



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La geometría diferencial de las superficies regladas y su aplicación en la arquitectura

Blanca M^a Posada Soto

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

La geometría diferencial de las superficies regladas y su aplicación en la arquitectura

Blanca M^a Posada Soto

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Geometría y Topología
Título: La geometría diferencial de las superficies regladas y su aplicación en la arquitectura
Breve descripción del contenido
Estudiar las superficies regladas y sus propiedades dentro del contexto de las superficies regulares. Estudiar las aplicaciones de este tipo de superficies a la arquitectura (Antoni Gaudí, Félix Candela, Hans Hollein, Frank O. Gehry, Santiago Calatrava ...).
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Geometría diferencial de curvas en \mathbb{R}^3	1
1.1.1. El triedro de Frenet-Serret	2
1.2. Geometría diferencial de superficies en \mathbb{R}^3	2
1.2.1. Orientación de una superficie y aplicación de Gauss	4
1.2.2. La curvatura de Gauss, curvatura media y curvaturas principales	5
1.2.3. Curvatura normal y geodésica	6
1.2.4. Líneas de curvatura y líneas asintóticas	7
1.2.5. Isometrías locales	7
1.2.6. El transporte paralelo y las geodésicas	8
2. Geometría diferencial de las superficies regladas	9
2.1. Definición y ejemplos.	9
2.2. Superficies desarrollables	16
2.2.1. Envolvente de los planos tangentes a una superficie a lo largo de una curva	19
2.3. Superficies no cilíndricas: línea de estricción y parámetro de distribución.	26

3. Superficies regladas en la arquitectura	37
3.1. Antoni Gaudí	39
3.2. Félix Candela	42
3.3. Santiago Calatrava	45
3.4. Frank Gehry	48
Bibliografía	51

Resumen

Una superficie se dice que es reglada si por todos sus puntos pasa al menos una recta que esté contenida en ella. El objetivo de este trabajo es el estudio de este tipo de superficies y sus propiedades dentro de la teoría de la geometría diferencial. Además, veremos una clase particular de superficies regladas cuya curvatura es nula, las llamadas superficies desarrollables. Por último, examinaremos su aplicación en la arquitectura, centrándonos en el análisis de la obra de los maestros Antoni Gaudí, Félix Candela, Santiago Calatrava y Frank Gehry.

Abstract

A surface is called a ruled surface if through every point there is at least one straight line that lies on the surface. The aim of this project is to study this kind of surfaces and their properties in the context of differential geometry. In addition, we will consider a specific type of ruled surfaces which have null curvature, known as developable surfaces. Finally, we will examine their implementation in architecture, focusing on the analysis of the work done by architects Antoni Gaudí, Félix Candela, Santiago Calatrava and Frank Gehry.

Introducción

Tal como indica su nombre, las superficies regladas son aquellas en las cuales todo punto pertenece a una línea recta que está contenida en la propia superficie. Estas superficies se pueden ver entonces como el lugar geométrico generado por una recta que se mueve siguiendo el recorrido de una curva en el espacio. A dicha curva se le llamará *directriz* y cada una de las posiciones de la recta en la curva se conocerá como *generatriz*.

El presente trabajo se centrará en el estudio de estas superficies dentro del contexto de la geometría diferencial de superficies, por lo cual previamente introduciremos los conceptos y resultados básicos necesarios de este campo. Seguiremos con la definición formal de las superficies regladas y daremos varios ejemplos, entre los que se encontrarán algunas de las superficies más conocidas, como son el plano, el cono o el cilindro. Cabe aclarar que aunque la geometría diferencial se suele enfocar en el estudio de superficies regulares, es decir, aquellas en las que se pueda definir en todo punto el plano tangente a ella, la definición que daremos de superficie reglada permite que existan puntos no regulares. En consecuencia adaptaremos los conceptos y resultados introducidos en el primer capítulo limitándolos a los puntos de la superficie que sí sean regulares.

Una de las maneras más importantes de clasificar una superficie es en función a su curvatura intrínseca, conocida como *curvatura de Gauss*. En función de ella podremos hacer una división de las superficies regladas: aquellas con curvatura nula, también llamadas *desarrollables*, y aquellas con curvatura negativa. Estudiaremos algunas propiedades de las superficies desarrollables y veremos cuáles de los ejemplos dados lo son. En particular, llegaremos finalmente a un teorema que nos dirá exactamente cuáles son las superficies desarrollables.

Para poder seguir analizando las características propias de las superficies regladas, tendremos que restringir el conjunto de superficies a tratar. Así, nos limitaremos a aquellas superficies en las que las generatrices no se mantengan siempre paralelas, lo que denominaremos *superficies no cilíndricas*. En estas existirá una curva especial, llamada *línea de estricción*, que se caracteriza por intersectar a todas las generatrices de manera perpendicular y que tomaremos como directriz para descubrir más propiedades de las superficies regladas.

Finalmente, examinaremos la aplicación de las superficies regladas en la arquitectura, área muy ligada a la geometría. Como las superficies regladas permiten construir originales formas a base de un elemento tan simple como es la recta, han sido bastante empleadas en la construcción. En concreto, centraremos nuestra atención en los arquitectos Antoni Gaudí, Félix Candela, Santiago Calatrava y Frank Gehry, pues son algunos de los mayores exponentes del uso de estas superficies.

Capítulo 1

Preliminares

Empezaremos introduciendo una serie de definiciones y de resultados básicos de la geometría diferencial que necesitaremos para el análisis de las superficies regladas. Como estos ya han sido estudiados en las asignaturas de geometría impartidas en el grado, se exponen sin sus demostraciones (que se pueden encontrar en [15] y [19], referencias consultadas para la elaboración de este capítulo).

1.1. Geometría diferencial de curvas en \mathbb{R}^3

Definición 1.1. Una **curva parametrizada diferenciable** es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Tenemos así una aplicación que lleva a cada $t \in I$ al punto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde las funciones coordenadas x, y, z son continuamente diferenciables en todos los órdenes. La variable t se conoce como el *parámetro* de la curva, la imagen $\alpha(I)$ como *traza* y el vector derivada $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ como *vector velocidad* o *vector tangente*.

Notemos que con diferenciable nos estamos refiriendo a la clase C^∞ . A partir de ahora utilizaremos ese término siempre con ese sentido. Para simplificar utilizaremos también la palabra curva en el sentido de curva parametrizada diferenciable.

Definición 1.2. Se dice que la curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una **curva plana** si su imagen está contenida en un plano P , $\alpha(I) \subset P \subset \mathbb{R}^3$. Se puede entender entonces como una curva en \mathbb{R}^2 .

Definición 1.3. La curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es **regular** si $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Definición 1.4. Se define el **parámetro longitud de arco** de una curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$

regular como:

$$s = s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\alpha}'(u)\| du, \quad t \in (a, b). \quad (1.1)$$

Este permite reparametrizar la curva como $\boldsymbol{\alpha}(s)$, de tal manera que $\|\boldsymbol{\alpha}'(s)\| = 1$ para todo s . En este caso, decimos que la curva está *parametrizada por longitud de arco*.

Teorema 1.5. *Toda curva regular parametrizada admite una reparametrización por la longitud de arco de tal manera que se conserve la orientación de la curva.*

1.1.1. El triedro de Frenet-Serret

Sea $\boldsymbol{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable regular parametrizada por longitud de arco s tal que $\boldsymbol{\alpha}''(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. El vector $\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$ se llama **vector tangente unitario** a la curva en el punto $\boldsymbol{\alpha}(s)$, $\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)/\|\mathbf{t}'(s)\|$ se denomina **vector normal unitario** a la curva y el vector $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ recibe el nombre de **vector binormal unitario** a la curva. El conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ forma una base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}^3 , es decir, con el determinante de los tres vectores positivo (justo en ese orden). Esta base se conoce como **triedro de Frenet-Serret**.

Podemos además definir dos funciones que caracterizan a una curva regular. La **curvatura** de $\boldsymbol{\alpha}(s)$ se define como $\kappa(s) = \|\boldsymbol{\alpha}''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\|$, y su **torsión** mediante $\tau(s) = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle$. Estas dos funciones se relacionan con los vectores del triedro de Frenet-Serret y sus derivadas mediante las llamadas *fórmulas de Frenet-Serret*:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Los vectores del triedro de Frenet-Serret se pueden definir también para curvas con una parametrización cualquiera, pero dado que toda curva puede ser reparametrizada por longitud de arco, consideraremos, sin pérdida de generalidad, curvas que ya estén parametrizadas por arco.

1.2. Geometría diferencial de superficies en \mathbb{R}^3

Definición 1.6. Una **superficie (parametrizada) regular** es un conjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ para el que todo punto $p \in S$ existen un entorno abierto $V \subset S$ de p , un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{x}(U) = V$ y \mathbf{x} es diferenciable (C^∞),
2. $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo, es decir, tiene inversa continua $\mathbf{x}^{-1} : V \rightarrow U$, y
3. la aplicación diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.

La aplicación \mathbf{x} se denomina *parametrización* o *sistema de coordenadas*, al entorno V se le llama *entorno coordinado* y los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

se conocen como *vectores coordinados*.

Lema 1.7. *La tercera condición se cumple si, y solo si, la matriz jacobiana $J\mathbf{x}(q)$ tiene rango 2, es decir, rango máximo. Esto es equivalente a que los vectores $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ sean linealmente independientes.*

Observación 1.8. Si para algún punto $p \in S$ la tercera condición no se verifica, el subconjunto S seguirá siendo una superficie, pero ya no será regular. Hablaremos entonces de *puntos regulares* de la superficie para aquellos en los que sí se cumpla y de *puntos singulares* en los que no.

Definición 1.9. Sea $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación entre superficies regulares y sean (U_1, \mathbf{x}_1) y (U_2, \mathbf{x}_2) parametrizaciones cualesquiera de S_1 en p y de S_2 en $F(p)$, respectivamente. Se dice que F es **diferenciable** si para todo $p \in S_1$ la expresión en coordenadas $\tilde{F} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}_1$ es diferenciable en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 1.10. Una aplicación $F : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies regulares es un **difeomorfismo** si es un homeomorfismo y su inversa y ella misma son diferenciables.

Definición 1.11. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$ un punto regular. Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ será un **vector tangente** a S en p si existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, con $\epsilon > 0$, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. El conjunto de todos los vectores tangentes a S en p se denomina **plano tangente** a la superficie en dicho punto y se denota como $T_p S$.

Lema 1.12. *Sea S una superficie, $p \in S$ un punto regular y $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una parametrización con $p \in \mathbf{x}(U)$. Entonces,*

$$T_p S = (d\mathbf{x})_{\mathbf{x}^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

Observación 1.13. El plano $T_p S$ es un espacio vectorial de dimensión 2, siendo $\{\mathbf{x}_1(q), \mathbf{x}_2(q)\}$ una base de este, con $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$.

