN

$$[0, 1] \approx [a, b], [0, 1] \text{ conexo} \implies [a, b] \text{ conexo} \quad \blacksquare$$

## 5.10 COROLARIO

Se  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , o *segmento* de extremos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$

$$L[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{ \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1] \}$$

é conexo.

DEMOSTRACIÓN

Basta escribir  $L[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  como a imaxe por unha aplicación continua dun conxunto conexo. Pois ben, fixados  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n)) \end{aligned}$$

é unha aplicación continua e  $[0, 1]$  é conexo, logo

$$f([0, 1]) = \{ f(t) \mid t \in [0, 1] \} = \{ \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1] \} = L[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

é conexo. \blacksquare

Imos ver unha caracterización da conexión, segundo a cal un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é conexo se, e só se, cada par de puntos distintos de  $X$  pertencen a un mesmo subconxunto conexo de  $X$ . Será consecuencia do seguinte lema.

## 5.11 LEMA

Sexa  $X$  un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $C \subset X$ . Se  $U|V$  é unha separación de  $X$ , entón  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación de  $C$  (é a separación **inducida** pola separación  $U|V$  de  $X$ ).

### DEMOSTRACIÓN

Se  $U|V$  é unha separación de  $X$ , entón

$U, V$  abertos en  $X \Rightarrow U \cap C$  e  $V \cap C$  son abertos en  $C$

$U \cup V = X \Rightarrow (U \cap C) \cup (V \cap C) = (U \cup V) \cap C = X \cap C = C$

$U \cap V = \emptyset \Rightarrow (U \cap C) \cap (V \cap C) = (U \cap V) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset$ ,

logo  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación de  $C$ . ■

## 5.12 PROPOSICIÓN

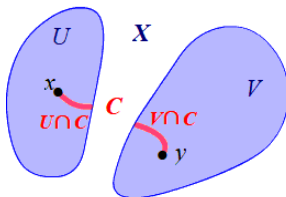
Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$X$  é conexo  $\iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \exists C \subset X, C$  conexo,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ .

### DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$  Inmediato, xa que se  $X$  é conexo basta tomar  $C = X$ .

$\Leftarrow$  Probaremos o contrarrecíproco desta implicación. Supoñemos que  $X$  non é conexo, logo existe unha separación non trivial  $U|V$  de  $X$ ; isto é,  $U|V$  é unha separación de  $X$  tal que  $U \neq \emptyset$  e  $V \neq \emptyset$ , así que podemos tomar  $\mathbf{x} \in U$  e  $\mathbf{y} \in V$ .



Supoñamos que existe un subconxunto  $C$  de  $X$  tal que  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ , e imos ver que  $C$  non pode ser conexo.

Polo lema previo,  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación de  $C$ , e ademais  $\mathbf{x} \in U \cap C, \mathbf{y} \in V \cap C$ , logo tense que  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación non trivial de  $C$ , así que  $C$  non pode ser conexo. ■

Observamos que o anterior resultado inclúe como conexos ao conxunto baleiro e aos conxuntos unitarios, xa que estes non conteñen ningún par de puntos distintos.

### 5.13 COROLARIO

*O espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é conexo.*

#### DEMOSTRACIÓN

É consecuencia inmediata da proposición anterior, dado que dous puntos calquera  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , pertencen ao segmento de extremos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . Así,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C = L[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \mathbb{R}^n$ , que é un conexo. ■

### 5.14 COROLARIO

*Os subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}$  son os **intervalos xeneralizados**, é dicir, os conxuntos  $J \subset \mathbb{R}$  tales que*

$$x, y \in J, x < y \Rightarrow [x, y] \subset J.$$

#### DEMOSTRACIÓN

Se  $J$  é un intervalo xeneralizado, é inmediato que é conexo, pola proposición 5.12, dado que dous puntos calquera  $x, y \in J$ ,  $x \neq y$ , están no intervalo pechado que ten por extremos  $x$  e  $y$ , o cal está contido en  $J$ .

E estes son os únicos subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}$ , xa que no caso de que  $J$  non sexa un intervalo xeneralizado existen  $x, y \in J$ ,  $x < y$ , pero  $[x, y] \not\subset J$ , é dicir,

$$\exists z \in \mathbb{R} \mid x < z < y, z \notin J,$$

logo  $(-\infty, z) \cap J \mid (z, +\infty) \cap J$  é unha separación non trivial de  $J$ , e  $J$  non sería conexo. ■

### 5.15 COROLARIO (Teorema dos valores intermedios)

*Sexa  $X$  un subconxunto conexo de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  unha aplicación continua. Sexan  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ ,  $y \in \mathbb{R}$  tales que  $f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b})$ . Entón existe  $\mathbf{x} \in X$  tal que  $f(\mathbf{x}) = y$ .*

#### DEMOSTRACIÓN

Dado que  $X$  é conexo e  $f$  continua,  $f(X)$  é un subconxunto conexo de  $\mathbb{R}$ , logo é un intervalo xeneralizado  $J$ , e como  $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}) \in f(X)$ ,

$$f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b}) \implies y \in [f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})] \subset J = f(X) \implies \exists \mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) = y. \quad \blacksquare$$

