



FACULDADE DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

M^a Victoria
Otero Espinar

Tese de doutoramento

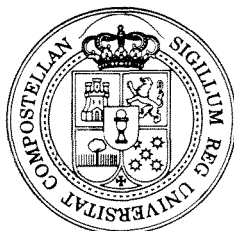
Algunos aspectos combinatorios,
topológicos y diferenciables de la
dinámica sobre el intervalo

Santiago de Compostela, 1992

Departamento de Análise Matemática

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE ANALISE MATEMATICA



ALGUNOS ASPECTOS COMBINATORIOS, TOPOLOGICOS Y DIFERENCIABLES DE LA DINAMICA SOBRE EL INTERVALO

M.^a Victoria Otero Espinar

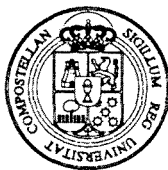
Santiago de Compostela, 1992

R. 8778

Departamento de Análise Matemática

**ALGUNOS ASPECTOS
COMBINATORIOS, TOPOLÓGICOS Y DIFERENCIABLES
DE LA DINÁMICA SOBRE EL INTERVALO**

M^a Victoria Otero Espinar



Universidade de Santiago de Compostela

Santiago de Compostela

— 1992 —



Deseo expresar mi agradecimiento a Charles Tresser y Fernando Costal Pereira, directores de esta tesis, por su continuo apoyo.

Mi más sincera gratitud a J.M. Gambaudo; su invitación y acogida en el Laboratorio de Matemáticas de la Universidad de Nice posibilitó el comienzo de este trabajo. Su constante estímulo, sus consejos y, en definitiva, su amistad han sido para mi la mejor ayuda.

Agradezco a K. Brucks, B. Diamond, P. Glendinning, J. Los y C. Tresser su colaboración en algunos de los temas de que es objeto esta memoria.

Es difícil expresar mi agradecimiento a C. Tresser; sin su inestimable ayuda, orientación y amistad, la realización de este trabajo no hubiera sido posible. Voilà "Mon Maître".

No quiero dejar sin mencionar a todos aquellos compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Santiago y del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad de Nice que de un modo u otro han facilitado la preparación de esta tesis. Mi reconocimiento especial a R. Trinchet Soria y X. Cainzos Prieto.

Finalmente, a mi familia que me ha soportado y animado en todo momento, gracias.

A mis padres.

A Juanjo.

- INDICE -

	Pag.
INTRODUCCION	1
CAPITULO 0. PRELIMINARES	13
0.1. <i>Sistemas dinámicos topológicos</i>	13
0.2. <i>Aplicaciones del intervalo</i>	16
CAPITULO I. DINAMICA SIMBOLICA PARA LA RENORMALIZACION DE ENDOMORFISMOS DE ENTROPIA NULA DEL IN - TERVALO	25
I.1. <i>El espacio simbólico O_∞</i>	28
I.2. <i>Cuatro dinámicas sobre O_∞</i>	51
I.3. <i>Ordenes y endomorfismos del intervalo con entropía nula</i>	102
I.4. <i>Descripción conjetural de la frontera del caos en endomorfismos regulares del inter- valo</i>	108
APENDICE I.1	115
CAPITULO II. HOMEOMORFISMOS RESTRICCION DE ENDOMOR- FISMOS REGULARES DEL INTERVALO	123
II.1. <i>Introducción</i>	123
II.2. <i>Aplicaciones unimodales</i>	124
II.3. <i>Principales resultados</i>	132

CAPITULO III. ORBITAS CRITICAS DENSAS EN LA APLICACION TENT 149

 III.1. *Algunas generalidades sobre la aplicación tent* 150

 III.2. *Conjuntos de parámetros densos* 153

BIBLIOGRAFIA 163

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

CATEDRA DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA Y GEOMETRÍA DIFERENCIAL
 TÍTULO DE INGENIERO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

En el día de hoy, he suscrito el presente documento con los señores:
 Sr. Juanne Llibre Saló,
Gerardo Rodríguez López, Jean-Marc
Gambaudo, Lluís Alsedà y Soler y
Juan José Nieto Rong

que se comprometen a impartir las asignaturas de Geometría Algebraica y Geometría Diferencial en el APTO. "CUM LANDE"

de la que se ha acordado en el Consejo de Facultad de Matemáticas y de la que se ha acordado en el Consejo de Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela.

En el día diez de Marzo de 1992

Juan José Nieto Rong

Juanne Llibre Saló

Lluís Alsedà y Soler

Gerardo Rodríguez López

- INTRODUCCION.-

En los últimos años, los sistemas dinámicos han atraído la atención de numerosos investigadores de distintos campos, los cuales han hecho incursiones en interesantes problemas que son nuevas fuentes de motivaciones aplicadas más allá de los tradicionales problemas de mecánica clásica. Las interacciones de estos campos con las matemáticas estimularon nuevas líneas de investigación, y han sido particularmente importantes en la determinación de las nuevas direcciones que, en las últimas décadas, ha tomado la teoría de sistemas dinámicos.

Desde el punto de vista matemático, y en el marco más general, se puede avanzar la siguiente definición:

"Un sistema dinámico es el par formado por un conjunto A y un (semi)-grupo actuando sobre A ".

En general, en problemas interesantes a tratar, el conjunto A está dotado de una estructura, y la acción sobre A es la definida por uno de sus endomorfismos.

Uno de los modelos más sencillos de sistemas dinámicos no lineales (disipativo) lo constituyen las iteraciones de aplicaciones continuas del intervalo, $f:I \rightarrow I$, que sirven como modelo en diversos problemas en ciencias biológicas ([GOI],[La],[May]) y físicas ([CE],[Lo]). En este caso, el conjunto A es el propio intervalo I considerado como espacio topológico, el semigrupo $(\mathbb{Z}^+, +)$ y la acción de semigrupo es la aplicación

$$n \longrightarrow f^n = f \circ \dots \circ f$$

Pocos años atrás se consideraba que la teoría de aplicaciones continuas unidimensionales era una parte poco importante de la teoría general de sistemas dinámicos. Los resultados entonces existentes eran exclusivos del caso unidimensional y no tenían una generalización natural en varias dimensiones. Claramente, la estructura de tales aplicaciones no es en absoluto trivial y ciertos hechos conocidos ahora son extremadamente bellos e inesperados presentando una fenomenología muy rica y complicada, siendo necesario incluso, para el estudio de ciertas propiedades, considerar sistemas dinámicos cuyo espacio de fases (es decir, el conjunto A) es un espacio funcional de dimensión infinita (grupo de renormalización, ver por ejemplo [CE],[Me]). Además, alguno de estos hechos admiten extensiones naturales al caso multidimensional, si bien en alguno de ellos dicha extensión resulta muy difícil o no tiene sentido. En efecto, los sistemas multidimensionales

pueden exhibir fenómenos que no se dan en modelos unidimensionales debido a lo restrictivo de la dimensión del espacio de fases. Además, el orden natural de los números reales tiene influencias combinatorias profundas en el posible comportamiento de las iteraciones de la aplicación en el intervalo. Podría pensarse por tanto que la elección de sistemas dinámicos unidimensionales es excesivamente restrictiva, no obstante es la primera etapa en el conocimiento de situaciones más complicadas que aparecen en dimensión superior; en efecto, alguna situación unidimensional persistente bajo pequeñas perturbaciones se manifiesta también en dimensión superior (tengase en mente los atractores extraños que aparecen en ciertos sistemas dinámicos en dimensión tres, o la famosa familia de difeomorfismos de Henon). Por otra parte, el estudio del comportamiento de ciertos campos de vectores sobre \mathbb{R}^n puede reducirse al estudio de problemas unidimensionales (via la aplicación de Poincaré, ver [CE] entre otros), sirva como ejemplo la familia de flujos de Lorenz en dimensión tres [ALMT].

Uno de los primeros resultados que muestran la complejidad de la dinámica de aplicaciones del intervalo y que está relacionado con la existencia de órbitas periódicas de la aplicación es el conocido teorema de Sharkovskii ([Sai],1964) que afirma que toda aplicación continua del intervalo (o de \mathbb{R}) en sí mismo que tiene una órbita periódica de período n tiene también una órbita periódica de período m , siendo n y m enteros positivos relacionados entre sí, $n \rightarrow m$, por el orden definido en \mathbb{Z}^+

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow 2.3 \rightarrow 2.5 \rightarrow \dots \rightarrow 2^2.3 \rightarrow 2^2.5 \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$2^n \cdot 3 \rightarrow 2^n \cdot 5 \rightarrow \dots \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^0 = 1.$$

(Dicho teorema fue publicado en la revista Ukr. Mat. Z 16 jamás traducida al inglés, por lo que no fue conocido hasta 13 años más tarde gracias a la exposición de Stefan [St]). Una parte de este resultado fue dada independientemente por Li y Yorke en 1975 en su famoso trabajo "Period three implies chaos" [LY]. (De hecho, ya a comienzos de siglo, Fatou y Julia habían observado que las aplicaciones cuadráticas podían tener una infinidad de puntos periódicos.)

Una medida cuantitativa de la complejidad de la dinámica de aplicaciones de un espacio topológico compacto es la invariante topológica llamada entropía topológica introducida por Adler, Konheim y McAndrew en 1965 [AKM]. La entropía (topológica) de f es un número real no negativo, denotado por $h(f)$, que representa el crecimiento del número de diferentes órbitas de tamaño n si usamos una precisión ϵ para distinguirlas. Para aplicaciones continuas y monótonas a trozos del intervalo (es decir, con un número finito de extremos), $h(f)$ coincide con el crecimiento del número de intervalos maximales de monotonía de las iteradas, [MS], [Yo]. En general, podemos pensar que entropía positiva corresponde a una dinámica complicada. Por ejemplo, el siguiente resultado, debido a Bowen-Frank [BF] y Misiurewicz [Mii], nos proporciona la relación entre el resultado de Sharkovskii y la entropía: "una aplicación continua del intervalo tiene entropía positiva si y sólo si tiene puntos periódicos cuyo período no es una potencia de dos". Aplicaciones del intervalo con entropía positiva, algunas

veces llamadas caóticas¹, pueden ser caracterizadas por la presencia de herraduras de Smale, órbitas homoclínicas y subshifts de tipo finito [Bl1].

En esta memoria nos proponemos analizar algunos aspectos, de tipo combinatorio, topológico y diferenciable, relacionados con la dinámica de endomorfismos del intervalo.

Con objeto de dotarla de una cierta autonomía, recogemos en un Capítulo preliminar aquellas nociones y propiedades sobre sistemas dinámicos, y en particular sobre el sistema dinámico definido por un endomorfismo del intervalo, que resultan de mayor significación a lo largo de la misma.

En el Capítulo I presentamos la dinámica simbólica para la renormalización de endomorfismos del intervalo con entropía nula.

El Capítulo II se dedica al estudio de la dinámica asintótica de homeomorfismos obtenidos como restricción de endomorfismos regulares.

Por último, en el Capítulo III, analizamos el conjunto de valores del parámetro para los cuales el punto extremo de

¹ Son diversas las nociones de caos en la literatura (ver, por ejemplo, Ruelle, Auslander y Yorke y sus referencias) utilizándose para definirlo conceptos de teoría ergódica, topológicos, etc.... En términos puramente topológicos, una aplicación $f: I \rightarrow I$ se dice caótica en un conjunto ACI si para cualquier par de puntos x e y en A se verifica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \text{ y } \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Este concepto es justamente el caos en sentido de Li y Yorke y está relacionado con la inestabilidad según Lyapunov. En este sentido, si f es tal que $h(f) > 0$ entonces la aplicación es caótica, sin embargo existen aplicaciones caóticas con $h(f) = 0$. (en [FSS] pueden verse las relaciones entre distintas nociones de caos).

la aplicación tienda o "tent" tiene una órbita densa.

En la teoría de sistemas dinámicos ciertas técnicas de renormalización han sido introducidas para explicar ciertos fenómenos cuantitativos y universales que aparecen en la bifurcación de duplicación de período de familias uniparamétricas de endomorfismos unimodales, es decir con un único extremo en el interior del intervalo (típica ruta hacia el caos en estas familias) ([CT],[Fe]). Diversas generalizaciones de esta idea han sido presentadas posteriormente. Recordemos, a modo de ejemplo, algunos hechos bien conocidos de la teoría de universalidad para aplicaciones del círculo (ver, por ejemplo, [FKS], [ORSS], [PTT]). Si f es un homeomorfismo del círculo, sabemos que el número de rotación de f está bien definido como

$$\rho(f) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \right) \text{ mod } 1$$

siendo $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f a \mathbb{R} . A partir de F podemos considerar la aplicación de $[0,1]$ en sí mismo dada por

$$\underline{f}(x) = F(x) \text{ mod } 1.$$

Se define entonces de manera usual la aplicación renormalizada de f como

$$R(f) = h^{-1} \circ \bar{f} \circ h$$

siendo h una transformación afín de I a un intervalo J en el cual la aplicación primer retorno, \bar{f} , de \underline{f} a J es del "mismo tipo" que \underline{f} (es decir, la representación sobre J de un homeomorfismo del círculo). Evidentemente la elección de J y h no es única, y por tanto es necesario dar una regla para

la selección de los mismos entre todas las posibilidades (Es otro problema parametrizar R en función de J y h). Esta aplicación renormalizada tiene un número de rotación, $\rho(R(f)) = \frac{1}{\rho(f)} \pmod{1}$. Por tanto la renormalización usual en aplicaciones del círculo, que actúa en un espacio funcional, se proyecta en la aplicación de Gauss $R(\theta) = \frac{1}{\theta} \pmod{1}$, actuando en $[0,1)$. Es entonces una ardua tarea transportar las propiedades de la aplicación de Gauss al grupo de renormalización R actuando en el espacio de funciones. Es claro que la dinámica de R es al menos tan complicada como la de la aplicación que se proyecta en el espacio simbólico, y los únicos irracionales que dan lugar a puntos periódicos (y en particular puntos fijos) de R son los "cuadráticos" (raíces de ecuaciones de grado dos y coeficientes racionales), entre los que se encuentra el famoso número aureo.

En el caso de endomorfismos unimodales del intervalo, la sucesión kneading o de amasamiento juega un papel similar al número de rotación en aplicaciones del círculo como una representación simbólica de la dinámica topológica. Puesto que existe una única sucesión kneading que describe la acumulación de bifurcaciones de duplicación de período, la dinámica simbólica es muy simple en este caso. La descripción simbólica pasa a ser muy rica cuando extendemos el estudio a aplicaciones bimodales (es decir, con dos extremos en el interior del intervalo) tales que la frontera del intervalo es invariante. En este caso se puede definir un (semi)grupo de renormalización que se proyecta a un operador en un espacio simbólico que presenta una herradura (ver [GLT],[MZ] y [Mu]). Puesto que no es fácil hacer una generalización en los términos empleados en estos trabajos

para el caso de endomorfismos del intervalo con un número arbitrario de extremos (nótese que en ellos el problema está relacionado con bifurcación duplicando período para aplicaciones bimodales con dos generadores del semigrupo de renormalización, teniendo una herradura con entropía topológica $\log 2$), en el CAPITULO 1, presentamos una teoría simbólica para la renormalización en el caso de bifurcaciones de duplicación de período formulada para endomorfismos del intervalo unidad arbitrarios, definiendo para ello un espacio simbólico, O_∞ , que describe todas las dinámicas posibles de los endomorfismos del intervalo con entropía nula restringidos a uno de sus conjuntos de Cantor minimales invariantes. Se estudia entonces la dinámica engendrada por cuatro endomorfismos de O_∞ que generalizan los operadores de renormalización habitualmente definidos para los endomorfismos diferenciables unimodales del intervalo. A nivel topológico estos endomorfismos tienen una dinámica muy compleja (con entropía topológica infinito) y en especial una infinidad de puntos fijos. Los métodos utilizados son de naturaleza combinatoria, simbólica y geométrica. Se formulan así mismo ciertas consecuencias conjeturales de los resultados a nivel simbólico para estos operadores en un cierto espacio de funciones. Hay que resaltar que muchas de las observaciones experimentales de universalidad del fenómeno de duplicación de período en sistemas macroscópicos [LLF] han sido realizadas cuando la transición hacia el caos ocurre después de la desaparición de un toro invariante [Ra]. En tales casos, la modelización unidimensional se hace en términos de aplicaciones continuas del círculo que, en el caso no monótono, tienen al menos dos puntos críticos. De ahí la importancia de estas técnicas en

aplicaciones multimodales en general.

En el estudio del comportamiento iterativo de una aplicación de un intervalo compacto, $f:I \rightarrow I$, es esencial conocer el conjunto ω -límite de cada punto, es decir el conjunto $\omega(x)$ de puntos de acumulación de $\{f^n(x), n \geq 0\}$, $x \in I$. Existen de hecho muchas posibilidades para tales conjuntos. Sarkovskii, en [Sa4], demuestra que $\omega(f) = \bigcup_{x \in I} \omega(x)$ es un conjunto cerrado y por tanto $\overline{\text{Per}(f)} \subseteq \omega(f)$, siendo $\text{Per}(f)$ el conjunto de puntos periódicos de f . Resultados adicionales concernientes a los conjuntos ω -límite para aplicaciones del intervalo han sido estudiados por Sarkovskii y Kenzegalov en [SK]. Además si f es un endomorfismo de I , monótono a trozos (es decir, con un número finito de intervalos de monotonía), Preston, [Pr], da alguna información acerca de las propiedades asintóticas de $\{f^n(x), n \geq 0\}$ para un punto genérico x de I , (entendiendo por puntos genéricos aquellos pertenecientes a un subconjunto residual de I , es decir a un subconjunto que contiene una intersección numerable de abiertos densos de I , que por el teorema de la categoría de Baire es también denso en I). Pues bien, el comportamiento de una tal órbita es uno, y sólo uno, de los siguientes:

(i) Finaliza eventualmente en un subconjunto invariante C de I , que es la unión disjunta de un número finito de intervalos cerrados, en el que f actúa transitivamente (es decir, la órbita de algún punto de C es densa en C).

(ii) La órbita es atraída hacia un conjunto de Cantor invariante $K \subset I$, en el cual f es minimal (es decir, la órbita de todo punto de K es densa en K).

(iii) La órbita está contenida en un conjunto

invariante abierto en cuyas componentes conexas f^n es monótona para todo $n \geq 0$.

En el CAPITULO 2, describimos la dinámica asintótica de homeomorfismos obtenidos como restricción de una clase genérica de C^2 -endomorfismos del intervalo con un número finito de puntos críticos no-planos. El conjunto ω -límite de tales restricciones no puede ser infinito salvo en el caso en que la restricción de la aplicación a la adherencia de alguna órbita crítica es un homeomorfismo minimal de un conjunto infinito. Esto da respuesta a una cuestión motivada por el hecho conocido de que si la restricción de f , endomorfismo localmente expansivo de un espacio métrico compacto, a un subconjunto E cerrado invariante es un homeomorfismo entonces E es un conjunto finito [GH]. Probamos asimismo que la anterior propiedad de finitud es también válida en el caso de aplicaciones trapezoidales del intervalo con ciertas condiciones sobre las pendientes.

En el CAPITULO 3 nos interesamos en la familia de aplicaciones lineales a trozos $f_s(x) = s(1 - |x-1|)$, $s \in [1, 2]$, $x \in [0, 2]$, conocida como la familia de aplicaciones "tent". La importancia de tal familia estriba en que son aplicaciones modelo en el espacio de aplicaciones unimodales del intervalo. En efecto, como se muestra en [MT], si f es un endomorfismo unimodal del intervalo con entropía positiva existe una semiconjugación entre f y alguna aplicación de la familia f_s . Este resultado es el análogo al de Poincaré acerca de que todo homeomorfismo del círculo con número de rotación irracional es semiconjugado a una rotación rígida. Por tanto la aplicación tent juega el mismo papel de

aplicación modelo en el espacio de endomorfismos unimodales como las rotaciones en el espacio de homeomorfismos del círculo. Es importante estudiar como varía el comportamiento de dichas aplicaciones con relación al parámetro; por ejemplo, la cuestión de la monotonía de la entropía en familias uniparamétricas de aplicaciones unimodales surge de forma natural y aparece tan pronto como se comienza a pensar sobre la entropía de las aplicaciones tent, (en este caso la cuestión es muy simple, la entropía de f_s es $\log(s)$, [MS]). Son diversos los autores interesados en el estudio topológico de f_s dependiendo del parámetro s . Por ejemplo, Coven, Kan y Yorke han mostrado en [CKY] que el conjunto de parámetros periódicos, es decir aquellos en los cuales la órbita del punto crítico es periódica, es un conjunto denso en el espacio de parámetros, teniendo un resultado similar para el conjunto de los que son prefijos (parámetros en los cuales la órbita del punto crítico contiene al punto fijo). En este capítulo, incluimos una prueba diferente de ambos hechos, así como, demostramos el nuevo resultado siguiente: el conjunto de parámetros para los cuales la órbita del punto crítico es densa es un conjunto G_δ -denso, es decir es la intersección numerable de abiertos densos.

- CAPITULO 0 -

- PRELIMINARES -

En el presente capítulo introducimos algunas nociones y propiedades sobre los sistemas dinámicos (I.1), y en particular sobre el sistema dinámico formado por una aplicación continua del intervalo (I.2), prestando especial atención a aquellas aplicaciones, f , con entropía topológica cero, teniendo un conjunto de Cantor K minimal invariante por f .

0.1 Sistemas dinámicos topológicos.

Definimos un **sistema dinámico** como un par, (S, f) , formado por un espacio métrico compacto S con una distancia d y una aplicación continua de S en sí mismo, es decir un endomorfismo de S .

Las **iteradas** de f son aplicaciones f^m definidas inductivamente por $f^0 = \text{id}$, $f^m = f^{m-1} \circ f$, para $m > 0$. Sea $x \in S$, la **órbita** de x en (S, f) , denotada por $\text{orb}(x)$, es el conjunto $\text{orb}(x) = \{f^n(x), n \geq 0\}$. Una órbita en (S, f) será llamada simplemente órbita de f .

Diremos que $x \in S$ es un **punto periódico** de período n de f , si $f^n(x) = x$ y $f^i(x) \neq x$, $1 \leq i < n$. En tal caso la órbita de x es un conjunto finito de cardinalidad n en el cual f actúa transitivamente que llamaremos órbita periódica, y n será también llamado período de la órbita. En particular, x es un punto fijo de f si es un punto periódico de período uno.

El conjunto ω -límite de x (ó de $\text{orb}(x)$) es el conjunto

$$\omega(x) = \{ y \in S \mid \exists \{n_i\} \rightarrow \infty \text{ t.q. } \{f^{n_i}(x)\} \longrightarrow y \}$$

es decir el conjunto de puntos de acumulación de la órbita de x . El conjunto ω -límite de cualquier punto de S es un conjunto compacto no vacío. Llamaremos conjunto ω -límite de f a $\omega(f) = \bigcup_{x \in S} \omega(x)$.

Un subconjunto $T \subset S$ se dice **invariante** si $f(T) \subseteq T$.

Diremos que un sistema dinámico (S, f) es **minimal** si S no contiene un subconjunto propio cerrado e invariante, lo cual es equivalente a que para cada $x \in S$, $\overline{\text{orb}(x)} = S$, donde $\bar{}$ denota la adherencia de $T \subset S$. Notar que si P es una órbita periódica de f , entonces $(P, f|_P)$ es un sistema dinámico minimal. Si $T \subset S$ es tal que $(T, f|_T)$ es minimal diremos que T es un subconjunto minimal de S (ó de f).

La dinámica topológica es el estudio de la estructura de las órbitas de un sistema dinámico, bajo equivalencia topológica. Dos sistemas dinámicos (S, f) y (T, g) son topológicamente equivalentes o **topológicamente conjugados** si

existe un homeomorfismo $h:S \longrightarrow T$ tal que $g \circ h = h \circ f$. Si h es simplemente continua y sobreyectiva, se dice que ambos sistemas dinámicos son topológicamente semiconjugados. Es claro que, en ambos casos, $g^n \circ h = h \circ f^n$ para cualquier n y por tanto la (semi) conjugación h lleva órbitas de f en órbitas de g .

La **entropía topológica** de f fue introducida en [AKM] como una invariante por conjugación topológica. Puede definirse como sigue: dado un sistema dinámico (S,f) , un entero positivo n y $\epsilon > 0$, se dice que $E \subset S$ es un conjunto (n,ϵ) -separado si para cualquier par de puntos distintos x,y en E existe un entero $m \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > \epsilon$. Sea $s(f,n,\epsilon)$ el supremo del conjunto $\{\#E \mid E \text{ es } (n,\epsilon)\text{-separado}\}$. Entonces el límite

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(f,n,\epsilon)$$

existe (puede ser $+\infty$), y $h(f)$ es la llamada entropía topológica de f . El valor $h(f)$ es realmente una medida cuantitativa de la complejidad de la estructura orbital de la aplicación: para n grande y ϵ pequeño, el número de diferentes órbitas de "tamaño" n , con una precisión ϵ , es del orden $e^{nh(f)}$.

Lema 0.1.-

$$h(f^m) = m h(f).$$

Teorema 0.2.- (Bowen)

Sean (S,f) y (T,g) dos sistemas dinámicos. Si $\pi:S \longrightarrow T$ es una aplicación continua y sobreyectiva tal que $\pi \circ f = g \circ \pi$ entonces

$$h(g) \leq h(f) \leq h(g) + \sup_{x \in T} h(f|_{\pi^{-1}(x)}).$$

Corolario 0.3.-

Si (S, f) y (T, g) son sistemas dinámicos topológicamente conjugados, entonces f y g tienen la misma entropía topológica. En particular, la entropía topológica es independiente de la métrica elegida.

0.2 Aplicaciones del intervalo

En todo lo que sigue consideraremos el sistema dinámico (I, f) , donde I es un intervalo compacto de \mathbb{R} , considerado como espacio topológico con la topología inducida por la de \mathbb{R} , y f un endomorfismo de I . (Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I = [0, 1]$).

Comenzaremos esta sección con una simple observación sobre la dinámica de este sistema cuando f es invertible. Sea f un endomorfismo de I inyectivo, entonces cualquier órbita de f es asintótica a un punto fijo o a un punto periódico de período dos. En efecto, supongamos que f es monótona creciente; si $x \in I$ es tal que $f(x) > x$ entonces $f^n(x) > f^{n-1}(x)$, para cada $n > 1$. Por tanto, la sucesión $\{f^n(x)\}$ es monótona creciente y converge a un punto $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ que, por continuidad de f , es un punto fijo. Si $f(x) < x$, entonces $\{f^n(x)\}$ es monótona decreciente y, análogamente, converge hacia un punto fijo. Si f es una aplicación decreciente, f^2 es creciente. De ahí que, usando los argumentos previos para f^2 , se tiene que cualquier órbita de f es asintótica a un punto fijo de f o a un punto periódico de período dos.

Por tanto, la existencia de puntos periódicos en un sistema dinámico unidimensional invertible hace la dinámica extremadamente simple. Sin embargo, este no es el caso cuando la aplicación no es invertible. Por ejemplo, como puede verse en [Pr], si f es un endomorfismo monótono a trozos (es decir, con un número finito de extremos relativos), se verifica que el conjunto

$$\Lambda(f) = \left(\bigcup_{i=1}^r B(C_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s B(K_i) \right) \cup M(f)$$

es denso en I , siendo:

1.- $M(f) = \{x \in I \mid \exists \varepsilon > 0, f^n \text{ monótona en } (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \forall n \geq 0\}$, el cual es un abierto invariante.

2.- $C_i = D_{i1} \cup \dots \cup D_{in_i}$, con D_k intervalos cerrados disjuntos tales que $f(D_k) = D_{k+1}$, $f(D_{n_i}) = D_1$, y en cada C_i , f actúa transitivamente (es decir, existe un punto de C_i cuya órbita es densa en C_i).

3.- K_i , $i=1, \dots, s$, es un conjunto de Cantor invariante minimal que puede ser expresado de la forma

$$K_i = \bigcap_{n \geq 1} K_n^i$$

con K_n^i una unión disjunta de un número finito de intervalos cerrados, $K_n^i = B_{n1}^i \cup \dots \cup B_{nm_n}^i$, tales que $f(B_k^i) = B_{k+1}^i$, $f(B_{m_n}^i) = B_1^i$, y $K_0^i \cap M(f) = \emptyset$, $K_n^i \supset K_{n+1}^i$, $m_{n+1}^i > m_n^i$, para cada $n \geq 1$.

4.- $B(C_i) = \{x \in I \mid \exists n \geq 0, f^n(x) \in \text{Int}(C_i)\}$,

$$B(K_i) = \{x \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), K_i) = 0\}.$$

Además, se verifica:

(i) $r+s \leq \#C(f)$, siendo $C(f)$ el conjunto de extremos relativos de f .

(ii) $\forall i, j=1, \dots, s, K_i \cap K_j = \emptyset$ y $B(K_i) \cap B(K_j) = \emptyset$, ó $K_i = K_j$.

(iii) Los conjuntos $B(C_1), \dots, B(C_r), B(K_1), \dots, B(K_s)$ y $M(f)$ son disjuntos.

(iv) $f|_K$ es un homeomorfismo minimal, para cada $i=1, \dots, s$.

(v) $C(f) \cap (\bigcap_{n \geq 1} \text{Int}(K_n^i)) \neq \emptyset, \forall i=1, \dots, s$.

Por otra parte, son bien conocidos los siguientes resultados:

Lema 0.4.-

Sea f un endomorfismo de I y $J \subseteq I$ un subintervalo cerrado. Si $J \subseteq f(J)$ entonces f tiene un punto fijo en J .

Lema 0.5.-

Sea f un endomorfismo de I y supongamos que existen $n > 1$ intervalos cerrados disjuntos I_0, \dots, I_{n-1} de I tales que $I_{i+1} \subseteq f(I_i), I_0 \subseteq f(I_{n-1})$. Existe una órbita periódica $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ de f tal que $x_i \in I_i$.

De todo lo expuesto hasta el momento se deduce que si existe un conjunto K de los indicados anteriormente, entonces f tiene órbitas periódicas de todos los períodos $m_n, n \geq 1$. Ahora bien, existe un resultado, el Teorema de Sharkovskii, que da una caracterización del conjunto de períodos de una endomorfismo de \mathbb{R} , el cual se describe a continuación.

Consideramos la siguiente descomposición del conjunto de los números naturales, \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_{2^n} \cup \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_r$$

donde $\mathbb{N}_{2^n} = \{2^0, 2^1, \dots, 2^n, \dots\}$, $\mathbb{N}_1 = \{3, 5, 7, \dots\}$ y $\mathbb{N}_r = \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N}_{2^n} \cup \mathbb{N}_1)$.

Se define en \mathbb{N} el orden de Sharkovskii, \leftarrow , como sigue:

denotemos por

$$a_i = 2^{r_i} \in \mathbb{N}_{2^n}$$

$$b_i = (2m_i + 1)2^{k_i} \in \mathbb{N}_r$$

$$c_i = 2n_i + 1 \in \mathbb{N}_1$$

entonces $a_i \leftarrow b_j \leftarrow c_k$, $\forall i, j, k$, y

$$a_i \leftarrow a_j \iff r_i < r_j,$$

$$b_i \leftarrow b_j \iff k_i > k_j \quad \text{ó} \quad (k_i = k_j \text{ y } m_i > m_j),$$

$$c_i \leftarrow c_j \iff n_i > n_j.$$

Teorema 0.6.- [Sai]

Si f , aplicación continua de \mathbb{R} , tiene una órbita periódica de período p , entonces tiene una órbita periódica de período q , para todo $q \leftarrow p$.

Se sigue por tanto que la estructura periódica más simple corresponde al caso en el que los períodos pertenecen a \mathbb{N}_{2^n} . En tal caso el conjunto de períodos, $\text{Per}(f)$, es finito de la forma $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\}$, para algún $n \geq 0$, ó \mathbb{N}_{2^n} . Además

Teorema 0.7.- [BF],[Mi1]

Dado el sistema dinámico (I, f) , $h(f) > 0$ si y sólo si

$\text{Per}(f)$ no está contenido en \mathbb{N}_2^n .

Se puede ver también que la existencia de entropía topológica positiva es equivalente a la presencia de una herradura.

Definición 0.8.-

Sea $f:I \longrightarrow I$ un endomorfismo. Se dice que f posee una **herradura** si existen un intervalo $J \subset I$, dos subintervalos disjuntos J_0, J_1 de J y un entero $n > 0$ tal que J está contenido a la vez en $f^n(J_0)$ y $f^n(J_1)$.

La complejidad de la dinámica de una herradura puede comprenderse por dinámica simbólica. El modelo de referencia es una aplicación de desplazamiento o aplicación shift actuando sobre un espacio de sucesiones infinitas, por ejemplo, $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$.

Teorema 0.9.- [Mil]

Si f es un endomorfismo del intervalo, la entropía es positiva si y sólo si f posee una herradura.

Block, en [Bl2], ha analizado la estructura de los endomorfismos que tienen sólo potencias de dos en el conjunto de períodos. El criterio que sigue se basa en la siguiente definición:

Definición 0.10.-

Sea P una órbita periódica de un endomorfismo f del intervalo cuyo período es 2^m , $m > 0$. Se dice que P es una **órbita periódica simple** si para cualquier subconjunto

$\{q_1 < q_2 < \dots < q_n\}$ de P , donde n divide a 2^m y $n \geq 2$, y para cualquier entero positivo r que divide a 2^m tal que $\{q_1, \dots, q_n\}$ es una órbita periódica de f^r , se tiene:

$$f^r(\{q_1, \dots, q_{n/2}\}) = \{q_{n/2+1}, \dots, q_n\}$$

Teorema 0.11.-

f tiene puntos periódicos cuyo período no pertenece a \mathbb{N}_2 si y sólo si tiene una órbita periódica de período en \mathbb{N}_n que no es simple.

Y de aquí que las únicas órbitas periódicas permitidas en endomorfismos del intervalo con entropía nula son las órbitas periódicas simples.

Por el resultado de Preston [Pr]:

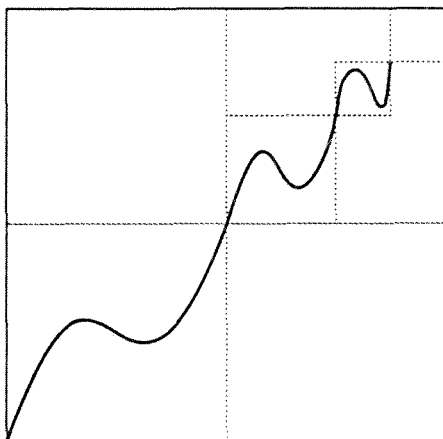
Teorema 0.12.-

Si existe $C = B_1 \cup \dots \cup B_n$, siendo B_i intervalos cerrados disjuntos tales que $f(B_i) = B_{i+1}$, $f(B_n) = B_1$, y f actúa transitivamente en C , entonces $h(f) > 0$.

Observamos que en un endomorfismo de entropía nula de I con un número finito de extremos, sólo es posible la existencia de los conjuntos K_i y $M(f)$ definidos anteriormente. Además en la descomposición de cada K_i como $K_i = \bigcap_{n \geq 1} K_n^i$, se observa que los conjuntos K_n^i sólo pueden ser unión disjunta de 2^{k_n} intervalos cerrados y la forma en la que cambia f dichos intervalos vendrán dadas por los elementos de O_{k_n} que definiremos posteriormente (I.1.1 y I.1.2), ya que en caso

contrario, por el lema 0.5 y teoremas 0.7, 0.11, $h(f)$ sería positiva.