Definición 1.14. Sea $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación entre superficies diferenciable y sean $p \in S_1$ y $F(p) \in S_2$ puntos regulares. Se define la **diferencial de F en p** como la siguiente aplicación:

$$dF_p : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$$

$$\mathbf{v} \mapsto dF_p(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \alpha)(t),$$

con $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ una curva diferenciable cualquiera tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Teorema 1.15 (de la función inversa). Sea $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable y $p \in S_1$ un punto regular. Si dF_p es un isomorfismo lineal entonces F es un difeomorfismo local, es decir, existe un entorno $V \subset S_1$ tal que $F : V \rightarrow F(V)$ es un difeomorfismo.

Definición 1.16. La **primera forma fundamental** de S en un punto regular p es la forma bilineal simétrica $I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto I_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.

Si \mathbf{x} es una parametrización de S , en la base $\beta = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ de $T_p S$ la matriz de I_p es:

$$(I_p)_\beta = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Por comodidad, denotaremos a esta matriz por (g_{ij}) , donde los valores g_{ij} , con $i, j \in \{1, 2\}$, se conocen como *coeficientes de la primera forma fundamental* asociados a la parametrización \mathbf{x} .

Lema 1.17. Sea \mathbf{x} una parametrización de una superficie regular y (g_{ij}) la matriz de la primera forma fundamental asociada a \mathbf{x} . Entonces, $\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|^2 = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Corolario 1.18. La matriz (g_{ij}) es definida positiva, es decir, $\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$.

1.2.1. Orientación de una superficie y aplicación de Gauss

Definición 1.19. Sea S una superficie regular. Un **campo de vectores diferenciable** en S es una aplicación diferenciable $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si $V(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$, entonces diremos que V es un **campo tangente** a la superficie. Mientras, si $V(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$, diremos que es un **campo normal** a la superficie. Por último, diremos que V es **unitario** si $\|V(p)\| = 1$ para todo $p \in S$.

Lema 1.20. Sea S una superficie y $\mathbf{x} : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización. Entonces, existe un campo de vectores diferenciable, unitario y normal a la superficie definido en el abierto coordenado $V = \mathbf{x}(U) \subset S$. Este está dado por la aplicación $\mathbf{N} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida mediante:

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}(q), \quad (1.4)$$

donde $p \in V$ es un punto regular y $q = \mathbf{x}^{-1}(p) \in U$.

Observación 1.21. Si S es regular, como el campo \mathbf{N} dado anteriormente es unitario, podemos pensar este como una aplicación diferenciable entre superficies $\mathbf{N} : \mathbf{x}(U) \subset S \rightarrow \mathbb{S}^2$, $p \mapsto \mathbf{N}(p)$, conocida como *aplicación de Gauss*.

Observación 1.22. Un punto p de una superficie es regular si justamente se puede definir el campo de vector normal \mathbf{N} anterior, es decir, si $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$ (vectores linealmente independientes).

Definición 1.23. Sea S una superficie regular. Se dice que S es **orientable** si existe un campo de vectores diferenciable, normal y unitario definido en toda la superficie. A cada campo de vectores en las condiciones anteriores se le llama una **orientación** de S y cuando se elige una orientación determinada se dice que la superficie está **orientada**.

Lema 1.24. Si S es una superficie conexa orientable y \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 son dos campos diferenciables, normales y unitarios, entonces $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2$ o $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}_2$.

Observación 1.25. Según el Lema 1.20 cualquier superficie regular es localmente orientable. Por otro lado, el Lema 1.24 nos indica que en una superficie regular conexa orientable existen solo dos orientaciones diferentes, que además son opuestas entre sí.

1.2.2. La curvatura de Gauss, curvatura media y curvaturas principales

Definición 1.26. Sea S una superficie regular. El **operador forma** o **endormorfismo de Weingarten** en $p \in S$ es la aplicación lineal $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$, $\mathbf{v} \mapsto A_p \mathbf{v} = -d\mathbf{N}_p(\mathbf{v})$, donde \mathbf{N} es la aplicación de Gauss y $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2 \cong T_p S$ es su diferencial.

Proposición 1.27. A_p es un operador autoadjunto, es decir, $\langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A_p \mathbf{w} \rangle$ para cualquier $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$.

Como consecuencia de esta proposición, tenemos que A_p es diagonalizable con autovalores reales. Podemos entonces dar las siguientes definiciones.

Definición 1.28. Los autovalores reales $k_1(p)$ y $k_2(p)$ del operador forma se conocen como las **curvaturas principales** de S en p y los autovectores asociados se denominan **direcciones principales**. La **curvatura de Gauss** y la **curvatura media** de S en p son los valores

$$K(p) = \det A_p = k_1(p)k_2(p) \quad \text{y} \quad H(p) = \frac{\text{tr} A_p}{2} = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}, \quad (1.5)$$

respectivamente.

Observación 1.29. Las curvaturas principales y la curvatura media dependen de la orientación escogida, es decir, del signo de \mathbf{N} , mientras la curvatura de Gauss no. Por otro lado, si las curvaturas principales son distintas entonces, existen solo dos direcciones principales unitarias y son ortonormales, mientras que si son iguales todos los vectores de $T_p S$ son direcciones principales.

Definición 1.30. Sea S una superficie regular orientada y $p \in S$. Entonces,

1. p se dice **elíptico** si $K(p) > 0$,
2. p se dice **hiperbólico** si $K(p) < 0$,

3. p se dice **parábólico** si $K(p) = 0$, pero una de las dos curvaturas principales no se anula,
4. p se dice **plano** si $K(p) = k_1(p) = k_2(p) = 0$.

Definición 1.31. La **segunda forma fundamental** de S en un punto p regular es la forma bilineal simétrica $\mathbb{I}_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \langle A_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A_p \mathbf{w} \rangle$.

De manera análoga a la primera forma fundamental, en la base $\beta = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ de $T_p S$ dada por una parametrización \mathbf{x} de S , la matriz de \mathbb{I}_p es:

$$(\mathbb{I}_p)_\beta = (L_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \mathbb{I}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbb{I}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mathbb{I}_p(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

siendo L_{ij} , con $i, j \in 1, 2$, los *coeficientes de la segunda forma fundamental* asociados a \mathbf{x} .

Lema 1.32. Los coeficientes de la segunda forma fundamental asociados a la parametrización \mathbf{x} vienen dados por $L_{ij} = \mathbb{I}_p(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{N} \rangle$.

Proposición 1.33. En la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ se tiene $A = (g_{ij})^{-1}(L_{ij})$, con lo cual

$$K = \det A = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (1.7)$$

1.2.3. Curvatura normal y geodésica

Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada por arco en una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss \mathbf{N} . Como podemos descomponer el espacio en $\mathbb{R}^3 = T_{\alpha(s)} \oplus N(\alpha(s))$, la aceleración de la curva se puede separar en su parte tangencial y su parte normal, es decir, $\alpha'' = \alpha''^\top + \alpha''^\perp$. Por otro lado, como $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)}$, la base $\{\alpha'(s), \mathbf{N}(\alpha(s)) \times \alpha'(s), \mathbf{N}(\alpha(s))\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 positivamente orientada y se denomina *triedro de Darboux*. En esta base la aceleración tangencial y normal de la curva vienen dadas por:

$$\alpha''^\top = \langle \alpha''(s), \mathbf{N}(\alpha(s)) \times \alpha'(s) \rangle \mathbf{N}(\alpha(s)) \times \alpha'(s) = \kappa_g(s) \mathbf{N}(\alpha(s)) \times \alpha'(s), \quad (1.8)$$

$$\alpha''^\perp = \langle \alpha''(s), \mathbf{N}(\alpha(s)) \rangle \mathbf{N}(\alpha(s)) = \kappa_n(s) \mathbf{N}(\alpha(s)). \quad (1.9)$$

Las funciones $\kappa_g(s)$ y $\kappa_n(s)$ se denominan **curvatura geodésica** y **curvatura normal** de α en s , respectivamente. Estas funciones se relacionan con la curvatura de α mediante la siguiente expresión:

$$\kappa^2(s) = \kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s). \quad (1.10)$$

Proposición 1.34. Sea S una superficie regular orientada por \mathbf{N} , $p \in S$ un punto y $\mathbf{v} \in T_p S$ un vector tangente. Si α es una curva contenida en la superficie tal que $\alpha(s) = p$ y $\alpha'(s) = \mathbf{v}$, entonces se cumple

$$\mathbb{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \alpha''(s), \mathbf{N}(\alpha(s)) \rangle. \quad (1.11)$$

Esta proposición nos permite definir el siguiente concepto.

Definición 1.35. Sea $\mathbf{v} \in T_p S$ un vector unitario. El valor $\mathbb{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ se conoce como **curvatura normal de S en p en la dirección de \mathbf{v}** y se denota como $\kappa_n(\mathbf{v}, p)$.

1.2.4. Líneas de curvatura y líneas asintóticas

Definición 1.36. Sea S una superficie regular orientada y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva contenida en ella. Se dice que α es una **línea de curvatura** de S si $\alpha'(t)$ es una dirección principal en el punto $\alpha(t)$, para todo $t \in I$.

Teorema 1.37 (Teorema de Olinde-Rodrigues). *Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular contenida en una superficie regular orientada por el normal \mathbf{N} . Entonces, α es una línea de curvatura si, y solo si, existe una función escalar diferenciable $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\mathbf{N} \circ \alpha)'(t) = \mu(t)\alpha'(t)$, para todo $t \in I$.*

Definición 1.38. Sea S una superficie regular orientada. Se dice que $\mathbf{v} \in T_p S$ es una **dirección asintótica** de S en p si $\kappa_n(\mathbf{v}, p) = 0$.

Definición 1.39. Sea S una superficie regular orientada y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva contenida en ella. Se dice que α es una **línea o curva asintótica** si $\alpha'(t)$ es una dirección asintótica en $\alpha(t)$, para todo $t \in I$.

1.2.5. Isometrías locales

Definición 1.40. Una aplicación diferenciable $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies regulares se denomina **isometría local** si conserva la primera forma fundamental, es decir, para cada $p \in S_1$ se cumple:

$$\langle df_p(\mathbf{v}), df_p(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S_1 \quad (1.12)$$

Una isometría local se dice **isometría (global)** si es además un difeomorfismo.

Definición 1.41. Dos superficies regulares S_1 y S_2 son **localmente isométricas** si para todo $p \in S_1$ existe un entorno abierto $V \subset S_1$ de p y una isometría global $f : V \rightarrow f(V) \subset S_2$, y análogamente cambiando S_2 por S_1 .

Teorema 1.42 (Egregium de Gauss). *La curvatura de Gauss es invariante por isometrías locales, esto es, si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría local, entonces $K_{S_1}(p) = K_{S_2}(f(p))$.*

El recíproco de este teorema no es cierto en general. El siguiente teorema muestra una situación en la que sí lo es.

Teorema 1.43 (Teorema de Minding). *Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares con la misma curvatura de Gauss constante. Entonces, S_1 y S_2 son localmente isométricas.*

1.2.6. El transporte paralelo y las geodésicas

Definición 1.44. Sea S una superficie regular orientada y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva contenida en S . Un **campo de vectores a lo largo de α** es una aplicación $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si además la aplicación V es diferenciable, entonces es un **campo diferenciable**, y si $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$, para todo $t \in I$, el campo es **tangente** a S a lo largo de α .

