



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Máster**

# **Ecuaciones en diferencias con involuciones**

Pablo Decimavilla Domínguez-Gil

2021–2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



MÁSTER EN MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Máster**

**Ecuaciones en diferencias con  
involuciones**

Pablo Decimavilla Domínguez-Gil

09/22

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Reducción de ecuaciones en diferencias con involuciones</b>	<b>5</b>
2.1. Preliminares . . . . .	5
2.2. Operador reflexión . . . . .	6
2.3. Involuciones pullback . . . . .	9
2.4. Otras involuciones lineales . . . . .	12
2.5. Transformada de Hilbert discreta . . . . .	17
2.6. Operador incremento centrado . . . . .	24
2.7. Transformada de Fourier discreta . . . . .	27
<b>3. Resolución, funciones de Green</b>	<b>31</b>
3.1. Preliminares . . . . .	31
3.2. Sistemas de ecuaciones de recurrencia . . . . .	34
3.3. Sistemas de ecuaciones en diferencias con reflexión . . . . .	38
3.4. Sistemas con reflexión y transformada de Hilbert . . . . .	45
3.5. Condiciones de contorno generales . . . . .	49
<b>4. Conclusiones y problemas abiertos</b>	<b>53</b>



## Resumen

En este trabajo expandimos el estudio de las ecuaciones en diferencias al incluir ecuaciones con involuciones. Entre otras, consideramos la reflexión y la transformada de Hilbert discreta. Estudiamos la compatibilidad entre ellas y con el operador desplazamiento y construimos reducciones de operadores generados por dichas involuciones. Por último, se dan condiciones de existencia y unicidad de soluciones así como sus expresiones explícitas.

## Abstract

In this work we extend the study of difference equations by including equations with involutions. We consider, among others, reflection and the discrete Hilbert transform. We study compatibility between them and with the shift operator and construct reductions for operators spanned by those involutions. Finally, we give conditions for the existence and uniqueness of solutions as well as their explicit expressions.



# 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales han sido objeto de estudio desde hace muchos años por lo que existen multitud de generalizaciones y bibliografía relevante al respecto. El primer estudio interesante para lo que nos ocupa es de las ecuaciones diferenciales funcionales.

Para introducirlas hemos de considerar la derivada como un operador entre espacios de funciones. Trabajaremos en el cuerpo  $\mathbb{F}$  con  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Por simplificar la notación vamos a considerar funciones de clase infinito aunque podríamos exigir solo tantos grados de regularidad como orden de derivación tenga el problema objeto de estudio.

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}) \\ f \longmapsto f'$$

De esta forma, las derivadas de ordenes superiores, son iteradas de  $D$ , y hemos de introducir por tanto en nuestra notación la composición. Para ello emplearemos los polinomios sobre  $D$ . Definimos el anillo de polinomios sobre  $D$  como  $\mathbb{F}[D]$  formado por combinaciones  $\mathbb{F}$ -lineales de potencias de  $D$  en el que se interpreta el producto como composición:

$$\mathbb{F}[D] = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j D^j \mid n \in \{0, 1, \dots\}, a_j \in \mathbb{F}, j = 0, 1, \dots, n \right\} \subset \mathcal{F}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}))$$

donde  $\mathcal{F}(X, Y)$  denota el conjunto de operadores  $\mathbb{F}$ -lineales  $F : X \rightarrow Y$  entre los  $\mathbb{F}$ -espacios vectoriales  $X$  e  $Y$  y  $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X, X)$ . Con esta notación las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes se escriben  $Lx = c$  con  $L \in \mathbb{F}[D]$  y con incógnita  $x$  y término independiente  $c$  en  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{F})$ .

Ahora consideramos un caso más general, no exigiremos que el operador  $L$  se encuentre en  $\mathbb{F}[D]$  si no en un álgebra de operadores más general  $\mathcal{A}$  con  $\mathbb{F}[D] \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{F}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}))$  para plantear la ecuación  $Lx = c$ . Las ecuaciones de este tipo se denominan ecuaciones diferenciales funcionales.

Una aproximación a la resolución de ecuaciones de este tipo es la reducción. Un operador  $L \in \mathcal{A}$  se dice *reducible* si existe  $R \in \mathcal{A}$  tal que  $RL \in \mathbb{F}[D]$ , también diremos que el problema  $Lx = 0$  es *reducible* y que  $RL$  es la *reducción* de  $L$ . También nos será útil la propiedad simétrica  $LR \in \mathbb{F}[D]$ , en este caso diremos que  $LR$  es una *reducción por la derecha* de  $L$ . La técnica de reducción supone una herramienta para la resolución de ecuaciones diferenciales funcionales como se estudia en [4, 5, 8, 9]. El término reducción se debe al hecho de que este concepto supone el planteamiento de un problema más simple y estudiado (ecuación diferencial ordinaria) a partir de uno más general. La reducción supone una relajación del problema, es decir una ecuación reducida  $RL = 0$  admite todas las soluciones (y posiblemente más) de la ecuación original y es precisamente este hecho el que les otorga la utilidad que tienen en el estudio de las ecuaciones diferenciales funcionales.

El objetivo de esta teoría es el de resolver problemas del tipo

$$Lx = c \quad Wx = h,$$

donde  $Lx = c$  es una ecuación diferencial funcional y  $Wx = h$  una condición de frontera, esto es,  $W : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^n$  y  $h \in \mathbb{F}^n$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . El primer paso en la resolución del problema es encontrar una solución particular de  $Lx = c$ , para  $L$  fija, construiremos una función que tome como parámetro la condición inicial  $c$  y devuelva una solución de  $Lx = c$ ; las funciones de este tipo son las que denominaremos *funciones de Green* asociadas a  $L$ . En segundo lugar se busca la solución general de  $Lx = 0$ . Sumándolas se encuentra la solución general de  $Lx = c$ , por último, entre este conjunto de soluciones se buscan aquellas que satisfacen la condición de frontera.

Un álgebra de particular relevancia es la generada al incluir la reflexión en  $\mathbb{F}[D]$  que se define como el pullback de la biyección  $\varphi(t) = -t$  de  $\mathbb{Z}$ , esto es,

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}) \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

donde  $\tilde{f}(x) := f(-x)$ . La denotamos por  $\mathbb{F}[D, \varphi^*]$  y tiene la estructura de anillo de polinomios de dos variables (combinaciones  $\mathbb{F}$ -lineales de potencias de  $D$  y  $\varphi^*$ ) sobre  $F$  cocientado por las relaciones  $\varphi^*D = -D\varphi^*$  y  $(\varphi^*)^2 = \text{Id}$  donde  $\text{Id}$  denota la identidad. Las ecuaciones definidas por esta álgebra se estudian en [6].

**Teorema 1.1** ([6, Teorema 2.1]). *Sea*

$$L = \sum_k a_k \varphi^* D^k + \sum_k b_k D^k \in \mathbb{R}[D, \varphi^*]. \quad (1.1)$$

Tomamos

$$R = \sum_k a_k \varphi^* D^k + \sum_l (-1)^{l+1} b_l D^l \in \mathbb{R}[D, \varphi^*]. \quad (1.2)$$

Entonces  $RL = LR \in \mathbb{R}[D]$ .

**Teorema 1.2** ([6, Teorema 3.2]). *Consideramos el problema*

$$Lu(t) = h(t), \quad t \in [-T, T], \quad B_i u = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

donde  $L$  está definido como en (1.1) y

$$B_i u := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} u^{(j)}(-T) + \beta_{ij} u^{(j)}(T).$$

Entonces, existe  $R \in \mathbb{R}[D, \varphi^*]$  (como en (1.2)) tal que  $S := RT \in \mathbb{R}[D]$  y la única solución de (1.3) viene dada por  $\int_a^b R(G(\cdot, s))|_t h(s) ds$  donde  $G$  es la función de Green asociada al problema  $Su = 0$ ,  $B_i Ru = 0$ ,  $B_i u = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , suponiendo que tiene solución única.

En [7] se realiza un estudio análogo para sistemas de ecuaciones. Las ecuaciones  $Lx = 0$  reducibles con  $L \in \mathbb{F}[D, \varphi^*]$  han demostrado ser útiles en mecánica cuántica supersimétrica [11, 14, 16] y en otras áreas como los métodos topológicos [3].

Otra generalización se realiza en [6] al incluir la transformada de Hilbert  $H$  para considerar el álgebra de operadores  $\mathbb{F}[D, \varphi^*, H]$  dada por las relaciones  $(\varphi^*)^2 = \text{Id}$ ,  $H^2 = -\text{Id}$ ,

$D\varphi^* = -\varphi^*D$ ,  $DH = HD$ ,  $\varphi^*H = -H\varphi^*$ . En esta referencia se construyen reducciones para este álgebra y se estudian las ecuaciones  $Lx = c$  con  $L \in \mathbb{F}[D, \varphi^*, H]$ .

A pesar de todos estos progresos en el campo de las ecuaciones diferenciales funcionales no hay muchos estudios sobre el caso discreto. Siguiendo el paralelismo usual entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones de recurrencia podemos trabajar con las ecuaciones en diferencias, estas generalizan las ecuaciones de recurrencia del mismo modo que las ecuaciones diferenciales funcionales generalizan las ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo de este trabajo es el de adaptar los estudios anteriores al terreno de las ecuaciones en diferencias.

A partir de ahora abandonamos las ecuaciones diferenciales, por este motivo, abusando del lenguaje, machacaremos la notación introducida hasta ahora para que se refiera a su análoga discreta. Una posible aplicación de este estudio podría ser la de generalizar el método de las diferencias finitas para la aproximación numérica de las soluciones de ecuaciones diferenciales funcionales. Este método se basa en discretizar el dominio de las ecuaciones dividiéndolo en pasos de tamaño cada vez menor de forma que las soluciones de las ecuaciones discretas converjan a una solución de la ecuación continua. Para ello se aproximan las derivadas sucesivas con operadores discretos, en el caso de la primera derivada, la expresión

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

es una buena aproximación puesto que tiene orden de convergencia dos, en efecto, por el Teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \mathcal{O}(h^3) \\ x(t-h) &= x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

así,

$$x(t+h) - x(t-h) = 2hx'(t) + \mathcal{O}(h^3); \quad x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

En la **Sección 2.6** se introduce el operador  $(\Delta u)_k = u_{k+1} - u_{k-1}$  que permite simplificar el estudio además de servir al propósito de aproximar derivadas.

Ahora sustituimos el dominio de las funciones regulares por el de sucesiones de escalares indexados por  $\mathbb{Z}$ , esto es,  $\mathcal{S} = \mathbb{F}^{\mathbb{Z}}$  y el operador diferencial por el operador desplazamiento a la derecha  $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  dado por  $(Du)_k = u_{k+1}$ . El anillo de polinomios sobre  $D$  se denota por  $\mathbb{F}[D]$ . El concepto de ecuación diferencial posee su versión discreta, la ecuación de recurrencia.

**Definición 1.3.** Dado un operador  $L \in \mathbb{F}[D]$ , diremos que  $Lx = c$  es una *ecuación de recurrencia*. Su incógnita  $x$  y su término independiente  $c$  se encuentran en el dominio de la ecuación  $\mathcal{S}$ .

De igual forma, podemos generalizar el concepto de ecuación de recurrencia para definir las ecuaciones en diferencias; análogo discreto de las ecuaciones diferenciales funcionales.

**Definición 1.4.** Sea  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(\mathcal{S})$  con  $\mathbb{F}[D] \subset \mathcal{A}$  y  $L \in \mathcal{A}$ . Decimos que  $Lx = c$  es una *ecuación en diferencias funcional*.

Primero trabajaremos sobre [17]. Veremos los métodos empleados y ahondaremos para ampliar el trabajo, donde se estudian las ecuaciones en diferencias con reflexión. Diremos que un operador  $T$  es una *involución* si alguna iteración suya es el operador identidad:  $T^n = \text{Id}$ . Delimitaremos nuestra generalización al restringirnos a álgebras generadas por el operador  $D$ , su inverso  $D^{-1}$  e involuciones lineales.

En el segundo capítulo estudiaremos reducciones para diferentes álgebras de operadores. Primero expondremos el trabajo de [17] para ecuaciones con reflexión. Después veremos las propiedades de la reflexión que se explotan en él y qué involuciones las poseen con el objetivo de generalizar la teoría incluyendo nuevos operadores en el álgebra. Se presentará una descomposición del espacio  $\mathcal{S}$  asociada a cada involución lineal que nos ayudará a estudiar su interacción con otros operadores. También trabajaremos con una versión discreta de la transformada de Hilbert para adaptar los resultados de [6] al contexto de las ecuaciones en diferencias. Por último incluiremos la transformada de Fourier discreta para estudiar la estructura del álgebra generada por todos los operadores mencionados en este párrafo.

En el tercer capítulo trabajaremos en la resolución de las ecuaciones diferenciales asociadas a todos los operadores anteriores y los problemas resultantes de añadir a éstas condiciones de contorno generales. Estableceremos condiciones suficientes para la existencia de solución y la calcularemos cuando éstas se verifiquen. Nos basaremos en los casos estudiados en [17]: las ecuaciones de recurrencia y las ecuaciones en diferencias con reflexión.

## 2. Reducción de ecuaciones en diferencias con involuciones

En este capítulo, trataremos los operadores algebraicamente. Estudiaremos las relaciones que los operadores base involucrados en una expresión guardan entre sí. Esto nos permitirá manipular ecuaciones para obtener otras con una forma determinada y cuya resolución permita recuperar las soluciones de las originales. Estas nuevas ecuaciones serán las que llamaremos ecuaciones de recurrencia que definiremos con detalle en el primer apartado de esta sección.

Las ecuaciones de esta forma admiten las funciones de Green dadas en [17] que trataremos en el **Capítulo 3**. Una vez consigamos reducir nuestra ecuación a una de esta forma y construir la función de Green correspondiente, nos fijaremos en las manipulaciones realizadas para resolver el problema original.

Como punto de partida, tenemos el caso de la reducción de una ecuación en diferencias con reflexiones a una de recurrencia con un conjunto de soluciones más amplio que la primera [17]. En este capítulo se tratará de generalizar el procedimiento empleado para aplicarlo a otras involuciones.

### 2.1. Preliminares

Comenzamos planteando el marco teórico y notación que se empleará en este estudio. Nuestro dominio será  $\mathcal{S}$  el espacio vectorial de secuencias de escalares del cuerpo  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ), es decir,

$$\mathcal{S}(\mathbb{F}) := \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid x_k \in \mathbb{F}\}.$$

Cuando esto no de pie a confusión, nos referiremos a  $\mathcal{S}(\mathbb{F})$  simplemente como  $\mathcal{S}$ . Como adelantábamos, el problema más básico con el que podemos encontrarnos en este contexto son las ecuaciones de recurrencia en este espacio. Para definir las introducimos primero el siguiente operador.

**Definición 2.1.** Definimos el operador *desplazamiento a la derecha* en  $\mathcal{S}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\xrightarrow{D} \mathcal{S} \\ (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

**Definición 2.2.** Llamaremos *ecuación de recurrencia* a una ecuación de la forma

$$\sum_{j=0}^n a_j x_{k+j} = c_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

donde la incógnita  $x$  y el término independiente  $c$  se encuentran en  $\mathcal{S}$ , los coeficientes  $a_j$  son escalares de  $\mathbb{F}$  tales que  $a_0 a_n \neq 0$ . También escribiremos

$$\sum_{j=0}^n a_j D^j x = c. \quad (2.1)$$

Para estudiar el álgebra de las ecuaciones que nos ocupan emplearemos expresiones del tipo (2.1), es decir, problemas definidos por operadores del álgebra  $\mathbb{F}[D]$ . Cuando trabajemos en álgebras generadas por más de un operador el producto no será necesariamente conmutativo, estas álgebras serán el objeto de estudio de esta sección.

A continuación presentamos una clase particular de operadores cuyas características permitirán controlar en ciertos casos la estructura del álgebra de operadores que generan al combinarlos con el operador  $D$ .

**Definición 2.3.** Diremos que un operador  $\delta^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es *pullback* de una aplicación  $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  si  $(\delta^* u)_k = u_{\delta(k)}$ . En particular,  $D$  es el pullback de  $k \mapsto k + 1$ .

**Nota 2.4.** Obviamente  $\text{Id}^* = \text{Id}$ .

**Nota 2.5.** La  $t$ -ésima iterada de  $D$  (o  $-t$ -ésima iterada de  $D^{-1}$  para  $t$  negativo)  $D^t$  con  $t \in \mathbb{Z}$  es el pullback de la asignación  $k \mapsto k + t$  en  $\mathbb{Z}$ .

Comenzamos con las ecuaciones estudiadas en [17], después veremos qué involuciones pullback de permutaciones del espacio de índices  $\mathbb{Z}$  permiten realizar las reducciones de forma análogo, tras esto veremos una descomposición de  $\mathcal{S}$  asociada a una involución que nos ayudará a comprender su comportamiento y por último trabajaremos con las transformadas de Hilbert y de Fourier (discretas) que tienen importancia para el estudio de señales.

## 2.2. Operador reflexión

En este apartado se resume el estudio de las ecuaciones que incluyen el operador reflexión  $\varphi^*$  en  $\mathcal{S}$  que invierte el orden de una secuencia (pivotando en la posición 0). Este se define como el pullback de  $\varphi : k \in \mathbb{Z} \mapsto -k \in \mathbb{Z}$ , es decir, viene dado por

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{S}$$

$$(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{-k})_{k \in \mathbb{Z}}$$

y se plantea el problema más general

$$Lx := \sum_{j=-n}^n (a_j + b_j \varphi^*) D^j x = c \quad (2.2)$$

donde los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$  son elementos del cuerpo  $\mathbb{F}$  y la incógnita  $x$  y el término independiente  $c$  de  $\mathcal{S}$ .

La propiedad más interesante de esta álgebra es que  $D\varphi^* = \varphi^*D^{-1}$ , en efecto, si  $u \in \mathcal{S}$ , para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$(D\varphi^*u)_k = (\varphi^*u)_{k+1} = u_{-k-1} = (D^{-1}u)_{-k} = (\varphi^*D^{-1}u)_k.$$

Para explotarla ampliamos nuestra álgebra a  $\mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*]$  en la que se incluyen potencias negativas de  $D$ . Esta álgebra es el resultado de cocientar el anillo de polinomios en tres variables por las relaciones  $\varphi^*D = D^{-1}\varphi^*$ ,  $DD^{-1} = D^{-1}D = (\varphi^*)^2 = \text{Id}$ . También introducimos el *anillo de polinomios de Laurent*  $\mathbb{F}[D, D^{-1}]$  sobre  $D$  que es el anillo de polinomios en dos variables  $D$  y  $D^{-1}$  cocientado por  $DD^{-1} = D^{-1}D = \text{Id}$ . A partir de la anterior propiedad se deduce que

$$\varphi^*P\varphi^* = \varphi^*(P) \in \mathbb{F}[D, D^{-1}] \quad \text{para cualquier } P \in \mathbb{F}[D, D^{-1}], \quad (2.3)$$

donde

$$\varphi^*(P)(D) := P(D^{-1}).$$

La relación  $D\varphi^* = \varphi^*D^{-1}$  nos permite *mover* todos las apariciones de  $\varphi^*$  a la izquierda. Además, como  $(\varphi^*)^2 = \text{Id}$ , cualquier polinomio  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*]$  se puede expresar como

$$L = \varphi^*P + Q \quad \text{con } P, Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$$

y admitirá por tanto la expresión (2.2).

