



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Que é a teoría de categorías?

Alex Pazos Moure

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Que é a teoría de categorías?

Alex Pazos Moure

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento:</b> Álgebra
<b>Título:</b> Que é a teoría de categorías?
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>Este TFG pretende dar algunhas respostas á pregunta: Que é a teoría de categorías?</p> <p>Pódese dicir que a teoría de categorías está no gran esquema das cousas (matemáticas). Esta teoría é moi diferente doutras ramas das matemáticas. En lugar de ser outra irmá aliñada na foto de familia, é máis ben un xene común que as une. A teoría de categorías non é outro país máis no mapa das matemáticas, se non que é un trebello para obter unha vista de paxaro de toda a paisaxe. Desde este punto de vista, diferentes áreas das matemáticas comparten patróns/tendencias/estruturas comúns. Isto resulta extraordinariamente útil cando se quere resolver un problema nun ámbito pero non se dispón das ferramentas adecuadas. Ao transportar o problema a un ámbito diferente, pódese ver o problema baixo un prisma diferente e talvez descubrir novas ferramentas, que fai que a solución poida ser moito máis fácil.</p> <p>Neste TFG, o estudante iniciárase na teoría das categorías así como nalgunhas das súas aplicacións.</p>
<b>Bibliografía</b>
<p>P. Perrone, <i>Notes on Category Theory with examples from basic mathematics</i>, <a href="https://arxiv.org/pdf/1912.10642.pdf">https://arxiv.org/pdf/1912.10642.pdf</a>, 2021.</p> <p>H. Simmons, <i>An introduction to Category theory</i>, Cambridge University Press, 2011.</p>
<b>Recomendacións (non vinculantes)</b>



# Índice general

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Nocións básicas de categorías</b>	<b>1</b>
1.1. Construción e exemplos . . . . .	1
1.2. Tipos de morfismos . . . . .	5
<b>2. Relacións entre categorías</b>	<b>11</b>
2.1. Functores . . . . .	11
2.2. Transformacións naturais e dinaturais . . . . .	16
<b>3. Equivalencias de categorías</b>	<b>23</b>
3.1. Preliminares . . . . .	23
3.2. O grupoide fundamental . . . . .	28
3.3. Teoría de Galois . . . . .	29
3.4. Xeometría alxébrica: dualidade álgebra-xeometría . . . . .	31
3.5. Álxebras de Boole e a dualidade de Stone . . . . .	33
<b>4. Adxuncións</b>	<b>41</b>
4.1. Definición e propiedades . . . . .	41
4.2. Conexións de Galois . . . . .	48
4.3. A adxunción libre-esquecemento . . . . .	50
4.4. A adxunción tensor-Hom . . . . .	53
4.4.1. En conxuntos e módulos . . . . .	53
4.4.2. En conxuntos e espazos punteados . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



## Resumo

A teoría de categorías permite expresar numerosas realidades matemáticas en diversos ámbitos cunha linguaxe común, facilitando a súa clasificación e a busca de conexións entre ditos ámbitos, ou entre aspectos diferentes do mesmo. É unha ferramenta potente para o estudo de estruturas matemáticas, guiando as definicións de construcións habituais, como o produto tensor ou o módulo libre, que teñen análogos que, a primeira vista, semellan non ter nada que ver. Coa fin de incidir nestas características, este documento estará repleto de exemplos variados, ilustrando cada un dos conceptos introducidos, empezando coas nocións básicas de categoría, functor e transformación natural, e despois centrándose nas ideas de equivalencia de categorías e adxunción entre funtores.

## Abstract

Category theory allows us to express numerous mathematical realities in diverse realms with a common language, making their classification and the search for connections amongst said realms, in the form of natural transformations and equivalences of categories, easier tasks. It is a powerful tool for studying of mathematical structures, guiding the definitions of usual constructions such as the tensor product or the free module, which have parallel constructions that, at first sight, have nothing to do with each other. With the end goal of reinforcing the importance of these characteristics, this document will be full of varied examples, illustrating each and every one of the concepts being introduced, starting with the basic notions of categories, functors and natural transformations, and later focusing on the concepts of equivalence of categories and adjunction between functors.



# Introdución

Para a redacción desta introdución empregouse principalmente a referencia [12].

A orixe da Teoría de Categorías remóntase á década dos 40, no artigo *General theory of natural equivalences* [5] de Samuel Eilenberg (1913–1998) e Saunders Mac Lane (1909–2005). O contexto matemático da época é un de crecente interconexión entre campos a primeira vista dispares, propiciado en parte pola globalización, que permitiu un áxil intercambio de ideas entre matemáticos de diferentes escolas, e tamén pola poderosa xeneralidade das ferramentas que se desenvolveron, seguindo o método axiomático, entre o final do Século XIX e o principio do Século XX, como a topoloxía ou a álgebra abstracta.

O xerme concreto que lles levou a estes dous matemáticos a construír as fundacións da teoría de categorías atópase no eido da topoloxía alxébrica. Eilenberg estaba estudando certos grupos de homoloxía, de difícil cómputo, e recoñeceu que eran isomorfos, de xeito *natural*, a certas extensións de grupos calculadas por Mac Lane nun contexto puramente alxébrico, coas que resulta moito máis doado traballar. Alertados por esta identificación, Mac Lane e Eilenberg tentarían formalizar a idea de *transformación natural*, para o que introducirían a linguaxe de categorías e funtores (que xogan o papel de asignacións entre categorías) no artigo mencionado anteriormente.

Veremos o significado preciso do adxectivo *natural* no transcurso da Sección 2.2, pero adiantamos que un isomorfismo natural non só identifica a estrutura interior de dous obxectos, senón que nos proporciona unha forma, mediante diagramas conmutativos, de caracterizar as transformacións entre un obxecto dun lado do isomorfismo coas do outro. O exemplo introdutorio que empregaron Mac Lane e Eilenberg foi un isomorfismo natural ben coñecido, que serve tamén hoxe en día como idea intuitiva do que nos referimos con *naturalidade*: o isomorfismo canónico entre un espazo vectorial de dimensión finita e o seu bidual, mediante a aplicación avaliación. O *quid* da cuestión da naturalidade radica en que, mediante a avaliación, podemos relacionar calquera aplicación lineal  $f: V \rightarrow W$  coa súa bidual  $f^{**}: V^{**} \rightarrow W^{**}$ , caracterizando así, ademais da estrutura interna do bidual, todas as aplicacións entre os espazos biduais que sexan inducidas por unha lineal. En contraposición, Mac Lane e Eilenberg recalcan que non existe un tal isomorfismo natural

entre un espazo vectorial e o seu dual, ningún isomorfismo unificado entre espazos, que sexa robusto ante as aplicacións lineais entre eles. Trataremos estes exemplos, dende o punto de vista categórico, no transcurso da Sección 2.2.

Durante a década dende 1945 ata 1955, empregárase a teoría de categorías como unha linguaxe para organizar eficientemente a información, permitindo definir e manexar a axiomatización da homoloxía, acometida por Eilenberg e Norman Steenrod (1910–1971), unha labor vital tendo en conta a cantidade e disparidade, en construción e cálculo, de teorías de homoloxía empregadas na época. A parte inicial da axiomatización consistiu en ver os  $H_n$  como funtores dende categorías *admisibles* de espazos topolóxicos ata categorías de estruturas alxébricas, e en ver cada operador bordo  $\partial$  como unha transformación natural entre os  $H_n$  correspondentes, satisfacendo as propiedades topolóxicas adecuadas. Unha consecuencia desta claridade de concepción foi achar un criterio formal para determinar a equivalencia entre teorías de homoloxía: que exista unha familia de isomorfismos naturais entre os funtores  $H_n$  dunha teoría e os  $\tilde{H}_n$  doutra, feito que empregarían no seu coñecido teorema de unicidade. Outra achega especialmente relevante traída por este enfoque é a linguaxe diagramática, simplificando dramaticamente moitos dos razoamentos estándares no campo.

Nos seguintes anos presenciáramos o nacemento da álgebra homolóxica, e, da man de Alexander Grothendieck (1928–2014), a creación das *categorías abelianas* en 1957, fundamentais na xeometría alxébrica e na álgebra homolóxica dende entón. As categorías abelianas non serán estudadas neste traballo de fin de grao, pero si imos poñer atención en que produciron unha primeira ondada de interese no estudo das categorías en si mesmas, non só na súa aplicación a situacións máis concretas por comodidade, coa fin de esclarecer as propiedades das categorías abelianas. Precisamente neste momento, Grothendieck atopa a formulación correcta para falar de *equivalencia de categorías*, o concepto central do Capítulo 3. Mac Lane e Eilenberg falaran de isomorfismo de categorías, formado por dous funtores inversos no sentido usual, pero dita situación rara vez sucede na práctica. A equivalencia de Grothendieck, en cambio, garda unha patente semellanza coa equivalencia de homotopía, e resulta un concepto moito máis frutífero.

Un ano despois, en 1958, Daniel Kan (1927–2013) introduce o concepto de adxunción, central en teoría de categorías, nunha serie de traballos adicados a establecer a teoría de homotopía no eido xeral. No que consiste unha adxunción é obxecto de estudo no Capítulo 4, mais adiantamos que se trata dun isomorfismo natural entre os conxuntos

$$\mathrm{Hom}(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}(c, Gd),$$

onde  $\mathrm{Hom}$  fai referencia ó conxunto de morfismos entre dous obxectos (cando dita colección sexa, en efecto, un conxunto) e  $F$  e  $G$  son funtores con dominio e codominio cruzados.

Esta idea continúa na liña das transformacións naturais artelladas polos seus predecesores, desprazando o foco de atención do estudo cara as transformacións ou *morfismos*, tentando describir un obxecto completamente pola rede de conexións que ten con outros. O exemplo base no que se apoiou Kan no seu artigo *Adjoint functors* [8] foi a coñecida bixección entre os conxuntos

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)),$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  son grupos abelianos. Esta adxunción, coñecida como *adxunción tensor-Hom*, desenvolverase na Sección 4.4, tamén noutros contextos. Kan decatouse de que esta construción se repetía polo miúdo no resto das matemáticas, por exemplo, aparecendo detrás dalgúns propiedades universais habituais, como relatamos na Sección 4.3. O artigo en cuestión de Kan, posterior ós seus estudos en homotopía nos que xa botara man desta idea, emprega exclusivamente conceptos categóricos, sen conceptualizalos como un xeito de abordar problemas doutros contextos. É por isto que, se ben a teoría de categorías nace con MacLane e Eilenberg, moitos consideran que é con Kan co que se convirte nunha rama das matemáticas a estudar en si mesma.

O presente traballo divídese en catro capítulos:

O Capítulo 1 consta de dúas seccións: a Sección 1.1, na que definimos o concepto de *categoría* e vemos unha serie de exemplos sinxelos desta construción, destacando algúns nos que os obxectos non son conxuntos e os morfismos non son aplicacións, e a Sección 1.2, na que introducimos e interpretamos algúns tipos de morfismos destacados, que xeneralizan as ideas de aplicación inxectiva, sobrexectiva e bixectiva.

No Capítulo 2, introducimos os funtores na Sección 2.1, que en termos informais funcionan como *morfismos de categorías*, sendo asignacións congruentes entre os obxectos e morfismos dunha categoría e os de outra preservando as composicións, e as transformacións naturais na Sección 2.2, que se poden ver como morfismos entre funtores de xeito preciso. De novo, acompañamos cada concepto con algúns exemplos.

O Capítulo 3 divídese en cinco seccións: A Sección 3.1 que introduce o concepto de equivalencia de categorías, a súa interpretación, unha caracterización de interese práctico e exemplos representativos, e as tres seguintes versan cada unha sobre unha equivalencia distinta, estudada en máis profundidade. A Sección 3.2 trata o grupoide fundamental, e a súa identificación co grupo fundamental baseado en calquera punto para espazos conexos por camiños, a Sección 3.3 reinterpreta categoricamente o teorema fundamental da teoría de Galois, a Sección 3.4 establece unha dualidade entre a categoría de subconxuntos afíns, que son construcións xeométricas, e unha subcategoría da categoría de  $K$ -álxabras, construcións alxébricas. Por último, na Sección 3.5 recolleemos unha dualidade entre álgebra

(álgebras de Boole) e topoloxía (espazos compactos, Hausdorff e totalmente desconexos), un caso particular da chamada *dualidade de Stone*.

Para rematar, o Capítulo 4 comeza, na Sección 4.1, con dúas definicións equivalentes de adxuncións e algunhas consideracións teóricas sobre estas. Despois, dedicamos as últimas seccións do traballo, a estudar tres bloques de adxuncións, é dicir, adxuncións que, aínda que xorden en ámbitos moi diferentes, teñen evidentes semellanzas na construción. Na Sección 4.2 estudamos as conexións de Galois, que son casos particulares de adxuncións de funtores definidos entre conxuntos ordenados, na Sección 4.3 vemos as adxuncións *libre-esquecemento*, na que un dos funtores *esquece* un aspecto da estrutura e o seu adxunto recupera esa estrutura de xeito *universal*, e na Sección 4.4 estudamos a adxunción tensor-Hom, comezando coa categoría de conxuntos como caso base e vendo como temos que definir o produto tensor para poder estender a adxunción ó engadir estrutura.

# Capítulo 1

## Nocións básicas de categorías

Este capítulo inicial está dedicado á construción do concepto de categoría e ó seu estudo como entidade en si mesma. Presentamos exemplos de categorías que xorden habitualmente en diversos ámbitos matemáticos, prestando especial atención a que é unha teoría máis xeral que simplemente dotar a conxuntos dunha estrutura adicional e considerar as aplicacións entre eles. En efecto, veremos que obxectos matemáticos como monoides ou o conxunto dos naturais poden formar en si mesmos unha categoría. Empregáronse as referencias [13, 16, 18].

### 1.1. Construción e exemplos

**Definición 1.1** (Categoría). Unha *categoría*  $C$  consiste nunha colección de obxectos e unha colección de morfismos verificando as seguintes propiedades:

- Cada morfismo ten asignados dous obxectos como dominio e codominio. Se  $f$  é un morfismo en  $C$  con dominio  $x$  e codominio  $y$ , escribiremos  $f : x \rightarrow y$ .
- Cada obxecto  $x$  ten asignado un morfismo  $\text{Id}_x : x \rightarrow x$ , chamado morfismo identidade.
- Para calquera morfismos  $f : x \rightarrow y$  e  $g : y \rightarrow z$ , existe un morfismo  $gf = g \circ f : x \rightarrow z$ , que chamaremos a composición de  $f$  con  $g$ .
- Se  $f : x \rightarrow y$  é un morfismo,  $f \text{Id}_x = \text{Id}_y f = f$ .
- Se  $f : x \rightarrow y$ ,  $g : y \rightarrow z$  e  $h : z \rightarrow w$  son morfismos, entón  $h(gf) = (hg)f$ .

O uso do termo *colección* non é caprichoso: non se require que os obxectos dunha categoría, nin os morfismos, constitúan un conxunto. Se ben o resto deste traballo estará redactado coa adecuada xeneralidade cando sexa posible, nalgúns intres necesitaremos

unha garantía de que estamos traballando con conxuntos, por exemplo cando falemos da colección de morfismos entre dous determinados obxectos. Co fin de solventar este problema, introducimos a seguinte definición:

**Definición 1.2.** Diremos que unha categoría  $C$  é *pequena* se a colección de todos os seus morfismos é un conxunto, e que é localmente pequena se fixados dous obxectos  $x$  e  $y$ , a colección de morfismos con dominio  $x$  e codominio  $y$  é un conxunto, que denotaremos por  $C(x, y)$ , ou por  $\text{Hom}(x, y)$  cando non haxa ambigüidade con respecto á categoría á que nos referimos.

Como adiantábase con anterioridade, traballaremos exclusivamente con categorías localmente pequenas.

Como é o caso no resto das estruturas matemáticas, temos unha noción de subestrutura que recolleamos a continuación.

**Definición 1.3.** Unha *subcategoría* dunha categoría dada é unha subcolección de obxectos cos morfismos entre eles de xeito que a subcolección forma unha categoría en si mesma, é dicir, que todos os obxectos teñen as súas identidades e a colección de morfismos é pechada para a composición.

**Exemplo 1.4.** O presente exemplo serve de recompilatorio para as categorías que se atopan habitualmente.

1. A categoría **Set**, que ten por obxectos conxuntos, e por morfismos as aplicacións entre eles coa composición habitual.
2. De forma semellante a **Set**, temos categorías como
  - **Top**, con espazos topolóxicos e aplicacións continuas.
  - **Monoid**, con monoides como obxectos, que son conxuntos equipados cunha operación interna que verifican os axiomas de grupo a excepción da existencia de inversos para cada elemento, con homomorfismos de monoides, é dicir, aplicacións que conservan as operacións. A categoría **Group**, con grupos e homomorfismos de grupos, xorde como subcategoría de **Monoid**.
  - **Ring**, con aneis e homomorfismos de aneis.
  - ${}_A\mathbf{Mod}$ , con  $A$ -módulos pola esquerda sobre un anel  $A$  fixado e os seus homomorfismos de módulos. De forma análoga construímos  $\mathbf{Mod}_A$  como a categoría de  $A$ -módulos pola dereita. No caso particular de que  $A = K$  sexa un corpo, obtemos a categoría de  $K$ -espazos vectoriais coas aplicacións lineais que denotaremos por  $\mathbf{Vect}_K$ .

- **Man**<sup>∞</sup> con variedades diferenciables e aplicacións diferenciables  $\mathcal{C}^\infty$ .
  - **Poset** con conxuntos parcialmente ordenados e aplicacións monótonas crecentes.
3. A categoría **Set**<sub>\*</sub>, que ten por obxectos conxuntos punteados, que son conxuntos cun elemento destacado que chamamos punto base, e por morfismos aplicacións que preservan os puntos base. Esta mesma construción repítese para **Top** ou **Man**<sup>∞</sup>.
4. Construimos a categoría **Pfn**, cuxos obxectos son conxuntos e os seus morfismos son aplicacións parciais: unha aplicación parcial  $f$  entre dous conxuntos  $X$  e  $Y$ , que escribiremos  $f: X \rightharpoonup Y$ , é unha aplicación definida nun subconxunto  $\text{dom}(f)$  de  $X$ . No tocante á composición, se temos dúas aplicacións parciais  $f: X \rightharpoonup Y$  e  $g: Y \rightharpoonup Z$ , distinguimos dous casos:
- Se  $f(\text{dom}(f)) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ , entón  $gf$  é a aplicación baleira (é dicir, o conxunto baleiro pensado como relación en  $X \times Z$ ).
  - Noutro caso,  $gf$  é a aplicación definida coa composición usual con dominio

$$\text{dom}(gf) = \text{dom}(f) \cap f^{-1}(\text{dom}(g)).$$

A asociatividade da composición obtense como consecuencia directa da de **Set**.