Un ejemplo de campo diferenciable tangente a lo largo de α es α' .

Definición 1.45. Sea V un campo de vectores diferenciable y tangente a una superficie S a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$. La **derivada covariante** del campo V es la componente tangente de su derivada V' y se denota por $\frac{DV}{dt}(t)$. Si N es el campo normal unitario a la superficie, la derivada covariante se puede calcular mediante:

$$\frac{DV}{dt}(t) := V'(t)^\top = V'(t) - \langle V'(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t)). \quad (1.13)$$

Definición 1.46. Un campo de vectores diferenciable V tangente a S a lo largo de α se dice **paralelo** si $\frac{DV}{dt}(t) = 0$, para todo $t \in I$, es decir, si V' solo tiene componente normal.

Teorema 1.47 (existencia y unicidad de campos paralelos). *Sea S una superficie regular y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva. Si $t_0 \in I$ y $v \in T_{\alpha(t_0)}S$, entonces existe un único campo paralelo V a lo largo de α tal que $V(t_0) = v$.*

Definición 1.48. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular y tomemos $t_0, t_1 \in I$ con $p = \alpha(t_0)$, $q = \alpha(t_1)$ y $v_0 \in T_pS$. Siendo V el único campo paralelo tal que $V(t_0) = v_0$, se define el **transporte paralelo de v en q a lo largo de α** como el vector $v_1 = V(t_1) \in T_qS$. Esto determina la aplicación transporte paralelo $P(\alpha)_{t_0}^{t_1} : T_pS \rightarrow T_qS$, $v_0 \mapsto v_1$.

Definición 1.49. Una curva $\alpha : I \rightarrow S$ es una **geodésica** de la superficie si su campo velocidad es paralelo, esto es, si

$$\frac{D\alpha'}{dt} = 0.$$

Proposición 1.50. *Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular parametrizada por arco. Entonces, α es una geodésica si, y solo si, $\kappa_g(s) = 0$, para todo $s \in I$.*

Capítulo 2

Geometría diferencial de las superficies regladas

Para este capítulo las referencias principales consultadas han sido [9], [1], [15] y [17]. Se incluirán tanto resultados ya demostrados en dichos libros como propiedades extraídas de ejercicios propuestos en ellos. En caso de tratar con información proveniente de otra referencia se especificará en dicho instante.

2.1. Definición y ejemplos.

Definición 2.1. Una superficie se denomina **superficie reglada** si contiene al menos una familia uniparamétrica de rectas $\{\boldsymbol{\alpha}(t) + r\boldsymbol{w}(t)\}$, de tal manera que dicha superficie se pueda parámetrotrizar como:

$$\boldsymbol{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\boldsymbol{w}(t), \quad (2.1)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ son diferenciables, con $\boldsymbol{w}(t) \neq \mathbf{0}$, para todo $t \in I$. La curva $\boldsymbol{\alpha}(t)$ es la **directriz** de la superficie. Fijando $t = t_0$ se obtiene cada una de las rectas $\boldsymbol{R}_{t_0} = \boldsymbol{x}(t_0, r)$ que conforman la superficie y a las que denominaremos **generatrices**.

Observación 2.2. No hemos definido las superficies regladas como superficies regulares. Esto se debe a que si queremos incluir, por ejemplo, el cono, tenemos que considerar la posibilidad de la existencia de puntos singulares, donde el plano tangente no existe o no es único.

Podemos notar que la generatriz \boldsymbol{R}_{t_0} es una recta pasando por el punto $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ y con vector director $\boldsymbol{w}(t_0)$. A medida que este parámetro t_0 varía, se modifica tanto la dirección de la recta como el punto por el que pasa. Así, una superficie reglada se puede entender como la superficie

que se genera cuando una recta se traslada a lo largo de la directriz modificando su dirección según la función \mathbf{w} .

Si el vector $\mathbf{w}(t)$ se escoge de manera que sea unitario para todo t , entonces $\mathbf{w}(t)$ es una curva en la esfera unidad y recibe el nombre de *indicatriz esférica*.

Fijémonos además que en la definición de superficie reglada hemos especificado que debe contener *al menos* una familia de rectas. Esto es porque existen superficies regladas que contienen dos familias uniparamétricas de rectas diferentes. Tales superficies reciben el nombre especial de **superficies doblemente regladas**.

Veamos algunos ejemplos de superficies regladas.

Ejemplo 2.3 (Plano). La superficie reglada más simple es el plano. Si consideramos como directriz una recta pasando por un punto p , $\alpha(t) = p + t\mathbf{v}$, y como vector director de las generatrices cualquier vector no proporcional al vector director de la directriz, es decir, $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}$, para todo $t \in I$, tal que $\mathbf{w} \times \mathbf{v} \neq 0$, obtenemos la ecuación paramétrica del plano, que muestra perfectamente su carácter reglado:

$$\mathbf{x}(t, r) = p + t\mathbf{v} + r\mathbf{w}. \quad (2.2)$$

Como $\mathbf{w}(t)$ es constante, las generatrices son todas paralelas entre sí. Además, es una superficie regular, pues para poder definirlo hemos exigido que $\mathbf{x}_t = \mathbf{v}$ y $\mathbf{x}_r = \mathbf{w}$ sean vectores linealmente independientes.

Una vez generado un plano, podemos generar el mismo plano con una familia de generatrices distintas con tal de escoger $\mathbf{w}(t) = \tilde{\mathbf{w}}$, siendo $\tilde{\mathbf{w}}$ una combinación lineal de \mathbf{v} y \mathbf{w} con ambos coeficientes no nulos, es decir, sin ser paralelo a ninguno de los dos vectores. Al exigir que sea combinación lineal garantizamos que el plano generado sea el mismo pero a partir de una familia de generatrices diferentes, dado que su dirección es distinta a la marcada con \mathbf{w} . Como la posibilidad de elección de $\tilde{\mathbf{w}}$ es infinita, un mismo plano se puede generar a partir de infinitas familias de rectas diversas. Podemos decir que el plano es infinitamente reglado.

Ejemplo 2.4 (Cilindro generalizado). Si la directriz α es una curva contenida en un plano P y $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0$ es un vector constante, entonces obtenemos un cilindro. Tenemos entonces la siguiente parametrización:

$$\mathbf{x}(t, r) = \alpha(t) + r\mathbf{w}_0. \quad (2.3)$$

Notemos que si \mathbf{w}_0 está también en P la parametrización anterior describiría un plano, por lo que para obtener estrictamente un cilindro deberíamos exigir que \mathbf{w}_0 no sea coplanario con la directriz. Además, por mantener \mathbf{w}_0 una dirección fija, las generatrices que conforman el cilindro son todas paralelas entre sí.

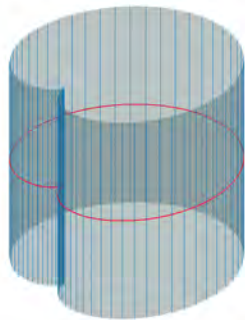
Por otro lado, vemos que esta definición de cilindro es una generalización del cilindro usual de radio R , $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$, cuya parametrización habitual ya presenta la forma anterior:

$$\mathbf{x}(t, r) = (R \cos t, R \sin t, R) = (R \cos t, R \sin t, 0) + r(0, 0, 1).$$

Por ello, a veces se suele denominar a una superficie de la forma (2.3) como cilindro generalizado, para remarcar que no tiene por qué ser el cilindro usual.

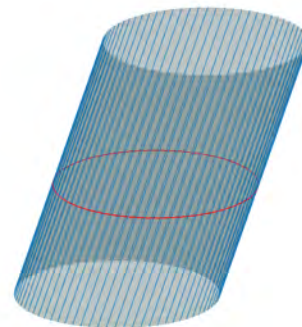
Si \mathbf{w}_0 es perpendicular al plano de la directriz, se trata de un cilindro recto, en caso contrario, es un cilindro oblicuo. En cuanto a la directriz, si esta es una curva cónica obtenemos tres tipos específicos de cilindros: cilindros hiperbólicos, cilindros parabólicos y cilindros elípticos, siendo los cilindros circulares un caso particular de este último [18]. En concreto, el cilindro usual es un cilindro circular recto.

En cuanto a la regularidad del cilindro, esta viene dada por la condición $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r \neq 0$. Así, los puntos regulares de un cilindro son aquellos en los que $\boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{w}_0$ no se anule.



(a) Cilindro recto con una cardioide como directriz:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (2(1 + \cos t) \cos t, 2(1 + \cos t) \sin t).$$



(b) Cilindro circular oblicuo.

Figura 2.1: Ejemplos de cilindros. Las directrices están trazadas en color rojo y las generatrices en azul. Elaboración propia.

Ejemplo 2.5 (Cono generalizado). Si la directriz es un único punto p y $\mathbf{w}(t)$ es cualquier curva plana se obtiene un cono. Tal directriz indica que todas las generatrices se intersecarán en ese punto p , al que podemos llamar vértice del cono. Un cono viene dado entonces por la siguiente parametrización:

$$\mathbf{x}(t, r) = p + r\mathbf{w}(t). \quad (2.4)$$

De nuevo, para excluir el plano de la definición del cono, habría que exigir que el vértice no se encuentre en el plano de $\mathbf{w}(t)$.

En caso de que \mathbf{w} sea una circunferencia y la recta que une p con el centro de dicha circunferencia sea perpendicular al plano en el que está contenida \mathbf{w} , se obtiene el cono usual de radio R y vértice en el origen de coordenadas:

$$\mathbf{x}(t, r) = r(R \cos t, R \sin t, 1).$$

Como $\mathbf{x}_t = r\mathbf{w}'$ y $\mathbf{x}_r = \mathbf{w}$, un cono será regular en aquellos puntos en los que $r\mathbf{w}' \times \mathbf{w} \neq 0$.



(a) Cono con la dirección de las generatrices describiendo la figura ocho: $\mathbf{w}(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$.

(b) Cono con la dirección de las generatrices describiendo una hipérbola: $\mathbf{w}(t) = (\sinh t, \pm \cosh t)$.

Figura 2.2: Ejemplos de conos. Las curvas $\mathbf{w}(t)$ que describen la dirección de las generatrices directrices están trazadas en color violeta y las generatrices en azul. Elaboración propia.

Ejemplo 2.6 (Hiperboloide de una hoja). Un ejemplo relevante de superficie reglada es el hiperboloide de una hoja, pues como veremos, es concretamente una superficie doblemente reglada. Este viene dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.5)$$

con $a, b, c \neq 0$. De forma paramétrica, se suele expresar mediante:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, b \cosh v \sin u, c \sinh v). \quad (2.6)$$

No obstante, tal parametrización no muestra las rectas, por lo que debemos hallar otra. Para ello, notemos que los planos con z constante intersecan a la superficie en elipses. Fijados a, b y c , tomemos como directriz una de ellas, en concreto, la elipse contenida en el plano XY. Esta curva viene parametrizada a través de:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0). \quad (2.7)$$

Como vector director $\mathbf{w}(t)$ tomaremos el formado por la suma del vector velocidad de la directriz con el vector de módulo c paralelo al eje z , es decir:

$$\mathbf{w}(t) = \boldsymbol{\alpha}'(t) + (0, 0, c). \quad (2.8)$$

Obtenemos así la parametrización:

$$\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r(\boldsymbol{\alpha}'(t) + (0, 0, c)) = (a(\cos t - r \sin t), b(\sin t + r \cos t), cr). \quad (2.9)$$

Como

$$\begin{aligned} (\cos t - r \sin t)^2 + (\sin t + r \cos t)^2 &= \cos^2 t - 2r \cos t \sin t + r^2 \sin^2 t \\ &\quad + \sin^2 t + 2r \sin t \cos t + r^2 \cos^2 t = 1 + r^2, \end{aligned}$$

se sigue que la parametrización anterior cumple la expresión implícita (2.5), por lo que es, efectivamente, una parametrización del hiperboloide de una hoja que muestra su carácter reglado.