**Ejemplo 2.6.** Consideramos  $L = \varphi^*D^2\varphi^*D^{-1} + D^5\varphi^*D + D^{-3}$ . Reordenando,

$$L = (\varphi^*)^2D^{-2}D^{-1} + \varphi^*D^{-5}D + D^{-3} = D^{-3} + \varphi^*D^{-4} + D^{-3} = \varphi^*D^{-4} + 2D^{-3}.$$

**Teorema 2.7.** Sea  $L = \varphi^*P + Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*]$  con  $P, Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ , entonces, si definimos  $R := \varphi^*P - \varphi^*(Q)$ , se tiene que

$$LR = RL \in \mathbb{F}[D, D^{-1}].$$

*Demostración.* Expandiendo el producto y aplicando (2.3)

$$\begin{aligned} LR &= (\varphi^*P + Q)(\varphi^*P - \varphi^*(Q)) = \varphi^*P\varphi^*P - \varphi^*P\varphi^*(Q) + Q\varphi^*P - Q\varphi^*(Q) \\ &= \varphi^*(P)P - \varphi^*(Q)Q = RL \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observamos que si  $u \in \mathcal{S}$  resuelve la ecuación homogénea  $Lu = 0$ , también resuelve la ecuación  $RLu = 0$ . Para completar la reducción, como  $RL \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  podemos componer con una potencia de  $D$  de exponente suficientemente grande para obtener la ecuación de recurrencia  $0 = D^nRL \in \mathbb{F}[D]$ . Además,  $D^nRL = 0$  tendrá exactamente las mismas soluciones que  $RL = 0$  por ser  $D^n$  biyectiva. De igual modo, para el caso no homogéneo, todas las soluciones de la ecuación  $Lx = c$  resolverán también  $RLx = Rc$ .

En [17] también se da otra forma de construir el polinomio  $R$  que mejora el resultado, es decir, da lugar a un problema que introduce menos soluciones adicionales al original. En particular, estas nuevas soluciones serán aquellas  $u \in \ker(RL) \setminus \ker(L)$ , por lo que buscamos, de alguna forma, minimizar el *grado* de  $R$ , entendiendo el grado como la máxima diferencia entre los exponentes de  $D$  (positivos y negativos) en su expresión. Veamos como se procede.

Recordamos que, para un operador  $P : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $PD^n = 0$  si y solo si  $P = 0$ . En particular, para  $P \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  podemos encontrar un único  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $PD^k \in \mathbb{F}[D]$  con término independiente no nulo. De esta forma introducimos el conjunto  $\mathbb{F}_*[D]$  de polinomios en  $\mathbb{F}[D]$  sin raíces nulas (esto es, de grado mínimo sobre  $D$ ). Todo polinomio  $P \in \mathbb{F}[D, D^{-1}] \setminus \{0\}$  se puede expresar, de forma única, como  $P(D) = P_*(D)D^k$  con  $P_* \in \mathbb{F}_*[D]$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Así,  $\mathbb{F}_*[D]$  es isomorfo a  $\mathbb{F}[D]/(D)$  como anillo con la estructura inducida por la correspondencia anterior, y  $\mathbb{F}_*[D] \times \mathbb{Z}$  a  $(\mathbb{F}[D]/(D)) \times (D)$  si le otorgamos la estructura inducida por la biyección

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{F}[D, D^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{F}_*[D] \times \mathbb{Z} \\ P_*(D)D^k &\longmapsto (P_*, k). \end{aligned}$$

**Definición 2.8.** Definimos el máximo común divisor en  $\mathbb{F}_*[D] \times \mathbb{Z}$  como

$$\text{mcd}\{(P_1, k_1), \dots, (P_n, k_n)\} = (\text{mcd}\{P_1, \dots, P_n\}, \nu(k_1, \dots, k_n))$$

donde

$$\nu(k_1, \dots, k_n) = \begin{cases} \min\{k_1, \dots, k_n\} & \text{si } k_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \max\{k_1, \dots, k_n\} & \text{si } k_j \leq 0, j \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora podemos mejorar el Teorema 2.7 del siguiente modo. Para  $L = \varphi^*P + Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*]$  con  $P, Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  llamamos

$$\bar{L} := \text{mcd}(P, \varphi^*(Q)).$$

Por construcción,  $\bar{L}$  divide a  $P$  y a  $\varphi^*(Q)$ , por este motivo podemos introducir  $\tilde{P} = P/\bar{L}$  y  $\tilde{Q} = \varphi^*(Q)/\bar{L}$ . A continuación presentamos la versión mejorada del resultado.

**Teorema 2.9.** Para  $L$ ,  $\tilde{P}$  y  $\tilde{Q}$  como antes, definimos  $\tilde{R} := \varphi^*\tilde{P} - \tilde{Q} \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ . Entonces  $L\tilde{R}, \tilde{R}L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ .

*Demstración.* Expandimos el producto y cancelamos términos teniendo en cuenta la construcción de  $\tilde{P}$  y de  $\tilde{Q}$ .

$$\begin{aligned} L\tilde{R} &= (\varphi^*P + Q)(\varphi^*\tilde{P} - \tilde{Q}) = \varphi^*\tilde{P}\varphi^*P - Q\tilde{Q} + Q\varphi^*\tilde{P} - \varphi^*P\tilde{Q} \\ &= \varphi^*(\tilde{P})P - Q\tilde{Q} + \varphi^*\varphi^*(Q)\tilde{P} - \varphi^*\tilde{L}\tilde{P}\tilde{Q} = \varphi^*(\tilde{P})P - Q\tilde{Q} + \varphi^* \cdot (\tilde{L}\tilde{Q}\tilde{P} - \tilde{L}\tilde{P}\tilde{Q}) \\ &= \varphi^*(\tilde{P})P - Q\tilde{Q}. \end{aligned}$$

De forma análoga se comprueba que  $\tilde{R}L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ . ■

**Nota 2.10.** De igual forma que antes completamos la reducción componiendo con  $D^k$  para cierto  $k \in \mathbb{Z}$  de forma que  $L\tilde{R}D^k \in \mathbb{F}[D]$ . Llamaremos  $\bar{R} := \tilde{R}D^k$ .

Ahora cabe preguntarse cuál es la característica de la involución  $\varphi^*$  o de su interacción con  $D$  que nos permite proceder de este modo. Notamos que la única característica de  $\varphi^*$  que se ha explotado es la propiedad

$$D\varphi^* = \varphi^*D^{-1}.$$

Sin embargo, podemos observar que basta con que

$$\alpha^{-1}D\alpha, \alpha^{-1}D^{-1}\alpha \in \mathbb{F}[D, D^{-1}] \quad (2.4)$$

para que un operador  $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  sea compatible con  $D$  en este sentido (podamos llevarlo a la izquierda de la expresión).

Estudiaremos qué involuciones  $\alpha$  ( $\alpha^n = \text{Id}$ ) satisfacen la condición (2.4).

### 2.3. Involuciones pullback

Vamos a tratar de generalizar el procedimiento de la sección anterior para otras involuciones que sean pullback de una permutación de  $\mathbb{Z}$ , es decir, de una biyección ( $\varphi^*$  es el pullback de la permutación  $\varphi(k) = -k$ ). Daremos respuesta a la siguiente cuestión *¿Cuáles son las involuciones pullback que satisfacen (2.4)?*

**Proposición 2.11.** *Si  $\psi^* \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  es el pullback de una permutación  $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  entonces  $\psi(k) = k + t$  y, por tanto, por la Nota 2.5,  $\psi^* = D^t$  para algún  $t \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Por hipótesis,

$$\psi^* = \sum_{j=-n}^n a_j D^j \quad \text{con } a_j \in \mathbb{F}. \quad (2.5)$$

Llamamos  $\{u^i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}$  a la familia de sucesiones dada por

$$u_j^i = \delta_j^i \in \mathbb{F}. \quad (2.6)$$

Entonces,  $(\psi^* u^{\psi(0)})_k = u_{\psi(k)}^{\psi(0)} = u_k^0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  por ser  $\psi^*$  biyectiva. Por tanto,  $\psi^* u^{\psi(0)} = u^0$ . Por otro lado, por (2.5) y por linealidad,

$$\psi^* u^{\psi(0)} = \sum_{j=-n}^n a_j D^j u^{\psi(0)} = \sum_{j=-n}^n a_j u^{\psi(0)-j}.$$

Comparando las dos expresiones de  $\psi^* u^{\psi(0)}$ , concluimos que, necesariamente,  $a_j = \delta_j^{\psi(0)}$  y, consecuentemente, si llamamos  $t = \psi(0)$ ,  $\psi^* = D^{\psi(0)} = D^t$  y  $\psi(k) = k + \psi(0) = k + t$ . ■

Para nuestro siguiente resultado partimos del caso de las involuciones de orden dos.

**Teorema 2.12.** *Sea  $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  una aplicación tal que  $T = (\psi^*)^{-1}D\psi^* = \psi^*D\psi^* \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ . Entonces  $\psi^2 = \text{Id}$  si y solo si  $\psi = \text{Id}$  o  $\psi = n - \text{Id}$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\psi^2 = \text{Id}$ . Si observamos que

$$(Tu)_k = (\psi^* D \psi^* u)_k = (D \psi^* u)_{\psi(k)} = (\psi^* u)_{\psi(k)+1} = u_{\psi(\psi(k)+1)},$$

es decir, que  $T$  es el pullback de la biyección  $k \mapsto \psi(\psi(k) + 1)$ . Aplicando la Proposición 2.11,  $T = D^t$  para cierto  $t \in \mathbb{Z}$  y  $\psi(\psi(k) + 1) = k + t$ .

Ahora, por ser  $\psi^2 = \text{Id}$ , si aplicamos  $\psi$  a ambos lados, tenemos

$$\psi(k) + 1 = \psi(k + t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

sustituyendo  $k$  por  $l - t$  con  $l \in \mathbb{Z}$ ,

$$\psi(l) - 1 = \psi(l - t) \quad \forall l \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Aplicando la relación (2.7) o (2.8) (para valores de  $n$  positivos y negativos respectivamente) reiteradamente tenemos  $\psi(k) + n = \psi(k + nt)$  para todo  $k, n \in \mathbb{Z}$ , en particular, para  $k = 0$ ,  $\psi(0) + n = \psi(nt)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Si aplicamos  $\psi$  a ambos lados obtenemos  $\psi(\psi(0) + n) = nt$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y sustituyendo ahora  $n$  por  $k - \psi(0)$ ,  $\psi(k) = (k - \psi(0))t$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , por tanto,

$$\psi(\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z} - \psi(0))t = t\mathbb{Z}.$$

Como  $\psi$  es una permutación de  $\mathbb{Z}$ , necesariamente  $t\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ , por tanto,  $t = \pm 1$ .

Si  $t = 1$ ,

$$\psi(k) = k - \psi(0) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ en particular, } \psi(0) = -\psi(0) \Rightarrow \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi = \text{Id}.$$

Si  $t = -1$ ,

$$\psi(k) = \psi(0) - k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = n - \text{Id} \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}.$$

El recíproco se tiene por ser  $\text{Id}^2 = \text{Id}$  y  $(n - \text{Id}) \circ (n - \text{Id}) = n - (n - \text{Id}) = \text{Id}$ . ■

Estudiamos ahora las involuciones de orden impar.

**Teorema 2.13.** *Sea  $\psi$  una permutación de  $\mathbb{Z}$  tal que  $\psi^{2n+1} = \text{Id}$  para cierto  $n \in \{0, 1, \dots\}$ . Si  $T = (\psi^*)^{-1}D\psi^* = (\psi^*)^{2n}D\psi^* \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ , entonces  $\psi = \text{Id}$ .*

*Demostración.* En este caso  $T$  es el pullback de  $k \mapsto \psi^{2n}(\psi(k) + 1)$ . De nuevo,  $T$  habrá de ser de la forma  $D^t$  con lo que se tendrá

$$\psi^{2n}(\psi(k) + 1) = k + t \quad \text{para cierto } t \in \mathbb{Z} \text{ y todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Igual que en la prueba anterior, tenemos (2.7) y (2.8), de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \psi(k) + n &= \psi(k + nt) \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi^{-1}(\psi(0) + n) = nt \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \psi^{-1}(k) = (k - \psi(0))t \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Razonando igual que antes,  $t = \pm 1$ ; si fuera  $t = -1$  tendríamos

$$\psi^{-1}(0) = \psi(0) \Rightarrow \psi^2(0) = 0 \Rightarrow \psi(0) = \psi(\psi^{2n}(0)) = \text{Id}(0) = 0$$

y entonces  $\psi$  vendría dada por  $\psi(k) = -k$ , lo que entraría en contradicción con el hecho de que  $\psi^{2n+1} = \text{Id}$  (en efecto,  $\psi^{2n+1}(1) = -1$ ). Así,  $t = 1$ . Concluimos la prueba observando que

$$\text{Id} = \psi^{-(2n+1)} = \text{Id} - (2n+1)\psi(0) \Rightarrow \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi = \text{Id}. \quad \blacksquare$$

Y por último nos centramos en las involuciones de orden par.

**Teorema 2.14.** *Sea  $\psi$  una permutación de  $\mathbb{Z}$  tal que  $\psi^{2n} = \text{Id}$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $T = (\psi^*)^{-1}D\psi^* = (\psi^*)^{2n-1}D\psi^* \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  y  $T^{-1} \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ , entonces*

$$\psi^2 = \text{Id}.$$

*Demostración.* Como  $T \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ , se tiene  $(\psi^*)^{-1}T\psi^* \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  y, por el mismo motivo,  $(\psi^*)^{-n+1}T(\psi^*)^{n-1} = (\psi^*)^n D(\psi^*)^n \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ . Así, vemos que  $(\psi)^n$  se encuentra en las hipótesis del Teorema 2.12 y que, por tanto,  $\psi^n = \text{Id}$  o  $\psi^n(k) = m - k$ . Además,  $T$  es el pullback de  $k \mapsto \psi^{2n-1}(\psi(k) + 1)$  por lo que por la Proposición 2.11,  $T = D^t$ .

Si  $\psi^n = \text{Id}$  distinguimos dos casos:

- Si  $n$  es impar concluimos por el Teorema 2.13 que  $\psi = \psi^2 = \text{Id}$ .
- Si  $n$  es par se mantienen las hipótesis del resultado si cambiamos  $n$  por  $n/2$ , razonando por inducción tendremos el resultado una vez probados el resto de casos.

Si  $\psi^n(k) = m - k$ :

- Si  $n$  es impar  $\psi^2$  está en las hipótesis del Teorema 2.13 y, por tanto,  $\psi^2 = \text{Id}$ .
- Si  $n$  es par  $\psi^2$  está en las hipótesis del Teorema 2.12 y, por tanto,  $\psi^2 = \text{Id}$  o  $\psi^2(k) = l - k$ . Supongamos  $\psi^2(k) = l - k$ , es decir,  $(\psi^*)^2 = D^l \varphi^*$ , entonces,

$$D(\psi^*)^2 = \psi^* D^t \psi^* = (\psi^*)^2 D^{t^2}.$$

Por otro lado,

$$D(\psi^*)^2 = DD^l \varphi^* = D^l \varphi^* D^{-1} = (\psi^*)^2 D^{-1}.$$

Juntando ambas expresiones concluimos que  $t \in \mathbb{Z}$  verifica  $t^2 = -1$ , lo cual es imposible y nos permite descartar el caso  $\psi^2(k) = l - k$ .

■

Observamos que los casos estudiados en esta sección han quedado reducidos únicamente a las involuciones de orden dos y, además estas habrán de ser pullback de permutaciones de la forma  $\psi(k) = n - k$ , es decir, serán precisamente las involuciones  $\psi^* = D^n \varphi^*$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

Respondiendo a la pregunta inicial, *las involuciones pullback compatibles con  $D$  son la identidad y todas las de la forma  $D^n \varphi^*$  con  $n \in \mathbb{Z}$* . Además, como  $\mathbb{F}[D, D^{-1}, \psi^*] = \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*]$  para todas estas involuciones  $\psi^*$ , resulta que *los pullbacks considerados no generalizan las reducciones estudiadas en [17]*.

Puesto que no nos ha sido posible generalizar el estudio consideramos otras involuciones.

## 2.4. Otras involuciones lineales

En nuestra búsqueda de clases de involuciones que permitan reducciones al combinarse con  $D$  nos hemos centrado de momento en los operadores pullback, es decir, aquellos que desordenan las sucesiones de  $\mathcal{S}$ .

En cierto modo podemos decir que un operador de  $\mathcal{S}$  actúa *desordenando* y *alterando los valores* de una sucesión. Pasemos ahora al caso polarmente opuesto al de los pullback, esto es, los operadores  $T$  que alteran de un modo específico cada valor de la sucesión, formalmente

$$(Tu)_k = T^{(k)}(u_k) \quad \text{para ciertos operadores lineales } T^{(k)} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.9)$$

Si  $T^n = \text{Id}$ , entonces  $(T^{(k)})^n = \text{Id}$ , además como  $T$  es lineal, necesariamente, el operador de cada posición es lineal, es decir actúa multiplicando por un escalar  $T^{(k)}(x) = \lambda_k x$  con  $\lambda_k^n = 1$ : los  $\lambda_k$  son raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  solo existen raíces cuadradas de la unidad por lo que solo se tendrán involuciones de este tipo de orden 2,  $-\text{Id}$  por ejemplo. Si  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  existen raíces  $n$ -ésimas de la unidad para cualquier  $n$  por lo que para cualquier orden  $n$  se tienen involuciones de este tipo,  $\exp(\frac{2\pi i}{n})\text{Id}$  por ejemplo.

Tenemos que  $T$  actúa multiplicando por  $\lambda_k$  en cada subespacio  $\langle u^k \rangle$  recuperando la definición de los  $u^k$  dada en (2.6); pero los  $\lambda_k$  solo pueden tomar  $n$  valores distintos (las raíces  $n$ -ésimas de 1) por lo que podemos agrupar estos subespacios en  $n$  más grandes,

$$V_l = \{u \in \mathcal{S} \mid u_k = 0 \text{ si } \lambda_k \neq \lambda^l\} \quad \text{para cada } l \in \{1, \dots, n\} \quad (2.10)$$

donde  $\lambda = \exp(\frac{2\pi i}{n}), \lambda^2, \dots, \lambda^n = 1$  son las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Se tiene que  $\mathcal{S} = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ . De aquí en adelante llamaremos  $l_k \in \{1, \dots, n\}$  a los exponentes tales que  $\lambda_k = \lambda^{l_k}$ . De este modo,

$$(Tu)_k = \lambda^{l_k} u_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

En esta sección veremos como diferentes involuciones inducirán descomposiciones de este tipo y cuándo y cómo estas descomposiciones serán compatibles con  $D$ . Antes de construir esta descomposición presentamos un importante resultado de álgebra que necesitaremos.