Nótese que pueden existir aplicaciones con órbitas periódicas de período 2^n para todo $n \geq 0$ para las cuales no existe un conjunto de Cantor K invariante tal que $f|_K$ es un homeomorfismo minimal. Así ocurre, por ejemplo, en el endomorfismo del intervalo, f , definido como sigue. Sea $\{a_n\}$ la sucesión de números reales construida inductivamente por, $a_0=0$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$. Definimos, $f(x) = f_n(x)$, si $x \in [a_n, a_{n+1}]$, siendo f_n una aplicación bimodal de $[a_n, a_{n+1}]$ en si mismo con órbitas periódicas de período $1, 2, \dots, 2^n$ y ningún otro período (Figura 0.1).



- Figura 0.1 -

Renormalización.

Sea K un subconjunto cerrado de \mathbb{R} con la topología inducida. Llamaremos soporte de K , $\text{sop } K$, al más pequeño intervalo conteniendo a K .

Sea $f:K \rightarrow K$ un endomorfismo de K tal que (K,f) es minimal. Diremos que f es **2-renormalizable** si K puede escribirse como la unión de dos conjuntos no vacíos, K_0 y K_1 con soportes disjuntos, tal que f^2 lleva K_i en si mismo, es decir:

$$f^2(K_i) \subseteq K_i$$

para $i=0,1$.

Sea $s \in \{+, -\}$ y h_i^s un homeomorfismo entre $\text{sop } K$ y $\text{sop } K_i$, que preserva (invierte) la orientación si $s=+$ ($s=-$).

Definimos las aplicaciones, R_i^s , por

$$R_i^s(f) = (h_i^s)^{-1} \circ f^2 \circ (h_i^s).$$

La aplicación $R_i^s(f)$ se dirá que es la **2-renormalizada** de f , y a cada una de las cuatro R_i^s las llamaremos operador **2-renormalización**. (Denotaremos por R_i a cualquiera de los R_i^s y por R_0 cualquiera de los R_0^s).

Diremos que f es un **punto fijo de R_i^s** , si f y $R_i^s(f)$ son topológicamente equivalentes mediante un homeomorfismo, ϕ , preservando la orientación (i.e. $f = \phi^{-1} \circ R_i^s(f) \circ \phi$).

Diremos que f es **dos veces 2-renormalizable** si $f, R_1(f)$ y $R_0(f)$ son 2-renormalizables. Se puede extender esta definición de forma natural a **n veces 2-renormalizable** y a **infinitamente 2-renormalizable**.

- CAPITULO I -

- DINAMICA SIMBOLICA PARA LA RENORMALIZACION DE ENDOMORFISMOS DE ENTROPIA NULA DEL INTERVALO -

Ciertos conceptos sobre el grupo de renormalización fueron introducidos en la teoría de sistemas dinámicos para describir la transición hacia el caos vía una cascada de bifurcaciones de duplicación de período en familias uniparamétricas de aplicaciones unimodales ([CT],[Fe]). Más tarde, fueron aplicados métodos similares a aplicaciones del círculo [FKS], [ORSS], y a otros problemas que no mencionaremos aquí. Al menos en el caso de dinámica unidimensional, el generador del (semi)grupo de renormalización (G.R.), formulado como un operador en un espacio de funciones, tiene un "duplicado" actuando sólo a nivel simbólico como se pone de manifiesto, por ejemplo, en

[PTT], y como explicaremos brevemente, por medio de un ejemplo en la siguiente discusión.

Un camino para formular el G.R. para aplicaciones del círculo consiste en asociar a cualquier aplicación con número de rotación α otra aplicación del círculo con número de rotación $1/\alpha - [1/\alpha]$. De aquí, partiendo de la mayor parte de los irracionales, la sucesión de números de rotación de las sucesivas aplicaciones renormalizadas puede cambiar en infinidad de caminos. Estas simples consideraciones topológicas muestran que el conjunto de situaciones asintóticas del G.R. (en un espacio de aplicaciones del círculo) ha de tener una estructura complicada. Por otra parte, la dinámica topológica en la acumulación de bifurcaciones de duplicación de período es muy simple cuando nos restringimos a aplicaciones unimodales del intervalo. Sin embargo, considerar exclusivamente aplicaciones unimodales es demasiado restrictivo, lo cual es obvio tanto desde el punto de vista matemático como en lo relativo a sus aplicaciones; es importante notar que la mayor parte de las observaciones experimentales de universalidad de duplicación de período que han sido realizadas en sistemas macroscópicos tienen una modelización unidimensional en términos de aplicaciones continuas del círculo que, en el caso no monótono, tienen al menos dos puntos extremos.

Es por todo ello que nos interesamos en una formulación del G.R. para aplicaciones del intervalo con un número arbitrario de puntos extremos.

Sea f un endomorfismo arbitrario del intervalo teniendo órbitas periódicas de período 2^n para todo $n \geq 0$ y no otro período. Supongamos K es un conjunto de cantor minimal de I

tal que $f|_K$ es un homeomorfismo. El presente capítulo está organizado como sigue. En I.1 definimos un espacio topológico O_∞ que describe todas las posibles dinámicas de $f|_K$ (I.3). Se estudia entonces en I.2 la dinámica generada por cuatro endomorfismos de O_∞ que generalizan los operadores renormalización definidos en el espacio de aplicaciones unimodales diferenciables. Atendiendo a los resultados obtenidos a nivel simbólico finalizamos en I.4 con un cuadro conjetural para la frontera de la entropía topológica positiva en un cierto espacio de endomorfismos regulares del intervalo.

Por último, y aunque no es el objeto de este trabajo, nos gustaría comentar brevemente que gracias a la teoría que vamos a desarrollar en este capítulo se ha podido vislumbrar una cierta relación entre dinámica y teoría de grupos. Ciertas cuestiones en dinámica que nos hemos planteado como consecuencia de este trabajo nos han conducido a resultados teóricos de grupos. En particular, se han podido investigar algunas nuevas propiedades del grupo de automorfismos de ciertos árboles. Además, la teoría de grupos nos ha sugerido nuevas cuestiones relativas a ciertos sistemas dinámicos y ha permitido extender resultados dinámicos conocidos. En un trabajo, en preparación con Bass, Rockmore y Tresser, analizamos esta relación estudiando una clase de modelos obtenidos al considerar la dinámica inducida por la acción de automorfismos de ciertos árboles en el espacio de extremos de uno de estos árboles [BORT].

I.1 El espacio simbólico O_∞ .

I.1.1 Un espacio de órdenes sobre \mathbb{N} .

Para cada entero $n \geq 0$, designemos por E_n el conjunto $\{1, 2, \dots, 2^n\}$. Un orden total, $<_o$, sobre este conjunto podemos entenderlo como una biyección $o: E_n \longrightarrow E_n$, de manera que $p <_o q \Leftrightarrow o(p) < o(q)$. Así, un orden total sobre E_n lo representamos por la 2^n -upla $o \equiv (o^{-1}(1), \dots, o^{-1}(2^n))$.

Denotaremos por $\text{Ord}(E_n)$ al conjunto de órdenes totales sobre E_n .

Consideremos las aplicaciones $f_n: E_{n+1} \longrightarrow E_n$ y $g_n: E_{n+1} \longrightarrow E_n$, definidas por:

$$g_n(x) = E \left[\frac{x+1}{2} \right] \quad x \in E_{n+1},$$

$$f_n(x) = x \pmod{2^n} \quad x \in E_{n+1},$$

siendo $E[\cdot]$ la función parte entera y $\pmod{2^n}$ la aplicación módulo habitual, salvo que

$$x \pmod{2^n} = 0 \implies x \pmod{2^n} = 2^n$$

Definición 1.1.-

Diremos que $o_{n+1} \in \text{Ord}(E_{n+1})$ es un **orden admisible** si existe $o_n \in \text{Ord}(E_n)$ tal que $g_n \circ o_{n+1} = o_n \circ f_n$.

Puesto que o_n , si existe, es único, podemos definir una aplicación

$$\begin{array}{ccc}
 F_n : \mathcal{A}dor(E_{n+1}) & \longrightarrow & \text{Ord}(E_n) \\
 o_{n+1} & \longrightarrow & o_n
 \end{array}$$

siendo $\mathcal{A}dor(E_{n+1})$ el conjunto de todos los órdenes admisibles sobre E_{n+1} .

De esta forma, para cada $n \geq 0$, definimos un conjunto de órdenes \hat{O}_n por:

$$\hat{O}_0 = \{(1)\},$$

$$\hat{O}_{n+1} = \{o_{n+1} \in \mathcal{A}dor(E_{n+1}) / F_{n-k} \circ \dots \circ F_n(o_{n+1}) \in \mathcal{A}dor(E_{n-k}), \forall k=0, \dots, n-1\}$$

Definición 1.2.-

Dado $o_n \in \hat{O}_n$, llamaremos **órdenes inducidos** por o_n en \hat{O}_i , a los elementos $o_i \in \hat{O}_i$, $i=1, \dots, n-1$, tales que

$$o_i = F_i \circ \dots \circ F_{n-1}(o_n).$$

Dotaremos a cada conjunto \hat{O}_n con la métrica

$$d_n(o_n, o'_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } o_n = o'_n \\ \frac{1}{2} & \text{si } o_n \neq o'_n \end{cases}$$

Así, $\{\hat{O}_n, n \geq 0\}$ es una familia de espacios topológicos discretos que definen, junto con las aplicaciones continuas $F_n : \hat{O}_{n+1} \rightarrow \hat{O}_n$, un sistema proyectivo cuyo límite denotaremos por \hat{O}_∞ , y cuyos elementos no son más que órdenes sobre \mathbb{N} . Más concretamente, el conjunto \hat{O}_∞ puede

escribirse como

$$\hat{O}_\infty = \left\{ \{o_n\}_{n \geq 0} \in \prod_{n=0}^{\infty} \hat{O}_n / F_n(o_{n+1}) = o_n, \forall n \geq 0 \right\}$$

y la distancia en este espacio es la dada por

$$d(\{o\}, \{o'\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } o_n = o'_n \quad \forall n \geq 0 \\ \frac{1}{2^k} & \text{si } o_k \neq o'_k \quad \text{y } o_n = o'_n \quad \forall n < k \end{cases}$$

Se verifica el siguiente

Teorema 1.3.-

\hat{O}_∞ es un conjunto de Cantor.

Demostración.-

Puesto que $\{\hat{O}_n\}_{n \geq 0}$ es una familia de espacios metrizables, \hat{O}_∞ es cerrado.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\{o_n\}_{n \geq 0} \in \hat{O}_\infty$. Consideremos $k \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, y $o'_n \in \hat{O}_n$, $n \geq 0$, de manera que :

$$o'_n = o_n \quad \text{para } n=0,1,\dots,k$$

$$o'_{k+1} \in \hat{O}_{k+1} \quad \text{con } F_k(o'_{k+1}) \neq o_k,$$

$$o'_n \in \hat{O}_n \quad \text{arbitrarios para } n > k+1.$$

De esta forma construimos $\{o'_n\}_{n \geq 0}$ que dista de $\{o_n\}_{n \geq 0}$ menos que ε y que no está en \hat{O}_∞ , por lo que queda demostrado que \hat{O}_∞ es totalmente desconexo. Siguiendo un razonamiento análogo se prueba que todo punto de \hat{O}_∞ es de acumulación,

por lo cual es perfecto. ■

Sea $r_n : E_n \longrightarrow E_n$ la permutación cíclica definida por

$$r_n(x) = (x+1) \pmod{2^n}.$$

Definición 1.4.-

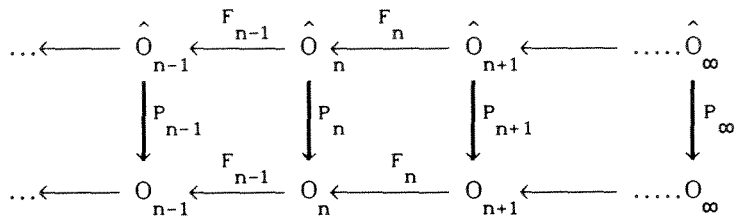
Dos órdenes o_n y o'_n en \hat{O}_n se dicen **equivalentes**, $o_n \sim o'_n$, si existe $m \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tal que $o'_n = o_n \circ r_n^m$.

El conjunto cociente \hat{O}_n / \sim es naturalmente isomorfo al conjunto O_n formado por aquellos elementos o_n de \hat{O}_n que tienen a 1 por elemento más grande, es decir que satisfacen $o_n(1) = 2^n$. Consideremos en O_n la topología inducida por \hat{O}_n ; O_n será entonces un espacio topológico discreto. Sea $P_n : \hat{O}_n \longrightarrow O_n$ la proyección asociada, entonces para cada $o_n \in \hat{O}_n$, $P_n(o_n) = o'_n$, siendo:

$$o_n^{-1}(x) = (o'_n^{-1}(x) + 1 - o_n^{-1}(2^n)) \pmod{2^n}$$

con $x \in E_n$.

Pasando al límite obtenemos un espacio O_∞ y una aplicación $P_\infty : \hat{O}_\infty \longrightarrow O_\infty$, como indica el siguiente diagrama:



Claramente O_∞ continúa siendo un conjunto de Cantor.

Otra caracterización de O_∞ .

Para comprender mejor la estructura de los elementos de O_∞ introduciremos una nueva notación que nos indicará como obtener O_n a partir de O_{n-1} .

Sea $S = \{+, -\}$; para cada $n \geq 0$, consideramos los conjuntos $\hat{S}_n = S^{2^n}$ y $S_n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{2^n}) \in \hat{S}_n / \sigma_{2^n} = +\}$. En particular, denotamos por $(+)_n$ el elemento constante $(+, +, \dots, +)$ de S_n , $(-, +)_n$ la 2^n -upla alternada $(-, +, \dots, -, +)$ con $(-, +)_0 = (+)$, y por $(\hat{-}, +)_n$ el elemento $(+, +, -, +, \dots, -, +)$ de S_n siendo $(\hat{-}, +)_0 = (+)$ y $(\hat{-}, +)_1 = (+, +)$.

Los elementos $s_n = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2^n})$ de \hat{S}_n pueden ser considerados como aplicaciones de \hat{O}_n en \hat{O}_{n+1} definiendo $s_n(o_n) = o_{n+1}$ por

$$o_{n+1}^{-1}(2x-k) = \begin{cases} o_n^{-1}(x) + (1-k)2^n & \text{si } \sigma_x = - \\ o_n^{-1}(x) + k2^n & \text{si } \sigma_x = + \end{cases}$$

para cada $x \in E_n$, donde en ambos casos k toma los valores 0 y 1. Nótese que aunque los elementos de \hat{S}_n no son compatibles con la relación de equivalencia, (es decir dados dos órdenes

equivalentes en \hat{O}_n sus imágenes por $s_n \in \hat{S}_n$ no tienen porque ser equivalentes), los elementos de S_n envían O_n en O_{n+1} . Además, se verifica el siguiente

Teorema 1.5.-

$$\hat{O}_{n+1} = \left\{ o_{n+1} \in \text{Ord}(E_{n+1}) / \exists o_n \in \hat{O}_n, \exists s_n \in \hat{S}_n \text{ tal que } o_{n+1} = s_n(o_n) \right\}.$$

Resultado que evidentemente se verifica suprimiendo " $\hat{}$ ".

De esta forma cada elemento de \hat{O}_n puede representarse por

$$\left(\prod_{n>i \geq 0} s_i \right)_{s_i \in \hat{S}_i} \quad (1)$$

donde $\tilde{\prod}$ designa el producto siguiendo los índices de forma decreciente, o bien por $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ con $s_i \in \hat{S}_i$. Mientras que los elementos de \hat{O}_∞ se representarán como

$$\left(\prod_{n \geq 0} s_n \right)_{s_n \in \hat{S}_n} \quad (1)$$

que identificaremos con la sucesión $\{s_n\}_{n \geq 0}$, $s_n \in \hat{S}_n$. Es claro que podemos suprimir " $\hat{}$ " en las expresiones precedentes y representar un elemento de O_∞ por

$$\left(\prod_{n \geq 0} s_n \right)_{s_n \in S_n} \quad (1)$$

o alternativamente por su correspondiente sucesión $\{s_n\}_{n \geq 0}$, e incluso por el número diádico

$$d(o) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \frac{\delta_{2^j-k+1}^j}{2^{2^j+k-1}}$$

siendo $o \in O_{\infty}$ dado por $\{s_n\}_{n \geq 0}$, con $s_n = (\sigma_1^n, \dots, \sigma_{2^n}^n)$ y

$$\delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_k^j = - \\ 1 & \text{si } \sigma_k^j = + \end{cases}$$

A título de ejemplo:

$$\begin{aligned} O_0 &= \{(1)\}, S_0 = \{(+)\}, O_1 = \{(2,1)\}, S_1 = \{(-,+), (+,+)\}, \\ O_2 &= \{(2,4,3,1), (4,2,3,1)\}, \\ S_2 &= \{(-,-,-,+), (+,-,-,+), (-,+,-,+), (+,+,-,+), (-,-,+), \\ &\quad (+,-,+), (-,+,+), (+,+,+)\}, \\ O_3 &= \{(2,6,4,8,3,7,5,1), (6,2,4,8,3,7,5,1), (2,6,8,4,3,7,5,1), \\ &\quad (6,2,8,4,3,7,5,1), (2,6,4,8,7,3,5,1), (6,2,4,8,7,3,5,1), \\ &\quad (2,6,8,4,7,3,5,1), (6,2,8,4,7,3,5,1), (4,8,2,6,3,7,5,1), \\ &\quad (8,4,2,6,3,7,5,1), (4,8,6,2,3,7,5,1), (8,4,6,2,3,7,5,1), \\ &\quad (4,8,2,6,7,3,5,1), (8,4,2,6,7,3,5,1), (4,8,6,2,7,3,5,1), \\ &\quad (8,4,6,2,7,3,5,1)\} \end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $N(n)$ el cardinal de O_n . Por la construcción de O_n a partir de O_0 , se obtiene trivialmente:

Corolario 1.6.-

$$N(n) = 2^{2^n - n - 1}$$

I.1.2 Ordenes y permutaciones simples.

Aunque posteriormente veremos la relación existente entre los órdenes hasta ahora definidos y la dinámica de las aplicaciones del intervalo, daremos ahora unos resultados que nos introducen en este marco. Más concretamente, de la obtención de O_n a partir de O_{n-1} se intuye alguna similitud entre los elementos de O_n y las permutaciones simples de 2^n elementos introducidas por Block en [Bl2] y posteriormente estudiadas por Bernhardt. en [Be]. Dichas permutaciones pueden ser definidas inductivamente como sigue:

En 2 puntos, la única permutación simple es (1,2). Supongamos $n > 1$ y sea π un 2^n -ciclo tal que

$$\pi(\{1, \dots, 2^{n-1}\}) = \{2^{n-1}+1, \dots, 2^n\}$$

y (necesariamente)

$$\pi(\{2^{n-1}+1, \dots, 2^n\}) = \{1, \dots, 2^{n-1}\}.$$

Notemos que:

$$\pi^2(\{1, \dots, 2^{n-1}\}) = \{1, \dots, 2^{n-1}\}$$

y

$$\pi^2(\{2^{n-1}+1, \dots, 2^n\}) = \{2^{n-1}+1, \dots, 2^n\}.$$

Por tanto π^2 define naturalmente dos ciclos de 2^{n-1} elementos, que denotamos π' y π'' , respectivamente, y que vienen dadas por

$$\pi'(j) = \pi^2(j)$$

$$\pi''(j) = \pi^2(2^{n-1}+j) - 2^{n-1}$$

con $j \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$.

Diremos que π es una **permutación simple** si ambas, π' y π'' , son permutaciones simples.

A cada $\sigma \in \hat{O}_n$ le asociamos la biyección

$$V_{\sigma} \equiv \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}: E_n \longrightarrow E_n$$

Se verifica:

Teorema 1.7.-

π es una permutación simple de 2^n elementos si y sólo si existe $\sigma \in \hat{O}_n$ tal que $\pi = V_{\sigma}$.

Demostración.-

Sea π una permutación simple. Si $r \in \{1, \dots, n\}$ y $l \in \{0, \dots, 2^{n-r}-1\}$ se verifica

$$\pi^{2^{n-r}}(\{2^r l + 1, \dots, 2^r l + 2^{r-1}\}) = \{2^r l + 2^{r-1} + 1, \dots, 2^r l + 2^r\}$$

y necesariamente

$$\pi^{2^{n-r}}(\{2^r l + 2^{r-1} + 1, \dots, 2^r l + 2^r\}) = \{2^r l + 1, \dots, 2^r l + 2^{r-1}\}$$

En particular si $r=1$

$$\pi^{2^{n-1}}(2x-1) = 2x$$

$$\pi^{2^{n-1}}(2x) = 2x-1 \quad x \in E^{n-1}$$

Definimos las siguientes biyecciones para cada $k=0, \dots, n$

$$\begin{array}{ccc} o_{n-k} : E_{n-k} & \longrightarrow & E_{n-k} \\ x & \longrightarrow & o_{n-k}(x) = E \left[\frac{\pi^{x-1}(2^n) + 2^k - 1}{2^k} \right] \end{array}$$

Veamos que así construidas $o_{n-k} \in O_{n-k}$.

$$o_0(1) = E \left[\frac{\pi^0(2^n) + 2^n - 1}{2^n} \right] = 1 \Rightarrow o_0 \in O_0$$

$$o_1(1) = E \left[\frac{\pi^0(2^n) + 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \right] = E \left[\frac{3 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \right] = 2$$

$$o_1(2) = E \left[\frac{\pi(2^n) + 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \right] = 1$$

Entonces $o_1 \in O_1$. Supongamos que $o_{n-k} \in O_{n-k}$ para k arbitrario y probemos que $g_{n-k} \circ o_{n-k+1} = o_{n-k} \circ f_{n-k}$, con lo cual, teniendo en cuenta que $o_{n-k}(1) = 2^{n-k}$, se verifica $o_{n-k} \in O_{n-k}$ para cualquier $k \in \{0, \dots, n\}$ y o_{n-k} son los órdenes inducidos por o_n en O_{n-k} , $k=1, \dots, n$. En efecto,

$$\begin{aligned} g_{n-k} \circ o_{n-k+1}(x) &= g_{n-k} \left(E \left[\frac{\pi^{x-1}(2^n) + 2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} \right] \right) = \\ &= E \left[\frac{\pi^{x-1}(2^n) + 2^k - 1}{2^k} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_{n-k} \circ f_{n-k}(x) &= o_{n-k}(x \pmod{2^{n-k}}) = \\ &= E \left[\frac{\pi^{x \pmod{2^{n-k}} - 1}(2^n) + 2^k - 1}{2^k} \right]. \end{aligned}$$

Dado $m \in E_n$ arbitrario, veamos cual es la relación entre

$$\pi^x(m) \text{ y } \pi^x \left[\frac{\cdot}{\text{mod } 2^{n-k}} \right] (m).$$

Evidentemente $x \equiv x \pmod{2^{n-k}} + s \cdot 2^{n-k}$ para algún s . Por tanto

$$\pi^x(m) = \pi^x \left[\frac{\cdot}{\text{mod } 2^{n-k}} \right]_{+s \cdot 2^{n-k}} (m) = \pi^{s \cdot 2^{n-k}} \left(\pi^x \left[\frac{\cdot}{\text{mod } 2^{n-k}} \right] (m) \right)$$

y puesto que π es un ciclo

$$\pi^x \left[\frac{\cdot}{\text{mod } 2^{n-k}} \right] (m) = \pi^x \left[\frac{\cdot}{\text{mod } 2^{n-k}} \right] (m)$$

Por tanto bastará ver la relación que hay entre p y $\pi^{s \cdot 2^{n-k}}(p)$, para cualesquiera $p \in E_n$ y s . Es claro que si $p \in \{2^k l + 1, \dots, 2^k l + 2^{k-1}\}$ para algún l , entonces

$$\pi^{2^{n-k}}(p) \in \{2^k l + 2^{k-1} + 1, \dots, 2^k l + 2^k\}$$

y si $p \in \{2^k l + 2^{k-1} + 1, \dots, 2^k l + 2^k\}$ entonces

$$\pi^{2^{n-k}}(p) \in \{2^k l + 1, \dots, 2^k l + 2^{k-1}\}.$$

Supongamos $p \in \{2^k l + 1, \dots, 2^k l + 2^{k-1}\}$ (el otro caso es análogo).

Entonces

$$\pi^{s \cdot 2^{n-k}}(p) \in \{2^k l + 1, \dots, 2^k l + 2^{k-1}\}$$

ó

$$\pi^{s \cdot 2^{n-k}}(p) \in \{2^k l + 2^{k-1} + 1, \dots, 2^k l + 2^k\}.$$

En cualquier caso:

$$E \left[\frac{\pi^{s \cdot 2^{n-k}}(p) + 2^{k-1}}{2^k} \right] = E \left[\frac{p + 2^{k-1}}{2^k} \right]$$

de donde se sigue el resultado.

Veamos que $V_{o_n} = \pi$ ó equivalentemente que $o_n \circ r_n = \pi \circ o_n$.

$$o_n \circ r_n(x) = o_n((x+1) \bmod 2^n) = \pi^{(x+1) \bmod 2^n - 1}(2^n) = \pi^x(2^n),$$

$$\pi \circ o_n(x) = \pi(\pi^{x-1}(2^n)) = \pi^x(2^n).$$

La equivalencia se sigue trivialmente de la cardinalidad de los conjuntos O_n y el conjunto de permutaciones simples.

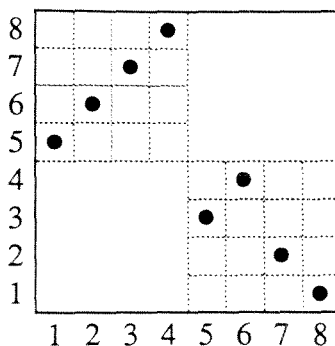
■

1.1.3 Gráficas, extremos e iteradas de un orden. Matriz asociada.

Definición 1.8.-

Llamaremos **gráfica** de un orden $o_n \in \hat{O}_n$ al conjunto

$$\text{Graf}(o_n) = \{ (x,y) \in E_n^2 / y = V_{o_n}(x) \}$$



- Figura 1.1 -

Ejemplo.-

Si $o=(2,6,4,8,3,7,5,1)$ entonces

$$\text{Graf}(o)=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(5,3),(6,4),(7,2),(8,1)\}$$

pudiendo ser representado gráficamente como en la figura 1.1.

Lema 1.9.-

Si $o_n, o'_n \in \hat{O}_n$ son órdenes equivalentes entonces

$$\text{Graf}(o_n)=\text{Graf}(o'_n).$$

Demostración.-

Es consecuencia inmediata del hecho que las aplicaciones asociadas a dos órdenes equivalentes verifican

$$V_{o_n} = V_{o'_n}.$$

■

Con el fin de determinar todas las gráficas de órdenes en O_n haremos las siguientes consideraciones:

Definición 1.10.-

Diremos que los elementos $P_0=(x_0, y_0)$ y $P_1=(x_1, y_1)$ de E_n^2 forman un **par legal** en E_n si x_0 es impar, $x_1=x_0+1$ y $y_0 \neq y_1$.

Definición 1.11.-

Si $P_0, P_1 \in E_n^2$ es un par legal en E_n , se define un **desdoblamiento local** de (P_0, P_1) como el cuádruple $(P_0^0, P_0^1, P_1^0, P_1^1)$ donde

$$x_i^0 = 2x_i - 1, \quad x_i^1 = 2x_i \quad \text{y} \quad \{y_i^0, y_i^1\} = \{2y_i, 2y_i - 1\}$$

para $i=0,1$, siendo $P_i = (x_i, y_i)$ y $P_i^j = (x_i^j, y_i^j)$.

Lema 1.12.-

Si (P_0, P_1) es un par legal en E_n entonces (P_0^0, P_0^1) y (P_1^0, P_1^1) son pares legales en E_{n+1} .

Definición 1.13.-

Se define la **paridad de un desdoblamiento local** $(P_0^0, P_0^1, P_1^0, P_1^1)$ de (P_0, P_1) como el número $\prod_{i=0}^1 (y_i^0 - y_i^1) \in \{1, -1\}$.

Definición 1.14.-

Sea $G \subset E_n^2$, con $\#G=2$, tal que los elementos de G son dos a dos pares legales en E_n . Un **desdoblamiento legal** de G es un subconjunto de E_{n+1}^2 obtenido reemplazando cada par legal de G por un desdoblamiento local, de manera que el producto de las paridades de todos los desdoblamientos locales es -1 .

Denotemos por D_n la aplicación que a cada desdoblamiento legal en E_{n+1}^2 le hace corresponder el único subconjunto de E_n^2 del que procede.

Para cada $n \geq 1$, definimos por recurrencia la familia

$$\mathbb{G}_1 = \left\{ \{(1,2), (2,1)\} \right\},$$

$$\mathbb{G}_n = \left\{ G \subset E_n^2 / D_{n-k} \circ \dots \circ D_{n-1} (G) \in \mathbb{G}_{n-k}, \forall k=1, \dots, n-1 \right\}.$$

Como consecuencia inmediata de ser V_{O_n} , para cualquier $o \in O_n$, una permutación simple se obtiene el siguiente

Teorema 1.15.-

Para cualquier $n \geq 1$ se verifica

$$G_n = \{ \text{Graf}(o), o \in O_n \} .$$

Sea $G \in G_n$ y $P = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ un par legal en E_n , denotaremos por $d(P)$, $d_1(P)$, $d_2(P)$ y $d_3(P)$ los desdoblamientos locales de P dados, respectivamente, por:

$$d(P) = \begin{cases} \{(2x_0 - 1, 2y_0), (2x_0, 2y_0 - 1), (2x_1 - 1, 2y_1), (2x_1, 2y_1 - 1)\} & \text{si } y_0 > y_1 \\ \{(2x_0 - 1, 2y_0 - 1), (2x_0, 2y_0), (2x_1 - 1, 2y_1 - 1), (2x_1, 2y_1)\} & \text{si } y_0 < y_1 \end{cases}$$

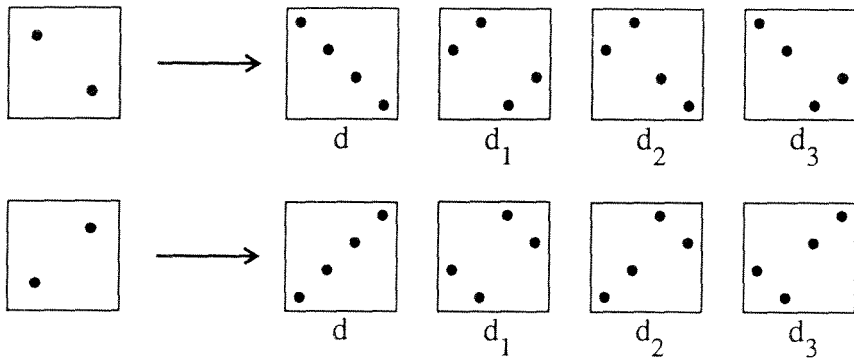
$$d_1(P) = \begin{cases} \{(2x_0 - 1, 2y_0 - 1), (2x_0, 2y_0), (2x_1 - 1, 2y_1 - 1), (2x_1, 2y_1)\} & \text{si } y_0 > y_1 \\ \{(2x_0 - 1, 2y_0), (2x_0, 2y_0 - 1), (2x_1 - 1, 2y_1 - 1), (2x_1, 2y_1 - 1)\} & \text{si } y_0 < y_1 \end{cases}$$

$$d_2(P) = \{(2x_0 - 1, 2y_0 - 1), (2x_0, 2y_0), (2x_1 - 1, 2y_1), (2x_1, 2y_1 - 1)\},$$

$$d_3(P) = \{(2x_0 - 1, 2y_0), (2x_0, 2y_0 - 1), (2x_1 - 1, 2y_1 - 1), (2x_1, 2y_1)\},$$

cuyo efecto se representa en forma gráfica como indica la figura 1.2.

Nótese que mientras que d y d_1 son desdoblamientos locales con paridad 1, la paridad de d_2 y d_3 es -1.



- Figura 1.2 -

Al igual que se hizo en la definición de O_∞ , se puede introducir el conjunto de las gráficas de los elementos de O_∞ como límite proyectivo de los conjuntos G_n (con las aplicaciones D_n) dotándolos con las topologías convenientes; no obstante, y puesto que nuestro interés estriba en dar una interpretación gráfica de un elemento $\alpha = \{\alpha_n\}_{n \geq 0} \in O_\infty$, introduciremos la dinámica que, sobre el conjunto de Cantor triádico T sobre $I=[0,1]$, define dicho orden.

Después de la construcción usual de T por eliminación de tercios centrales, se obtienen 2^n segmentos en la n -ésima etapa de la construcción; se tienen así 2^{n+1} bordes a los cuales se les asignan los enteros del 1 al 2^{n+1} en el orden dado por α_{n+1} . Existe entonces una única aplicación continua $\underline{\alpha}$ de T en sí mismo que lleva el borde m en el $m+1$. Como en

la representación usual de las dinámicas sobre los diádicos, vamos a utilizar la aplicación de T sobre I obtenida "cerrando los agujeros" de T . Es decir, dado $x \in T$, sabemos que x tiene una representación de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0,1\},$$

Consideramos la aplicación $e: T \rightarrow I$ definida por

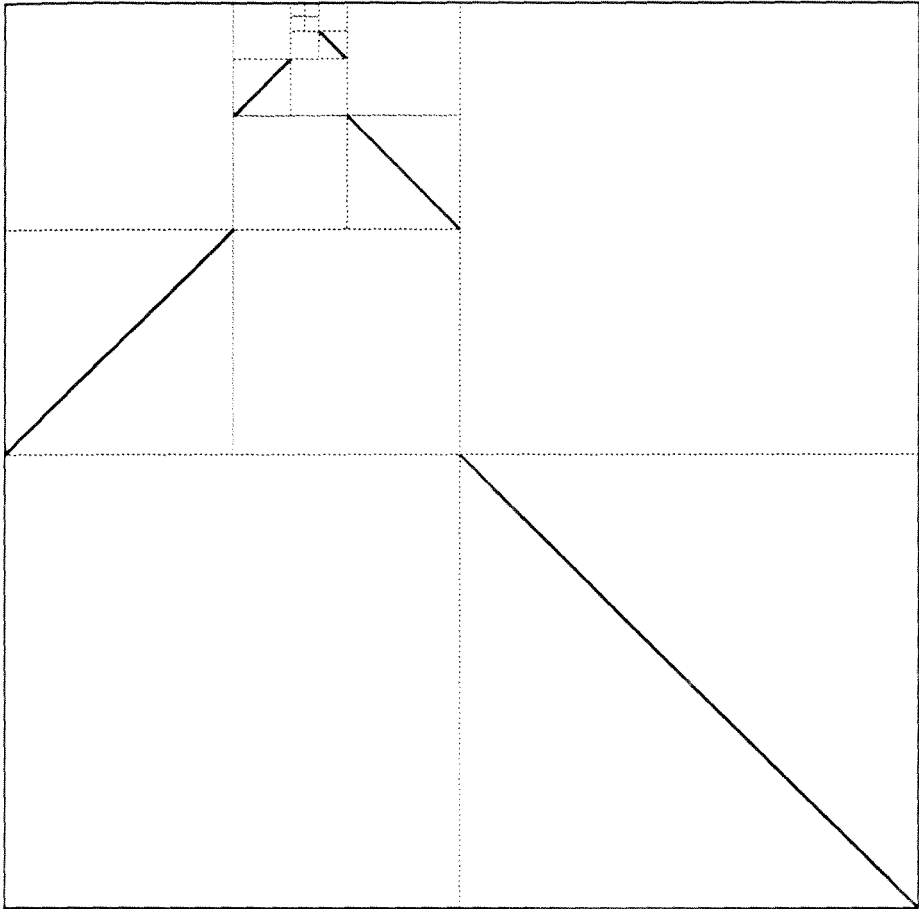
$$e(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$$

que no es inyectiva porque fijada una componente conexa arbitraria de INT , toma el mismo valor en sus dos puntos frontera. Se obtiene sin embargo un embebimiento restringiendo e al subconjunto T^* de T obtenido suprimiendo uno de los dos puntos frontera de cada componente conexa de INT .