Si en vez de tomar el \mathbf{w} definido, usamos como vector director el simétrico a este, es decir, $\mathbf{w}(t) = -\boldsymbol{\alpha}'(t) + (0, 0, c)$, definiremos rectas que siguen recubriendo todo el hiperboloide, pero que son linealmente independientes a las anteriores. De esta manera, tendremos una familia de generatrices diferente, lo que demuestra que el hiperboloide de una hoja es una superficie doblemente reglada.

Si $a = b$, la directriz es una circunferencia de radio a , y el hiperboloide, además de ser generado mediante el movimiento de una recta a lo largo de ella, se podrá generar al rotar una hipérbola a lo largo de la directriz en torno al eje perpendicular a ella, es decir, el eje z . Es entonces un hiperboloide de revolución.

Ejemplo 2.7 (Paraboloide hiperbólico). El paraboloide hiperbólico es el otro clásico ejemplo de superficie doblemente reglada. Se define mediante la expresión:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad (2.10)$$

con $a, b \neq 0$. Una vez fijados estos dos valores, se tienen las dos parametrizaciones siguientes:

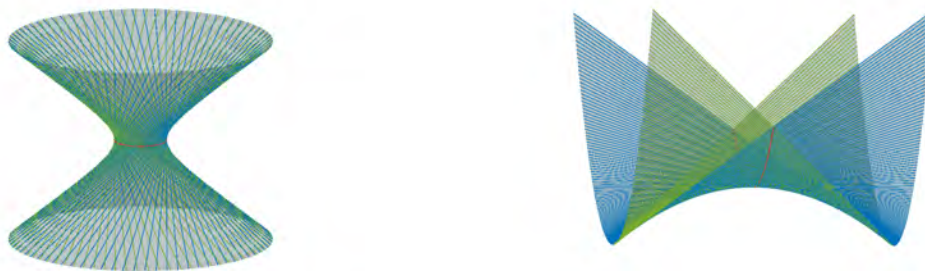
$$\mathbf{x}^{\pm}(t, r) = (at, 0, t^2) + r(a, \pm b, 2t) = (a(t+r), \pm br, t^2 + 2tr). \quad (2.11)$$

Efectivamente, son parametrizaciones del paraboloide hiperbólico pues cumplen la ecuación explícita (2.10) al ser $(t+r)^2 - r^2 = t^2 + 2tr$.

Ejemplo 2.8 (Helicoide). El helicoide es la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(t, r) = (br \cos t, br \sin t, at) = (0, 0, at) + r(b \cos t, b \sin t, 0), \quad (2.12)$$

donde $a, b \neq 0$. Esta parametrización muestra su carácter reglado y nos indica que el helicoide surge de rotar una recta perpendicular alrededor del eje z según se mueve sobre este.



(a) Hiperboloide de una hoja con $a = b = c = 1$. (b) Paraboloides hiperbólico con $a = b = 1$.

Figura 2.3: Ejemplos de superficies doblemente regladas. Las directrices están trazadas en color rojo y las dos familias de generatrices están en azul y en verde. Elaboración propia.

Ejemplo 2.9 (Banda de Möbius). La banda de Möbius se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, r) &= \left(\left(2 - r \sin \frac{t}{2} \right) \sin t, \left(2 - r \sin \frac{t}{2} \right) \cos t, r \cos \frac{t}{2} \right) \\ &= (2 \sin t, 2 \cos t, 0) + r \left(-\sin \frac{t}{2} \sin t, -\sin \frac{t}{2} \cos t, \cos \frac{t}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $0 < t < 2\pi$ y $-1 < r < 1$. Claramente es una superficie reglada.



(a) Helicoide (con $a = b = 1$).

(b) Banda de Möbius.

Figura 2.4: Las directrices están trazadas en color rojo y las generatrices en azul. Elaboración propia.

El ejemplo siguiente se corresponde a una familia de superficies que son regladas.

Ejemplo 2.10 (Superficies de Catalan. Conoides [18]). Una **superficie de Catalan** es una superficie reglada en la cual todas sus generatrices se mantienen paralelas a un plano fijado

conocido como *plano director* o *plano de paralelismo*. Estas se pueden parametrizar de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{w}(t), \text{ donde } \det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'') = 0. \quad (2.14)$$

Si además de intersectar a la directriz $\boldsymbol{\alpha}$ todas las generatrices intersectan a una misma recta fijada, entonces la superficie es un **conoide** y dicha recta se denomina *eje* del conoide. El ejemplo más simple de un conoide es el ya tratado paraboloides hiperbólico, pues se forma mediante el movimiento de una recta de manera paralela a un plano sobre otras dos rectas. Un caso particular de conoide es el *conoide recto*, que es aquel en el cual su eje es perpendicular al plano director, es decir, es la superficie reglada en la que todas sus generatrices son perpendiculares a una recta fijada (su eje).

Si tomamos como plano director el plano $z = 0$, el conoide correspondiente se puede expresar mediante

$$\mathbf{x}(t, r) = (a, b, c)f(t) + r(\cos t, \sin t, 0), \quad (2.15)$$

donde (a, b, c) es el vector director del eje del conoide y $f(t)$ es una función cualquiera diferenciable. Si $a = b = 0$, entonces es un conoide recto. Notamos que el helicoides es un conoide recto.

Por último, daremos tres ejemplos de superficies regladas que surgen del triedro de Frenet-Serret.

Ejemplo 2.11 (Superficie tangente, superficie normal principal y superficie binormal). Sea $\boldsymbol{\alpha}(s)$ una curva parametrizada por arco. Tomando esta curva como directriz y como $\mathbf{w}(s)$ cada uno de los vectores del triedro de Frenet-Serret, obtenemos las tres superficies regladas siguientes:

- La **superficie tangente** a la curva $\boldsymbol{\alpha}(s)$ es la dada por:

$$\mathbf{x}(s, r) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r\boldsymbol{\alpha}'(s). \quad (2.16)$$

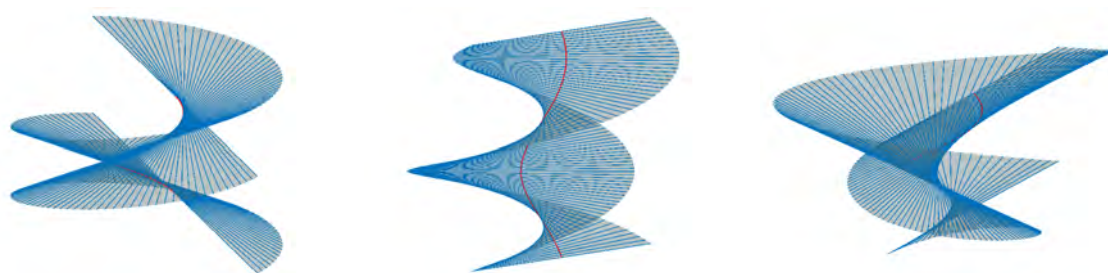
- La **superficie normal principal** a la curva $\boldsymbol{\alpha}(s)$ es:

$$\mathbf{x}(s, r) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r\mathbf{n}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r \frac{\boldsymbol{\alpha}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}''(s)\|}. \quad (2.17)$$

- La **superficie binormal** a la curva $\boldsymbol{\alpha}(s)$ es:

$$\mathbf{x}(s, r) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r\mathbf{b}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + r \frac{\boldsymbol{\alpha}'(s) \times \boldsymbol{\alpha}''(s)}{\|\boldsymbol{\alpha}''(s)\|}. \quad (2.18)$$

Ahora mostraremos una propiedad trivial de las rectas de las superficies regladas.



(a) Superficie tangente.

(b) Superficie normal.

(c) Superficie binormal.

Figura 2.5: Superficies tangente, normal y binormal a la hélice $\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$. Las directrices están trazadas en color rojo y las generatrices en azul. Elaboración propia.

Proposición 2.12. *Las generatrices de una superficie reglada son líneas asintóticas. Además, sus reparametrizaciones por arco son geodésicas.*

Demostración. Por ser rectas, las generatrices tienen curvatura κ nula. En consecuencia, también tienen curvaturas geodésica y normal nulas en todo punto, pues recordemos $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$. De las Definiciones 1.39 y 1.38 y de la Proposición 1.50 se sigue el resultado. \square

2.2. Superficies desarrollables

Proposición 2.13. *En los puntos regulares de una superficie reglada la curvatura de Gauss es no positiva.*

Demostración. Dada la parametrización (2.1) de una superficie reglada, se tiene que $\mathbf{x}_r = \mathbf{w}(t)$, luego $\mathbf{x}_{rr} = 0$. Consecuentemente, el coeficiente L_{22} de la segunda forma fundamental se anula, por lo que la curvatura de Gauss es:

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{-L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \leq 0, \quad (2.19)$$

donde hemos tenido en cuenta que la matriz asociada a la primera forma fundamental es definida positiva. \square

Este resultado nos indica que en las superficies regladas no existen puntos elípticos. Además, en base a él podemos definir un tipo específico de superficies regladas.

Definición 2.14. Una superficie reglada cuya curvatura de Gauss es nula en todo punto regular se denomina **superficie desarrollable**.

Corolario 2.15 (Caracterización de las superficies desarrollables). *Una superficie reglada es desarrollable si, y solo si, $\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}') = 0$.*

Demostración. Según la demostración de la proposición anterior, una superficie reglada es desarrollable si, y solo si, $L_{12} = 0$ en todo punto. Como $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}'$ y $\mathbf{x}_r = \mathbf{w}$, entonces:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}') \times \mathbf{w}}{\|(\boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}') \times \mathbf{w}\|}.$$

En consecuencia,

$$0 = L_{12} = \langle \mathbf{x}_{tr}, \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{\|(\boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}') \times \mathbf{w}\|} \langle \mathbf{w}', (\boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}') \times \mathbf{w} \rangle,$$

o equivalentemente,

$$0 = \langle \mathbf{w}', (\boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}') \times \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}', r\mathbf{w}' \times \mathbf{w} \rangle = \det(\mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{w}) = \det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}'),$$

donde se usa que $\langle \mathbf{w}', r\mathbf{w}' \times \mathbf{w} \rangle = 0$ por ser $r\mathbf{w}'$ proporcional a \mathbf{w}' . \square

Entre los ejemplos dados de superficies regladas, veamos cuáles son desarrollables utilizando la caracterización del corolario anterior.