**Teorema 2.15 ([1]). (Identidad de Bézout para polinomios).** Sean  $p, q \in \mathbb{C}[X]$  dos polinomios coprimos, entonces, existen  $a, b \in \mathbb{C}[X]$  con  $ap + bq = 1$ .

El siguiente resultado es una adaptación de [15, Teorema 4.1] al contexto de este trabajo que nos va a permitir construir descomposiciones en subespacios en los que una involución actúa multiplicando por un escalar para cualquier involución lineal en  $\mathcal{S}$ .

**Teorema 2.16. (Teorema de la descomposición primaria).** Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial,  $A : V \rightarrow V$  una aplicación lineal,  $p \in \mathbb{C}[X]$  de, al menos, grado uno y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  las raíces de  $p$  con multiplicidades  $\mu_1, \dots, \mu_n$  respectivamente. Si  $p(A) = 0$ , entonces

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n \quad \text{donde } V_k = \ker(\lambda_k \text{Id} - A)^{\mu_k}.$$

Además, si todas las raíces tienen multiplicidad uno entonces

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \xrightarrow{A} V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Definimos los polinomios  $p_k(X) := (\lambda_k - X)^{\mu_k} \in \mathbb{C}[X]$  donde  $X$  se evalúa en aplicaciones  $V \rightarrow V$ , de esta forma,  $V_k = \ker p_k(A)$ . Por el **Teorema fundamental del Álgebra**  $p = \alpha p_1 \cdots p_n$  para cierto  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Veamos que los  $V_k$  tienen intersección trivial dos a dos. Sean  $k, j \in \{1, \dots, n\}$  con  $k \neq j$ , por construcción,  $p_k$  y  $p_j$  son coprimos, por tanto, existen dos polinomios  $a, b \in \mathbb{C}[X]$  satisfaciendo la **Identidad de Bézout**:  $ap_j + bp_k = 1$ . Evaluando en  $A$ ,

$$a(A)p_j(A) + b(A)p_k(A) = \text{Id}. \quad (2.12)$$

Ahora, si  $v \in V_j \cap V_k$ , entonces  $p_j(A)v = p_k(A)v = 0$ , y, evaluando (2.12) en  $v$ ,  $v = p_j(A)v + p_k(A)v = 0$ , por lo que  $V_j \cap V_k = 0$ .

Veamos ahora que todo  $v \in V$  se puede expresar como suma de elementos de los  $V_k$ . Sea  $q_k := \prod_{j=1, j \neq k}^n p_j$ , por construcción,  $\text{mcd}(q_1, \dots, q_n) = 1$ , luego existen  $r_k \in \mathbb{C}[X]$ , tales que  $\sum_{k=1}^n r_k q_k = 1$ . Ahora bien,  $(p_k r_k q_k)(A) = (r_k p)(A) = r_k(A)p(A) = 0$ , luego  $(r_k q_k)(A) \in \ker p_k(A) = V_k$ . Es decir,  $v = \sum_{k=1}^n (r_k q_k)(A)v$  nos da la expresión de  $v$  como suma de elementos de los  $V_k$ .

Finalmente, si  $\mu_k = 1$  para todo  $k = 1, \dots, n$ , notamos que los  $V_k$  son autoespacios asociados a los autovalores  $\lambda_k$  (entre los que se encuentran los autovalores de  $A$ ), luego

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \xrightarrow{A} V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

■

Veamos algún ejemplo de como se descompone  $\mathcal{S}$  respecto algunas involuciones. Además, estos ejemplos nos ilustrarán como construir las proyecciones de  $\mathcal{S}$  sobre los espacios  $V_l$ , esto es, aplicaciones lineales sobreyectivas  $T_l : \mathcal{S} \rightarrow V_l$  con  $T_l^2 = T_l$ . Por ser  $\mathcal{S} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ , estas proyecciones existen y quedan unívocamente determinadas por la descomposición.

**Ejemplo 2.17.** El operador reflexión  $(\varphi^*u)_k = u_{-k}$  de orden 2 define los subespacios

$$V_1 = \{u \in \mathcal{S} \mid \varphi^*u = u\} = \{u \in \mathcal{S} \mid u_{-k} = u_k \forall k \in \mathbb{Z}\} = (\text{Id} + \varphi^*)(\mathcal{S})$$

y

$$V_2 = \{u \in \mathcal{S} \mid \varphi^*u = -u\} = \{u \in \mathcal{S} \mid u_{-k} = -u_k \forall k \in \mathbb{Z}\} = (\text{Id} - \varphi^*)(\mathcal{S})$$

con proyecciones respectivas

$$T_1 = \frac{1}{2}(\text{Id} + \varphi^*) \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{1}{2}(\text{Id} - \varphi^*).$$

**Ejemplo 2.18.** Definimos el operador  $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  dado por  $\alpha u_k = i^{|k|} u_{-k}$ . Es una involución lineal de orden 4, por tanto induce la descomposición

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u \in \mathcal{S} \mid \alpha u = u\} = \{u \in \mathcal{S} \mid u_k = i^{|k|} u_{-k} \forall k \in \mathbb{Z}\} = (\text{Id} + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)(\mathcal{S}) \\ &= \{u \in \mathcal{S} \mid u_{4k} = u_{-4k}, u_{2k+1} = 0, u_{4k+2} = -u_{-4k-2} \forall k \geq 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{u \in \mathcal{S} \mid \alpha u = iu\} = \{u \in \mathcal{S} \mid u_k = i^{|k|+1} u_{-k} \forall k \in \mathbb{Z}\} = (\text{Id} - i\alpha - \alpha^2 + i\alpha^3)(\mathcal{S}) \\ &= \{u \in \mathcal{S} \mid u_{2k} = 0, u_{4k+1} = u_{-4k-1}, u_{4k+3} = -u_{-4k-3} \forall k \geq 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \{u \in \mathcal{S} \mid \alpha u = -u\} = \{u \in \mathcal{S} \mid u_k = -i^{|k|} u_{-k} \forall k \in \mathbb{Z}\} = (\text{Id} - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3)(\mathcal{S}) \\ &= \{u \in \mathcal{S} \mid u_{4k} = -u_{-4k}, u_{2k+1} = 0, u_{4k+2} = u_{-4k-2} \forall k \geq 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4 &= \{u \in \mathcal{S} \mid \alpha u = -iu\} = \{u \in \mathcal{S} \mid u_k = i^{|k|-1} u_{-k} \forall k \in \mathbb{Z}\} = (\text{Id} + i\alpha - \alpha^2 - i\alpha^3)(\mathcal{S}) \\ &= \{u \in \mathcal{S} \mid u_{2k} = 0, u_{4k+1} = -u_{-4k-1}, u_{4k+3} = u_{-4k-3} \forall k \geq 0\} \end{aligned}$$

y las proyecciones

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{4}(\text{Id} + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3), \\ T_2 &= \frac{1}{4}(\text{Id} - i\alpha - \alpha^2 + i\alpha^3), \\ T_3 &= \frac{1}{4}(\text{Id} - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3), \\ T_4 &= \frac{1}{4}(\text{Id} + i\alpha - \alpha^2 - i\alpha^3). \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.19.** Definimos  $\beta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  como

$$(\beta u)_k = \begin{cases} u_1 & \text{si } k = 0, \\ u_0 & \text{si } k = 1, \\ u_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este operador intercambia las posiciones 0 y 1 de una sucesión. Veamos cómo descompone  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u \in \mathcal{S} \mid \beta u = u\} = (\text{Id} + \beta)(\mathcal{S}) = \{u \in \mathcal{S} \mid u_0 = u_1\}, \\ V_2 &= \{u \in \mathcal{S} \mid \beta u = -u\} = (\text{Id} - \beta)(\mathcal{S}) = \{u \in \mathcal{S} \mid u_0 = u_1, u_k = 0 \forall k \neq 0, 1\}. \end{aligned}$$

Estos subespacios llevan asociadas las proyecciones

$$T_1 = \frac{1}{2}(\text{Id} + \beta) \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{1}{2}(\text{Id} - \beta).$$

Puesto que el estudio que nos ocupa es el de las involuciones lineales particularizaremos el Teorema 2.16 para este caso, primero en  $\mathbb{C}$  y después en  $\mathbb{R}$ .

**Corolario 2.20.** *En particular, si  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  y  $T$  es una involución de orden  $n$  en  $\mathcal{S}$  ( $T^n = \text{Id}$ ),  $\mathcal{S}$  se descompone como  $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$  de forma que  $T$  actúa del siguiente modo*

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \xrightarrow{T} V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

$$(u_{(1)}, \dots, u_{(n)}) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n)} \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ .

**Corolario 2.21.** *Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  y  $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  una involución lineal de orden dos. Entonces  $\mathcal{S} = V_1 \oplus V_2$  de forma que*

$$V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{T} V_1 \oplus V_2$$

$$(u_{(1)}, u_{(2)}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Extendemos  $T$  a  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  como  $T(u + iv) = Tu + iTv$  para  $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Aplicando el Teorema 2.16 obtenemos la descomposición  $\mathcal{S}(\mathbb{C}) = W_1 \oplus W_2$ . Finalmente, intersectando con  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  visto como subespacio de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ ,

$$V_1 := W_1 \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad V_2 := W_2 \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Obtenemos la descomposición  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$  y concluimos la prueba. ■

Primero veamos como interactúan los operadores  $T$  de la forma (2.9) con el desplazamiento  $D$ :

$$\begin{aligned} (DT^m u)_k &= (T^m u)_{k+1} = \lambda_{k+1}^m u_{k+1}. \\ (T^m D u)_k &= \lambda_k^m (D u)_k = \lambda_k^m u_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para poder reducir (en el sentido con el que hemos trabajado en los anteriores apartados) expresiones que combinen este operador junto con el desplazamiento  $D$  es fácil ver que basta que los exponentes  $l_k$  definidos en (2.11) sigan una progresión aritmética o geométrica módulo  $n$ . Formalizaremos este hecho en las siguientes proposiciones.

**Proposición 2.22.** *Si  $l_{k+1} \equiv l_k + m \pmod{n}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y cierto  $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  entonces  $DT = \lambda^m TD$ .*

*Demostración.* Para  $u \in \mathcal{S}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrarios, empleando las ecuaciones (2.13),

$$(DTu)_k = \lambda^{l_{k+1}} u_{k+1} = \lambda^{l_k + m} u_{k+1} = \lambda_k \lambda^m u_{k+1} = \lambda^m (TDu)_k. \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.23.** Si  $l_{k+1} \equiv l_k m \pmod{n}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y cierto  $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  entonces  $DT = T^m D$ .

*Demostración.* Para  $u \in \mathcal{S}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrarios, empleando las ecuaciones (2.13),

$$(DTu)_k = \lambda^{l_{k+1}} u_{k+1} = \lambda^{l_k m} u_{k+1} = \lambda_k^m u_{k+1} = (T^m Du)_k. \quad \blacksquare$$

Estudiemos ahora cómo se comportan las descomposiciones en subespacios dadas en (2.10) de los operadores considerados en las Proposiciones 2.22 y 2.23 con el operador desplazamiento  $D$ .

En las hipótesis de la Proposición 2.22,  $DV_{l_k} = V_{l_{k-1}} = V_{l'_k}$  donde  $l'_k + m \equiv l_k \pmod{n}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Así si  $V_l \neq 0$ , como  $l = l_k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $DV_l = V_{l'}$  donde  $l' + m \equiv l \pmod{n}$ . Además, si  $V_{l'} \neq 0$ , tenemos  $l' = l_q$  para cierto  $q \in \mathbb{Z}$ , por tanto,  $l = l_{q+1}$  y  $DV_l = V_{l'} \neq 0$ ; en todo caso,  $DV_l = V_{l'}$ .

De modo similar, en las hipótesis de la Proposición 2.23,  $DV_{l_k} = V_{l_{k-1}} = V_{l'_k}$  donde  $l'_k m \equiv l_k \pmod{n}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Así si  $V_l \neq 0$ , como  $l = l_k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $DV_l = V_{l'}$  donde  $l' m \equiv l \pmod{n}$ . Además, si  $V_{l'} \neq 0$ , tenemos  $l' = l_q$  para cierto  $q \in \mathbb{Z}$ , por tanto,  $l = l_{q+1}$  y  $DV_l = V_{l'} \neq 0$ ; de nuevo,  $DV_l = V_{l'}$ .

Ahora podemos observar que en las Proposiciones 2.22 y 2.23 no era importante el hecho de que  $T$  actuara como producto en cada posición, tan solo que los subespacios en los que actúa así se comporten igual (como en el anterior párrafo). Por este motivo podemos generalizar las proposiciones exigiendo solo esta condición de los subespacios (tan solo necesitamos un contenido).

En lo que sigue,  $T$  será una involución lineal compleja de orden  $n$  o real de orden 2 y  $V_l$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$  los subespacios los descritos en los Corolarios 2.20 y 2.21 (para el caso complejo y real respectivamente).

**Proposición 2.24.** Si  $DV_l \subset V_{l'}$  con  $l' + m \equiv l \pmod{n}$  para todo  $l \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $DT = \lambda^m TD$ .

*Demostración.* Supongamos que  $u \in V_l$  para algún  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces, por hipótesis,  $DV_l \subset V_{l'}$ . Comprobemos la igualdad de operadores aplicados en la sucesión  $u$  en una posición arbitraria  $k$ :

$$(DTu)_k = (Tu)_{k+1} = \lambda^l u_{k+1} = \lambda^l (Du)_k = \lambda^m \lambda^{l'} (Du)_k = \lambda^m (TDu)_k.$$

Como el resultado se sostiene en todos los subespacios  $V_l$  y  $\mathcal{S} = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ , por linealidad, se tiene en todo  $\mathcal{S}$ . ■

**Proposición 2.25.** Si  $DV_l \subset V_{l'}$  con  $l' m \equiv l \pmod{n}$  para todo  $l \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $DT = T^m D$ .

*Demostración.* Probaremos el resultado en los subespacios  $V_l$ . Sea  $l \in \{1, \dots, n\}$  y  $u \in V_l$ , por hipótesis,  $DV_l \subset V_{l'}$ . Ahora, en una posición arbitraria  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$(DTu)_k = (Tu)_{k+1} = \lambda^l u_{k+1} = \lambda^l (Du)_k = (\lambda^{l'})^m (Du)_k = (T^m Du)_k.$$

Por linealidad, el resultado queda probado. ■

En estos casos estamos viendo la forma más simple en que  $D$  puede ser compatible con las descomposiciones: *la imagen de cada subespacio queda enteramente contenida en otro subespacio (o el mismo)*. Veamos que sucede, en particular, cuando  $D$  es un operador interno en estos subespacios.

**Proposición 2.26.** *Si  $DV_l \subset V_l$  para todo  $l \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $DT = TD$ .*

*Demostración.* Sea  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u \in V_l$  y  $k \in \mathbb{Z}$  entonces

$$(DTu)_k = (Tu)_{k+1} = \lambda^l u_{k+1} = (TDu)_k.$$

Concluimos la demostración por linealidad. ■

Al exigir que  $D$  se relacione de la forma explicada en los párrafos anteriores con los subespacios estamos dejando muchas posibilidades fuera que hemos de incluir para realizar un buen estudio, de hecho el operador  $\varphi^*$  no satisface esta condición. Estudiemos este caso (tanto en su versión real como compleja). La descomposición asociada a  $\varphi^*$  es  $\mathcal{S} = E \oplus O$  con  $E = \{u \in \mathcal{S} \mid u_{-k} = u_k\}$  (sucesiones pares) y  $O = \{u \in \mathcal{S} \mid u_{-k} = -u_k\}$  (sucesiones impares) que descompone  $\varphi^*$  como

$$\begin{aligned} E \oplus O &\xrightarrow{\varphi^*} E \oplus O \\ (u_e, u_o) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_e \\ u_o \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o, escrito de otro modo,  $\varphi^* = \pi_e - \pi_o$  donde  $\pi_e$  y  $\pi_o$  son, respectivamente, las proyecciones sobre  $E$  y  $O$  dadas por  $(\pi_e u)_k = \frac{u_k + u_{-k}}{2}$  y  $(\pi_o u)_k = \frac{u_k - u_{-k}}{2}$ . Vemos que en este caso  $D$  no funciona como antes respecto a  $E$  y  $O$ , por ejemplo, consideramos  $u \in O$  dada por  $u_k = k$  y notamos que  $Du$  no es par ni impar. En este caso la forma en que se da la compatibilidad es la siguiente  $(D + D^{-1})E \in E$ ,  $(D + D^{-1})O \in O$ .

Ahora, de igual forma que en la prueba de la Proposición 2.26 deducimos que  $D + D^{-1}$  conmuta con  $\varphi^*$ . Además en este caso  $D\varphi^* = \varphi^*D^{-1}$  y es esto lo que permite realizar las reducciones de la Sección 2.2.

La descomposición descrita en esta sección nos da una forma de caracterizar las involuciones más manejable en lo que respecta a estudiar su interacción entre ellos y con  $D$  por lo que nos será útil en lo que sigue.

## 2.5. Transformada de Hilbert discreta

En el estudio de procesamiento de señales se emplea la transformada de Hilbert para representar señales [10]. En este mismo contexto, cuando se trabaja con conjuntos de datos discretos es de utilidad su versión discreta que se define y estudia en [12].

En esta sección trataremos las ecuaciones en diferencias que incluyen la transformada de Hilbert discreta. En [6] se estudia como las propiedades de la transformada de Hilbert

continua permiten resolver ecuaciones siguiendo un proceso similar al de [17] que se vio anteriormente. Veremos como estas propiedades pasan al caso discreto.

De igual modo que la transformada de Hilbert continua se define sobre los espacios de funciones  $L^2$  (ver [12]), para definir la transformada discreta nos hemos de reducir a los espacios de sucesiones  $l^2(\mathbb{F})$ , adaptaremos su definición al contexto de sucesiones sobre  $\mathbb{Z}$ . Para ello primero definimos las series bilaterales.

**Definición 2.27.** Dada una sucesión  $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{F}$  tal que  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} u_{-k} < \infty$ , denotamos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_{-k} < \infty.$$

En este caso diremos que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$  converge.