## 5.16 PROPIEDAD

Os intervalos xeneralizados non baleiros, que son os conexos (distintos do conxunto baleiro) contidos en  $\mathbb{R}$ , son os subconxuntos de  $\mathbb{R}$  da forma

$$\{a\}, (a, b), [a, b), (a, b], [a, b], \\ (a, +\infty), (-\infty, b), [a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Se  $J \subset \mathbb{R}$  é un intervalo xeneralizado, satisfai a propiedade:

$$x, y \in J, x < y \Rightarrow [x, y] \subset J$$

Tódolos conxuntos antes enumerados a verifican. Reciprocamente, para comprobar que se  $J$  é un intervalo xeneralizado (\*) non baleiro, entón é necesariamente un destes conxuntos, imos ver que  $J$  é tal que  $(a, b) \subset J \subset [a, b]$ , onde

$$a = \begin{cases} \inf J & \text{se } J \text{ está acoutado inferiormente,} \\ -\infty & \text{noutro caso,} \end{cases} \\ b = \begin{cases} \sup J & \text{se } J \text{ está acoutado superiormente,} \\ +\infty & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

e supoñemos que

$$[a, b] = \{a\} \quad \text{se } a = b,$$

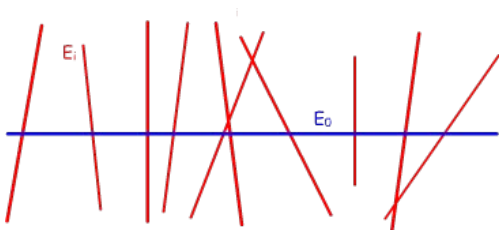
un corchete xunto a  $-\infty$  ou  $+\infty$  interprétase como unha paréntese.

Pois ben, se  $J$  ten máis dun punto,

$$t \in (a, b) \implies \begin{cases} a < t \xRightarrow{\text{def de } a} \exists x \in J \mid x < t \\ t < b \xRightarrow{\text{def de } b} \exists y \in J \mid t < y \end{cases} \xRightarrow{(*)} t \in [x, y] \xRightarrow{\text{def de } a, b} t \in [a, b]. \quad \blacksquare$$



A unión  $\bigcup_{i \in I} E_i$  de conjuntos convexos  
non é necesariamente conexo



O conxunto  $X = E_0 \cup \left( \bigcup_{i \in I} E_i \right)$  é conexo

## 5.17 PROPOSICIÓN

Sexa  $\{E_i\}_{i \in I}$  unha familia de subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}^n$  e  $E_0 \subset \mathbb{R}^n$  un conxunto conexo tal que  $E_0 \cap E_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in I$ .

Entón, o conxunto  $X = E_0 \cup (\cup_{i \in I} E_i)$  é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Imos probar que a única separación que admite  $X$  é a separación trivial. Sexa  $U|V$  unha separación de  $X$ . Entón,

$U \cap E_0 | V \cap E_0$  é unha separación de  $E_0 \xRightarrow{E_0 \text{ conexo}} U \cap E_0 = E_0$  ou  $V \cap E_0 = E_0$ .

Supoñamos  $U \cap E_0 = E_0$ . Entón,  $E_0 \subset U$ . Por outra parte, para cada  $i \in I$ ,

$U \cap E_i | V \cap E_i$  é unha separación de  $E_i \xRightarrow{E_i \text{ conexo}} U \cap E_i = E_i$  ou  $V \cap E_i = E_i$   
 $\forall i \in I$

$E_0 \subset U \Downarrow E_0 \cap E_i \neq \emptyset$

$\cup_{i \in I} E_i \subset U$   $\longleftarrow E_i \subset U \longleftarrow U \cap E_i = E_i \longleftarrow U \cap E_i \neq \emptyset$   
 $\forall i \in I \quad \forall i \in I \quad \forall i \in I$

Logo  $X = E_0 \cup (\cup_{i \in I} E_i) \subset U$ , é dicir,  $X = U$  e  $V = \emptyset$ , así que  $U|V$  é a separación trivial. ■

## 5.18 COROLARIO

- Se  $\{X_i\}_{i \in I}$  é unha familia de subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\cap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ , entón  $\cup_{i \in I} X_i$  é conexo.
- Se  $A$  e  $B$  son dous subconxuntos conexos de  $X$  tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ , entón  $A \cup B$  é conexo.

### 5.19 TEOREMA

*Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  son conxuntos conexos, entón o seu produto cartesiano  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$  é conexo.*

#### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in X \times Y$  e imos ver que ambos pertencen a un mesmo subconxunto conexo  $C$  de  $X \times Y$  (e bastará aplicar a proposición 5.12 para concluír).

Xa que a aplicación  $f: \mathbf{x} \in X \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in X \times Y$  é continua e  $X$  é conexo, tense que  $f(X) = X \times \{\mathbf{b}\}$  é un subconxunto conexo de  $X \times Y$ .

E dado que  $g: \mathbf{y} \in Y \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{y}) \in X \times Y$  é continua e  $Y$  é conexo, tamén  $g(Y) = \{\mathbf{p}\} \times Y$  é un subconxunto conexo de  $X \times Y$ .

Agora, a intersección destes dous conxuntos é non baleira, xa que

$$(\mathbf{p}, \mathbf{b}) \in (X \times \{\mathbf{b}\}) \cap (\{\mathbf{p}\} \times Y),$$

logo  $C = (X \times \{\mathbf{b}\}) \cup (\{\mathbf{p}\} \times Y)$  é un subconxunto conexo de  $X \times Y$  que contén aos dous puntos  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ .

Polo tanto,  $X \times Y$  é conexo. ■

## 5.20 PROPOSICIÓN

Sea  $C$  un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $X$  es un conjunto tal que  $C \subset X \subset \bar{C}$ , entón  $X$  es conexo. En particular, a clausura dun conjunto conexo tamén é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Consideramos unha separación  $U|V$  de  $X$  e imos ver que é a separación trivial.

$$U|V \text{ separación de } X \implies U \cap C | V \cap C \text{ separación de } C \xRightarrow{C \text{ conexo}} U \cap C | V \cap C = \emptyset | C.$$

Supoñemos  $U \cap C = \emptyset$  e queremos ver que  $U = \emptyset$ .