- El plano es la superficie desarrollable más simple, pues se sabe que $K = 0$ en un plano.
- El cilindro es claramente una superficie desarrollable, pues como $\mathbf{w}(t)$ es constante en todo punto, $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ y $\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}') = 0$ trivialmente.
- De manera análoga al cilindro, los conos son desarrollables por ser ahora $\boldsymbol{\alpha}(t)$ constante en todo punto.
- Los hiperboloides de una hoja no son desarrollables. Con la parametrización (2.9) se tiene:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}') = \begin{vmatrix} -a \sin t & -a \cos t & -a \sin t \\ b \cos t & -b \sin t & b \cos t \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc \cos^2 t - abc \sin^2 t = -abc,$$

que nunca se anula por ser a , b y c distintos de cero.

- Los paraboloides hiperbólicos tampoco son desarrollables:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \boldsymbol{\alpha}') = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ \pm b & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 2t \end{vmatrix} = \pm 2ba \neq 0,$$

pues a y b no son nulos.

- La superficie tangente a una curva $\alpha(s)$ es siempre desarrollable, pues como $\mathbf{w} = \mathbf{t} = \alpha'$, $\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \alpha') = 0$ por tener dos columnas iguales.

Para ver cuándo la superficie normal y binormal a una curva son desarrollables, utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.16. *Una curva α regular parametrizada por arco con curvatura $\kappa(s) \neq 0$ es plana si, y solo si, $\tau(s) = 0$.*

- La superficie normal a una curva $\alpha(s)$ es desarrollable si, y solo si, α es una curva plana. Efectivamente, como $\mathbf{w} = \mathbf{n}$ tenemos:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \alpha') = \det(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{t}) = \det(\mathbf{n}, -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}, \mathbf{t}) = \det(\mathbf{n}, -\tau\mathbf{b}, \mathbf{t}).$$

Como sabemos que $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}\}$ son vectores linealmente independientes, el determinante anterior solo puede anularse en todo punto si $\tau \equiv 0$. Esto es equivalente a que la curva sea plana.

- La superficie binormal a una curva $\alpha(s)$ es desarrollable si, y solo si, α es una curva plana. Efectivamente, ahora $\mathbf{w} = \mathbf{b}$ por lo que se cumple:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \alpha') = \det(\mathbf{b}', \mathbf{b}, \mathbf{t}) = \det(-\tau\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}).$$

De nuevo por ser $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}\}$ vectores linealmente independientes, el determinante se anula si, y solo si, $\tau = 0$ para todo punto de la curva, esto es, si la curva es plana.

Veamos ahora algunas propiedades de las superficies desarrollables.

Proposición 2.17. *Las superficies desarrollables regulares son localmente isométricas al plano.*

Demostración. Se sigue del Teorema de Minding (1.43), teniendo en cuenta que $K = 0$ en el plano. □

Esto significa que las superficies desarrollables regulares se pueden construir doblando un trozo de papel sin crear pliegues en él.

Proposición 2.18. *Sea S una superficie regular orientable, \mathbf{N} su campo de vectores normal unitario y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva contenida en ella. Entonces, α es una línea de curvatura de S si, y solo si, $\mathbf{x}(t, r) = \alpha(t) + r\mathbf{N}(t)$ es una superficie desarrollable, donde $\mathbf{N}(t) := \mathbf{N}(\alpha(t))$ es el normal a la superficie en los puntos de la curva α .*

Demostración. Está claro que \mathbf{x} es una superficie reglada de la forma (2.1) con $\mathbf{w}(t) = \mathbf{N}(t)$. Por la caracterización de las superficies desarrollables del Corolario 2.15, esta superficie es desarrollable si, y solo si, $\det(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \boldsymbol{\alpha}') = 0$. Como \mathbf{N} es unitario, tenemos que $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}' \rangle = 0$. También sabemos que $\langle \mathbf{N}, \boldsymbol{\alpha}' \rangle = 0$, pues el campo velocidad de una curva es un campo tangente a la superficie a lo largo de ella. En consecuencia, el determinante anterior solo puede anularse si \mathbf{N}' y $\boldsymbol{\alpha}'$ son linealmente dependientes en todo punto, es decir, si existe una función escalar diferenciable μ tal que $\mathbf{N}'(t) = \mu(t)\boldsymbol{\alpha}'(t)$, para todo $t \in I$. Esto es equivalente a que $\boldsymbol{\alpha}$ sea una línea de curvatura por el Teorema de Olinde-Rodrigues (1.37). \square

Como las generatrices son líneas rectas, el plano tangente a una superficie reglada en un punto regular contiene a las generatrices que pasen por dicho punto. Por lo general, este plano varía a medida que el punto se mueve por la generatriz. Sin embargo, veamos que en las superficies desarrollables el plano se mantiene fijo, es decir, es tangente a la superficie en todos los puntos de una generatriz [10].

Proposición 2.19. *El plano tangente a una superficie desarrollable se mantiene constante a lo largo de los puntos regulares de una generatriz fijada.*

Demostración. En los puntos regulares de una superficie existe el campo unitario normal $\mathbf{N}(t, r)$. Por definición, este es ortogonal a \mathbf{x}_r , es decir, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_r \rangle = 0$. Derivando esta expresión con respecto a r obtenemos que:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_r \rangle = \langle \mathbf{N}_r, \mathbf{x}_r \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{rr} \rangle, \text{ entonces } \langle \mathbf{N}_r, \mathbf{x}_r \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{rr} \rangle.$$

Por ser superficie reglada $\mathbf{x}_{rr} = 0$, luego $\langle \mathbf{N}_r, \mathbf{x}_r \rangle = 0$. \mathbf{N} también es ortogonal a \mathbf{x}_t , por lo que derivando $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_t \rangle = 0$ con respecto a r , obtenemos $\langle \mathbf{N}_r, \mathbf{x}_t \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{tr} \rangle$ de manera análoga. Evaluemos este último producto escalar:

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{tr} \rangle = \frac{\langle \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{tr} \rangle}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\det(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{tr})}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\det(\boldsymbol{\alpha}' + r\mathbf{w}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\det(\boldsymbol{\alpha}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = 0,$$

donde en la última igualdad hemos usado el Corolario 2.15. Así, $\langle \mathbf{N}_r, \mathbf{x}_t \rangle = 0$. Hemos llegado a que \mathbf{N}_r es un vector ortogonal a la base $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_r\}$ del plano tangente a la superficie, pero \mathbf{N}_r es un vector tangente en $\mathbf{x}(t, r)$. Deducimos entonces $\mathbf{N}_r(t, r) = \mathbf{0}$. Así, $\mathbf{N}(t, r) \equiv \mathbf{N}(t)$ es constante respecto a r . Dado que una generatriz dada es dependiente solo del parámetro r , esto implica que el campo unitario normal es constante a lo largo de todos los puntos regulares de una generatriz. Equivalentemente, el plano tangente es constante en dichos puntos. \square

2.2.1. Envolvente de los planos tangentes a una superficie a lo largo de una curva

Por último, veamos un caso especial de superficies desarrollables.

Definición 2.20. Sea S una superficie regular y $\alpha(s)$ una curva parametrizada por longitud de arco contenida en S tal que nunca es tangente a una dirección asintótica. Denotando por $\mathbf{N}(s)$ al vector unitario normal a S a lo largo de $\alpha(s)$, podemos definir la siguiente superficie reglada:

$$\mathbf{x}(s, r) = \alpha(s) + r \frac{\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}'(s)}{\|\mathbf{N}'(s)\|}. \quad (2.20)$$

Esta es la **envolvente de la familia de planos tangentes a S a lo largo de la curva $\alpha(s)$** .

La superficie (2.20) nace de la siguiente consideración geométrica. Sea $\{T_{\alpha(s)}S\}$ la familia de planos tangentes a la superficie a lo largo de $\alpha(s)$. Si tomamos dos planos tangentes $T_{\alpha(s)}S$ y $T_{\alpha(s+\Delta s)}S$ lo suficientemente próximos, estos se cortarán a lo largo de una recta. La recta, al estar contenida en ambos planos tangentes, tendrá que ser perpendicular a los vectores normales $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{N}(s + \Delta s)$, luego será paralela al vector

$$\frac{\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s + \Delta s)}{\Delta s}.$$

Cuando Δs tiende a cero, la recta se aproximará a una posición límite, en la cual es paralela al vector

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s + \Delta s)}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s + \Delta s)}{\Delta s} - \frac{\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \mathbf{N}(s) \times \frac{\mathbf{N}(s + \Delta s) - \mathbf{N}(s)}{\Delta s} = \mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}'(s). \end{aligned}$$

Esta es la dirección de las generatrices de la superficie dada por (2.20), con lo cual dichas generatrices son las posiciones límite de las intersecciones de planos próximos de la familia $\{T_{\alpha(s)}S\}$.

Proposición 2.21. *Sea S una superficie regular y $\alpha(s)$ una curva parametrizada por longitud de arco contenida en S que nunca es tangente a una dirección asintótica. Entonces la envolvente de la familia de planos tangentes a la superficie a lo largo de dicha curva es una superficie desarrollable. Además, es regular en un entorno de $\alpha(s)$ y es tangente a S a lo largo de la curva.*

Demostración. Usando la caracterización de las superficies desarrollables (2.15) en la parametrización (2.20) tenemos:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \alpha') &= \det\left(\frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{\|\mathbf{N}'\|}, \left(\frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{\|\mathbf{N}'\|}\right)', \alpha'\right) = \det\left(\frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{\|\mathbf{N}'\|}, \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}''}{\|\mathbf{N}'\|}, \alpha'\right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{N}'\|^2} \langle (\mathbf{N} \times \mathbf{N}') \times (\mathbf{N} \times \mathbf{N}''), \alpha' \rangle. \end{aligned}$$

Para calcular el producto $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}') \times (\mathbf{N} \times \mathbf{N}'')$, utilizaremos la propiedad del producto vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$:

$$(\mathbf{N} \times \mathbf{N}') \times (\mathbf{N} \times \mathbf{N}'') = \mathbf{N} \langle \mathbf{N} \times \mathbf{N}', \mathbf{N}'' \rangle - \mathbf{N}'' \langle \mathbf{N} \times \mathbf{N}', \mathbf{N} \rangle = \mathbf{N} \langle \mathbf{N} \times \mathbf{N}', \mathbf{N}'' \rangle.$$

Al ser tangente a la superficie, el vector α' es perpendicular al producto vectorial anterior, pues tiene la dirección del normal a la superficie. En consecuencia, el producto escalar de estos dos vectores se anulará, por lo que el determinante anterior también lo hará. Hemos probado así que la superficie envolvente es desarrollable.