Sea \underline{o} la acción sobre T definida por $o \in O_{\infty}$, entonces podemos considerar la aplicación o_I en I que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^* & \xrightarrow{\underline{o}} & T \\ \downarrow e & & \downarrow e \\ I & \xrightarrow{o_I} & I \end{array}$$

De esta forma, cada elemento o de O_{∞} define una aplicación de I en sí mismo, lo que permite representarlo gráficamente como en el ejemplo dado en la figura 1.3.



- Figura 1.3 - $o_{u+} = \prod_{n \geq 0} (-, +)_n (1)$

Una vez introducido el concepto de gráfica de un orden parece natural definir un extremo de dicho orden como:

Definición 1.16.-

Diremos que el orden $o_n \in \hat{O}_n$ tiene en $k \in \{2, \dots, 2^n - 1\}$ un

extremo relativo si

$$V_{o_n}(k-1) < V_{o_n}(k) \text{ y } V_{o_n}(k+1) < V_{o_n}(k)$$

ó

$$V_{o_n}(k-1) > V_{o_n}(k) \text{ y } V_{o_n}(k+1) > V_{o_n}(k).$$

Dado $n > 0$ y $o_n \in \hat{O}_n$, si $k \in \{2, \dots, 2^n - 1\}$ definimos $\gamma_{o_n}(k) \in \{0, 1\}$ como:

$$\gamma_{o_n}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } o_n \text{ tiene en } k \text{ un extremo relativo,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $H_n(o_n) = \sum_{k=1}^{2^n - 2} \gamma_{o_n}(k+1)$, evidentemente H_n es invariante de cada clase de equivalencia, y representa el número de extremos relativos del orden o_n . De esta forma si $o = \{o_n\}_{n \geq 0}$ es un elemento de O_∞ , definimos el número de extremos de o como

$$M(o) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(o_n)$$

si este límite existe y $M(o) = \infty$ en caso contrario.

Se sabe entonces, utilizando [Be], que los dos órdenes standar definidos por

$$o_{u+} = \prod_{n \geq 0} \tilde{\prod}_{n} (-, +)_n(1) \text{ y } o_{u-} = \prod_{n \geq 0} \tilde{\prod}_{n} (\hat{-}, +)_n(1)$$

son los únicos elementos o de O_∞ tales que $M(o) = 1$. Además por [Be] se sigue que::

Teorema 1.17.-

Sean $o_n \in O_n$ y $o_{n-1} \in O_{n-1}$ su orden inducido en O_{n-1} . Se verifica:

$$H_{n-1}(o_{n-1}) \leq H_n(o_n) \leq 2^n - 2 - H_{n-1}(o_{n-1}).$$

Definición 1.18.-

Sean $o_n \in \hat{O}_n$ y m entero impar positivo, se llamará **iterada** de orden m de o_n al elemento $(o_n)^m$ de \hat{O}_n definido por

$$(o_n)^m(x) = o_n((x+(x-1)(m-1)) \bmod 2^n), \quad x \in E_n.$$

Un simple cálculo muestra que $V_{(o_n)^m} = o_n \circ r_n^m \circ o_n^{-1} = (V_{o_n})^m$.

Pasando al límite proyectivo, la iterada de orden m , de un elemento $o = \{o_n\}_{n \geq 0} \in \hat{O}_\omega$, es el elemento de \hat{O}_ω , denotado por $(o)^m = \{(o_n)^m\}_{n \geq 0}$, tal que para cada n , $(o_n)^m$ es la iterada de orden m de o_n .

Claramente si suprimimos en todo lo anterior " $\hat{}$ ", O_n y O_ω son invariantes por estas operaciones.

Matriz asociada a un elemento de O_n .

Dado $o_n \in O_n$, llamaremos **matriz asociada** a o_n a la matriz de la permutación V_{o_n} , es decir a la matriz $A_{o_n} =$

$(a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, 2^n\}}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } V_o(j)=i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observaciones.-

1.- Sea $A_{o_n} \in M_{2^n \times 2^n}$ la matriz asociada a un orden $o_n \in O_n$ arbitrario; puesto que esta matriz es la matriz de incidencia de un 2^n -ciclo en cada fila y cada columna habrá una sólo componente no nula.

2.- Por otro lado, sabido es que la permutación V_{o_n} en E_n induce sobre E_k las permutaciones V_{o_k} , donde $o_k \in O_k$ son los elementos en O_k , $k=1, \dots, n-1$, inducidos por o_n . En definitiva, para cada $k=1, \dots, n-1$, la matriz A_{o_n} puede ser considerada como una matriz formada por 2^k bloques no nulos de dimensión $2^{n-k} \times 2^{n-k}$, colocados según la "estructura" dada por la matriz A_{o_k} ; es decir, $A_{o_n} = \{B_{ij}\}_{i,j \in \{1, \dots, 2^k\}}$, siendo B_{ij} submatrices de A_{o_n} del tipo $2^{n-k} \times 2^{n-k}$ de forma que

$$B_{ij} = \begin{cases} (0) & \text{si } V_{o_k}(j) \neq i, \\ \neq (0) & \text{si } V_{o_k}(j) = i; \end{cases}$$

estas submatrices tendrán a su vez una "estructura de bloques" de tipo $2^{n-k-j} \times 2^{n-k-j}$, $j=1, \dots, n-k$; así, por ejemplo, si la matriz asociada al orden inducido por o_n en

O_1 es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A_{O_n} = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}$, donde cada $B_i \in M_{2^{n-1} \times 2^{n-1}}$,

al igual que si la matriz asociada al orden inducido por o_n

en O_2 es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A_{O_n} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con

$$B_i \in M_{2^{n-2} \times 2^{n-2}}.$$

3.- De los desdoblamientos locales que dan lugar a la gráfica de un orden se infiere que las posibles estructuras para bloques de dimensión $2^2 \times 2^2$ son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue denotaremos por I_k la matriz identidad de dimensión $2^k \times 2^k$ y por T_k la matriz

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 1 & & 0 & \end{pmatrix} \in M_{2^k \times 2^k}.$$

I.2 Cuatro dinámicas sobre O_∞ .

Para cada $n > 0$, definimos dos aplicaciones de O_n en O_{n-1} como sigue:

$$\mathcal{R}_{1,n}^+(o_n) = o_{n-1}^+ \quad \text{con } o_{n-1}^{+^{-1}}(x) = \frac{1 + o_n^{-1}(x + 2^{n-1})}{2}$$

$$\mathcal{R}_{0,n}^+(o_n) = P_{n-1}(o_{n-1}^-) \quad \text{con } o_{n-1}^{-^{-1}}(x) = \frac{o_n^{-1}(x)}{2}$$

Utilizando las biyecciones B_k de \hat{O}_k , definidas para todo $k \geq 0$

$$B_k(o_k) = o'_k \quad \text{con } o_k'^{-1}(x) = o_k^{-1}(2^k - x + 1),$$

podemos definir dos nuevas aplicaciones de O_n en O_{n-1} por

$$\mathcal{R}_{1,n}^-(o_n) = P_{n-1}(B_{n-1}(o_{n-1}^+)),$$

$$\mathcal{R}_{0,n}^-(o_n) = P_{n-1}(B_{n-1}(o_{n-1}^-)).$$

Pasando al límite proyectivo se obtienen cuatro endomorfismos de O_∞ que llamaremos aplicaciones de **renormalización simbólica** y denotamos, respectivamente, por \mathcal{R}_1^+ , \mathcal{R}_0^+ , \mathcal{R}_1^- , \mathcal{R}_0^- , y que generan cuatro acciones continuas de \mathbb{Z}^+ sobre O_∞ .

Observaciones.-

1.- Sea \mathcal{R}_i^s , $s \in \{+, -\}$, $i \in \{0, 1\}$. Para cualquier $o = \{o_n\}_{n \geq 0} \in O_\infty$ se verifica $\mathcal{R}_i^s(o) = \{o'_n\}$ siendo $o'_n = \mathcal{R}_{1,n+1}^s(o_{n+1})$,

para cada $n \geq 0$. Por otra parte, los elementos o y $\mathcal{R}_1^s(o)$ pueden ser identificados a sucesiones $\{s_n\}_{n \geq 0}$ y $\{s'_n\}_{n \geq 0}$, respectivamente, siendo s_n y s'_n los elementos de S_n tales que

$$s_n(o) = o_{n+1} \quad \text{y} \quad s'_n(o') = o'_{n+1}.$$

Por abuso de notación, representaremos por $\mathcal{R}_{1,n+1}^s(s_n)$ al elemento s'_n , pudiendo así considerar a cada $\mathcal{R}_{1,n}^s$, $n > 0$, como una aplicación de S_n en S_{n-1} .

Siguiendo esta notación, si $s_{n+1} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2^{n+1}}) \in S_{n+1}$ entonces

$$\mathcal{R}_{1,n+1}^+(s_{n+1}) = s_n \quad \text{con} \quad s_n = (\sigma_{2^n+1}, \dots, \sigma_{2^{n+1}}).$$

2.- Supongamos $o \in O_\infty$ viene representado por el número diádico

$$d(o) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \frac{\delta_{2^j-k+1}^j}{2^{2^j+k-1}}, \quad \text{donde} \quad \delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_k^j = - \\ 1 & \text{si } \sigma_k^j = + \end{cases}$$

siendo o dado por $\{s_n\}_{n \geq 0}$, con $s_n = (\sigma_1^n, \dots, \sigma_{2^n}^n)$. \mathcal{R}_1^+ tiene entonces la particularidad de que su acción sobre $d(\cdot)$ es fácilmente obtenida como:

$$d(\mathcal{R}_1^+(o)) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \frac{\delta_{2^j-k+1}^j}{2^{2^{j-1}+k-1}}.$$

3.- Gráficas y matrices de los órdenes renormalizados.

Sea $o_n \in O_n$ y $\bar{o}_{n-1} = \mathcal{R}_{1,n}^+(o_n)$, $\tilde{o}_{n-1} = \mathcal{R}_{0,n}^+(o_n)$. A partir de la definición de $\mathcal{R}_{1,n}^+$ y $\mathcal{R}_{0,n}^+$ no es difícil obtener las

siguientes igualdades:

$$V_{o_{n-1}}^-(x) = V_{o_n}^2(x+2^{n-1})-2^{n-1}$$

$$V_{o_{n-1}}^{\sim}(x) = V_{o_n}^2(x)$$

para cada $x \in E_{n-1}$. Por lo que si A_{o_n} , $A_{o_n}^-$, $A_{o_n}^{\sim}$ son las matrices asociadas a o_n , \bar{o}_{n-1} y \tilde{o}_{n-1} , respectivamente, se sigue que si $A_{o_n} = \begin{pmatrix} B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}$, entonces $A_{o_n}^- = B_1 \cdot B_2$ y $A_{o_n}^{\sim} = B_2 \cdot B_1$; es decir, $A_{o_n}^-$ y $A_{o_n}^{\sim}$ no son más que los dos bloques de dimensión $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ obtenidos a partir de $A_{o_n}^2$. Por otra parte, si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} J_n : M_{2 \times 2}^{n \times n} &\longrightarrow M_{2 \times 2}^{n \times n} \\ A &\longrightarrow J_n(A) = T_n \cdot A \cdot T_n \end{aligned}$$

entonces $J_{n-1}(A_{o_n}^-)$ y $J_{n-1}(A_{o_n}^{\sim})$ son las matrices asociadas a los elementos de O_{n-1} , $\mathcal{R}_{1,n}^-(o_n)$ y $\mathcal{R}_{0,n}^-(o_n)$, respectivamente.

4.- Es claro, a partir de la última observación, que si $o_n \in O_n$ es tal que $\mathcal{R}_{i,n}^s(o_n) = o_{n-1}$, $i \in \{0,1\}$, $s \in \{+,-\}$, entonces $\mathcal{R}_{i,j}^s(o_n) = o_{j-1}$, siendo o_j los órdenes inducidos por o_n en O_j , $j=1, \dots, n-1$.

Lema 1.20.-

Si $o_n \in O_n$ es tal que $\mathcal{R}_{i,n}^s(o_n) = o_{n-1}$, siendo $i \in \{0,1\}$, $s \in \{+,-\}$ y o_{n-1} el orden inducido por o_n en O_{n-1} , entonces para todo impar positivo m , el iterado de orden m de o_n , $(o_n)^m$, verifica $\mathcal{R}_{i,n}^s((o_n)^m) = (o_{n-1})^m$, donde $(o_{n-1})^m$ es el elemento de O_{n-1} inducido por $(o_n)^m$.

Demostración.-

Es consecuencia del lema 1.19 y la parte 3 de la observación anterior.

■

Lema 1.21.-

Sea $o_n \in O_n$ tal que $\mathcal{R}_{1,n}^t(o_n) = o_{n-1}$ y $\mathcal{R}_{o,n}^s(o_n) = o_{n-1}$, siendo o_{n-1} el orden inducido por o_n en O_{n-1} . Existen dos únicos elementos o_{n+1} en O_{n+1} verificando las condiciones:

- (i) o_{n+1} induce en O_n al elemento o_n ,
- (ii) $\mathcal{R}_{1,n+1}^t(o_{n+1}) = o_n$,
- (iii) $\mathcal{R}_{0,n+1}^s(o_{n+1}) = o_n$,

para $s, t \in \{+, -\}$.

Demostración.-

Demostraremos el caso $t=+$, $s=-$, siendo los otros análogos. Veamos como ha de ser $o_{n+1} = s(o_n)$, para algún $s \in S_n$ para que:

$$\mathcal{R}_{1,n+1}^t(o_{n+1}) = o_n, \quad \mathcal{R}_{0,n+1}^s(o_{n+1}) = o_n$$

Es claro que, puesto que (ii) ha de verificarse, sólo hay una elección de $o_{n+1}^{-1}(x)$, para $x \in \{2^{n+1}, \dots, 2^{n+1}\}$,

una vez fijado $o_{n+1}^{-1}(2^{n+1}) = 1$, de la forma

$$o_{n+1}^{-1}(x) = 2o_n^{-1}(x - 2^n) - 1.$$

Por otro lado, de (iii) se sigue que $o_n = P_n \circ B_n(o'_n)$

siendo $o_n^{-1}(x) = \frac{o_{n+1}^{-1}(x)}{2}$, es decir que si denotamos por $o''_n = B_n(o'_n)$, entonces

$$(3) \quad o_{n+1}^{-1}(x) = 2o_n'^{-1}(2^n - x + 1) \quad x \in \{1, \dots, 2^n\}$$

con lo cual o_{n+1} queda determinado por o_n' en $\{1, \dots, 2^n\}$. Pero o_n' debe estar en la misma clase de equivalencia de o_n , por lo que si imponemos (i) y construimos o_{n+1} como en (3), necesariamente

$$o_n' = o_n \quad \text{ó} \quad o_n' = o_n \circ \Gamma_n^{2^{n-1}}$$

Por tanto, los dos elementos en O_{n+1} buscados son:

$$o_{n+1} / \quad \begin{aligned} o_{n+1}^{-1}(x) &= 2o_n^{-1}(x - 2^n) - 1 && \text{si } x \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\} \\ o_{n+1}^{-1}(x) &= 2o_n^{-1}(2^n - x + 1) && \text{si } x \in \{1, \dots, 2^n\} \end{aligned}$$

$$o_{n+1} / \quad \begin{aligned} o_{n+1}^{-1}(x) &= 2o_n^{-1}(x - 2^n) - 1 && \text{si } x \in \{2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\} \\ o_{n+1}^{-1}(x) &= 2(o_n \circ \Gamma_n^{2^{n-1}})^{-1}(2^n - x + 1) && \text{si } x \in \{1, \dots, 2^n\} \end{aligned}$$

■

Sea $\mathcal{R} \in \{\mathcal{R}_1^+, \mathcal{R}_0^+, \mathcal{R}_1^-, \mathcal{R}_0^-\}$, entonces \mathcal{R} tiene una dinámica extremadamente complicada como muestra el siguiente

Teorema 1.22.-

La entropía topológica de \mathcal{R} es infinito.

Demostración.-

Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario, y sea $\sum_{2^{2^k-1}}^{2^k-1}$ el conjunto de sucesiones infinitas con 2^{2^k-1} símbolos. Sabido es que S_k está formado por 2^{2^k-1} elementos, a cada uno de los cuales asociaremos con un símbolo en el conjunto $\{0, 1, \dots, 2^{2^k-1} - 1\}$

de la siguiente forma:

si $s_k = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in S_k$, definimos $n(s_k) \in \{0, \dots, 2^{2^k-1}-1\}$

por

$$n(s_k) = \sum_{i=1}^{2^k-1} \delta_i 2^{2^k-1-i}$$

$$\text{siendo } \delta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_i = - \\ 1 & \text{si } \sigma_i = + \end{cases}$$

Construimos una aplicación $\varphi_k: O_\infty \longrightarrow \Sigma_{2^{2^k-1}}$, que a cada orden $o = \{s_i\}_{i \geq 0} \in O_\infty$ le asocia una sucesión $n_0 n_1 \dots n_i \dots \in \Sigma_{2^{2^k-1}}$, siendo

$$n_0 = n(s_k)$$

$$n_i = n(\mathcal{R}_{k+1} \circ \dots \circ \mathcal{R}_{k+i}(s_{k+i})) \quad i > 0.$$

Así definida φ_k es continua y sobre. El carácter sobreyectivo se sigue trivialmente del hecho que \mathcal{R}_n considerada como aplicación de S_n en S_{n-1} es sobre para cada $n > 0$. Además φ_k hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} O_\infty & \xrightarrow{\mathcal{R}} & O_\infty \\ \downarrow \varphi_k & & \downarrow \varphi_k \\ \Sigma_{2^{2^k-1}} & \xrightarrow{S_k} & \Sigma_{2^{2^k-1}} \end{array}$$

siendo S_k la aplicación shift definida en $\Sigma_{2^{2^k-1}}$. De todo ello y del teorema 0.2 se sigue que la entropía topológica de S_k es menor o igual que la entropía topológica de \mathcal{R} , y

puesto que se verifica para todo $k > 0$ se puede concluir que $h(\mathcal{R}) = \infty$, como se quería demostrar. ■

Teorema 1.23.-

El conjunto de preimágenes por iteración de \mathcal{R} de todo orden $o \in O_\infty$ es denso en O_∞ .

Demostración.-

Sea $o \equiv \{o_n\}_{n \geq 0} \in O_\infty$ arbitrario y

$$D_o = \{ \tilde{o} \in O_\infty / \exists p > 0 : \mathcal{R}^p(\tilde{o}) = o \}$$

Para cualquier $o' \equiv \{o'_n\}_{n \geq 0} \in O_\infty$ y $k > 0$ construimos $\tilde{o} = \{\tilde{o}_n\}_{n \geq 0}$ de la siguiente forma:

$$\tilde{o}_n = o'_n \quad \forall n = 0, 1, \dots, k,$$

$$\mathcal{R}_{n-k} \circ \mathcal{R}_{n-k+1} \circ \dots \circ \mathcal{R}_n(\tilde{o}) = o_{n-k-1} \quad \forall n = k+1, \dots$$

de manera que $\tilde{o} \in O_\infty$, lo cual siempre es posible. Se verifica entonces que $\mathcal{R}^k(\tilde{o}) = o$, es decir $\tilde{o} \in D_o$ y $d(\tilde{o}, o') < \frac{1}{2^k}$, lo que muestra el carácter denso de D_o . ■

Corolario 1.24.-

El conjunto de preimágenes por iteración de $\mathcal{R}_1^+ (\mathcal{R}_0^-)$ de o_{u+} es denso en O_∞ .

A partir de un elemento o_n de O_n arbitrario construiremos órdenes o en O_∞ de manera que $\text{Graf}(o_{k+1})$ se

obtiene mediante $\text{Graf}(o_k)$, $k \geq n$, haciendo un sólo desdoblamiento local d_1 de paridad -1 (es decir d_2 ó d_3), como sigue:

fijado $i=2,3$, sea $P_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, $x_1 < x_2$, un par legal arbitrario de $\text{Graf}(o_n)$. Consideremos

$$x(1) = \begin{cases} x_1 & \text{si } [i=2 \text{ y } y_1 > y_2] \text{ ó } [i=3 \text{ y } y_1 < y_2] \\ x_2 & \text{si } [i=2 \text{ y } y_1 < y_2] \text{ ó } [i=3 \text{ y } y_1 > y_2] \end{cases}$$

y definimos inductivamente para $k > 1$ arbitrario

$$x(k+1) = \begin{cases} 2x(k)-1 & \text{si } x(k) \text{ es par} \\ 2x(k) & \text{si } x(k) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Sea o_{n+k} el elemento de O_{n+k} cuya gráfica se obtiene a partir de $\text{Graf}(o_{n+k-1})$ haciendo un desdoblamiento local d_1 en el par legal P_k , y d en cualquier otro par legal, siendo

$$P_k = \{(2x(k-1)-1, y_1^{k-1}), (2x(k-1), y_2^{k-1})\} \subset \text{Graf}(o_{n+k-1}), \quad k > 1.$$

Así definido $o \equiv \{o_m\}_{m \geq 0} \in O_\infty$ verifica:

Teorema 1.25.-

$$\mathcal{R}^{n-1}(o) = o_{u^*}, \quad * \in \{+, -\}.$$

Demostración.-

Sea $l \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$ tal que $x_1 = 2l-1$ y $x_2 = 2l$, cuya existencia queda garantizada al ser P_1 un par legal de $\text{Graf}(o_n)$.

llamemos $A_o = \{B_m^j\}_{m, j \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}}$, con $B_m^j \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, a la matriz asociada a o_n , cuyas submatrices no nulas en la descomposición por bloques de tipo $(2,2)$ serán I_1 ó T_1 .

matriz T_{k+1} , respectivamente.

Puesto que hacer $\mathcal{R}_{n+k} (o_{n+k})$ es equivalente a considerar una submatriz conveniente en A_{n+k}^2 , según \mathcal{R} sea \mathcal{R}_1 ó \mathcal{R}_0 , la matriz de tipo $(2^{k+1}, 2^{k+1})$ asociada al elemento de O_{k+1} , $\mathcal{R}_{k+2} \circ \dots \circ \mathcal{R}_{n+k-1} \circ \mathcal{R}_{n+k} (o_{n+k})$ se obtiene a partir de la submatriz que ocupa el lugar 1,1 si $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0$ y la que ocupa el lugar $2^{n-1}, 2^{n-1}$ si $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1$, en la descomposición por bloques de la matriz $A_{n+k}^{2^{n-1}}$, y estos no son mas que $\bar{B}_{V_{(1)}^{(1)}}^1$, $\bar{B}_{V_{(1)}^{(1)}}^1 \cdot T_{k+1}$, $T_{k+1} \cdot \bar{B}_{V_{(1)}^{(1)}}^1$, por lo cual coincidirán o bien con la matriz asociada a $(o_{u^+ k+1})$ o bien con la asociada a $(o_{u^- k+1})$, por lo que queda demostrado el resultado. ■

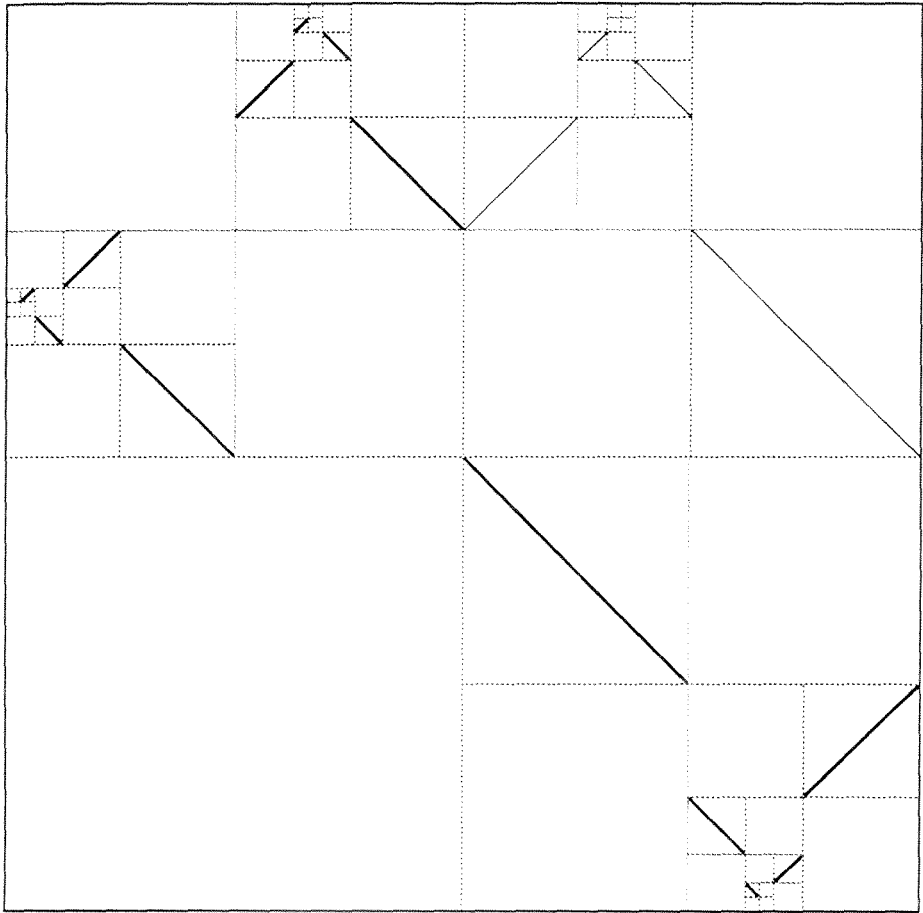
Como consecuencia inmediata de este teorema, si llamamos \mathcal{D}_o , $o \in \{o_{u^+}, o_{u^-}\}$, al conjunto de órdenes o' en O_∞ así contruidos tales que $\mathcal{R}^{n-1}(o')=o$, para algún n , se verifica el siguiente:

Corolario 1.26.-

$$\mathcal{D}_o \text{ es denso en } O_\infty \text{ y } \mathcal{D}_o \subset D_o.$$

Observación.-

Es evidente que si $o' \in \mathcal{D}_o$ entonces $M(o')$ es finito. Por tanto el conjunto de preimágenes por iteración de \mathcal{R} de o con un número infinito de puntos críticos está contenido en $D_o \setminus \mathcal{D}_o$. La figura (1.5) muestra la gráfica de un elemento de estas características.



- Figura 1.5 -

Teorema 1.27.-

Sean $m > 1$ y $o \in O_\infty$ tales que $M(o) = m$, entonces se verifica

$$M(\mathcal{R}(o)) \leq 2m.$$

Demostración.-

Supongamos $o \equiv \{o_n\}_{n \geq 0}$ y $\mathcal{R}(o) = \{o'_n\}_{n \geq 0}$. Si $M(o) = m$ entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad H_n(o_n) = m.$$

Sea $n \geq n_0$ arbitrario y supongamos que o'_n tiene en $k \in \{2, \dots, 2^n - 1\}$ un extremo relativo. Distinguiremos varios casos:

1.- $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$:

En este caso se verifica:

$$V_{o_n}^2(x) = V_{o_{n+1}}^2(x + 2^n) - 2^n$$

por tanto si o'_n tiene en k un extremo relativo, entonces $V_{o_{n+1}}^2$ tiene en $k + 2^n$ un extremo relativo, por lo que o bien

$k + 2^n$ o bien $V_{o_{n+1}}(k + 2^n)$ son extremos relativos de o_{n+1} .

2.- $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0^+$:

Sea o''_n el elemento de O_n tal que $o''_n^{-1}(x) = \frac{o_{n+1}^{-1}(x)}{2}$, se verifica $V_{o''_n} = V_{o_{n+1}}^2$.

Si o'_n tiene en k un extremo relativo, también lo tiene o''_n , lo que implica que o_{n+1} tiene en k ó en $V_{o_{n+1}}(k)$ un extremo relativo.

3.- $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1^-$ ó $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0^+$

Es consecuencia inmediata de los casos anteriores.

Se concluye, por tanto que

$$H_n(o'_n) \leq 2H_{n+1}(o_{n+1}) \quad \forall n \geq n_0$$

por lo que, aplicando límites, se tiene el resultado. ■

Teorema 1.28.-

Sea $\alpha \in O_\infty$ arbitrario con $M(\alpha)=n$. Existe, para cada $m > n$, un orden $\alpha' \in O_\infty$ verificando $\mathcal{R}(\alpha')=\alpha$ y $M(\alpha')=m$.

Demostración.-

Indicaremos, en primer lugar, la construcción de α' cuando $m=n+1$.

Si $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \geq 0}$, sea k suficientemente grande para que $H_k(\alpha_k)=n$. Supongamos que el primer y último par legal de α_k son, respectivamente:

$$\{(1, y_1), (2, y_2)\}, \{(2^{k-1}, y_{2^{k-1}}), (2^k, y_{2^k})\},$$

Distinguiremos varios casos:

- 1- $y_1 < y_2$ y $y_{2^{k-1}} > y_{2^k}$,
- 2- $y_1 > y_2$ y $y_{2^{k-1}} < y_{2^k}$,
- 3- $y_1 > y_2$ y $y_{2^{k-1}} > y_{2^k}$,
- 4- $y_1 < y_2$ y $y_{2^{k-1}} < y_{2^k}$.

(Nótese que en 1 y 2 necesariamente n es impar, mientras que en 3 y 4 n es par).

Sea A_i la matriz asociada a α_i , para $i > 1$. Construimos $\alpha' = \{\alpha'_i\}_{i \geq 0}$ de forma que las matrices asociadas a cada α'_i , que denotaremos por A'_i , son, dependiendo de la casuística 1-4 y de la elección de \mathcal{R} , las siguientes :

Caso 1-

$$A'_{i+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_1 \\ \hline A_1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{si } \mathcal{R} = \mathcal{R}_0^+ \text{ ó } \mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$$

Caso 2-

$$A'_{i+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_1 \\ \hline I_1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{si } \mathcal{R} = \mathcal{R}_0^+ \text{ ó } \mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$$

Caso 3-

$$A'_{i+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_1 \\ \hline A_1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{si } \mathcal{R} = \mathcal{R}_0^+ \text{ ó } \mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$$

Caso 4-

Aunque la construcción de o' no lo requiere, por conveniencia en la demostración, haremos, a su vez, la distinción de cuatro posibilidades según la posición de los pares legales de o_k , $\{(2^{k-1}-1, y_{2^{k-1}-1}^{k-1}), (2^{k-1}, y_{2^{k-1}}^{k-1})\}$ y $\{(2^{k-1}+1, y_{2^{k-1}+1}^{k-1}), (2^{k-1}+2, y_{2^{k-1}+2}^{k-1})\}$

$$4.1- \quad y_{2^{k-1}-1}^{k-1} > y_{2^{k-1}}^{k-1} \quad \text{y} \quad y_{2^{k-1}+1}^{k-1} > y_{2^{k-1}+2}^{k-1},$$

$$4.2- \quad y_{2^{k-1}-1}^{k-1} < y_{2^{k-1}}^{k-1} \quad \text{y} \quad y_{2^{k-1}+1}^{k-1} > y_{2^{k-1}+2}^{k-1},$$

$$4.3- \quad y_{2^{k-1}-1}^{k-1} > y_{2^{k-1}}^{k-1} \quad \text{y} \quad y_{2^{k-1}+1}^{k-1} < y_{2^{k-1}+2}^{k-1},$$

$$4.4- \quad y_{2^{k-1}-1}^{k-1} < y_{2^{k-1}}^{k-1} \quad \text{y} \quad y_{2^{k-1}+1}^{k-1} < y_{2^{k-1}+2}^{k-1},$$

Si $A_i = \begin{pmatrix} 0 & A_i^1 \\ A_i^2 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz A'_{i+1} puede, en cualquier

caso adoptar una de las formas que se especifican a continuación :

$$A'_{i+1} = \begin{pmatrix} & & & & A_i^1 \\ & & & & | \\ & & 0 & & | \\ & & & & T_{i-1} \\ & & & & | \\ T_{i-1} & & & & | \\ & & A_i^2 & & | \\ & & & & I_{i-1} \\ & & & & | \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cuando } \mathcal{R} = \mathcal{R}_0^+$$

$$A'_{i+1} = \begin{pmatrix} & & & & I_{i-1} \\ & & & & | \\ & & 0 & & | \\ & & & & T_{i-1} \\ & & & & | \\ & & & & A_i^1 \\ & & & & | \\ T_{i-1} & & & & | \\ & & A_i^2 & & | \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cuando } \mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$$

(Huelga incluir los casos $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0^-$ y $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1^-$ puesto que una vez construida la matriz $A'_i = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ cuando $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0^+$ (respectivamente $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1^+$) entonces $A''_i = \begin{pmatrix} A & T_{i-1} B^T \\ T_{i-1} A^T & T_{i-1} \end{pmatrix}$ es la matriz para $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1^-$ (respectivamente $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0^-$)).

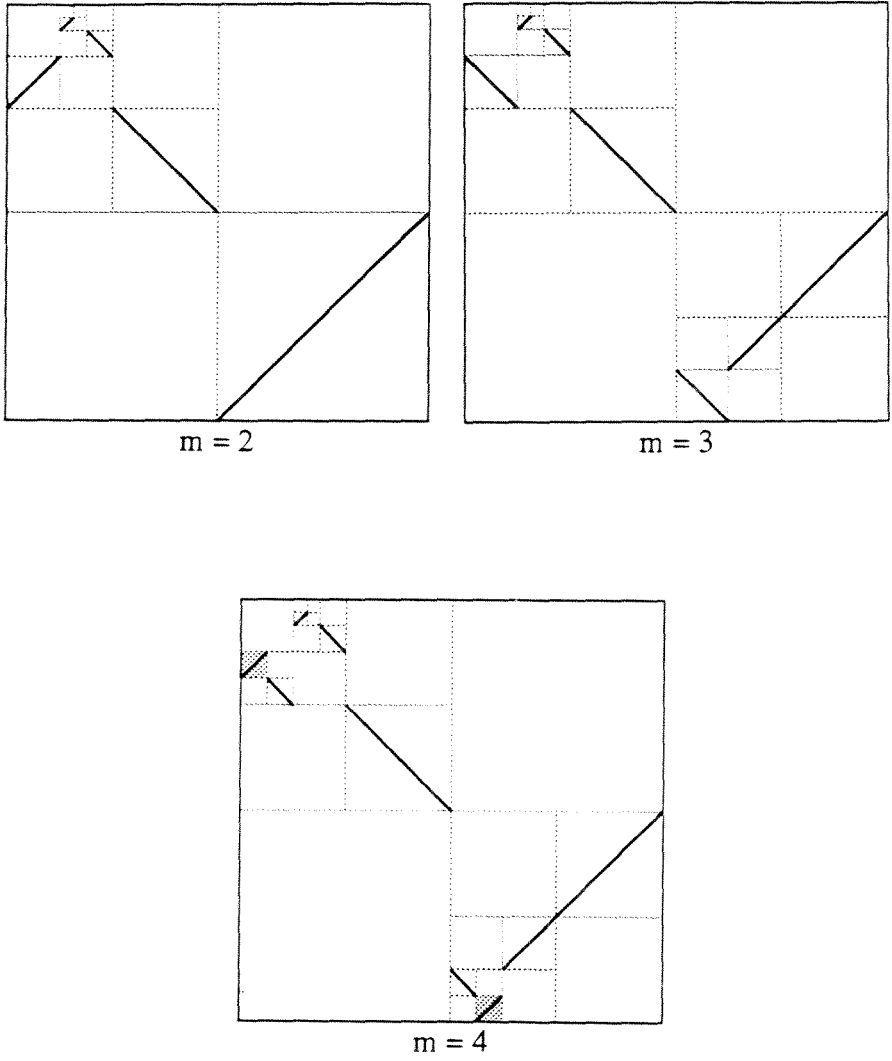
Es evidente que estas matrices son las asociadas a órdenes $o'_{i+1} \in O_{i+1}$ y que así construido $o'_{i+1} \in O_{\infty}$ verifica $\mathcal{R}(o')=o$. Por otra parte, es inmediato verificar que, para $i > k$, $H_i(o'_i) = n+1$.