Definimos ahora nuestro dominio para esta sección como

$$l^2(\mathbb{F}) := \left\{ u \in \mathcal{S}(\mathbb{F}) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty \right\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{F})$$

que, equipado con la norma

$$\|u\|_2 := \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

define un espacio de Hilbert que lleva asociado el producto escalar  $\langle u, v \rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \overline{v_k}$ . Cuando no pueda llevar a confusión nos referiremos a  $l^2(\mathbb{F})$  simplemente como  $l^2$ . En el siguiente lema calculamos una serie que nos servirá más adelante, a continuación, presentamos dos resultados, extraídos de [12], que nos permitirán definir la transformada de Hilbert en su versión discreta.

**Lema 2.28.** *Se tiene*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (2.14)$$

*Demostración.* Establecemos la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0. \end{cases}$$

La expresamos como serie de Fourier:

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) \right].$$

De esta forma, la serie  $F(0)$  converge a  $f(0) = 0$ , es decir,

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(0) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(0) \right] = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi n^2}.$$

Despejando obtenemos (2.14). ■

**Lema 2.29.** Para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{k-l})^2}{(k-l)^2} = \pi^2.$$

*Demostración.* Llamamos  $n = k - l$  y, aplicando el Lema 2.28, calculamos

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{k-l})^2}{(k-l)^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)^2}{n^2} = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.30.** Para cualesquiera  $k, m \in \mathbb{Z}$  con  $k \neq m$ , se tiene

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k, m}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m})}{(l-k)(l-m)} = 0. \quad (2.15)$$

*Demostración.* En primer lugar probamos que la serie en (2.15) converge absolutamente, para ello, sin pérdida de generalidad, asumimos que  $k < m$ , entonces,

$$\sum_{m+1}^{\infty} \left| \frac{(1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m})}{(l-k)(l-m)} \right| < 4 \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{(l-m)^2} < \infty,$$

y, análogamente,

$$\sum_{-\infty}^{k-1} \left| \frac{(1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m})}{(l-k)(l-m)} \right| < 4 \sum_{-\infty}^{k-1} \frac{1}{(l-k)^2} < \infty,$$

lo que prueba la convergencia absoluta.

Ahora verificamos (2.15):

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k, m}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m})}{(k-l)(l-m)} \\ &= \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k, m}}^{\infty} (1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m}) \frac{(l-k) - (l-m)}{(l-k)(l-m)(m-k)} \\ &= \frac{1}{(m-k)} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k, m}}^{\infty} (1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m}) \left( \frac{1}{(l-m)} - \frac{1}{(l-k)} \right). \end{aligned}$$

Como la serie converge absolutamente, podemos reordenar sus sumandos independientemente y, si el resultado es una serie convergente, conservará su límite. Así, indexamos el primer sumando por  $r = l - m$  y el segundo por  $r = l - k$  para obtener

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k, m}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m})}{(k-l)(l-m)}$$

$$= \frac{1}{(m-k)} \left[ \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0, k-m}}^{\infty} \frac{(1-(-1)^{r+m-k})(1-(-1)^r)}{r} - \frac{(1-(-1)^r)(1-(-1)^{r-k+m})}{r} \right] = 0. \blacksquare$$

**Definición 2.31 ([12]).** Dada una sucesión  $u \in l^2$  diremos que su *transformada de Hilbert* es la sucesión  $Hu \in l^2$  dada por

$$(Hu)_k = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_l \frac{1-(-1)^{k-l}}{k-l},$$

o, equivalentemente,

$$(Hu)_k := \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sum_{l \text{ impar}} \frac{u_l}{k-l} & \text{para } k \text{ par,} \\ \frac{2}{\pi} \sum_{l \text{ par}} \frac{u_l}{k-l} & \text{para } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Obsérvese que  $H : l^2 \rightarrow l^2$  es un operador lineal.

En los dos próximos resultados verificaremos la buena definición de  $H$ . Primero comprobemos que la expresión converge.

**Proposición 2.32.** Si  $u \in l^2$ , entonces

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_l \frac{1-(-1)^{k-l}}{k-l} \quad (2.16)$$

converge.

*Demostración.* Primero notamos que para  $k, l \in \mathbb{Z}$  con  $k \neq l$ , como

$$0 \leq \left( \left| \frac{1}{k-l} \right| - |u_l| \right)^2 = \left| \frac{1}{k-l} \right|^2 - 2 \left| \frac{u_l}{k-l} \right| + |u_l|^2,$$

entonces

$$\left| \frac{u_l}{k-l} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \left| \frac{1}{k-l} \right|^2 + |u_l|^2 \right) \leq \left| \frac{1}{k-l} \right|^2 + |u_l|^2.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \left| \frac{u_l}{k-l} \right| &\leq \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \left( \left| \frac{1}{k-l} \right|^2 + |u_l|^2 \right) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{1}{m} \right|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} |u_l|^2 \\ &\leq \frac{\pi^2}{3} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} |u_l|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \left| u_l \frac{1-(-1)^{k-l}}{k-l} \right| \leq 2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \left| \frac{u_l}{k-l} \right|,$$

la serie (2.16) converge absolutamente y, por tanto, es convergente.  $\blacksquare$

Ahora veamos que, efectivamente,  $H$  aplica elementos de  $l^2$  en elementos de  $l^2$ , de hecho, es una isometría de este espacio.

**Proposición 2.33.** Si  $u \in l^2$ , entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(Hu)_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_l \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2.$$

*Demostración.* Emplearemos  $z^*$  para denotar el conjugado complejo de  $z$  (el propio  $z$  en el caso real), desarrollamos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_l \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_l \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} \right) \left( \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq k}}^{\infty} u_m^* \frac{1 - (-1)^{k-m}}{k-m} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_l u_m^* \sum_{\substack{l=-\infty \\ k \neq l, m}}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} \right) \left( \frac{1 - (-1)^{k-m}}{k-m} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |u_l|^2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{k-l})^2}{(k-l)^2} \\ & \quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq l}}^{\infty} u_l u_m^* \sum_{\substack{l=-\infty \\ k \neq l, m}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{k-l})(1 - (-1)^{k-m})}{(k-l)(k-m)}. \end{aligned}$$

Aplicando los Lemas 2.29 y 2.30 concluimos la prueba. ■

A partir de la definición se deducen rápidamente las siguientes propiedades.

**Proposición 2.34.**  $H^2 = -\text{Id}$ .

*Demostración.* Calculamos el  $k$ -ésimo término de  $H^2u$

$$\begin{aligned} (H^2u)_k &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} (Hu)_l \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq l}}^{\infty} u_m \frac{1 - (-1)^{l-m}}{l-m} \right) \\ &= -\frac{u_k}{\pi^2} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{k-l})^2}{(k-l)^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq k}}^{\infty} u_m \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq m, k}}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^{l-k})(1 - (-1)^{l-m})}{(l-k)(l-m)}. \end{aligned}$$

De nuevo, aplicando los Lemas 2.29 y 2.30 se deduce

$$(H^2u)_k = -u_k. \quad \blacksquare$$

**Corolario 2.35.**  $H$  es invertible y  $H^{-1} = -H$ .

**Corolario 2.36.**  $H$  es una involución lineal en  $l^2$  de orden 4.

Ahora veremos como se descompone  $l^2$  en subespacios según  $H$ . Como  $H^2 + \text{Id} = 0$ , por el Teorema 2.16, tenemos la descomposición  $l^2 = V_1 \oplus V_2$  sobre la que  $H$  actúa diagonalmente multiplicando por los autovalores de  $x^2 + 1 = 0$ , es decir,  $i$  y  $-i$ :

$$\begin{aligned} V_1 \oplus V_2 &\xrightarrow{T} V_1 \oplus V_2 \\ (u^{(1)}, u^{(2)}) &\longmapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular la forma de estos espacios  $V_1$  y  $V_2$  y las proyecciones asociadas  $T_1$  y  $T_2$ , adaptamos el procedimiento que se sigue en [12] para el caso continuo al discreto.

**Teorema 2.37.** Estos espacios tienen la forma  $V_1 := \{u \in l^2 \mid Hu = iu\} = (\text{Id} - iH)(l^2)$  y  $V_2 := \{u \in l^2 \mid Hu = -iu\} = (\text{Id} + iH)(l^2)$ , su suma directa es  $l^2$  y sus proyecciones asociadas son  $T_1 = \frac{1}{2}(\text{Id} - iH)$  y  $T_2 = \frac{1}{2}(\text{Id} + iH)$  respectivamente, esto es,  $T_1^2 = T_1$ ,  $T_2^2 = T_2$ ,  $T_1(l^2) = V_1$ ,  $T_2(l^2) = V_2$ .

*Demostración.* Primero observamos que  $T_1(l^2) = \frac{1}{2}V_1 = V_1$  y  $T_2(l^2) = \frac{1}{2}V_2 = V_2$ . También, para  $u \in l^2$  arbitrario, como  $T_1 u \in V_1$ ,

$$T_1^2 u = \frac{1}{2}(T_1 u - iHT_1 u) = T_1 u,$$

por lo que  $T_1^2 = T_1$ , de forma análoga,  $T_2^2 = T_2$ .

Ahora, sea  $v \in l^2$  arbitrario, llamamos  $u = v - iHv$ , entonces

$$Hu = Hv + iv = iu,$$

de donde  $(\text{Id} - iH)(l^2) \subset V_1$ . De forma análoga se comprueba que  $(\text{Id} + iH)(l^2) \subset V_2$ .

Finalmente, observamos que  $(\text{Id} - iH)(l^2) + (\text{Id} + iH)(l^2) = l^2$ ; por el Teorema 2.16,  $l^2 = V_1 \oplus V_2$  y como  $(\text{Id} - iH)(l^2) \subset V_1$  y  $(\text{Id} + iH)(l^2) \subset V_2$  necesariamente se tienen las igualdades de los conjuntos  $(\text{Id} - iH)(l^2) = V_1$  y  $(\text{Id} + iH)(l^2) = V_2$ . ■

El operador  $H$  se comporta de una forma muy controlada con los pullbacks de biyecciones afines de  $\mathbb{Z}$  de igual forma que en el caso continuo. El siguiente resultado es una adaptación del dado en [6] al caso discreto.

**Proposición 2.38.** Sea  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  una aplicación dada por  $\sigma(k) = ak + b$  con  $a = \pm 1$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , entonces  $H\sigma^* = a\sigma^*H$ . En particular,  $HD = DH$  y  $H\varphi^* = -\varphi^*H$ .

*Demostración.* Particularizamos la igualdad en la posición  $k \in \mathbb{Z}$

$$(H\sigma^*u)_k = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_{al+b} \frac{1 - (-1)^{k-l}}{k-l} = \frac{a}{\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq k}}^{\infty} u_{al+b} \frac{1 - (-1)^{ak+b-(al+b)}}{ak+b-(al+b)}$$

$$= \frac{a}{\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq ak+b}}^{\infty} u_m \frac{1 - (-1)^{ak+b-m}}{ak+b-m} = a(Hu)_{ak+b} = a(\sigma^*Hu)_k. \quad \blacksquare$$

Introducimos ahora el álgebra  $\mathbb{F}[D, D^{-1}, H]$  de operadores  $l^2 \rightarrow l^2$  que se construye como el anillo de polinomios en tres variables cocientado por  $H^2 = -\text{Id}$ ,  $DH = HD$ ,  $DD^{-1} = D^{-1}D = \text{Id}$ . Estudiaremos el problema  $Lu = 0$  con  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, H]$ . Esto será sencillo gracias a la conmutatividad del álgebra  $\mathbb{F}[D, D^{-1}, H]$ .

**Nota 2.39.** *Cualquier  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, H]$  admite la expresión  $L = HP + Q$  con  $P, Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ , gracias a que  $H$  y  $D$  conmutan.*

**Teorema 2.40.** *Sea  $L = HP + Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, H]$  cualquiera con  $P, Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ . Definimos  $R = HP - Q$ , entonces  $LR = RL \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ .*

*Demostración.* Expandimos, aprovechamos la conmutatividad y cancelamos términos

$$LR = (HP + Q)(HP - Q) = HPH - HPQ + QHP - Q^2 = -P^2 - Q^2 = RL \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]. \quad \blacksquare$$

**Nota 2.41.** *El Teorema 2.40 conserva su validez si sustituimos  $H$  por cualquier involución de orden dos que conmute con  $D$ .*

Ahora, puesto que  $\varphi^*(l^2) = l^2$ , podemos incluir la reflexión y definir el álgebra  $\mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*, H]$  dada por las relaciones  $DD^{-1} = D^{-1}D = \text{Id}$ ,  $\varphi^*D = D^{-1}\varphi^*$ ,  $(\varphi^*)^2 = \text{Id}$ ,  $H\varphi^* = -\varphi^*H$ ,  $HD = DH$  y  $H^2 = -\text{Id}$ . Estudiaremos como reducir ecuaciones con  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*, H]$ . De nuevo, para estas ecuaciones veremos como eliminar las apariciones de  $\varphi^*$  para después aplicar el Teorema 2.40 y reducir el problema a  $\mathbb{F}[D, D^{-1}]$ .

**Nota 2.42.** *Gracias a las relaciones presentes en  $\mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*, H]$  (Proposición 2.38) todo  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*, H]$  admite la expresión  $L = \varphi^*HP + HQ + \varphi^*S + T$  con  $P, Q, S, T \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ .*

**Teorema 2.43.** *Sea  $L = \varphi^*HP + HQ + \varphi^*S + T \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*, H]$  con  $P, Q, S, T \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$ . Definimos  $R = \varphi^*HP + H\varphi^*(Q) + \varphi^*S - \varphi^*(T)$ , entonces*

$$RL, LR \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, H].$$

*Demostración.* Multiplicamos, aplicamos las relaciones y cancelamos términos

$$\begin{aligned} RL &= (\varphi^*HP + H\varphi^*(Q) + \varphi^*S - \varphi^*(T))(\varphi^*HP + HQ + \varphi^*S + T) \\ &= \varphi^*(P)P - H\varphi^*(P)S + H\varphi^*(S)P + \varphi^*(S)S - \varphi^*(Q)Q - H\varphi^*(T)Q \\ &\quad + H\varphi^*(Q)T - \varphi^*(T)T \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, H]. \end{aligned}$$

Se puede comprobar de forma similar que  $LR \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, H]$ . \blacksquare

En este caso, al hacer la reducción en dos pasos, estamos relajando el problema dos veces, el proceso no parece óptimo, de hecho, a fin de cuentas estamos aplicando por separado la eliminación de  $\varphi^*$  y de  $H$  sin aprovechar la compatibilidad entre ellos ( $\varphi^*H = -H\varphi^*$ ).

Este problema lo causa la asimetría desplazamiento a la derecha, que nos impide cancelar términos en los que aparece  $\varphi^*$ . En muchos casos prácticos esto no supondrá un problema, ya que el operador  $D$  se empleará para aproximar el operador diferencial continuo con  $D - \text{Id}$ , si sustituimos esta aproximación por  $\Delta = D - D^{-1}$  que, de hecho, es más precisa, tendremos un operador con un mejor comportamiento con respecto a  $\varphi^*$  (y el mismo con  $H$ ). Aunque el conjunto de ecuaciones que resuelve en teoría se reduce.

## 2.6. Operador incremento centrado

En esta sección ajustaremos la reducción del apartado anterior para ecuaciones con el operador incremento centrado  $\Delta = D - D^{-1}$  para obtener un mejor método para estos casos. En particular buscamos adaptar el resultado [6, Teorema 5.2] al caso discreto. Definiremos el  $\mathbb{F}[\Delta, \varphi^*, H]$  y veremos cómo las ecuaciones asociadas a operadores de este álgebra son manejables.

**Proposición 2.44.** *Los operadores  $\Delta$ ,  $\varphi^*$ ,  $H$  satisfacen las siguientes relaciones:*

- $\Delta\varphi^* = -\varphi^*\Delta$ ,
- $\Delta H = H\Delta$ .

*Demostración.* Empleando las relaciones vistas en los apartados anteriores:

- $\Delta\varphi^* = D\varphi^* - D^{-1}\varphi^* = \varphi D^{-1} - \varphi^*D = -\varphi^*\Delta$ ,
- $\Delta H = DH - D^{-1}H = HD - HD^{-1} = H\Delta$ . ■

Ahora conocemos que el álgebra  $\mathbb{F}[\Delta, \varphi^*, H]$  queda descrita por las relaciones  $H^2 = -\text{Id}$ ,  $(\varphi^*)^2 = \text{Id}$ ,  $\Delta H = H\Delta$ ,  $\varphi^*\Delta = -\Delta\varphi^*$ ,  $H\varphi^* = -\varphi^*H$  y estamos listos para adaptar el resultado [6, Teorema 5.2]. Sin embargo, el procedimiento no resulta en una reducción al anillo de polinomios  $\mathbb{F}[\Delta]$  si no en un polinomio del anillo  $\mathbb{F}[H\Delta]$ .

Primero definimos  $\tilde{\varphi}^*(\cdot) : \mathbb{F}[\Delta] \rightarrow \mathbb{F}[\Delta]$  como  $\tilde{\varphi}^*(P)(\Delta) = P(-\Delta)$ . Entonces si  $P = \sum a_j \Delta^j \in \mathbb{F}[\Delta]$  queda  $\tilde{\varphi}^*(P) = \sum (-1)^j a_j \Delta^j$ . También, como  $\tilde{\varphi}^*(\Delta) = \varphi^*\Delta\varphi^*$ , tenemos  $\tilde{\varphi}^*(P) = \varphi^*P\varphi^*$ .

**Lema 2.45.** *Si  $P = \sum_{j=0}^m a_j \Delta^j \in \mathbb{F}[\Delta]$  es tal que  $a_j = 0$  para todo  $j$  impar entonces  $P \in \mathbb{F}[H\Delta]$ .*

*Demostración.* Por hipótesis, podemos escribir  $P = \sum_{j=0}^m a_{2j} \Delta^{2j}$ . Además, como  $H^2 = \text{Id}$ , tenemos  $(-1)^j H^{2j} = ((-1)^j)^2 \text{Id} = \text{Id}$ , por tanto,

$$P = \sum_{j=0}^m (-1)^j a_{2j} (H\Delta)^{2j} \in \mathbb{F}[H\Delta]. \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.46.** *Si  $P \in \mathbb{F}[\Delta]$ , entonces  $\tilde{\varphi}^*(P)P \in \mathbb{F}[H\Delta]$ .*

*Demostración.* Expresamos  $P = \sum_{j=0}^n a_j \Delta^j$ , entonces

$$\tilde{\varphi}^*(P)P = \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j a_j \Delta^j \right) \left( \sum_{k=0}^n a_k \Delta^k \right) = \sum_{j,k=0}^n (-1)^j a_j a_k \Delta^{j+k}. \quad (2.17)$$

Si  $j+k$  es impar, entonces los índices  $j$  y  $k$  son uno par y uno impar, por tanto  $(-1)^j a_j a_k \Delta^{j+k} + (-1)^k a_k a_j \Delta^{k+j} = 0$ , así, todos los coeficientes de la expresión (2.17) asociados a grados impares son nulos. Aplicando el Lema 2.46 se sigue el resultado. ■

**Proposición 2.47.** Si  $P, Q \in \mathbb{F}[\Delta]$ , entonces  $H \cdot (\tilde{\varphi}^*(P)Q - \tilde{\varphi}^*(Q)P) \in \mathbb{F}[H\Delta]$ .