Para demostrar la regularidad de la superficie en un entorno de $\alpha(s)$ debemos comprobar que el producto vectorial $\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_r$ no se anule. Primero utilicemos el hecho de que α' y \mathbf{N} son perpendiculares para obtener una expresión necesaria. Sabemos que $\langle \alpha', \mathbf{N} \rangle = 0$, luego derivando con respecto al parámetro s obtenemos

$$\langle \alpha'', \mathbf{N} \rangle + \langle \alpha', \mathbf{N}' \rangle = 0.$$

Ahora calculemos el producto vectorial pertinente en los puntos de la curva $\alpha(s) = \mathbf{x}(s, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_r &= \alpha' \times \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{\|\mathbf{N}'\|} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}'\|} \langle \alpha', \mathbf{N}' \rangle - \frac{\mathbf{N}'}{\|\mathbf{N}'\|} \langle \alpha', \mathbf{N} \rangle = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}'\|} \langle \alpha', \mathbf{N}' \rangle \\ &= -\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}'\|} \langle \alpha'', \mathbf{N} \rangle = -\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}'\|} \kappa_n, \end{aligned}$$

siendo $\kappa_n = \kappa_n(s)$ la curvatura normal de α . Como esta curvatura nunca se anula por hipótesis, tenemos que \mathbf{x} es regular en un entorno de $\alpha(s)$. Además, la expresión anterior nos indica que el vector normal unitario a la superficie en $\alpha(s)$ es paralelo al vector normal de S , por lo que la superficie \mathbf{x} es tangente a S a lo largo de $\alpha(s)$. \square

Una propiedad del transporte paralelo es que si dos superficies S y Σ son tangentes a lo largo de una curva α cuyos puntos son regulares, entonces el transporte paralelo de un vector $\mathbf{v}_0 \in T_{\alpha(t_0)}S = T_{\alpha(t_0)}\Sigma$ a lo largo de dicha curva es el mismo si lo realizamos respecto a S o a Σ . Luego, en virtud a la proposición anterior, en vez de calcular el transporte paralelo de \mathbf{v}_0 a lo largo de α respecto a S , lo podemos hacer respecto a la envolvente de la familia de planos tangentes a S a lo largo de α , si la curva no es tangente a una dirección asintótica. Como además la envolvente Σ es una superficie desarrollable, existirá una isometría F desde Σ a una región del plano, por lo que para efectuar el transporte paralelo de \mathbf{v}_0 podemos llevar este vector al plano mediante $dF_{\alpha(t_0)}$, calcular su transporte paralelo $dF_{\alpha(t_0)}(\mathbf{v}_0)$ a lo largo de $F(\alpha)$ y traerlo de vuelta a Σ mediante dF^{-1} . Apliquemos esto para calcular el transporte paralelo a lo largo de los paralelos de una esfera.

Primero debemos hallar la envolvente Σ de los planos tangentes a la esfera a lo largo de uno de sus paralelos. Dependiendo de la latitud del paralelo, la envolvente será un cilindro o un cono. Veamos esto con la siguiente proposición.

Proposición 2.22. *Sea $C \subset \mathbb{S}^2$ un paralelo de la esfera. Entonces, si C es el ecuador, la envolvente de los planos tangentes a la esfera a lo largo de C es un cilindro, y en caso contrario, es un cono.*

Demostración. Sea $\mathbf{x}(\phi, \theta) = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta)$, con $0 < \phi < 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, una parametrización de la esfera. Sea $\mathbf{C}(\phi) = \mathbf{x}(\phi, \theta_0) = (\cos \phi \cos \theta_0, \sin \phi \cos \theta_0, \sin \theta_0)$ el paralelo de la esfera que se encuentra a una latitud θ_0 . Tal como está definida la curva, esta no está parametrizada por arco en general, pues como su derivada es $\mathbf{C}'(\phi) = (-\sin \phi \cos \theta_0, \cos \phi \cos \theta_0, 0)$, $\|\mathbf{C}'(\phi)\| = \cos \theta_0 \neq 1$ si $\theta_0 \neq 0$. Calculemos entonces la función longitud de arco de \mathbf{C} :

$$s = s(\phi) = \int_0^\phi \|\mathbf{C}'(t)\| dt = \int_0^\phi \|\cos \theta_0\| dt = \cos \theta_0 \int_0^\phi dt = \phi \cos \theta_0.$$

Por tanto, tenemos $\phi = s^{-1}(\phi) = s / \cos \theta_0$, con lo cual la reparametrización por longitud de arco de $\mathbf{C}(\phi)$ es

$$\mathbf{C}(s) = \left(\cos \frac{s}{\cos \theta_0} \cos \theta_0, \sin \frac{s}{\cos \theta_0} \cos \theta_0, \sin \theta_0 \right), \quad (2.21)$$

con $0 < s < 2\pi \cos \theta_0$.

En una esfera cualquiera, el vector de posición de un punto de esta es normal a su superficie, y como en la esfera unidad los vectores de posición son unitarios, podemos definir el siguiente campo de vectores diferenciable normal unitario: $\mathbf{N}(p) = p$, para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Se puede comprobar fácilmente que este coincide con la aplicación de Gauss asociada a la parametrización de la esfera dada. Así, el vector normal a los puntos del paralelo es $\mathbf{N}(s) \equiv \mathbf{N}(\mathbf{C}(s)) = \mathbf{C}(s)$, y en consecuencia, su derivada es $\mathbf{N}'(s) = \mathbf{C}'(s)$, que es un vector unitario por estar $\mathbf{C}(s)$ parametrizada por longitud de arco. El producto vectorial $\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}'(s)$ vendrá dado entonces por:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}'(s) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \frac{s}{\cos \theta_0} \cos \theta_0 & \sin \frac{s}{\cos \theta_0} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \frac{s}{\cos \theta_0} & \cos \frac{s}{\cos \theta_0} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(-\cos \frac{s}{\cos \theta_0} \sin \theta_0, -\sin \frac{s}{\cos \theta_0} \sin \theta_0, \cos \theta_0 \right). \end{aligned}$$

Finalmente, podemos obtener la superficie formada por la envolvente de los planos tangentes al paralelo \mathbf{C} como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s, r) &= \left(\cos \frac{s}{\cos \theta_0} \cos \theta_0, \sin \frac{s}{\cos \theta_0} \cos \theta_0, \sin \theta_0 \right) + r \left(-\cos \frac{s}{\cos \theta_0} \sin \theta_0, -\sin \frac{s}{\cos \theta_0} \sin \theta_0, \cos \theta_0 \right) \\ &= \left([\cos \theta_0 - r \sin \theta_0] \cos \frac{s}{\cos \theta_0}, [\cos \theta_0 - r \sin \theta_0] \sin \frac{s}{\cos \theta_0}, \sin \theta_0 + r \cos \theta_0 \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

con $0 < s < 2\pi \cos \theta_0$ y $r \in \mathbb{R}$. Distingamos ahora dos casos en función de la latitud θ_0 del paralelo.

Caso 1. \mathbf{C} es el ecuador, esto es, $\theta_0 = 0$. La envolvente entonces se reduce a

$$\mathbf{x}(s, r) = (\cos s, \sin s, 0) + r(0, 0, 1) = (\cos s, \sin s, r), \quad (2.23)$$

con $0 < s < 2\pi$ y $r \in \mathbb{R}$, que es la parametrización usual del cilindro recto circular de radio uno.

Caso 2. \mathcal{C} es cualquier otro paralelo distinto al ecuador, es decir, $\theta_0 \neq 0$. Para demostrar que (2.22) es un cono, veamos que todas las rectas generatrices se intersecan en un punto, es decir, en el vértice. Sean $\alpha_1(r) = \mathbf{x}(s_1, r)$ y $\alpha_2(t) = \mathbf{x}(s_2, t)$ dos rectas generatrices cualesquiera con $r, t \in \mathbb{R}$ y s_1, s_2 valores fijados distintos. Veamos cuando $\alpha_1(r) = \alpha_2(t)$. Igualando primero la tercera coordenada tenemos que

$$\sin \theta_0 + r \cos \theta_0 = \sin \theta_0 + t \cos \theta_0 \quad \text{si, y solo si, } r = t.$$

Esto nos indica que de intersecarse las generatrices, lo hacen a la misma distancia de la directriz. Igualando ahora las otras dos coordenadas, teniendo ya en cuenta la condición hallada, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\cos \theta_0 - r \sin \theta_0) \left(\cos \frac{s_1}{\cos \theta_0} - \cos \frac{s_2}{\cos \theta_0} \right) &= 0, \\ (\cos \theta_0 - r \sin \theta_0) \left(\sin \frac{s_1}{\cos \theta_0} - \sin \frac{s_2}{\cos \theta_0} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Como $s_1 \neq s_2$, los cosenos del segundo término de la primera ecuación solo podrían ser iguales si $s_1 = -s_2$, pero entonces los senos de estos ángulos tendrían signos opuestos y el segundo término de la segunda ecuación no se anularía. Consecuentemente, la única posibilidad de que este sistema se cumpla es que sea el primer término el que se anule, es decir:

$$\cos \theta_0 - r \sin \theta_0 = 0, \quad \text{equivalentemente, } r = r_0 = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \cot \theta_0.$$

Las generatrices $\alpha_1(r)$ y $\alpha_2(t)$ se cortarán en el punto $\alpha_1(r_0) = \alpha_2(r_0)$. Como el cálculo se ha obtenido para dos generatrices con valores s_1 y s_2 cualesquiera, tenemos que todas las generatrices se cortarán en ese punto. Obtenemos así el valor del vértice V del cono como:

$$\alpha(r_0) = \mathbf{x}(s, r_0) = \left(0, 0, \sin \theta_0 + \frac{\cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0} \right) = \left(0, 0, \frac{1}{\sin \theta_0} \right) = V.$$

Comprobemos que efectivamente la superficie es un cono de vértice V . La ecuación de un cono circular de radio $|R|$ alrededor del eje z y con vértice en el origen es:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = z^2.$$

Si trasladamos el vértice a $V = (0, 0, V_z)$ tenemos:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = (z - V_z)^2, \quad \text{equivalentemente } \sqrt{x^2 + y^2} = R(z - V_z).$$

Sustituyamos las coordenadas de la parametrización (2.22) y veamos si existe algún $R \in \mathbb{R}$ que cumpla la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 - r \sin \theta_0 &= R \left(\sin \theta_0 + r \cos \theta_0 - \frac{1}{\sin \theta_0} \right) = R \frac{\sin^2 \theta_0 + r \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 1}{\sin \theta_0} \\ &= R \frac{r \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0} = R \cot \theta_0 (r \sin \theta_0 - \cos \theta_0). \end{aligned}$$

Esta ecuación se cumple si, y solo si, $R = -\cot^{-1} \theta_0 = -\tan \theta_0$. Como este es un valor real, podemos confirmar que la envolvente de los planos tangentes al paralelo de latitud θ_0 no nula es un cono circular de radio $|\tan \theta_0|$ con vértice $(0, 0, \sin^{-1} \theta_0)$. \square

Ahora determinemos el transporte paralelo de un vector \mathbf{v}_0 tangente a \mathbf{C} en un punto $\mathbf{C}(s_0)$ respecto a la superficie envolvente.