En general, para un número arbitrario, m, de extremos relativos, la construcción de o' puede hacerse de manera análoga con ligeros cambios en las submatrices de A'_i . Las siguientes gráficas ilustran el procedimiento en el caso

$$o = o_u^+ \text{ y } \mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$$

Se observa que basta variar ligeramente el orden en los recuadros sombreados para conseguir un elemento con el número de extremos deseado.

■



- Figura 1.6 -

Corolario 1.29.-

$$\forall m > 1, m \in \mathbb{N}, \forall n \in \{1, \dots, m\} \exists o \in O_{\infty} / M(o) = m \text{ y } M(\mathcal{R}(o)) = n.$$

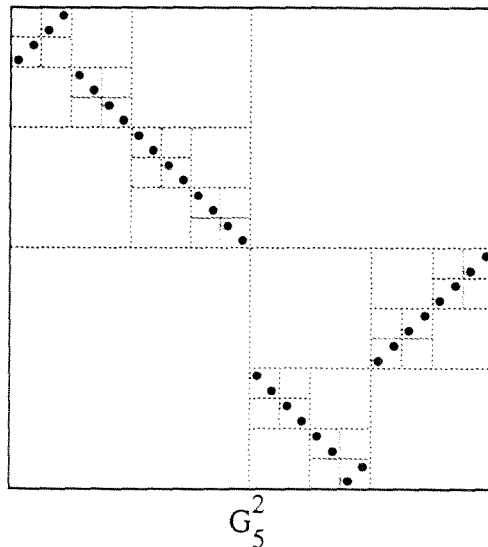
Teorema 1.30.-

Para cualquier $m \geq 2$ existe $o \in O_{\infty}$ tal que $M(o) = m$ y $M(\mathcal{R}(o)) = m + 1$.

Demostración.-

Mediante un proceso constructivo obtendremos elementos o^2 en O_{∞} verificando el enunciado del teorema cuando $m = 2$, y, por inducción, o^m para cualquier $m > 2$, en el caso $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1^+$.

Sea $o_5^2 \in O_5$ cuya gráfica se muestra en la figura 1.7:



- Figura 1.7 -

Sea $x^2(1)=4$ y $k \geq 1$, definimos

$$x^2(k+1) = \begin{cases} 2x^2(k)-1 & \text{si } x^2(k) \text{ par} \\ 2x^2(k) & \text{si } x^2(k) \text{ impar} \end{cases}$$

Sea o_{5+k}^2 el elemento de O_{5+k} cuya gráfica se obtiene a partir de $\text{Graf}(o_{4+k}^2)$ haciendo un desdoblamiento local d_2 en el par legal P_k , y d en cualquier otro par legal, siendo

$$P_1 = \{(3,31), (4,32)\}$$

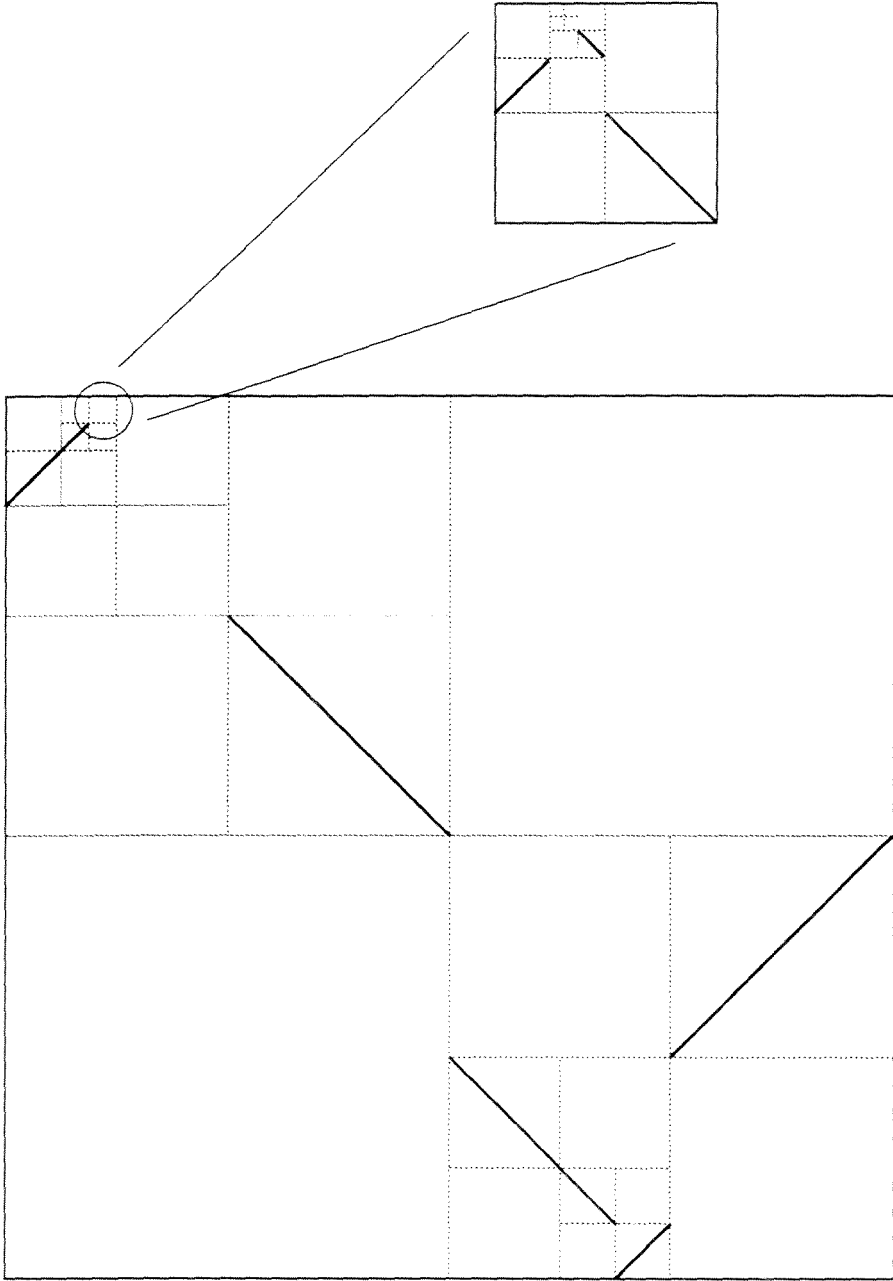
$$P_k = \{(2x^2(k-1)-1, y_1^k), (2x^2(k-1), y_2^k)\} \subset \text{Graf}(o_{4+k}^2),$$

para $k > 1$. Así definido $o_n^2 = \{o_n^2\}_{n \geq 0}$ es un elemento de O_∞ que verifica $M(o^2)=2$ y $M(R(o^2))=3$, como se muestra en las gráficas de ambos elementos dadas en las figuras 1.8 y 1.9.

Si $m > 2$, construimos la sucesión auxiliar $\{x^m(n)\}_{n \geq 1}$ de forma que $x^m(1)=2x^{m-1}(1)$ y para $k \geq 1$,

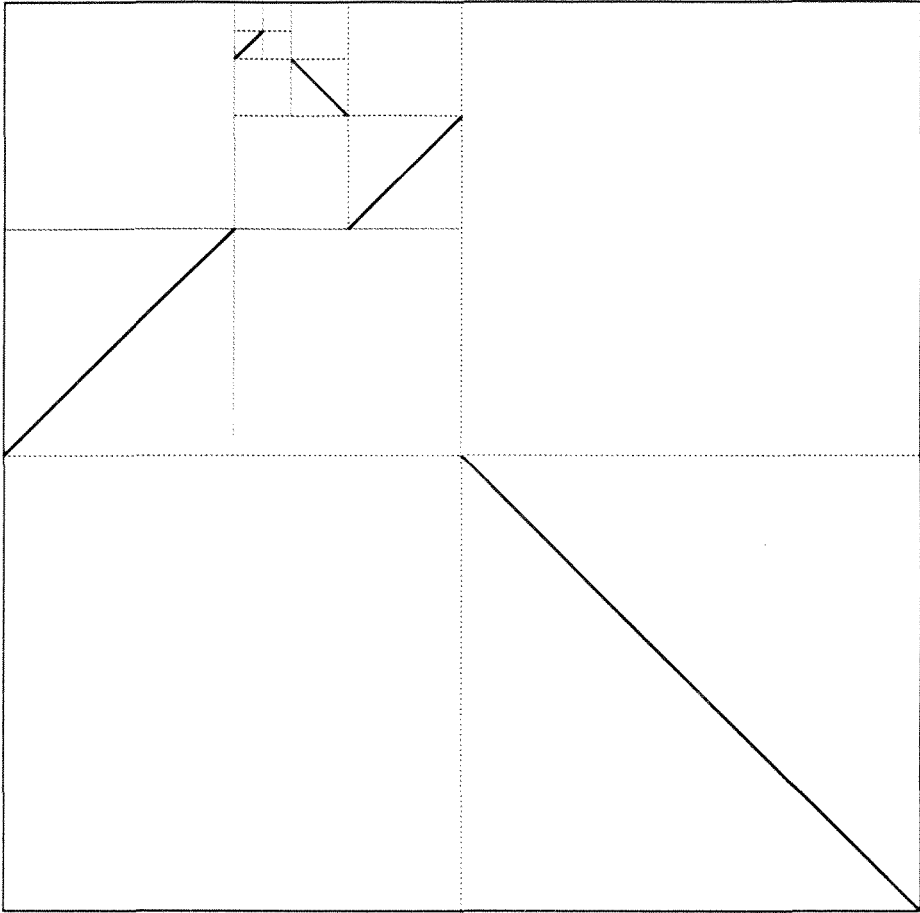
$$x^m(k+1) = \begin{cases} 2x^m(k)-1 & \text{si } x^m(k) \text{ par} \\ 2x^m(k) & \text{si } x^m(k) \text{ impar} \end{cases}$$

Las gráficas de o_n^m con $n \geq 1$ son dadas por $\text{Graf}(o_n^m) = \text{Graf}(o_n^{m-1})$, si $n < m+3$; $\text{Graf}(o_{m+3}^m)$ es obtenida haciendo desdoblamientos locales d en todos los pares legales de $\text{Graf}(o_{m+2}^m)$ salvo en el par $\{(2^{m+2}-1, y_1), (2^{m+2}, y_2)\}$ en el cual se efectúa el desdoblamiento d_2 si m es impar y d_3 si m es par; y $\text{Graf}(o_{m+3+k}^m)$, para $k \geq 1$, se obtiene haciendo un desdoblamiento local d_2 en el par legal



Graf(σ^2)

- Figura 1.8 -

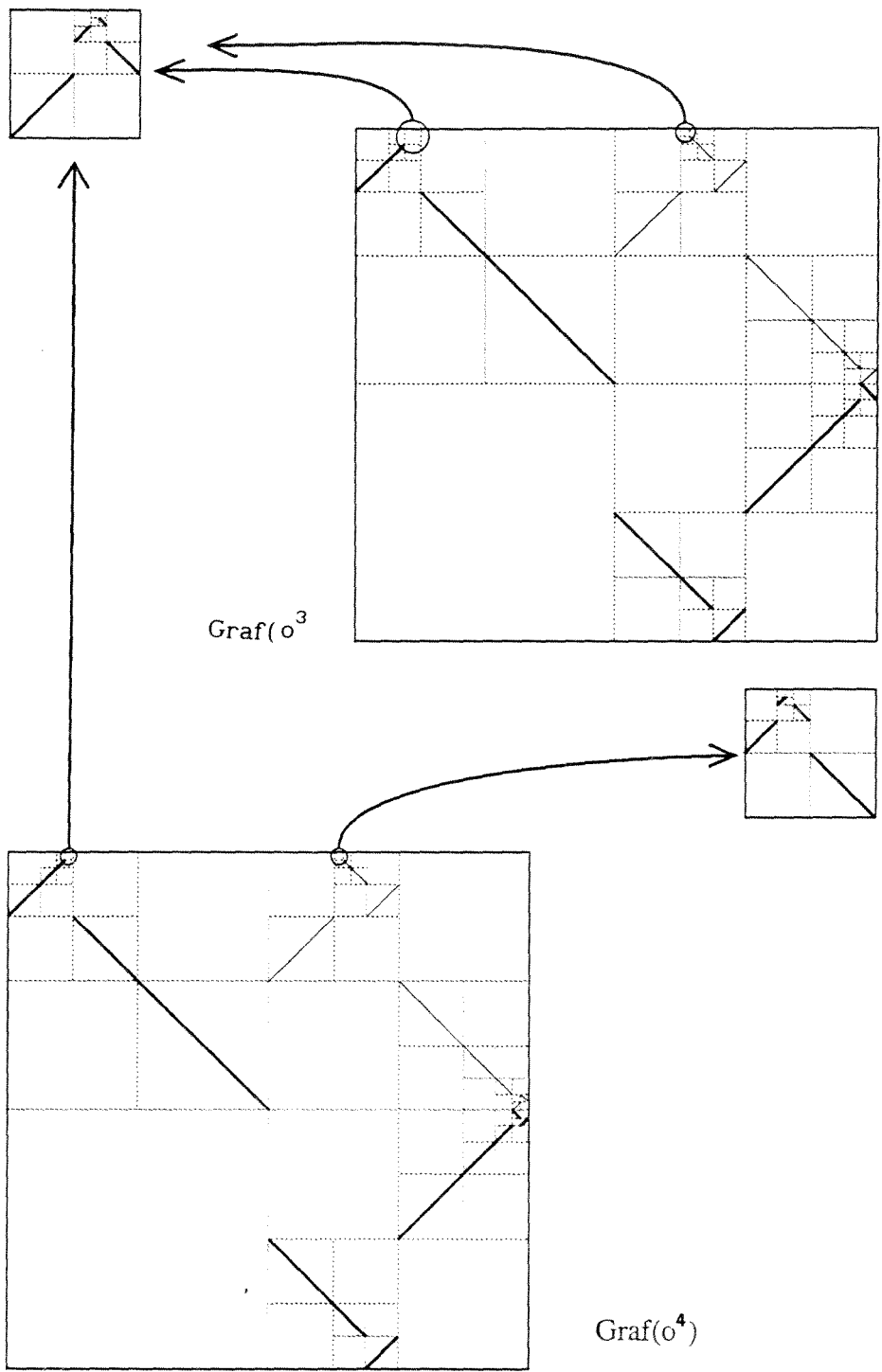


Graf($\mathcal{R}_1^+(o^2)$)

- Figura 1.9 -

P_k de Graf(o_{m+2+k}^m) y d en todos los demás, siendo $P_1 = \{(x^m(1)-1, y_1^1), (x^m(1), y_2^1)\}$, $P_k = \{(2x^m(k-1)-1, y_1^k), (2x^m(k-1), y_2^k)\}$.

A modo de ejemplo, incluimos las gráficas de $o^3 = \{o_n^3\}$ y $o^4 = \{o_n^4\}$ con sus correspondientes órdenes renormalizados por \mathcal{R}_1^+ en la figura 1.10.



$\text{Graf}(o^3)$

$\text{Graf}(o^4)$

- Figura 1.10 -

Observación:

$$\{o \in O_\infty / M(o)=m+1\} \not\subset \{ \mathcal{R}(o) / M(o)=m \}$$

Lema 1.31.-

Si $o = \{o_n\}_{n \geq 0} \in O_\infty$ es punto fijo de \mathcal{R}_i^+ (respectivamente \mathcal{R}_i^-) entonces $o' = \{P_n \circ B_n(o_n)\}_{n \geq 0}$ es un punto fijo de \mathcal{R}_{1-i}^+ (respectivamente \mathcal{R}_{1-i}^-), siendo $i \in \{0,1\}$.

Demostración.-

Mediante un fácil cálculo a partir de la definición de $\mathcal{R}_{i,n}^s$, $s \in \{+,-\}$, $i \in \{0,1\}$ (utilizando propiedades de la aplicación $[\text{mod } 2^n]$) se muestra que $\mathcal{R}_{i,n}^s(o'_n) = o'_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, por lo que trivialmente se obtiene el resultado. ■

Lema 1.32.-

Si $o \in O_\infty$ es un punto fijo de \mathcal{R}_i^s y $(o)^m$ es el iterado de orden m de o , siendo m un impar positivo, entonces $(o)^m$ es también punto fijo de \mathcal{R}_i^s .

Demostración.-

Consecuencia inmediata del lema 1.20.

Teorema 1.33.-

Un orden $o \in O_\infty$ es punto fijo de \mathcal{R}_1^s y \mathcal{R}_0^t si y sólo si existe un impar positivo m tal que

- (i) $o = o(s,t)$ es el iterado de orden m de o_{u+} , si $(s,t) = (+,-)$.

- (ii) $o = o(s, t)$ es el iterado de orden m de o_{u^-} , si $(s, t) = (-, +)$.
- (iii) $o = o(s, t)$ es el iterado de orden m de o_a , si $(s, t) = (+, +)$.
- (iv) $o = o(s, t)$ es el iterado de orden m de o_e , si $(s, t) = (-, -)$.

Siendo o_a , orden que llamaremos "adding machine", y o_e los elementos de O_∞ cuyas gráfica representamos en la figura 1.11.

Demostración.-

Es un hecho trivial que o_{u^+} , o_{u^-} , o_a y o_e son puntos fijos de los endomorfismos \mathcal{R}_1^+ y \mathcal{R}_0^- , \mathcal{R}_1^- y \mathcal{R}_0^+ , \mathcal{R}_1^+ y \mathcal{R}_0^+ , \mathcal{R}_1^- y \mathcal{R}_0^- , respectivamente, (piénsese en las matrices asociadas a cada o_n correspondiente). Por el lema anterior, todo iterado $o = o(s, t)$ es también punto fijo de \mathcal{R}_1^s y \mathcal{R}_0^t . Veamos que estos son los únicos.

Por el lema 1.21, considerando $o_n \in O_n$ tal que $\mathcal{R}_{1,n}^s(o_n) = o_{n-1} = \mathcal{R}_{0,n}^t(o_n)$, con o_{n-1} el orden inducido por o_n en O_{n-1} , existen exactamente dos elementos en O_{n+1} tales que

$$\mathcal{R}_{1,n+1}^s(o_{n+1}) = o_n = \mathcal{R}_{0,n+1}^t(o_{n+1})$$

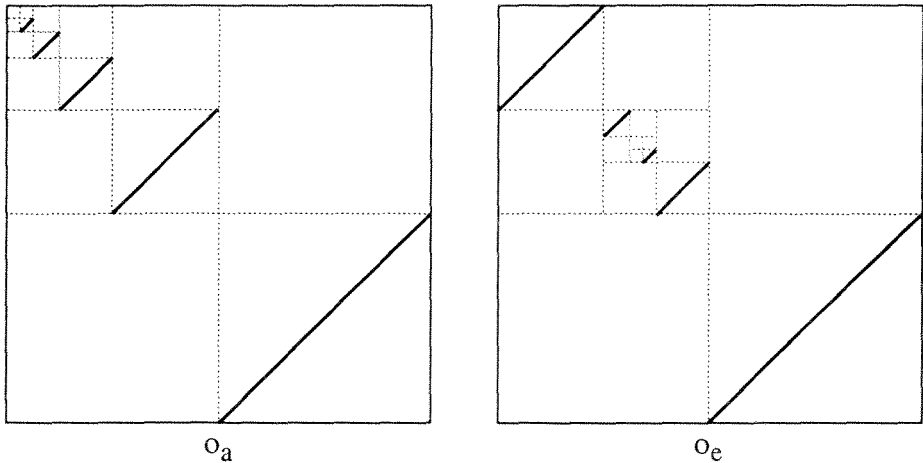
y $o_{n+1} = s(o_n)$, para algún $s \in S_n$.

Puesto que esto se verifica para todo $n > 0$, existen en O_{n+1} exactamente 2^n elementos tales que

$$\mathcal{R}_{1,l+1}^s(o_{l+1}) = o_l = \mathcal{R}_{0,l+1}^t(o_{l+1})$$

para todo $l = 0, \dots, n$, siendo o_l el orden inducido por o_{n+1} en O_l . Como quiera que en O_{n+1} hay 2^n iterados distintos del

orden $o_n(s,t)$, estos han de coincidir con dichos elementos. ■



- Figure 1.11 -

Teorema 1.34.-

Para cada $m > 4$ y $\tilde{\mathcal{R}} \in \{\mathcal{R}_1^+, \mathcal{R}_0^+\}$, existe un punto fijo $o \in O_\infty$ de $\tilde{\mathcal{R}}$ tal que $M(o) = m$ y no es punto fijo de otro \mathcal{R} .

Demostración.-

Por el lema 1.31 es suficiente demostrar el resultado en el caso $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_1^+$.

Haremos la demostración para $m=5$, mientras que para $m \geq 6$ indicaremos la construcción de o , omitiendo los detalles de la demostración por ser análogos al caso $m=5$.

$m = 5$

Construimos inductivamente cuatro sucesiones, $x_i(n) \in E_n$, $i=1,2,3,4$, $n \geq 3$, como sigue:

$$x_1(3)=2, x_2(3)=3, x_3(3)=5, x_4(3)=7,$$

una vez definidas $x_1(n), x_3(n), x_4(n)$, con $n=3$, entonces:

$$x_1(n+1)=2x_1(n)-1, \quad x_3(n+1)=2x_3(n), \quad x_4(n+1)=2x_4(n)-1$$

$$x_1(n+2)=2x_1(n+1)-1, \quad x_3(n+2)=2x_3(n+1)-1, \quad x_4(n+2)=2x_4(n+1)$$

$$x_1(n+3)=2x_1(n+2), \quad x_3(n+3)=2x_3(n+2)-1, \quad x_4(n+3)=2x_4(n+2)-1$$

y habiendo definido $x_2(n)$, con $n=2$,

$$x_2(n+1)=2x_2(n)-1, \quad x_2(n+2)=2x_2(n+1).$$

Dado $G_n \in \mathbb{G}_n$, $n \geq 3$, denotaremos por $S_i(n)$, $i=1,2,3,4$, los pares legales

$$S_i(n) = \{ (2x_1(n-1)-1, y_1), (2x_1(n-1), y_2) \} \subset G_n, \quad n > 3,$$

y

$$S_i(3) = \{ (x_1(3), y_1), (x_1(3)+1, y_2) \} \subset G_3, \quad i=2,3,4,$$

$$S_2(3) = \{ (1, y_1), (2, y_2) \}.$$

Sea $o_3 = (+, +, -, +)(-, +)(+)(1) \in O_3$ y $G_3 = \text{Graf}(o_3)$, denotaremos por $o = \{o_n\}$ el elemento de O_∞ tal que o_3 es el dado anteriormente y las gráficas de o_n , $\forall n > 3$, son obtenidas como sigue:

una vez construida $G_n \in \mathbb{G}_n$ con $n=3$, G_{n+1} es el desdoblamiento legal de G_n obtenido haciendo los desdoblamientos locales

$$d_3(S_1(n)), d_2(S_2(n)), d_2(S_3(n)), d(P)$$

siendo P cualquier otro par legal de G_n distinto de $S_1(n)$, $S_2(n)$ y $S_3(n)$; $G_{n+2} \in \mathbb{G}_{n+2}$ es el desdoblamiento legal de G_{n+1} obtenido por desdoblamientos locales

$$d_2(S_2(n+1)), d_2(S_3(n+1)), d_3(S_4(n+1)), d(P);$$

G_{n+3} es el desdoblamiento legal de G_{n+2} cuyos desdoblamientos locales son

$$d_3(S_1(n+2)), d_2(S_2(n+2)), d_3(S_4(n+2)), d(P),$$

para cualquier otro par legal P de G_{n+2} .

En definitiva si denotamos por

$$(S_i(n).S_j(n).S_k(n))(G_n) \quad i,j,k \in \{1,2,3,4\}$$

el desdoblamiento legal de G_n con desdoblamientos locales $d_3(S_1(n))$ si $l=1,4$, $d_2(S_1(n))$ si $l=2,3$, y $d(P)$ en cualquier otro par legal, entonces la gráfica de o_{n+1} puede ser escrita para cualquier n de la siguiente forma

$$G_{n+1} = (S_{\pi^n(1)}(n).S_{\pi^n(2)}(n).S_{\pi^n(3)}(n)) (G_n)$$

siendo π la permutación en $\{1,2,3,4\}$ dada por el producto de ciclos $(2)(1\ 3\ 4)$.

Nótese, por otro lado, que las sucesiones $\{x_i(n)\}$, $i=1,2,3,4$, podríamos haberlas definido al mismo tiempo que $\{G_n\}$ de la siguiente forma:

una vez definidas $x_i(n)$, $S_i(n)$ y G_{n+1} ,

si $i \in \{\pi^n(1), \pi^n(2), \pi^n(3)\}$

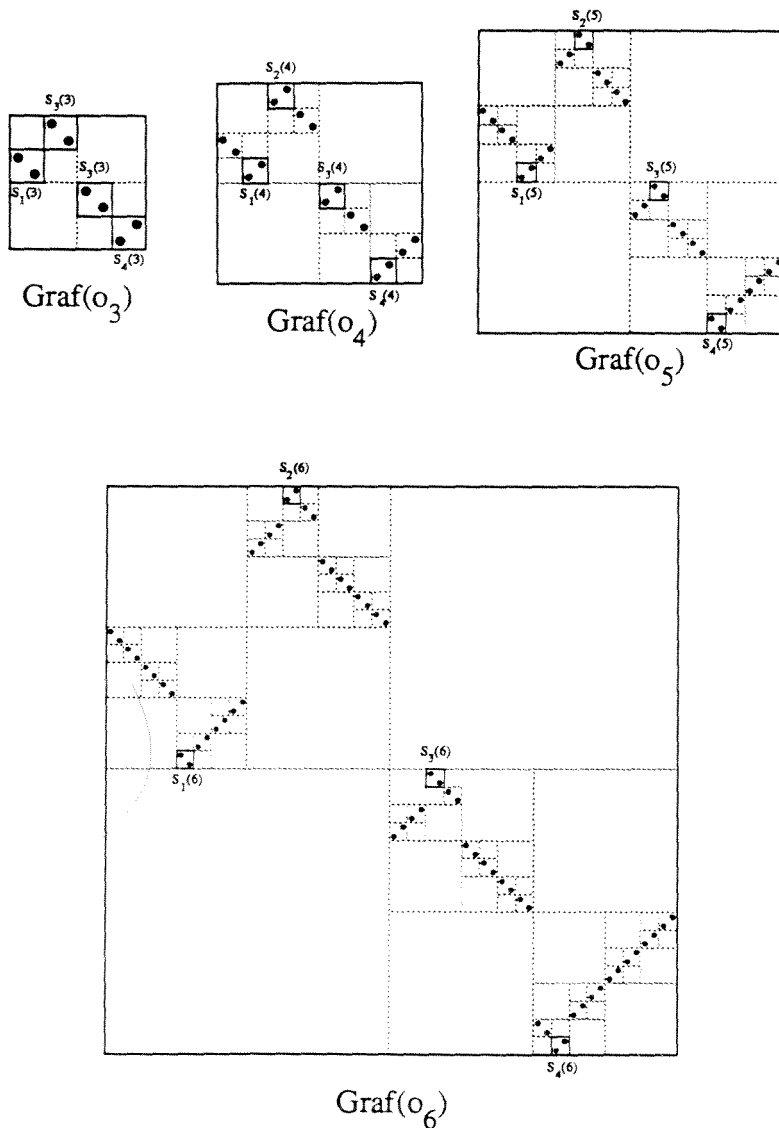
$$x_i(n+1) = \begin{cases} 2x_i(n)-1 & \text{si } x_i(n) \text{ par} \\ 2x_i(n) & \text{si } x_i(n) \text{ impar} \end{cases}$$

mientras que si $i \notin \{\pi^n(1), \pi^n(2), \pi^n(3)\}$

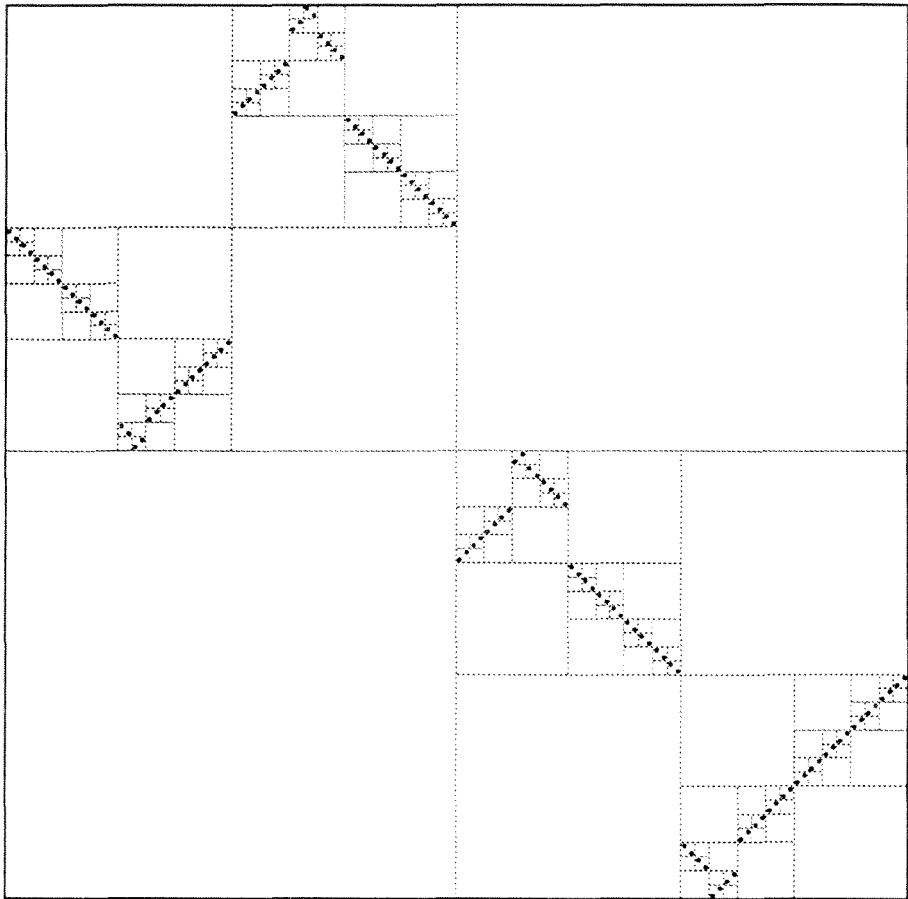
$$x_i(n+1) = \begin{cases} 2x_i(n) & \text{si } x_i(n) \text{ es par} \\ 2x_i(n)-1 & \text{si } x_i(n) \text{ es impar} \end{cases}$$

$$y S_1(n+1) = \{ (2x_1(n)-1, y_1), (2x_1(n), y_2) \} \subset G_{n+1}.$$

Las figuras 1.12 y 1.13 representan las gráficas de o_3, \dots, o_7 del orden o , incluyendo a continuación sus correspondientes matrices asociadas.



- Figura 1.12 -



Graf(o_7)

- Figura 1.13 -

$$A_{O_3} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & 0 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & 0 \end{array} \right) \quad A_{O_4} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & 0 & & A & I_2 & \\ \hline C & & A & & 0 & \end{array} \right)$$

$$A_{O_5} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & D \\ & & & T_2 & I_2 \\ & & & B & 0 \\ \hline & 0 & & & 0 \\ T_2 & I_2 & 0 & & \\ \hline 0 & & B & T_2 & \end{array} \right)$$

$$A_{O_6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & c & I_2 \\ & & & & & I_3 \\ & & & & T_3 & \\ \hline & & & I_2 & T_2 & \\ D & I_2 & & & & \\ \hline T_3 & & & & & \\ & & & T_3 & & \\ & & I_2 & A & & \end{array} \right)$$

$$B_1(n) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & p_1 & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline T_{n-6} & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & I_{n-5} & \\ \hline & & & \\ \hline & & & I_{n-4} \end{array} \right) ,$$

$$\text{siendo } p_1 = \begin{cases} C & \text{si } n = \dot{3} + 1, \\ I_2 & \text{si } n = \dot{3} + 2, \\ D & \text{si } n = \dot{3}. \end{cases}$$

$$B_2(n) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{n-4} & & & \\ \hline & & & T_{n-5} \\ \hline & I_{n-6} & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & T_{n-7} \\ \hline & & & \\ \hline & & p_2 & \\ \hline & & & \end{array} \right) ,$$

$$\text{siendo } p_2 = \begin{cases} B & \text{si } n = \dot{2} \\ A & \text{si } n = \dot{2} + 1 \end{cases}$$

$$B_3(n) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{n-4} & & & \\ \hline & & & T_{n-5} \\ \hline & & & \\ \hline & & & T_{n-6} \\ \hline & I_{n-7} & & \\ \hline & & & \\ \hline & & p_3 & \\ \hline & & & \end{array} \right) ,$$

$$\text{siendo } p_3 = \begin{cases} A & \text{si } n=3+1, \\ B & \text{si } n=3+2, \\ T_2 & \text{si } n=3. \end{cases}$$

$$B_4(n) = \begin{pmatrix} & & p_4 & & & \\ & & & & & \\ & & & I_{n-7} & & \\ & & & & I_{n-6} & \\ T_{n-5} & & & & & \\ & & & & & I_{n-4} \end{pmatrix},$$

$$\text{siendo } p_4 = \begin{cases} I_2 & \text{si } n=3+1, \\ D & \text{si } n=3+2, \\ C & \text{si } n=3. \end{cases}$$

Evidentemente así construido $o \in O_\infty$. Además se verifica:

- 1) $M(o)=5$,
- 2) o es punto fijo de \mathcal{R}_1^+ ,
- 3) o no es punto fijo de ningún otro \mathcal{R} .