*Demostración.* Expresamos  $P = \sum_{j=0}^n a_j \Delta^j$  y  $Q = \sum_{j=0}^m b_j \Delta^j$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^*(P)Q - \tilde{\varphi}^*(Q)P &= \sum_{j,k=0}^{n,m} (-1)^j a_j b_k \Delta^{j+k} - \sum_{j,k=0}^{n,m} (1^k) b_k a_j \Delta^{k+j} \\ &= \sum_{j,k=0}^{n,m} (-1)^j a_j b_k \Delta^{j+k} - (1^k) b_k a_j \Delta^{k+j}. \end{aligned}$$

Notamos que todos los términos de grado par se anulan. Por el Lema 2.45,

$$(H\Delta) \cdot H \cdot (\tilde{\varphi}^*(P)Q - \tilde{\varphi}^*(Q)P) = -\Delta \cdot (\tilde{\varphi}^*(P)Q - \tilde{\varphi}^*(Q)P) \in \mathbb{F}[H\Delta].$$

Por lo que también

$$H \cdot (\tilde{\varphi}^*(P)Q - \tilde{\varphi}^*(Q)P) \in \mathbb{F}[H\Delta]. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.48.** Sea  $L = \varphi^*HP + HQ + \varphi^*S + T \in \mathbb{F}[\Delta, \varphi^*, H]$  un operador cualquiera con  $P, Q, S, T \in \mathbb{F}[\Delta]$ . Definimos  $R = \varphi^*HP + H\tilde{\varphi}^*(Q) + \varphi^*S - \tilde{\varphi}^*(T)$ . Entonces  $RL, LR \in \mathbb{F}[H\Delta]$ .

*Demostración.* Empleando las relaciones del álgebra  $\mathbb{F}[\Delta, \varphi^*, H]$ ,

$$\begin{aligned} RL &= (\varphi^*HP + H\tilde{\varphi}^*(Q) + \varphi^*S - \tilde{\varphi}^*(T))(\varphi^*HP + HQ + \varphi^*S + T) \\ &= \tilde{\varphi}^*(P)P - \varphi^*PQ - H\tilde{\varphi}^*(P)S - H\varphi^*PT + \varphi^*QP - \tilde{\varphi}^*(Q)Q + H\varphi^*QS + H\tilde{\varphi}^*(Q)T \\ &\quad + H\tilde{\varphi}^*(S)P - H\varphi^*SQ + \tilde{\varphi}^*(S)S + \varphi^*ST + H\varphi^*TP - H\tilde{\varphi}^*(T)Q - \varphi^*TS - \tilde{\varphi}^*(T)T \\ &= \tilde{\varphi}^*(P)P - \tilde{\varphi}^*(Q)Q + \tilde{\varphi}^*(S)S - \tilde{\varphi}^*(T)T + H \cdot (\tilde{\varphi}^*(S)P - \tilde{\varphi}^*(P)S) \\ &\quad + H \cdot (\tilde{\varphi}^*(Q)T - \tilde{\varphi}^*(T)Q). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando las Proposiciones 2.46 y 2.47,  $RL \in \mathbb{F}[H\Delta]$ . Análogamente se prueba que  $LR \in \mathbb{F}[H\Delta]$ . ■

Ahora que hemos reducido el operador  $L \in [\Delta, \varphi^*, H]$  a  $\mathbb{F}[H\Delta]$ , podemos completar su reducción a  $\mathbb{F}[\Delta]$  para obtener una ecuación de recurrencia. Como  $RL \in \mathbb{F}[H\Delta]$ , admite la expresión  $RL = P + HQ$  con  $P, Q \in \mathbb{F}[\Delta]$ , entonces, haciendo  $S = P - HQ$ , resulta que  $SRL = P^2 + Q^2 \in \mathbb{F}[\Delta]$ . Este último paso duplica el grado respecto a  $\Delta$  del operador de igual forma que sucedía en la sección anterior, sin embargo, en este caso, el hecho de que  $RL \in \mathbb{F}[H\Delta]$  asegura que los términos de  $P$  tengan grado par y los de  $Q$  impar lo que implica

que los términos de  $SRL$  tengan todos grado impar. Esto permite simplificar las ecuaciones de la forma  $SRLx = 0$  separando sus posiciones pares e impares y resolviendo en cada una de ellas una ecuación cuyo grado es la mitad que el de  $SRL$  y esta es, precisamente la mejora que nos aporta sustituir  $D$  por  $\Delta$ . Ilustremos este hecho con ejemplo.

**Ejemplo 2.49.** Consideramos la ecuación  $Lx = c$  donde  $L = \varphi^*H\Delta + H + \varphi^*$  y  $c \in \mathcal{S}$ .

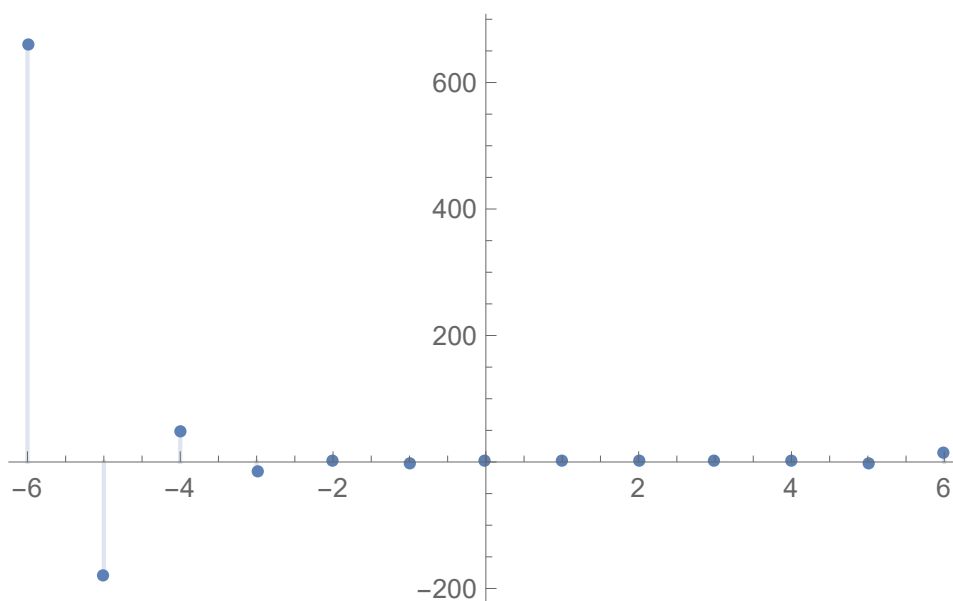
Construimos  $R = \varphi^*H\Delta + H + \varphi^*$  de forma que  $LR = RL = -\Delta^2 + 2H\Delta \in \mathbb{F}[H\Delta]$  y obtenemos así la ecuación reducida  $RLx = Rc$ . Ahora definimos  $S = -\Delta^2 - 2H\Delta$  para tener  $LRS = SRL = \Delta^4 + 4\Delta^2 \in \mathbb{F}[\Delta]$  y así reducimos la ecuación a  $SRLx = (\Delta^4 + 4\Delta^2)x = SRc$ . Al tener una ecuación sin términos de grado impar podemos separar la ecuación en posiciones pares e impares con los cambios de variable

$$y_k = x_{2k}, \quad z_k = x_{2k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

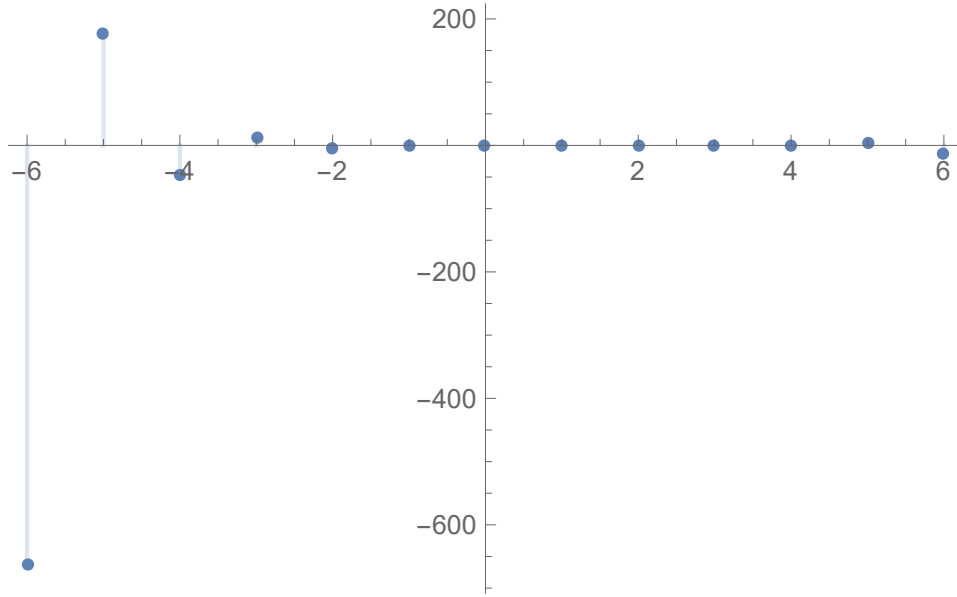
y, de esta forma, las soluciones de  $SRLx = c$  se corresponderán biyectivamente con las soluciones de

$$\left((\Delta^2 + 4\Delta)y\right)_k = c_{2k}, \quad \left((\Delta^2 + 4\Delta)z\right)_k = c_{2k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si establecemos el término independiente  $c_k = (-1)^k$  y la condición inicial  $x_0, \dots, x_7 = 0$ , las soluciones  $y$  y  $z$  para las posiciones pares e impares de  $x$  respectivamente admiten la siguiente representación gráfica:



**Fig. 2.1.** Sucesión  $y_k$ .

Fig. 2.2. Sucesión  $z_k$ .

## 2.7. Transformada de Fourier discreta

La transformada de Fourier guarda una estrecha relación con la transformada de Hilbert y también posee una versión discreta. En [2] se puede consultar su definición, propiedades y aplicaciones.

En esta sección estudiaremos el comportamiento de este operador al combinarse con los estudiados hasta ahora como un primer paso para la construcción de reducciones y resolución de ecuaciones en diferencias que lo incluyan.

En toda esta sección trabajaremos con escalares complejos, es decir, con  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Fijamos  $N \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.50.** Se define la *transformada de Fourier discreta* en  $\mathbb{C}^N$  como el operador  $\tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  dado por

$$(\tilde{\mathcal{F}}x)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}nk\right)$$

para  $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$  y  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ .

Para combinar este operador con el resto de los estudiados hemos de extenderlo al espacio de sucesiones  $\mathcal{S}$ . Primero consideramos el subespacio de sucesiones  $N$ -periódicas  $\mathcal{S}_N := \{u \in \mathcal{S} \mid u_k = u_{k+N} \forall k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{S}$ . Para definir  $\mathcal{F} : \mathcal{S}_N \rightarrow \mathcal{S}_N$  como

$$(\mathcal{F}u)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}nk\right). \quad (2.18)$$

Notamos que esta expresión solo depende de los términos  $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ , en el caso de las sucesiones periódicas estos  $n$  valores representan la sucesión completa, sin embargo,

para generalizar la expresión para  $\mathcal{S}$  necesitamos una fórmula que sea uniforme sobre los índices de modo que el valor en una posición dependa de los valores en posiciones cercanas. Podemos sustituir la expresión (2.18) por la siguiente expresión equivalente

$$(\mathcal{F}u)_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+k} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k)k\right).$$

**Definición 2.51.** Se define la *transformada de Fourier discreta* sobre  $\mathcal{S}$  como el operador  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  dado por

$$(\mathcal{F}u)_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+k} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k)k\right)$$

para  $u \in \mathcal{S}$  y  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nos será útil la siguiente notación para el conjugado de una sucesión.

**Definición 2.52.** Se define el *conjugado* de una sucesión de  $\mathcal{S}$  como la sucesión formada por el conjugado complejo de cada término en la posición correspondiente.

$$\begin{aligned} \text{conj} : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (\overline{u_k})_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

**Nota 2.53.** De igual forma que sucede con el conjugado de un escalar complejo

$$\text{conj}^2 = \text{Id}.$$

Estudiemos ahora como interaccionan los operadores  $\mathcal{F}$  y  $D$ . Como la transformada de Fourier aplica una rotación diferente en cada posición y  $D$  permuta las posiciones, para intercambiarlos hemos de desfazar esta rotación. Para ello construimos el siguiente operador.

**Definición 2.54.** Definimos

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \left( u_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

**Proposición 2.55.** Los operadores  $\text{conj}$  y  $\omega$  satisfacen la relación

$$\text{conj} \omega = \omega^{-1} \text{conj}.$$

*Demostración.* Aplicamos en  $u \in \mathcal{S}$  arbitrario.

$$\text{conj} \omega u = \left( \overline{u_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right)} \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \left( \overline{u_k} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}k\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \omega^{-1} \text{conj} u. \quad \blacksquare$$

**Proposición 2.56.** Los operadores  $D$  y  $\omega$  satisfacen la relación

$$\omega D = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) D \omega.$$

*Demostración.* Evaluando la expresión en una sucesión arbitraria  $u \in \mathcal{S}$  y en una posición  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} (\omega Du)_k &= (Du)_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right) = u_{k+1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(k+1)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)(\omega u)_{k+1} = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)(D\omega u)_k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.57.** Los operadores  $\mathcal{F}$  y  $D$  pueden intercambiarse empleando la siguiente expresión

$$D\mathcal{F} = \omega\mathcal{F}D\omega.$$

*Demostración.* Calculamos en  $u \in \mathcal{S}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrarios,

$$\begin{aligned} (D\mathcal{F}u)_k &= (\mathcal{F}u)_{k+1} = \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+k+1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k+1)(k+1)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right) \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+k+1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k)k\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k+1)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right) \sum_{n=0}^{N-1} (\omega u)_{n+k+1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k)k\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right) \sum_{n=0}^{N-1} (D\omega u)_{n+k} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(n+k)k\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}k\right) (\mathcal{F}D\omega u)_k = (\omega\mathcal{F}D\omega u)_k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.58.** Se tiene

$$\varphi^* \mathcal{F} = D^{1-N} \mathcal{F} \varphi^*.$$

*Demostración.* Calculamos en  $u \in \mathcal{S}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrarios, empleando el cambio  $m = N-1-n$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi^* \mathcal{F}u)_k &= (\mathcal{F}u)_{-k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u_{n-k} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n-k)k\right) = \sum_{m=0}^{N-1} u_{N-1-m-k} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(N-1-m-k)k\right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} (\varphi^*u)_{m+k+1-N} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}(m+k+1-N)k\right) = (\mathcal{F}\varphi^*u)_{k+1-N} \\ &= (D^{1-N} \mathcal{F}\varphi^*u)_k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Los resultados anteriores establecen las relaciones presentes entre los operadores  $D$ ,  $D^{-1}$ ,  $\varphi^*$  y  $\mathcal{F}$  que podrán servir como herramienta para el estudio de las ecuaciones en diferencias que se pueden construir con ellos.



### 3. Resolución, funciones de Green

En este capítulo estudiaremos la resolución de los problemas asociados a las ecuaciones que hemos visto, esto es, problemas de la forma

$$Lx = c, \quad (x_0, \dots, x_n) = (\xi_0, \dots, \xi_n)$$

con incógnita  $x$  y término independiente  $c$  en  $\mathcal{S}$ , condición inicial  $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in \mathbb{F}$  y  $L \in \mathbb{F}[D]$ ,  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*]$  o  $L \in \mathbb{F}[D, D^{-1}, \varphi^*, H]$ . También estudiaremos condiciones de frontera más generales. Pasaremos el problema a sistemas de ecuaciones de grado 1 y dividiremos en dos problemas. Calcularemos la solución general de  $Lx = 0$ ; diremos que una  $A$  es una *matriz fundamental* de un sistema si  $Au$  es solución para cualquier vector  $u$  y todas las soluciones son de esta forma; en este caso sus columnas serán soluciones funcionalmente independientes. También buscaremos una solución particular de  $Lx = c$ ; diremos que  $G$  es una *función de Green* asociada a  $L$  si  $Gc$  es una solución para cualquier  $c$ .

#### 3.1. Preliminares

Veamos primero las resoluciones más sencillas que se estudian en [17]. Estos casos nos ayudarán en las próximas secciones.

**Notación 3.1.** Consideramos primero la ecuación de recurrencia

$$(Sx)_k = \sum_{l=0}^n a_l x_{k+l} = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

donde  $a_l \in \mathbb{F}$  y  $a_0 a_n \neq 0$ . Llamamos  $p$  a su polinomio característico:

$$p(t) = \sum_{l=0}^n a_l t^l.$$

Sean  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  sus raíces en  $\overline{\mathbb{F}}$  con multiplicidades  $\{h_1, \dots, h_r\}$  respectivamente. Llamamos  $y_{l,j} \in \overline{\mathcal{S}} := \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{F}})$  a las sucesiones dadas por  $(y_{l,j})_k = k^{j-1} \lambda_l^k$  para  $l \in \{1, \dots, r\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h_l\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Entonces la solución general de (3.1) en  $\overline{\mathbb{F}}$  viene dada por

$$u = k_1 y_{1,1} + k_2 y_{1,2} + \dots + k_{h_1} y_{1,h_1} + k_{h_1+1} y_{2,1} + \dots + k_n y_{r,h_r}$$

para coeficientes  $k_1, \dots, k_n \in \overline{\mathbb{F}}$ . Esto se debe a que, para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{l=0}^n a_l (y_{q,j})_{k+l} = \sum_{l=0}^n a_l (k+l)^{j-1} \lambda_q^{k+l} = 0.$$

Si denotamos

$$\Phi = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) := (y_{1,1} \ y_{1,2} \ \cdots \ y_{1,h_1} \ y_{2,1} \ \cdots \ y_{r,h_r}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z} \times n}(\overline{\mathbb{F}}), \quad (3.2)$$

podemos expresar la solución general de (3.1) en  $\overline{\mathcal{S}}$  como  $u = \Phi K$  para  $K \in \overline{\mathbb{F}}^n$ .

Ahora planteamos problema no homogéneo  $Sx = c$  y definimos una función de Green asociada.