5. Construimos a categoría **Rel** como segue:

- Os obxectos son conxuntos.
- Un morfismo  $R: A \rightarrow B$  é unha relación  $R \subset A \times B$ . Se  $R: A \rightarrow B$  e  $S: B \rightarrow C$ , a súa composición  $SR$  defínese do xeito natural: se  $x \in A$  e  $z \in C$ ,

$$xSRz: \Leftrightarrow \exists y \in B \text{ tal que } xRy \text{ e } ySz.$$

É doado comprobar que para un conxunto  $A$ , o morfismo identidade correspóndese coa relación  $\Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a = b\}$ .

Dado o diagrama  $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C \xrightarrow{T} D$  e dous elementos  $a \in A$  e  $d \in D$ , temos que

$$\begin{aligned} aT(SR)d &\Leftrightarrow \exists c \in C \mid aSRc \text{ e } cTd \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ e } c \in C \mid aRb, bSc \text{ e } cTd \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B \mid aRb \text{ e } bTSd \Leftrightarrow a(TS)Rd. \end{aligned}$$

6. Outra categoría onde os obxectos son conxuntos é **Mult**, onde os morfismos, que son relacións, chámanse aplicacións multivaluadas. Se  $P: A \multimap B$  é unha aplicación

multivaluada e  $a \in A$  e  $b \in B$  están relacionados por  $P$ , escribiremos  $b \in P(a)$  no canto de  $aPb$ . O que diferencia esta categoría da anterior é a lei da composición, que expoñemos deseguido.

Se  $P: A \multimap B$  e  $Q: B \multimap C$  son aplicacións multivaluadas e  $a$  e  $c$  son elementos de  $A$  e  $C$  respectivamente, teremos que  $c \in QP(a)$  se se verifican simultaneamente dúas condicións:

- Existe  $b \in P(a)$  tal que  $c \in Q(b)$ . Esta é a condición que define a composición en **Rel**.
- Para todo  $b \in P(a)$ , temos que  $Q(b) \neq \emptyset$ .

Ó igual que en **Rel**, o morfismo identidade é a diagonal e a composición é asociativa. A proba é completamente análoga salvo pola necesidade de engadir a segunda propiedade da composición.

**Exemplo 1.5.** Todas as categorías do Exemplo 1.4 teñen en común que os obxectos son conxuntos, aínda que nalgunhas xa podemos observar que temos noções de morfismo que non coincide cunha aplicación. A continuación, imos tratar algunhas categorías con outro tipo de obxectos.

1. Se  $(A, \leq)$  é un conxunto parcialmente ordenado, podemos construír unha categoría **Ord<sub>A</sub>** a partir da orde da seguinte forma:
  - Os obxectos serán os elementos do conxunto  $A$ .
  - Fixados  $x$  e  $y$  elementos de  $A$ , existirá un único morfismo  $x \rightarrow y$  se  $x \leq y$  e non existirá ningún noutro caso.
  - Se  $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow z$ , entón  $x \leq y$  e  $y \leq z$ . Pola propiedade transitiva,  $x \leq z$  así que hai un único morfismo  $x \rightarrow z$  que é o morfismo composición dos anteriores.

Sexa  $x \in A$ . Pola reflexividade da relación, existe un único morfismo  $x \rightarrow x$ , e dado  $x \rightarrow y$ , a composición de ambos e igual ó morfismo  $x \rightarrow y$  pola unicidade, e o mesmo sucede para outro morfismo  $z \rightarrow x$ . Así, a única frecha  $x \rightarrow x$  verifica a propiedade de morfismo identidade. De novo, como hai un único morfismo entre dous obxectos dados, resulta trivial comprobar a asociatividade da composición. Polo tanto, **Ord<sub>A</sub>** é, en efecto, unha categoría.

2. Se  $M$  é un monoide, construímos a categoría **BM** da seguinte forma:
  - Consta dun único obxecto denotado por  $*$ .

- Os morfismos son os elementos do monoide  $M$ . A composición defínese como a operación de  $M$ .

A operación de  $M$  é asociativa e ten un elemento neutro, así que a composición verifica os axiomas de categoría. Como caso particular, os grupos tamén determinan unha categoría.

3. Se  $A$  é un anel conmutativo e unitario, construímos a categoría  $\mathbf{Mat}_A$ , onde os obxectos son números enteiros positivos e un morfismo  $n \rightarrow m$  é unha matriz  $m \times n$  con coeficientes en  $A$ . A composición de dous morfismos  $B: n \rightarrow m$  e  $C: m \rightarrow l$  é o produto matricial  $CB \in M_{l \times n}(A)$ , que é asociativo, e os morfismos identidade son as matrices identidade da orde correspondente.

## 1.2. Tipos de morfismos

Unha vez temos a noción adecuada de morfismo entre obxectos, interézanos determinar como é ese envío de información entre dominio e codominio. En particular, se reproduce fielmente a información do dominio, se é unha observación completa do codominio, ou se fai que o dominio e o codominio sexan indistinguibles, en cuxo caso o chamaremos isomorfismo.

Na categoría  $\mathbf{Set}$ , sabemos como traducir o parágrafo anterior: unha aplicación de conxuntos  $f: A \rightarrow B$  *reproduce fielmente* o conxunto  $A$  se é inxectiva, e dicir, se ningún par de elementos de  $A$  distintos coinciden na imaxe, polo que podemos pensar que  $A$  está incluído dentro de  $B$ . Por outra banda,  $f$  é unha *observación completa* de  $B$  se é sobrexectiva, xa que cada elemento de  $B$  se pode obter como imaxe dun de  $A$ . Por suposto,  $A$  e  $B$  resultan indistinguibles mediante  $f$  cando esta é bixectiva.

Para algunhas das categorías do Exemplo 1.4 xa coñecemos as nocións adecuadas de estes morfismos especiais, que nalgún caso coincide esencialmente coas de  $\mathbf{Set}$  e noutros, como en  $\mathbf{Top}$  ou  $\mathbf{Man}^\infty$ , requiren refinamentos. Non obstante, a definición de isomorfismo nun eido máis xeral parece clara.

**Definición 1.6** (Isomorfismo). Un morfismo  $f: x \rightarrow y$  nunha categoría  $C$  chámase *isomorfismo* se existe outro morfismo  $g: y \rightarrow x$  verificando que  $gf = \text{Id}_x$  e que  $fg = \text{Id}_y$ . Neste caso, escribiremos  $f: x \simeq y$ .

É inmediato que o morfismo  $g$  é único, e chamarase inverso de  $f$ . Denotarémolo por  $g = f^{-1}$ .

Diremos que dous obxectos  $x$  e  $y$  son isomorfos se existe un isomorfismo entre eles e escribiremos  $x \simeq y$ .

Dende logo esta definición reflicte o espírito da discusión inicial: para que dous obxectos sexan indistinguibles mediante un morfismo, temos que ser quen de recuperar toda a información que envíamos, sen erros, mediante outro morfismo.

Nunha categoría xeral  $C$ , a idea esencial de aplicación inxectiva podémola recuperar cun morfismo  $f$  que nos permita volver ó seu dominio mediante outro morfismo de forma que non se detecte ningún cambio, o cal implicaría que  $f$  reproduciu fielmente a información. Porén, esta idea adoita resultar demasiado restritiva na práctica, aínda que sexa adecuada en **Set**. Unha forma menos estrita de formalizalo é pensar que  $f$  conserva toda a información se calquera outra observación previa a  $f$  que fagamos resulta distinguible, aínda despois de termos aplicado  $f$ . Isto é, se a precomposición dun morfismo con  $f$  coincide coa de outro, estes dous morfismos teñen que ser iguais.

De xeito análogo, recuperamos a idea de aplicación sobrexectiva cun morfismo  $f$  que é tal que, se observamos o dominio de  $f$  dende o seu codominio mediante un morfismo concreto,  $f$  recupéranos toda a información do codominio. Analogamente, unha noción máis débil para unha observación completa será que as observacións posteriores a  $f$  queden totalmente determinadas ó seren vistas despois de  $f$ .

Formalizamos a discusión anterior na seguinte definición.

**Definición 1.7.** Sexa  $C$  unha categoría e  $f: x \rightarrow y$  un morfismo. Diremos que  $f$  é:

- un *monomorfismo* se para calquera  $g, h: z \rightarrow x$  tales que  $fg = fh$ , temos que  $g = h$ .
- un *epimorfismo* se para calquera  $g, h: y \rightarrow z$  tales que  $gf = hf$ , entón  $g = h$ .
- unha *sección* se existe un morfismo  $r: y \rightarrow x$  tal que  $rf = \text{Id}_x$ .
- unha *retracción* se existe un morfismo  $s: y \rightarrow x$  tal que  $fs = \text{Id}_y$ .

É evidente que unha sección/retracción é en particular un monomorfismo/epimorfismo e que un isomorfismo é, en particular, retracción e sección. Establecemos unha especie de recíproco no seguinte resultado.

**Proposición 1.8.** Sexa  $C$  unha categoría e  $f: x \rightarrow y$  un morfismo. Entón, se  $f$  é unha sección e un epimorfismo, é un isomorfismo.

*Demostración.* Sexa  $r: y \rightarrow x$  unha retracción de  $f$ , é dicir, un morfismo tal que  $rf = \text{Id}_x$ . Entón, temos que  $f = frf = \text{Id}_y f$ , e por ser  $f$  epimorfismo, séguese que  $fr = \text{Id}_y$ .  $\square$

Podemos facer unha proba totalmente análoga para ver que un morfismo que sexa retracción e monomorfismo é necesariamente un isomorfismo. Porén, imos atrasar dita proba para facer uso nela da seguinte definición.

**Definición 1.9** (Categoría oposta). Sexa  $C$  unha categoría. Definimos a súa categoría oposta  $C^{op}$  como segue:

- Os obxectos de  $C^{op}$  son exactamente os de  $C$ .
- Un morfismo  $f^{op}: y \rightarrow x$  de  $C^{op}$  correspóndese exactamente cun morfismo  $f: x \rightarrow y$  de  $C$ .
- A composición de morfismos  $f^{op}: x \rightarrow y$  e  $g^{op}: y \rightarrow z$  defínese como  $g^{op}f^{op} = (fg)^{op}$ .

A asociatividade da composición e a existencia de morfismos identidade dedúcense das propiedades de  $C$ . Ademais,  $f$  é un isomorfismo de  $C$  se e só se  $f^{op}$  é un isomorfismo de  $C^{op}$ .

A categoría oposta non é máis que, falando informalmente, a categoría orixinal coas frechas reviradas. Se ben semella un simple *ardid* formal a primeira vista, podémolo empregar para probar a proposición que mencionamos anteriormente dun modo moito máis directo:

**Corolario 1.10.** *Sexa  $C$  unha categoría e  $f: x \rightarrow y$  un morfismo. Se  $f$  é un monomorfismo e unha retracción, é un isomorfismo.*

En efecto, como na categoría oposta a orde da composición se intercambia, os monomorfismos da orixinal transfórmanse en epimorfismos e as seccións en retraccións (e viceversa). Entón, un morfismo  $f$  de  $C$  que sexa simultaneamente monomorfismo e retracción verifica que  $f^{op}$  é epimorfismo e sección. Así, pola Proposición 1.8, sabemos que  $f^{op}$  é un isomorfismo, e así deducimos que  $f$  tamén o é.

A importancia da categoría oposta radica en que, se un enunciado xeral acerca de categorías é certo, a súa aplicación particular a unha categoría proporciona unha afirmación dual sobre a súa oposta, polo que obtemos directamente dous resultados. Isto coñécese como *principio de dualidade*.

A continuación, determinaremos estes morfismos especiais nalgúns das categorías anteriores.

**Exemplo 1.11.** En **Set**, os monomorfismos son exactamente as aplicacións inxectivas. En efecto, sea  $f: A \rightarrow B$  unha aplicación. É evidente que se é inxectiva, é un monomorfismo, así que probamos o recíproco. Se  $f$  non é inxectiva, existen dous elementos  $x$  e  $y$  de  $A$  que teñen a mesma imaxe por  $f$ . Definimos a aplicación  $g: A \rightarrow A$  tal que  $g(x) = y$ ,  $g(y) = x$  e  $g(a) = a$  para todo  $a \in A - \{x, y\}$ . Como  $f = f \text{Id}_A = fg$  e  $g \neq \text{Id}_A$ ,  $f$  non é un monomorfismo.

Ademais, tamén podemos probar que se  $A \neq \emptyset$ ,  $f$  é unha sección. Empezamos tendo en conta que a aplicación  $f: A \rightarrow f(A)$  ten unha inversa  $\varphi$ , e definimos unha retracción de  $f$  deste xeito

$$r: B \rightarrow A \mid r(y) = \begin{cases} \varphi(y), & \text{se } y \in f(A), \\ x, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Os epimorfismos de **Set** son exactamente as aplicacións sobrexectivas. Como no caso anterior, tomamos unha aplicación  $f: A \rightarrow B$ . De novo probar que a sobrexectividade implica o carácter épico é inmediato, así que supoñemos que  $f$  non é sobrexectiva, o que implica que existen  $y \in B - f(A)$  e  $z \in f(A)$ . Definimos  $g: B \rightarrow B$  tal que  $g(y) = z$  e  $g(x) = x$  para todo  $x \in B - \{y\}$ . Así elixida, tense que  $f = gf$  pero  $g \neq \text{Id}_B$ , polo que  $f$  non pode ser un epimorfismo.

Como sucedía cos monomorfismos, se  $B \neq \emptyset$ , podemos definir unha sección  $s$  de  $f$  empregando o axioma da elección (para cada  $y \in B$ ,  $s(y)$  é un elemento de  $f^{-1}(\{y\})$ ).

No exemplo anterior, para probar que unha aplicación inxectiva é un monomorfismo (respectivamente, para probar que unha aplicación sobrexectiva é un epimorfismo) non traballamos con ningunha aplicación concreta, polo que naquelas categorías nas que os obxectos sexan en particular conxuntos e os morfismos aplicacións coa composición usual, a demostración segue sendo válida. Non obstante, no resto de consideracións definimos algunhas aplicacións concretas que non teñen por que ser morfismos noutras categorías.

### Exemplo 1.12.

1. Un monomorfismo  $f: G \rightarrow H$  de **Group** é necesariamente inxectivo. En efecto, se supoñemos que non é inxectivo, entón verifícase que  $\text{Ker}(f) \neq \{1\}$ , así que os homomorfismos de grupos constante  $\text{cte}_1: \text{Ker}(f) \rightarrow G$  e inclusión  $i: \text{Ker}(f) \hookrightarrow G$  son distintos, pero  $fi = f\text{cte}_1$ , o cal é unha contradición.

Razoamos de forma semellante para **Ring** e  ${}_A\mathbf{Mod}$ .

2. Os epimorfismos de **Ring** non teñen por que ser sobrexectivos. Consideramos a inclusión  $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ , que claramente non é sobrexectiva. Se  $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow A$  son homomorfismos de aneis tales que  $fi = gi$ , entón para calquera  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ , temos que

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)f(n)^{-1} = g(m)g(n)^{-1} = g\left(\frac{m}{n}\right),$$

polo que  $i$  é un epimorfismo.

3. Veremos un exemplo de monomorfismo que é unha aplicación non inxectiva. Para iso, introducimos unha categoría nova.

Un grupo  $G$  dise *divisible* se é abeliano e para todo  $g \in G$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ , existe  $h \in G$  tal que  $g = nh$ . Resulta claro que esta categoría, cos homomorfismos de grupos, forma unha subcategoría de **Group**.

A proxección canónica  $p: \mathbb{Q} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ , que claramente non é inxectiva, é un monomorfismo, xa que se tomamos  $f, g: G \rightarrow \mathbb{Q}$  tales que  $pf = pg$ , entón para calquera  $x \in G$  temos que  $f(x) - g(x) = n \in \mathbb{Z}$ . Se  $n \neq 0$ , existe  $y \in G$  tal que  $2ny = x$ , así que  $n = 2n(f(y) - g(y)) \iff 1 = 2(f(y) - g(y))$ , o cal é unha contradición xa que o número  $f(y) - g(y)$  é enteiro. Deducimos así que  $f - g = 0$ .

4. En **Top**, hai aplicacións inxectivas que non son seccións e aplicacións sobrexectivas que non son retraccións.

En efecto, consideramos a aplicación continua  $f: (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{trivial})$  definida por  $f(x) = x$ , que é bixectiva, mais non é un homeomorfismo, xa que a súa aplicación inversa non é continua. Pola Proposición 1.8,  $f$  non pode admitir retraccións nin seccións.

**Exemplo 1.13.**

1. Tomamos un conxunto ordenado  $(A, \leq)$ , e a categoría que este determina, **Ord<sub>A</sub>**. Entón:
  - Os únicos isomorfismos son as identidades. En efecto, se temos dous morfismos  $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow x$ , pola simetría da relación deducimos que  $x = y$ , e o único morfismo de  $x$  en  $x$  é  $\text{Id}_x$ .
  - Todos os morfismos son monomorfismos e epimorfismos. A condición para ambas verifícase trivialmente xa que fixados un dominio e un codominio, hai como máximo un morfismo.
  - Aplicando a Proposición 1.8, as únicas retraccións e seccións son as identidades.
2. Consideramos un grupo  $G$ . Todos os morfismos de **BG** son isomorfismos, por teren inverso no grupo.



## Capítulo 2

# Relacións entre categorías

Así como o aspecto fundamental do estudo dunha categoría resulta ser o estudo dos seus morfismos, a teoría de categorías en si mesma xorde para clasificar rigorosamente relacións e transformacións entre categorías, e dicir, os funtores. Os funtores, como os morfismos para os obxectos, resultarán ser unha *observación* dunha categoría noutra que pode resultar máis sinxela de estudar, capturando a interacción entre morfismos de xeito coherente. Ademais, tamén é de interese preguntarnos pola relación que hai entre os funtores, xa que pode ser que capturen esencialmente a mesma información na súa totalidade ou en determinados aspectos. Esta noción de morfismo entre funtores será o que chamaremos transformación natural. Nesta sección, séguense as referencias [11, 13, 16].

### 2.1. Funtores

**Definición 2.1.** Se  $C$  y  $D$  son categorías, un *functor* (covariante)  $F$  con dominio  $C$  y codominio  $D$ , que denotaremos por  $F: C \rightarrow D$ , consiste nunha asignación das seguintes características:

- Para calquera obxecto  $c$  de  $C$ , temos un obxecto  $Fc = F(c)$  de  $D$ .
- Para calquera morfismo  $f: x \rightarrow y$  en  $C$ , temos un morfismo  $Ff = F(f): Fx \rightarrow Fy$ .
- Se  $f$  e  $g$  son morfismos de  $C$  para os que a composición  $gf$  está ben definida, temos que  $F(gf) = FgFf$ .
- Se  $c$  é un obxecto de  $C$ , cúmprese que  $F\text{Id}_c = \text{Id}_{Fc}$ .

Diremos que  $F$  é un functor contravariante de  $C$  en  $D$  se  $F$  é un functor covariante  $C^{op} \rightarrow D$ .