De la definición de $d_2(P)$, $d_3(P)$ y $d(P)$ se sigue trivialmente (1). Además para todo $n > 3$ los extremos del orden o_n se encuentran en los puntos $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$, $x_4(n)$ y $2^{n-1}+1$. En cuanto a la demostración de (2) veamos que, para todo n , $A_{o_{n-1}}$ coincide con la matriz asociada a $\mathcal{R}_{1,n}^+(o_n)$, es decir con la matriz formada por los términos ij , $i, j \in \{2^{n-1}-1, \dots, 2^n\}$, de la matriz $A_{o_n}^2$, donde

$$A_{O_n}^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & B_4^{(n)T} & T_{n-3} & \\ & 0 & & B_2^{(n)} & & \\ \hline I_{n-3} & & & & & 0 \\ \hline & B_3^{(n)}B_1^{(n)} & & 0 & & \\ \hline & & & & & B_1^{(n)} \\ & & & & 0 & T_{n-3}B_4^{(n)} \\ \hline & & 0 & & T_{n-3}B_3^{(n)} & \\ & & & & B_2^{(n)T} & \\ & & & & T_{n-3} & 0 \end{array} \right)$$

Es decir, ha de probarse que

$$\left(\begin{array}{cc|c} & & B_1^{(n)} \\ & 0 & T_{n-3}B_4^{(n)} \\ \hline T_{n-3}B_3^{(n)} & & \\ \hline & B_2^{(n)T} & T_{n-3} \\ & & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & B_4^{(n-1)} \\ & 0 & & I_{n-4} \\ \hline & & T_{n-4} & \\ \hline & B_1^{(n-1)} & & 0 \\ \hline T_{n-4} & & 0 & \\ \hline 0 & & & T_{n-4} \\ & & B_2^{(n-1)} & \end{array} \right)$$

Ahora bien

$$T_{n-3} \cdot B_3(n) = \begin{pmatrix} & & & & T_2 p_3 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ T_{n-7} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & I_{n-6} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & I_{n-5} \\ T_{n-4} & & & & & & \end{pmatrix}$$

por lo que, teniendo en cuenta que

$$T_2 \cdot p_3 = \begin{cases} T_2 \cdot A = D & \text{si } n=\dot{3}+1 \\ T_2 \cdot B = C & \text{si } n=\dot{3}+2 \\ T_2 \cdot T_2 = I_2 & \text{si } n=\dot{3} \end{cases}$$

se concluye

$$T_{n-3} \cdot B_3(n) = \begin{pmatrix} B_1^{(n-1)} \\ T_{n-4} \end{pmatrix}.$$

Análogamente:

$$B_2(n) \cdot T_{n-3} = \begin{pmatrix} T_{n-4} \\ B_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad T_{n-3} \cdot B_4(n) = \begin{pmatrix} T_{n-4} \\ B_3^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

mientras que:

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} B_4^{(n-1)} \\ I_{n-4} \end{pmatrix}$$

igualdades que se siguen teniendo en cuenta que

$$p_2 \cdot T = \begin{cases} B \cdot T = A & \text{si } n=\dot{2} \\ A \cdot T = B & \text{si } n=\dot{2}+1 \end{cases}, \quad T \cdot p_4 = \begin{cases} T \cdot I = T & \text{si } n=\dot{3}+1 \\ T \cdot D = A & \text{si } n=\dot{3}+2 \\ T \cdot C = B & \text{si } n=\dot{3} \end{cases}.$$

$m = 6$

Sea $o_4 = (-, +, +, +, +, +, +)(+, +, +, +)(+, +)(+)(1)$, $G_4 =$
 Graf(o_4). Si consideramos:

$$x_1(4)=2, x_2(4)=3, x_3(4)=5, x_4(4)=10$$

y

$$S_i(4) = \{(x_i(4)-1, y_1), (x_i(4), y_2)\} \subset G_4, \quad i=1,4,$$

$$S_i(4) = \{(x_i(4), y_1), (x_i(4)+1, y_2)\} \subset G_4, \quad i=2,3.$$

Podemos definir por recurrencia, para $n \geq 4$

$$G_{n+1} = (S_{\pi^n(1)}(n).S_{\pi^n(2)}(n).S_{\pi^n(4)}(n)) (G_n)$$

siendo $\pi = (1)(2 \ 4 \ 3)$, donde los desdoblamientos locales son de la forma

$$d_2(S_i(n)) \quad \text{si } i=1$$

$$d_3(S_i(n)) \quad \text{si } i \in \{2,3,4\}$$

y si $i \in \{\pi^n(1), \pi^n(2), \pi^n(4)\}$

$$x_i(n+1) = \begin{cases} 2x_i(n)-1 & \text{si } x_i(n) \text{ par} \\ 2x_i(n) & \text{si } x_i(n) \text{ impar} \end{cases}$$

en otro caso

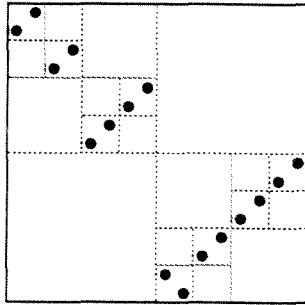
$$x_i(n+1) = \begin{cases} 2x_i(n) & \text{si } x_i(n) \text{ par} \\ 2x_i(n)-1 & \text{si } x_i(n) \text{ impar} \end{cases}$$

siendo

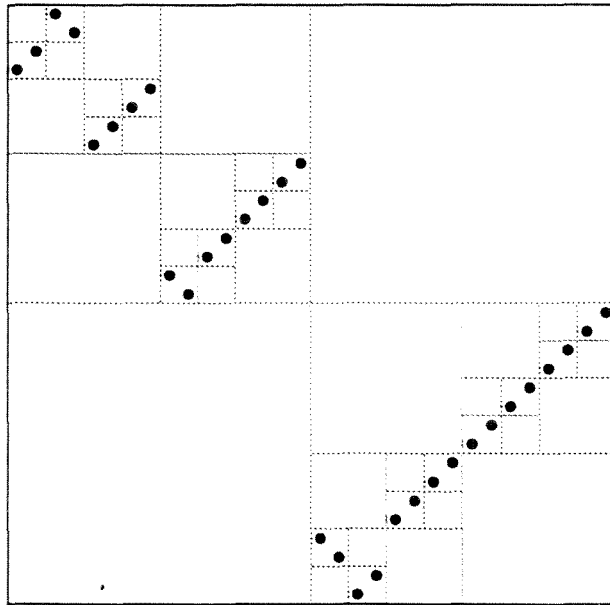
$$S_i(n+1) = \{(2x_i(n)-1, y_1), (2x_i(n), y_2)\} \subset G_{n+1}.$$

Mostramos en la figura 1.14 las gráficas de o_4 y o_5 , siendo sus correspondientes matrices asociadas:

$$A_{O_4} = \left(\begin{array}{c|c} & B \ I_2 \\ \hline E \ I_2 & \end{array} \right), \quad A_{O_5} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & C \ I_2 \\ \hline & D \ I_2 & \ I_3 \\ \hline B \ I_2 & & \end{array} \right)$$



Graf(o_4)



Graf(o_5)

- Figura 1.14 -

$m > 6$, m par.

Puede construirse por inducción una familia de puntos fijos $o^m = \{o_n^m\}_{n \geq 0}$ con $m=8,10,12,\dots$, a partir de o^8 . Para ello definimos para cada m fijo las sucesiones $\{x_i^m(n)\}_{n \geq m/2}$, $i=1,\dots,m/2+3$, cuyo primer elemento se encuentra en $n=m/2$. Dicha construcción sigue un proceso recurrente en m del tipo:

$$x_1^8(4)=2, \quad x_2^8(4)=3, \quad x_3^8(4)=6, \quad x_4^8(4)=7, \quad x_5^8(4)=9, \quad x_6^8(4)=11, \\ x_7^8(4)=13 \text{ y}$$

$$x_i^m\left(\frac{m}{2}\right) = 2 x_{i-1}^{m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right) \quad \text{si } i \in \left\{1, \dots, \frac{m-10}{2}\right\}$$

$$x_i^m\left(\frac{m}{2}\right) = 2 x_{i-1}^{m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right) - 1 \quad \text{si } i \in \left\{\frac{m-10}{2} - 1, \dots, \frac{m}{2} - 2\right\}$$

$$x_{\frac{m}{2}-1}^m\left(\frac{m}{2}\right) = 2 x_{\frac{m}{2}-1}^{m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right)$$

$$x_i^m\left(\frac{m}{2}\right) = 2 x_{i-1}^{m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right) + 1 \quad \text{si } i \in \left\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 2\right\}$$

$$x_i^m\left(\frac{m}{2}\right) = 2 x_{i-1}^{m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right) \quad \text{si } i \in \left\{\frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 3\right\}$$

con la excepción de $x_1^{10}(5) = 2x_1^8(4)$ y $x_8^{10}(5) = 2x_7^8(4) - 1$.

La permutación que indica los desdoblamientos locales de paridad -1 a realizar es, para cada m ,

$$\pi_m = \left(\frac{m}{2}\right) (1, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 3, 2, 3, \dots, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2} + 2).$$

De esta forma, si llamamos G_n^m a la gráfica del orden o_n^m , G_{n+1}^m viene dado por

$$\left(S_{\tau_m(1)}^m(n).S_{\tau_m(\frac{m}{2}+1)}^m(n).S_{\tau_m(\frac{m}{2}+3)}^m(n).S_{\tau_m(\frac{m}{2})}^m(n).S_{\tau_m(\frac{m}{2}-2)}^m(n) \right) (G_n^m)$$

donde $\tau_m = (\pi_m)^n$ y, como siempre, cada S_i^m representa los pares legales:

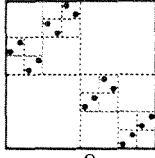
$$S_i^m(n) = \{ (2x_i^m(n-1)-1, y_1), (2x_i^m(n-1), y_2) \} \subset G_n^m, \text{ si } n > \frac{m}{2}$$

$$S_i^m(\frac{m}{2}) = \{ (x_i^m(\frac{m}{2})-1, y_1), (x_i^m(\frac{m}{2}), y_2) \} \subset G_{m/2}^m, \text{ si } x_i^m(\frac{m}{2}) \text{ par}$$

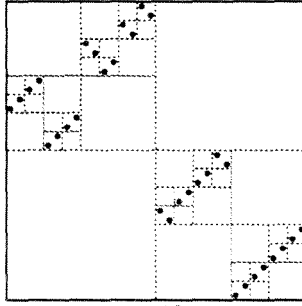
$$S_i^m(\frac{m}{2}) = \{ (x_i^m(\frac{m}{2}), y_1), (x_i^m(\frac{m}{2})+1, y_2) \} \subset G_{m/2}^m, \text{ si } x_i^m(\frac{m}{2}) \text{ impar}$$

los $x_i^m(n)$, $n > \frac{m}{2}$, son construidos como en el caso $m=6$ sabiendo que los desdoblamientos locales son d_2 en $S_i^m(n)$ si $i \in \{1, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+2\}$ y d_3 en $S_i^m(n)$ si $i \in \{2, \dots, \frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}+3\}$, y las gráficas $G_{m/2}^m$ son las que se se muestran en las figuras 1.15 y 1.16 (en realidad, es suficiente dar las gráficas G_4^8 , G_5^{10} , G_6^{12} y G_7^{14} , dado que las restantes se obtienen a partir de ellas por un proceso inductivo. Téngase en cuenta que $G_i^m = G_i^{m-2}$ para $i \in \{1, \dots, \frac{m-2}{2}-1\}$ y los desdoblamientos locales efectuados en $G_{m/2-1}^m$ para obtener $G_{m/2}^m$ son análogos a los hechos en $G_{(m-2)/2-1}^{m-2}$ para dar lugar a $G_{(m-2)/2}^{m-2}$.

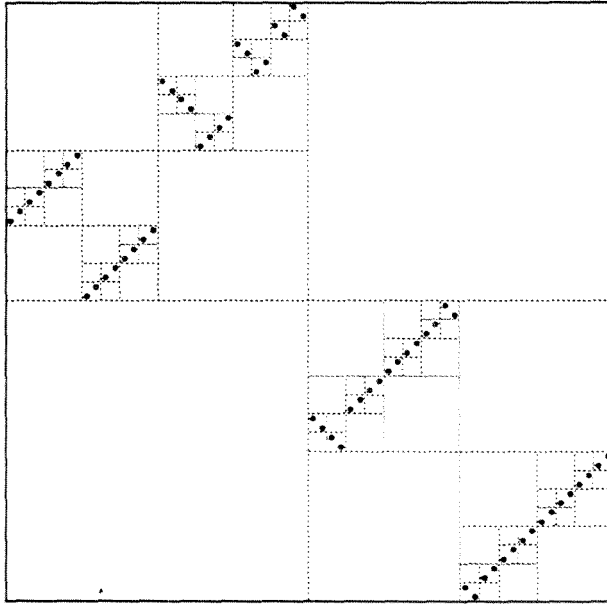
Una vez construidos, fijado $m \geq 8$, se puede demostrar trivialmente que o^m es punto fijo del operador y que los extremos relativos de o_n^m , $\forall n \geq \frac{m}{2}$, son $x_i^m(n)$, $2^{n-2}+1$, $2^{n-2}+2^{n-3}+1$, ..., $\sum_{i=2}^{m/2-2} 2^{n-1}+1$.



G_4^8

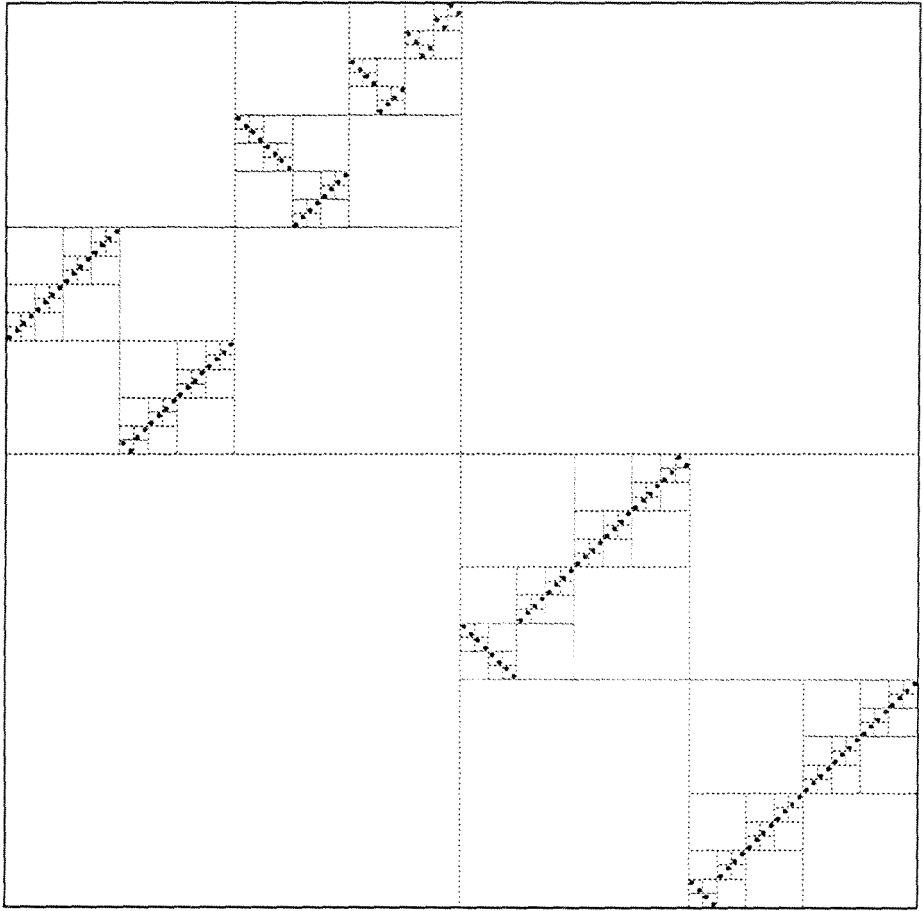


G_5^{10}



G_6^{12}

- Figura 1.15 -



G_7^{14}

- Figura 1.16 -

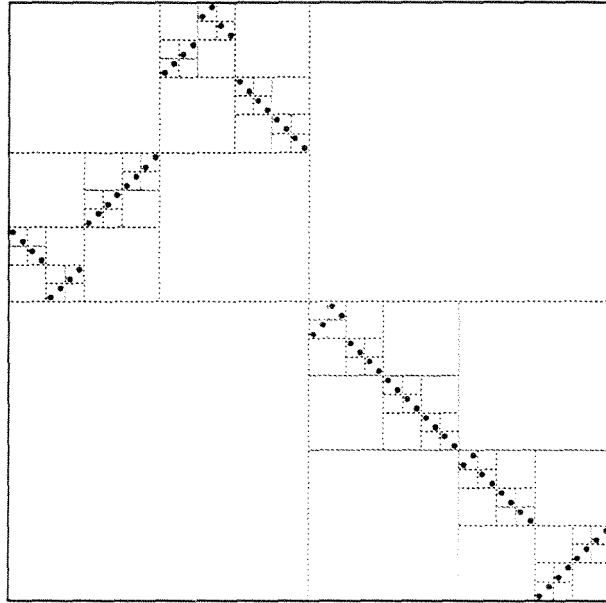
$m = 7.$

Sea o_6 como en la figura 1.17, llamamos $G_6 = \text{Graf}(o_6)$.
Si consideramos:

$$x_1(6)=5, x_2(6)=22, x_3(6)=35, x_4(6)=50, x_5(6)=57,$$

mientras que

$$S_i(6) = \{(x_i(6)-1, y_1), (x_i(6), y_2)\} \subset G_6, \quad i=2,4,$$



Graf(o_6)

- Figura 1.17 -

$$S_i(6) = \{(x_1(6), y_1), (x_1(6)+1, y_2)\} \subset G_6, \quad i=1,3,5.$$

Entonces definimos por recurrencia, para $n \geq 6$

$$G_{n+1} = (S_{\pi^n(1)}(n) \cdot S_{\pi^n(2)}(n) \cdot S_{\pi^n(3)}(n)) (G_n)$$

siendo $\pi = (2)(1,3,4,5)$, donde los desdoblamientos locales son de la forma

$$d_2(S_i(n)) \quad \text{si } i \in \{2,3,4\}$$

$$d_3(S_i(n)) \quad \text{si } i \in \{1,5\}$$

y si $i \in \{ \pi^n(1), \pi^n(2), \pi^n(3) \}$

$$x_i^{(n+1)} = \begin{cases} 2x_i^{(n)}-1 & \text{si } x_i^{(n)} \text{ par} \\ 2x_i^{(n)} & \text{si } x_i^{(n)} \text{ impar} \end{cases}$$

en otro caso

$$x_i^{(n+1)} = \begin{cases} 2x_i^{(n)} & \text{si } x_i^{(n)} \text{ par} \\ 2x_i^{(n)}-1 & \text{si } x_i^{(n)} \text{ impar} \end{cases}$$

siendo

$$S_i^{(n+1)} = \{(2x_i^{(n)}-1, y_1), (2x_i^{(n)}, y_2)\} \subset G_{n+1}.$$

$m > 7$, m impar.

Como en los casos anteriores construimos o^9 siguiendo el esquema:

$$x_1^9(5)=6, x_2^9(5)=11, x_3^9(5)=14, x_4^9(5)=15, x_5^9(5)=23, x_6^9(5)=28.$$

$$G_{n+1} = (S_{\pi^{n(2)}} \cdot S_{\pi^{n(3)}} \cdot S_{\pi^{n(4)}} \cdot S_{\pi^{n(5)}} \cdot S_{\pi^{n(6)}}) (G_n)$$

$\pi=(4)(1,2,3,5,6)$ y $d_2(S_i^{(n)})$ si $i \in \{4,5\}$, $d_3(S_i^{(n)})$ si $i \in \{1,2,3,6\}$.

A partir de o^9 , obtenemos una familia de puntos fijos siguiendo el mismo proceso que en casos anteriores,

siendo, $\pi_m = (\frac{m-1}{2}) (1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}-1, \frac{m-1}{2}+1, \frac{m-1}{2}+2)$ y

$$x_1^m(\frac{m+1}{2}) = 2x_1^{m-2}(\frac{(m-2)+1}{2}) \quad i \in \{1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}-3\},$$

$$x_{(m-1)/2-2}^m(\frac{m+1}{2}) = 2x_{(m-1)/2-2}^{m-2}(\frac{(m-2)+1}{2})-1,$$

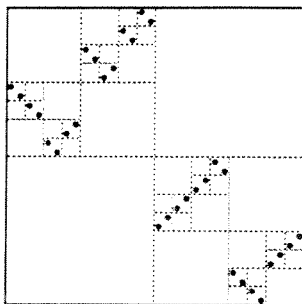
$$x_{(m-1)/2-1}^m(\frac{m+1}{2}) = 2x_{(m-3)/2}^{m-2}(\frac{(m-2)+1}{2}),$$

$$x_{(m-1)/2}^m(\frac{m+1}{2}) = 2x_{(m-3)/2}^{m-2}(\frac{(m-2)+1}{2})+1,$$

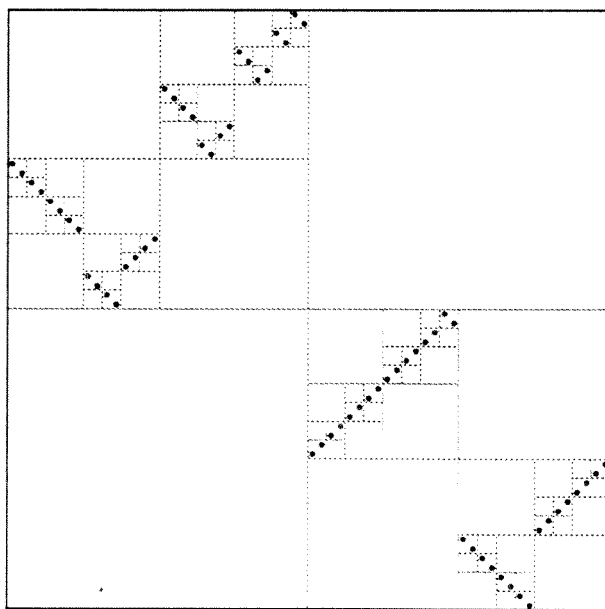
$$x_{(m-1)/2+1}^m \binom{m+1}{2} = 2 x_{(m-3)/2+1}^{m-2} \binom{(m-2)+1}{2} + 1,$$

$$x_{(m-1)/2+2}^m \binom{m+1}{2} = 2 x_{(m-3)/2+2}^{m-2} \binom{(m-2)+1}{2}.$$

Las figuras 1.18 y 1.19 muestran la inicialización de algunos de estos elementos.

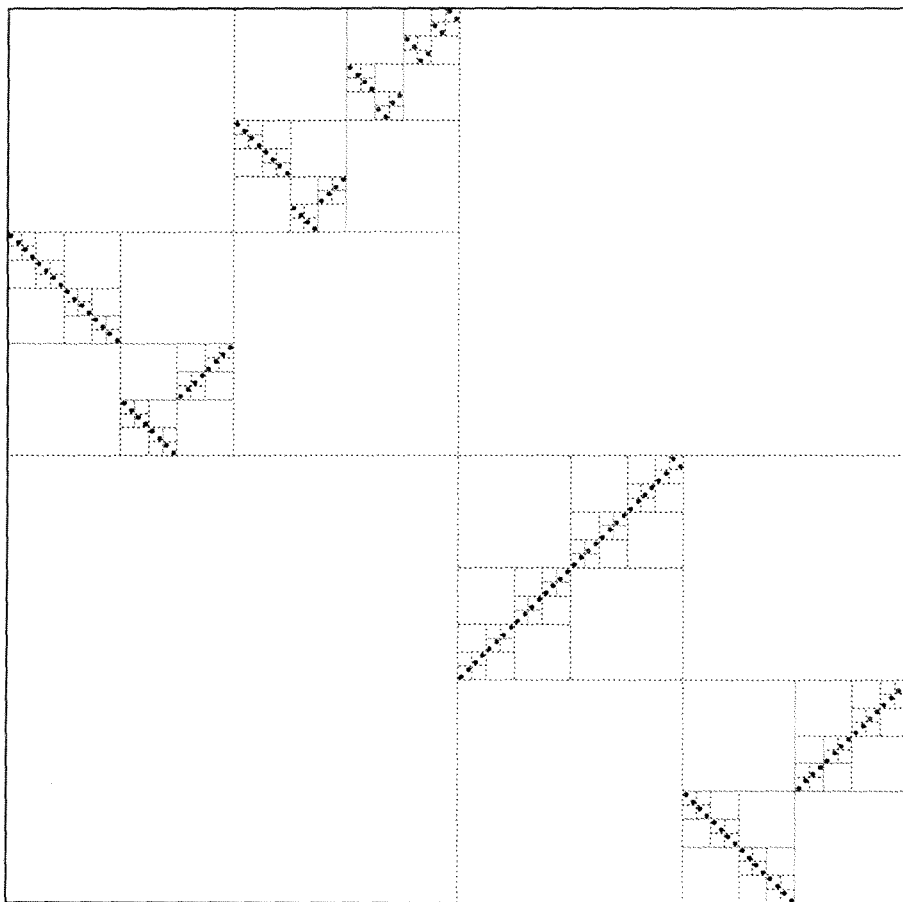


G_5^9



G_6^{11}

- Figura 1.18 -



$$G_7^{13}$$

- Figura 1.19 -

Nótese que si hubiésemos obtenido o^7 con el mismo proceso constructivo que el dado para la familia $m=9,11,\dots$, el número de extremos sería 7, pero estaríamos ante un punto fijo que es una iterada del orden o_u^- (concretamente o_u^5 -) y por tanto es también punto fijo de R_0^- .

Es trivial demostrar:

- 1.- Ninguno de los elementos contruidos anteriormente son puntos fijos de cualquier otro $\tilde{\mathcal{R}}$.
- 2.- Hay más puntos fijos que no estan en estas familias. No son, por tanto, los únicos.

■

Observación.-

El resultado anterior no se cumple si $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. En efecto, si $m=1$, la prueba es trivial al existir dos únicos elementos en O_∞ tales que $M(o)=1$ y ser ambos puntos fijos de dos endomorfismos \mathcal{R} a la vez. La demostración que aquí realizamos cuando $m \in \{2, 3, 4\}$ se basa en la teoría de amasamiento o "teoría kneading" [MT], en concreto en la forma de ciertos itinerarios. Puesto que no es nuestro objetivo hacer un detallado estudio de dicha teoría, incluimos las ideas básicas para la demostración, así como un resumen de la misma en el apéndice I.1 de esta memoria.

Teorema 1.35.-

Para todo $m > 1$, y $\tilde{\mathcal{R}} \in \{\mathcal{R}_1^-, \mathcal{R}_0^-\}$, existe un punto fijo $o \in O_\infty$ de $\tilde{\mathcal{R}}$ tal que $M(o) = m$ y o no es punto fijo de otro \mathcal{R} .

Demostración.-

Construcción de puntos fijos:

Vamos a definir inductivamente una familia $o^m \in O_\infty$, $m \geq 2$, de puntos fijos de \mathcal{R}_0^- tales que, para cada m , $M(o^m) = m$. Para tal definición utilizaremos una construcción análoga a la hecha en teoremas anteriores por lo que prescindiremos de detalles y mostraremos sólo aquellas variaciones que son precisas en

este momento.

Definimos $x_1^2(2)=1$, $x_2^2(2)=3$,

$$\pi_2 = (1,2),$$

$G_{n+1}^2 = S_{\pi_2(1)}^n(n) (G_n^2)$, donde hacemos los desdoblamientos

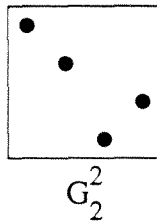
$d_2(S_i(n))$ si $i=1$, $d_3(S_i(n))$ si $i=2$,

$$S_i(n+1) = \{(2x_i(n)-1, y_1), (2x_i(n), y_2)\} \subset G_{n+1}^2, \text{ si } n \geq 2$$

y

$$S_i(2) = \{(x_i(2), y_1), (x_i(2)+1, y_2)\} \subset G_2^2$$

mientras que G_2^2 es la dada en la figura 1.20.



- Figura 1.20 -

Una vez definidas todas las sucesiones para $m-1$ arbitrario, se tiene:

$$x_i^m(m) = 2x_i^{m-1}(m-1)-1 \quad \text{si } i \in \{1, \dots, m-1\}, \text{ y}$$

$$x_m^m(m) = 2x_{m-1}^{m-1}(m-1)+1,$$

$$G_k^m = G_k^{m-1}, \quad k=1, \dots, m-1, \quad G_m^m = S_{2^{m-1}}^{m-1}(G_{m-1}^m), \text{ siendo } S_{2^{m-1}}$$

el par legal $\{(2^{m-1}-1, y_1), (2^{m-1}, y_2)\}$ de G_{m-1}^m , donde hacemos

desdoblamiento local d_2 si m impar y d_3 si m par.

$$G_{n+1}^m = S_{\pi_m(1)}^m(n)(G_n^m) \quad , \quad \text{para } n > m, \text{ siendo los}$$

desdoblamiento local $d_2(S_i^m(n))$, si i es impar y $d_3(S_i^m(n))$

si i es par, $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\pi_m = (1, \dots, m)$. Mientras que:

$$S_i^m(n) = \{(2x_i^m(n-1)-1, y_1), (2x_i^m(n-1), y_2)\} \subset G_n^m, \quad n > m,$$

$$S_i^m(m) = \{(x_i^m(m), y_1), (x_i^m(m)+1, y_2)\} \subset G_m^m \text{ si } x_i^m(m) \text{ impar}$$

$$S_i^m(m) = \{(x_i^m(m)-1, y_1), (x_i^m(m), y_2)\} \subset G_m^m \text{ si } x_i^m(m) \text{ par}$$

con $x_i^m(n)$, $n > m$, construidos como anteriormente.

El elemento $o_n^m = \{o_n^m\}_{n \geq 0} \in O_\infty$, $m \geq 2$, considerado será aquel tal que $\text{Graf}(o_n^m) = G_n^m$, $n \geq 1$.

Evidentemente para cada m , o_n^m tiene m extremos relativos en $x_i^m(n)$, $i=1, \dots, m$, $\forall n \geq m$, por lo que $M(o_n^m) = m$.

Veamos que o^m es punto fijo. Haremos la demostración para $m=2$, la prueba en los demás casos es análoga (tener en cuenta la relación entre A_{O^m} y $A_{O^{m+1}}$).

$$A_{O_3^2} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \end{array} \right), \quad A_{O_4^2} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & D \\ & & & & & I_2 \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \end{array} \right),$$

En general

$$A_{O_n}^2 = \begin{pmatrix} & & B_2(n) & \\ & 0 & & I_{n-2} \\ & & & \\ & & T_{n-2} & \\ B_1(n) & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} I_{n-3} & & & & \\ & I_{n-4} & & & \\ & & & & T_{n-5} \\ & & & & T_{n-6} \\ & & I_{n-7} & & \\ & & & & p_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{con } p_1 = \begin{cases} I & \text{si } n=4 \\ B & \text{si } n=4+1 \\ T & \text{si } n=4+2 \\ A & \text{si } n=4+3 \end{cases}$$

y

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} & & & & p_2 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & I_{n-7} & \\ & & & & & & I_{n-6} \\ & & & & & & \\ & & & T_{n-5} & & & \\ & T_{n-4} & & & & & \\ & & & & & & I_{n-3} \end{pmatrix},$$

$$\text{siendo } p_2 = \begin{cases} D & \text{si } n=4 \\ T & \text{si } n=4+1 \\ C & \text{si } n=4+2 \\ I & \text{si } n=4+3 \end{cases}$$

Puesto que

$$A_{O_n}^{2_2} = \left(\begin{array}{c|c} & B_2(n) \cdot T_{n-2} \\ \hline B_1(n) & \\ \hline & & & T_{n-2} \\ & & B_1(n) \cdot B_2(n) & \end{array} \right)$$

tenemos que demostrar que

$$J_{n-1} \left[\begin{array}{c} B_2(n) \cdot T_{n-2} \\ B_1(n) \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c|c} & B_2(n-1) \cdot I_{n-3} \\ \hline & T_{n-3} \\ \hline B_1(n-1) & \end{array} \right)$$

El primer miembro de esta igualdad puede reescribirse de la forma

$$T_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} B_2(n) \cdot T_{n-2} \\ B_1(n) \end{pmatrix} \cdot T_{n-1} = \begin{pmatrix} T_{n-2} \cdot B_1(n) \cdot T_{n-2} \\ T_{n-2} \cdot B_2(n) \end{pmatrix}$$

por lo que al ser

$$T_{n-2} \cdot B_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & T_{n-3} \\ \hline I_{n-4} & & & & \\ \hline & I_{n-5} & & & \\ \hline & & & & T_{n-6} \\ \hline & & & & T_{n-7} \\ \hline & & & & T_{p_2} \end{array} \right)$$

I.3 Ordenes y endomorfismos del intervalo con entropía nula.

Sea $f:I \rightarrow I$ un endomorfismo de I y $P=\{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ una órbita periódica de f de período n .

Definición 1.36.-

Diremos que una permutación π sobre $\{1, \dots, n\}$ es la **permutación inducida** por P , si se verifica

$$f(x_i) = x_{\pi(i)}.$$

Evidentemente, por ser P una órbita periódica, π es un n -ciclo, y es único debido a la ordenación elegida en P .

Dado cualquier subconjunto finito $P=\{x_1 < \dots < x_n\} \subset I$ y cualquier ciclo π sobre $\{1, \dots, n\}$, es trivial construir un endomorfismo f de I de forma que P es una órbita periódica de f que induce la permutación π . El problema de extensión es mucho más delicado si además pedimos que la entropía de dicho endomorfismo sea nula. Está claro, después de lo expuesto en 0.2, que esto sólo es posible si la permutación π es simple.

Definición 1.37.-

Sea f un endomorfismo de I . Diremos que una biyección o sobre $\{1, \dots, n\}$ es un **orden compatible con f** si existe una órbita periódica, $P=\{x_1 < \dots < x_n\}$, de f tal que $o(x) = \pi_p^{x-1}(n)$, siendo π_p la permutación inducida por P .

Como consecuencia de 0.2 y I.1.2 se tiene que los únicos órdenes compatibles con endomorfismos de I con entropía nula son los elementos de O_n , $n \geq 0$.

Observación.-

Observar que la transformación de una órbita periódica de período 2^n en una de período 2^{n+1} por bifurcación de duplicación de período corresponde al paso de un elemento o_n de O_n al elemento $s_n(o_n)$ de O_{n+1} , para algún $s_n \in S_n$.

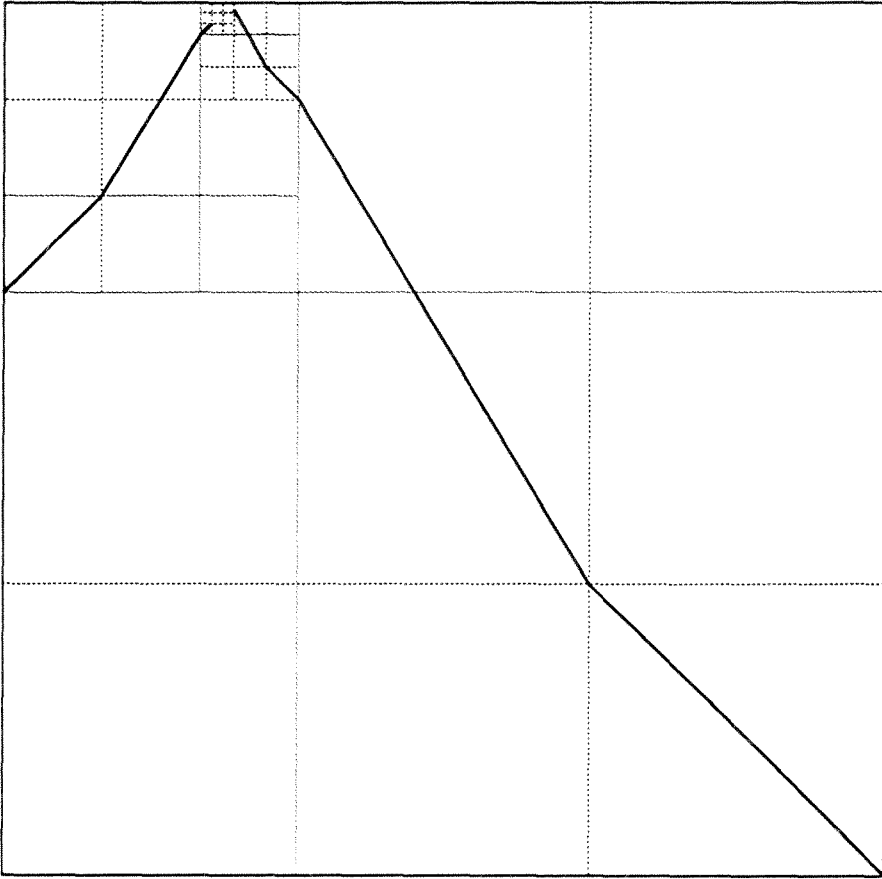
De forma natural, diremos que $o = \{o_n\}_{n \geq 0} \in O_\infty$ es compatible con un endomorfismo f de I , si o_n es compatible con f para todo $n \geq 0$.

