

## Álxebras de Evolución e Grafos

Área de Álgebra

Andrés Pérez Rodríguez

Universidade de Santiago de Compostela

23 de marzo de 2022

### Introdución

Gregor Mendel foi un frade austríaco coñecido polos seus experimentos con plantas de chícharos e a consecuente formulación das leis xenéticas que levan o seu propio nome. Estas constitúen o conxunto de regras básicas para a transmisión da información xenética de proxenitores a descendentes. Aínda que Mendel xa empregou a linguaxe matemática para formular as súas leis, terían que pasar algunhas décadas ata que se introduciu a álgebra abstracta no estudo da xenética. Chegados a este punto, corrobórase que as álxebras non asociativas son o marco matemático apropiado para o estudo da herdanza no campo da xenética.

Non obstante, non tardaron en atoparse con situacións hereditarias que non respondían ante as leis de Mendel, como é o caso da bipartición nas células procariotas, a cal é un proceso de reprodución asexual. Aquí xorde a chamada xenética non mendeliana, considerada a día de hoxe como a linguaxe básica da bioloxía molecular, pero... as álxebras non asociativas funcionan igual de ben neste caso?

No ano 2006, J. P. Tian e P. Vojtěchovský responden afirmativamente a esta pregunta introducindo o concepto de álgebra de evolución en [3]. O noso obxectivo vai ser presentar as álxebras de evolución e amosar como a asociación dun digrafo nos permite estudar de maneira sinxela e gráfica algunhas das súas propiedades, sen esquecermos das interpretacións biolóxicas que se poden facer.

### Álxebras de evolución e digrafos asociados

As álxebras de evolución son un tipo de álxebras conmutativas e non asociativas que permiten modelar a herdanza non mendeliana.

**Definición 1.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  sobre un corpo  $\mathbb{K}$  é unha  $\mathbb{K}$ -álgebra provista dunha base  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , denominada **base natural**, tal que  $e_i e_j = 0$  se  $i \neq j$  e  $e_i^2 = e_i e_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$ . Fixada unha base natural  $B$  de  $\mathcal{E}$ , os escalares  $a_{ik} \in \mathbb{K}$  denomínanse **constantes de estrutura** e a matriz  $M_B = (a_{ik})$  que as recolle denomínase **matriz de estrutura**.*

---

PALABRAS CLAVE: álgebra de evolución; xenotipo; digrafo; descompoñibilidade; nilpotencia.

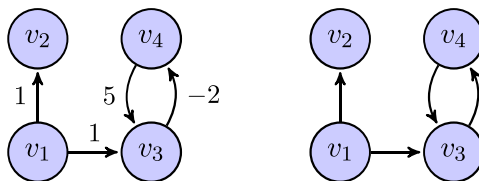
Biologicamente, se  $\mathcal{E}$  é unha álgebra de evolución con base  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , os elementos  $e_i$  pódense interpretar como xenotipos. Polo tanto, se se ten que  $e_i^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$ , a constante de estrutura  $a_{ik}$  pódese interpretar como a probabilidade de que o xenotipo  $e_i$ , ao reproducirse, dea lugar ao xenotipo  $e_j$ . Non obstante, para poder facer estas interpretacións é necesario que  $0 \leq a_{ik} \leq 1$  e que  $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$  para calquera  $i \in \{1, \dots, n\}$ . No sucesivo, sempre que se fagan interpretacións biolóxicas, estarase supoñendo que a matriz de estrutura da álgebra de evolución cumpre estas características, é dicir, que é unha matriz estocástica. Así, dada unha poboación de células procariotas que poden presentar  $n$  xenotipos distintos, algunhas das preguntas que poderíamos facernos son as seguintes:

- Que xenotipos poden aparecer a partir dun certo xenotipo?
- Hai subfamilias disxuntas de xenotipos nas que, ao reproducirse internamente, se xeren individuos desa mesma familia?
- Os xenotipos rematan por extinguirse?

O noso propósito é tentar responder a estas preguntas por medio do estudo dalgunhas propiedades das álxebras de evolución, servíndonos da teoría de grafos. Así pois, imos ver como asociar digrafos (ponderados ou non) a álxebras de evolución.