Como no caso dos morfismos, algúns funtores teñen propiedades especialmente boas. En particular, queremos poder distinguir as transformacións entre dous obxectos da categoría imaxe a partir da de partida, ter unha imaxe completa delas, e ter a garantía de que coñecemos esencialmente (é dicir, salvo isomorfismos) todos os obxectos da categoría de chegada a partir da orixinal. Precisamos estas propiedades na seguinte definición:

**Definición 2.2.** Un functor covariante  $F: C \rightarrow D$  dise:

- *pleno* se para cada  $x$  e  $y$  obxectos de  $C$  e  $g: Fx \rightarrow Fy$ , existe  $f: x \rightarrow y$  tal que  $Ff = g$ .
- *fiel* se para cada  $x$  e  $y$  obxectos de  $C$  y  $f, g: x \rightarrow y$  tales que  $Ff = Fg$ , necesariamente se verifica que  $f = g$ .
- *plenamente fiel* se é pleno e fiel.
- *esencialmente sobrexectivo* se para cada obxecto  $d$  de  $D$ , existe un obxecto  $c$  en  $C$  tal que  $d \simeq Fc$ .

Temos a mesma definición para funtores contravariantes trocando a dirección das frechas adecuadamente.

O carácter esencialmente sobrexectivo permítenos, no caso das categorías pequenas, definir unha asignación que funciona como sección de  $F$  salvo isomorfismo, empregando o axioma da elección. Sen máis hipóteses, esta sección por suposto non ten por que ser functorial.

Que  $F$  sexa plenamente fiel pódese interpretar como unha noción de bixectividade no sentido da seguinte proposición.

**Proposición 2.3.** *Un functor plenamente fiel  $F: C \rightarrow D$  reflicte e preserva isomorfismos, é dicir, se  $x$  e  $y$  son obxectos de  $C$ , entón temos que*

$$x \simeq y \iff Fx \simeq Fy.$$

*Demostración.* Que  $F$  preserva isomorfismos é certo simplemente en virtude de ser functor, ó conservar as composicións e as identidades. Reciprocamente, se  $g: Fx \rightarrow Fy$  é un isomorfismo, entón, por plenitude, podemos escribir  $Ff = g$  e  $Fh = g^{-1}$ . Por fidelidade, as composicións de  $f$  con  $h$  son as respectivas identidades.  $\square$

Combinaremos estas dúas nocións no seguinte capítulo para ver que a sección discutida resulta ser functorial, dándonos o que chamaremos unha *equivalencia*.

A continuación, trataremos algúns exemplos elementais de funtores e discutiremos se verifican ou non algunhas das propiedades anteriores.

**Exemplo 2.4.**

1. A asignación  $P: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  que leva cada conxunto ó seu conxunto de partes e cada aplicación á súa correspondente aplicación *imaxe directa* é un functor covariante. Analogamente temos un functor contravariante  $P^-: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  que actúa igual nos conxuntos e envía cada aplicación á súa correspondente aplicación *imaxe recíproca*. Vexamos que  $P$  e  $P^-$  son fieis, pero non plenos nin esencialmente sobrexectivos. En efecto, se  $f, g: X \rightarrow Y$  son aplicacións tales que  $Pf = Pg$ , temos que para todo  $x \in X$ ,  $f(\{x\}) = g(\{x\})$ , o que equivale a que  $f(x) = g(x)$ . Así,  $P$  é fiel. Razoando para  $P^{-1}$ , observamos que  $f^{-1}(\{f(x)\}) = g^{-1}(\{f(x)\})$ , o que implica en particular que  $g(x) = f(x)$ . Agora ben, a aplicación  $\text{cte}_\emptyset: PX \rightarrow PY$ , onde  $X$  non é baleiro, non pode ser imaxe de ningunha aplicación  $X \rightarrow Y$  mediante  $P$  nin de ningunha aplicación  $Y \rightarrow X$  mediante  $P^-$ , polo que ningún dos dous funtores é pleno. Tampouco son esencialmente sobrexectivos, xa que un conxunto de partes dun conxunto finito debe ter sempre un cardinal que sexa unha potencia de 2.
2.  $\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Group}$  que leva cada espazo topolóxico punteado no seu grupo fundamental e cada aplicación continua na súa clase de homotopía é un functor covariante.
3.  $T_*: \mathbf{Man}_*^\infty \rightarrow \mathbf{Vect}_\mathbb{R}$ , que leva cada variedade diferenciable punteada no espazo tanxente á variedade nese punto e as aplicacións diferenciables  $\mathcal{C}^\infty$  nas correspondentes aplicacións tanxente nese punto, é un functor covariante.
4.  $(\cdot)^*: \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$  que leva cada  $K$ -espazo vectorial no seu espazo dual e cada aplicación lineal na súa aplicación dual é un functor contravariante. De xeito análogo temos o functor bidual  $(\cdot)^{**}$ , que é covariante.
5. O chamado *functor de esquecemento*  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  é un functor covariante que envía cada espazo topolóxico ó conxunto subxacente e cada aplicación continua á mesma aplicación. Esencialmente, *esquecemos* a topoloxía dos espazos. Temos funtores de esquecemento semellantes para categorías como **Group**, **Ring**,  $\mathbf{Man}^\infty$ ,  $\mathbf{AMod}$  ... que seguiremos denotando por  $U$ .

É inmediato comprobar que todos estes funtores de esquecemento son fieis. De feito, o termo *functor de esquecemento* aplícase ós funtores covariantes fieis dende unha categoría dada  $C$  a  $\mathbf{Set}$ . O par  $(C, U)$ , formado por unha categoría  $C$  e un functor de esquecemento, i.e., un functor fiel  $U: C \rightarrow \mathbf{Set}$ , denomínase unha *categoría concreta*. Observamos que unha mesma categoría pode ter distintos funtores de esquecemento, como é o caso de  $\mathbf{Set}$  co functor identidade e os funtores  $P$  e  $P^-$  do primeiro exemplo.

6. Sexa  $C$  unha categoría localmente pequena e  $c$  un obxecto de  $C$ . Definimos o *functor Hom covariante*  $C(c, \cdot): C \rightarrow \mathbf{Set}$  e o *functor Hom contravariante*  $C(\cdot, c): C \rightarrow \mathbf{Set}$  mediante os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 x \longmapsto C(c, x) & & g \\
 f \downarrow & \searrow \downarrow f(\cdot)=f^* & \downarrow \\
 y \longmapsto C(c, y) & & fg
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 x \longmapsto C(x, c) & & gf \\
 f \downarrow & \nearrow \uparrow (\cdot)f=f^* & \uparrow \\
 y \longmapsto C(y, c) & & g
 \end{array}$$

A utilidade principal do functor Hom radica en que, como tratamos no Capítulo 1, a teoría de categorías deposita maior importancia nas transformacións entre obxectos que nos obxectos en si. En moitos casos, podemos caracterizar totalmente un obxecto coñecendo como se relaciona cos demais, é dicir, estudando un ou ambos funtores Hom.

O functor Hom non ten por que ser nin pleno nin fiel. En efecto, se consideramos  $\mathbb{R}$  coa topoloxía usual, o functor contravariante  $\mathbf{Top}(\cdot, \mathbb{R}) = C(\cdot, \mathbb{R}): \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  non verifica ningunha das dúas propiedades, como imos ver.

Para desmentir a fidelidade, tomamos  $f, g: X \rightarrow Y$  continuas, onde  $Y = \{a, b\}$  ten a topoloxía trivial e  $X$  é calquera espazo. Entón, todas as aplicacións  $X \rightarrow Y$  son continuas, e podemos tomar  $f$  e  $g$  distintas. Agora ben, se temos unha aplicación continua  $Y \rightarrow \mathbb{R}$  e calculamos a imaxe recíproca dun punto na súa imaxe, obtemos un pechado non baleiro de  $Y$ , é dicir, o mesmo  $Y$ , polo que a aplicación é necesariamente constante. A postcomposición de  $f$  e  $g$  por unha aplicación constante é a propia aplicación constante, aínda que cambiada de dominio, así que obtemos a igualdade  $f^* = g^*$ . Se ademais consideramos  $X$  discreto e con dous ou máis elementos, podemos construír unha aplicación  $C(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$  que envía unha aplicación constante a outra distinta, a cal non se pode obter aplicando o functor, así que este non pode ser pleno.

7. A correspondencia  $O: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Poset}$  que asigna a cada espazo topolóxico a súa topoloxía ordenada coa inclusión, e a cada aplicación continua a súa aplicación *imaxe recíproca*, que conserva a inclusións, é un functor contravariante. Tamén podemos considerar o functor contravariante  $C$ , que actúa igual pero para a colección de conxuntos pechados.
8. Se  $G$  é un grupo, un functor covariante  $F: \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$  determina un conxunto  $X = F*$  e para cada  $g \in G$ , unha aplicación  $Fg = g(\cdot): x \in X \mapsto gx \in X$ . Polas propiedades functoriais, para  $g, h \in G$ , temos que  $(hg)x = h(gx)$  e  $1x = x$  para todo

$x \in X$ . É dicir,  $F$  determina unha acción de grupos pola esquerda sobre o conxunto  $X$ . Se tomásemos un functor contravariante, obteríamos unha acción de grupos pola dereita.

Substituíndo a categoría **Set** por outra como **Top** ou **Vect<sub>K</sub>**, obtemos construcións semellantes.

9. Se  $M$  e  $N$  son monoides, pódese comprobar que un functor  $F: \mathbf{BM} \rightarrow \mathbf{BN}$  correspóndese cun homomorfismo de monoides  $f: M \rightarrow N$ , xa que  $F$  preserva a composición.

Podemos ver que a fidelidade e plenitude de  $F$  equivalen á inxectividade e sobrexectividade de  $F$  respectivamente. Tamén é esencialmente sobrexectivo, xa que  $\mathbf{BN}$  ten un único obxecto. Polo tanto,  $F$  é plenamente fiel e esencialmente sobrexectivo se e só se  $f$  é un isomorfismo de monoides.

10. Sexan  $A$  e  $B$  conxuntos ordenados. Un functor  $F: \mathbf{Ord}_A \rightarrow \mathbf{Ord}_B$  leva elementos de  $A$  en elementos de  $B$ , e se existe un morfismo  $x \rightarrow y$  en  $\mathbf{Ord}_A$ , existe outro morfismo  $Fx \rightarrow Fy$ . É dicir,  $F$  correspóndese cunha aplicación  $f: A \rightarrow B$  monótona crecente. Vexamos baixo que condicións  $F$  é algún dos tipos de funtores expostos na Definición 2.2.

Inmediatamente, obtemos que é un functor fiel, xa que entre dous obxectos só pode haber como máximo unha frecha. Notemos que, a diferenza do exemplo anterior, isto non implica que  $f$  sexa inxectiva: aínda que esta fose constante,  $F$  segue sendo fiel.

No tocante á plenitude, precisamos exactamente que  $f$  *reflecta a orde*, é dicir, que se  $f(a) \leq f(a')$ , entón  $a \leq a'$  para todos  $a$  e  $a'$  elementos de  $A$ . Isto implica en particular que  $f$  é inxectiva, xa que se  $f(a) = f(a')$ , verifícanse as dúas desigualdades e, en consecuencia,  $a$  e  $a'$  verifican as dúas desigualdades. A condición de inxectividade non é suficiente para reflectir a orde.

O carácter esencialmente sobrexectivo correspóndese coa sobrexectividade da aplicación, xa que a isomorfía en  $\mathbf{Ord}_B$  coincide ca igualdade.

Unindo o anterior, se  $f$  é unha bixección que reflecte a orde, entón a súa inversa é monótona crecente, é dicir, que  $f$  é un isomorfismo en **Poset**. Polo tanto,  $F$  é un functor plenamente fiel e esencialmente sobrexectivo se e só se  $f$  é un isomorfismo en **Poset**.

11. Sexa  $K$  un corpo. Imos definir dúas categorías e dar un functor pleno e non fiel entre elas.

Construímos a categoría  $\mathfrak{F}_K$  cuxos obxectos son os conxuntos  $K^n$  e os morfismos son funcións polinómicas coa composición habitual. Por outra banda, a categoría  $\mathcal{P}_K$  ten os mesmos obxectos, un morfismo  $f: K^n \rightarrow K^m$  é un elemento de  $(K[X_1, \dots, X_n])^m$  e a súa composición con  $g: K^m \rightarrow K^r$  obtense como a substitución formal das variables  $(g_1(f_1, \dots, f_m), \dots, g_r(f_1, \dots, f_m))$ . Pódese comprobar que esta composición é asociativa e que  $\text{Id}_{K^n} = (X_1, \dots, X_n)$ .

O functor  $F: \mathcal{P}_K \rightarrow \mathfrak{F}_K$  definido de xeito natural é claramente pleno, pero para o corpo  $K = \mathbb{Z}_2$ , non é fiel. En efecto, os elementos de  $(\mathbb{Z}_2[X, Y])^2$  definidos como

$$p = (X(X+1), Y(Y+1)) \quad \text{e} \quad q = (X^2Y + XY^2, X^2Y + XY^2)$$

son distintos, mais para todo  $(a, b) \in (\mathbb{Z}_2)^2$  temos que  $Fp(a, b) = 0 = Fq(a, b)$ .

## 2.2. Transformacións naturais e dinaturais

**Definición 2.5** (Transformación natural). Sexan  $C$  e  $D$  categorías e  $F, G: C \rightarrow D$  funtores, ambos covariantes ou contravariantes. Unha transformación natural  $\alpha: F \Rightarrow G$  consiste nunha colección de morfismos  $\alpha_c: Fc \rightarrow Gc$ , un para cada obxecto  $c$  de  $C$ , de forma que se  $f: x \rightarrow y$  é un morfismo de  $C$ , verifícase que o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\ Gx & \xrightarrow{Gf} & Gy \end{array}$$

Diremos que  $\alpha_c$  é a compoñente de  $\alpha$  en  $c$ .

Se cada unha das compoñentes de  $\alpha$  é un isomorfismo, diremos que é un isomorfismo natural e denotarémolo por  $\alpha: F \cong G$ .

En definitiva, unha transformación natural entre dous funtores  $F$  e  $G$  é unha forma canónica de pasar de  $F$  a  $G$ , que garda coherencia con todos os datos que manexan  $F$  e  $G$  tanto en obxectos como en morfismos, sen requirir eleccións externas á estrutura da categoría. Se dita transformación é un isomorfismo, entón as observacións que determinan  $F$  e  $G$  no codominio son, esencialmente, indistinguibles: podemos recuperar cada morfismo entre dous obxectos da imaxe de  $F$  cun entre os correspondentes obxectos da imaxe de  $G$ , e viceversa.

É evidente que podemos considerar unha noción de composición entre transformacións naturais, facéndoo compoñente a compoñente, polo que cabe preguntarse se podemos construír unha categoría a partir de esta. En efecto, tomamos  $C$  e  $D$  categorías, e consideramos a colección  $D^C$  onde:

- Os obxectos son funtores de  $C$  a  $D$ .
- Os morfismos son transformacións naturais entre funtores de  $C$  a  $D$ . A composición defínese como a composición de morfismos de  $D$  compoñente a compoñente, isto é, se  $\alpha: F \Rightarrow G$  e  $\beta: G \Rightarrow H$ , para todo obxecto  $c$  de  $C$ ,  $(\beta\alpha)_c = \beta_c\alpha_c$ .

**Proposición 2.6.**  $D^C$  é unha categoría.

*Demostración.* Se vemos que a composición está ben definida, resulta inmediato que as identidades son as transformacións naturais cuxas compoñentes sexan identidades e que é asociativa, pola asociatividade en  $D$ .

Se tomamos  $\alpha$  e  $\beta$  como describimos antes e  $f: x \rightarrow y$  é un morfismo de  $C$ , entón a conmutatividade dos cadrados superior e inferior do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\
 \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\
 Gx & \xrightarrow{Gf} & Gy \\
 \beta_x \downarrow & & \downarrow \beta_y \\
 Hx & \xrightarrow{Hf} & Hy
 \end{array}$$

garanten que o cadrado exterior conmuta, o cal proba a naturalidade de  $\beta\alpha$ .  $\square$

Temos, a maiores, unha certa noción de composición entre funtores e transformacións naturais no seguinte sentido.

*Observación 2.7.* Sexan  $C$ ,  $D$  e  $E$  categorías e  $F, G: C \rightarrow D$  e  $H, I: D \rightarrow E$  funtores. Entón:

1. Dada  $\alpha: H \Rightarrow I$ , podemos definir unha transformación natural  $\alpha_F: HF \Rightarrow IF$  onde para todo  $c$  obxecto de  $C$ , a compoñente correspondente é a de  $\alpha$  en  $Fc$ . A condición de naturalidade dedúcese inmediatamente da de  $\alpha$ . Ademais, se  $\alpha$  é un isomorfismo,  $\alpha_F$  tamén o é.
2. Dada  $\alpha: F \Rightarrow G$ , podemos definir a transformación natural unha transformación natural  $H\alpha: HF \Rightarrow HG$  onde cada compoñente se obtén aplicando  $H$  á compoñente correspondente de  $\alpha$ . A condición de naturalidade obtémola de que aplicarlle un functor a un diagrama conmutativo resulta conmutativo. De novo, que  $\alpha$  sexa un isomorfismo implica que  $H\alpha$  o é.

**Exemplo 2.8.** Os seguintes son algúns exemplos representativos de transformacións naturais.

1. Establecemos a transformación natural que comentamos na Introducción, entre os funtores  $\text{Id}_{\mathbf{Vect}_K}, (\cdot)^{**}: \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ .

Dado  $V$  un  $K$ -espazo vectorial, definimos a aplicación lineal

$$\begin{aligned} \text{ev}_V: V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \text{ev}_V^v: V^* \longrightarrow K \\ &\varphi \longmapsto \varphi(v). \end{aligned}$$

Se  $f: V \rightarrow W$  é unha aplicación lineal, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \text{ev}_V \downarrow & & \downarrow \text{ev}_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

é conmutativo, xa que dado  $v \in V$  e  $\varphi \in W^{**}$ , temos que

$$(\text{ev}_W \circ f)(v)(\varphi) = \text{ev}_W^{f(v)}(\varphi) = \varphi(f(v)),$$

$$(f^{**} \circ \text{ev}_V)(v)(\varphi) = f^{**}(\text{ev}_V^v)(\varphi) = \text{ev}_V^v(f^*(\varphi)) = f^*(\varphi)(v) = \varphi(f(v)).$$

É dicir,  $\text{ev}: \text{Id}_{\mathbf{Vect}_K} \Rightarrow (\cdot)^{**}$  é unha transformación natural. Na categoría  $\mathbf{Vect}_K^{fd}$ , temos un isomorfismo natural.

2. Os funtores contravariantes  $O, C: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  son naturalmente isomorfos, o cal reflicte que obteñamos a mesma construción definindo unha topoloxía por abertos que por pechados.