Se existe  $x \in U \subset X \subset \bar{C}$ , entón

$$x \in U \xRightarrow{U \text{ aberto en } X} \exists r > 0 \mid B_X(x, r) \subset U \subset X$$

$$x \in \bar{C} \implies \text{dado } r > 0, \quad B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap C \neq \emptyset$$

$$\stackrel{\parallel C \subset X}{=} B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap X \cap C = B_X(x, r) \cap C \subset U \cap C,$$

logo sería  $U \cap C \neq \emptyset$ , que é unha contradición; polo tanto,  $U = \emptyset$ , e a separación  $U|V$  de  $X$  é a separación trivial. ■

## 5.21 DEFINICIÓN (CAMIÑO)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Un **camiño** en  $X$  é unha aplicación continua

$$\alpha: \mathbb{I} = [0, 1] \longrightarrow X.$$

Se  $\alpha(0) = \mathbf{x}$ ,  $\alpha(1) = \mathbf{y}$ , dise que  $\alpha$  é un *camiño en  $X$  que une  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$* , e que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  están conectados por camiños en  $X$ .

## 5.22 PROPOSICIÓN

A relación “*estar conectados por camiños en  $X$* ” é unha relación de equivalencia.

### DEMOSTRACIÓN

Poñemos  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X$  continua  $\mid \alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y}$ .

**Reflexiva**  $\forall \mathbf{x} \in X, \alpha: t \in \mathbb{I} \mapsto \alpha(t) = \mathbf{x} \in X$  é unha aplicación continua (un **camiño constante**) tal que  $\alpha(0) = \mathbf{x} = \alpha(1)$ , logo  $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ .

**Simétrica**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \implies \exists \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X$  camiño  $\mid \alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y}$ .  
O **camiño inverso** de  $\alpha$  é  $\bar{\alpha}: \mathbb{I} \rightarrow X$ , dado por  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ , que é unha aplicación continua, xa que é composición de aplicacións continuas:  
 $t \in \mathbb{I} \mapsto 1 - t \in \mathbb{I} \mapsto \alpha(1 - t) \in X, \bar{\alpha}(0) = \alpha(1) = \mathbf{y}, \bar{\alpha}(1) = \alpha(0) = \mathbf{x}$ , logo  $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ .

**Transitiva**  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \mathbf{y} \sim \mathbf{z} \implies \exists \alpha, \beta: \mathbb{I} \rightarrow X$  camiños tales que  $\alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y} = \beta(0), \beta(1) = \mathbf{z}$ . O **camiño produto** de  $\alpha$  e  $\beta$  é a aplicación  $\alpha \star \beta: \mathbb{I} \rightarrow X$  dada por

$$(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que está ben definida, e é continua por ser a aplicación combinada de dúas aplicacións continuas definidas en pechados de  $[0, 1]$ .

Ademais,  $(\alpha \star \beta)(0) = \alpha(0) = \mathbf{x}, (\alpha \star \beta)(1) = \beta(1) = \mathbf{z}$ , logo  $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$ . ■

### 5.23 DEFINICIÓN (CONXUNTO CONEXO POR CAMIÑOS)

Dise que un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é **conexo por camiños** se, para cada par de puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ , existe un camiño en  $X$  que une  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

### 5.24 EXEMPLO

Calquera intervalo xeneralizado  $J \subset \mathbb{R}$  é conexo por camiños.

En efecto, se  $x, y \in J$  imos ver que existe un camiño que une  $x$  e  $y$ .

Se  $x = y$  valería o camiño constante (a relación “estar conectados por camiños” é reflexiva), así que podemos supoñer  $x \neq y$ , e ademais que  $x < y$  (xa que a relación é simétrica).

Así, a aplicación  $\alpha: \mathbb{I} = [0, 1] \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  definida por

$$\alpha(t) = x + t(y - x),$$

é unha aplicación continua e  $\alpha(\mathbb{I}) = [x, y] \subset J$ , xa que  $J$  é un intervalo xeneralizado, e ademais  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ . Logo  $J$  é conexo por camiños.

### 5.25 TEOREMA

*Todo conxunto conexo por camiños é conexo.*

#### DEMOSTRACIÓN

Supoñamos que  $X$  é un subconxunto conexo por camiños de  $\mathbb{R}^n$ . De acordo cunha proposición anterior (proposición 5.12) para ver que  $X$  é conexo basta ver que dous puntos distintos calquera pertencen a un mesmo subconxunto conexo de  $X$ .

Sexan  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Xa que  $X$  é conexo por camiños,

$$\exists \alpha: \mathbb{I} \longrightarrow X \text{ camiño} \mid \alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y}.$$

Ademais,

$$\mathbb{I} = [0, 1] \text{ conexo, } \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X \text{ continua} \implies \alpha(\mathbb{I}) \text{ conexo,}$$

logo  $C = \alpha(\mathbb{I})$  é un conxunto conexo,  $C \subset X$  e  $\mathbf{x} = \alpha(0), \mathbf{y} = \alpha(1) \in C$ .

Polo tanto,  $X$  é conexo. ■

### 5.26 PROPOSICIÓN

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua e  $X$  é un conxunto conexo por camiños, entón o subconxunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}^m$  é conexo por camiños.

#### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in f(X)$  e vexamos que existe un camiño en  $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$  que une  $\mathbf{y}_0$  e  $\mathbf{y}_1$ .