**Teorema 3.2** ([17, Teorema 3.2, p. 12]). *Consideramos el problema*

$$(Sx)_k = \sum_{l=0}^n a_l x_{k+l} = c_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_0, x_1, \dots, x_{n-1} = 0 \quad (3.3)$$

donde  $a_j \in \mathbb{F}$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $a_0 a_n \neq 0$ ,  $c_k \in \mathbb{F}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Entonces el problema 3.3 posee una única solución dada por

$$u_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} H_{k,j} c_j \in \mathbb{F}$$

donde  $(H_{k,j})_{k,j \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{F}$  es la función de Green dada por

$$H_{k,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-1}}{a_n C_{j+1}} \tilde{H}_{k,j} & (k, j) \in A_1, \\ \frac{1}{a_0 C_j} \tilde{H}_{k,j} & (k, j) \in A_2, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con

$$\tilde{H}_{k,j} := \begin{vmatrix} y_{1,k} & \cdots & y_{n,k} \\ y_{1,j+1} & \cdots & y_{n,j+1} \\ y_{1,j+2} & \cdots & y_{n,j+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,j+n-1} & \cdots & y_{n,j+n-1} \end{vmatrix},$$

$$A_1 := \{(k, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid k > j \geq 0\}, \quad A_2 := \{(k, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid k + 1 - n \leq j < 0\},$$

$C_j := \tilde{H}_{j,j}$  y  $\{y_1, \dots, y_n\}$  es un conjunto de soluciones fundamentales del problema homogéneo (3.1) con  $y_{k,j} = \delta_k^j$ .

*Demostración.* Por definición de  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , tenemos que  $C_0 = 1$ . Por [13, Teorema 3.8], tenemos que  $C_{j+1} = (-1)^n a_n C_j$  para todo  $j \geq 0$ , por un argumento similar,  $C_j \neq 0$  para  $j < 0$ , así la definición de  $H_{k,j}$  es buena.

De la definición de  $\tilde{H}_{k,j}$ , se deduce que

$$\tilde{H}_{k+n,k} = (-1)^{n-1} C_{k+1}; \quad \tilde{H}_{k+l,k} = 0, \quad l \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (3.4)$$

Probemos que  $\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l,j} = \delta_k^j$  distinguiendo ocho casos:

(1)  $(k, j) \in A_1$ . En este caso  $(k+l, j) \in A_1$  para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ , por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} &= \frac{(-1)^{n-1}}{a_n C_{j+1}} \sum_{l=0}^n a_l \begin{vmatrix} y_{1, k+l} & \cdots & y_{n, k+l} \\ y_{1, j+l} & \cdots & y_{n, j+l} \\ y_{1, j+2} & \cdots & y_{n, j+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1, j+n-l} & \cdots & y_{n, j+n-l} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{a_n C_{j+1}} \begin{vmatrix} \sum_{l=0}^n a_l y_{1, k+l} & \cdots & \sum_{l=0}^n a_l y_{n, k+l} \\ y_{1, j+l} & \cdots & y_{n, j+l} \\ y_{1, j+2} & \cdots & y_{n, j+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1, j+n-l} & \cdots & y_{n, j+n-l} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n C_{j+1}} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ y_{1, j+l} & \cdots & y_{n, j+l} \\ y_{1, j+2} & \cdots & y_{n, j+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1, j+n-l} & \cdots & y_{n, j+n-l} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

(2)  $k+1 \leq j < 0$ . En este caso  $(k+l, j) \in A_2$  para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ , así, razonando como en el anterior caso,  $\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = 0$ .

(3)  $k+1-n > j, j < 0$ . En este caso  $(k+l, j) \notin A_1 \cup A_2$  para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ , por tanto,  $\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = 0$ .

(4)  $k+n \leq j, j \geq 0$ . En este caso  $(k+l, j) \notin A_1 \cup A_2$  para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ , por tanto,  $\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = 0$ .

(5)  $j < k < j+n, j < 0$ . Para  $j-k+n \leq l \leq n$  se tiene  $(k+l, j) \notin A_1 \cup A_2$  por lo que  $H_{k+l, j} = 0$ . Para  $0 \leq l < j-k+n$ , por (3.4),  $\tilde{H}_{k+l, j} = 0$  y en consecuencia  $H_{k+l, j} = 0$ . Entonces  $\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = 0$ .

(6)  $j-n \leq k < j, j \geq 0$ . Para  $0 \leq l \leq j-k$  se tiene  $(k+l, j) \notin A_1 \cup A_2$  por lo que  $H_{k+l, j} = 0$ . Para  $j-k < l \leq n$ , por (3.4),  $H_{k+l, j} = 0$ . Finalmente  $\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = 0$ .

(7)  $k = j < 0$ . Notamos que  $(k+n, j) \notin A_1 \cup A_2$  por lo que  $H_{k+l, j} = 0$ . Teniendo esto en cuenta y (3.4),

$$\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = a_0 H_{k, j} = a_0 \frac{1}{a_0 C_j} \tilde{H}_{j, j} = 1.$$

(8)  $k = j \geq 0$ . Por (3.4) y recordando que  $(k, j) \notin A_1 \cup A_2$ ,

$$\sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} = a_n H_{k+n, j} = a_n \frac{(-1)^{n-1}}{a_n C_{j+1}} \tilde{H}_{j+n, j} = 1.$$

Concluimos que

$$(Su)_k = \sum_{l=0}^n a_l \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} H_{k+l, j} c_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l=0}^n a_l H_{k+l, j} \right) c_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_k^j c_j = c_k.$$

Ahora, para  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , si  $j \geq k$  o  $j < k+1-n$ , entonces  $(k, j) \notin A_1 \cup A_2$  y  $H_{k, j} = 0$ ; si  $k+1-n \leq j < k$ , entonces  $0 < k-j \leq n-1$  y, por (3.4),  $H_{k, j} = 0$ . Así,

$$u_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} H_{k, j} c_j = 0.$$

Por último, notamos que cada término  $u_k$  se puede determinar por recurrencia a partir de los  $n$  anteriores o posteriores, los coeficientes  $a_j$  y el escalar  $c_k$ , éste valor es el único que puede tomar y será un elemento de  $F$ ; es decir, la solución es única y  $u \in \mathcal{S}$ . ■

## 3.2. Sistemas de ecuaciones de recurrencia

Estudiaremos los sistemas de ecuaciones en diferencias con reflexión y con el operador de Hilbert de orden 1 sobre  $D$ , esto es, cuya expresión polinómica tiene grado 1 como máximo en  $D$  y  $D^{-1}$ , recordamos que es necesario tener en cuenta  $D^{-1}$  para poder reducir expresiones con reflexiones. Nos basaremos en el estudio realizado en [17].

Veamos primero como construir un sistema de  $n$  ecuaciones de recurrencia de orden 1 que resuelva una ecuación de recurrencia de orden  $n$ . Procederemos de igual forma que en la resolución de ecuaciones diferenciales, introduciendo incógnitas auxiliares que representan las derivadas sucesivas de la incógnita original, o, en este caso las iteradas de  $D$ . Consideramos la ecuación

$$\sum_{j=0}^n a_j x_{k+j} = c_k, \quad (3.5)$$

que podemos expresar en forma de polinomio como

$$Px = c$$

con

$$P = \sum_{j=0}^n a_j D^j.$$

Podemos suponer que  $a_0 a_n \neq 0$ , si no es así, aplicamos  $D^t$  a ambos lados donde  $t$  es el exponente del término de menor grado de  $P$  (posiblemente negativo). Construimos ahora la nueva incógnita

$$y_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) \in \mathbb{F}^n, \quad (3.6)$$

el nuevo término independiente correspondiente

$$b_k = (0, \dots, 0, c_k) \in \mathbb{F}^n \quad (3.7)$$

y la matriz de coeficientes

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}).$$

Esta matriz está bien definida porque  $a_n \neq 0$  y es invertible porque  $-\frac{a_0}{a_n} \neq 0$ . Así podemos definir el sistema de ecuaciones de recurrencia

$$y_{k+1} = Ky_k + b_k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

cuya solución satisface  $\sum_{j=0}^n a_j x_{k+j} = c_k$  si deshacemos los cambios (3.6) y (3.7).

Veamos como resolver, en general, los sistemas de este tipo.

**Teorema 3.3.** Consideramos un sistema de  $n$  ecuaciones de recurrencia de orden 1 con la expresión (3.8) donde  $y_k \in \mathbb{F}^n$  y  $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  invertible. Definimos

$$G_{k,j} = \begin{cases} K^{k-1-j} & \text{si } 0 \leq j \leq k-1, \\ -K^{k-1-j} & \text{si } k \leq j \leq -1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Entonces  $G := (G_{k,j})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  es una función de Green del sistema (3.8), es decir, una solución de

$$y_{k+1} = Ky_k + b_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

viene dada por  $u = Gb$ . Además, como  $G_{0,j} = 0$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $(Gb)_0 = 0$ .

*Demostración.* Para  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} u_{k+1} - Ku_k &= (Gb)_{k+1} - K(Gb)_k = \sum_{j=0}^k K^{k-j} b_j - K \sum_{j=0}^{k-1} K^{k-1-j} b_j \\ &= \sum_{j=0}^k K^{k-j} b_j - \sum_{j=0}^{k-1} K^{k-j} b_j = b_k. \end{aligned}$$

Para  $k \leq -2$ ,

$$\begin{aligned} u_{k+1} - Ku_k &= (Gb)_{k+1} - K(Gb)_k = - \sum_{j=k+1}^{-1} K^{k-j} b_j + K \sum_{j=k}^{-1} K^{k-1-j} b_j \\ &= - \sum_{j=k+1}^{-1} K^{k-j} b_j + \sum_{j=k}^{-1} K^{k-j} b_j = b_k. \end{aligned}$$

Para  $k = 0$ ,

$$u_1 - Ku_0 = (Gb)_1 = b_0.$$

Para  $k = -1$ ,

$$u_0 - Ku_{-1} = -K(Gb)_{-1} = b_{-1}. \quad \blacksquare$$

Ahora calculamos la solución general del sistema homogéneo

$$y_{k+1} = Ky_k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.10)$$

asociado a (3.8).

**Teorema 3.4.** Si  $K$  es invertible, la expresión  $M \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathcal{M}_n(\mathbb{F}))$  dada por  $M(k) = K^k$  define una matriz fundamental para el sistema (3.10).

*Demostración.* En primer lugar, el hecho de que  $K$  sea invertible, nos asegura que, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M(k)$  queda bien definida y que sus columnas son linealmente independientes.

Ahora, si  $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  es una solución de (3.10), por recursión,  $y_k = K^k y_0 = M(k) y_0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Por el mismo argumento, para cualquier  $u_0 \in \mathbb{F}^n$ ,  $(M(k)u_0)_{k \in \mathbb{Z}}$  resuelve (3.10).  $\blacksquare$

Se concluye que  $\{(K^k u_0)_{k \in \mathbb{Z}} \mid u_0 \in \mathbb{F}^n\}$  es la solución general del sistema homogéneo  $Dy = Ky$ . La solución general del sistema no homogéneo  $Dy = Ky + b$  viene dada por la suma de la solución general de  $Dy = Ky$  y una solución particular de  $Dy = Ky + b$ , esto es

$$\{(K^k u_0 + Gb)_{k \in \mathbb{Z}} \mid u_0 \in \mathbb{F}^n\}.$$

**Teorema 3.5.** *Sea  $u_0 \in \mathbb{F}^n$ , entonces el sistema de ecuaciones (3.8) equipado con la condición inicial  $y_0 = u_0$  posee una única solución y ésta viene dada por  $y_k = K^k u_0 + (Gb)_k$ .*

*Demostración.* Por los Teoremas 3.3 y 3.4,

$$y_{k+1} = K^{k+1} u_0 + (Gb)_{k+1} = K(K^k u_0) + K(Gb)_k + b_k = Ky_k + b_k,$$

y también,

$$y_0 = u_0 + (Gb)_0 = u_0.$$

Para probar la unicidad llamamos  $\tilde{y}$  a una solución arbitraria, entonces, por linealidad,  $z = y - \tilde{y}$  resuelve (3.10) y  $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ . Aplicando el Teorema 3.4, concluimos que  $z = (\dots, 0, \dots)$  e  $\tilde{y} = y$ . ■

**Corolario 3.6.** *El problema de condición inicial resultante de añadir a (3.5) (expresada de forma que  $a_0 a_n \neq 0$ ) la condición  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = u_0 \in \mathbb{F}$  tiene como única solución  $x \in \mathcal{S}$  definida por*

$$x_k = (K^k u_0 + (Gb)_k)_1.$$

A continuación resolveremos un problema de este tipo que servirá como ejemplo de aplicación del método expuesto.

**Ejemplo 3.7.** Consideramos el problema

$$x_{k+2} - x_k = (-1)^k, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = -3. \quad (3.11)$$

Planteamos el sistema de ecuaciones equivalente

$$y_{k+1} = Ky_k + b_k, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde  $y_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ ,  $b_k = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$  y  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculamos la matriz fundamental asociada:

$$K^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^k & 1 - (-1)^k \\ 1 - (-1)^k & 1 + (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Así, podemos expresar la única solución de

$$y_{k+1} = Ky_k, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

como

$$y_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^k & 1 - (-1)^k \\ 1 - (-1)^k & 1 + (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + 5(-1)^k \\ -1 - 5(-1)^k \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Calculamos ahora la función de Green  $G = (G_{k,j})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  con

$$G_{k,j} = \begin{cases} K^{k-1-j} & \text{si } 0 \leq j \leq k-1, \\ -K^{k-1-j} & \text{si } k \leq j \leq -1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para así obtener la siguiente expresión para la única solución de

$$y_{k+1} = Ky_k + b_k, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Para  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} y_k = (Gb)_k &= \sum_{j=0}^{k-1} K^{k-1-j} b_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 - (-1)^{k-j} & 1 + (-1)^{k-j} \\ 1 + (-1)^{k-j} & 1 - (-1)^{k-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} (-1)^j \\ (-1)^j \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} (-1)^k \\ -(-1)^k \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^k - 1 \\ (-1)^k - 1 \end{pmatrix} + \frac{k}{2} \begin{pmatrix} (-1)^k \\ -(-1)^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2k-1)(-1)^k + 1 \\ (2k+1)(-1)^{k+1} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para  $k \leq -1$ :

$$\begin{aligned} y_k = (Gb)_k &= \sum_{j=k}^{-1} -K^{k-1-j} b_j = -\frac{1}{2} \sum_{j=k}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - (-1)^{k-j} & 1 + (-1)^{k-j} \\ 1 + (-1)^{k-j} & 1 - (-1)^{k-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^j \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=k}^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^j \\ (-1)^j \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{j=k}^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^k \\ -(-1)^k \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^k - 1 \\ (-1)^k - 1 \end{pmatrix} + \frac{k}{2} \begin{pmatrix} (-1)^k \\ -(-1)^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2k-1)(-1)^k + 1 \\ (2k+1)(-1)^{k+1} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En todo caso, la única solución de (3.14) vendrá dada por

$$y_k = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2k-1)(-1)^k + 1 \\ (2k+1)(-1)^{k+1} + 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Sumando (3.13) y (3.15) obtenemos la única solución de (3.12)

$$y_k = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2k+9)(-1)^k - 1 \\ (2k+11)(-1)^{k+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Estableciendo  $x_k = (y_k)_1$  obtenemos, finalmente, la única solución al problema original (3.11):

$$x_k = \frac{(2k+9)(-1)^k - 1}{4}.$$

La Figura 3.1 muestra la representación gráfica de esa solución:

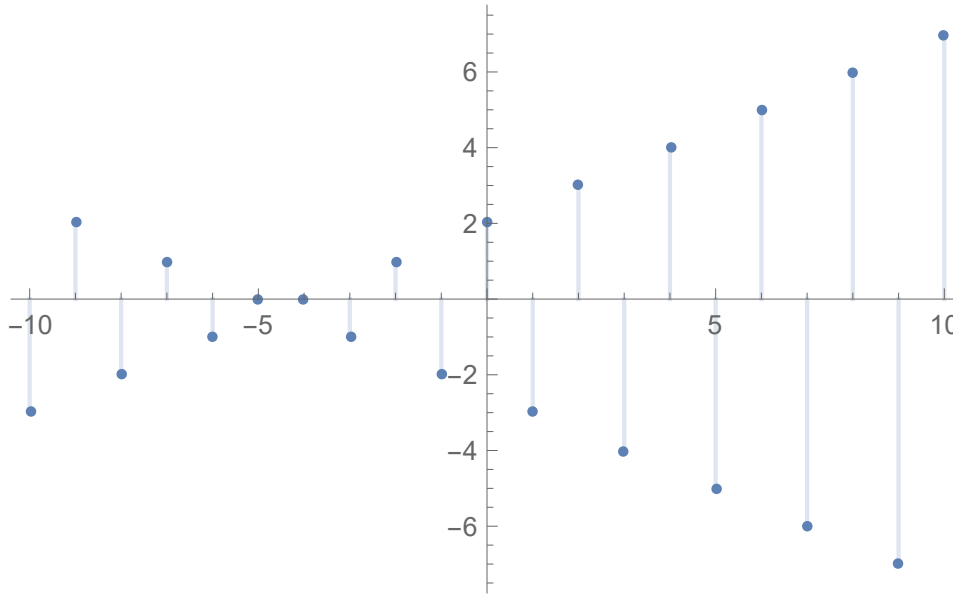


Fig. 3.1. Sucesión  $x_k$ .

### 3.3. Sistemas de ecuaciones en diferencias con reflexión

Siguiendo el esquema de [17], pasamos ahora a considerar ecuaciones con reflexión, sea  $L = P + Q\varphi^* \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  un operador arbitrario con  $P, Q \in \mathbb{F}[D, D^{-1}]$  con expresiones  $P = \sum_{j=-n}^n a_j D^j$  y  $Q = \sum_{j=-n}^n b_j D^j$ , así

$$Lx = \sum_{j=-n}^n (a_j x_{k+j} + b_j x_{-k-j}).$$

Planteamos el problema

$$Lx = c, \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) = u_0. \quad (3.16)$$

De igual forma que antes podemos construir un sistema de  $2n$  ecuaciones de orden 1. En primer lugar introducimos la incógnita

$$y_k = (x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_{k+n-1}) \in \mathbb{F}^{2n}, \quad (3.17)$$

el término independiente

$$d_k = (0, \dots, 0, c_k) \in \mathbb{F}^{2n} \quad (3.18)$$

y las matrices de coeficientes de dimensión  $2n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{-n} & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$C = \left( \begin{array}{c|c} \text{Id} & 0 \\ \hline 0 & a_n \end{array} \right), \quad E = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & b_n \end{array} \right).$$

**Notación 3.8.** Introducimos la siguiente notación para matrices. Si  $M = \left( \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline M_3 & M_4 \end{array} \right)$  y  $N = \left( \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \end{array} \right)$ , denotamos  $M_{(i)} := M_i$  y  $N_{(i)} := N_i$ .

Ahora planteamos el sistema de ecuaciones

$$Cy_{k+1} + Ey_{-k-1} + Ay_k + By_{-k} = d_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

De nuevo, las soluciones de (3.19) definen soluciones de la ecuación homogénea  $Lx = 0$  si deshacemos los cambios (3.17) y (3.18). Resolveremos el sistema en general.