Caso 1. Ya hemos visto que si \mathbf{C} es el ecuador, la envolvente Σ es el cilindro usual parametrizado por (2.23). Intuitivamente, cuando desplegamos el cilindro en el plano mediante una isometría F , la superficie obtenida será una región rectangular de igual altura que el cilindro y con una anchura igual a la longitud del ecuador, es decir, 2π . Tenemos así la superficie $F(\Sigma) = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, en la cual el ecuador \mathbf{C} se transformará en la recta $\beta = F(\mathbf{C}) = (0, 2\pi) \times \{0\} \times \{0\}$. Como las isometrías conservan los ángulos, si $\mathbf{v}_0 \in T_{\mathbf{C}(s_0)}\Sigma$ es un vector que forma un ángulo γ con el vector $\mathbf{C}'(s_0)$, el vector $\mathbf{w}_0 = dF_{\mathbf{C}(s_0)}(\mathbf{v}_0)$ formará el mismo ángulo γ con el vector $\beta'(F(s_0))$. El transporte paralelo en el plano es la identidad por lo que el transporte paralelo de \mathbf{w}_0 a lo largo de β siempre será igual a \mathbf{w}_0 , es decir, $P(\beta)_{F(s_0)}^{F(s_1)}(\mathbf{w}_0) = \mathbf{w}_0$. Pero como β es una recta, su vector velocidad mantendrá siempre la misma dirección, por lo que el transporte paralelo de \mathbf{w}_0 siempre formará un ángulo γ con β' . En consecuencia, el transporte paralelo de \mathbf{v}_0 a lo largo de \mathbf{C} será el vector de norma $\|\mathbf{v}_0\|$ que forme un ángulo γ con \mathbf{C}' . En particular, si damos una vuelta completa, el transporte paralelo de \mathbf{v}_0 será el propio \mathbf{v}_0 .

Caso 2. Si \mathbf{C} es un paralelo de la esfera de latitud $\theta_0 \neq 0$, sabemos que la envolvente Σ es el cono de vértice $V = (0, 0, 1/\sin \theta_0)$ dado por la parametrización (2.22). Sea p un punto del paralelo \mathbf{C} y D la distancia desde dicho punto al vértice V del cono. Como la distancia del origen de coordenadas a p es 1 y la altura a la que se encuentra el vértice es $1/\sin \theta_0$, obtenemos que $D = \cot \theta_0$ por el Teorema de Pitágoras. Al desplegar el cono en el plano con una isometría F , obtendremos un región U en forma de sector circular que podemos expresar en coordenadas polares (ρ, ψ) con $0 < \rho < \infty$ y $0 < \psi < \tilde{\psi}$, siendo $\tilde{\psi}$ el ángulo sostenido por el arco de circunferencia correspondiente al paralelo \mathbf{C} en el plano. Como la longitud de este arco es la misma que la del paralelo en la esfera, esto es, $2\pi \cos \theta_0$, y el radio es igual a $\cot \theta_0$, pues el vértice del cono se corresponde con el origen de coordenadas, tenemos que $\tilde{\psi} = 2\pi \sin \theta_0$, donde hemos usado que la longitud l de un arco de circunferencia de radio ρ se relaciona con el ángulo ψ sostenido mediante $l = \psi\rho$. Las relaciones que acabamos de describir se pueden observar en la Figura 2.6.

A diferencia del *Caso 1*, como la imagen de \mathbf{C} por la isometría es un arco de circunferencia, el vector velocidad a esta curva varía de dirección, por lo que la relación angular entre el transporte paralelo de un vector en el plano y dicho vector velocidad no es constante. Así, al traer de vuelta el transporte paralelo al cono por la isometría, el ángulo que forma $\mathbf{C}'(s_1)$ con el transporte paralelo

completa será un vector girado $2\pi \sin \theta_0$ en sentido horario respecto a su orientación original.

2.3. Superficies no cilíndricas: línea de estricción y parámetro de distribución.

Recordando que los cilindros se definían a partir de generatrices con el mismo vector director constante, podemos dar la siguiente definición:

Definición 2.23. Una superficie reglada es **no cilíndrica** si $\mathbf{w}'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Notemos que toda superficie reglada puede ser reparametrizada de tal manera que el vector director de las generatrices sea siempre unitario, esto es, $\tilde{\mathbf{x}}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{u}(t)$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$. Efectivamente, como $\mathbf{w}(t)$ nunca se anula, basta con considerar $\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t)/\|\mathbf{w}(t)\|$. Dada su norma, todos los puntos de la nueva curva \mathbf{u} se encontrarán en la esfera unidad, y como la velocidad de una curva es siempre tangente a ella y los vectores de posición de la esfera unidad son normales a ella, se cumple que $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = 0$. Ciertamente, podemos formalizar esta propiedad derivando $\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) \rangle = 1$, con lo que se tiene $2 \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle = 0$, de lo cual se deduce el resultado.

A partir de ahora nos limitaremos al estudio de las superficies no cilíndricas y consideraremos parametrizaciones tales que el vector director de las generatrices sea siempre unitario.

Proposición 2.24. Sea $\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{u}(t)$ una superficie no cilíndrica con $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$. Entonces existe una curva $\boldsymbol{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}$ contenida en la traza de \mathbf{x} , es decir, $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + f(t)\mathbf{u}(t)$ para alguna función real f , tal que $\langle \boldsymbol{\beta}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Esta curva se denomina **línea de estricción** de \mathbf{x} y los puntos que la forman reciben el nombre de **puntos centrales** de la superficie reglada.

Demostración. Determinemos la función $f(t)$ que permite afirmar la existencia de tal curva. Diferenciando la expresión de $\boldsymbol{\beta}(t)$ dada en el enunciado del lema se obtiene:

$$\boldsymbol{\beta}'(t) = \boldsymbol{\alpha}'(t) + f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t).$$

Multiplicando escalarmente por $\mathbf{u}'(t)$ ambos lados de la expresión tenemos:

$$\langle \boldsymbol{\beta}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle + f \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle,$$

donde hemos utilizado que $\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = 0$ por ser unitario. Para que $\langle \boldsymbol{\beta}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = 0$, la función f debe ser dada por la siguiente expresión:

$$f(t) = -\frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} = -\frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle}{\|\mathbf{u}'(t)\|^2}.$$

Como \mathbf{u}' nunca se anula por ser una superficie no cilíndrica, la función anterior está bien definida, y por lo tanto la línea de estricción existe. □

Observación 2.25. Con esta definición estamos diciendo que la línea de estricción es la curva que corta ortogonalmente a todas las generatrices de una superficie reglada no cilíndrica.

Corolario 2.26. *La línea de estricción de una superficie reglada no cilíndrica parametrizada de la forma $\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{u}(t)$, con $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, viene dada por la siguiente expresión:*

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \mathbf{u}(t). \quad (2.24)$$

Lema 2.27. *La línea de estricción de una superficie reglada no cilíndrica no depende de la elección de la curva directriz.*

Demostración. Sean $\boldsymbol{\alpha}$ y $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ dos directrices diferentes de la superficie. Así

$$\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{u}(t) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) + v(r)\mathbf{u}(t), \quad (2.25)$$

para alguna función $v(r)$. Sean $\boldsymbol{\beta}$ y $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ las correspondientes líneas de estricción dadas por el corolario anterior:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}(t) &= \boldsymbol{\alpha}(t) - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \mathbf{u}(t), \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) - \frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones tenemos

$$\boldsymbol{\beta} - \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}' - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}', \mathbf{u}' \rangle}{\langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle} \mathbf{u}.$$

Por otro lado, la ecuación (2.25) implica

$$\boldsymbol{\alpha} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (v(r) - r) \mathbf{u}.$$

Sustituyendo esto y su derivada en la expresión anterior se tiene

$$\boldsymbol{\beta} - \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \left[(v(r) - r) - \frac{\langle (v(r) - r)\mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle}{\langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle} \right] \mathbf{u} = 0.$$

□

Calculemos la línea de estricción de algunos de los ejemplos dados de superficies regladas con la expresión (2.24).

Ejemplo 2.28 (Líneas de estricción del cono, el hiperboloide de una hoja y el helicoide).

- Sea $\mathbf{x}(t, r) = p + r\mathbf{u}(t)$, con $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, un cono. Como $\boldsymbol{\alpha}(t) = p$, $\boldsymbol{\alpha}'(t) = 0$, por lo que la línea de estricción es el vértice del cono, es decir, $\boldsymbol{\beta}(t) = p$, para todo $t \in I$.
- Sea $\mathbf{x}(t, r) = (\cos t, \sin t, 0) + r(-\sin t, \cos t, 1)$ el hiperboloide de una hoja con constantes $a = b = c = 1$. Como $\|\mathbf{w}(t)\| = \sqrt{2}$, para todo $t \in I$, el vector director unitario de las generatrices será:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t) + (0, 0, 1)}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\alpha}''/\sqrt{2} = -\boldsymbol{\alpha}/\sqrt{2}$. Como $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\alpha}'$ son perpendiculares por ser $\boldsymbol{\alpha}$ unitario, $\langle \mathbf{u}', \boldsymbol{\alpha}' \rangle = 0$ y la línea de estricción es $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, es decir, es el paralelo del hiperboloide de revolución de menor radio.

- Sea $\mathbf{x}(t, r) = (0, 0, t) + r(\cos t, \sin t, 0)$ el helicoide con $a = b = 1$. En esta parametrización el vector director de las generatrices ya es unitario. Tenemos entonces que las derivadas de este vector y de la directriz son

$$\mathbf{u}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha}'(t) = (0, 0, 1),$$

que son vectores ortogonales, por lo que la línea de estricción será $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) = (0, 0, t)$, esto es, el eje z .

La siguiente proposición nos dará una interpretación geométrica de la línea de estricción.

Proposición 2.29. *Sea $\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{u}(t)$ una superficie no cilíndrica con $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ y supongamos que es regular. Sean $\mathbf{u}(t_1)$ y $\mathbf{u}(t_2)$ los vectores directores de dos rectas generatrices de \mathbf{x} y sean $\mathbf{x}(t_1, r_1)$ y $\mathbf{x}(t_2, r_2)$ los puntos en los que corta a la superficie la recta perpendicular a ambas generatrices. Entonces, cuando $t_2 \rightarrow t_1$, dichos puntos tienden al punto central $\mathbf{x}(t_1, \tilde{r})$ de la generatriz $\mathbf{R}_{t_1}(r) = \mathbf{x}(t_1, r)$.*

Demostración. La recta perpendicular común a las rectas generatrices de direcciones $\mathbf{u}(t_1)$ y $\mathbf{u}(t_2)$ tendrá como vector director $\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}(t_2)$, que será unitario si lo dividimos por su norma. Pongamos $t_1 = t$ y $t_2 = t + \Delta t$, con lo cual:

$$\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}(t_2) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) \times [\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)].$$

Tomemos ahora el límite del vector director unitario de la recta perpendicular cuando $t_2 \rightarrow t_1$, esto es, cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}(t_2)}{\|\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}(t_2)\|} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t) \times [\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)]}{\|\mathbf{u}(t) \times [\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)]\|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t) \times \left[\frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \right]}{\left\| \mathbf{u}(t) \times \left[\frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \right] \right\|} \\ &= \frac{\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}'(t_1)}{\|\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}'(t_1)\|} = \frac{\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}'(t_1)}{\|\mathbf{u}'(t_1)\|}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\langle \mathbf{u}(t_1), \mathbf{u}'(t_1) \rangle = 0$ por ser \mathbf{u} unitario. Como la superficie es no cilíndrica no hay problemas con el denominador del límite anterior.