Sexan  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X$  tales que  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1)$ . Como  $X$  é conexo por camiños,

$$\exists \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X \text{ camiño} \mid \alpha(0) = \mathbf{x}_0, \alpha(1) = \mathbf{x}_1,$$

e, por tanto,

$$f \circ \alpha: \mathbb{I} \rightarrow f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$$

é unha aplicación continua, por ser a composición de dúas aplicacións continuas, e ten a imaxe contida en  $f(X)$ , así que é un camiño en  $f(X)$ , e tal que

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, \quad (f \circ \alpha)(1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1.$$

Polo tanto,  $f(X)$  é conexo por camiños. ■

### 5.27 COROLARIO

*A conexión por camiños é unha propiedade topolóxica.*

## 5.28 OBSERVACIÓN

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$  é conexo por camiños se, e só se, hai unha única clase de equivalencia para a relación “estar conectados por camiños en  $X$ ”.

Así, fixado un punto  $\mathbf{x}_0 \in X$ ,  $X$  é conexo por camiños se, e só se, para cada punto  $\mathbf{x} \in X$  existe un camiño en  $X$  que une  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ .

## 5.29 EXEMPLO

Calquera bóla (aberta ou pechada) en  $\mathbb{R}^n$  é un conxunto conexo por camiños.

Vémolo para o caso das bólas abertas (e da mesma maneira faise para as bólas pechadas).

Dado que a conexión por camiños é unha propiedade topolóxica e todas as bólas abertas son homeomorfas entre si, basta ver que a bóla aberta  $B = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1)$  é conexa por camiños.

Agora, como a relación “estar conectados por camiños” é de equivalencia, basta ver que  $\mathbf{0} \sim \mathbf{x}$  para cada  $\mathbf{x} \in B$ , é dicir, basta ver que existe un camiño en  $B$  que une  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}$ . Pois ben, fixado  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B$ , tense que

$$\begin{aligned}\alpha: [0, 1] &\longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \alpha(t) = t\mathbf{x} = (tx_1, \dots, tx_n)\end{aligned}$$

é unha aplicación: está bien definida xa que toma valores en  $B$ , dado que se  $0 \leq t \leq 1$ , entón

$$d(\alpha(t), \mathbf{0}) = \|\alpha(t)\| = \|t\mathbf{x}\| = \underbrace{|t|}_{|t| \leq 1} \underbrace{\|\mathbf{x}\|}_{\|\mathbf{x}\| < 1} < 1,$$

é continua (o é cada compoñente  $t \in [0, 1] \rightarrow x_j t \in \mathbb{R}$ ), e une  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}$ , xa que  $\alpha(0) = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\alpha(1) = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

## **6. Compacidade**

### 6.1 DEFINICIÓN (RECUBRIMENTO)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Un **recubrimento aberto** de  $X$  é unha familia  $\mathcal{U}$  de conxuntos abertos en  $X$  tales que

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Se  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  é un recubrimento de  $X$ , é dicir,  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$ , dise que  $\mathcal{U}'$  é un **subrecubrimento** de  $\mathcal{U}$ .

Un recubrimento aberto  $\mathcal{U}$  de  $X$  (ou un subrecubrimento  $\mathcal{U}'$  de  $\mathcal{U}$ ) dise que é un recubrimento (ou un subrecubrimento) **finito** se é unha familia finita de conxuntos.

### 6.2 DEFINICIÓN (CONXUNTO COMPACTO)

Un conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  dise que é **compacto** se todo recubrimento aberto de  $X$  admite un subrecubrimento finito.

### 6.3 NOTA

A propiedade que define a un conxunto compacto chámase propiedade de Heine-Borel, e é equivalente considerar recubrimentos abertos de  $X$  ou recubrimentos de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Un *recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$*  é unha familia  $\mathcal{V}$  de abertos en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Se  $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$  é tal que  $X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} V$ , tamén dicimos que  $\mathcal{V}'$  é un **subrecubrimento** de  $\mathcal{V}$ .

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , as siguientes propiedades son equivalentes:

$$(a) \forall \mathcal{U} \text{ recubrimiento abierto de } X \exists U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U} \mid X = U_1 \cup \dots \cup U_m$$

$$(b) \forall \mathcal{V} \text{ recubrimiento de } X \text{ por abiertos en } \mathbb{R}^n \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \mid X \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$$

**(a) $\Rightarrow$ (b)** Supoñemos (a), e consideramos un recubrimiento  $\mathcal{V}$  de  $X$  por abiertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Entón,

$$X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \Rightarrow X = \left( \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) \cap X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (V \cap X) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

onde  $\mathcal{U} = \{U \subset X \mid U = V \cap X, V \in \mathcal{V}\}$ , que é un recubrimiento abierto de  $X$ .

Por (a),

$$\exists U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U} \mid X = U_1 \cup \dots \cup U_m \subset \bigcup_{\exists V_i \in \mathcal{V} \mid V_i \cap X = U_i} V_1 \cup \dots \cup V_m.$$

**(b) $\Rightarrow$ (a)** Supoñemos (b), e consideramos un recubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de  $X$ ,

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \quad U \in \mathcal{U} \Rightarrow U \text{ aberto en } X \Rightarrow \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid U = V \cap X,$$

e se poñemos  $\mathcal{V} = \{V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid V \cap X \in \mathcal{U}\}$ , entón  $\mathcal{V}$  é un recubrimiento de  $X$  por abiertos en  $\mathbb{R}^n$  e podemos aplicar (b):

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \mid X \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$$

$$\Rightarrow X = (V_1 \cup \dots \cup V_m) \cap X = (V_1 \cap X) \cup \dots \cup (V_m \cap X) = U_1 \cup \dots \cup U_m,$$

onde  $U_i = V_i \cap X \in \mathcal{U}$  (pola construción de  $\mathcal{V}$ )  $\forall i = 1, \dots, m$ . ■

## 6.4 PROPOSICIÓN

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación continua. Se  $X$  é compacto, entón  $f$  é uniformemente continua.