**Nota 3.9.** Trabajaremos con sistemas de  $2n$  ecuaciones para conservar la notación del sistema equivalente a la ecuación (3.16) de orden  $n$ , sin embargo si nuestro objetivo fuera el de resolver un sistema de la forma (3.19) podríamos proceder de la forma que expondremos a continuación aunque el número de ecuaciones fuera impar.

**Teorema 3.10.** Sean  $A, B, C, E \in M_{2n}(\mathbb{F})$  tales que  $\left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right)$  es invertible. Construimos

$$\bar{G}_{k,j} = \begin{cases} K^{k-1-j} & \text{si } 0 \leq j \leq k-1, \\ -K^{k-1-j} & \text{si } k \leq j \leq -1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$K := - \left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & C \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{4n}(\mathbb{F})$$

llamamos  $\bar{G} = (\bar{G}_{k,j})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  y definimos  $G = \bar{G}_{(1)} + \bar{G}_{(2)}D\varphi^*$ . Entonces  $G$  es una función de Green para el sistema (3.19), esto es,  $y = \bar{G}_{(1)}d + \bar{G}_{(2)}D\varphi^*d$  define una solución de dicho sistema. Además, como  $G_{0,j} = 0$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $(Gd)_0 = 0$ .

*Demostración.* Definimos  $z = \varphi^*y$ , de esta forma, escribimos el sistema (3.19) como

$$CDy + EDz + Ay + Bz = d,$$

matricialmente,

$$(C|E) \begin{pmatrix} Dy \\ Dz \end{pmatrix} = -(A|B) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + d. \quad (3.20)$$

Nos encontramos con que no podemos despejar para pasar a un sistema ecuaciones de recurrencia como (3.8) porque las matrices no son cuadradas, pero podemos solucionarlo pasando al siguiente problema equivalente. Componemos con  $\varphi^*$ :

$$CD^{-1}\varphi^*y + ED^{-1}\varphi^*z + A\varphi^*y + B\varphi^*z = CD^{-1}z + ED^{-1}y + Az + By = \varphi^*d.$$

Ahora, componiendo con  $D$ ,

$$Cz + Ey + ADz + BDy = D\varphi^*d.$$

Podemos reescribir esta ecuación como una expresión matricial equivalente a (3.20)

$$(B|E)\begin{pmatrix} Ay \\ Dz \end{pmatrix} = -(E|C)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + d. \quad (3.21)$$

combinando (3.20) y (3.21) obtenemos la siguiente expresión equivalente a (3.19)

$$\begin{pmatrix} C & | & E \\ B & | & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dy \\ Dz \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A & | & B \\ E & | & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ D\varphi^*d \end{pmatrix},$$

donde sí podemos despejar

$$\begin{pmatrix} Dy \\ Dz \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} C & | & E \\ B & | & A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & | & B \\ E & | & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & | & E \\ B & | & A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d \\ D\varphi^*d \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Aplicando el Teorema 3.3 tenemos que una solución de

$$\begin{pmatrix} Dy \\ Dz \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} C & | & E \\ B & | & A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & | & B \\ E & | & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix}$$

vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \bar{G} \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix}.$$

Volviendo al sistema (3.19), una solución particular vendrá dada por

$$y = \left( G \begin{pmatrix} d \\ D\varphi^*d \end{pmatrix} \right)_{(1)} = (\bar{G}_{(1)} + \bar{G}_{(2)}D\varphi^*)d. \quad \blacksquare$$

Planteamos el sistema de ecuaciones homogéneas

$$Cy_{k+1} + Ey_{-k-1} + Ay_k + By_{-k} = 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \quad (3.23)$$

para describir su solución general.

**Teorema 3.11.** Si  $\begin{pmatrix} C & | & E \\ B & | & A \end{pmatrix}$  es invertible, el sistema 3.23 admite  $M(k) := (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)}$  como matriz fundamental.

*Demostración.* En primer lugar, como las columnas de  $\begin{pmatrix} C & | & E \\ B & | & A \end{pmatrix}$  son linealmente independientes, también lo son las de  $\begin{pmatrix} E & | & C \\ A & | & B \end{pmatrix}$  (son las mismas), por lo que esta última también

es invertible, por el mismo argumento, sobre las filas esta vez, concluimos que  $\begin{pmatrix} A & B \\ E & C \end{pmatrix}$  es invertible y, por tanto,  $K$  también lo es y  $M(k)$  queda bien definida para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Particularizando (3.22) para  $d$  por 0 obtenemos un sistema de ecuaciones de recurrencia equivalente a (3.23), ahora basta aplicar el Teorema 3.4 para concluir que

$$y_k = (K^k)_{(1)} y_0 + (K^k)_{(2)} y_{-0} = M(k) y_0$$

define una solución y que todas las soluciones tienen esta forma ■

Tenemos entonces que la solución general de (3.23) será

$$\left\{ \left( \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] u_0 \right)_{k \in \mathbb{Z}} \mid u_0 \in \mathbb{F}^{2n} \right\}.$$

Ahora sumando a esto la solución particular de (3.19) dada por el Teorema 3.10 tenemos la solución general de (3.19)

$$\left\{ \left( \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] u_0 + Gd \right)_{k \in \mathbb{Z}} \mid u_0 \in \mathbb{F}^{2n} \right\}.$$

**Teorema 3.12.** Si  $\begin{pmatrix} C & E \\ B & A \end{pmatrix}$  es invertible entonces el sistema (3.19) equipado con la condición inicial  $y_0 = u_0$  posee una única solución dada por  $y_k = \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] u_0 + (Gd)_k$ .

*Demostración.* Llamamos  $\tilde{y}_k = \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] u_0$  y  $\hat{y} = (Gd)_k$ . Aplicando los Teoremas 3.10 y 3.11 tenemos que

$$\begin{aligned} Cy_{k+1} + Ey_{-k-1} + Ay_k + By_{-k} &= C\tilde{y}_{k+1} + E\tilde{y}_{-k-1} + A\tilde{y}_k + B\tilde{y}_{-k} \\ + C\hat{y}_{k+1} + E\hat{y}_{-k-1} + A\hat{y}_k + B\hat{y}_{-k} &= 0 + d_k = d_k. \end{aligned}$$

Además,

$$y_0 = u_0 + (Gd)_0 = u_0.$$

Sea ahora  $\bar{y}$  una solución arbitraria del problema del enunciado, entonces  $z = \bar{y} - y$  es solución de (3.23) con  $z_0 = (0, \dots, 0)$ . Por el Teorema 3.11,  $z = (\dots, 0, \dots)$  y por tanto  $\bar{y} = y$ , lo que prueba la unicidad de la solución. ■

Recordamos que hemos planteado el sistema para resolver el problema (3.16) de orden  $n$ , volviendo a éste, vamos a ver como se escribe la condición de que  $\begin{pmatrix} C & E \\ B & A \end{pmatrix}$  sea invertible en términos de sus coeficientes para imponerla y resolverlo.

**Corolario 3.13.** Si  $a_n a_{-n} - b_n b_{-n} \neq 0$ , entonces el problema (3.16) posee solución única dada por

$$x_k = \left( \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] u_0 + (Gd)_k \right)_{n+1}.$$

*Demostración.* Por [7, Lema 3.8], tenemos que

$$\det \left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right) = |CA - BE|$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n a_{-n} - b_n b_{-n} & a_n a_{-n+1} - b_n b_{-n+1} & a_n a_{-n+2} - b_n b_{-n+2} & \cdots & a_n a_{n-1} - b_n b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_n a_{-n} - b_n b_{-n} \neq 0,$$

Por lo podemos aplicar el Teorema 3.12 y deshacer el cambio (3.17) para concluir la prueba. ■

Ilustremos con un ejemplo como se resuelven los problemas estudiados en esta sección.

**Ejemplo 3.14.** Consideramos el problema

$$x_{k+1} - x_{k-1} + x_{-k-1} = (-1)^k, \quad x_{-1} = 3, \quad x_0 = 1. \quad (3.24)$$

Planteamos el sistema de ecuaciones equivalente

$$C y_{k+1} + E y_{-k-1} + A y_k + B y_{-k} = d_k, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

donde  $y_k = \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}$ ,  $d_k = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la matriz fundamental asociada definimos la matriz

$$K = - \left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & C \end{array} \right).$$

y calculamos las potencias de sus bloques 1 y 2. Teniendo en cuenta que  $K^6 = -\text{Id}$  tenemos que para  $k \in \mathbb{Z}$

$$(K^{k+6})_{(1)} = -(K^k)_{(1)}, \quad (K^{k+6})_{(2)} = -(K^k)_{(2)},$$

por tanto, basta calcular

$$\begin{aligned} (K^0)_{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (K^1)_{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & (K^2)_{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (K^3)_{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & (K^4)_{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & (K^5)_{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (K^0)_{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & (K^1)_{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & (K^2)_{(2)} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ (K^3)_{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & (K^4)_{(2)} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & (K^5)_{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, podemos expresar la única solución de

$$Cy_{k+1} + Ey_{-k-1} + Ay_k + By_{-k} = 0, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como

$$y_k = \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esto es, la sucesión dada por

$$(y_0, y_1, \dots, y_5) = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right), \quad y_{k+6} = -y_k. \quad (3.26)$$

En siguiente lugar, expresamos la función de Green asociada al sistema como  $G = \bar{G}_{(1)} + \bar{G}_{(2)} D \varphi^*$  donde  $\bar{G} = (\bar{G}_{k,j})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  con

$$\bar{G}_{k,j} = \begin{cases} K^{k-1-j} & \text{si } 0 \leq j \leq k-1, \\ -K^{k-1-j} & \text{si } k \leq j \leq -1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para así obtener la siguiente expresión para la única solución de

$$Cy_{k+1} + Ey_{-k-1} + Ay_k + By_{-k} = d_k, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Para  $k \geq 1$ , introduciendo la variable  $l = k - 1 - j$ :

$$\begin{aligned} y_k = (Gb)_k &= \sum_{j=0}^{k-1} (K^{k-1-j})_{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^j \end{pmatrix} + (K^{k-1-j})_{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{-j-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ (K^{k-1-j})_{(1)} - (K^{k-1-j})_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^k \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \left[ (K^l)_{(1)} - (K^l)_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $K^6 = -\text{Id}$ , la suma de 12 términos consecutivos se anula, así, para  $k \geq 1$ ,  $y_{k+12} = y_k$  y basta calcular los términos

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_{12}) &= \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para  $k \leq -1$ :

$$y_k = (Gb)_k = - \sum_{j=k}^{-1} (K^{k-1-j})_{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^j \end{pmatrix} + (K^{k-1-j})_{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{-j-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=k}^{-1} (-1)^j \left[ (K^{k-1-j})_{(1)} - (K^{k-1-j})_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^k \sum_{l=k}^{-1} (-1)^l \left[ (K^l)_{(1)} - (K^l)_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De igual forma que antes, si  $k \leq -13$  entonces  $y_k = y_{k+12}$  y  $y_{-12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Si  $-11 \leq k \leq -1$ ,

$$\begin{aligned}
y_k &= -(-1)^k \sum_{l=-12}^{k-1} (-1)^l \left[ (K^l)_{(1)} - (K^l)_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -(-1)^k \sum_{l=0}^{k+11} (-1)^l \left[ (K^l)_{(1)} - (K^l)_{(2)} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{k+12}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso,  $y_{k+12} = y_k$  por lo que la única solución de (3.27) vendrá dada por (3.28) junto con la relación de periodicidad  $y_{k+12} = y_k \forall k \in \mathbb{Z}$ . Sumando a esto la solución (3.26) del problema homogéneo obtenemos la única solución de (3.25)

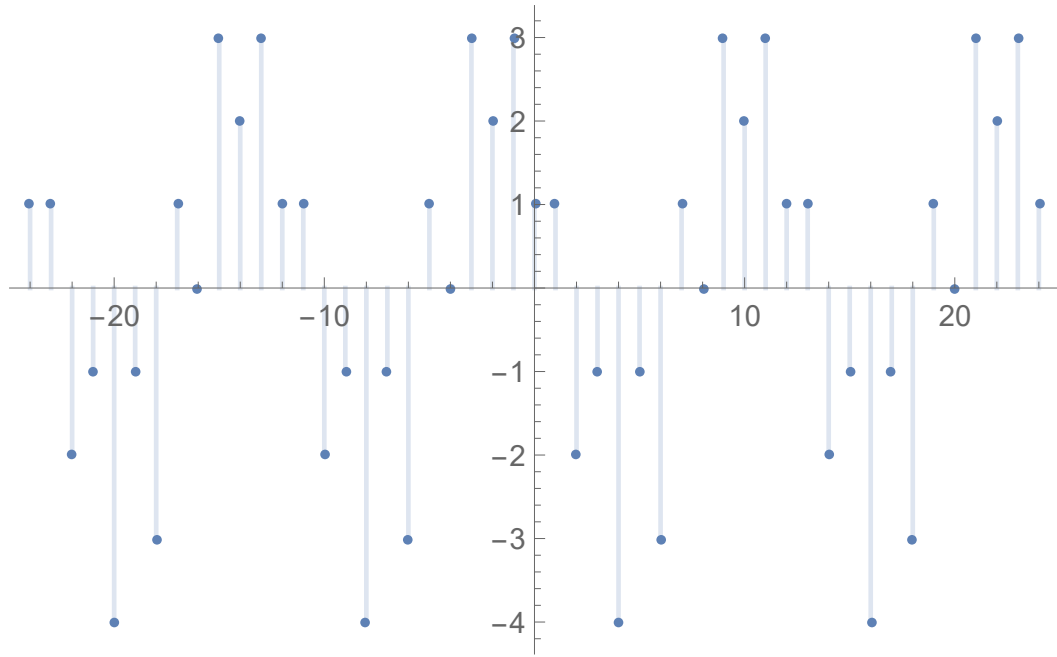
$$\begin{aligned}
y_{12k} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, & y_{12k+1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y_{12k+2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, & y_{12k+3} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
y_{12k+4} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, & y_{12k+5} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, & y_{12k+6} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, & y_{12k+7} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
y_{12k+8} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & y_{12k+9} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & y_{12k+10} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, & y_{12k+11} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para  $k \in \mathbb{Z}$ .

Estableciendo  $x_k = (y_k)_2$  obtenemos, finalmente, la única solución al problema original (3.11):

$$\begin{aligned}
x_{12k} &= 1, & x_{12k+1} &= 1, & x_{12k+2} &= -2, & x_{12k+3} &= -1, & x_{12k+4} &= -4, & x_{12k+5} &= -1, \\
x_{12k+6} &= -3, & x_{12k+7} &= 1, & x_{12k+8} &= 0, & x_{12k+9} &= 3, & x_{12k+10} &= 2, & x_{12k+11} &= 3,
\end{aligned}$$

para  $k \in \mathbb{Z}$ . La Figura 3.2 representa esta solución:

Fig. 3.2. Sucesión  $x_k$ .

### 3.4. Sistemas con reflexión y transformada de Hilbert

En esta sección estudiaremos ecuaciones que incluyen la transformada de Hilbert discreta expandiendo el estudio explicado en la sección anterior. Hemos de restringir nuestro dominio a  $l^2(\mathbb{C})$ . Consideramos  $L = P + Q\varphi^* + SH + TH\varphi^*$  con  $P, Q, S, T \in \mathbb{C}[D, D^{-1}]$  con expresiones  $P = \sum_{j=-n}^n a_j D^j$ ,  $Q = \sum_{j=-n}^n b_j D^j$ ,  $S = \sum_{j=-n}^n d_j D^j$  y  $T = \sum_{j=-n}^n e_j D^j$  para plantear el problema

$$Lx = c \quad (3.29)$$

con  $c \in l^2$ .

Emplearemos la descomposición de  $l^2$  construida en 2.37.

$$V_1 := \{u \in l^2 \mid Hu = iu\} = (\text{Id} - iH)(l^2)$$

$$V_2 := \{u \in l^2 \mid Hu = -iu\} = (\text{Id} + iH)(l^2)$$

$$l^2 = V_1 \oplus V_2$$

Resulta que los operadores  $D$ ,  $\varphi^*$  y  $H$  se comportan bien con estos subespacios, en particular, si  $u^{(1)} \in V_1$  y  $u^{(2)} \in V_2$ ,

$$Du^{(1)} = D(\text{Id} - iH)v = (\text{Id} - iH)(Dv) \in V_1,$$

$$Du^{(2)} = D(\text{Id} + iH)v = (\text{Id} + iH)(Dv) \in V_2,$$

$$\varphi^* u^{(1)} = \varphi^*(\text{Id} - iH)v = (\text{Id} + iH)(\varphi^* v) \in V_2,$$

$$\varphi^* u^{(2)} = \varphi^*(\text{Id} + iH)v = (\text{Id} - iH)(\varphi^* v) \in V_1,$$

$$Hu^{(1)} = iu^{(1)} \in V_1,$$

$$Hu^{(2)} = -iu^{(2)} \in V_2.$$

(3.30)

Para aprovechar esta compatibilidad, descomponemos la incógnita  $x \in l^2$  en estos subespacios  $x^{(1)} = \frac{1}{2}(\text{Id} - iH)u \in V_1$ ,  $x^{(2)} = \frac{1}{2}(\text{Id} + iH)u \in V_2$  de modo que  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  y hacemos lo propio con el término independiente  $c \in l^2$ . Ahora aplicando las propiedades (3.30) reescribimos la ecuación (3.29) como

$$L \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px^{(1)} + Q\varphi^*x^{(2)} + iSx^{(1)} + iT\varphi^*x^{(2)} \\ Px^{(2)} + Q\varphi^*x^{(1)} - iSx^{(2)} - iT\varphi^*x^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{(1)} \\ c^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Procediendo como antes construiremos un sistema que nos permita reducir la ecuación al paradigma de la sección anterior para encontrar su solución. Introducimos los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} y_k &= (x_{k-n}^{(1)}, x_{k-n}^{(2)}, x_{k-n+1}^{(1)}, x_{k-n+1}^{(2)}, \dots, x_{k+n-2}^{(2)}, x_{k+n-1}^{(1)}, x_{k+n-1}^{(2)}) \in \mathbb{C}^{4n}, \\ f_k &= (0, \dots, 0, c_k^{(1)}, c_k^{(2)}) \in \mathbb{C}^{4n}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Y definimos las matrices de dimensión  $4n$

$$\begin{aligned} C &= \left( \begin{array}{c|c} \text{Id} & 0 \\ \hline 0 & \alpha_n \end{array} \right), & E &= \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta_n \end{array} \right), \\ A &= \left( \begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & -\text{Id} \\ \hline \alpha_{-n} & \alpha_{-n+1} & \cdots & \alpha_{n-1} \end{array} \right), \\ B &= \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline \beta_{-n} & \cdots & \beta_{n-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \begin{pmatrix} a_k + i \cdot d_k & 0 \\ 0 & a_k - i \cdot d_k \end{pmatrix}, \\ \beta_k &= \begin{pmatrix} 0 & b_k + ie_k \\ b_k - ie_k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Planteamos el sistema

$$Cy_{k+1} + Ey_{-k-1} + Ay_k + By_{-k} = f_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.33)$$

Si  $\left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right)$  es invertible, entonces, por el Teorema 3.12, el sistema (3.33) sujeto a  $y_0 = v_0 \in \mathbb{C}^{4n}$  tiene solución única y esta es

$$y_k = \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] v_0 + (Gf)_k$$

donde

$$\begin{aligned} K &:= - \left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & C \end{array} \right), \\ \bar{G}_{k,j} &:= \begin{cases} K^{k-1-j} & \text{si } 0 \leq j \leq k-1, \\ -K^{k-1-j} & \text{si } k \leq j \leq -1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ G &:= \left( (\bar{G}_{k,j})_{(1)} + (\bar{G}_{k,j})_{(2)} D\varphi^* \right)_{k,j \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.15.** *Toda solución de  $Lx = 0$  donde*

$$L = \sum_{j=-n}^n a_j D^j + b_j D^j \varphi^* + d_j D^j H + e_j D^j H \varphi^*$$

satisface

$$x_k = (y_k)_{2n+1} + (y_k)_{2n+2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde

$$y_k = \left[ (K^k)_{(1)} + (K^k)_{(2)} \right] \cdot \begin{pmatrix} x_{-n}^{(1)} \\ x_{-n}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

siendo  $(x^{(1)}, x^{(2)})$  la descomposición de  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  en  $(V_1, V_2)$ .