Dado un espazo topolóxico  $X$ , definimos  $\alpha_X: OX \rightarrow CX \mid \alpha_X(U) = X - U$  con inversa  $\beta_X: CX \rightarrow OX \mid \beta_X(F) = X - F$ . Se  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación continua, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} OX & \xleftarrow{f^{-1}} & OY \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ CX & \xleftarrow{f^{-1}} & CY \end{array}$$

é conmutativo, xa que se  $V$  é aberto en  $Y$ ,

$$\alpha_X(f^{-1}(V)) = X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V) = f^{-1}(\alpha_Y(V)).$$

3. Sexa  $G$  un grupo e  $F, H: BG \rightarrow \mathbf{Set}$  dous funtores covariantes. Sexan  $X = F*$  e  $Y = H*$ . Sabemos que os funtores  $F$  e  $H$  definen accións de grupos sobre os conxuntos  $X$  e  $Y$ . Se  $\alpha: F \Rightarrow H$  é unha transformación natural, entón dado  $g \in G$  temos asegurada a conmutatividade do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g(\cdot)} & X \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ Y & \xrightarrow{g(\cdot)} & Y \end{array}$$

É dicir, se identificamos  $\alpha \equiv \alpha_*$  (xa que esta é a única compoñente da transformación natural), temos que para  $g \in G$  e  $x \in X$ ,  $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ . É dicir,  $\alpha$  é unha aplicación que conmuta coas accións. Dise que  $\alpha$  é unha aplicación *G-equivariante*.

Coa noción de transformación natural definida, podemos relacionar dous funtores covariantes ou contravariantes entre si, pero pode ser de interese facelo cun covariante e outro contravariante. Para este fin, precisamos definir o concepto de transformación dinatural.

**Definición 2.9.** Sexan  $C$  e  $D$  categorías. Definimos a *categoría produto*  $C \times D$  onde:

- os obxectos son pares  $(c, d)$  onde  $c$  e  $d$  son obxectos de  $C$  e  $D$  respectivamente.
- un morfismo de  $(c, d)$  a  $(c', d')$  e un par  $(f, g)$  onde  $f: c \rightarrow c'$  e  $g: d \rightarrow d'$ . A lei de composición defínese compoñente a compoñente.

É inmediato que  $\text{Id}_{(c,d)} = (\text{Id}_c, \text{Id}_d)$  e que a composición é asociativa. Podemos definir os funtores proxección  $P_1: C \times D \rightarrow C$  e  $P_2: C \times D \rightarrow D$  do xeito obvio.

**Definición 2.10.** Sexan  $C$  e  $D$  categorías,  $F, G: C^{op} \times C \rightarrow D$  dous funtores. Unha transformación dinatural  $\alpha: F \rightrightarrows G$  consta de compoñentes  $\alpha_c: F(c, c) \rightarrow G(c, c)$  para cada obxecto  $c$  de  $C$  de xeito que o seguinte diagrama é conmutativo para calquera frecha  $f: x \rightarrow y$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & F(x, y) & & \\ & \nearrow^{F(\text{Id}_x, f)} & & \nwarrow_{F(f, \text{Id}_y)} & \\ F(x, x) & & & & F(y, y) \\ \alpha_x \downarrow & & & & \downarrow \alpha_y \\ G(x, x) & & & & G(y, y) \\ & \searrow_{G(\text{Id}_x, f)} & & \swarrow_{G(f, \text{Id}_y)} & \\ & & G(x, y) & & \end{array}$$

Se as compoñentes son isomorfismos, diremos que  $\alpha$  é un isomorfismo dinatural.

No caso de que  $F$  e  $G$  dependan dunha soa variable, é dicir, que  $F = (\text{cte}, F_0)$  e  $G = (G_0, \text{cte})$ , podemos interpretar a transformación dinatural  $\alpha: F \rightrightarrows G$  como unha transformación natural entre un functor covariante e outro contravariante de  $C$  a  $D$ , reinterpretando a condición de naturalidade co diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F_0x & \xrightarrow{F_0f} & F_0y \\ \downarrow \alpha_x & & \downarrow \alpha_y \\ G_0x & \xleftarrow{G_0f} & G_0y \end{array}$$

**Exemplo 2.11.** Os funtores  $\text{Id}_{\mathbf{Vect}_K}$  covariante e  $(\cdot)^*: \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$  contravariante non poden ser naturalmente isomorfos. Supoñamos que  $\alpha: \text{Id}_{\mathbf{Vect}_K} \xrightarrow{\cdot} (\cdot)^*$  é unha transformación dinatural. Polo tanto, o seguinte diagrama é conmutativo en  $\mathbf{Vect}_K$  para calquera aplicación lineal  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \alpha_V \downarrow & & \downarrow \alpha_W \\ V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* \end{array}$$

En particular, se  $f = 0$ , temos que  $\alpha_V = 0$  para todas as posibles eleccións de  $V$ , o que evidentemente implica que  $\alpha$  non pode ser un isomorfismo natural.

De feito, o que probamos é que a única transformación dinatural entre eses dous funtores é aquela que ten todas as compoñentes nulas. Isto reflíctese en que cando queremos definir unha aplicación lineal non nula entre un espazo vectorial calquera e o seu dual, precisamos dunha elección explícita de base.

Por outra banda, se consideramos a categoría **PreHilbert**, de  $\mathbb{R}$ -espazos vectoriais prehilbertianos onde os morfismos son as aplicacións lineais que preservan o produto escalar, e os funtores

$U: \mathbf{PreHilbert} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  o functor de esquecemento (covariante),

$(\cdot)^*: \mathbf{PreHilbert} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  o functor dual (contravariante).

Entón temos unha transformación dinatural  $\Phi: U \xrightarrow{\cdot} (\cdot)^*$  dada por

$$h \in H \mapsto \Phi_H(h) = \langle \cdot, h \rangle \in H^*.$$

En efecto, para unha isometría lineal  $f$  hai que comprobar a conmutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & K \\ \Phi_H \downarrow & & \downarrow \Phi_K \\ H^* & \xleftarrow{f^*} & K^* \end{array}$$

Fixados  $h \in H$  e  $k \in K$ , verifícanse as seguintes igualdades:

$$f^*(\Phi_K(f(h)))(k) = f^*(\langle \cdot, f(h) \rangle)(k) = \langle f(k), f(h) \rangle = \langle k, h \rangle = \Phi_H(h)(k).$$

Repetindo a construción para a categoría **Hilbert**, con espazos de Hilbert reais e isometrías lineais, e co functor  $(\cdot)'$  dual topolóxico, cada compoñente é un isomorfismo polo teorema de representación de Riesz para espazos de Hilbert, polo que obtemos un isomorfismo dinatural.



## Capítulo 3

# Equivalencias de categorías

Neste capítulo, a meta é determinar a noción adecuada para saber cando podemos substituír unha categoría por outra que sexa, a efectos prácticos, idéntica. Unha primeira idea é considerar un isomorfismo de categorías, é dicir, un par de funtores  $F: C \rightarrow D$  e  $G: D \rightarrow C$  tales que  $GF = \text{Id}_C$  e  $FG = \text{Id}_D$ . Se ben é razoable, é unha noción de equivalencia moi forte e de escasa utilidade práctica. O principio de equivalencia que empregaremos será moi semellante á idea de equivalencia homotópica en espazos topolóxicos, onde  $GF$  e  $FG$  serán naturalmente isomorfos ás respectivas identidades. A maiores, esta idea pódese caracterizar, en casos particulares, en termos de funtores que cumpran as propiedades da Definición 2.2, de xeito que resulta máis manexable. Por último, dedicamos o resto da sección a presentar varios exemplos de categorías equivalentes.

As referencias empregadas son principalmente [11, 13, 16]. Acudiremos a outras referencias para exemplos concretos, que se citarán chegado o momento.

### 3.1. Preliminares

**Definición 3.1** (Equivalencia de categorías). Diremos que un functor  $F: C \rightarrow D$  define unha *equivalencia de categorías* entre  $C$  e  $D$  se existe un functor  $G: D \rightarrow C$  e dous isomorfismos naturais  $\alpha: \text{Id}_C \cong GF$  e  $\beta: FG \cong \text{Id}_D$ .

Se existe unha equivalencia de categorías entre  $C$  y  $D$ , diremos que son *equivalentes* e escribimos  $C \simeq D$ .

Se  $C^{op} \simeq D$ , diremos que  $C$  e  $D$  son *dualmente equivalentes*.

Para interpretar esta definición, imos supoñer que queremos estudar a categoría  $C$  a partir da  $D$ . Se ambas son localmente pequenas, tomamos dous obxectos  $x$  e  $y$  de  $C$  e imos estudar o conxunto  $C(x, y)$ . Entón, mediante o isomorfismo natural  $\alpha$ , resulta

completamente equivalente a estudar  $C(GFx, GFy)$ , un proceso no que xa intervén a categoría  $D$  que nos resulta máis sinxela, xa que podemos pasar cada morfismo  $f \in C(x, y)$  a  $GFf$  compoñendo por isomorfismos a ambos lados de forma uniforme, sen que importe como é o morfismo  $f$ .

Cabe esperar que esta equivalencia de categorías sexa transitiva. Isto garánteo a seguinte proposición:

**Proposición 3.2.** *Sexan  $C, D$  e  $E$  categorías tales que  $C \simeq D$  e  $D \simeq E$ . Entón,  $C \simeq E$ .*

*Demostración.* Sexan  $F: C \rightarrow D$ ,  $G: D \rightarrow C$ ,  $H: D \rightarrow E$  e  $I: E \rightarrow D$  funtores e  $\alpha: \text{Id}_C \cong GF$ ,  $\beta: FG \cong \text{Id}_D$ ,  $\eta: \text{Id}_D \cong IH$  e  $\epsilon: HI \cong \text{Id}_E$  isomorfismos naturais. Entón  $HF: C \rightarrow E$  e  $GI: E \rightarrow C$  son funtores e imos ver que determinan unha equivalencia de categorías con isomorfismos naturais  $\text{Id}_C \cong (GI)(HF)$  e  $(HF)(GI) \cong \text{Id}_E$ .

Se  $c$  e  $e$  son obxectos de  $C$  e  $E$  respectivamente, á vista das transformacións naturais involucradas, vemos que podemos definir un morfismo dende  $c$  ata  $GIHFc$  e dende  $HFGIe$  ata  $e$  mediante os diagramas

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\alpha_c} & GFc \xrightarrow{G\eta_{Fc}} GHIFc \\ & & \\ HFGIe & \xrightarrow{H\beta_{Ie}} & HIe \xrightarrow{\epsilon_e} e \end{array}$$

Agora, aplicando a Observación 2.7, obtemos un par de isomorfismos naturais definidos polas compoñentes anteriores,  $G\eta_F\alpha: \text{Id}_C \cong GIHF$  e  $\epsilon H\beta_I: HFGI \cong \text{Id}_E$ , de onde deducimos o resultado.  $\square$

O seguinte teorema proporciónanos un criterio de grande utilidade práctica para establecer equivalencias de categorías, recollendo unha idea mencionada na Sección 2.1, que empregaremos continuamente no que segue de capítulo.

**Teorema 3.3.** *Un functor  $F: C \rightarrow D$ , onde  $C$  é unha categoría pequena, define unha equivalencia de categorías se e só se é plenamente fiel e esencialmente sobrexectivo.*

*Demostración.* Supoñamos que  $F$  define unha equivalencia de categorías, é dicir, que existe un functor  $G: D \rightarrow C$  e dous isomorfismos naturais  $\alpha: \text{Id}_C \cong GF$  e  $\beta: FG \cong \text{Id}_D$ .

Se  $d$  é un obxecto de  $D$ ,  $Gd$  é un obxecto de  $C$  e  $FGd \simeq d$  mediante  $\beta_d$ , polo que  $F$  é esencialmente sobrexectivo.

Sexan  $f, g: x \rightarrow y$  morfismos de  $C$  tales que  $Ff = Fg$ . Entón, pola conmutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{f} & y \\
\alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\
GFx & \xrightarrow{GFf=GFg} & GFy \\
\alpha_x^{-1} \downarrow & & \downarrow \alpha_y^{-1} \\
x & \xrightarrow{g} & y
\end{array}$$

deducimos a conmutatividade de

$$\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{f} & y \\
\text{Id}_x \downarrow & & \downarrow \text{Id}_y \\
x & \xrightarrow{g} & y
\end{array}$$

é dicir, que  $f = g$ . Pola arbitrariedade dos morfismos,  $F$  é fiel. De forma análoga podemos probar que  $G$  tamén é fiel.

Sexa  $g: Fx \rightarrow Fy$  un morfismo en  $D$  onde  $x$  e  $y$  son obxectos en  $C$ . Se definimos  $f = \alpha_y^{-1}(Gg)\alpha_x: x \rightarrow y$ , temos que o seguinte diagrama é conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
GFx & \xrightarrow{Gg} & GFy \\
\alpha_x^{-1} \downarrow & & \downarrow \alpha_y^{-1} \\
x & \xrightarrow{f} & y \\
\alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\
GFx & \xrightarrow{GFf} & GFy
\end{array}$$

Isto permítenos deducir que  $Gg = GFf$ , e como  $G$  é un functor fiel,  $g = Ff$ , así que  $F$  é pleno.

Reciprocamente, supoñamos que  $F$  é plenamente fiel e esencialmente sobrexectivo e vexamos que define unha equivalencia de categorías.

Ó ser  $F$  esencialmente sobrexectivo, para todo obxecto  $d$  de  $D$  podemos considerar, como  $C$  é pequena, o conxunto  $\{c \text{ obxecto de } C \mid Fc \simeq d\}$ , e, polo axioma da elección, seleccionamos un obxecto  $Gd$  e un isomorfismo  $\beta_d: FGd \rightarrow d$ . Se  $g: d \rightarrow e$  é un morfismo en  $D$ , existe un único  $Gg: Gd \rightarrow Ge$  morfismo en  $C$  tal que  $F(Gg) = \beta_e^{-1}g\beta_d$ . É dicir,  $Gg$  é o único morfismo de  $C$  que fai que o seguinte diagrama sexa conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
FGd & \xrightarrow{FGg} & FGe \\
\beta_d \downarrow & & \downarrow \beta_e \\
d & \xrightarrow{g} & e
\end{array}$$

Vexamos que  $G: D \rightarrow C$  é unha asignación functorial:

Se  $d$  é un obxecto de  $D$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} FGd & \xrightarrow{FG\text{Id}_d} & FGd \\ & \searrow \beta_d & \swarrow \beta_d \\ & d & \end{array}$$

é conmutativo se e só se  $FG\text{Id}_d = \text{Id}_{FGd} = F\text{Id}_{Gd}$ , o cal implica que  $G\text{Id}_d = \text{Id}_{Gd}$  pola fidelidade de  $F$ .

Se  $f: x \rightarrow y$  e  $g: y \rightarrow z$  son morfismos en  $D$ , a conmutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccc} FGx & \xrightarrow{FGf} & FGy & \xrightarrow{FGg} & FGz \\ \beta_x \downarrow & & \beta_y \downarrow & & \downarrow \beta_z \\ x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{g} & z \end{array}$$

implica a de

$$\begin{array}{ccc} FGx & \xrightarrow{F(GgGf)} & FGz \\ \beta_x \downarrow & & \downarrow \beta_z \\ x & \xrightarrow{gf} & z \end{array}$$

polo que deducimos a igualdade  $F(GgGf) = FG(gf)$  e polo tanto  $GgGf = G(gf)$ .

Temos probado que  $G: D \rightarrow C$  é un functor. Por construción,  $\beta: FG \cong \text{Id}_D$  é un isomorfismo natural.

Para calquera obxecto  $c$  de  $C$ , definimos  $\alpha_c: c \rightarrow GFc$  como o único morfismo tal que  $F\alpha_c = \beta_{Fc}^{-1}: Fc \rightarrow FGFc$ . Así,  $\alpha_c$  é un isomorfismo cuxo inverso é o único morfismo  $\alpha_c^{-1}$  tal que  $F\alpha_c^{-1} = \beta_{Fc}$ .

Por último, se  $f: x \rightarrow y$  é un morfismo en  $C$ , a conmutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\ GFx & \xrightarrow{GFf} & GFy \end{array}$$

dedúcese da fidelidade de  $F$  e da conmutatividade de

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ F\alpha_x = \beta_{Fx}^{-1} \downarrow & & \downarrow F\alpha_y = \beta_{Fy}^{-1} \\ FGFx & \xrightarrow{FGFf} & FGFy \end{array}$$

En consecuencia,  $\alpha: \text{Id}_C \cong GF$  é un isomorfismo natural. □

*Observación 3.4.* Na proba da condición suficiente, non fixemos uso do axioma da elección, polo que segue sendo certo para categorías xerais. Non obstante, cos axiomas que están en xogo, resulta ser unha hipótese fundamental para a condición necesaria, e moitas das

categorías habituais non son pequenas, o cal pon en dúbida a utilidade do teorema. Agora ben, na práctica, cando probamos que un functor é esencialmente sobrexectivo, adoitamos dar xa unha elección concreta de obxecto, polo que neses casos, podemos reproducir a proba e concluír que temos unha equivalencia de categorías.

**Exemplo 3.5.**

1. No Exemplo 2.4 vimos que os funtores plenamente fieis e esencialmente sobrexectivos entre monoides correspondíanse con isomorfismos de monoides. Como os monoides son categorías pequenas, aplicando o Teorema 3.3 deducimos que dous monoides son equivalentes como categorías precisamente cando son isomorfos. O mesmo sucede para os conxuntos ordenados.

2. Sexa  $F: \mathbf{Pfn} \rightarrow \mathbf{Set}_*$  definido da seguinte forma:

- Se  $X$  é un conxunto, entón  $FX = (X \sqcup \{*_X\}, *_X)$ .
- Se  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación parcial,  $Ff: FX \rightarrow FY$  é tal que

$$Ff(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \text{dom}(f), \\ *_Y, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

En particular,  $Ff(*_X) = *_Y$ , polo que é un morfismo de conxuntos punteados.

Verifiquemos que  $F$  é, en efecto, un functor:

En primeiro lugar, tense que  $F\text{Id}_X(x) = \text{Id}_X(x) = x$  para todo  $x \in X$ , e ademais  $F\text{Id}_X(*_X) = *_X$ , polo que  $F\text{Id}_X = \text{Id}_{FX}$ . Consideramos agora as aplicacións parciais  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  e un elemento  $x \in X$ , e imos ver que  $F(gf)(x) = (FgFf)(x)$ .

Se  $x$  está no dominio de  $gf$ , entón está no de  $f$  e  $f(x)$  no de  $g$ , polo que a igualdade é inmediata. En caso contrario, temos que  $F(gf)(x) = *_Z$ ; recordamos que o dominio de  $gf$  é precisamente o conxunto  $\text{dom}(f) \cap f^{-1}(\text{dom}(g))$ , así que temos que analizar dúas situacións:

- Se  $x$  non está no dominio de  $f$ , entón  $Ff(x) = *_Y$  e  $Fg(*_Y) = *_Z$ , probando a igualdade.
- Se  $x$  está no dominio de  $f$  pero  $f(x)$  non está no de  $g$ , entón verifícanse as igualdades  $Fg(f(x)) = Fg(Ff(x)) = *_Z$ , como se quería probar.