### DEMOSTRACIÓN

Para probar que  $f: X \rightarrow Y$  é uniformemente continua temos que demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon.$$

Sexa  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese,  $f$  é continua en cada punto  $\mathbf{a} \in X$ , logo

$$\forall \mathbf{a} \in X, \text{ dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_{\mathbf{a}} > 0 \mid f(B_X(\mathbf{a}, \delta_{\mathbf{a}})) \subset B_Y\left(f(\mathbf{a}), \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (*)$$

Agora,

$$X = \bigcup_{\mathbf{a} \in X} B_X\left(\mathbf{a}, \frac{\delta_{\mathbf{a}}}{2}\right),$$

logo  $\mathcal{U} = \{B_X(\mathbf{a}, \delta_{\mathbf{a}/2})\}_{\mathbf{a} \in X}$  é un recubrimento aberto de  $X$ . Polo tanto, se  $X$  é compacto,

$$\exists \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in X \mid X = B_X\left(\mathbf{a}_1, \frac{\delta_{\mathbf{a}_1}}{2}\right) \cup \dots \cup B_X\left(\mathbf{a}_m, \frac{\delta_{\mathbf{a}_m}}{2}\right).$$

Tomamos  $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{\mathbf{a}_1}, \dots, \delta_{\mathbf{a}_m}\}$ , e sexan  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ . Imos comprobar que se  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$  (neste caso  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  van a estar nunha mesma bóla aberta  $B_X(\mathbf{a}_i, \delta_{\mathbf{a}_i})$ ), entón  $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon$ . En efecto,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} \in X &\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, m\} \mid \mathbf{x} \in B\left(\mathbf{a}_j, \frac{\delta_{\mathbf{a}_j}}{2}\right) \subset B(\mathbf{a}_j, \delta_{\mathbf{a}_j}) \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a}_j)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathbf{y} \in X &\Rightarrow d(\mathbf{y}, \mathbf{a}_j) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j) < \delta + \frac{\delta_{\mathbf{a}_j}}{2} \leq \delta_{\mathbf{a}_j} \Rightarrow d(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{a}_j)) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a}_j)) + d(f(\mathbf{a}_j), f(\mathbf{y})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 6.5 EXEMPLOS

- Todo subconjunto finito  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é compacto.

Se  $X = \emptyset$ , é trivial. Se  $X \neq \emptyset$ , supoñamos que  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$  e sexa  $\mathcal{V}$  un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\begin{aligned} X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V &\implies \forall i = 1, \dots, m \exists V_i \in \mathcal{V} \mid \mathbf{x}_i \in V_i \\ &\implies X = \{\mathbf{x}_1\} \cup \dots \cup \{\mathbf{x}_m\} \subset V_1 \cup \dots \cup V_m. \end{aligned}$$

Ou ben, se houbésemos tomado un recubrimento aberto  $\mathcal{U}$  do conxunto finito  $X$ , entón  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  é finito, logo o mesmo  $\mathcal{U}$  valería como subrecubrimento finito de  $\mathcal{U}$ .

- Ningún subconjunto discreto infinito de  $\mathbb{R}^n$  é compacto.

Se  $X$  é discreto, entón  $\mathcal{U} = \{\{\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x} \in X\}$  é un recubrimento aberto de  $X$ , xa que  $X = \bigcup_{\mathbf{x} \in X} \{\mathbf{x}\}$ . Se  $X$  é compacto, entón

$$\exists \{\mathbf{x}_1\}, \dots, \{\mathbf{x}_m\} \in \mathcal{U} \mid X = \{\mathbf{x}_1\} \cup \dots \cup \{\mathbf{x}_m\} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\},$$

é dicir, calquera subconjunto compacto discreto de  $X$  é necesariamente finito. Por exemplo,  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  non son compactos.

- O subconjunto  $X = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}$  non é compacto.

En efecto, da propiedade arquimediana de  $\mathbb{R}$ , séguese que

$$(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n}, 1\right),$$

así que  $\mathcal{U} = \{(1/n, 1) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$  é un recubrimento aberto de  $X$ .

Se  $\mathcal{U}$  tivese un subrecubrimento finito  $\mathcal{U}' = \{(1/n_i, 1) \mid i = 1, \dots, m\}$ , sería

$$(0, 1) = \left(\frac{1}{n_1}, 1\right) \cup \dots \cup \left(\frac{1}{n_m}, 1\right) = \left(\frac{1}{N}, 1\right) \neq (0, 1), \quad N = \max\{n_1, \dots, n_m\}.$$

- $\mathbb{R}^n$  non é compacto, como se segue da seguinte proposición.

## 6.6 PROPOSICIÓN

*Todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  é acoutado.*

DEMOSTRACIÓN

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

$$X \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(\mathbf{0}, k),$$

como consecuencia da propiedade arquimediana de  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \implies \|\mathbf{x}\| \geq 0 \implies \exists k \in \mathbb{N}, \|\mathbf{x}\| < k \implies \exists k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, k),$$

logo  $\mathcal{V} = \{ B(\mathbf{0}, k) \mid k \in \mathbb{N} \}$  é un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $X$  é compacto, entón

$$\exists k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \mid X \subset B(\mathbf{0}, k_1) \cup \dots \cup B(\mathbf{0}, k_m) = B(\mathbf{0}, r),$$

onde  $r = \max\{k_1, \dots, k_m\}$ , e polo tanto  $X$  é acoutado.