*Demostración.* Como vimos antes,  $(x^{(1)}, x^{(2)})$  ha de satisfacer (3.4) para  $c^{(1)}, c^{(2)} = 0$ . Aplicando el cambio de variable (3.32) esto equivale a que  $y$  resuelva (3.33) para  $f_k = 0, k \in \mathbb{Z}$ . Aplicando el Teorema 3.11 y ha de venir dada por (3.15) y concluimos deshaciendo el cambio para obtener la expresión de  $x$ . ■

**Nota 3.16.** *A diferencia de los resultados de las secciones anteriores, el Teorema 3.15 no nos asegura existencia ni unicidad de soluciones y tampoco nos permite calcular una solución a partir de una condición inicial puesto que necesitamos conocer las coordenadas  $-n, -n+1, \dots, n-1$  de la descomposición de la solución, pero éstas dependen de la sucesión completa.*

**Teorema 3.17.** *Consideramos el problema (3.29) sujeto a*

$$(x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}), (Hx_{-n}, Hx_{-n+1}, \dots, Hx_{n-1}) = (0, \dots, 0)$$

con

$$[(a_n + d_n)(a_{-n} + d_{-n}) - (b_n + e_n)(b_{-n} - e_{-n})] \cdot [(a_n - d_n)(a_{-n} - d_{-n}) - (b_n - e_n)(b_{-n} + e_{-n})] \neq 0.$$

Construimos  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathcal{S}$  como

$$x_k^{(1)} = (y_k)_{2n+1}, \quad x_k^{(2)} = (y_k)_{2n+2}$$

donde  $y_k = (Gf)_k$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Equivalen:

- i) El problema admite solución en  $l^2$ .
- ii)  $x^{(1)} \in V_1$  y  $x^{(2)} \in V_2$ .
- iii) El problema admite como única solución a  $x^{(1)} + x^{(2)} \in l^2$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta la construcción de las matrices  $A, B, C, E$ ,

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{array}{c|c} C & E \\ \hline B & A \end{array} \right) &= \det(CA - BE) \\ &= \det \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & -\text{Id} \\ \hline \alpha_n \alpha_{-n} - \beta_n \beta_{-n} & \alpha_n \alpha_{-n+1} - \beta_n \beta_{-n+1} & \cdots & \alpha_n \alpha_{n-1} - \beta_n \beta_{n-1} \end{array} \right) \\ &= \det(\alpha_n \alpha_{-n} - \beta_n \beta_{-n}) = \det(\text{diag}((a_n + d_n)(a_{-n} + d_{-n}) - (b_n + e_n)(b_{-n} - e_{-n}), \\ &\quad (a_n - d_n)(a_{-n} - d_{-n}) - (b_n - e_n)(b_{-n} + e_{-n}))) \\ &= [(a_n + d_n)(a_{-n} + d_{-n}) - (b_n + e_n)(b_{-n} - e_{-n})] \\ &\quad \cdot [(a_n - d_n)(a_{-n} - d_{-n}) - (b_n - e_n)(b_{-n} + e_{-n})] \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces sabemos que  $y_k$  es la única solución del sistema (3.33) sujeto a  $y_0 = (0, \dots, 0)$  y, deshaciendo el cambio (3.32), que  $x^{(1)}, x^{(2)}$  es la única solución de (3.4) sujeto a

$$(x_{-n}^{(1)}, x_{-n}^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}) = (0, \dots, 0).$$

**[i]  $\implies$  ii]** Sea  $u$  una solución y  $(u^{(1)}, u^{(2)})$  su descomposición en  $(V_1, V_2)$ , entonces  $u^{(1)}, u^{(2)}$  resuelve (3.4). Por ser  $(u_{-n}, \dots, u_{n-1}), (Hu_{-n}, \dots, Hu_{n-1}) = (0, \dots, 0)$  se tiene  $(u_{-n}^{(1)}, u_{-n}^{(2)}, \dots, u_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{(2)}) = (0, \dots, 0)$  y, por unicidad,  $x^{(1)} = u^{(1)}, x^{(2)} = u^{(2)}$ .

**[ii]  $\implies$  iii]** Como  $x^{(1)}, x^{(2)}$  es la descomposición de  $x^{(1)} + x^{(2)}$  y resuelve (3.4) con  $(x_{-n}^{(1)}, x_{-n}^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}) = (0, \dots, 0)$  entonces  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  es una solución del problema del enunciado. Supongamos ahora que  $u$  es una solución arbitraria llamamos  $z = x - u$  y  $(z^{(1)}, z^{(2)})$  a su descomposición en  $(V_1, V_2)$ , entonces  $(z_{-n}^{(1)}, z_{-n}^{(2)}, \dots, z_{n-1}^{(1)}, z_{n-1}^{(2)}) = (0, \dots, 0)$  y  $Lz = 0$ . Por el Teorema 3.15,  $z = 0$  y por tanto  $u = x$  lo que prueba la unicidad de la solución.

**[iii]  $\implies$  i]** Trivial. ■

**Ejemplo 3.18.** Establecemos el problema

$$(D + iD^{-1}H - iDH\varphi^*)x = c, \quad (x_{-1}, x_0), (Hx_{-1}, Hx_0) = (0, 0)$$

donde  $c_k = 2\delta_0^k$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

En primer lugar, calculamos  $c^{(1)} = \frac{1}{2}(\text{Id} - iH)c$  y  $c^{(2)} = \frac{1}{2}(\text{Id} + iH)c$  que tendrán la expresión

$$c_k^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ -\frac{i}{k} & \text{para } k \text{ impar,} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad c_k^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ \frac{i}{k} & \text{para } k \text{ impar,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora construimos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y calculamos

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso calcularemos solamente la parte real de ciertos términos de la solución del sistema asociado al problema. Esto bastará para descartar la existencia de solución y simplificará los cálculos pues la matriz  $K$  y sus potencias tienen coeficientes reales y los únicos términos de  $c^{(1)}$  y  $c^{(2)}$  con parte real no nula son  $c_0^{(1)} = 1$  y  $c_0^{(2)} = 1$ . Para  $k \geq 1$ ,

$$\operatorname{Re}(y_{4k+1}) = K_{(1)}^{4k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{2-2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_{2-2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_{1-2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_{1-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{F}_{1-2k} \\ \mathcal{F}_{1-2k} \end{pmatrix},$$

donde denotamos por  $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  a la extensión de la sucesión de Fibonacci a  $\mathbb{Z}$  con  $\mathcal{F}_0 = 0$  y  $\mathcal{F}_1 = 1$ , es decir, la sucesión definida por

$$\mathcal{F}_0 = 0, \quad \mathcal{F}_1 = 1, \quad \mathcal{F}_{k+2} = \mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Volviendo al problema original,

$$\operatorname{Re}(x_{4k+1}^{(1)}) = \mathcal{F}_{1-2k}.$$

Por último,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k^{(1)}|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(x_{4k+1}^{(1)})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{1-2k}^2 = \infty,$$

así,  $x^{(1)} \notin l^2$  por lo que  $x^{(1)} \notin V_1$  y el problema no admite solución en  $l^2$ .

### 3.5. Condiciones de contorno generales

En esta sección estudiaremos ecuaciones reducibles a ecuaciones de recurrencia sujetas a condiciones de contorno más generales. Veremos qué condiciones imponer para asegurar su existencia y calcularemos su expresión. Generalizaremos los resultados [17, Corolario 3.5, p. 15] y [17, Corolario 3.7, p. 16] para considerar un conjunto más amplio de condiciones de contorno y de ecuaciones. Para ello, ajustaremos el dominio de definición de las condiciones de contorno a cada problema particular, pues basta que contenga una solución particular de la ecuación reducida y la solución general de la solución general homogénea.

**Notación 3.19.** Para un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial  $V$ , emplearemos la notación  $V^*$  para referirnos a su dual algebraico, es decir, al conjunto de operadores lineales  $V \rightarrow \mathbb{F}$ .

En primer lugar nos centramos en las ecuaciones de recurrencia.

**Teorema 3.20.** Consideramos el problema (3.3), construimos  $\Phi$  como en (3.2) y  $H$  como en el Teorema 3.2. Si  $\overline{\mathcal{T}}$  es un  $\overline{\mathbb{F}}$ -subespacio vectorial de  $\overline{\mathcal{S}}$  tal que todas las columnas de  $\Phi$  y  $Hc$  son elementos de  $\overline{\mathcal{T}}$  y  $W \in (\overline{\mathcal{T}}^*)^n$ . Entonces el problema

$$Sx = 0, \quad Wx = h \quad (3.34)$$

con  $h \in \mathbb{F}^n$  admite solución única si y solo si  $W_\Phi := W\Phi \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{F}})$  es invertible y ésta viene dada por

$$u = \Phi W_\Phi^{-1}h + (H - \Phi W_\Phi^{-1}WH)c. \quad (3.35)$$

Además, si  $\Phi \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z} \times n}(\mathbb{F})$ , podemos incluir condiciones de frontera  $W \in (\mathcal{T}^*)^n$  donde  $\mathcal{T}$  sea un  $\mathbb{F}$ -subespacio vectorial de  $\mathcal{S}$  en el que se encuentren las columnas de  $\Phi$  y  $Hc$  y asegurar que la solución (3.35) del problema (3.34) es un elemento de  $\mathcal{S}$ .

*Demostración.* Como vimos en la **Sección 3.1**, toda solución de  $Lx = c$  tiene la forma  $u = \Phi K + hc$  con  $K \in \overline{\mathbb{F}}^n$ . Si combinamos esto con la condición de contorno  $Wx = h$ , obtenemos la ecuación  $W\Phi K + WHc = h$ , que tendrá solución única en  $K$  si y solo si  $W_\Phi$  es invertible, lo que se corresponde con la existencia y unicidad de la solución  $u$ . Por construcción,  $L\Phi = 0$  y  $LHc = c$ . Entonces si  $W_\Phi$  es invertible

$$Lu = L\Phi W_\Phi^{-1}h + (LH - L\Phi W_\Phi^{-1}WH)c = LHc = c$$

y

$$Wu = W_\Phi W_\Phi^{-1}h + (WH - W_\Phi W_\Phi^{-1}WH)c = h.$$

Por último notamos que si  $\Phi \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z} \times n}(\mathbb{F})$  la fórmula (3.35) para  $u$  resulta en un elemento de  $\mathcal{S}$ . ■

Ahora adaptamos esta construcción para ecuaciones reducibles en general, ésto nos dará un método para resolver problemas con condiciones de contorno generales asociados a los operadores estudiados en el **Capítulo 2** empleando las reducciones desarrolladas a lo largo de éste.

**Teorema 3.21.** Sean  $\mathcal{R}$  un subespacio vectorial de  $\mathcal{S}$ ,  $L : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  un operador lineal y  $R : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  una reducción de  $L$  por la derecha, esto es,  $LR \in \mathbb{F}[D]$ , de forma que  $LR$  tiene término independiente no nulo. Para  $n$  natural menor o igual que el grado de  $LR$  tomamos  $\Phi$  un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes de  $LR = 0$  y suponemos que se encuentran en  $\mathcal{R}$ . Sean  $H$  una función de Green asociada a  $LR$ ,  $c \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  un subespacio vectorial de  $\mathcal{R}$  en el que se encuentren las columnas de  $R\Phi$  y  $RHc$ , y  $W \in (\mathcal{T}^*)^n$ . Si  $W_{R\Phi} := WR\Phi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  es invertible, entonces el problema

$$Lx = c, \quad Wx = h$$

con  $h \in \mathbb{F}^n$  admite la solución

$$u = R\Phi W_{R\Phi}^{-1}h + (RH - R\Phi W_{R\Phi}^{-1}WRH)c \in \mathcal{R}.$$

*Demostración.* Por construcción tenemos que  $LR\Phi = 0$ ,  $LRHc = c$  y que  $u \in \mathcal{R}$ . Entonces

$$Lu = LR\Phi W_{R\Phi}^{-1}h + (LRH - LR\Phi W_{R\Phi}^{-1}WRH)c = LRHc = c$$

y

$$Wu = W_{R\Phi} W_{R\Phi}^{-1}h + (WRH - W_{R\Phi} W_{R\Phi}^{-1}WRH)c = h. \quad \blacksquare$$



## 4. Conclusiones y problemas abiertos

En este trabajo hemos recopilado los resultados existentes sobre resolución de ecuaciones en diferencias y reducción de operadores sobre sucesiones indexadas sobre los enteros.

En primer lugar, nos hemos fijado en los métodos algebraicos de reducción de operadores para caracterizar las involuciones que generan álgebras en las que podemos proceder de forma similar. También hemos trabajado en particular con las transformadas de Hilbert y Fourier. Aunque esta última no es una involución, posee cualidades que facilitan el estudio de su relación con el resto de operadores.

Finalmente, se han dado métodos de resolución explícita junto con resultados de existencia y unicidad para las ecuaciones inducidas por estos operadores. Este apartado también pone de manifiesto la importancia del estudio anterior de las estructuras algebraicas y reducciones.

En general se han organizado las teorías referenciadas añadiendo nuevos casos y generalizando enunciados para obtener un resumen estructurado de las técnicas que pueden utilizarse para simplificar o resolver problemas que se encuadren en este ámbito.

Este estudio deja margen para mejora o extensión en lo que concierne a las siguientes cuestiones:

- *Reducción de operadores contruidos con la transformada de Fourier:* En la **Sección 2.7** se determinan las relaciones entre los operadores  $D$ ,  $\varphi^*$  y  $\mathcal{F}$ . Empleándolas podrían conseguirse reducciones que llevaran a resolver ecuaciones en este contexto.
- *Coefficientes no constantes:* Durante el trabajo hemos considerado polinomios con coeficientes constantes, esto es, independientes de la posición. En algunos casos se ha procedido así por simplicidad de notación y cálculos pero en otros casos considerar coeficientes dependientes de la posición afectaría de forma fundamental a la teoría y cabría extender la teoría a este escenario.
- *Ecuaciones en diferencias parciales:* De igual forma que las ecuaciones de recurrencia son la versión discreta de las ecuaciones diferenciales ordinarias, podrían definirse ecuaciones de recurrencia parciales como análogo discreto de las ecuaciones en derivadas parciales indexando el dominio por  $\mathbb{Z}^N$  en lugar de  $\mathbb{Z}$ . También se podrían incluir operadores más generales definidos sobre  $\mathbb{F}^{\mathbb{Z}^N}$  para construir ecuaciones en diferencias parciales como versión discreta de las ecuaciones en derivadas parciales funcionales.
- *Relajación de condiciones y restricciones:* A lo largo del **Capítulo 3** hemos exigido multitud de condiciones a los problemas para asegurar la existencia o unicidad de soluciones (cuando trabajamos con matrices hemos requerido que algunas fueran invertibles para poder despejar). Una mejora de estos métodos podría venir de sustituir estas condiciones por unas más débiles.



# Bibliografía

- [1] N. Bourbaki, P.M. Cohn, J. Howie, *Elements of Mathematics*, Springer (2003)
- [2] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications* (3rd ed.), McGraw–Hill (2000)
- [3] A. Cabada, G. Infante, F.A.F. Tojo, *Nontrivial solutions of perturbed Hammerstein integral equations with reflections*, Bound. Value Probl. 2013, 86 (2013)
- [4] A. Cabada y F.A.F. Tojo, *Comparison results for first order linear operators with reflection and periodic boundary value conditions*, Non linear Analysis: Theory, Methods and Applications 78, 32-46 (2013)
- [5] A. Cabada y F.A.F. Tojo, *Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. 412(1), 529-546 (2013)
- [6] A. Cabada y F.A.F. Tojo, *Green's functions for reducible functional differential equations*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2017)
- [7] A. Cabada y F.A.F. Tojo, *On linear differential equations and systems with reflection*, Appl. Math. Comput. 305, 84-102 (2017)
- [8] A. Cabada y F.A.F. Tojo, *Solutions and Greens function of the first order linear equation with reflection and initial conditions*, Bound. Value Probl. 2014, 99 (2014)
- [9] A. Cabada y F.A.F. Tojo, *Solutions of the first order linear equation with reflection and general linear conditions*, Blob. J. Math. Sci. 2(1), 1-8 (2013)
- [10] L.E. Franks, *Signal Theory. Information theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. (1969)
- [11] J. Gamboa, M. Plyushchay, J. Zanelli, *Three aspects of bosonized supersymmetry and linear differential field equation with reflection*, Nucl. Phys. B 543(1-2), 447-465 (1999)
- [12] F.W. King, *Hilbert transforms, Vol. 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 124. (2009)
- [13] R.E. Mickens, *Difference equations: Theory, Applications and Advanced Topics*, CRC Press (2015)
- [14] S. Post, L. Vinet, A. Zhedanov, *Supersymmetric quantum mechanics with reflections*, J. Phys. A 44(43), 435301 (2011)
- [15] D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument*, A Group of Monographs and Advanced Textbooks (1973)

- [16] R. Roychodhury, B. Roy, P.P. Dube, *Non-Hermitian oscillator and R-deformed Heisenberg algebra*, J. Math. Phys. 54(1), 012104 (2013)
- [17] F.A.F. Tojo, *Green's functions of recurrence relations with reflection*, J. Math. Anal. Appl. 447(2), 1463-1485 (2019)