Teorema 1.38.-

Sea o una biyección sobre el conjunto $\{1, \dots, k\}$. Existe un endomorfismo f de I con entropía nula tal que o es compatible con f si y sólo si $k=2^n$ y $o \in O_k$.

Además, para cualquier $o \in O_\infty$, existe un endomorfismo f de I con entropía nula tal que o es compatible con f . En efecto, la construcción de una tal f puede hacerse, por ejemplo, a partir del endomorfismo \underline{o} que sobre el conjunto de cantor triádico T define dicho orden (ver I.1.3), extendiéndolo a todo el intervalo de forma que en cada componente conexa de $I \setminus T$ sea la aplicación afín que hace continua dicha extensión. Sirva como ejemplo las aplicaciones así construídas en el caso en que $o = o_{u+}$ y $o = o_a$, cuyas gráficas se muestran en las figuras 1.21 y 1.22.

Nótese que $M(o)$ representa el mínimo número de extremos necesarios para realizar una extensión de \underline{o} a un endomorfismo del intervalo. Por tanto, los únicos órdenes compatibles con aplicaciones unimodales son o_{u+} y o_{u-} .



- Figura 1.21 -

Observación.-

El endomorfismo que sobre T induce el orden α_a es precisamente la aplicación conocida por el nombre de "adding machine", que denotaremos por A y que está definida como sigue.

A cada $x \in T$ le podemos asociar unívocamente una sucesión de ceros y unos (s_0, s_1, \dots) , $s_i \in \{0, 1\}$. Entonces A es la aplicación

$$\begin{aligned} A : T &\longrightarrow T \\ x &\longrightarrow A(x) \end{aligned}$$

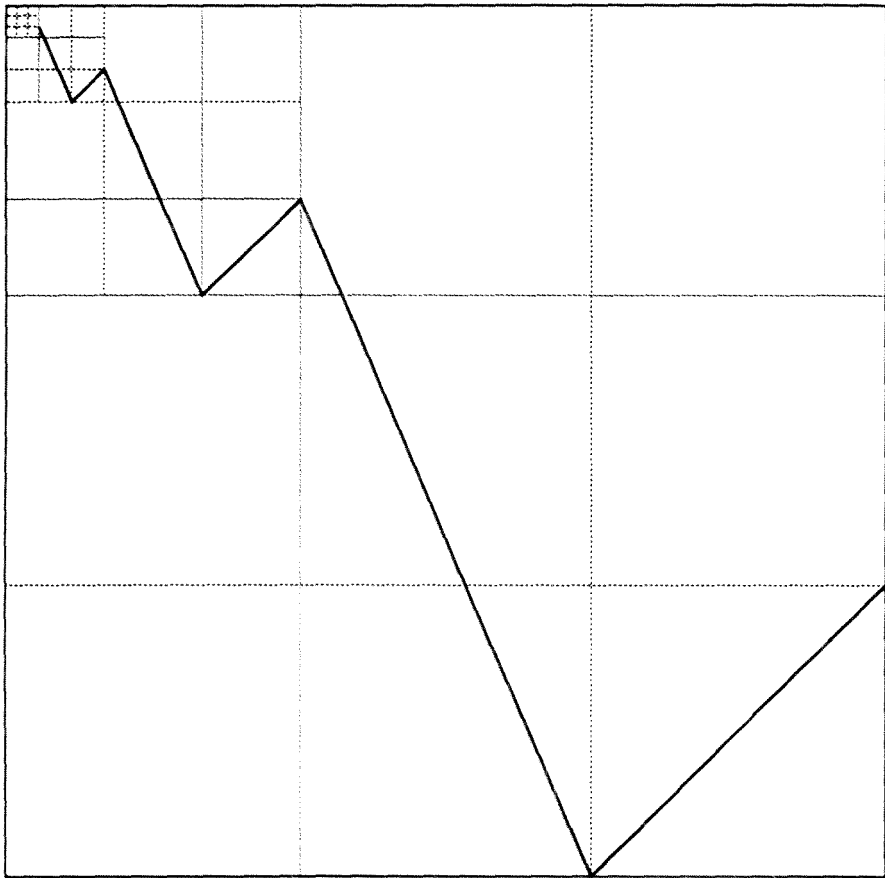
siendo $A(x)$ el punto de T cuya sucesión de ceros y unos viene dada por

$$(s_0, s_1, \dots) + (1, 0, \dots) \bmod 2$$

es decir, es obtenida sumando 1 a s_0 haciendo mod 2 y trasladando el resultado. Por ejemplo:

$$A(101110\dots) = (011110\dots) \text{ y } A(111\dots) = (000\dots).$$

Bajo conjugación topológica, es exactamente el sistema dinámico definido por "la adición de 1" en los diádicos.



- Figura 1.22 -

Conjuntos de Cantor minimales en aplicaciones del intervalo con entropía nula

Sea f un endomorfismo del intervalo con entropía nula y supongamos que K es un conjunto de Cantor minimal de f en I tal que $f|_K$ es un homeomorfismo.

Siguiendo a [Mi3], definimos $K=K_0 \cup K_1$, siendo

$$K_0 = \{x \in K / f(x) > x\}$$

$$K_1 = \{x \in K / f(x) < x\}$$

Puesto que cada órbita de $f|_K$ es densa, K_0 y K_1 son no vacíos. Además:

Lema 1.39.-[Mi3]

$$\sup(K_0) \leq \inf(K_1)$$

Lema 1.40.-[Mi3]

$$f(K_i) = K_{1-i}, \quad i=0,1.$$

Por tanto, como consecuencia de ambos lemas y del lema 0.4, obtenemos

Lema 1.41.-

f tiene un punto fijo en $[\sup(K_0), \inf(K_1)]$.

Del lema 1.40 y la minimalidad de f , podemos afirmar

Lema 1.42.-

K_0 y K_1 son conjuntos de Cantor minimales invariantes de f^2 . Además, $f^2|_{K_i}$ es un homeomorfismo, $i=0,1$.

Esta claro que, del lema 1.42 y teniendo en cuenta que $h(f^2)=2h(f)=0$, $f^2|_{K_1}$, $i=0,1$, puede ser analizado de la misma manera que $f|_K$. Por tanto, podemos escribir:

$$K_1 = K_{1,0} \cup K_{1,1}$$

con $\sup(K_{i,0}) < \inf(K_{i,1})$ y $f^2(K_{i,j}) = K_{i,1-j}$, $i,j \in \{0,1\}$, y f posee una órbita periódica de período 2, $\{p_0, p_1\}$, tal que $p_i \in [\sup(K_{i,0}), \inf(K_{i,1})]$, $i=0,1$.

Por inducción, obtenemos una sucesión de descomposiciones

$$K_{1 \dots 1_n} = K_{1 \dots 1_n 0} \cup K_{1 \dots 1_n 1}$$

obteniéndose, asimismo, órbitas periódicas de período 2^n para todo $n \geq 0$.

Por ser $h(f)=0$, teniendo en cuenta el teorema 0.11, inferimos que todas estas órbitas periódicas son simples, y de aquí que

Teorema 1.43.-

Si f es un endomorfismo con entropía nula del intervalo y existe un conjunto de Cantor K minimal de f en I tal que $f|_K$ es un homeomorfismo minimal, entonces existe un elemento de O_∞ compatible con f .

Además:

Aquellos homeomorfismos $f:K \rightarrow K$, con K conjunto de Cantor minimal, cuya dinámica viene determinada por un elemento de O_∞ , son los únicos homeomorfismos minimales de un conjunto de Cantor que pueden extenderse a aplicaciones continuas del intervalo con entropía nula.

Observación.-

Las aplicaciones 2-renormalización R_1^s definidas en el capítulo 0 de esta memoria, se proyectan ahora en el espacio O_∞ dando lugar a los endomorfismos \mathcal{R}_1^s . De aquí, que todos los resultados obtenidos en las secciones precedentes relativos a \mathcal{R}_1^s , son válidos cuando consideramos los 2-renormalizados de $f|_K$. (Nótese que cuando hablamos de puntos fijos de los operadores 2-renormalización lo hacemos siempre bajo conjugación topológica obtenida con un homeomorfismo conservando la orientación).

1.4 Descripción conjetural de la frontera del caos en endomorfismos regulares del intervalo.

Atendiendo a los resultados obtenidos en secciones precedentes relativos a la aproximación simbólica de la dinámica de los operadores renormalización, a recientes resultados de D. Sullivan sobre la renormalización de aplicaciones analíticas, así como a diversas observaciones (muchas de ellas de tipo conjetural) de algunos autores, surge un cuadro global en la estructura de la frontera de entropía topológica positiva en espacios de endomorfismos regulares del intervalo.

Observaciones.-

1.- Mediante resultados de Block y Hart en [BH] se sabe que toda familia uniparamétrica de aplicaciones continuamente diferenciables, continuas respecto al

parámetro, pasando de entropía topológica cero a entropía topológica positiva, contiene necesariamente una aplicación tal que el conjunto de períodos es exactamente \mathbb{N}_{2n} . Además, los mencionados autores conjeturan lo siguiente:

"La adherencia del conjunto de aplicaciones de clase C^1 con entropía topológica positiva es $\{f \in C^1(I, I) / \text{Per}(f) \supset \mathbb{N}_{2n}\}$. La frontera de este y del conjunto de aplicaciones con el conjunto de períodos finito es exactamente $\{f \in C^1(I, I) / \text{Per}(f) = \mathbb{N}_{2n}\}$ ".

2.- Si restringimos el operador renormalización, R_0^- , al espacio de aplicaciones unimodales de clase C^2 que dejan invariante la frontera, Couillet-Tresser y Feigenbaum (1978) conjeturan independientemente que tal operador tiene un punto fijo y su espectro está relacionado con la universalidad de ciertos números. Fueron muchos los autores que probaron resultados, algunos ayudados de estimaciones asistidas por ordenador, encaminados a la prueba de tales conjeturas. Después de los trabajos aparecidos entre 1979 y 1986 de M.Campanino, H.Epstein, O.E.Lanford y D.Ruelle, podemos asegurar que R_0^- tiene un punto fijo analítico f_0^{-*} el cual es simétrico, R_0^- es de clase C^1 y $DR_0^-(f_0^{-*})$ es un operador compacto cuyo espectro tiene un único autovalor $\delta = 4.669$ fuera del disco unidad, encontrándose los otros en su interior. Usando la teoría de la variedad estable ([HP],[PM]) se sigue la existencia de una variedad local inestable de dimensión uno, tangente al autoespacio asociado al autovalor δ y una variedad local estable que interseca a la anterior transversalmente en f_0^{-*} . La variedad local estable de R_0^- es el conjunto de aplicaciones ψ en un entorno de f_0^{-*} en las cuales $(R_0^-)^n(\psi)$ están definidas, pertenecen a

este entorno y convergen exponencialmente a f_0^{-*} . Se puede también definir la variedad estable global del punto fijo como el conjunto de aplicaciones ψ tales que $(R_0^-)^n(\psi)$ converge a f_0^{-*} .

Sea A el conjunto de endomorfismos del intervalo de clase C^2 que tienen todos sus puntos críticos no planos, y que están en la frontera del caos.

CONJETURAS.-

(I) A es el conjunto de aplicaciones en la acumulación de una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período.

(II) Un subconjunto abierto denso $A_{i,s}$ de A está dividido en subconjuntos disjuntos $A_{i,s}^{n,m}$ tales que $R_1^s(A_{i,s}^{n,m})$ pertenece a $A_{i,s}^0$, siendo $A_{i,s}^0$ la cuenca inmediata de atracción por R_1^s del punto fijo de tipo cuadrático f_1^{s*} de R_1^s .

Observaciones.-

(A) Otra formulación de (I) es que cada aplicación en la clase considerada que tiene entropía topológica cero y órbitas periódicas de período 2^n para todo $n \geq 0$ puede ser aproximada a la vez por aplicaciones con entropía positiva y por aplicaciones con un número finito de períodos.

(B) La segunda (y principal) parte de la conjetura puede ser dividida como sigue:

(II.1) En un subconjunto abierto denso A_1 de A , las

aplicaciones tienen un único conjunto de Cantor invariante, A_1 es el subconjunto de A donde la dinámica de R_1^s está definida sin ambigüedad. Suponiendo I, la idea intuitiva de II.1 es la siguiente:

(i) La acumulación de bifurcaciones de duplicación de períodos es un fenómeno de codimensión uno.

(ii) Varias acumulaciones ocurriendo a la vez tienen codimensión superior.

(II.2) En un abierto denso A_2 de A_1 las aplicaciones f son tales que existe un entero no negativo n de forma que la dinámica simbólica en el conjunto de Cantor de $(R_1^s)^n(f)$ es descrita por el orden unimodal o_{us} , es decir $(R_1^s)^n(f)$ es unimodal.

Que existen órdenes no realizables en A_2 es seguido fácilmente de lo expuesto a nivel simbólico; por ejemplo, cualquier punto fijo de los R_1^s , con un número de extremos mayor que uno, no pueden ser realizados por aplicaciones en A_2 . Los ejemplos más simples en $A_1 \setminus A_2$ son obtenidos considerando todos los órdenes compatibles con aplicaciones bimodales, en los cuales se requieren dos puntos críticos en el conjunto de Cantor, ninguno de los cuales está en un extremo de un "agujero" del Cantor ([GLT],[MZ]).

(II.3) Un abierto denso A_3 de A_2 está formado por aplicaciones con todos los puntos críticos no degenerados.

(II.4) A_3 está contenido en la cuenca de atracción de f_1^{s*} .

Aún cuando esto es todavía una retadora cuestión en la clase de funciones que mencionamos, es notable que esta parte de la conjetura estaría ya garantizada en la interesante clase de aplicaciones reales analíticas por el reciente resultado de D. Sullivan [S1] de que toda

aplicación unimodal analítica con punto crítico cuadrático (i.e. con sucesión Kneading idónea) es atraída hacia el mismo punto fijo f_0^{-*} por iteración de R_0^- (esto fue dado originalmente en [S2] con la hipótesis adicional de que la aplicación pueda extenderse a una aplicación "quadratic-like" en el sentido de Douady-Hubbard definida en un entorno complejo del intervalo I).

(C) Lo que se conoce de la dinámica simbólica es suficiente para decir que la dinámica de R_1^s restringida a $A_1 \setminus A_2$ es absolutamente complicada. En efecto, el teorema 1.22 implica que R_1^s tiene entropía topológica infinito. Puesto que la dinámica asintótica de \mathcal{R}_1^s restringido a $D_{O_{us}}$ es simple, $A_1 \setminus A_2$ soporta toda la dinámica caótica.

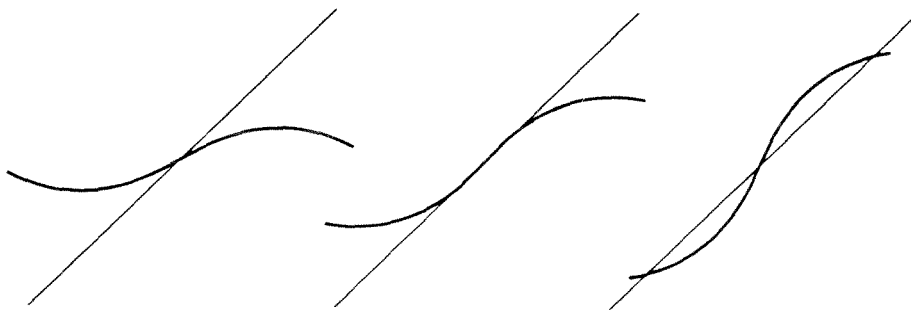
(D) En orden a conocer la importancia de $A \setminus A_2$ en la estructura global de A , se puede ver, por ejemplo, la frontera del caos en aplicaciones bimodales en [GLT],[MaT],[MZ]: para pasar de un orden $o \in O_\infty$ a otro $o' \in O_\infty$ se debe ir a través de la coexistencia de varios conjuntos de Cantor o un Cantor conteniendo varios puntos críticos.

Comentarios sobre (II.2):

Sea $f \in A_1$ y K su conjunto de Cantor que puede ser considerado como producido por una cascada de bifurcaciones de duplicación de período en una familia uniparamétrica de aplicaciones. El argumento para (II.2) es:

Consideremos el momento en que en esta familia uniparamétrica ha sido creada una órbita P_n de período 2^n ; siguiendo el proceso, esta órbita pierde la estabilidad para

dar lugar a una nueva órbita P_{n+1} de periodo 2^{n+1} (figura 1.23): Un número impar de puntos de P_n necesita cruzar un extremo relativo de la aplicación (si este número es par, la bifurcación daría lugar a dos órbitas periódicas con período 2^n y se comenzaría de aquí). Es claro que lo más simple es cuando un único extremo ha sido cruzado. Suponiendo esto, es decir que después de la última bifurcación un sólo extremo ha sido cruzado, parece lo más natural que un sólo punto de P_{n+1} cruce el mismo punto extremo para dar lugar a la nueva bifurcación (piénsese en la proximidad de todos los puntos de P_{n+1} al punto crítico más cercano de la aplicación). Con tal escenario, aplicando la teoría simbólica, obtenemos por el teorema 1.23 que a nivel simbólico estamos ante una preimagen del orden unimodal o_{us} , y de ahí II.2.



- Figura 1.23 -

APENDICE I.1

Sea f un endomorfismo de I , monótono a trozos, es decir tal que existen subintervalos

$$I_1=[0,c_1], I_2=[c_1,c_2], \dots, I_m=[c_{m-1},1]$$

en los que f es estrictamente monótona. Supongamos que cada I_j es un intervalo maximal de monotonía de f , y que $c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1}$ son los extremos relativos de f (en realidad hay que añadir el 0 y 1, pero no los tendremos en cuenta en lo que sigue).

Dado $x \in I$, definimos la **dirección de x** , $A(x)$, como el símbolo I_j , si $x \in I_j$ y no es un extremo relativo, y C_j si $x=c_j$. El **itinerario de x** es la sucesión

$$A_* = A_*(x) = (A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), \dots)$$

Definimos la operación **shift** \mathcal{S} entre itinerarios como sigue:

$$\mathcal{S}(A_*(x)) = (A_1, A_2, \dots)$$

siendo $A_*(x) = (A_0, A_1, A_2, \dots)$.

A cada símbolo I_j le asociamos un signo $\mathcal{E}(I_j) \in \{+1, -1\}$ según f es monótona creciente ($\mathcal{E}(I_j)=+1$) o decreciente ($\mathcal{E}(I_j)=-1$) en el subintervalo I_j . Elegimos el orden $I_1 < I_2 < \dots < I_m$ en el conjunto de símbolos. De esta forma,

dadas $A_* = (A_0, A_1, \dots)$, $B_* = (B_0, B_1, \dots)$, con $A_p, B_p \in \{I_1, \dots, I_m\}$,

diremos que $A_* < B_*$ si, $A_0 = B_0, \dots, A_{n-1} = B_{n-1}$, y

$$A_n < B_n \quad \text{si } \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_{n-1} = +1$$

ó

$$B_n < A_n \quad \text{si } \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_{n-1} = -1$$

para algún entero $n \geq 0$, siendo $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}(A_p)$.

Se verifica:

Lema.-[MT]

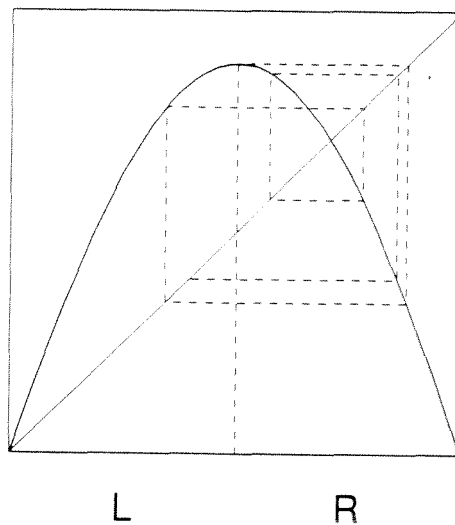
Si $x, y \in I$ son tales que $x < y$ entonces $A_*(x) \leq A_*(y)$.

No existen puntos fijos de \mathcal{R}_1^+ con $M(o) \in \{2, 3, 4\}$, que no lo son de otro \mathcal{R} . (Ver observación en la pag.96 de I.2)

Consideremos el conjunto \mathcal{O}_∞ formado por todas las extensiones continuas a I de los endomorfismos que sobre T inducen los elementos de \mathcal{O}_∞ (ver I.1.3).

En todo lo que sigue consideraremos itinerarios del punto más a la derecha del Cantor T , que denotaremos por x_0 .

A partir de los conceptos básicos sobre itinerarios y siguiendo la terminología de [PTT], sabemos que una condición mínima para encontrar un elemento de \mathcal{O}_∞ inducido por un orden que es punto fijo de \mathcal{R}_1^+ , es la existencia de un itinerario de manera que al sustituir bloques de dos letras por una, el itinerario permanezca invariante. Por ejemplo,



en el caso del punto fijo unimodal de \mathcal{R}_1^+ , si llamamos $L=[0,c]$ y $R=[c,1]$, siendo c el punto máximo, el itinerario mencionado es

$$RLRRRLRLRLRRRL\dots$$

el cual es invariante mediante la sustitución $RL \rightarrow R$, $RR \rightarrow L$. (Estamos considerando $L < R$).

Estudiaremos las sustituciones en bloques de dos letras que se pueden realizar para obtener itinerarios invariantes en los casos de que los endomorfismos tengan 2,3 y 4 extremos relativos. Nótese que muchas de estas sustituciones se eliminan debido al signo de los correspondientes símbolos por lo que no se incluyan en los distintos casos (por ejemplo, en el caso unimodal reseñado no podemos realizar la sustitución $RR \rightarrow R$, $RL \rightarrow L$, para obtener un punto fijo de \mathcal{R}_1^+ , debido a que $RR < RL$ y $R > L$).

Sea $f \in \mathcal{O}_\infty$ y $m=M(o)$ el número de extremos relativos de f , supongamos:

- $m=2$.

LLamemos A, B, C a los intervalos de monotonía de f y supongamos $T \cap X \neq \emptyset$, con $X=A, B, C$. Consideramos el orden $C < B < A$ en el conjunto de símbolos. Distinguiremos dos posibilidades:

$$2.1- \mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(C)=+1 \text{ y } \mathcal{E}(B)=-1,$$

$$2.2- \mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(C)=-1 \text{ y } \mathcal{E}(B)=+1.$$

- 2.1: La única sustitución es

$$\begin{cases} AC \rightarrow A \\ BC \rightarrow B \\ BB \rightarrow C \end{cases}$$

que da lugar a la sucesión

$$ACBBBCBCBCBBB\dots$$

Si esta es el itinerario de x_0 bajo la aplicación f inducida por algún elemento de O_∞ , implicaría que $f^p(x_0) \notin A \cap T, \forall p > 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto no existe $o \in O_\infty$ en este caso.

- 2.2: Atendiendo a los signos de $\mathcal{E}(A)$, $\mathcal{E}(B)$ y $\mathcal{E}(C)$, no existen sustituciones que den lugar a puntos fijos de o .

- $m=3$.

Sean A, B, C, D los intervalos de monotonía de f , y como anteriormente, $T \cap X \neq \emptyset, X = A, B, C, D$, y el orden en los símbolos $D < C < B < A$.

$$3.1- \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(C) = +1 \text{ y } \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(D) = -1,$$

$$3.2- \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(C) = -1 \text{ y } \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(D) = +1.$$

- 3.1: La única sustitución es:

$$\left\{ \begin{array}{l} AC \rightarrow A \\ AD \rightarrow B \\ BD \rightarrow C \\ BC \rightarrow D \end{array} \right.$$

que corresponde a la sucesión

$$A_* = ACBDADBCACBCADBDAC\dots$$

Según las diferentes iteraciones de la operación shift actuando sobre A_* , observamos que:

$$\mathcal{I}^{12}(A_*) < \mathcal{I}^{20}(A_*) < \mathcal{I}^4(A_*) < \mathcal{I}^{28}(A_*)$$

lo que significa que $f^{12}(x_0) \leq f^{20}(x_0) \leq f^4(x_0) \leq f^{28}(x_0)$, y por tanto el orden en $\{1, \dots, 2^5\}$ correspondiente al orden que

induce f es

$$o_5 = (\dots, 13, 21, 5, 29, \dots) \notin O_5$$

por lo que se concluye que no existe $o \in O_\infty$ que satisfaga las condiciones.

- 3.2: Indicamos en la siguiente tabla las posibles sustituciones:

	AD ↓	AC ↓	BC ↓	BD ↓	CD ↓	CC ↓
3.2.1	A	B	C	D		
3.2.2	A	B	C			D
3.2.3	A	B			C	D
3.2.4	A			B	C	D
3.2.5			A	B	C	D

Las sustituciones 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.5 no pueden dar lugar a itinerarios de x_0 mediante un elemento de O_∞ por la misma razón que en 3.1.

En los dos primeros se tiene:

- 3.2.1:

$$A_* = ADBDACBDADBCAC\dots$$

verificando

$$\mathcal{P}(A_*) < \mathcal{P}^3(A_*) < \mathcal{P}^7(A_*) < \mathcal{P}^5(A_*)$$

por tanto

$$o_3 = (2, 4, 8, 6, \dots, 1) \notin O_3$$

- 3.2.2: Obtenemos

$$A_* = ADCCBCBCACBCACBCAD\dots$$

por lo que

$$\mathcal{P}^2(A_*) < \mathcal{P}^{14}(A_*) < \mathcal{P}^6(A_*) < \mathcal{P}^{10}(A_*)$$

y

$$o_4 = (\dots, 3, 15, 7, 11, \dots) \notin O_4$$

- m=4.

Tenemos ahora subintervalos A,B,C,D,E, tales que $T \cap X \neq \emptyset$,

$\forall X=A,B,C,D,E$. Establecemos $E < D < C < B < A$.

$$4.1- \mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(C)=\mathcal{E}(E)=+1 \text{ y } \mathcal{E}(B)=\mathcal{E}(D)=-1,$$

$$4.2- \mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(C)=\mathcal{E}(E)=-1 \text{ y } \mathcal{E}(B)=\mathcal{E}(D)=+1.$$

-4.1:

	AE ↓	BE ↓	BD ↓	CD ↓	CE ↓	DE ↓	DD ↓
4.1.1	A	B	C	D	E		
4.1.2	A	B	C	D			E
4.1.3	A	B	C			D	E
4.1.4	A	B			C	D	E
4.1.5	A			B	C	D	E
4.1.6			A	B	C	D	E

	AC ↓	AD ↓	AE ↓	BE ↓	BD ↓	BC ↓	BB ↓
4.1.7	A	B	C	D	E		
4.1.8	A	B	C	D			E
4.1.9	A	B	C			D	E
4.1.10	A	B			C	D	E
4.1.11	A			B	C	D	E
4.1.12			A	B	C	D	E

Las posibilidades 4.1.1,...4.1.6, 4.1.11 y 4.1.12 son todas eliminadas razonando de forma análoga al caso 2.1. Por otro lado, si observamos las correspondientes sucesiones A_* en los casos 4.1.8, 4.1.9 y 4.1.10, obtenemos, en todas ellas, que:

$$\varphi^6(A_*) < \varphi^{10}(A_*) < \varphi^2(A_*) < \varphi^{14}(A_*)$$

lo que implica que

$$o_4 = (\dots, 7, 11, 3, 15, \dots) \notin O_\infty.$$

En 4.1.7, obtenemos un punto fijo de R_1^+ , sin embargo este corresponde al iterado de orden 3 de o_{u+} que es punto fijo de dos aplicaciones R a la vez.

- 4.2: Ver tabla adjunta.

Podemos eliminar 4.2.1, 4.2.2, 4.2.5 y 4.2.6 como en 2.1. Mientras que en 4.2.3 se obtiene $o_3 = (4, 2, 8, 6, \dots) \notin O_3$ y en 4.2.4, $o_3 = (4, 6, 2, 8, \dots) \notin O_3$.

	AD ↓	AC ↓	BC ↓	BD ↓	BE ↓	CE ↓	CD ↓
4.2.1	A	B	C	D	E		
4.2.2	A	B	C	D			E
4.2.3	A	B	C			D	E
4.2.4	A	B			C	D	E
4.2.5	A			B	C	D	E
4.2.6			A	B	C	D	E

- CAPITULO II -

- HOMEOMORFISMOS RESTRICCIÓN DE ENDOMORFISMOS REGULARES DEL INTERVALO -

II.1.- Introducción.

Sea X un espacio métrico compacto y f un endomorfismo localmente expansivo de X , es decir, existe $\epsilon > 0$ y $k > 1$ tal que $\rho(f(x), f(y)) \geq k \rho(x, y)$ siempre que $\rho(x, y) < \epsilon$, siendo ρ la métrica en X . Es un hecho conocido, que se sigue de [GH, Th.10.36], que si la restricción de f a un subconjunto E cerrado invariante es un homeomorfismo, entonces E es un conjunto finito.

En este tiempo de rápidos progresos en el estudio de endomorfismos del intervalo, el hecho anterior motiva la siguiente cuestión:

Qué se puede decir, en general, acerca de la dinámica asintótica de una restricción homeomórfica de una aplicación

$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, es decir, si E es un subconjunto cerrado de $[0,1]$, tal que $f|_E: E \rightarrow E$ es un homeomorfismo, ¿cuál es la dinámica asintótica de $f|_E$?

En este capítulo daremos respuesta a esta pregunta en el ámbito de aplicaciones no invertibles de $C^2([0,1])$, espacio de C^2 endomorfismos de $[0,1]$ que dejan invariante la frontera, con un número finito de puntos críticos todos ellos no-planos y sin puntos periódicos no-hiperbólicos. Más concretamente, si denotamos por $\omega(x)$ el conjunto ω -límite de $x \in [0,1]$ siendo $f \in C^2([0,1])$, y suponemos que $E \subset [0,1]$ es un cerrado tal que $f|_E: E \rightarrow E$ es un homeomorfismo, probaremos en el Teorema 2.8 que $\bigcup_{x \in E} \omega(x)$ es finito excepto cuando existe al menos un punto crítico $c \in E$ para el cual $\omega(c)$ es infinito y $f|_{\omega(c)}$ es un homeomorfismo minimal. Es un hecho conocido que estos casos pueden existir, como veremos en la próxima sección. Notemos que la propiedad de no tener puntos no-hiperbólicos es genérica en $C^2([0,1])$, (es decir, dicha propiedad se verifica en un subconjunto residual).

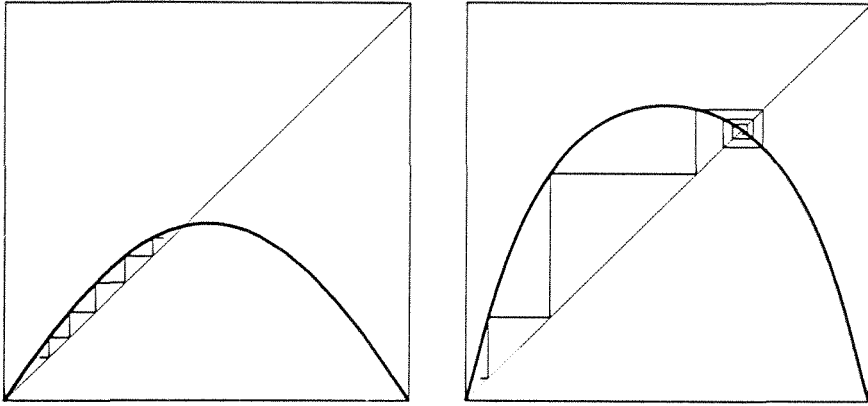
Este capítulo está organizado como sigue. En la sección II.2 discutiremos el caso especial de aplicaciones unimodales. Los teoremas principales, Teoremas 2.8 y 2.15, serán enunciados y probados en II.3, donde también ilustraremos con un ejemplo que dichos teoremas pueden no verificarse si rebajamos ligeramente las hipótesis de regularidad.

II.2.- Aplicaciones unimodales.

Trataremos aquí de particularizar la propiedad de

finitud, enunciada en la introducción, al caso de aplicaciones unimodales del intervalo, es decir, que decrecen en un único segmento y crecen en un único segmento. Recordemos que una aplicación unimodal es **renormalizable** si para algún $J \subset I$ y $n > 1$, $f^n|_J$ es un endomorfismo unimodal. Si $f^n|_J$ es renormalizable, diremos que f es **dos veces renormalizable** (podemos repetir el proceso de forma natural a **infinitamente renormalizable**). Recordemos también que un punto fijo x es estable o atractor si existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < |y-x| < \varepsilon$ implica $|f(y)-x| < |y-x|$, y que un punto periódico p de período n es estable si p es un punto fijo estable de f^n , (análogamente inestable o repulsor).

Probaremos en la proposición 2.1 que tal propiedad es también válida en el caso de aplicaciones trapezoidales (ver figura 2.2) con pendiente mayor que 1 en valor absoluto. La existencia de puntos periódicos estables para estas aplicaciones no proporciona ejemplos de subconjuntos cerrados invariantes infinitos en los cuales la aplicación restricción es un homeomorfismo, puesto que necesariamente uno de los puntos de la órbita periódica estable se encuentra en el intervalo donde f es constante. Por el contrario, en el caso de la aplicación cuadrática, $f_a(x) = 1 - ax^2$, para valores convenientes del parámetro a , a partir de la existencia de órbitas periódicas estables se construyen fácilmente ejemplos de conjuntos cerrados infinitos en los cuales la aplicación cuadrática actúa como un homeomorfismo. La figura 2.1 ilustra alguno de estos ejemplos. Nótese que en ellos la unión de los conjunto ω -límite de la aplicación restricción es el atractor finito. En el caso de aplicaciones cuadráticas infinitamente renormalizables, el argumento anterior es válido si sustituimos la órbita periódica estable por la adherencia de



- Figura 2.1 -

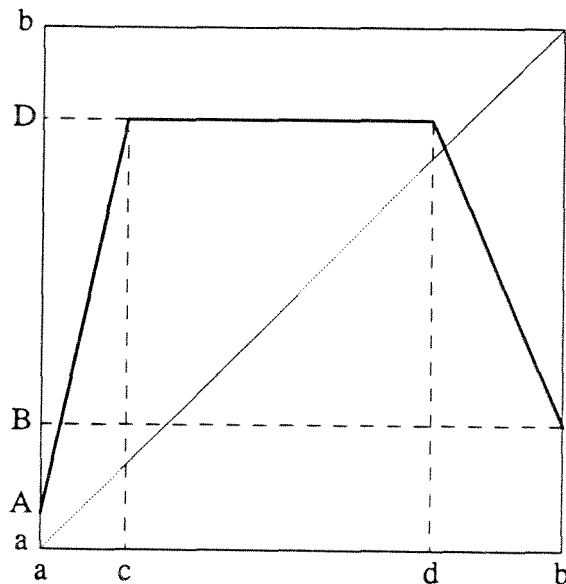
la órbita del punto crítico. De forma más precisa, como es bien conocido, en este caso la aplicación cuadrática restringida a la adherencia de la órbita del punto crítico es un homeomorfismo minimal en un conjunto de Cantor. Por otro lado, no se sabe si en estas aplicaciones cuadráticas, las infinitamente renormalizables son las únicas que presentan este tipo de comportamiento. No obstante, del corolario 2.16 inferimos que si E es un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ tal que $f_a|_E: E \rightarrow E$ es un homeomorfismo y $\bigcup_{x \in E} \omega(x)$ es infinito entonces el punto crítico $c \in E$ y f_a restringida a la adherencia de la órbita de c es un homeomorfismo minimal.