## 6.7 COROLARIO

*$\mathbb{R}^n$  non é compacto.*

## 6.8 PROPOSICIÓN

Todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

DEMOSTRACIÓN

Paso 1

$$\left. \begin{array}{l} X \subset \mathbb{R}^n, X \text{ compacto} \\ y \in \mathbb{R}^n \setminus X \end{array} \right\} \Rightarrow \exists U, V \text{ abertos en } \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} X \subset U, \\ y \in V, \end{array} \quad U \cap V = \emptyset,$$

pois

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in X \\ y \notin X \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq y \xRightarrow{\mathbb{R}^n \text{ Hausdorff}} \exists U_x, V_x \text{ abertos en } \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} x \in U_x \\ y \in V_x \end{array} \quad U_x \cap V_x = \emptyset,$$

logo

$$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x, \quad y \in \bigcap_{x \in X} V_x.$$

conque se ten

$$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x \xRightarrow{X \text{ compacto}} \exists x_1, \dots, x_m \in X \mid \begin{array}{l} X \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m} = U \\ y \in V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m} = V, \end{array}$$

onde  $U$  e  $V$  son abertos en  $\mathbb{R}^n$ , e son disjuntos:

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}) \cap V = (U_{x_1} \cap V) \cup \dots \cup (U_{x_m} \cap V) \\ &\subset (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \dots \cup (U_{x_m} \cap V_{x_m}) = \emptyset \implies U \cap V = \emptyset. \end{aligned}$$

$\underset{=\emptyset}{\quad} \quad \quad \quad \underset{=\emptyset}{\quad}$

Paso 2 Polo paso anterior, se  $X$  é compacto, entón é pechado en  $\mathbb{R}^n$ , xa que

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R}^n \setminus X &\implies \exists U, V \text{ abertos en } \mathbb{R}^n \mid y \in V \subset \mathbb{R}^n \setminus U \subset \mathbb{R}^n \setminus X \\ &\implies \exists r > 0 \mid B(y, r) \subset V \subset \mathbb{R}^n \setminus X \\ &\implies \mathbb{R}^n \setminus X \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$





### 6.10 TEOREMA

Se  $X$  é un subconxunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua e sobreactiva, entón o subconxunto  $Y$  de  $\mathbb{R}^m$  é compacto.

#### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\mathcal{U}$  un recubrimento aberto de  $Y$ , isto é,

$$Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \quad U \text{ aberto en } Y \quad \forall U \in \mathcal{U},$$

e debemos ver que  $\mathcal{U}$  ten un subrecubrimento finito. Agora,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U),$$

e cada  $f^{-1}(U)$  é aberto en  $X$  porque  $U$  é aberto en  $Y$  e  $f: X \rightarrow Y$  é continua. Logo  $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$  é un recubrimento aberto de  $X$ . Como  $X$  é compacto, existen  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$  tales que

$$X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k),$$

logo

$$\begin{aligned} Y &= f(X) = f(f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k)) \\ &= f(f^{-1}(U_1)) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_k)) = U_1 \cup \dots \cup U_k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 6.11 COROLARIO

Se  $X$  é un subconxunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua, entón o subconxunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}^m$  é compacto.

### 6.12 COROLARIO

A compacidade é unha propiedade topolóxica.

### 6.13 COROLARIO

Calquera intervalo pechado  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ) é compacto.

## 6.14 EXERCICIO

(1) Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , entón

$$B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r/\sqrt{2}) \times B_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{y}, r/\sqrt{2}) \subset B_{\mathbb{R}^{n+m}}((\mathbf{x}, \mathbf{y}), r).$$

(2) Se  $W$  é un aberto en  $\mathbb{R}^{n+m}$  e  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ , entón existe un aberto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  e un aberto  $V$  en  $\mathbb{R}^m$  tal que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subset W$ .

## 6.15 TEOREMA

*O produto cartesiano de conxuntos compactos é un conxunto compacto.*

DEMOSTRACIÓN

**Paso 1** (Lema do tubo) *Sexan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m, Y$  compacto. Sexa  $W$  un aberto en  $\mathbb{R}^{n+m}$  tal que  $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset W$ . Entón existe un aberto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  que contén a  $\mathbf{x}$  tal que  $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset U \times Y \subset W$ .*

PROBA. Para cada  $\mathbf{y} \in Y, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ , logo (exercicio anterior)

$$\begin{array}{l} \exists U_{\mathbf{y}} \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in U_{\mathbf{y}} \\ \exists V_{\mathbf{y}} \text{ aberto en } \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in V_{\mathbf{y}} \end{array} \left| (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_{\mathbf{y}} \times V_{\mathbf{y}} \subset W. \right.$$

Agora,  $\mathcal{V} = \{V_{\mathbf{y}} \mid \mathbf{y} \in Y\}$  é un recubrimento do compacto  $Y$  por abertos en  $\mathbb{R}^m$ , logo

$$\exists \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \in Y \mid Y \subset V_{\mathbf{y}_1} \cup \dots \cup V_{\mathbf{y}_k}.$$

Se  $U = U_{\mathbf{y}_1} \cap \dots \cap U_{\mathbf{y}_k}$ , entón  $U$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in U$ , e tense

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}\} \times Y &\subset U \times Y \subset U \times (V_{\mathbf{y}_1} \cup \dots \cup V_{\mathbf{y}_k}) \\ &= (U \times V_{\mathbf{y}_1}) \cup \dots \cup (U \times V_{\mathbf{y}_k}) \\ &\subset (U_{\mathbf{y}_1} \times V_{\mathbf{y}_1}) \cup \dots \cup (U_{\mathbf{y}_k} \times V_{\mathbf{y}_k}) \\ &\subset W. \end{aligned}$$

**Paso 2** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  son conjuntos compactos, entón  $X \times Y$  é un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