**Definición 2.** Dada unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  e unha base natural  $B$ , o digrafo ponderado  $\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B) = (V, E, \omega)$ , onde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  é o **conxunto de vértices**,  $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid a_{ij} \neq 0\}$  o **conxunto de arestas** e  $\omega$  a aplicación  $E \rightarrow \mathbb{K}$  dada por  $\omega((v_i, v_j)) = a_{ij}$ , denomínase **digrafo ponderado asociado a  $\mathcal{E}$** . Non obstante, en xeral pódese prescindir destas ponderacións. Nese caso, o digrafo  $\Gamma(\mathcal{E}, B) = (V, E)$  denomínase **digrafo asociado a  $\mathcal{E}$** .

**Ejemplo 1.** Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución cunha base natural  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  e cuxo produto ven dado por:  $e_1^2 = e_2 + e_3$ ,  $e_2^2 = 0$ ,  $e_3^2 = -2e_4$  e  $e_4^2 = 5e_3$ . Os digrafos asociados  $\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B)$  e  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  son:



**Observación 1.** En xeral, o digrafo asociado a unha álgebra de evolución depende da base natural considerada, tal e como se pode ver no seguinte exemplo.

**Ejemplo 2.** Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, e_2\}$  e cuxo produto ven dado por  $e_1^2 = e_2$  y  $e_2^2 = e_2$ . Facendo contas, é sinxelo ver que  $B' = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2\}$  tamén é unha base natural, e as expresións do produto respecto desta nova base son  $f_1^2 = f_1 - f_2$  e  $f_2^2 = f_1 - f_2$ . Non obstante, os digrafos  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  e  $\Gamma(\mathcal{E}, B')$  non son isomorfos.



A continuación, defínese o concepto de álgebra de evolución regular e amósase que, neste caso, o digrafo asociado é independente da base natural.

**Definición 3.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  dise **regular** se  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2$ , ou equivalentemente, se o determinante da súa matriz de estrutura é non nulo.*

**Teorema 1** ([2, Corollary 4.7]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución regular e considérense  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$  dúas bases naturais distintas. Entón, existe unha permutación  $\sigma \in S_n$  e un escalar  $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $f_i = ke_{\sigma(i)}$  para calquera  $i = 1, \dots, n$ .*

O Teorema 1 asegura que se unha álgebra de evolución é regular, entón hai unha única base natural posible salvo permutacións e multiplicación por escalares. Polo tanto, só hai un único digrafo asociado posible, salvo a orde dos nodos, e en consecuencia todos son isomorfos como digrafos.

## Os conxuntos de descendentes

Co obxectivo de responder á primeira das nosas preguntas, introdúcense os seguintes conxuntos tomados de [1].

**Definición 4.** *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  unha base natural e fixemos un  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ .*

i) *Os **descendentes de primeira xeración** de  $i_0$  son os elementos do conxunto:*

$$D^1(i_0) := \{k \in \{1, \dots, n\} \mid a_{i_0 k} \neq 0\}.$$

ii) *De maneira similar, os **descendentes de segunda xeración** de  $i_0$  son aqueles  $j \in D^1(k)$  para algún  $k \in D^1(i_0)$ . Polo tanto:*

$$D^2(i_0) := \bigcup_{k \in D^1(i_0)} D^1(k).$$

iii) *Por recursividade, os **descendentes da  $m$ -ésima xeración** de  $i_0$  é o conxunto:*

$$D^m(i_0) := \bigcup_{k \in D^{m-1}(i_0)} D^m(k).$$

iv) *Por último, o **conxunto de descendentes** é a unión dos conxuntos anteriores:*

$$D(i_0) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D^m(i_0).$$

Biologicamente, os descendentes de primeira xeración do xenotipo  $e_i$  correspóndense cos xenotipos que aparecen en  $e_i^2$ . Os descendentes da  $m$ -ésima xeración do xenotipo  $e_i$  son os xenotipos que aparecen na reprodución dos descendentes da  $(m-1)$ -ésima xeración de  $e_i$ . Por último, o conxunto de descendentes do xenotipo  $e_i$  é a unión de todos os conxuntos anteriores.

Aínda que os conxuntos anteriores poidan parecer difíciles de manexar, imos ilustrar ditas definicións en termos do digrafo asociado a unha álgebra de evolución. Así, é directo que dada unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$ ,  $B$  unha base natural e  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  o seu digrafo asociado, tense que:

- $D^m(i_0) = \{k \in \{1, \dots, n\} \text{ tales que existe un camiño de lonxitude } m \text{ que comeza en } v_{i_0} \text{ e remata en } v_k\}$ .
- $D(i_0) = \{k \in \{1, \dots, n\} \text{ tales que existe un camiño que comeza en } v_{i_0} \text{ e remata en } v_k\}$ .