Se  $f, g: X \rightarrow Y$  son aplicacións parciais tales que  $Ff = Fg$ , entón, como  $*_Y$  non pertence a  $f(\text{dom}(f))$  nin a  $g(\text{dom}(g))$ , a primeira igualdade asegúranos que

os dominios son iguais e que as aplicacións coinciden neles, polo que son a mesma aplicación. Isto permítenos concluír que  $F$  é fiel.

Se  $g: FX \rightarrow FY$  é un morfismo de conxuntos punteados, definimos a aplicación  $f: X - g^{-1}(\{*_Y\}) \subset X \rightarrow Y$  tal que  $f(x) = g(x)$ . Entón  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación parcial e tense que  $Ff = g$ , polo que  $F$  é pleno.

Por último, se  $(X, x)$  é un conxunto punteado, podemos considerar a aplicación  $f: F(X - \{x\}) \rightarrow (X, x)$  definida mediante  $f(a) = a$  para todo  $a \in X - \{x\}$  e  $f(*_{X-\{x\}}) = x$ . Así definida, é un morfismo de conxuntos punteados bixectivo, é dicir, un isomorfismo, probando que  $F$  é esencialmente sobrexectivo.

Pola Observación 3.4, obtemos unha equivalencia de categorías.

3. Sexa  $\mathbf{BVect}_K^{fd}$  é a categoría de  $K$ -espazos vectoriais de dimensión finita cunha base elixida. Temos un functor covariante  $F: \mathbf{BVect}_K^{fd} \rightarrow \mathbf{Mat}_K$  que envía cada espazo vectorial con base prefixada na súa dimensión e cada aplicación lineal na súa representación matricial nas bases correspondentes. Este functor é plenamente fiel, xa que con bases fixadas, as matrices e as aplicacións lineais están en correspondencia biunívoca, e é esencialmente sobrexectivo, sen máis que considerar  $K^n$  coa base canónica para calquera enteiro positivo  $n$ . Empregando de novo a Observación 3.4,  $F$  define unha equivalencia de categorías.

En cada unha das seccións restantes deste capítulo, presentamos un exemplo particular de equivalencia de categorías.

## 3.2. O grupoide fundamental

**Definición 3.6.** Un *grupoide* é unha categoría pequena onde todos os morfismos son isomorfismos.

Definimos a categoría **Groupoid**, onde os obxectos son grupoides e os morfismos son funtores entre grupoides.

Se  $X$  é un espazo topolóxico, o seu *grupoide fundamental* é a categoría  $\Pi_1(X)$  onde os obxectos son os puntos de  $X$ , un morfismo  $x \rightarrow y$  é unha clase de equivalencia de camiños homótopos con punto inicial  $x$  e punto final  $y$ , e a composición é a clase do produto de camiños, que é unha operación ben definida.  $\Pi_1(X)$  é un grupoide, xa que cada camiño ten un camiño oposto.

**Proposición 3.7.** *A asignación definida polo diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{\Pi_1} & \mathbf{Groupoid} & & \Pi_1(X) & \xrightarrow{\Pi_1(f)} & \Pi_1(Y) \\ \\ X & \longmapsto & \Pi_1(X) & & x & \longmapsto & f(x) \\ f \downarrow & & \downarrow \Pi_1(f) & & [\gamma] \downarrow & & \downarrow [f\gamma] \\ Y & \longmapsto & \Pi_1(Y) & & y & \longmapsto & f(y) \end{array}$$

é functorial.

*Demostración.* É claro que  $\Pi_1$  preserva as identidades. Sexan  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  aplicacións continuas. Entón, se  $\gamma$  é un camiño en  $X$  con comezo en  $a$  e final en  $b$ , temos que  $f\gamma$  é un camiño en  $Y$  de  $f(a)$  a  $f(b)$ , polo que se cumpre a seguinte igualdade:

$$\Pi_1(gf)([\gamma]) = [gf\gamma] = \Pi_1(g)([f\gamma]) = (\Pi_1(g)\Pi_1(f))([\gamma]),$$

de onde deducimos que  $\Pi_1$  preserva a composición.  $\square$

**Proposición 3.8.** *Sexa  $X$  un espazo topolóxico conexo por camiños e  $x_0$  un punto de  $X$ . Entón,  $\mathbf{B}\pi_1(X, x_0)$  e  $\Pi_1(X)$  son categorías equivalentes.*

*Demostración.* Sexa  $I: \mathbf{B}\pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X)$  o functor inclusión, é dicir, tal que  $I* = x_0$  e  $I[\gamma] = [\gamma]$ . Probarase que é plenamente fiel e esencialmente sobrexectivo. O resultado séguese entón do Teorema 3.3, xa que as categorías involucradas son pequenas.

Por definición,  $I$  é plenamente fiel, xa que os morfismos de  $x_0$  en si mesmo en  $\Pi_1(X)$  son precisamente os lazos baseados en  $x_0$ . Se  $x \in X$ , como  $X$  é conexo por camiños existe un camiño  $\gamma$  con punto inicial  $x_0$  e punto final  $x$ , o que proba que  $x \simeq x_0 = I*$  en  $\Pi_1(X)$ .  $\square$

### 3.3. Teoría de Galois

Imos recordar o teorema fundamental da teoría de Galois de extensión de corpos, estudado durante o transcurso do grao, na materia de Ecuacións Alxébricas.

**Definición 3.9.** Sexa  $E|F$  unha extensión de corpos.

- Definimos o grupo de Galois da extensión como  $\text{Gal}(E|F)$ , o grupo de automorfismos de corpos de  $E$  que deixan fixos os elementos de  $F$ .
- Se  $H$  é un subgrupo de  $\text{Aut}(E)$ , definimos o subcorpo de  $E$  que queda fixo por  $H$  como  $E^H = \{a \in E \mid \sigma(a) = a \text{ para todo } \sigma \in H\}$ .

Consideramos, dada unha extensión de corpos  $E|F$  con grupo de Galois  $G$ , os conxuntos  $\text{Sub}(E|F)$  de corpos entre  $F$  e  $E$  e  $\text{Sub}(G)$  de subgrupos de  $H$ .

**Teorema 3.10** ([17] Theorem 84). *Sexa  $E|F$  unha extensión de corpos e  $G = \text{Gal}(E|F)$ . Se  $E|F$  é de Galois e finita, isto é, unha extensión de corpos onde  $E$  ten dimensión finita como  $F$ -espazo vectorial, todos os elementos de  $E$  son alxébricos sobre  $F$  e  $E^G = F$ . Entón, temos unha bixección que troca a orde da inclusión dada por*

$$\text{Sub}(E|F) \longrightarrow \text{Sub}(G)$$

$$L \longmapsto \text{Gal}(E|L)$$

$$E^H \longleftarrow H$$

Agora imos introducir as categorías coas que imos reformular o teorema. Definimos a categoría  $\mathbf{Orb}_G$ :

- Os obxectos son os subgrupos de  $G$ , non necesariamente normais.
- Un morfismo  $f: H \rightarrow K$  é unha aplicación  $G$ -equivariante  $f: G/H \rightarrow G/K$ , onde  $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ , con respecto ás accións naturais  $G \curvearrowright G/H$  e  $G \curvearrowright G/K$ . Por conmutar coas accións, se tomamos  $\tau \in G$  tal que  $f(H) = \tau K$ , entón temos que  $f(\sigma H) = \sigma \tau K$  para todo  $\sigma \in G$ . Ademais, para calquera elemento  $h \in H$ , é evidente que  $hH = H$ , así que as imaxes por  $f$  coinciden, permitíndonos deducir que  $h\tau K = \tau K$ , é dicir, que  $\tau^{-1}h\tau \in K$ . Pola arbitrariedade de  $K$ , obtemos a inclusión  $\tau^{-1}H\tau \subset K$ .

Por outra banda, definimos  $\mathbf{Field}_F^E$  como a categoría que ten por obxectos os corpos intermedios entre  $F$  e  $E$  e como morfismos os homomorfismos de corpos que deixan  $F$  fixo.

O teorema fundamental da teoría de Galois pódese enunciar do seguinte xeito:

**Teorema 3.11.** *Os funtores contravariantes dados polos diagramas*

$$\mathbf{Orb}_G \xrightarrow{\Phi} \mathbf{Field}_F^E$$

$$\begin{array}{ccccc} \sigma H & & H & \longmapsto & E^H & & \tau(\alpha) \\ \downarrow & & f \downarrow & & \uparrow \Phi f & & \uparrow \\ \sigma \tau K & & K & \longmapsto & E^K & & \alpha \end{array}$$

$$\mathbf{Field}_F^E \xrightarrow{\Psi} \mathbf{Orb}_G$$

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \text{Gal}(L|F) = G_L & \sigma\tau G_L \\ \tau \downarrow & & \uparrow & \uparrow \\ N & \longrightarrow & \text{Gal}(N|F) = G_N & \sigma G_N \end{array}$$

conforman un isomorfismo dual de categorías. En particular, inducen unha equivalencia dual de categorías.

*Demostración.* Que as composicións son as identidades nos obxectos obtense do Teorema 3.10. Vexamos que as asignacións están ben definidas.

Se  $f: H \rightarrow K$  é un morfismo de  $\mathbf{Orb}_G$  e existen  $\tau, \tau'$  tales que  $f(H) = \tau K = \tau' K$ , temos que verificar que  $\tau(\alpha)$  coincide con  $\tau'(\alpha)$  para  $\alpha \in E^K$ . Isto é evidente, ó termos que  $\tau^{-1}\tau' \in K$ , así que  $\tau^{-1}\tau'(\alpha) = \alpha$ . Ademais, para todo  $\sigma \in H$ , cúmprese que  $\tau^{-1}\sigma\tau \in K$ , así que  $\sigma\tau \in \tau K$  probando desa forma que  $\sigma(E^K) \subset E^H$ .

A boa definición de  $\Psi$ , así como a functorialidade de ambos e o feito de que son inversos, séguese directamente da definición.  $\square$

### 3.4. Xeometría alxébrica: dualidade álgebra-xeometría

As ideas desta sección baséanse na referencia [7].

**Definición 3.12.** Sexa  $K$  un corpo alxebricamente pechado e  $\mathbb{A}^n$  un  $K$ -espazo afín de dimensión  $n$  cun sistema de coordenadas fixado. Definimos a topoloxía de Zariski sobre  $\mathbb{A}^n$  a través da colección dos seus pechados: para cada  $F \subset K[X_1, \dots, X_n]$ , definimos un pechado asociado

$$V(F) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \forall f \in F\}.$$

Un *subconxunto alxébrico afín* é un pechado de  $\mathbb{A}^n$  na topoloxía de Zariski. Un morfismo  $f: V \subset \mathbb{A}^n \rightarrow W \subset \mathbb{A}^m$  de subconxuntos afíns é unha restrición en dominio e codominio dunha función polinómica  $\tilde{f}: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ . Denotaremos a categoría resultante por **Aff**.

**Definición 3.13.** Sexa  $K$  un corpo alxebricamente pechado. Unha álgebra  $A$  sobre  $K$  é un  $K$ -espazo vectorial cunha operación binaria  $A^2 \rightarrow A$  verificando as seguintes propiedades para calquera  $x, y, z \in A, a, b \in K$ .

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$
- $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y.$

$$\blacksquare (ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y).$$

A dise *reducida* se o cadrado de todo elemento non nulo tampouco é nulo.

A dise *finitamente xerada* se existen  $a_1, \dots, a_n \in A$  tales que  $A = K[a_1, \dots, a_n]$ , é dicir, se todos os elementos de  $A$  se poden escribir como unha combinación lineal de potencias e produtos dos elementos  $a_1, \dots, a_n$ .

Un *morfismo de  $K$ -álxebras*  $f: A \rightarrow B$  é unha aplicación lineal que ademais verifica que  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  para todo  $x, y \in A$ .

A categoría de  $K$ -álxebras reducidas e finitamente xeradas denótase por **RedAlg**.

**Lema 3.14.** *Sexa  $V \subset \mathbb{A}^n$  un subconxunto afín, e consideramos o ideal  $I = I(V)$  dos polinomios de  $K[X_1, \dots, X_n]$  que se anulan en todos os elementos de  $V$ . Entón:*

1.  $K[V] = \frac{K[X_1, \dots, X_n]}{I}$  é unha  $K$ -álgebra reducida e finitamente xerada.
2. Se  $x \in \mathbb{A}^n$  é tal que  $f(x) = 0$  para todo  $f \in I(V)$ , entón  $x$  pertence a  $V$ .

*Demostración.*

1. En primeiro lugar, comprobemos que o produto de  $K[X_1, \dots, X_n]$  pasa ó cociente. Se  $f_0, g_0, f_1, g_1 \in K[X_1, \dots, X_n]$  son tales que  $f_0 + I = f_1 + I$  e  $g_0 + I = g_1 + I$ , entón cúmprese:

$$f_0g_0 - f_1g_1 = f_0g_0 - f_0g_1 + f_0g_1 - f_1g_1 = f_0(g_0 - g_1) + (f_0 - f_1)g_1 \in I.$$

Os axiomas de  $K$ -álgebra verificanse polas propiedades do anel cociente.

Sexa  $f \in K[X_1, \dots, X_n] - I$ . Entón, existe  $x \in V$  tal que  $f(x) \neq 0$ , e, como  $K$  é un corpo,  $f(x)^2 \neq 0$ , polo que  $f^2 \notin I$  e  $K[V]$  é reducida.

Por último, é inmediato que  $K[V] = K[X_1 + I, \dots, X_n + I]$ , así que é finitamente xerada.

2. Supoñemos que  $x$  non está en  $V$ . Entón, se  $F$  é un subconxunto do anel de polinomios que define a  $V$ , temos que existe un  $g \in F$  tal que  $g(x) \neq 0$ . Agora ben,  $F \subset I$  por definición, polo que acabamos de probar o contrarrecíproco.  $\square$

**Teorema 3.15.** *Sexan  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{A}^m$  espazos afíns sobre  $K$ . O functor contravariante descrito a continuación determina unha equivalencia dual de categorías.*

$$\mathbf{Aff} \xrightarrow{F} \mathbf{RedAlg}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longmapsto & K[V] & & [g \circ f] \\ f \downarrow & & \uparrow f^* & & \uparrow \\ W & \longmapsto & K[W] & & [g] \end{array}$$

*Demostración.* En primeiro lugar, polo Lema 3.14 o functor está ben definido nos obxectos. Sexa  $f: V \subset \mathbb{A}^n \rightarrow W \subset \mathbb{A}^m$  é un morfismo de subconxuntos afíns, e vexamos que a aplicación  $f^*$  está ben definida: se  $[g] = [h]$ ,  $g$  e  $h$  coinciden en  $W$  e polo tanto as composicións con  $f$  son polinomios que coinciden en  $V$ . Ademais, a composición de polinomios é distributiva con respecto á suma e ó produto, así que  $f^*$  é, en efecto, un morfismo de álxebras. Por último, a asignación é un functor contravariante por estar definida por precomposición.

Probemos que  $F$  é un functor fiel. Supoñemos  $f, g: V \rightarrow W$  tales que  $f^* = g^*$ , o cal implica que  $[X_i \circ (f - g)] = [f_i - g_i] = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , o cal equivale a que  $f$  e  $g$  coinciden en coordenadas.

Para demostrar que  $F$  é un functor pleno, sexa  $\varphi: K[W] \rightarrow K[V]$  un morfismo de álxebras e  $f_i \in K[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $[f_i] = \varphi[X_i]$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Consideramos a función polinómica resultante restrinxida a  $V$ ,  $f: V \rightarrow \mathbb{A}^m$ , e tomamos un polinomio arbitrario

$$g = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} a_\nu X_1^{\nu_1} \dots X_m^{\nu_m}.$$

Verifícase, pola definición de morfismo de álxebras, que

$$\varphi[g] = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} a_\nu \varphi[X_1]^{\nu_1} \dots \varphi[X_m]^{\nu_m} = \left[ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} a_\nu f_1^{\nu_1} \dots f_m^{\nu_m} \right] = [g \circ f].$$

Só resta probar que  $f(V)$  está contido en  $W$ . Pola linealidade de  $\varphi$  e a igualdade anterior, temos que  $g \circ f$  pertence a  $I(V)$  para todo  $g \in I(W)$ . Así, se  $x$  é un elemento de  $V$ , dado calquera  $g \in I(W)$  tense que  $g(f(x)) = 0$ , e polo Lema 3.14, deducimos que  $f(x) \in W$ .

Para rematar, vexamos que o functor é esencialmente sobrexectivo: En efecto, se  $A$  é unha  $K$ -álgebra reducida e finitamente xerada, supoñamos  $A = K[a_1, \dots, a_n]$ , escribindo  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , podemos considerar a aplicación avaliación  $\text{ev}_a: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$ , que é un homomorfismo sobrexectivo de aneis. Sexa  $V$  o subconxunto alxébrico xerado por  $\text{Ker}(\text{ev}_a)$ . Polo primeiro teorema de isomorfía, a aplicación avaliación induce un isomorfismo de espazos vectoriais  $\varphi: K[V] \rightarrow A$ . É unha comprobación directa que tanto  $\varphi$  como a súa inversa conservan o produto, rematando así a proba grazas á Observación 3.4.  $\square$

### 3.5. Álxebras de Boole e a dualidade de Stone

Esta sección segue o exposto en [4].

**Definición 3.16.** Unha *álgebra de Boole* é unha séxtupla  $(A, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ , onde  $A$  é un conxunto,  $\wedge$  e  $\vee$  son dúas operacións binarias internas en  $A$ ,  $'$  é unha aplicación de  $A$  en

$A$  e  $0$  e  $1$  son elementos destacados de  $A$ , verificando todos eles as seguintes propiedades, para calquera  $a, b, c \in A$ :

1.  $a \vee 0 = a = a \wedge 1$ .
2.  $a \vee 1 = 1$  e  $a \wedge 0 = 0$ .
3.  $a = a \wedge a = a \vee a$  (Idempotencia).
4.  $\wedge$  e  $\vee$  verifican as propiedades conmutativa e asociativa.
5.  $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$  e  $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$  (Propiedades distributivas).
6.  $a \vee (a \wedge b) = a$  e  $a \wedge (a \vee b) = a$  (Leis de absorción).
7.  $a'' = a$ .
8.  $0' = 1$ .
9.  $a \vee a' = 1$  e  $a \wedge a' = 0$ .
10.  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$  e  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$  (Leis de De Morgan).

Sexa **Boole** a categoría de álxebras de Boole, cuxos morfismos  $f: A \rightarrow B$  son aplicacións tales que, para calquera  $a, b \in A$ , temos que

- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ .
- $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ .
- $f(a') = f(a)'$ .