La siguiente proposición, cuya prueba es una adaptación de demostraciones de resultados clásicos para aplicaciones expansivas, nos proporciona una idea intuitiva del Teorema 2.8; si f es una aplicación unimodal del intervalo, y E es un subconjunto cerrado invariante tal que la dinámica asintótica de la aplicación restricción de f a E está

confinada lejos del punto crítico, entonces un posible modelo para esta restricción es la aplicación trapezoidal.

Una aplicación T de un intervalo $[a,b]$, con $a < b$, se dirá **trapezoidal** si su gráfica está compuesta de tres segmentos uniendo, respectivamente, los puntos L_1 y L_2 , L_2 y R_2 , R_2 y R_1 , donde $L_1=(a,A)$, $L_2=(c,D)$, $R_2=(d,D)$ y $R_1=(b,B)$, con $A,B,D \in [a,b]$, $A,B < D$, y $a < c < d < b$, como muestra la figura 2.2.

Llamaremos pendientes de T a las cantidades $\frac{D-A}{c-a}$ y $\frac{B-D}{b-d}$.



- Figura 2.2 -

Proposición 2.1.-

Supongamos que las pendientes de T son, en valor absoluto, mayores o iguales que $s > 1$. Si E es un subconjunto

cerrado en $[a,b]$, tal que $T|_E: E \rightarrow E$ es un homeomorfismo, entonces E es finito.

Demostración.-

Sean $\delta > 0$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E donde cada U_i es un intervalo abierto de centro $x_i \in E$ y radio δ . Sea $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ el correspondiente subrecubrimiento finito.

Puesto que $x_i \in E$, $i=1, \dots, n$, y $T|_E$ es homeomorfismo, existen únicos $y_i \in E$, $i=1, \dots, n$, tales que $T(y_i) = x_i$. Distinguiremos con el subíndice k al único punto en $[c,d] \cap E$, si existe, tal que $T(y_i) = x_i = D$. Si $i \neq k$, denotemos por y'_i la otra preimagen por T de x_i en $[a,b]$, si ella existe. Consideremos $T^{-1}(U_i)$, $i \neq k$, el conjunto formado por la unión de las bolas de centro y_i y y'_i y radio δ/s intersecado con $[a,b]$, y $T^{-1}(U_k)$ la bola de centro y_k y radio δ/s .

Veamos que $E \subset \bigcup_{i=1}^n T^{-1}(U_i)$. Sea $x \in E$, puesto que $T(x) \in E$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|T(x) - x_i| < \delta$. Distinguiremos tres casos:

- c1- $i \neq k$,
- c2- $i = k$ y $T(x) = x_k$,
- c3- $i = k$ y $T(x) \neq x_k$.

c1- Sea $z_i \in \{y_i, y'_i\}$ tal que bien $x, z_i < c$, bien $x, z_i > d$. Entonces:

$$|x - z_i| < \frac{1}{s} |T(x) - x_i| < \frac{\delta}{s} \implies x \in T^{-1}(U_i).$$

c2- Evidentemente $x = y_k$ y por tanto $x \in T^{-1}(U_k)$.

c3- Supongamos $y_k \neq c$ y $y_k \neq d$, y sea $H = \min\{|c - y_k|, |d - y_k|\}$. Por la continuidad uniforme de $T^{-1}|_E$, dado $H/2$ existe $\nu_H > 0$ tal

que $|x-y| < \nu_H$, $x, y \in E$, implica que $|T^{-1}|_E(x) - T^{-1}|_E(y)| < H/2$. Tomando δ más pequeño que ν_H , si fuese necesario, tendríamos

$$|T(x) - x_k| < \delta \implies |x - y_k| < \frac{h}{2}$$

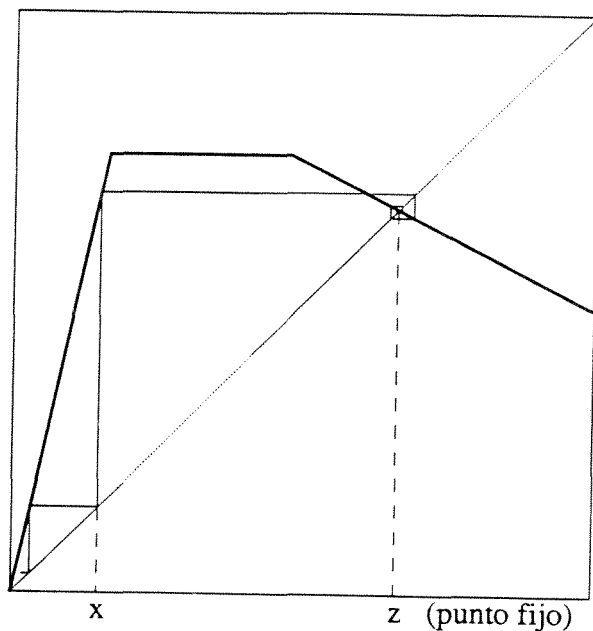
por lo que $x \in [c, d]$, en contradicción con el hecho de que existe un único punto en $E \cap [c, d]$. Por tanto, no existe $x \in E$ tal que $T(x) \in U_k$ y $T(x) \neq x_k$.

Si $y_k = c$, necesariamente $x < c$ (por la continuidad uniforme de $T^{-1}|_E$), por lo que usando el carácter expansivo de T se concluye que $x \in T^{-1}(U_k)$. (Análogamente si $y_k = d$).

Denotemos por U_i^{-1} la componente de $T^{-1}(U_i)$ centrada en y_i , $i=1, \dots, n$. Por la continuidad uniforme de $T^{-1}|_E$, y el hecho que $|y_i - y'_i| > \frac{d-c}{2}$, δ puede ser elegido lo suficientemente pequeño para que $T^{-1}(U_i) \cap E \subset U_i^{-1}$. Entonces $\{U_i^{-1}\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ es un recubrimiento finito de E con la misma cardinalidad de $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ pero con bolas de radio δ/s . Iterando la anterior construcción, E puede ser recubierto con un número finito y fijo de bolas de radio arbitrariamente pequeño. Se deduce entonces que E es finito. ■

Observación 2.2.-

Evidentemente puede existir un subconjunto, E , cerrado infinito tal que $T|_E$ es homeomorfismo si suprimimos la condición sobre las pendientes de T , como ilustra la figura 2.3.



$$z \in \overline{\text{Orb}(x)} \setminus \text{Orb}(x)$$

Figura 2.3

Corolario 2.3.-

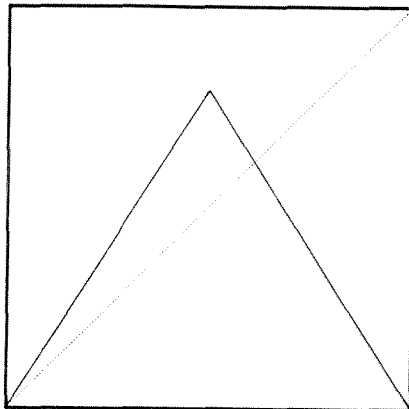
Si el conjunto de órbitas periódicas de T consiste en exactamente una órbita de período 2^n para $n=0,1,\dots$, y tales casos existen, entonces la restricción de T al conjunto no errante no es inyectiva.

Observación 2.4.-

El corolario anterior proporciona un fácil contraejemplo del aserto de Sarkovskii [Sa3]:

" La restricción de f , aplicación continua de un intervalo cerrado en sí mismo cuyos puntos periódicos tienen todos período una potencia de 2, a su conjunto no errante es un homeomorfismo".

Un contraejemplo de esta afirmación, aunque más complicado, había sido encontrado por Block-Coven como se muestra en [BC].



- Figura 2.4 -

En el caso de aplicaciones tent $f_s: [0,2] \rightarrow [0,2]$, $1 < s \leq 2$, (fig.2.4), definidas por

$$f_s(x) = \begin{cases} sx & 0 \leq x \leq 1 \\ s(2-x) & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

no sabemos si existen casos en los cuales f_s lleva homeomórficamente un subconjunto cerrado infinito en sí mismo. De hecho, esto está relacionado con la cuestión de cuándo en la familia cuadrática existen valores a del parámetro, con f_a no infinitamente renormalizable y tiene entropía topológica positiva, en los cuales la aplicación restringida a la adherencia de la órbita infinita del punto crítico es un homeomorfismo minimal. Señalamos ahora que el teorema 2.8 sigue siendo válido en el caso de aplicaciones S-unimodales (corolario 2.16), y por consiguiente para estas aplicaciones cuadráticas.

II.3.- Principales resultados.

Por conveniencia en la lectura y comprensión de esta sección precisaremos ciertas definiciones y resultados, algunos de los cuales han sido incluidos ya en otros capítulos de esta memoria, que resultan relevantes en lo que sigue.

Sea $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ una aplicación C^1 . Diremos que $c \in (0,1)$ es un **punto crítico** si $f'(c)=0$. Un punto crítico c es **no-plano** si existe $k \geq 2$ tal que f es C^{k+1} en c y $Df^k(c) \neq 0$. Denotaremos por $C(f)$ el conjunto de puntos críticos de la aplicación f . Denotaremos por $\text{orb}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ la **órbita** hacia adelante por f de x en $[0,1]$, si x es un punto crítico diremos que $\text{orb}_f(x)$ es una **órbita crítica**. El **conjunto ω -límite** de $x \in [0,1]$ por f , $\omega_f(x)$, es el conjunto de puntos de acumulación de $\text{orb}_f(x)$ (entendiendo por tales los elementos $y \in [0,1]$ tales que existe $\{n_i\} \rightarrow \infty$ y $\{f^{n_i}(x)\} \rightarrow y$), y el conjunto ω -límite de la aplicación f es $\omega(f) = \bigcup_{x \in [0,1]} \omega_f(x)$. Diremos que p es un punto periódico de f de período n si $f^n(p)=p$ y $f^j(p) \neq p$ para $0 < j < n$. El punto periódico p se dice **hiperbólico** si $|Df^n(p)| \neq 1$, y no-hiperbólico en otro caso. En el primer caso, si $|Df^n(p)| < 1$ se dirá que p es **linealmente estable**, y si $|Df^n(p)| > 1$, p se dirá **linealmente inestable**. (Notar que estos puntos son atractores o estables y repulsores o inestables, respectivamente). La **cuenca de atracción** de p es el conjunto, $B(p)$, de puntos en $[0,1]$ cuyo conjunto ω -límite es la órbita de p . Un conjunto $\Lambda \subset [0,1]$ es **invariante** si $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Un **conjunto hiperbólico** de f es un conjunto compacto

invariante Λ tal que existen constantes $c > 0$ y $\lambda > 1$ de forma que se verifica $|Df^n(p)| \geq c\lambda^n$ para todo $x \in \Lambda$, $n \geq 1$.

Sea $E \subset I = [0, 1]$ un subconjunto cerrado tal que $g = f|_E: E \rightarrow E$. Como anteriormente podemos considerar los conjuntos $\text{orb}_g(x)$ y $\omega_g(x)$ para cada $x \in E$, y el conjunto ω -límite de la aplicación g que vendrá dado por $\omega(x) = \bigcup_{x \in E} \omega_g(x)$. La aplicación g es **minimal** si y sólo si para cualquier x en E se verifica $E = \overline{\text{orb}_g(x)}$. Si además g es un homeomorfismo, entonces $\alpha_g(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación de $\text{orb}_g^{-1}(x)$, i.e., $\alpha_g(x) = \omega_g^{-1}(x)$. En lo que sigue suprimiremos f y g cuando no exista posibilidad de confusión.

Lema 2.5.-

Sea g una aplicación continua de un espacio métrico compacto X . Para cada $x \in X$ se verifica $g(\omega(x)) = \omega(x)$. Además si p es un punto periódico repulsor, $\omega(x) = \text{orb}(p)$ si y sólo si $p \in \text{orb}(x)$.

Demostración.-

La primera afirmación puede verse en [W,p.123]. Probaremos la segunda en el caso en que el período de p en uno, ya que en otro caso bastaría considerar p como punto fijo de la aplicación g^n , siendo n el período del punto.

Supongamos que p no pertenece a $\text{orb}(x)$ y veamos que la sucesión $\{f^n(x)\}$ no converge a p . Para ello, supongamos lo contrario. Elegimos $\varepsilon > 0$ de forma que $\rho(f(y), p) > \rho(y, p)$, cuando $\rho(y, p) < \varepsilon$, $y \neq p$, entonces

$$\exists n_0 > 0 \quad / \quad \forall n \geq n_0 \quad \rho(f^n(x), p) < \varepsilon.$$

Si $n > n_0$ arbitrario, al ser $f^n(x) \neq p$, se tiene

$$\rho(f^n(x), p) > \dots > \rho(f^{n_0}(x), p)$$

y al considerar límites cuando n tiende a infinito, se llegaría a que $f^{n_0}(x) = p$, lo cual es una contradicción. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $n_0 \geq n$ de forma que $\rho(f^{n_0}(x), p) \geq \varepsilon$. De aquí, podemos encontrar una sucesión $\{n_i\}_i^\uparrow$ tal que $\rho(f^{n_i}(x), p) \geq \varepsilon$, restringiéndonos a una subsucesión, si fuese necesario, $\{f^{n_i}(x)\}$ converge a $y \neq p$, lo cual es una contradicción con el hecho que $\omega(x) = \{p\}$, que viene de suponer que p no está en $\text{orb}(x)$.

■

Lema 2.6.-

Sean $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ una aplicación continua y p un punto periódico repulsor de período n . Si $x \in [0,1]$ es tal que $\text{orb}(p)$ está propiamente contenida en $\omega(x)$, entonces $f|_{\omega(x)}$ no es inyectiva.

Demostración.-

Dividimos la demostración en dos partes.

1- Supongamos p es un punto fijo repulsor. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $|y-p| < \varepsilon$, $y \neq p$, implica $|f(y)-p| > |y-p|$. Consideremos una sucesión estrictamente monótona decreciente de números reales $\{\varepsilon_i\}_i^\downarrow > 0$ tal que $\varepsilon_i < \varepsilon$, y denotemos por Δ_i los intervalos $(p-\varepsilon_i, p+\varepsilon_i)$. Sea $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_i}(x) \in \Delta_i$ y $f^{n_i-1}(x) \notin \Delta_i$ (por el lema 2.5 siempre existe, ya que si al estar $\{p\}$ contenido propiamente en $\omega(x)$ entonces $p \notin \text{orb}(x)$ y por tanto $\text{orb}(x)$ no

converge a p). Llamemos $z_1 = f^{n-1}(x)$. Consideremos $n_2 > n_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in \Delta_2$ y $z_2 = f^{n_2-1}(x) \notin \Delta_2$. Evidentemente $z_2 \notin \Delta_1$, pues si así fuera $\varepsilon_2 > |f(z_2) - p| > |z_2 - p|$. Continuando el razonamiento, obtenemos una sucesión $\{z_n\}$ y un punto z distinto de p tal que, restringiéndonos a una subsucesión si fuese necesario, $\{z_n\} \rightarrow z$ y $f(z) = p$; por lo que existen elementos distintos, z y p , en $\omega(x)$ que tienen la misma imagen. Se concluye el resultado en este caso.

2- Si p es un punto periódico de período $n > 1$, sea $g = f^n$. Puesto que $p \in \omega(x)$, existe una sucesión estrictamente monótona creciente de enteros positivos $\{n_i\}$ tal que $\{f^{n_i}(x)\} \rightarrow p$. Considerando una subsucesión, si fuese necesario, de forma que cada n_k pueda ser expresado por $n_k = t_k n + r$, con $0 \leq r \leq n-1$, obtendremos que $\{g^{t_k}(f^r(x))\} \rightarrow p$, y por tanto $p \in \omega_g(f^r(x))$. Además, $\{p\}$ está contenido propiamente en $\omega_g(f^r(x))$ pues en caso contrario, se seguiría, por el lema 2.5, que $p \in \text{orb}_g(f^r(x)) \subset \text{orb}_f(x)$ y de aquí $\omega_f(x) = \text{orb}(p)$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Se sigue entonces, por la primera parte de la demostración, que la aplicación $g|_{\omega_g(f^r(x))}$ no es inyectiva, con lo cual se concluye el resultado al tener en cuenta que $\omega_g(f^r(x)) \subset \omega_g(x)$.

■

Por motivos técnicos, enunciaremos a continuación

ciertos resultados conocidos que serán fundamentales para la demostración de los Teoremas 2.8 y 2.15, omitiendo su prueba por carecer de interés en lo que nos ocupa, (no obstante, se incluyen, en cada uno de ellos, referencias de localización).

2.7.A).- Sea X un espacio métrico compacto y f un endomorfismo expansivo de X . Si la restricción de f a un subconjunto cerrado invariante E es un homeomorfismo, entonces E es finito.[GH]

2.7.B).- Sea g una aplicación continua de un espacio compacto en sí mismo. Si $x \in X$ y U es un conjunto abierto de $\omega(x)$ tal que $U \neq \omega(x)$, entonces $\overline{g(U)}$ no está contenido en U . Como consecuencia, $\omega(x)$ es un ciclo sí y sólo sí $\omega(x)$ es finito [Saz,Th1,Cor.2].

2.7.C).- Sea X un espacio métrico compacto con métrica ρ y $h: X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Supongamos existe un subconjunto de X invariante, cerrado y no abierto, A , y un entorno U de A tal que si $x \in U \setminus A$, $O(x) = \{h^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ no está contenido en U . Entonces existe $y \in X \setminus A$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(h^n(y), A) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \rho(h^n(y), A) = 0.$$

Ver [GH, Th 10.28].

2.7.D).- Sean $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ de C^2 , y K un subconjunto compacto invariante de $[0,1]$ que no contiene puntos críticos, puntos periódicos atractores, ni puntos periódicos no-hiperbólicos. Entonces K es un conjunto hiperbólico [Ma,p.497;Me,p.146]. Observar que si $f|_K: K \rightarrow K$

es un homeomorfismo con K un conjunto hiperbólico entonces $f^n|_K$ es un homeomorfismo localmente expansivo para algún n y por tanto, por 2.7.A, K es un conjunto finito.

2.7.E).- Sea f de C^2 con un número finito de puntos críticos todos ellos no-planos y siendo al menos uno un punto extremo. Entonces el período de todas sus órbitas periódicas linealmente estables es acotado [Me,p.157]. En particular, si todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos, el número de las órbitas periódicas linealmente estables de f es finito. (Si f tuviese una infinidad de puntos periódicos linealmente estables todos los puntos de acumulación de este conjunto deben de ser puntos periódicos no-hiperbólicos. Para ver esto basta considerar la aplicación f^N siendo N una cota conveniente de los períodos de los puntos periódicos linealmente estables, y tener en cuenta que dichos puntos son aislados.)

Teorema 2.8.-

Para cada $N > 0$, sea C_N^2 el conjunto de aplicaciones en $C^2([0,1])$ que tienen a lo sumo N puntos críticos todos ellos no-planos. Si $f \in C_N^2$, sea E un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ tal que $f|_E$ es un homeomorfismo. En un subconjunto G_δ -denso de C_N^2 , $\omega(f|_E)$ es finito excepto si existe $c \in C(f) \cap E$ tal que $c \in \omega(c)$ y $f|_{\omega(c)}$ es un homeomorfismo minimal de un conjunto infinito.

Observación 2.9.-

Si $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ es un endomorfismo invertible, cualquier órbita de f es asintótica a un punto fijo ó a una

órbita periódica de período dos de f .

Observación 2.10.-

Nótese que si $\omega(f|_E)$ es finito entonces, como consecuencia de 2.7.B, $\omega(f|_E)$ es una colección finita de órbitas periódicas.

Demostración del teorema 2.8.-

Fijemos $N > 0$ arbitrario. Sea $A_N = \{f \in C_N^2 / \text{ todos los puntos periódicos de } f \text{ son hiperbólicos}\}$. Por [Sh;Me,p.122] sabemos que la propiedad de tener todos los puntos periódicos hiperbólicos es genérica en $C^2([0,1])$, y por tanto también en C_N^2 , es decir A_N contiene un subconjunto G_δ -denso.

Sean $f \in A_N$ y $E \subset [0,1]$ verificando las hipótesis del enunciado. Si la aplicación f no tiene puntos extremos, de la observación 2.9 y 2.7.E, se sigue que, genéricamente, $\omega(f)$ es finito. Por tanto sólo ha de estudiarse el caso en que f no es invertible, y por ello, en lo sucesivo, supondremos siempre que f tiene al menos un punto extremo y que $\omega(f|_E)$ es infinito.

Sea P el conjunto de puntos periódicos linealmente estables de f , que, por 2.7.E, es finito. Consideremos $E' = E \setminus \bigcup_{p \in P} B(p)$, donde $B(p)$ es la cuenca de atracción de p y por tanto es un abierto; E' es entonces un subconjunto cerrado e invariante de $[0,1]$. Además, puesto que $\omega(f|_E)$ es infinito y P es finito, se verifica $E' \neq \emptyset$ y $\omega(f|_{E'})$ infinito. Llamaremos $c(E') = C(f) \cap E'$.

Para un mejor seguimiento, dividiremos la prueba en varios etapas.

1.- $C(E') \neq \emptyset$.

Suponiendo lo contrario, E' sería un conjunto compacto invariante que no contiene puntos críticos, órbitas periódicas atractoras ni puntos periódicos no-hiperbólicos, por lo que de 2.7.C, 2.7.A y 2.7.D se inferiría que $\omega(f|_{E'})$ es finito, lo cual es una contradicción.

2.- Si $c \in C(E')$, $\omega(c)$ es infinito.

Suponiendo que existe $c \in C(E')$ tal que $\omega(c)$ es finito, entonces $\omega(c)$ es una órbita periódica, la cual, teniendo en cuenta el lema 2.5 y al ser $f|_E$ homeomorfismo, es necesariamente linealmente estable, lo cual contradice la definición de E' .

3.- Para todo $c \in C(E')$, $\omega(c) \cap C(f) \neq \emptyset$.

Si $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$, por 2.7.D y 2.7.A, $\omega(c) \subset E'$ es hiperbólico y por tanto finito, lo que contradice 2.

4.- Existe $c_0 \in C(E')$ tal que $c_0 \in \omega(c_0)$.

En un primer momento, pensemos que $C(E') = \{c\}$. Si $c \notin \omega(c)$ entonces $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$, en contradicción con 3.

Si en $C(E')$ hay más de un punto, fijemos $c_0 \in C(E')$ y sea $c_1 \in \omega(c_0) \cap C(f)$. Si $c_1 \neq c_0$, consideremos $c_2 \in \omega(c_1) \cap C(f)$. Si c_2 coincide con c_1 o c_0 el problema quedaría resuelto, en caso contrario $c_2 \in \omega(c_1)$, $c_1 \in \omega(c_0)$ y ha de existir $c_3 \in \omega(c_2) \cap C(f)$. Puesto que $C(f)$ es finito, este proceso no puede continuar con $c_j \notin \{c_0, c_1, \dots, c_{j-1}\}$ para todo j , por lo cual se concluye 4.

5.- Si $c_0 \in C(E')$ es tal que $c_0 \notin \omega(c_0)$, existe $c_1 \in \omega(c_0) \cap C(f)$ verificando $c_1 \in \omega(c_1)$.

Consecuencia inmediata de 4.

6.- Existe $c_0 \in C(E')$ tal que $c_0 \in \omega(c_0)$ y $f|_{\omega(c_0)}$ es un homeomorfismo minimal con $\omega(c_0)$ un conjunto infinito. Sea $c \in C(E')$ tal que $c \in \omega(c)$, claramente $f|_{\omega(c)}$ es homeomorfismo y $\omega(c)$ es infinito. Sea $x \in \omega(c)$ y supongamos $c \notin \omega(x)$, entonces existe $c_1 \in \omega(x) \cap C(f)$ y por tanto $c_1 \in \omega(c)$ (nótese que en otro caso, es decir si $\omega(x) \cap C(f) = \emptyset$, $\omega(x)$ es finito y consecuentemente un una órbita periódica inestable contenida propiamente en $\omega(c)$, lo cual es una contradicción, usando lema 2.6, con el carácter homeomórfico de $f|_{\omega(c)}$). Si $c_1 \notin \omega(c_1)$, existe $c_2 \in \omega(c_1)$ tal que $c_2 \in \omega(c_2)$. Entonces $c_2 \in \omega(c_2) \subset \omega(x) \subset \omega(c)$. Si $c \notin \omega(c_2)$, consideremos $x_2 \in \omega(c_2)$. En caso de que $c_2 \notin \omega(x_2)$ de forma análoga a la anterior se tiene garantizada la existencia de un punto crítico c_3 tal que $c_3 \in \omega(c_3) \subset \omega(x_2) \subset \omega(c_2) \subset \omega(x) \subset \omega(c)$. Siguiendo este razonamiento, teniendo en cuenta que $C(f)$ es finito, concluimos que existe $c_j \in C(E')$ tal que $c_j \in \omega(c_j)$, de forma que si $y \in \omega(c_j)$ entonces $\overline{\text{orb}(y)} = \omega(c_j)$, por consiguiente $f|_{\omega(c_j)}$ es un homeomorfismo minimal. Con lo que queda finalizada la demostración. ■

Observación 2.11.-

Si en el enunciado del Teorema 2.8 cambiamos C_N^2 por el subconjunto de $C^2([0,1])$ formado por las aplicaciones que tienen todos sus puntos críticos no degenerados, el resultado continúa siendo válido. (Notar que un punto crítico no degenerado es necesariamente un extremo relativo de la aplicación).

Observación 2.12.-

Construimos un contraejemplo que muestra que el teorema

anterior no es válido si rebajamos las hipótesis de regularidad.

Sea $f:S^1 \rightarrow S^1$ un contraejemplo de Denjoy de clase $C^{1+\varepsilon}$. Recordemos que un difeomorfismo $f:S^1 \rightarrow S^1$ es un contraejemplo de Denjoy si el conjunto de puntos no-errantes de f es un conjunto de Cantor. (La demostración de su existencia puede verse en [He]). Sea f un tal difeomorfismo y J un intervalo errante de f , es decir tal que $\{J, f(J), f^2(J), \dots\}$ son disjuntos dos a dos y el conjunto ω -límite de J no se reduce a una órbita periódica. Sea $x \in J$ y la isometría $\phi = \phi_x: S^1 \setminus \{x\} \rightarrow (0,1)$. Consideremos la aplicación de $[0,1]$ en si mismo definida de forma usual por $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $(0,1)$ y $g(0)=g(1)=\phi(f(x))$. Evidentemente, $I=\phi(f(J))$ es un intervalo errante de g y $\bigcup_{k \geq 0} g^k(I)$ no interseca a $U=\phi(f^{-1}(J))$. Podemos modificar g en U como indica la figura 2.5 para obtener una aplicación $h:[0,1] \rightarrow [0,1]$ que coincide con g fuera de U , y para la cual I es también errante. Obtenemos de esta forma una aplicación que no verifica el teorema.

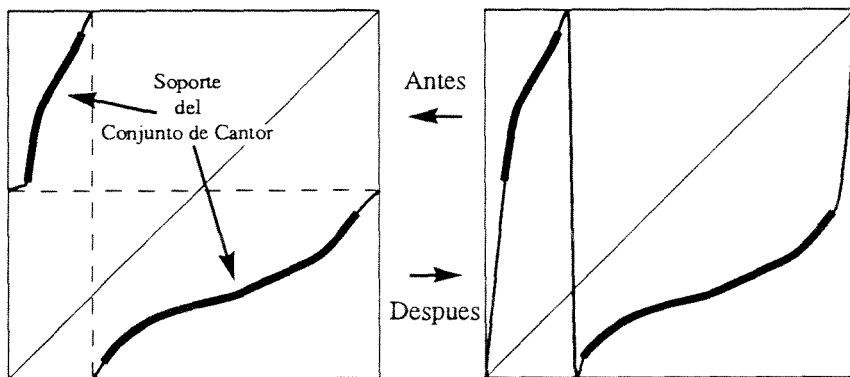


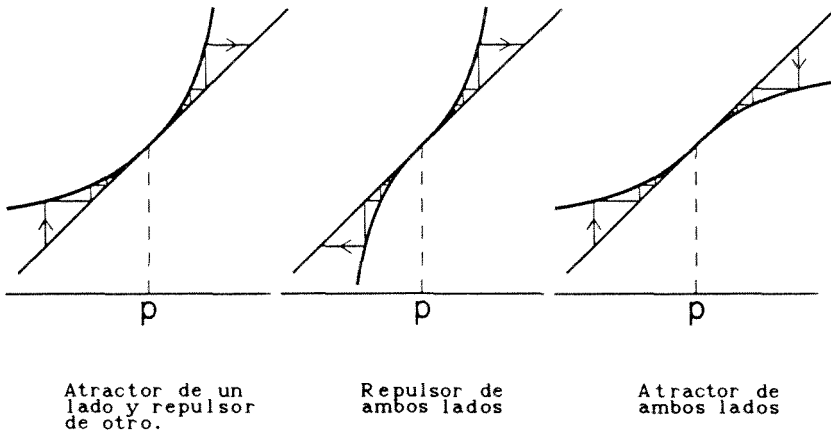
Figura 2.5

Nos planteamos en este momento la siguiente cuestión: ¿puede el teorema 2.8 seguir siendo válido en el caso de existencia de algún punto periódico no-hiperbólico?. El Teorema 2.15 es una extensión del anterior resultado a aplicaciones que tienen un número finito de puntos periódicos no-hiperbólicos de un cierto tipo.

Definición 2.13.-

Sea $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ un C^1 -endomorfismo y p un punto periódico de período n no-hiperbólico de f . Diremos que p **satisface la propiedad "*" si existe un intervalo abierto U conteniendo a p tal que $|Df^n(x)| \neq 1$ para todo $x \in U \setminus \{p\}$.**

Si p satisface la propiedad "*" y $|Df^n(x)| < 1$ (respectivamente, $|Df^n(x)| > 1$) para $x \in U \setminus \{p\}$, diremos que p es un atractor (respectivamente, un repulsor) de ambos lados. En otro caso p es un atractor de un lado y repulsor de otro.



Nótese que sólo en el caso (a) la cuenca inmediata de

atracción que contiene a p es un semiabierto que contiene a p en la frontera.

Sea $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ de C^1 y M un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ tal que todos los puntos periódicos no-hiperbólicos de M satisfacen la propiedad " $*$ ". Por conveniencia en la notación convenimos que si $p \in M$ es un punto periódico no-hiperbólico atractor de exactamente un lado entonces $B(p)$ no contiene a $\text{orb}(p)$. Sea $S = S_f(M) = \{p \in M / p \text{ es un punto periódico linealmente estable o no-hiperbólico atractor de al menos un lado}\}$. Llamemos $B_f(M) = \bigcup_{p \in S} B(p)$, y H al conjunto de puntos no-hiperbólicos de M .

Lema 2.14.-

Sea $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ de C^2 y M un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ que no contiene puntos críticos de f y cada punto periódico no-hiperbólico de f en M satisface la propiedad " $*$ ", tal que $f|_M: M \rightarrow M$ es un homeomorfismo. Si $M \setminus B_f(M) \neq \emptyset$, entonces:

- (i) $f(M \setminus B_f(M)) = M \setminus B_f(M)$,
- (ii) $M \setminus B_f(M)$ es cerrado,
- (iii) si $x \in (M \setminus B_f(M)) \setminus H$ entonces $\omega(x) \cap H = \emptyset$,
- (iv) si $p \in H \setminus B_f(M)$, $\text{orb}(p)$ es aislado en $M \setminus B_f(M)$.

Demostración.-

Supongamos que $M \setminus B_f(M) \neq \emptyset$. De la definición de $M \setminus B_f(M)$, teniendo en cuenta que $f|_M$ es homeomorfismo, se deduce inmediatamente (i). Además, puesto que $B(p)$ es un abierto para cualquier $p \in S$ se sigue (ii). (Nótese que si p es un punto periódico de período n linealmente estable entonces $B(p)$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$). Lo mismo ocurre si

p es no-hiperbólico atractor de ambos lados. En el caso en que p es no-hiperbólico atractor de exactamente un lado la componente de la cuenca inmediata de atracción de p es la unión de intervalos semiabiertos que tienen a $\text{orb}(p)$ en la frontera, puesto que convenimos que en este caso $B(p)$ no contiene a $\text{orb}(p)$, $B(p)$ es también en este caso un abierto).

Probaremos (iii). Sea $x \in (M \setminus B_f(M)) \setminus H$, y supongamos que $\omega(x) \cap H \neq \emptyset$, es decir que existe en M algún punto periódico p no-hiperbólico tal que $p \in \omega(x)$, y por tanto $\text{orb}(p) \subset \omega(x)$. Puesto que $x \in M \setminus B_f(M)$, $\omega(x) \subset M \setminus B_f(M)$, y necesariamente p es un punto repulsor de ambos o un sólo lado; lemas 2.5 y 2.6 son entonces aplicables siguiéndose de ellos que $\text{orb}(p) = \omega(x)$ o, equivalentemente, $p \in \text{orb}(x)$, lo cual implica, al ser $f|_M$ homeomorfismo, que $\text{orb}(x) = \text{orb}(p)$ y por consiguiente $x \in H$, lo cual es una contradicción.

Por último, supongamos que (iv) no se verifica; es decir, existe $p \in H \setminus B_f(M)$ no aislado en $M \setminus B_f(M)$. Aplicando 2.7.C cuando $X = M \setminus B_f(M)$, $h = f$, $A = \text{orb}(p)$, y U un entorno de $\text{orb}(p)$ en $M \setminus B_f(M)$ tal que si $x \in U \setminus A$, $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ no está contenido en U (que existe al ser p punto repulsor de al menos un lado), queda garantizada la existencia de $y \in (M \setminus B_f(M)) \setminus \text{orb}(p)$ tal que $\text{orb}(p) \subset \omega(y)$ o $\text{orb}(p) \subset \alpha(y)$. Notar que $y \notin H$ (en caso contrario, $\omega(y) = \alpha(y) = \text{orb}(p)$ y por tanto $\text{orb}(y) = \text{orb}(p)$, lo cual contradice lo anterior). De (iii), $\omega(y) \cap H = \emptyset$, por lo que $\text{orb}(p)$ no puede estar contenido en $\omega(y)$. Además, $\omega(y)$ es hiperbólico y consecuentemente es y un punto periódico (usando 2.7.D, 2.7.A, 2.7.B, y teniendo en cuenta que $f|_M$ es homeomorfismo). Entonces $\text{orb}(p) \subset \alpha(y) = \text{orb}(y)$, lo que implica $y \in H$, contradicción que viene de suponer que en U existen puntos de $M \setminus B_f(M)$ distintos de $\text{orb}(p)$.

■

Teorema 2.15.-

Sea $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ de C^2 con un número finito de puntos críticos. Sea E un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ que contiene a lo sumo un número finito de puntos periódicos linealmente estables y no-hiperbólicos, satisfaciendo estos últimos la propiedad "**", y tal que $f|_E$ es un homeomorfismo con $\omega(f|_E)$ un conjunto infinito. Entonces existe un punto crítico $c \in E \cap \omega(c)$ tal que $f|_{\omega(c)}$ es un homeomorfismo minimal en un conjunto infinito.