**Ejemplo 3.** *Considérese a álgebra de evolución do Exemplo 1 e o seu digrafo asociado. Os conxuntos de descendentes do índice 1 son os seguintes:  $D^1(1) = \{2, 3\}$ ,  $D^2(1) = D^{2n}(1) = \{4\}$ ,  $D^3(1) = D^{2n+1}(1) = \{3\}$  e  $D(1) = \{2, 3, 4\}$ .*

Alxebricamente falando, o conxunto de descendentes dun índice permite calcular o ideal xerado polo correspondente elemento da base natural. De agora en adiante,  $\text{span}\{\cdot\}$  denotará o subespazo xerado por certo conxunto de elementos.

**Proposición 1** ([1, Corollary 2.1.7]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Entón, para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$  tense que o ideal xerado polo elemento  $e_k$  é  $\text{span}\{e_k, e_j^2 \mid j \in D(k) \cup \{k\}\}$ .*

A maiores, tamén nos permite estudar a simplicidade da álgebra. Véxase que unha álgebra dise **simple** se non é abeliana e o 0 é o seu único ideal propio.

**Proposición 2** ([1, Theorem 2.2.7]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Entón,  $\mathcal{E}$  é simple se, e só se,  $\mathcal{E}$  é regular e  $D(i) = \{1, \dots, n\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

En termos de grafos, a condición “ $D(i) = \{1, \dots, n\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ” é equivalente a que o digrafo asociado sexa fortemente conexo, é dicir, dados dous nodos existe sempre un camiño que vai dun nodo no outro.

## Descompoñibilidade en álxebras de evolución

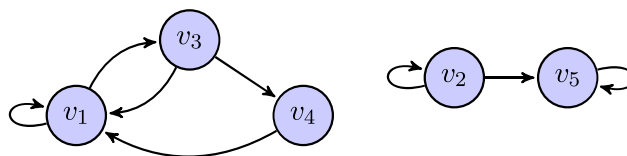
As álxebras de evolución descompoñibles son aquelas que se poden escribir como suma directa de dous ideais non nulos. O estudo desta propiedade faría posible dar resposta á segunda das nosas preguntas xa que, a nivel biolóxico, esta descomposición pode ser vista como unha unión disxunta de familias de xenotipos, na que cada un dos individuos dunha das familias, ao reproducirse, dá lugar a individuos desa propia familia. Así pois, imos ver como a conexidade do digrafo asociado está estreitamente relacionada coa descompoñibilidade da álgebra de evolución.

**Definición 5.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  dise **non dexenerada** se existe unha base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  tal que  $e_i^2 \neq 0$  para calquera  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Teorema 2** ([2, Proposition 2.8]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución non dexenerada e  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  unha base natural. Entón,  $\mathcal{E}$  é indescompoñible se, e só se,  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  é conexo.*

A relevancia deste resultado recae no feito de que a conectividade do digrafo asociado a unha álgebra de evolución non dexenerada non depende da base natural.

**Ejemplo 4.** *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución non dexenerada con base natural  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  e cuxo produto ven dado por  $e_1^2 = e_1 + e_3$ ,  $e_2^2 = e_2 + e_5$ ,  $e_3^2 = e_1 + e_4$ ,  $e_4^2 = e_1$  e  $e_5^2 = e_5$ . O seu digrafo asociado  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  é:*



En efecto, este digrafo non é conexo xa que presenta dúas compoñentes conexas ben diferenciadas. Polo tanto,  $\mathcal{E} = I \oplus J$  onde  $I = \text{span}\{e_1, e_3, e_4\}$  e  $J = \text{span}\{e_2, e_5\}$ .

**Observación 2.** *No caso de que a álgebra sexa dexenerada, o Teorema 2 deixa de ser válido (véxase o exemplo [2, Example 2.5]).*

## Nilpotencia en álgebras de evolución

O concepto de nilpotencia pódese interpretar bioloxicamente como que os trazos orixinais (ou xeradores) extínguense despois dun certo número de xeracións.