Por outra banda, imos definir a categoría de espazos de **Stone** como a subcategoría de **Top** formada polos espazos compactos, Hausdorff, e totalmente desconexos, i.e., os únicos subespazos conexos son os puntos. No transcurso da presente sección, estableceremos unha equivalencia dual entre estas categorías, un caso particular da *dualidade de Stone*. Para isto, imos precisar dalgúns resultados intermedios e dunha maior comprensión da estrutura das álxebras de Boole.

**Definición 3.17.** Sexa  $A$  unha álgebra de Boole. Un ideal  $I$  de  $A$  é un subconxunto que contén a  $0$ , que é pechado para  $\vee$  e que verifica a inclusión  $I \wedge A \subset I$ .

Un ideal dise *propio* se o contido é estrito, e dise *maximal* se é propio e non está contido en ningún outro ideal propio.

**Proposición 3.18.** *Un ideal propio  $I$  de  $A$  está contido nun ideal maximal.*

*Demostración.* Procedemos, como é habitual, empregando o lema de Zorn. Sexa  $\mathcal{F}$  a familia de ideais propios que conteñen a  $I$ , non baleira xa que a ela pertence o propio  $I$ . Tomamos unha cadea en  $\mathcal{F}$ , e consideramos  $J$ , a unión de todos os elementos da cadea. Compróbase directamente que  $J$  é un ideal, polo que, para aplicar o lema de Zorn, basta con ver que é distinto de  $A$ .

Supoñamos, por redución ó absurdo, que 1 pertence a  $J$ . Entón 1 pertence a algún elemento da cadea  $K$ , pero entón calquera  $a \in A$  verifica que  $a = a \wedge 1 \in K$ , o que contradí que  $K$  sexa un ideal propio.  $\square$

En particular, todo elemento distinto de 1 está contido nun ideal maximal. En efecto, xa sabemos que se un ideal contén a 1, entón non pode ser propio, así que collemos calquera outro elemento  $a$  de  $A$  e definimos  $I = \{b \in A \mid a \vee b = a\}$ . Claramente,  $I$  é distinto de  $A$  ó non conter a 1, 0 está en  $I$ ,  $I \vee I \subset I$  pola propiedade asociativa e  $I \wedge A \subset I$  pola propiedade distributiva e pola lei de absorción. Aplicándolle a proposición anterior a  $I$ , obtemos un ideal maximal ó que pertence  $a$ .

**Lema 3.19.** *Sexa  $\mathbf{2}$  a álgebra de Boole trivial con só dous elementos e  $p$  un elemento de  $A$  distinto de 0. Entón, existe  $x: A \rightarrow \mathbf{2}$  un homomorfismo tal que  $x(p) = 1$ .*

*Demostración.* Sexa  $I$  un ideal maximal que contén a  $p' \neq 1$ , o cal implica que non contén a  $p$ . Definimos  $x = \mathcal{X}_{A-I}$ , a función característica de  $A - I$ , e imos ver que é un homomorfismo. Sexan  $a$  e  $b$  elementos de  $A$ .

- Se  $a \in I$ , entón  $a'$  non pertence a  $I$ , e temos que  $x(a') = 1 = x(a)'$ . O mesmo sucede se  $a \notin I$ .
- Se  $a$  e  $b$  están en  $I$ , entón  $a \wedge b, a \vee b \in I$  e temos que

$$x(a \wedge b) = 0 = x(a) \wedge x(b),$$

$$x(a \vee b) = 0 = x(a) \vee x(b).$$

- Se  $a$  e  $b$  non están en  $I$ , temos que  $a'$  e  $b'$  si están en  $I$ , e polo tanto, polas Leis de De Morgan,

$$x(a \vee b) = x(a' \wedge b')' = 1 = x(a) \vee x(b),$$

$$x(a \wedge b) = x(a' \vee b')' = 1 = x(a) \wedge x(b).$$

- Se  $a \in I$  e  $b \notin I$ , entón  $a \wedge b \in I$ , o cal nos permite concluír como no segundo caso, e  $b' \in I$ . Polo tanto,  $x(a' \wedge b') = 0$ , e polas Leis de De Morgan, séguese que

$$x(a \vee b) = 1 = x(a) \vee x(b),$$

o que remata a proba. □

**Proposición 3.20.** *Dotando a  $\mathbf{2}$  da topoloxía discreta, entón  $\mathbf{Boole}(A, \mathbf{2}) = \mathcal{S}(A)$  é un espazo de Stone coa topoloxía relativa.*

*Demostración.* En primeiro lugar, notamos que  $\mathbf{Set}(A, \mathbf{2}) = \mathbf{2}^A$  é un espazo de Stone, ó ser un produto de espazos de Stone: que o produto de espazos Hausdorff e de espazos totalmente desconexos mantén esas propiedades compróbase de xeito directo e a compacidade é debida ó teorema de Tijonov. Como ser Hausdorff e ser totalmente desconexo son propiedades hereditarias, xa obtemos que  $\mathcal{S}(A)$  as verifica. Polo tanto, só precisamos ver que  $\mathcal{S}(A)$  é pechado para rematar.

A aplicación  $\wedge: \mathbf{2} \times \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$  é continua por ter un dominio discreto, e calquera proxección  $\pi_a: \mathbf{2}^A \rightarrow \mathbf{2}$ ,  $a \in A$ , é continua por definición de topoloxía produto. En consecuencia, temos que o conxunto

$$\bigcap_{(a,b) \in A \times A} \{x \in \mathbf{2}^A \mid x(a \wedge b) = x(a) \wedge x(b)\} = \bigcap_{(a,b) \in A \times A} (\pi_{a \wedge b}, \wedge \circ (\pi_a, \pi_b))^{-1}(\Delta)$$

é pechado, onde  $\Delta$  é a diagonal de  $\mathbf{2}^A \times \mathbf{2}^A$ , pechada polo carácter Hausdorff de  $\mathbf{2}^A$ . De xeito análogo, razónase para as operacións  $'$  e  $\vee$ , e intersecando eses tres pechados, obtemos  $\mathcal{S}(A)$ . □

**Proposición 3.21.** *Se  $A$  é unha álgebra de Boole, entón existe unha inclusión de  $A$  na álgebra de Boole  $\mathbf{Clop}(A)$  formada pola familia de conxuntos simultaneamente abertos e pechados de  $\mathcal{S}(A)$ .*

*Demostración.* En primeiro lugar,  $\mathbf{Clop}(A)$  é unha álgebra de Boole, xa que nela se atopan o baleiro e o total e é pechada para os complementos e as unións finitas.

Definimos  $f: A \rightarrow \mathbf{Clop}(A)$  tal que  $f(a) = \pi_a^{-1}(\{1\})$ . Imos ver, en primeiro lugar, que este é un homomorfismo: tense que

$$f(a') = \{x \in \mathcal{S}(A) \mid x(a') = 1\} = \{x \in \mathcal{S}(A) \mid x(a)' = 1\} = \mathbf{2} - f(a) = f(a)'$$

para todo  $a \in A$ . De xeito análogo,  $f$  conserva as operacións  $\wedge$  e  $\vee$ .

Para comprobar a inxectividade, primeiro observamos que se  $f(a) = \emptyset$ , entón polo Lema 3.19 aseguramos que  $a = 0$ . Así, se  $f(a) = f(b)$ , entón temos que  $f(a \wedge b')$  e  $f(a' \wedge b)$  son baleiros, así que resulta que  $a \wedge b'$  e  $a' \wedge b$  son nulos. A partir de aquí, obtemos as igualdades

$$b = b \vee (a \wedge b') = (b \vee a) \wedge (b \vee b') = a \vee b,$$

$$a = a \vee (a' \wedge b) = (a \vee a') \wedge (a \vee b) = a \vee b.$$

En particular,  $a = b$ . En realidade, acabamos de probar que se un homomorfismo ten núcleo nulo, entón é inxectivo.

Deste xeito,  $f: A \rightarrow f(A)$  é un homomorfismo bixectivo de álxebras de Boole, e pódese comprobar directamente que é un isomorfismo. □

**Teorema 3.22.** *As categorías **Boole** e **Stone** son dualmente equivalentes.*

*Demostración.* Definimos un functor contravariante dado polo seguinte diagrama:

**Boole**  $\longrightarrow$  **Stone**

$$\begin{array}{ccc} A & \longleftarrow & \mathcal{S}(A) \\ f \downarrow & & \uparrow \\ B & \longleftarrow & \mathcal{S}(B) \end{array} \quad \begin{array}{c} xf \\ \uparrow \\ x \end{array}$$

Trátase, aínda que con outro codominio, do functor Hom contravariante, así que xa temos asegurada a functorialidade da asignación. Probaremos que estamos nas condicións de aplicar a Observación 3.4.

- Supoñamos que  $f, g: A \rightarrow B$  son tales que para todo  $x \in \mathcal{S}(B)$ , temos que  $xf = xg$ . Entón, dado  $a \in A$ , deducimos a igualdade dos conxuntos

$$\{x \in \mathcal{S}(A) \mid x(f(a)) = 1\} = \{x \in \mathcal{S}(A) \mid x(g(a)) = 1\}.$$

Polo Teorema 3.21,  $f(a) = g(a)$ . Así, o functor é fiel.

- Sexa  $g: \mathcal{S}(B) \rightarrow \mathcal{S}(A)$  unha aplicación continua. Definimos  $f: A \rightarrow B$  de xeito que  $\{x \in \mathcal{S}(B) \mid x(f(a)) = 1\} = g^{-1}(\{x \in \mathcal{S}(A) \mid x(a) = 1\})$  para todo  $a \in A$ , ben definida polo Teorema 3.21. Así elixida  $f$ , consideramos  $x \in \mathcal{S}(B)$  e temos que  $g(x)(a) = x(f(a))$  para todo  $a \in A$ . Temos probada a plenitude.

- Sexa  $T$  un espazo de Stone. Entón, o conxunto  $A$  formado polos seus subconxuntos abertos e pechados é unha álgebra de Boole, e imos ver que a súa imaxe polo functor é homeomorfa ó espazo  $T$ .

Sexa  $f: T \rightarrow \mathcal{S}(A)$  onde  $f(t): A \rightarrow \mathbf{2}$  está definida por

$$f(t)(F) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in F, \\ 0, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

É inmediato que  $f(t) \in \mathcal{S}(A)$  para todo  $t \in T$ .

Se  $f(t) = f(s)$ , entón estamos a dicir que todo conxunto aberto e pechado que contén a  $t$  contén tamén a  $s$ . Imos probar que  $C$ , seguindo un argumento de [6], que a intersección de todos os conxuntos abertos e pechados que conteñen a  $t$ , é un conxunto conexo, o cal implicará, polo carácter totalmente desconexo do espazo, que  $C = \{t\}$ , polo que  $t = s$ , concluíndo así que  $f$  é inxectiva. En efecto, sexan  $G$  e  $H$  pechados de  $C$  cuxa unión é  $C$ , e supoñamos que  $t$  está en  $G$ . Como  $C$  é pechado, estes dous conxuntos tamén son pechados en  $T$ , que é normal por ser compacto e Hausdorff, así que existirán dous abertos  $U$  e  $V$  tales que

$$G \subset U, \quad H \subset V, \quad \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset.$$

En particular,  $C$  está contido en  $U \cup V$ . Aplicando as leis de De Morgan e a definición de compactidade, isto implica que existe unha intersección finita de conxuntos abertos e pechados que conteñen a  $t$  contida en  $U \cup V$ , á que chamaremos  $F$ . Verifícase:

$$\overline{U \cap F} \subset \bar{U} \cap F = \bar{U} \cap ((U \cup V) \cap F) = ((\bar{U} \cap U) \cup (\bar{U} \cap V)) \cap F = U \cap F,$$

polo que  $U \cap F$  é aberto e pechado, e contén a  $t$ , así que contén a  $C$ , e polo tanto a  $H$ . Logo,  $H$  está contido en  $U$  e en  $V$ , así que é baleiro.

Para ver a sobrexectividade, basta ver que, para todo  $x \in \mathcal{S}(A)$ , a intersección  $\bigcap_{x(F)=1} F$  non é baleira, xa que para un elemento  $y$  desta intersección teremos que  $f(y) = x$ . En efecto, a familia  $\{F \in A \mid x(F) = 1\}$  verifica a propiedade da intersección finita grazas a que  $x$  é un homomorfismo de álgebras de Boole, así que pola compactidade de  $T$  obtemos o desexado.

Para calquera  $F \in A$ , temos que

$$(\pi_F \circ f)^{-1}(\{1\}) = \{t \in T \mid f(t)(F) = 1\} = F$$

é aberto e pechado, polo que todas as compoñentes de  $f$  son continuas. Por último,  $f$  é pechada por ter dominio compacto e codominio Hausdorff, así que é un homeomorfismo.  $\square$

En particular, pola Proposición 2.3, o functor desta equivalencia reflicte isomorfismos, así que as álxebras da Proposición 3.21 son isomorfas, resultado que se coñece como teorema de representación de Stone de álxebras de Boole.

Cando  $A$  é finita,  $\mathbf{2}^A$  é un espazo discreto, así que  $\text{Clop}(A) = P(\mathcal{S}(A))$ , polo que deducimos que todas as álxebras de Boole finitas son isomorfas a conxuntos de partes de conxuntos finitos. É máis, obtemos unha equivalencia dual entre a categoría de álxebras de Boole finitas e a de conxuntos finitos.

A dualidade de Stone goza de numerosas xeneralizacións. Unha delas involucra a categoría **Mult**, presentada no Exemplo 1.4, e a unha extensión do concepto de álgebra de Boole chamada *álgebra de Boole multivaluada*, que se pode consultar en [10].



## Capítulo 4

# Adxuncións

Durante este capítulo, empregáronse principalmente [2, 9, 11]. De novo, acudiremos a outras referencias para exemplos concretos.

### 4.1. Definición e propiedades

Como se mencionaba na Introducción, a Teoría de Categorías xorde en primeira instancia para vertebrar formalmente o concepto de transformación natural, a partir do cal xorde a idea de equivalencia presentada no capítulo anterior. Agora ben, poder identificar dúas categorías enteiras a través de dúas observacións é, evidentemente, algo moi ambicioso, polo que nos gustaría achar unha identificación máis débil e habitual. Isto conduce ó estudo das *adxuncións*:

**Definición 4.1.** Sexan  $C$  e  $D$  categorías localmente pequenas e  $F: C \rightarrow D$ ,  $G: D \rightarrow C$  dous funtores. Diremos que  $F$  é *adxunto pola esquerda* a  $G$ , e escribiremos  $F \dashv G$ , se existe un isomorfismo natural  $\Phi: D(Fc, d) \cong C(c, Gd)$  tanto en  $c$  como en  $d$ , isto é, que o diagrama seguinte é conmutativo para calquera  $\varphi: c' \rightarrow c$  en  $C$  e  $\psi: d \rightarrow d'$  en  $D$ .

$$\begin{array}{ccc} f \dashv \longrightarrow & \psi f(F\varphi) \\ \\ D(Fc, d) \longrightarrow & D(Fc', d') \\ \Phi_{c,d} \downarrow & \downarrow \Phi_{c',d'} \\ C(c, Gd) \longrightarrow & C(c', Gd') \\ \\ g \dashv \longrightarrow & (G\psi)g\varphi \end{array}$$



$$\begin{array}{ccccccc}
& & \text{Id}_{F_{c'}} & \longmapsto & Ff & & \\
& & & & & & \\
\text{Id}_{F_{c'}} & & D(F_{c'}, F_{c'}) & \longrightarrow & D(Fc, F_{c'}) & & Ff & & c \xrightarrow{\varphi=f} c' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\eta'_c & & C(c', GF_{c'}) & \longrightarrow & C(c, GF_{c'}) & & \Phi_{c, F_{c'}}(Ff) & & F_{c'} \xrightarrow{\psi=\text{Id}_{F_{c'}}} F_{c'} \\
& & & & & & & & \\
& & \eta_{c'} & \longmapsto & \eta_{c'} f & & & & 
\end{array}$$

Que  $\epsilon$  é unha transformación natural vese de xeito análogo.

Imos comprobar a primeira identidade triangular (a segunda é, de novo, análoga). Dado  $c$  un obxecto de  $C$ , perseguiamos a identidade no diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \epsilon_{Fc} & \longmapsto & F\eta_c \epsilon_{Fc} & & \\
& & & & & & \\
\epsilon_{Fc} & & D(FGFc, Fc) & \longrightarrow & D(Fc, Fc) & & F\eta_c \epsilon_{Fc} & & c \xrightarrow{\varphi=\eta_c} GFc \\
\uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\text{Id}_{GFc} & & C(GFc, GFc) & \longrightarrow & C(c, GFc) & & \Phi_{c, Fc}(F\eta_c \epsilon_{Fc}) & & Fc \xrightarrow{\psi=\text{Id}_{Fc}} Fc \\
& & & & & & & & \\
& & \text{Id}_{GFc} & \longmapsto & \eta_c & & & & 
\end{array}$$

Como  $\Phi_{c, Fc}$  é unha bixección, obtemos que  $\epsilon_{Fc} F\eta_c = \text{Id}_{Fc}$ .

Reciprocamente, supoñamos que temos a unidade e a counidade  $\eta$  e  $\epsilon$  coas identidades triangulares. Entón, para calquera  $c$  e  $d$  obxectos de  $C$  e  $D$ , definimos

$$\Phi_{c,d}: D(Fc, d) \rightarrow C(c, Gd) \text{ tal que } \Phi_{c,d}(f) = (Gf)\eta_c,$$

$$\Psi_{c,d}: C(c, Gd) \rightarrow D(Fc, d) \text{ tal que } \Psi_{c,d}(g) = \epsilon_d Fg.$$

As aplicacións son mutuamente inversas: en efecto, partimos de  $g \in C(c, Gd)$ . Temos que:

$$\Phi_{c,d}(\Psi_{c,d}(g)) = G(\epsilon_d Fg)\eta_c = (G\epsilon_d)(GFg)\eta_c.$$

Por naturalidade de  $\epsilon$  e pola segunda identidade triangular, deducimos que

$$(G\epsilon_d)(GFg)\eta_c = (G\epsilon_d)\eta_{Gd} f = f.$$

Para a outra composición, razoamos do mesmo xeito.

Por último, dado o diagrama da Definición 4.1, levando  $f \in D(Fc, d)$  polo camiño superior chegamos ata

$$\Phi_{c', d'}(\psi f F\varphi) = (G\psi)(Gf)(GF\varphi)\eta_{c'},$$

mentres que polo camiño inferior acadamos

$$(G\psi)\Phi_{c,d}(f)\varphi = (G\psi)(Gf)\eta_c\varphi.$$

Ambos morfismos coinciden por naturalidade da unidade.  $\square$

A seguinte proposición xustifica que a adxunción se considere unha noción máis débil que a equivalencia.