PROBA. Sexa  $\mathcal{W}$  un recubrimento de  $X \times Y$  por abertos en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Dado  $\mathbf{x} \in X$ ,  $\{\mathbf{x}\} \times Y \approx Y$ , logo  $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$  é compacto, e  $\mathcal{W}$  tamén recubre  $\{\mathbf{x}\} \times Y$ ,

$$\{\mathbf{x}\} \times Y \subset \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \implies \exists W_1, \dots, W_l \in \mathcal{W} \mid \{\mathbf{x}\} \times Y \subset W_1 \cup \dots \cup W_l = \widetilde{W}_{\mathbf{x}}$$

$\{\mathbf{x}\} \times Y$  compacto notación  $\nearrow$

así que  $\widetilde{W}_{\mathbf{x}}$  é un aberto en  $\mathbb{R}^{n+m}$  que contén a  $\{\mathbf{x}\} \times Y$ , conque polo lema do tubo,

$$\exists U_{\mathbf{x}} \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}} \mid \{\mathbf{x}\} \times Y \subset U_{\mathbf{x}} \times Y \subset \widetilde{W}_{\mathbf{x}} \text{ unión finita de membros de } \mathcal{W}.$$

Agora, a familia  $\mathcal{U} = \{U_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in X\}$  é un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ , e dado que  $X$  é compacto,

$$\exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in X \mid X \subset U_{\mathbf{x}_1} \cup \dots \cup U_{\mathbf{x}_r},$$

e, polo tanto,

$$X \times Y \subset (U_{\mathbf{x}_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{\mathbf{x}_r} \times Y) \subset \widetilde{W}_{\mathbf{x}_1} \cup \dots \cup \widetilde{W}_{\mathbf{x}_r},$$

onde cada  $\widetilde{W}_{\mathbf{x}_i}$  é unha unión finita de membros de  $\mathcal{W}$ , do que se segue que, en efecto,  $\mathcal{W}$  ten un subrecubrimento finito. Logo  $X \times Y$  é compacto.

**Paso 3** Se  $X_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$  son conjuntos compactos, entón  $X_1 \times \dots \times X_k$  é un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$ .

PROBA. Por indución: para  $k = 2$  verificase polo paso 2. Supoñemos que se verifica por  $k - 1$  e é inmediato que se verifica para  $k$ , xa que

$$X_1 \times \dots \times X_k \approx (X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k$$

compacto  
por hipótese indución

é compacto, outra vez polo paso 2. ■

## 6.16 COROLARIO

Para cada  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , onde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , o *rectángulo pechado* de  $\mathbb{R}^n$ , de extremos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , definido por

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i; i = 1, \dots, n \},$$

é compacto.

### DEMOSTRACIÓN

Todo rectángulo pechado é produto cartesiano de intervalos pechados, que son compactos,

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]. \quad \blacksquare$$

## 6.17 LEMA

Todo subconxunto pechado dun compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto.

### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $F \subset X$ ,  $X$  compacto e  $F$  pechado en  $\mathbb{R}^n$  (equivalentemente, pechado en  $X$ , xa que  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ ). Consideramos un recubrimento  $\mathcal{V}$  de  $F$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \implies X \subset F \cup (\mathbb{R}^n \setminus F) \subset \left( \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) \cup (\mathbb{R}^n \setminus F),$$

logo  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{ \mathbb{R}^n \setminus F \}$  é un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ , e xa que  $X$  é compacto, tense

$$\begin{aligned} \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}} \mid X \subset V_1 \cup \dots \cup V_m \cup (\mathbb{R}^n \setminus F) \\ \implies \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \mid F \subset V_1 \cup \dots \cup V_m. \end{aligned}$$

Polo tanto,  $F$  é compacto. \blacksquare

## 6.18 TEOREMA (Teorema de HEINE-BOREL (1ª versión))

Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é compacto se, e só se, é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acoutado.

### DEMOSTRACIÓN

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto xa temos visto que  $X$  é acoutado (proposición 6.6) e pechado en  $\mathbb{R}^n$  (proposición 6.8).

Reciprocamente, supoñamos que  $X$  é acoutado e pechado en  $\mathbb{R}^n$ . Entón,

$$X \text{ acoutado} \implies \exists r > 0 \mid X \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, r) \subset [-r, r] \times \dots \times [-r, r] \text{ compacto,}$$

e como  $X$  é un pechado contido nun rectángulo pechado, que é compacto, entón, polo lema anterior,  $X$  é compacto. ■

## 6.19 PROPOSICIÓN

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é un conxunto compacto non baleiro, toda función continua  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  “alcanza” o seu máximo e o seu mínimo.

### DEMOSTRACIÓN

Dado que  $X$  é compacto,  $X \neq \emptyset$ , e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é unha aplicación continua, o subconjunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}$  é compacto, logo é un subconjunto (non baleiro) acoutado e pechado en  $\mathbb{R}$ ,

$$f(X) \text{ acoutado, } f(X) \neq \emptyset \implies \begin{array}{l} \exists M = \sup f(X) \\ \exists m = \inf f(X) \end{array} \implies \begin{array}{l} M \in f(X) \\ m \in f(X) \end{array}$$

xa que se  $M \notin f(X)$ , como  $f(X)$  é pechado en  $\mathbb{R}$ ,

$$\exists r > 0 \mid (M - r, M + r) \subset \mathbb{R} \setminus f(X),$$

o que contradí a definición de supremo, xa que  $M - r/2$  sería unha cota superior de  $f(X)$  menor que  $M$ , así que  $M \in f(X)$ . Análogamente,  $m \in f(X)$ . ■

## 6.20 TEOREMA (Teorema de HEINE-BOREL: Caracterización da compacidade)

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , as seguintes propiedades son equivalentes:

- (a)  $X$  é compacto ( $X$  ten a [propiedade de Heine-Borel](#)).
- (b) Todo subconxunto infinito de  $X$  ten un punto de acumulación en  $X$  ( $X$  satisfai a [propiedade de Bolzano-Weierstrass](#)).
- (c) Toda sucesión en  $X$  ten unha subsucesión converxente en  $X$  ( $X$  é [secuencialmente compacto](#)).
- (d)  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acoutado.