Demostración.-

Sea $C(f)$ el conjunto de puntos críticos de f . Probaremos inicialmente que $C(f) \cap E$ es no vacío. Para ello, consideremos, como en el lema 2.14, $M = E \setminus B_f(E)$. Puesto que $S_f(E)$ es finito y $\omega(f|_E)$ es un conjunto infinito entonces $E \setminus B_f(E)$ es no vacío y $\omega(f|_{E \setminus B_f(E)})$ es un conjunto infinito.

Supongamos que $C(f) \cap (E \setminus B_f(E)) = \emptyset$, si llamamos H al conjunto de puntos periódicos no-hiperbólicos de $E \setminus B_f(E)$, el cual es finito, se verifica que para cualquier $p \in H$, $\text{orb}(p)$ es aislada en $E \setminus B_f(E)$. Por tanto, $E \setminus (B_f(E) \cup H)$ es un conjunto cerrado invariante que no contiene ni puntos críticos, ni puntos periódicos linealmente estables, ni puntos periódicos no-hiperbólicos, por lo que, aplicando 2.7.D y 2.7.A, $E \setminus (B_f(E) \cup H)$ es finito y también lo será $\omega(f|_E)$, lo cual contradice la hipótesis. Se verifica entonces que $C(f) \cap (E \setminus B_f(E)) \neq \emptyset$.

Llamemos $E' = E \setminus B_f(E)$. Siguiendo las pautas del Teorema 2.8, se concluye la demostración. Nótese que las partes 2, 4 y 5 siguen siendo válidas aquí; sólo en 3 y 6 se plantea algún cambio, pues en ellas utilizamos el resultado D, y

para ello es necesario que ciertos conjuntos no contengan puntos periódicos no-hiperbólicos, cosa que ahora no se puede garantizar. No obstante, en 3, como consecuencia de lemas 2.5 y 2.6 y ser $f|_E$, homeomorfismo, $\omega(c)$ no contiene puntos críticos (en otro caso se llegaría a una contradicción). En 6 concluíamos que $\omega(x)$ era finito aplicando 2.7.A y 2.7.D; ahora se puede utilizar los mismos resultados si $\omega(x)$ no contiene puntos no-hiperbólicos, mientras que si en $\omega(x)$ existen puntos no-hiperbólicos obtenemos directamente, por lemas 2.5 y 2.6 y ser $f|_E$, homeomorfismo, que $\omega(x)$ es finito.

■

Corolario 2.16.-

Sea $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ una aplicación de C^3 con derivada Schwarciana negativa y un número finito de puntos críticos. Sea E un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ tal que $f|_E$ es homeomorfismo, $\omega(f|_E)$ es infinito. Existe un punto crítico $c \in E$ tal que $c \in \omega(c)$ y $f|_{\omega(c)}$ es un homeomorfismo minimal de un subconjunto infinito.

Recordar que la derivada schwarciana de una aplicación f está definida como, ver [Si],

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Demostración.-

Basta establecer la finitud del conjunto de puntos periódicos linealmente estables y no-hiperbólicos de f , lo cual es una consecuencia del resultado de Singer [Si] que asegura que cada uno de estos puntos debe contener un punto

crítico en su cuenca inmediata de atracción. (Al ser finito el conjunto de puntos no-hiperbólicos de f en $[0,1]$, estos inmediatamente satisfacen la propiedad "**")

■

Observación 2.17.-

Puesto que la aplicación cuadrática, $f_a(x)=1-ax$, tiene derivada Schwarciana negativa, el corolario 2.16 es aplicable.

Corolario 2.18.-

Sea f una aplicación analítica con un número finito de puntos críticos tal que todos los puntos periódicos no-hiperbólicos de f satisfacen la propiedad "**". Si E es un subconjunto cerrado invariante de $[0,1]$ tal que $f|_E$ es un homeomorfismo y $\omega(f|_E)$ es infinito, entonces existe $c \in C(f) \cap E$, $c \in \omega(c)$, tal que $f|_{\omega(c)}$ es un homeomorfismo minimal de un conjunto infinito.

Demostración.-

$C(f) \cap E \neq \emptyset$ pues en otro caso, por [Ma], E contiene un número finito de puntos periódicos linealmente estables y no-hiperbólicos, por lo que, haciendo una demostración análoga a la del teorema 2.15, $\omega(f|_E)$ es finito. El resto de la prueba sigue pasos similares a los del teorema 2.15.

■

- CAPITULO III -

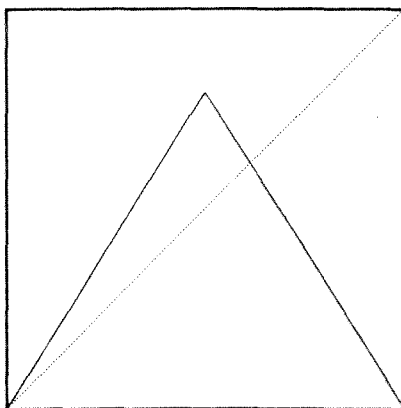
- ORBITAS CRITICAS DENSAS EN LA APLICACION " TENT " -

Nos interesamos en este capítulo en algunas propiedades de la familia de aplicaciones $tent$. Más concretamente, mostraremos que el conjunto de parámetros s para los cuales la órbita del punto crítico por f_s es densa es G_δ -denso en el intervalo de parámetros. Además, damos nuevas pruebas de que los conjuntos de parámetros periódicos y prefijos (ver definición 3.4) son densos.

III.1 Algunas generalidades sobre la aplicación tent.

Consideremos la familia de aplicaciones tent, es decir las aplicaciones lineales a trozos $f_s: [0,2] \rightarrow [0,2]$, $\sqrt{2} \leq s \leq 2$, definida por:

$$f_s(x) = \begin{cases} sx & 0 \leq x \leq 1 \\ s(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



- Figura 3.1 -

Estamos considerando el intervalo de parámetros $[\sqrt{2}, 2]$ por razones técnicas, nótese que si $1 < s \leq \sqrt{2}$, f_s^2 restringido a un apropiado intervalo es topológicamente conjugada a f_s (proposición 3.3) y por tanto los resultados más tarde enunciados son también válidos en el intervalo de parámetros $[1, \sqrt{2}]$.

Muchas de las propiedades de estas aplicaciones pueden ser expresadas en términos de sucesiones kneading [MT] de la aplicación. Introduciremos brevemente esta terminología.

Sea $\nu = \nu(s) = \nu_1 \nu_2 \dots$ la sucesión kneading de f_s , es decir el itinerario del punto crítico c , definido de la forma:

$$\nu_n = \begin{cases} L & \text{si } f_S^n(c) < c, \\ C & \text{si } f_S^n(c) = c, \\ R & \text{si } f_S^n(c) > c. \end{cases}$$

Relacionada con esta sucesión, consideramos la sucesión signatura $\sigma = \sigma(s) = \sigma_1 \sigma_2 \dots$, definida por $\sigma_1 = -1$ y

$$\sigma_{n+1} = \begin{cases} \sigma_n & \text{si } \nu_n = L \\ -1 & \text{si } \nu_n = C \\ -\sigma_n & \text{si } \nu_n = R \end{cases}$$

(nótese que σ es la sucesión de coeficientes de la coordenada invariante del punto crítico, repetida infinitas veces en el caso en que el punto crítico es periódico. Para más detalles ver [MT],[Str].).

Diremos que la sucesión kneading es periódica si existe $n > 0$ tal que $\nu_i = \nu_{i+n}$, para $i=1, \dots, n$. Es eventualmente periódica si existe n tal que la sucesión $\nu_n \nu_{n+1} \dots$ es periódica.

Incluimos unos resultados importantes sobre estas aplicaciones:

Lema 3.1.- (MS,1977)

La entropía topológica de f_s es $\log s$.

Teorema 3.2.- (MT)

Si f es una aplicación unimodal con $h(f) > 0$, entonces f es semiconjugada a f_s , para algún $s > 1$. Concretamente, existe una aplicación monótona, continua y sobre $g: I \rightarrow [0,2]$, llevando el punto crítico de f en el de f_s , tal que $g \circ f = f_s \circ g$.

Observaciones.-

1.- Resultados parciales en la misma dirección fueron probados por Parry [Pa].

2.- La entropía de f y f_s coinciden, es decir s es tal que $h(f)=\log s$.

3.-Esta semiconjugación no es en general una conjugación. De hecho, si f tiene un punto periódico atractor la semiconjugación colapsa a un punto todo la cuenca inmediata de atracción de dicho punto periódico.

Proposición 3.3.-

1.- Si $s \in (\sqrt{2}, 2]$ y $J \subset [0, 2]$ es un intervalo abierto. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_s \subset f_s^n(J)$.

2.- Si $\sqrt{2} < s^m \leq 2$, $m=1, 2^1, 2^2, \dots$, entonces el conjunto de puntos no errantes de f_s consiste en m intervalos disjuntos I_0, \dots, I_{m-1} y un número finito de órbitas periódicas. Además $f_s^m|_{I_k}$ es topológicamente conjugada a f_s^m .

Demostración.-

La prueba de este resultado puede verse en [Str] o [Me], no obstante, incluimos una idea de la misma.

Para cada entero positivo i se tiene uno de los dos hechos siguientes:

a.- $|f_s^{i+1}(J)| \geq \frac{s^2}{2} |f_s^{i-1}(J)|$,

b.- $f_s^{i+1}(J) = I_s$.

Para ver esto, sea L un intervalo en $[0, 2]$. Entonces $|f_s(L)| \geq s|L|$ si $1 \notin L$ y $|f_s(L)| \geq \frac{s^2}{2}|L|$ si $1 \notin f_s(L) \cap L$. Además, $1 \in f_s(L) \cap L$ implica que 1 y $f_s(1)$ están en $f_s(L)$ y por tanto

que $I_S \subset f_S^2(L)$. De ahí que (a) o (b) han de ser verdad.

Por otro lado, puesto que $\frac{S^2}{2} > 1$, (a) no puede ser cierto para todo i , por lo que se sigue (1). (2) se demuestra por inducción a partir de (1).

■

Del resultado previo sobre semiconjugación se tiene un buen conocimiento de la dinámica de aplicaciones unimodales, obteniéndose una descomposición de la aplicación en aplicaciones más simples (usando renormalización, ver [Str], [Me]). Esta descomposición fue probada primeramente por Jonker y Rand en [JR]

III.2 Conjunto de parámetros densos

En lo sucesivo denotaremos por $\text{orb}_S(1)$ la órbita del punto crítico por iteración de la aplicación f_S , es decir el conjunto $\{f_S^n(1), n \in \mathbb{N}\}$, y por I_S el intervalo invariante $[f_S^2(1), f_S(1)]$. Notemos que I_S es el núcleo de este sistema unidimensional, es decir todo es atraído por este intervalo excepto los puntos 0 y 2 (prop.3.3). Consideramos el siguiente conjunto:

$$C = \{ s \in [\sqrt{2}, 2] \mid \text{orb}_S(1) \text{ es denso en } I_S \}$$

El objetivo de este capítulo es el de dar respuesta a la cuestión planteada por J. Martin durante la "Arcata Conference on Continuum Theory and Dynamical Systems (1989)" ¿ Es el conjunto C denso en $[\sqrt{2}, 2]$?. De hecho probaremos que C es G_δ -denso en $[\sqrt{2}, 2]$.

Definición 3.4.-

Diremos que un parámetro $s \in [0, 2]$ es **periódico** si $f_s^n(1) = 1$, para algún $n \in \mathbb{N}$, y es **prefijo** si el punto fijo $z_s = 2s/(1+s)$ de f_s está en la órbita de 1 por iteración de f_s .

En orden a mostrar algunas de las propiedades de como la órbita del punto crítico $c=1$ de las aplicaciones f_s varía con respecto al parámetro s , introducimos las funciones φ_n , $n \geq 1$, definidas en $[\sqrt{2}, 2]$ por $\varphi_n(s) = f_s^n(1)$. Un fácil cálculo muestra que cada φ_n es una aplicación continua y polinómica a trozos. Los dos resultados siguientes son inmediatos y pueden verse en [CKY].

Lema 3.5.-

El conjunto de extremos interiores de los trozos polinomiales de φ_n es precisamente el conjunto de parámetros con período más pequeño que n .

Lema 3.6.-

φ_n es diferenciable excepto en los parámetros con período más pequeño que n .

La prueba del siguiente lema sigue las líneas de [CKY].

Lema 3.7.-

Existe una constante positiva λ tal que para cada $s \in [\sqrt{2}, 2]$ y cada $n > 0$ para el cual $\varphi_n'(s)$ existe se verifica

$$\lambda s^n \leq |\varphi_n'(s)| \leq 3 s^n.$$

Demostración.-

Supongamos $\varphi_n'(s)$ existe, entonces:

$$\varphi'_{n+1}(s) = s \varphi'_n(s) + \varphi_n(s) \quad \text{si } \varphi_n(s) \leq 1$$

$$\varphi'_{n+1}(s) = -s \varphi'_n(s) + (2 - \varphi_n(s)) \quad \text{si } \varphi_n(s) \geq 1$$

Por tanto en ambos casos:

$$|\varphi'_{n+1}(s)| \leq s|\varphi'_n(s)| + 1 \leq \dots \leq s^n |\varphi'_1(s)| + s^{n-1} + \dots + 1 \leq \frac{s^{n+1}}{s-1}$$

puesto que $s \in [\sqrt{2}, 2]$, se sigue una de las desigualdades.

Supongamos que existe $b > 0$ tal que

$$|\varphi'_n(s)| \geq b + \frac{1}{s-1}$$

entonces

$$|\varphi'_{n+1}(s)| \geq sb + \frac{1}{s-1}$$

Mediante sencillos cálculos puede demostrarse la existencia de b para cualquier $s \in [\sqrt{2}, 2]$ si $n=8$, $\{|\varphi'_n(s)|, s \in [\sqrt{2}, 2], 1 \leq n \leq 7\}$ está acotado lejos del cero, y para $1 < n \leq 8$, $\varphi_n(s) \leq 1$. Con lo que se sigue la existencia de λ , y se concluye la prueba. ■

Usaremos la densidad de los parámetros periódicos y prefijos en $[\sqrt{2}, 2]$, resultados que pueden verse en [CKY], pero que por conveniencia incluimos dando una nueva prueba más sencilla.

Lema 3.8. –

Los parámetros periódicos son densos en $[\sqrt{2}, 2]$.

Demostración. –

Supongamos que existe algún $U = [\alpha, \beta] \subset [\sqrt{2}, 2]$ tal que U no contiene parámetros periódicos. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi'_n(s)| > \frac{2}{\beta - \alpha}$$

para cada $s \in U$ en el que $\varphi'_n(s)$ existe. (La existencia de un tal n es precisamente el lema anterior.). Por tanto si $\varphi'_n(s)$ existe para todo $s \in U$, entonces por el teorema del valor medio, existe $s_0 \in U$ tal que:

$$|\varphi'_n(s_0)| = \left| \frac{\varphi_n(\beta) - \varphi_n(\alpha)}{\beta - \alpha} \right|$$

Pero, puesto que $|\varphi_n(\beta) - \varphi_n(\alpha)| \leq 2$, se tiene $|\varphi'_n(s_0)| \leq \frac{2}{\beta - \alpha}$. Lo cual es una contradicción. Por tanto existe $t \in U$ tal que $\varphi'_n(t)$ no existe, es decir tal que $f_t^m(1) = 1$ para algún $m < n$, por lo que t es un parámetro periódico en U . ■

Si $\alpha \neq \beta$ son números reales, denotaremos por $\langle \alpha, \beta \rangle$ el intervalo cuyos extremos son α y β .

Lema 3.9-

Los parámetros prefijos son densos en $[\sqrt{2}, 2]$.

Demostración. -

Sea $U \subset [\sqrt{2}, 2]$ un intervalo abierto. Puesto que los parámetros periódicos son densos podemos elegir $t \in U$ tal que existe m con $\varphi_m(t) = 1$ y $\varphi_j(t) \neq 1$ para $0 < j < m$. Sea (j_1, j_2, \dots, j_m) la permutación de enteros de 1 a m tal que

$$\varphi_{j_1}(t) < \varphi_{j_2}(t) < \dots < \varphi_{j_m}(t).$$

(Por ejemplo, si $m=3$ y $\varphi_2(t) < \varphi_3(t) < \varphi_1(t)$, entonces $j_1=2$, $j_2=3$ y $j_3=1$. De hecho, siempre se verifica $j_1=2$ y $j_m=1$ pues $[f_s^2(1), f_s(1)]$ es invariante). Por la primera parte de la

proposición 3.3 sabemos que las preimágenes del punto fijo z_t por iteración de f_t son densas en $[0,2]$, (en efecto, si V es un intervalo abierto arbitrario de $[0,2]$, existe n tal que $z_t \in I_t \subset f_t^n(V)$, lo que implica que $f_t^n(x) = z_t$, para algún x en V). Por tanto, para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$, es posible encontrar z_i , preimagen de z_t bajo f_t , tal que $\varphi_{j_i}(t) < z_i < \varphi_{j_{i+1}}(t)$. Puesto que $f_s(x)$ varía continuamente en x y s , existen $\varepsilon > 0$ y aplicaciones continuas g_1, \dots, g_{m-1} , definidas en $[t, t+\varepsilon) \subset U$ tal que para cada i , $1 \leq i \leq m-1$, se verifica:

$$1) g_i(t) = z_i,$$

2) para cada $s \in [t, t+\varepsilon)$, $g_i(s)$ es una preimagen de $z_s = 2s/(1+s)$ por f_s ,

$$3) g_i(s) \neq g_j(s), \text{ para } i \neq j \text{ y } s \in [t, t+\varepsilon).$$

Supongamos que no existen parámetros prefijos en $[t, t+\varepsilon)$. Sea $t_1 \in (t, t+\varepsilon)$ tal que la sucesión kneading de t_1 es aperiódica y no eventualmente periódica. (Podemos tener esto puesto que los parámetros periódicos y eventualmente periódicos son algebraicos y por tanto numerables [Pr])

Sean

$$\Delta_1 = [\varphi_2(t_1), g_1(t_1)], \quad \Delta_2 = [g_1(t_1), g_2(t_1)], \dots,$$

$$\Delta_m = [g_{m-1}(t_1), \varphi_1(t_1)].$$

Notar que $g_1(t_1) < g_2(t_1) < \dots < g_m(t_1)$. La no existencia de parámetros prefijos en $[t, t+\varepsilon)$ implica que para cada par de enteros no negativos p, q y cada i , $1 \leq i \leq m$, se tiene que algún intervalo

$$W_{p,q,i} = \langle \varphi_{pm+j_i}(t_1), \varphi_{qm+j_i}(t_1) \rangle$$

es tal que $W_{p,q,i} \subset \Delta_r$, para algún r . (Notar que si

$\varphi_m(s)=g_i(s)$ para algún s, m, i , entonces s es un parámetro prefijo). Sea i_0 tal que $1 \in \Delta_{i_0}$. Entonces, si $i \neq i_0$, f_{t_1} es monótona en Δ_i , y por tanto

$$f_{t_1}(W_{p,q,i}) = \langle \varphi_{pm+j_r}(t_1), \varphi_{qm+j_r}(t_1) \rangle$$

está contenido en Δ_r , para algún r . Para $i=i_0$, f_{t_1} puede no ser monótona en W_{p,q,i_0} . Sin embargo

$$f_{t_1}(W_{p,q,i_0}) = \langle \varphi_{(p+1)m+1}(t_1), \varphi_{(q+1)m+1}(t_1) \rangle \subset \Delta_m$$

ó

$$f_{t_1}(W_{p,q,i_0}) = \langle \min\{\varphi_{(p+1)m+1}(t_1), \varphi_{(q+1)m+1}(t_1)\}, \varphi_1(t_1) \rangle \subset \Delta_m.$$

Por tanto, si $k_1 \neq k_2$ son enteros positivos, entonces el intervalo no degenerado $W = \langle \varphi_{k_1 m+2}(t_1), \varphi_{k_2 m+2}(t_1) \rangle$ tiene la propiedad que para cada $n \geq 0$, existe $i_n \in \{1, \dots, m\}$ verificando $f_{t_1}^n(W) \subset \Delta_{i_n}$.

Por lo que I_s no está contenido en $f_{t_1}^n(W)$ para ningún n , en contradicción con el lema 2, (ver figura 3.2).

■

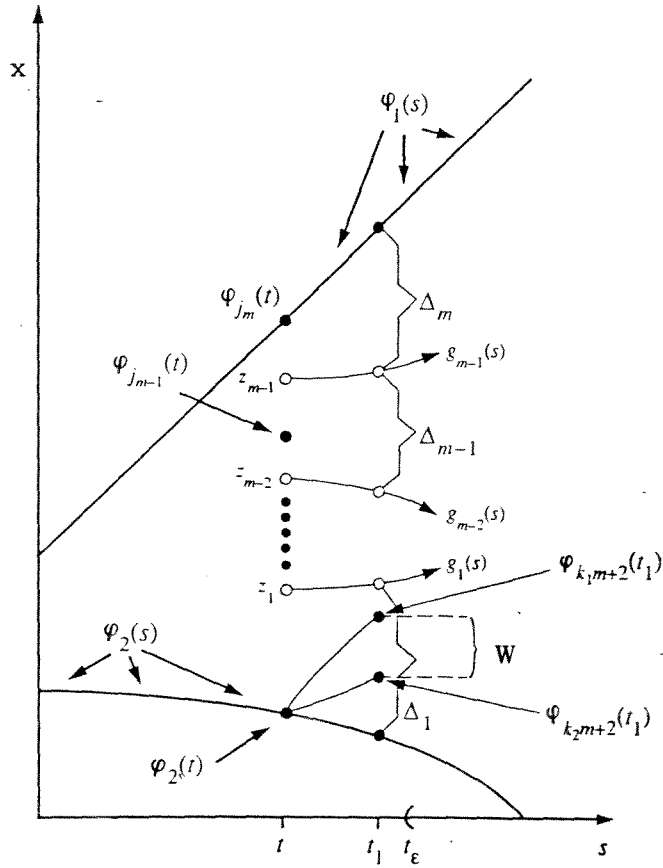
Lema 3.10.-

Para cada intervalo abierto, V , en $(\sqrt{2}, 2)$, existe un entero n tal que

$$I_{\sqrt{2}} \subseteq \varphi_n(V) \cup \varphi_{n+1}(V).$$

Demostración.-

Elegimos un parámetro periódico s_0 en V y un parámetro prefijo t en V tal que $t > s_0$, es decir verificando $f_{s_0}^m(1)=1$ y $f_t^j(1)=2t/(1+t)$. Sea k un entero tal que $km > j$. Entonces



- Figura 3.2 -

$$\varphi_{km+1}(s_0) = f_{s_0}(1) = s_0,$$

mientras que

$$\varphi_{km+1}(t) = \frac{2t}{1+t},$$

y

$$\varphi_{km+2}(s_0) = f_{s_0}^2(1) \quad , \quad \varphi_{km+2}(t) = \frac{2t}{1+t}.$$

Es decir:

$$[2t/(1+t), f_{s_0}^2(1)] \subset \varphi_{km+1}(V) \quad \text{y} \quad [f_{s_0}^2(1), 2t/(1+t)] \subset \varphi_{km+2}(V)$$

lo que implica

$$[f_{s_0}^2(1), f_{s_0}(1)] \subset \varphi_{km+1}(V) \cup \varphi_{km+2}(V).$$

La demostración del lema se concluye teniendo en cuenta que

$$I_{\sqrt{2}} \subset I_{s_0}.$$

Finalmente, el resultado principal de esta sección:

Teorema 3.11.-

El conjunto C es G_δ -denso en $[\sqrt{2}, 2]$.

Demostración.-

Para cada $r \in I_{\sqrt{2}} \cap \mathbb{Q}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_{r, 1/n} = \{s \in (\sqrt{2}, 2) / \text{orb}_s(1) \cap (r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}) \neq \emptyset\}$$

Puesto que $\varphi_m(s)$ es una aplicación continua en s , para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_{r, 1/n}$ es abierto. Por el lema 3.10

siguimos que $U_{r, 1/n}$ es denso en $(\sqrt{2}, 2)$.

De la prop. 3.3 se sigue que si la órbita de 1 por f_s es densa en $I_{\sqrt{2}}$, entonces es también densa en I_s , $s \in [\sqrt{2}, 2]$, por lo que

$$C = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap I_{\sqrt{2}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{r, 1/n}.$$

Como es una intersección numerable de subconjuntos abiertos densos de $[\sqrt{2}, 2]$, el conjunto C es G_δ -denso en $[\sqrt{2}, 2]$. Esto prueba el teorema.

Observacion.-

La teoría de renormalización de duplicación de período esta totalmente estudiada en esta familia de aplicaciones [CT] (y como consecuencia se tiene la prop. 3.3). Usando esto, el teorema 3.11 implica inmediatamente que el conjunto C' de valores del parametro para los cuales la órbita del punto crítico es densa en la unión de los intervalos que forman el conjunto no errante es G_δ -denso en [1,2].

- BIBLIOGRAFIA -

- [AKM] R.L.Adler, A.C.Konheim, M.H.McAndrew. *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) 309-319.
- [ALS] L.Alsedà, J.Llibre, R.Serra. *Minimal periodic orbits for continuous maps of the interval*. Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984) 595-627.
- [ALMT] L.Alsedà, J.Llibre, M.Misiurewicz, C.Tresser. *Periods and entropy for Lorenz-like maps*, Ann. Inst. Fourier, 39 (1989) 4 929-952.
- [Be] C.Bernhardt. *Simple permutations with order a power of two*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4 (1984) 179-186.
- [Bl1] L.Block. *Homoclinic period of mapping of the interval*, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978) 576-580.
- [Bl2] L.Block. *Simple periodic orbits of mappings of the*

- interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 254 (1979) 391–398.
- [BC] L.Block, E.M.Coven. *ω -limit sets for maps of the interval*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 6 (1986) 335–344.
- [BH] L.Block, D.Hart. *The bifurcation of periodic orbits of one-dimensional maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2 (1982) 125–129.
- [BF] R.Bowen, J.Franks. *The periodic points of maps of the disk and the interval*, Topology 15 (1976) 337–342.
- [BOT] K.M.Brucks, V.Otero-Espinar, C.Tresser. *Homeomorphic restrictions of smooth endomorphisms of an interval*. Ergod. Th. & Dynam. Sys (en prensa).
- [BDOT] K.M.Brucks, B.Diamond, M.V.Otero-Espinar, C.Tresser. *Dense orbits of critical points for the tent maps*, Contemporary Mathematics AMS 117 (1991) 57–61.
- [BORT] H.Bass, V.Otero Espinar, D.Rockmore, C.Tresser. *Dynamics on the interval and group actions on rooted trees*. En preparación.
- [CE] P.Collet, J.P.Eckmann. *Iterated maps of the interval as dynamical systems*, Birkhauser Boston (1980).
- [CEp] M.Campanino, H.Epstein. *On the existence of Feigenbaum's fixed point*, Comm. Math. Phys. 79 (1981) 261–302.
- [CL] P.Collet, A.Lesne. *Renormalization group analysis of some dynamical systems with noise*, J. Statist. Phys 57 (1989) 967–992.
- [CT] P.Couillet, C.Tresser. *Itération d'endomorphismes et groupe de renormalisation*, J Physique C5, 25, (1978).
Itérations d'endomorphismes et groupe de

- renormalisation*, C. R. Acad. Sci. Paris, 287, (1978).
- [CEK] P.Collet, J.P.Eckmann, H.Koch. *Period doubling bifurcations for families of maps on R^n* , J. Stat. Phys. 25 (1981) 1-14.
- [CER] M.Campanino, H.Epstein, D.Ruelle. *On Feigenbaum's functional equation*, Topology 21 (1982) 125-129.
- [CKY] E.M.Coven, I.Kan, J.A.Yorke. *Pseudo-orbit shadowing in the family of tent maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988) 227-241.
- [Fe] M.Feigenbaum. *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys. 19 (1978) 25-52. 21 (1979) 669-706.
- [FFS] V.V.Fedorenko, A.N.Sarkovskii, J.Smital. *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990) 141-148.
- [FKS] M.Feigenbaum, L.P.Kadanoff, S.J.Shenker. *Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalisation group analysis*, Physica D 5 (1982) 370-386.
- [Ga] J.M.Gambaudo. *Ordre, désordre et frontière des systèmes Morse-Smale*, Tesis Univ. de Niza, 1987.
- [Gu] J.Guckenheimer. *Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys. 70 (1979) 133-160.
- [GH] W.H.Gottschalk, G.A.Hedlund. *Topological Dynamics*, AMS Coll. Pub. V 36 (1955).
- [GLT] J.M.Gambaudo, J.E.Los, C.Tresser. *A horseshoes for the doubling operator: topological dynamics for metric universality*, Phys. Lett. A 123 (1987) 60-64.

- [GOI] J.Guckenheimer, G.Oster, A.Ipaktchi. *Dynamics of density dependent population models*, J. Math. Bio., 4, (1977), 101-147.
- [GLOT] P.Glendinning, J.E.Los, M.V.Otero-Espinar, C.Tresser. *Dynamique symbolique pour la renormalisation des endomorphismes d'entropie nulle de l'intervalle*, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 307 (1988) 607-612.
- [He] M.R.Herman. *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations*, Pub.Math. I.H.E.S. 49 (1979) 5-234.
- [HP] M.Hirsch, C.Pugh. *Stable manifolds and hyperbolic set*, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. 14 AMS (1970) 122-164.
- [JR] L.Jonker, D.Rand. *Bifurcation in one-dimension I. The non-wandering set*, Invent. Math. 62 347-365, *Bifurcation in one-dimension II. A versal model for bifurcation*, Invent. Math. 63 1-15, (1981)
- [La] A.Lasota. *Ergodic problems in biology*, Astérisque 50 (1977) 239-250.
- [Ln] O.E.Lanford III. *A computer assisted proof of the Feigenbaum conjecture*. Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 427-434.
- [Lo] E.N.Lorenz. *On the prevalence of aperiodicity in simple systems*, Lect. Notes Math. 755 (1979) 53-77.
- [LY] T.Li, J.A.Yorke. *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82 (1975) 985-992.
- [LLF] A.Libchaber, C.Laroche, S.Fauve. J. Phys. Lettres 43 (1982).

- [Ma] R.Mañe. *Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics*, Comm. Math. Phys. 100 (1985) 495-524, and Erratum, Comm. Math. Phys. 112 (1987).
- [May] R.B.May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261 (1976) 459-467.
- [Me] W.de Melo. *Lectures on one-dimensional dynamics*,⁰ Colóquio Brasileiro de Matemática 1989.
- [Mii] M.Misiurewicz. *Horseshoes for mapping of the interval*, Bull. Acad. Pol. Ser. Sci. Math. 27 (1979) 167-169.
- [Miz] M.Misiurewicz. *Absolutely continuous measures for certain maps of an interval*, Publ. Math. IHES 53 (1980) 17-51.
- [Mi3] M.Misiurewicz. *Invariant measures for continuous transformations of $[0,1]$ with zero topological entropy*. Lect. Notes in Math. 729 (1979) 144-152.
- [Mu] P.Mumbrú. *Estructura periódica i entropia topológica de les aplicacions bimodals*, Ph.D.Tesis, Barcelona (1987).
- [MS] M.Misiurewicz, W.Slenk. *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Mathematica 67 (1980) 45-68.
- [MaT] R.S.Mackay, C.Tresser. *Boundary of chaos for bimodal maps of the interval*, Prepublicación Warwick (1984), Bull. London Math. Soc. 37 (1988) 164-181.
- [MZ] R.S.Mackay, J.B.J.van Zeijts. *Period doubling for bimodal maps: a horseshoe for a renormalisation operator*, Nonlinearity 1 (1988) 253-277.
- [MT] J.Milnor, W.Thurston. *On iterated maps of the*

- interval*, Preprint, Princeton 1977. Lect. Notes in Math. 1342 (1988) 465-563.
- [Ni] Z.Nitecki. *Topological dynamics on the interval*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. vol.II Proceedings of the Special Year Maryland 1979-1980 Progress in Math. Birkhauser, Boston (1982).
- [OT] M.V.Otero-Espinar, C.Tresser. *Global complexity and essential simplicity: a conjectural picture of the boundary of chaos for smooth endomorphisms of the interval*, Physica D 39 (1989), 163-168.
- [ORSS] S.Ostlund, D.Rand, J.Sethna, E.D.Siggia. *Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems*, Physica D 8 (1983) 303-342.
- [Pa] W.Parry. *Symbolic dynamics and transformations of the unit interval*. Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966) 368-378.
- [Pr] C.Preston. *Iterates of Piecewise Monotone Mappings on an Interval*, Lect. Notes in Math. 1347 (1988).
- [PM] J.Palis, W.de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag (1982).
- [PTT] I.Procaccia, S.Thomae, C.Tresser. *First-return maps as a unified renormalisation scheme for dynamical systems*, Phy. Review A 35 4 (1987) 1884-1900.
- [Ra] D.Rand. *Universality and Renormalisation in Dynamical Systems*, New Directions in Dynamical Systems, LMS Lectures Note ser.127 Cambridge Univ.Press. (1988), 1-56.

- [S1] D.Sullivan. Aparecerá.
- [S2] D.Sullivan. *Quasiconformal Homeomorphisms in Dynamics Topology and Geometry*. Proc. of the International Congress of Math. Berkeley (1986).
- [Sa1] A.N.Sarkovskii. *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, Ukr. Mat. Z. 16 (1964) 61-71.
- [Sa2] A.N.Sarkovskii. *Attracting and attracted sets*, Soviet. Math.-Doklady 6, (1965), 268-270.
- [Sa3] A.N.Sarkovskii. *On some properties of discrete dynamical systems, Sur la theorie de l'iteracion et ses applications*, Colloque international du CNRS 332 (1982) Toulouse.
- [Sa4] A.N.Sarkovskii. *On a theorem of G.D.Birkhoff*. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR Ser.A (1967) 429-432.
- [Sh] M.Shub. *Endomorphisms of compact differentiable manifold*, Amer.J. Math. 91 (1969) 175-199.
- [Si] D.Singer. *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*. SIAM J. Appl. Math. 35, 2 (1978).
- [St] P.Stefan. *A theorem of Sarkovskii on the coexistence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line*, Comm. Math. Phys. 54 (1977) 237-248.
- [Str] S.van Strien. *Smooth dynamics on the interval*, New Directions in Dynamical Systems, LMS Lectures Note ser.127 Cambridge Univ.Press. (1988), 57-119.
- [SK] A.N.Sarkovskii, H.K.Kenzegulov. *On properties of the set of limit points of an iterative sequence of a continuous function*, Voz.Mat.Sob.Vyp 3 (1965) 343-348.

- [Yo] L.S.Young. *On the prevalence of horsehoes*, Trans. Amer. Math. Soc. 263 (1981) 75-88.
- [Wa] P.Walters. *An introduction to Ergodic Theory*, 79 Springer-Verlag: New York, (1982).



En los últimos años, los sistemas dinámicos han atraído la atención de numerosos investigadores de distintos campos, los cuales han hecho incursiones en interesantes problemas que son nuevas fuentes de motivaciones aplicadas más allá de los tradicionales problemas de mecánica clásica. Las interacciones de estos campos con las matemáticas estimularon nuevas líneas de investigación, y han sido particularmente importantes en la determinación de las nuevas direcciones que, en las últimas décadas, ha tomado la teoría de sistemas dinámicos.