**Proposición 4.3.** *Se  $F: C \rightarrow D$  e  $G: D \rightarrow C$  son funtores que definen unha equivalencia de categorías, entón son funtores adxuntos.*

*Demostración.* Sexan  $\eta: \text{Id}_C \cong GF$  e  $\epsilon': FG \cong \text{Id}_D$  dous isomorfismos naturais. Entón, a transformación natural  $\gamma = (G\epsilon')(\eta_G): G \Rightarrow G$  é un isomorfismo natural. Definimos a transformación  $\epsilon = \epsilon'(F\gamma^{-1}): FG \Rightarrow \text{Id}_D$ , e queremos probar que  $\eta$  e  $\epsilon$  verifican as identidades triangulares.

Imos ver que  $\beta'_F F\alpha$  é idempotente, para o que é suficiente comprobar que o seguinte diagrama, en  $D^C$ , é conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF & \xrightarrow{\epsilon_F} & F \\ \downarrow F\eta & & \downarrow FGF\eta & & \downarrow F\eta \\ FGF & \xrightarrow{F\eta_{GF}} & FGF GF & \xrightarrow{\epsilon_{FGF}} & FGF \\ & \swarrow \text{Id}_{FGF} & \downarrow FG\epsilon_F & & \downarrow \epsilon_F \\ & & FGF & \xrightarrow{\epsilon_F} & F \end{array}$$

Cada un dos tres cadrados conmuta, o primeiro pola naturalidade de  $\eta$  e os outros dous pola de  $\epsilon$ , así que só falta ver a conmutatividade do triángulo. Por naturalidade de  $\eta$ , o cadrado

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & G \\ \downarrow \eta_G & & \downarrow \eta_G \\ GF & \xrightarrow{GF\gamma^{-1}} & GF \end{array}$$

é conmutativo. Polo tanto, tense a segunda identidade triangular

$$G\epsilon\eta_G = G\epsilon'GF\gamma^{-1}\eta_G = G\epsilon'\eta_G\gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1} = \text{Id}_G.$$

En particular,  $FG\beta'_F F\alpha_{GF} = \text{Id}_F GF$ , así que o diagrama resulta conmutativo. Chegamos así a que  $\epsilon_F F\eta$  é un isomorfismo idempotente, polo que se verifica a primeira identidade triangular. Pola Proposición 4.2, obtemos que  $F \dashv G$ .  $\square$

Reciprocamente, a partir dunha adxunción, pode ser posible obter unha equivalencia entre dúas subcategorías adecuadas, as da seguinte definición.

**Definición 4.4.** Sexan  $F: C \rightarrow D$  e  $G: D \rightarrow C$  dous funtores que forman unha adxunción  $F \dashv G$ , con unidade  $\eta$  e counidade  $\epsilon$ . Definimos a *subcategoría de puntos fixos* de  $\eta$ , denotada por  $\text{Fix}(\eta)$ , como a subcategoría de  $C$  cos obxectos para os que a compoñente de  $\eta$  é un isomorfismo, con todos os morfismos entre eses obxectos. Do mesmo xeito, definimos  $\text{Fix}(\epsilon)$ .

**Proposición 4.5.** Nas condicións da Definición 4.4, obtemos unha equivalencia de categorías  $\text{Fix}(\eta) \simeq \text{Fix}(\epsilon)$ .

*Demostración.* Sexa  $c$  un obxecto de  $C$  tal que  $\eta_c$  é un isomorfismo. Entón,  $F\eta_c$  tamén o é, e pola primeira identidade triangular,  $\epsilon_{Fc}$  é un isomorfismo. Polo tanto, a restrición  $F: \text{Fix}(\eta) \rightarrow \text{Fix}(\epsilon)$  está ben definida, e o mesmo sucede para  $G$ . Por construción, as restricións de  $\eta$  e  $\epsilon$  son isomorfismos naturais, o que proba o resultado.  $\square$

En [14], desenvólvese esta idea como método para obter algunhas equivalencias coñecidas.

Por último, antes de comezar cos exemplos, imos a abordar a cuestión da unicidade de funtores adxuntos.

**Teorema 4.6.** Sexan  $F, F': C \rightarrow D$  e  $G: D \rightarrow C$  funtores tales que temos os pares adxuntos  $F \dashv G$  e  $F' \dashv G$ . Entón,  $F$  e  $F'$  son isomorfos en  $D^C$ .

*Demostración.* Compoñendo os isomorfismos naturais  $D(Fc, d) \cong C(c, Gd) \cong F(F'c, d)$ , obtemos un isomorfismo natural  $\Gamma: D(F(\cdot), \cdot) \cong D(F'(\cdot), \cdot)$ . Para  $\varphi: Fc \rightarrow F'c$ , perseguimos a identidade no diagrama conmutativo resultante.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id}_{Fc} & \longmapsto & \varphi \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Id}_{Fc} & & D(Fc, Fc) & \longrightarrow & D(Fc, F'c) & & \varphi \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Gamma_{c, Fc}(\text{Id}_{Fc}) & & D(F'c, Fc) & \longrightarrow & D(F'c, F'c) & & \Gamma_{c, F'c}(\varphi) \\
 & & & & & & \\
 & & \Gamma_{c, Fc}(\text{Id}_{Fc}) & \longmapsto & \varphi \Gamma_{c, Fc}(\text{Id}_{Fc}) & & 
 \end{array}$$

Particularizando  $\varphi = \Gamma_{c, F'c}^{-1}(\text{Id}_{F'c})$ , obtemos que  $\Gamma_{c, F'c}^{-1}(\text{Id}_{F'c})\Gamma_{c, Fc}(\text{Id}_{Fc}) = \text{Id}_{F'c}$ . Que a outra composición é a identidade correspondente compróbase analogamente.

Así, temos construída unha familia de isomorfismos  $\alpha_c = \Gamma_{c, Fc}(\text{Id}_{Fc}): F'c \rightarrow Fc$ . Entón, só resta ver que  $\alpha$  é natural. Procedemos en dúas etapas, como no inicio da proba do Teorema 4.2.

Se  $f: x \rightarrow y$  é un morfismo de  $C$ , temos os diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id}_{Fx} & \longrightarrow & Ff \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Id}_{Fx} & D(Fx, Fx) & \longrightarrow & D(Fx, Fy) & Ff \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \alpha_x & D(F'x, Fx) & \longrightarrow & D(F'x, Fy) & \Gamma_{x, Fy}(Ff) \\
 & & \alpha_x & \longrightarrow & (Ff)\alpha_x \\
 & & \text{Id}_{Fy} & \longrightarrow & Ff \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Id}_{Fy} & D(Fy, Fy) & \longrightarrow & D(Fx, Fy) & Ff \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \alpha_y & D(F'y, Fy) & \longrightarrow & D(F'x, Fy) & \Gamma_{x, Fy}(Ff) \\
 & & \alpha_y & \longrightarrow & \alpha_y F'f
 \end{array}$$

de onde se segue a naturalidade.  $\square$

**Corolario 4.7.** *Sexan  $F: C \rightarrow D$  e  $G, G': D \rightarrow C$  funtores de modo que  $F \dashv G$  e  $F \dashv G'$ . Entón,  $G$  e  $G'$  son isomorfos en  $C^D$ .*

*Demostración.* Obtemos este resultado aplicándolle o principio de dualidade ó Teorema 4.6. En efecto, definimos, do xeito obvio, os funtores  $F^{op}: C^{op} \rightarrow D^{op}$  e  $G^{op}, (G')^{op}$  de xeito análogo. A bixección  $D(Fc, d) \cong C(c, Gd)$  dá lugar, de maneira inmediata, a outra bixección natural  $C^{op}(G^{op}d, c) \cong D^{op}(d, F^{op}c)$ , así que temos probado que pasar á categoría oposta troca a orde das adxuncións, rematando a proba.  $\square$

**Exemplo 4.8.** A continuación, ilustramos a idea da adxunción con dous exemplos sinxelos.

- Sexa  $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  o functor de esquecemento. Este functor ten adxuntos a ambos lados: definimos  $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$  que convirte cada conxunto nun espazo discreto, ben definido porque todas as aplicacións entre espazos discretos son continuas, e

$T: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$  que fai o mesmo coa topoloxía trivial. Así, notando que calquera aplicación con dominio discreto é continua, e o mesmo sucede con codominio trivial, obtemos os isomorfismos naturais

$$\mathbf{Top}(DS, X) \cong \mathbf{Set}(D, UX), \quad \mathbf{Set}(UX, S) \cong \mathbf{Top}(X, TS),$$

é dicir,  $D \dashv U \dashv T$ .

- Definimos, para un grupo  $G$ , a categoría  $\mathbf{Set}_G$  de  $G$ -conxuntos e aplicacións equivariantes, e definimos o functor  $T: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}_G$  que dota a cada conxunto  $X$  da acción trivial  $g \cdot x = x$  para todo  $g \in G$ . Como no caso anterior, este functor admite adxuntos a ambos lados.

Definimos  $F: \mathbf{Set}_G \rightarrow \mathbf{Set}$  que envía  $X$  ó conxunto de puntos fixos pola acción,  $X^G$ , e restrinxe as aplicacións a tal subconxunto. A asignación está ben definida pola  $G$ -equivariancia. Por outra banda, definimos  $\text{Orb}: \mathbf{Set}_G \rightarrow \mathbf{Set}$  asignando a cada conxunto  $X$  o espazo de órbitas  $\text{Orb}(X) = \{Gx \mid x \in X\}$ , e a unha aplicación equivariante  $f$ , a aplicación ben definida  $\text{Orb}(f)(Gx) = Gf(x)$ . Imos ver primeiro que  $T \dashv F$ : Partindo do morfismo en  $\mathbf{Set}$   $\varphi: S' \rightarrow S$  e do morfismo en  $\mathbf{Set}_G$   $\psi: X' \rightarrow X$ , temos o seguinte diagrama, claramente conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h & \longmapsto & \psi h \varphi \\
 & & & & \\
 f & & \mathbf{Set}_G(TS, X) & \longrightarrow & \mathbf{Set}_G(TS', X') & & f' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f & & \mathbf{Set}(S, X^G) & \longrightarrow & \mathbf{Set}(S', (X')^G) & & f' \\
 & & & & & & \\
 & & g & \longmapsto & \psi g \varphi
 \end{array}$$

onde as frechas verticais son bixeccións. Agora, para probar que  $\text{Orb} \dashv T$  fixamos dous morfismos  $\varphi: X' \rightarrow X$  e  $\psi: S \rightarrow S'$  en  $\mathbf{Set}_G$  e  $\mathbf{Set}$  respectivamente e consideramos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& & h \longmapsto \psi h \text{ Orb}(\varphi) \\
& & \downarrow \\
& & \text{Set}(\text{Orb}(X), S) \longrightarrow \text{Set}(\text{Orb}(X'), S') \\
& & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
& & \text{Set}_G(X, TS) \longrightarrow \text{Set}_G(X', TS') \\
& & \downarrow \\
& & g \longmapsto \psi g \varphi
\end{array}$$

$f \downarrow$   
 $f^*(x) = f(Gx)$

En primeiro lugar, o diagrama é conmutativo. En efecto, se  $f: \text{Orb}(X) \rightarrow S$ , entón seguindo os dous camiños posibles do diagrama obtemos:

$$\begin{aligned}
f &\mapsto \psi f \text{ Orb}(\varphi) \mapsto (\psi f \text{ Orb}(\varphi))^*, & (\psi f \text{ Orb}(\varphi))^*(x) &= \psi f(G\varphi(x)), \\
f &\mapsto f^* \mapsto \psi f^* \varphi, & \psi f^* \varphi(x) &= \psi f(G\varphi(x)).
\end{aligned}$$

Por último, a frecha vertical é unha bixección, xa que partindo de  $f^*: X \rightarrow TS$  equivariante, como a acción en  $TS$  é trivial, a aplicación debe ser constante nas órbitas, así que pasa ó cociente na aplicación  $f(Gx) = f^*(x)$ .

O que resta de capítulo está dividido en tres seccións, cada unha desenvolvendo unha clase de adxunción que se repite en varias categorías.

## 4.2. Conexións de Galois

Sexan  $A$  e  $B$  dous conxuntos ordenados e  $F: \mathbf{Ord}_A \rightarrow \mathbf{Ord}_B$  e  $G: \mathbf{Ord}_B \rightarrow \mathbf{Ord}_A$  dous funtores covariantes, que como vimos no Exemplo 2.4, podemos interpretar como dúas aplicacións monótonas crecentes  $f$  e  $g$  respectivamente. Neste caso, unha adxunción  $F \dashv G$ , que leva un isomorfismo natural

$$\mathbf{Ord}_B(Fx, y) \cong \mathbf{Ord}_A(x, Gy),$$

reinterprettase coa condición

$$f(x) \leq y \iff x \leq g(y).$$

Neste caso, diremos que a adxunción  $F \dashv G$  é unha *conexión de Galois monótona*.

**Exemplo 4.9.** Aquí temos un par de exemplos elementais de conexións monótonas.

- Consideramos  $\mathbb{R}$  coa orde habitual e as funcións *chan*  $[\cdot]$  e *teito*  $\lceil \cdot \rceil$ , ambas monótonas crecentes. É inmediato ver que se cumpre a condición

$$[x] \leq y \iff x \leq \lceil y \rceil,$$

así que a adxunción  $[\cdot] \dashv \lceil \cdot \rceil$  é unha conexión de Galois monótona.

- Sexa  $X$  un espazo topolóxico e consideramos o conxunto de partes  $P(X)$ , a topoloxía  $\tau$  de  $X$  e a súa colección de pechados  $\mathcal{F}$ , todos eles ordenados coa inclusión. Definimos os funtores inclusión

$$\mathbf{Ord}_\tau \xrightarrow{J} \mathbf{Ord}_{P(X)} \qquad \mathbf{Ord}_\mathcal{F} \xrightarrow{I} \mathbf{Ord}_{P(X)}$$

e os funtores *interior* e *clausura*

$$\mathbf{Ord}_{P(X)} \xrightarrow{\text{Int}} \mathbf{Ord}_\tau \qquad \mathbf{Ord}_{P(X)} \xrightarrow{\text{Cl}} \mathbf{Ord}_\mathcal{F}.$$

Se  $A \subset X$ ,  $U$  é aberto en  $X$  e  $F$  é pechado en  $X$ , temos as equivalencias

$$U \subset A \iff U \subset \text{Int}(A), \qquad \text{Cl}(A) \subset F \iff A \subset F.$$

Isto é, temos dúas conexións de Galois monótonas  $J \dashv \text{Int}$  e  $\text{Cl} \dashv I$ .

A continuación, imos substituír  $\mathbf{Ord}_A$  pola súa oposta, que é equivalente a realizar a construción análoga a partires de  $\geq$  no canto de  $\leq$ . Isto convirte a  $f$  e a  $g$  en aplicacións monótonas crecentes, e agora unha adxunción  $F \dashv G$  tradúcese na condición

$$f(x) \leq y \iff x \geq g(y).$$

A unha tal adxunción chamámoslle *conexión de Galois antítona*.

**Exemplo 4.10.** Os seguintes son exemplos coñecidos de conexións de Galois antítonas.

- O teorema fundamental da teoría de Galois, exposto no Teorema 3.11 pódese interpretar como a conexión de Galois antítona prototípica.
- A relación entre subconxuntos afíns e ideais do anel de polinomios descrita na Sección 3.4 pódese formular en termos dunha conexión de Galois.

Partimos en primeiro lugar de dous subconxuntos afíns  $V(F) \subset W(G)$ , e tomamos os ideais

$$I = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in V\},$$

$$J = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in W\}.$$

Se  $f \in J$ , entón anúlase en todos os elementos de  $W$ , en particular nos de  $V$ , así que  $J \subset I$ .

Reciprocamente, con dous ideais  $I \subset J$ , o conxunto  $V$  de raíces de todos os polinomios de  $I$  e o conxunto  $W$  de raíces de todos os polinomios de  $J$  verifican que  $W \subset V$ .

### 4.3. A adxunción libre-esquecemento

Supoñamos que temos unha adxunción  $F \dashv G$  onde  $G$  é un functor fiel. Neste caso particular, aínda que non coñezamos  $F$  explicitamente, podemos caracterizar o seu comportamento mediante unha propiedade universal, procedendo como segue: Na proba do Teorema 4.2, vimos que para calquera  $c$  e  $d$  obxectos de  $C$  e  $D$ , e para todo  $f \in C(c, Gd)$ , se cumpre a igualdade  $G\epsilon_d(GFf)\eta_c = f$ , onde  $\eta$  e  $\epsilon$  son a unidade e a counidade. Vemos claramente que  $\eta_c$  depende só do obxecto  $c$  e que  $G(\epsilon_d Ff)$  depende só de  $f$  e  $d$ , polo que podemos enunciar esta propiedade nos seguintes termos:

Para calquera morfismo  $f: c \rightarrow Gd$ , existe un único  $\psi: Fc \rightarrow d$  de xeito que o seguinte triángulo é conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f} & Gd \\ i \downarrow & \nearrow G\psi & \\ GFc & & \end{array}$$

Esta propiedade é unha propiedade universal que caracteriza  $Fc$  salvo isomorfismos: se  $d'$  é un obxecto de  $D$  e  $j: c \rightarrow Gd'$  son tales que existe un único  $\eta: d' \rightarrow d$  que satisfai  $(G\eta)j = f$ , entón obtemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{i} & GFc \\ \downarrow i & \searrow j & \nearrow \\ GFc & & Gd' \\ & \nearrow & \searrow \\ & GFc & \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a triangle with vertices  $c$ ,  $Gd'$ , and  $GFc$ . The top edge is  $c \xrightarrow{i} GFc$ . The left edge is  $c \xrightarrow{j} Gd'$ . The right edge is  $Gd' \xrightarrow{\eta} GFc$ . A dashed arrow goes from  $GFc$  to  $Gd'$ . A dashed arrow goes from  $GFc$  to  $GFc$  labeled  $\text{Id}_{GFc}$ . A dashed arrow goes from  $c$  to  $GFc$  labeled  $i$ . A dashed arrow goes from  $c$  to  $Gd'$  labeled  $j$ . A dashed arrow goes from  $Gd'$  to  $GFc$  labeled  $\eta$ . A dashed arrow goes from  $GFc$  to  $Gd'$  labeled  $G\eta$ . A dashed arrow goes from  $GFc$  to  $GFc$  labeled  $\text{Id}_{GFc}$ .

onde, pola unicidade, as dúas frechas interiores en trazo descontinuo teñen como composición a identidade. Razoando de xeito análogo para a composición na outra dirección, e recordando que  $G$  é fiel, obtemos que os dous morfismos cuxa existencia garanten as propiedades determinan un isomorfismo entre  $d'$  e  $Fc$ .

A anterior propiedade universal é completamente análoga á coñecida para o grupo libre e para outras construcións similares en álgebra, como o módulo libre. En particular, imos ver que a propiedade universal do módulo libre se corresponde cunha adxunción.