Dada unha álgebra de evolución, introdúcese a seguinte sucesión de subespazos e as seguintes definicións tomadas de [2]:

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}^i \mathcal{E}^{k+1-i}.$$

**Definición 6.** *Un elemento  $x$  dunha álgebra  $\mathcal{E}$  dise **nil** se existe un número natural  $n$  tal que  $x^n = (\dots((xx)x)\dots)x = 0$ . Ademais,  $\mathcal{E}$  dise que é unha **álgebra nil** se todo elemento é nil.*

**Definición 7.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  dise **nilpotente** se existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{E}^n = 0$ . O menor índice  $n$  que o satisfai denomínase **índice de nilpotencia**.*

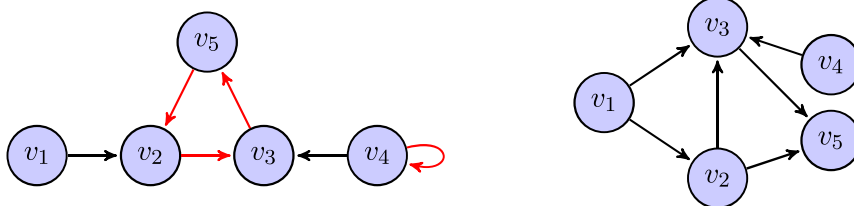
**Teorema 3** ([2, Theorem 3.4]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Entón, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{E}$  é nil.

- (ii) Non hai ciclos orientados en  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ .
- (iii) A base natural pode ser reordenada de tal maneira que a matriz de estrutura de  $\mathcal{E}$  é triangular superior con todo ceros na diagonal.
- (iv)  $\mathcal{E}$  é nilpotente.

Este resultado ten dobre importancia. En primeiro lugar, permítenos recoñecer de maneira sinxela álgebras de evolución nilpotentes sen máis que buscar ciclos orientados no seu digrafo asociado. Ademais, a proba deste resultado tamén da un procedemento para a obtención do reordenamento da base natural que fai que a matriz de estrutura sexa triangular superior con todo ceros na diagonal. Polo tanto, sempre que se traballe con álgebras de evolución nilpotentes, pódese supoñer sen perda de xeneralidade que a súa matriz de estrutura ten dita forma.

**Ejemplo 5.** Sexan  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  dúas álgebras de evolución coa mesma base natural  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  e cuxos produtos veñen dados, respectivamente, por  $e_1^2 = e_2$ ,  $e_2^2 = e_3$ ,  $e_3^2 = e_5$ ,  $e_4^2 = e_3 + e_4$  e  $e_5^2 = e_2$ ; e por  $e_1^2 = e_2 + e_3$ ,  $e_2^2 = e_3 + e_5$ ,  $e_3^2 = e_5$ ,  $e_4^2 = e_3$  e  $e_5^2 = 0$ . Os seus digrafos asociados  $\Gamma(\mathcal{E}_1, B)$  e  $\Gamma(\mathcal{E}_2, B)$  son:



O digrafo  $\Gamma(\mathcal{E}_1, B)$  ten un ciclo orientado que involucra aos nodos  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_5$  e un lazo no nodo  $v_4$ . Polo tanto, polo Teorema 3,  $\mathcal{E}_1$  non é nilpotente. Non obstante,  $\Gamma(\mathcal{E}_2, B)$  non presenta ciclos orientados, polo que  $\mathcal{E}_2$  si é nilpotente. Ademais, no digrafo  $\Gamma(\mathcal{E}_2, B)$  vese de maneira sinxela esa interpretación biolóxica que se procuraba. Nótese que nos nodos  $v_1$  e  $v_4$  non entran arestas, polo que cando todos os individuos con xenotipo  $e_1$  e  $e_4$  se reproducen, estes dous desaparecen e quedan soamente os tres restantes. Sucesivamente, cos xenotipos  $e_2$  e  $e_3$  ocorre o mesmo, polo que só quedan individuos con  $e_5$ . Por último, que  $e_5^2 = 0$  pódese interpretar como que os individuos con xenotipo  $e_5$  non se reproducen, o que leva á extinción da poboación.

## Bibliografía

- [1] Y. Cabrera Casado, *Evolution algebras*, PhD thesis, Universidad de Málaga, 2016.
- [2] A. Elduque, A. Labra, *Evolution algebras and graphs*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 7, 1550103, 10 pp.
- [3] J. P. Tian, P. Vojtěchovský, *Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics*, Quasigroups Related Systems **14** (2006), no. 1, 111–122.