### DEMOSTRACIÓN

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$  compacto, e supoñamos que  $A$  é un subconxunto de  $X$  que non ten ningún punto de acumulación en  $X$ . Tense:

$$\forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \notin A' \implies \forall \mathbf{x} \in X \exists r_x > 0 \mid B^*(\mathbf{x}, r_x) \cap A = \emptyset,$$

é dicir,  $B(\mathbf{x}, r_x)$  contén como moito un punto en  $A$  (o punto  $\mathbf{x}$ , se  $\mathbf{x} \in A$ ). Agora,

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B(\mathbf{x}, r_x) \xRightarrow{(a)} \exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in X \mid X \subset B(\mathbf{x}_1, r_{x_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{x_m})$$

$$\implies A \subset X \subset B(\mathbf{x}_1, r_{x_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{x_m})$$

$$\implies A = A \cap (B(\mathbf{x}_1, r_{x_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{x_m}))$$

$$\implies A \subset \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \implies A \text{ é finito.}$$

Logo  $X$  satisfai a propiedade de B-W.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Supoñemos que  $X$  satisfai a propiedade de B-W, consideramos unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  e imos ver que ten unha subsucesión converxente a un punto de  $X$ .

Para isto, tomamos o conxunto

$$A = \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset X.$$

Se  $A$  é finito, ao menos un termo da sucesión repítese infinitamente, logo  $\{\mathbf{x}_k\}$  ten unha subsucesión constante, que é converxente en  $X$ .

Se  $A$  é infinito, pola hipótese existe polo menos un punto  $\mathbf{x} \in X$  tal que  $\mathbf{x}$  é punto de acumulación de  $A$ . Pois ben, imos ver que  $\{\mathbf{x}_k\}$  ten unha subsucesión que converxe a  $\mathbf{x}$ , para o que imos construír unha aplicación estritamente crecente  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que defina unha tal subsucesión. Xa que  $\mathbf{x} \in A'$ , cada bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  de centro  $\mathbf{x}$  contén infinitos puntos de  $A$ , e imos utilizar que, en particular, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B(\mathbf{x}, 1/k) \cap A$  é infinito:

$$k = 1 \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_{m_1} \in B(\mathbf{x}, 1) \cap A, \quad \text{poñemos } \varphi(1) = m_1,$$

$$k = 2 \implies \exists m_2 \in \mathbb{N}, m_2 > m_1 \mid \mathbf{x}_{m_2} \in B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{2}\right) \cap A, \quad \text{poñemos } \varphi(2) = m_2,$$

e procedemos por indución. Se supoñemos definidos  $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$ ,

$$\exists m_k > m_{k-1} \mid \mathbf{x}_{m_k} \in B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\right) \cap A, \quad \text{poñemos } \varphi(k) = m_k.$$

Así,  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  é unha subsucesión de  $\{\mathbf{x}_k\}$ , e dado que  $\mathbf{x}_{\varphi(k)} \in B(\mathbf{x}, 1/k)$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , séguese que  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}$  (lema 3.12 de construción de sucesións converxentes). Logo  $X$  é secuencialmente compacto.

(c)⇒(d)

Supoñemos que  $X$  é secuencialmente compacto e imos ver que  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acoutado.

Se  $X$  no é acoutado,

$$\forall k \in \mathbb{N}, X \not\subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, k) \implies \exists \mathbf{x}_k \in X \mid \|\mathbf{x}_k\| \geq k.$$

Tense que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión en  $X$  e, pola hipótese, debe ter unha subsucesión converxente  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ . Agora ben,

$$\|\mathbf{x}_{\varphi(k)}\| \geq \varphi(k) \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

logo o conxunto  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$  non é acoutado, o que contradí que o conxunto de puntos de calquera sucesión converxente debe ser acoutado (proposición 3.20).

Polo tanto, se  $X$  é secuencialmente compacto, entón é acoutado.

Para probar que  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  imos utilizar a caracterización secuencial dos pechados en  $\mathbb{R}^n$  (corolario 3.14), é dicir,

$$X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in X].$$

Pois ben, sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X$  tal que  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Debemos ver que  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Tense

$$\left. \begin{array}{l} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X \implies \exists \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \text{ subsucesión de } \{\mathbf{x}_k\} \mid \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{y}_0 \in X \\ \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \text{ subsucesión de } \{\mathbf{x}_k\}, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \xrightarrow{3.11} \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \end{array} \right\}$$

$$\implies \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 \in X.$$

Logo  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

(d)⇒(a)

Está na 1ª versión do teorema de Heine-Borel. ■

## 6.21 COROLARIO

- (1) *Todo subconjunto infinito acotado  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  ten ao menos un punto de acumulación (en  $\mathbb{R}^n$ ).*
- (2) *Toda sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  acotada en  $\mathbb{R}^n$  ten unha subsucesión converxente (a un punto de  $\mathbb{R}^n$ ).*

### DEMOSTRACIÓN

(1) Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é acotado, entón a súa clausura  $X = \bar{A}$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acotado, logo compacto, así que  $X$  satisfai a propiedade de Bolzano-Weierstrass, e polo tanto o subconjunto infinito  $A$  de  $X$  ten algún punto de acumulación no conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

(2) O conxunto  $A = \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  é acotado, logo  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión converxente no conxunto compacto (logo secuencialmente compacto)  $X = \bar{A}$ , e polo tanto  $\{\mathbf{x}_k\}$  ten unha subsucesión que converxe en  $X \subset \mathbb{R}^n$ . ■