Partimos do functor de esquecemento  $U: {}_A\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ , que é fiel. Imos definir o chamado *functor libre*  $F: \mathbf{Set} \rightarrow {}_A\mathbf{Mod}$ , que será o seu adxunto pola esquerda.

- Nos obxectos,  $F$  envía  $S$  ó  $A$ -módulo libre

$$FS = \bigoplus_{s \in S} A = A^{(S)},$$

con base  $\{e_s \in A^S \mid s \in S\}$  onde  $e_s$  ten un 1 na coordenada  $s$ -ésima e 0 no resto. Esta base identifícase de xeito canónico con  $S$ . De aquí en diante, escribiremos un elemento de  $A^{(S)}$  como a suma  $\sum_{s \in S} \lambda_s e_s$  onde todos os escalares son nulos salvo un número finito.

- Nos morfismos, envía unha aplicación  $f: S \rightarrow T$  no homomorfismo de módulos

$$Ff: \sum_{s \in S} \lambda_s e_s \in FS \mapsto \sum_{s \in S} \lambda_s e_{f(s)} \in FT.$$

Sexan  $S$  un conxunto e  $M$  un  $A$ -módulo, e tomamos unha aplicación  $f: S \rightarrow UM$ . Entón, definimos a súa *extensión lineal*  $f^*: A^{(S)} \rightarrow M$  mediante

$$f^*\left(\sum_{s \in S} \lambda_s e_s\right) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s).$$

Este proceso é reversible: dada  $f^*$ , definimos  $f(s) = f^*(e_s)$ .

Así, o diagrama que define a adxunción é o seguinte

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^* & \longmapsto & \psi f^*(F\varphi) & & & & \\
 & & & & & & \\
 \begin{array}{ccccc}
 f^* & {}_A\mathbf{Mod}(FS, M) & \longrightarrow & {}_A\mathbf{Mod}(FT, N) & & ((U\psi)f\varphi)^* & T \xrightarrow{\varphi} S \\
 \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 f & (UM)^S & \longrightarrow & (UN)^T & & (U\psi)f\varphi & M \xrightarrow{\psi} N
 \end{array} & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 f & \longmapsto & (U\psi)f\varphi & & & & 
 \end{array}$$

É doado ver que este diagrama é conmutativo, o que remata esta adxunción.

A continuación, imos ver un exemplo que segue esta mesma idea no ámbito da análise funcional, exposta en [15]. Imos traballar na categoría  $\mathbf{Ban}_1$  de espazos de Banach

(espazos vectoriais normados que son completos) sobre  $\mathbb{C}$  coas aplicacións lineais contractivas (lipschitzianas con constante de Lipschitz 1). Definimos o functor de esquecemento  $U: \mathbf{Ban}_1 \rightarrow \mathbf{Set}$  do xeito:

- A un espazo de Banach  $X$  asígnalle a súa bola pechada unidade  $UX = B_X[0, 1]$ .
- Envía unha contracción lineal  $f: X \rightarrow Y$  á súa restrición en dominio e codominio  $Uf = f|_{UX}: UX \rightarrow UY$ , ben definida precisamente por ser  $f$  contractiva.

Este non é o functor de esquecemento habitual, que despreza a estrutura quedándose co conxunto subxacente, pero si é un functor fiel. En efecto, se temos contraccións lineais  $f, g: X \rightarrow Y$  verificando que  $Uf = Ug$ , entón para todo  $x \in X$  non nulo, temos que

$$\frac{f(x)}{\|x\|} = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{g(x)}{\|x\|},$$

así que  $f(x) = g(x)$ . Por último,  $f(0) = 0 = g(0)$ . Por analogía coa adxunción de módulos, definimos o functor libre  $F = \ell^1$  como segue:

- Para un conxunto  $S$ , definimos

$$\ell^1(S) = \{\varphi \in \mathbb{C}^S \mid \|\varphi\|_1 = \sum_{s \in S} |\varphi(s)| < \infty\}.$$

Esta construción é o espazo  $\ell^1$  asociado á medida de contar da sigma álgebra  $P(S)$  de  $S$ . É un resultado clásico de análise que coa norma  $\|\cdot\|_1$ , este é un espazo de Banach.

Todo elemento de  $\ell^1(S)$  se pode escribir de xeito único como  $\sum_{s \in S} \lambda_s e_s$  onde os escalares verifican  $\sum_{s \in S} |\lambda_s| < \infty$ .

- Nos morfismos, actúa do mesmo xeito que no apartado anterior.

Sexan  $S$  un conxunto e  $X$  un espazo de Banach, e consideramos unha aplicación de conxuntos  $f: S \rightarrow UX$ . Definimos  $f^*: \ell^1(S) \rightarrow X$  como a extensión lineal, de xeito análogo á adxunción en módulos. A extensión lineal está ben definida precisamente porque os elementos de  $f(S)$  teñen norma non superior a 1. En efecto:

$$\|f^*\left(\sum_{s \in S} \lambda_s e_s\right)\|_1 = \sum_{s \in S} |\lambda_s| \|f(s)\| \leq \sum_{s \in S} |\lambda_s| = \left\| \sum_{s \in S} \lambda_s e_s \right\|_1 < \infty,$$

é dicir, a imaxe da extensión lineal é unha serie converxente e ademais a aplicación é contractiva. O proceso segue sendo reversible, e o diagrama da adxunción é completamente idéntico ó caso anterior.

Agora, imos a ver un caso no que a unidade non é a inclusión canónica: a abelianización dun grupo. Primeiro definimos o functor de esquecemento  $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Group}$ , que esquece que a operación é conmutativa. Por outra banda, para definir o seu adxunto pola esquerda  $F$ , primeiro recordamos que un grupo  $G$  ten un subgrupo normal  $[G, G] = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$  (o subgrupo xerado polos conmutadores), que verifica que  $FG = G/[G, G]$  é abeliano. Ademais, dado un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$ , como se ten que  $f([G, G]) \subset [H, H]$ , pasa a un homomorfismo entre grupos cociente  $Ff: G/[G, G] \rightarrow H/[H, H]$ . Obtemos así un functor  $F: \mathbf{Group} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

Sexan  $G$  un grupo,  $H$  un grupo abeliano e  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo. Agora temos que  $f([G, G]) \subset \{0\}$ , así que pasa ó cociente nun homomorfismo  $f^*: G/[G, G] \rightarrow H$ . É inmediato que o proceso é reversible, así que obtemos a adxunción definida polo diagrama conmutativo dos casos anteriores. Neste caso, a unidade da adxunción é a proxección canónica.

Como último exemplo, sexa o functor de esquecemento  $U: \mathbf{Group} \rightarrow \mathbf{Monoid}$ . Este admite un adxunto pola esquerda para xerar un grupo da forma máis eficiente a partir de calquera monoide, no sentido dos casos anteriores, pero tamén admite un adxunto pola dereita: sexa  $S: \mathbf{Monoid} \rightarrow \mathbf{Group}$  o functor que a cada monoide  $M$  lle asigna o grupo  $SM$  de elementos de  $M$  que son invertibles, e que leva os homomorfismos nas correspondentes restricións, ben definidas xa que os produtos e imaxes de elementos invertibles son invertibles. Para definir o isomorfismo natural, simplemente observamos que para un homomorfismo de monoides  $f: UG \rightarrow M$  onde  $G$  é un grupo, temos que todos os elementos de  $\text{Im}(f)$  son invertibles, así que este conxunto está contido en  $SM$ , permitindo definir o correspondente homomorfismo de grupos. A inversa consiste en ampliar o codominio da aplicación.

Para rematar, notamos que no caso de que teñamos unha categoría cun functor de esquecemento, se temos algunha condición suficiente que nos dá a existencia dun adxunto pola esquerda, como os teoremas do functor adxunto que se poden consultar en [11] e [9], aínda que sexa de difícil construción, podemos definilo mediante a propiedade universal exhibida ó principio da sección.

## 4.4. A adxunción tensor-Hom

### 4.4.1. En conxuntos e módulos

Comezamos no caso máis sinxelo, que é o da categoría  $\mathbf{Set}$ . Sexan  $A$ ,  $B$  e  $C$  conxuntos, e imos establecer un isomorfismo natural en tres variables

$$C^{A \times B} \cong (C^B)^A,$$

isto é, un isomorfismo natural entre dous funtores  $\mathbf{Set}^{op} \times \mathbf{Set}^{op} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Vén dado, para aplicacións  $\varphi: A' \rightarrow A$ ,  $\psi: B' \rightarrow B$  e  $\zeta: C \rightarrow C'$ , polo diagrama

$$f \longmapsto f'(a', b') = \zeta(f(\varphi(a'), \psi(b')))$$

$$\begin{array}{ccc}
 f(a, b) & C^{A \times B} & \longrightarrow & (C')^{A' \times B'} \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 g(a)(b) & (C^B)^A & \longrightarrow & ((C')^{B'})^{A'}
 \end{array}$$

$$g \longmapsto g'(a')(b') = \zeta(g(\varphi(a'))(\psi(b')))$$

onde as frechas verticais son claramente bixeccións e a conmutatividade se comproba directamente.

Aínda que este isomorfismo non induza unha adxunción no sentido estrito da Definición 4.1, basta con fixar algunha das dúas primeiras variables para obter unha, así que o trataremos de todos modos como unha adxunción.

A interpretación deste caso particular é moi doada: estamos a dicir que definir unha aplicación con dominio  $A \times B$  é o mesmo que definila en cada fibra  $\{a\} \times B$ . Agora ben, en categorías con máis estrutura, non temos tanta liberdade para definir morfismos. No caso particular de  $A$ -módulos, se temos un morfismo  $g: M \rightarrow_A \mathbf{Mod}(N, L)$  e consideramos a correspondente aplicación de conxuntos  $f: M \times N \rightarrow L$ , temos que

$$f(u, v + w) = g(u)(v + w) = g(u)(v) + g(u)(w) = f(u, v) + f(u, w).$$

É dicir, a aplicación que resulta é bilineal no canto de lineal, polo que manter a mesma adxunción resulta imposible. Temos que cambiar a noción de produto, substituíndo o cartesiano polo tensor, para poder empregar a mesma idea.

**Definición 4.11.** Sexa  $A$  un anel conmutativo e unitario,  $M$  e  $N$   $A$ -módulos. O produto tensor de  $M$  por  $N$  é un  $A$ -módulo  $M \otimes N$  cunha aplicación bilineal  $p: M \times N \rightarrow M \otimes N$  verificando a seguinte propiedade universal: se  $L$  é un  $A$ -módulo e  $f: M \times N \rightarrow L$  é bilineal, existe un único homomorfismo de módulos tal que o diagrama seguinte é conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & \xrightarrow{h} & A \otimes B \\
 & \searrow f & \swarrow \text{---} \\
 & & C
 \end{array}$$

O produto tensor existe e é único salvo isomorfismos. Os detalles pódense consultar en [1], pero a idea da existencia é considerar o módulo libre  $A^{(M \times N)}$  e cocientalo polo

submódulo xerado polas relacións

$$\begin{aligned} (u + u', v) - (u, v) - (u', v), & \quad (u, v + v') - (u, v) - (u, v'), \\ a(u, v) - (au, v), & \quad a(u, v) - (u, av). \end{aligned}$$

Así, o cociente  $M \otimes N$  verifica que a proxección canónica  $q: A^{(M \times N)} \rightarrow M \otimes N$  é bilinear, e esta induce outra aplicación bilinear  $p: M \times N \rightarrow M \otimes N$  que verifica a propiedade universal.

Deste xeito, denotando as clases de  $M \otimes N$  por  $[u, v] = u \otimes v$ , podemos definir a adxunción por analogía co caso de conxuntos mediante o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} f(u \otimes v) & & {}_A\mathbf{Mod}(M \otimes N, L) & \longrightarrow & {}_A\mathbf{Mod}(M' \otimes N', L') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g(u)(v) & & {}_A\mathbf{Mod}(M, {}_A\mathbf{Mod}(N, L)) & \longrightarrow & {}_A\mathbf{Mod}(M', {}_A\mathbf{Mod}(N', L')) \end{array}$$

En efecto, a  $g$  correspóndelle unha única aplicación de conxuntos  $\tilde{f}$ , que baixa ó cociente por ser bilinear. Reciprocamente, dada  $f$ , definimos  $g$  de maneira evidente.

#### 4.4.2. En conxuntos e espazos punteados

A continuación, imos estender a idea de produto tensor a outras categorías buscando precisamente unha construción que verifique unha adxunción análoga.

Situámonos na categoría de conxuntos punteados con obxectos  $(A, a_0)$ ,  $(B, b_0)$  e  $(C, c_0)$ . Eliximos  $\text{cte}_{c_0}$  como punto base do conxunto  $\mathbf{Set}_*(A, \mathbf{Set}_*(B, C))$ . Partimos dunha aplicación de conxuntos punteados  $g: A \rightarrow \mathbf{Set}_*(B, C)$ , e observamos que necesariamente  $g(a_0) = \text{cte}_{c_0}$  e  $g(a)(b_0) = c_0$  para todo  $a \in A$ . É dicir, a partir de  $g$ , obtemos só aplicacións  $f$  a nivel de conxuntos que son constantes en  $(\{a_0\} \times B) \cup (A \times \{b_0\})$ . Polo tanto, para ter unha correspondencia bixectiva, temos que definir o *produto smash*

$$A \wedge B = \frac{A \times B}{(\{a_0\} \times B) \cup (A \times \{b_0\})}.$$

Isto proporcionáanos unha bixección natural nas tres variables

$$\mathbf{Set}_*(A \wedge B, C) \cong \mathbf{Set}_*(A, \mathbf{Set}_*(B, C)).$$

Imos ver como estas adxuncións se realizan en **Top** e **Top\*** [3]. Se  $X$  e  $Z$  son espazos topolóxicos e  $Y$  é un espazo Hausdorff e localmente compacto, entón dotando a  $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$  da topoloxía compacto-aberto, é doado probar que se mantén un isomorfismo natural en  $X$  e  $Z$

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \cong \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)).$$

No contexto de espazos topolóxicos, defínese o produto *smash* como

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y},$$

e mantemos tamén a adxunción

$$\mathbf{Top}_*(X \wedge Y, Z) \cong \mathbf{Top}_*(X, \mathbf{Top}_*(Y, Z)).$$

Ademais, o isomorfismo pasa á categoría  $\mathbf{hTop}_*$ , onde os morfismos son clases de homotopía de aplicacións continuas relativas ó punto base.

En efecto, mantendo a notación dos outros diagramas da sección, temos que ver que  $[f] \mapsto [g]$  e  $[g] \mapsto [f]$  están ben definidas. Sexa  $H: (X \wedge Y) \times I \rightarrow Z$  unha homotopía entre  $f$  e  $f'$  relativa a  $[(x_0, y_0)] = x_0 \wedge y_0$ , é dicir, unha aplicación continua que verifica:

$$H(\cdot, 0) = f, \quad H(\cdot, 1) = f', \quad H(x_0 \wedge y_0, \cdot) = \text{cte}_{z_0}.$$

A partir de  $H$ , podemos definir  $\tilde{H}: X \times Y \times I \rightarrow Z$  mediante  $\tilde{H}(x, y, t) = H(x \wedge y, t)$ , así que  $\tilde{H}$  é unha aplicación continua, que se corresponde, pola adxunción en  $\mathbf{Top}$ , coa aplicación continua  $K: X \times I \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ .  $K$  verifica as propiedades

$$K(\cdot, 0) = g, \quad K(\cdot, 1) = g', \quad K(x_0, \cdot) = \text{cte}_{\text{cte}_{z_0}},$$

así que  $[g] = [g']$ . Reciprocamente, partindo da continuidade de  $K$ , obtemos a aplicación continua  $\tilde{H}$ . Empregando un coñecido resultado de topoloxía, que neste caso particular di que se  $p$  é unha identificación,  $p \times \text{Id}_I$  tamén o é, obtemos que  $\tilde{H}$  pasa ó cociente como a aplicación continua  $H$ .

Poñemos de manifesto un caso particular moi relevante de esta adxunción, no caso en que  $Y = \mathbb{S}^1$ . Definimos a *suspensión reducida* de  $X$  como  $\Sigma X = X \wedge \mathbb{S}^1$ , e o *espazo de lazos* de  $Z$  como  $\Omega Z = \mathbf{Top}_*(\mathbb{S}^1, Z)$ . Estas dúas asignacións son functoriais e obtemos unha adxunción

$$\mathbf{Top}_*(\Sigma X, Z) \cong \mathbf{Top}_*(X, \Omega Z).$$

Pasando a clases de homotopía, fixando  $X = \mathbb{S}^n$  e empregando que  $\Sigma \mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{S}^{n+1}$  son homeomorfos, obtemos que

$$\mathbf{hTop}_*(\mathbb{S}^{n+1}, Z) \cong \mathbf{hTop}_*(\mathbb{S}^n, \Omega Z),$$

que permite empregar indución para definir os grupos superiores de homotopía a partir de  $\pi_1(\Omega Z, \text{cte}_{z_0})$ .

# Bibliografía

- [1] Atiyah, M. Introduction to commutative algebra (Westview Press, 1994).
- [2] Awodey, S. Category theory (Oxford University Press, Oxford, 2010).
- [3] Bradley, T., Bryson, T. & Terilla, J. Topology: a categorical approach (MIT Press, Cambridge, 2020).
- [4] Dirks, M. The Stone representation theorem for boolean algebras (2011). <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Dirks.pdf>
- [5] Eilenberg, S. & MacLane, S. General theory of natural equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.* **58** (1945) 231–294.
- [6] Engelking, R. General topology (Heldermann Verlag, Berlin, 1989).
- [7] Faulk, M. Equivalence of categories for affine varieties (2014). <http://www.columbia.edu/~mf2954/Equivalence%20of%20Cat%27s-Affine.pdf>
- [8] Kan, D. Adjoint functors. *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958) 294–329.
- [9] Leinster, T. Basic category theory (Cambridge University Press, Cambridge, 2014).
- [10] Lobski, L. Quantum quirks, classical contexts: Towards a Bohrification of effect algebras (Universiteit van Amsterdam, 2020). <https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/1762/1/MoL-2020-09.text.pdf>
- [11] MacLane, S. Categories for the working mathematician (Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971).
- [12] Marquis, J. From a geometrical point of view (Springer, Dordrecht, 2009).
- [13] Perrone, P. Notes on Category Theory with examples from basic mathematics (2021). <https://arxiv.org/pdf/1912.10642.pdf>

- [14] Porst, H. & Tholen, W. Concrete dualities. *Category theory at work*, Res. Expo. Math. 18 (1991) pp. 111–136.
- [15] Pumplün, D. & Röhrh, H. Banach spaces and totally convex spaces. I. *Comm. Algebra* **12** (1984) 953–1019.
- [16] Riehl, E. *Category theory in context* (Dover Publications, New York, 2016).
- [17] Rotman, J. *Galois theory* (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [18] Simmons, H. *An introduction to category theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).