Sean ahora $p_1 = \mathbf{x}(t_1, r_1)$ y $p_2 = \mathbf{x}(t_2, r_2)$ los puntos en los que la perpendicular común corta a las generatrices. A medida que acercamos las generatrices una a la otra, estos puntos también se van acercando, hasta obtener el punto límite $q = \mathbf{x}(t_1, \tilde{r})$, es decir, p_1 y p_2 tienden a q cuando t_2 tiende a t_1 . Como la recta perpendicular cortaba a la superficie en los puntos p_1 y p_2 , está claro que en su límite se convertirá en una recta tangente a la superficie en el punto q . Veamos en qué punto q sucede esto.

Como hemos visto que $\mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}'(t_1)$ proporciona la dirección de la recta perpendicular en el límite, el punto q vendrá dado por la condición $\langle \mathbf{u}(t_1) \times \mathbf{u}'(t_1), \mathbf{N}(\mathbf{x}(t_1, \tilde{r})) \rangle = 0$, esto es, que la recta perpendicular límite es tangente a la superficie. Calculemos entonces el vector normal unitario a la superficie en el punto límite $q = \mathbf{x}(t_1, \tilde{r})$:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}(t_1, \tilde{r})) = \frac{\mathbf{x}_t(t_1, \tilde{r}) \times \mathbf{x}_r(t_1, \tilde{r})}{\|\mathbf{x}_t(t_1, \tilde{r}) \times \mathbf{x}_r(t_1, \tilde{r})\|} = \frac{[\boldsymbol{\alpha}'(t_1) + \tilde{r}\mathbf{u}'(t_1)] \times \mathbf{u}(t_1)}{\|\mathbf{x}_t(t_1, \tilde{r}) \times \mathbf{x}_r(t_1, \tilde{r})\|} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t_1) \times \mathbf{u}(t_1) + \tilde{r}\mathbf{u}'(t_1) \times \mathbf{u}(t_1)}{\|\mathbf{x}_t(t_1, \tilde{r}) \times \mathbf{x}_r(t_1, \tilde{r})\|}$$

Usando la propiedad $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle$ y que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = 0$ por ser \mathbf{u} unitario tenemos

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{u}' \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}' \rangle \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{u}' \rangle,$$

con lo cual $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{u}', \mathbf{N} \rangle = 0$ si, y solo si,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{u} \rangle + \tilde{r} \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}, \mathbf{u}' \times \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{u} \rangle + \tilde{r} \|\mathbf{u}' \times \mathbf{u}\|^2 \\ &= \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{u} \rangle + \tilde{r} \|\mathbf{u}'\|^2, \text{ entonces } \tilde{r} = -\frac{\langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{u}' \rangle}{\|\mathbf{u}'\|^2}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$q = \boldsymbol{\alpha}(t_1) + \tilde{r}\mathbf{u}(t_1) = \boldsymbol{\alpha}(t_1) - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t_1), \mathbf{u}'(t_1) \rangle}{\|\mathbf{u}'(t_1)\|^2} \mathbf{u}(t_1).$$

Claramente $q = \boldsymbol{\beta}(t_1)$, siendo $\boldsymbol{\beta}(t)$ la línea de estricción dada por la ecuación (2.24), por lo que efectivamente es el punto central de la recta generatriz \mathbf{R}_{t_1} . \square

Observación 2.30. Este resultado nos permite interpretar la línea de estricción como el conjunto de puntos de cada generatriz que están más próximos entre sí. Efectivamente, como la superficie no es cilíndrica, las generatrices no son paralelas entre sí, por lo que en una generatriz \mathbf{R}_{t_1} existe un punto p_1 que minimiza la distancia a otra generatriz \mathbf{R}_{t_2} cualquiera. Se sabe que este punto p_1 es la intersección de la recta \mathbf{R}_{t_1} con la recta perpendicular a ambas generatrices. A medida que las rectas se acercan la distancia entre ellas se va haciendo más pequeña, teniendo así en el límite $t_2 \rightarrow t_1$ donde p_1 tiende al punto central q la distancia mínima entre las dos generatrices.

Como la línea de estricción está contenida en la superficie, podemos tomarla como directriz. Tenemos luego la siguiente parametrización de una superficie reglada no cilíndrica:

$$\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\beta}(t) + r\mathbf{u}(t), \quad (2.26)$$

con $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ y $\boldsymbol{\beta}$ su línea de estricción. Podemos notar que en una generatriz dada el parámetro r proporciona, en valor absoluto, la distancia a la que se encuentran los puntos de dicha generatriz al punto central contenido en ella.

Como $\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle = 0$, por ser un vector unitario, y $\langle \mathbf{u}', \boldsymbol{\beta}' \rangle = 0$, por definición de $\boldsymbol{\beta}$, la velocidad de \mathbf{u} debe ser proporcional al vector normal al plano generado por \mathbf{u} y $\boldsymbol{\beta}$. En consecuencia, existe alguna función $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}'$.

En realidad, esta función es única, pues si existiesen dos funciones λ_1 y λ_2 cumpliendo dicha condición, es decir, $\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}'$ y $\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{u} = \lambda_2 \mathbf{u}'$, al restar ambas expresiones obtendríamos $(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{u}' = 0$, de donde se sigue la igualdad de ambas funciones por ser la superficie no cilíndrica. Esto promueve la definición del siguiente concepto.

Definición 2.31. El **parámetro de distribución** de una superficie reglada no cilíndrica dada por la parametrización (2.26) es la única función escalar λ que cumple $\lambda(t)\mathbf{u}'(t) = \boldsymbol{\beta}'(t) \times \mathbf{u}(t)$ para todo $t \in I$.

Notemos que el parámetro de distribución es función de t , por lo que es constante a lo largo de una recta generatriz (curva r -paramétrica). Además, como la línea de estricción no dependía de la directriz escogida, el parámetro de distribución tampoco lo hará.

Proposición 2.32. El parámetro de distribución de una superficie reglada no cilíndrica viene dado por la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{\det(\boldsymbol{\beta}', \mathbf{u}, \mathbf{u}')}{\|\mathbf{u}'\|^2}. \quad (2.27)$$

Demostración. Multiplicando escalarmente por \mathbf{u}' a ambos lados de la igualdad $\lambda \mathbf{u}' = \boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{u}$ obtenemos:

$$\lambda \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = \det(\boldsymbol{\beta}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'), \text{ entonces } \lambda = \frac{\det(\boldsymbol{\beta}', \mathbf{u}, \mathbf{u}')}{\|\mathbf{u}'\|^2},$$

donde hemos podido despejar λ por ser la superficie no cilíndrica. \square

Calculemos el parámetro de distribución de las superficies consideradas en el Ejemplo 2.28.

Ejemplo 2.33 (Parámetro de distribución del cono, hiperboloide de una hoja y helicoides).

- Hemos visto que en un cono cualquiera la línea de estricción es su vértice, es decir, $\boldsymbol{\beta} = p$, por lo que $\boldsymbol{\beta}' = 0$ y en consecuencia el parámetro de distribución λ es nulo en toda la superficie.

- En el hiperboloide considerado teníamos que

$$\beta(t) = \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad \mathbf{u}(t) = \frac{\alpha'(t) + (0, 0, 1)}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}'(t) = -\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, el parámetro de distribución se calcula como:

$$\lambda = \frac{\det(\beta', \mathbf{u}, \mathbf{u}')}{\|\mathbf{u}'\|^2} = 2 \det \left(\alpha', \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) = \begin{vmatrix} -\sin t & 0 & -\cos t \\ \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

- En el helicoide considerado teníamos $\beta(t) = (0, 0, t)$ y $\mathbf{u}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, por lo que el parámetro de distribución viene dado por:

$$\lambda = \frac{\det(\beta', \mathbf{u}, \mathbf{u}')}{\|\mathbf{u}'\|^2} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

La siguiente proposición nos caracterizará la regularidad de las superficies regladas no cilíndricas.

Proposición 2.34. *Sea la superficie reglada no cilíndrica dada por (2.26). Entonces, sus únicos puntos singulares son los puntos centrales (puntos de la línea de estricción) en los que el parámetro de distribución se anula.*

Demostración. En la parametrización donde la línea de estricción es la directriz los vectores coordenados vienen dados por:

$$\mathbf{x}_t = \beta' + r\mathbf{u}' \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_r = \mathbf{u},$$

con lo cual

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r = \beta' \times \mathbf{u} + r\mathbf{u}' \times \mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}' + r\mathbf{u}' \times \mathbf{u}.$$

Los puntos singulares son aquellos para los que no podemos definir el vector unitario normal, lo que ocurre cuando $\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\| = 0$, o equivalentemente, cuando $\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|^2 = 0$. Recordando que $\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle = 0$, por ser \mathbf{u} unitario, y $\langle \beta', \mathbf{u}' \rangle = 0$, por definición de la línea de estricción, se verifica:

$$\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|^2 = \|\lambda\mathbf{u}' + r\mathbf{u}' \times \mathbf{u}\|^2 = \lambda^2\|\mathbf{u}'\|^2 + r^2\|\mathbf{u}' \times \mathbf{u}\|^2 + 2\lambda r \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \times \mathbf{u} \rangle = (\lambda^2 + r^2)\|\mathbf{u}'\|^2. \quad (2.28)$$

Como $\|\mathbf{u}'\| \neq 0$ (superficie no cilíndrica) y λ^2 y r^2 son sumandos no negativos, la norma $\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|$ se anulará si, y solo si, $\lambda = r = 0$. Concluimos entonces que los puntos $\mathbf{x}(t, r)$ serán singulares si, y solo si, en ellos el parámetro de distribución $\lambda(t)$ es nulo y $\mathbf{x}(t, r) = \beta(t)$, es decir, pertenecen a la línea de estricción. \square

Como el parámetro de distribución se conserva a lo largo de una generatriz, este solo se anulará para las generatrices cuyo punto central sea singular. Por tanto, el hiperboloide de una hoja y el helicoides del Ejemplo 2.33 son totalmente regulares, pues el parámetro de distribución nunca se anula.

Veamos ahora una interpretación geométrica del parámetro de distribución a lo largo de una generatriz totalmente regular, es decir, cuyo punto central no sea singular.

Proposición 2.35. *Si θ es el ángulo que forma el vector normal en un punto de una generatriz regular con la dirección de tal generatriz, entonces $\tan \theta$ será proporcional a la distancia entre dicho punto y el punto central de esa generatriz, siendo el factor de proporcionalidad el inverso del parámetro de distribución.*

Demostración. Sea $q = \mathbf{x}(t, r)$ en la parametrización (2.26) un punto de la generatriz. Como q es regular podemos definir el vector normal en él. Usando los resultados hallados en la demostración de la Proposición 2.34, se tiene que el vector normal a la superficie en q viene dado por

$$\mathbf{N}(q) = \frac{\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\lambda \mathbf{u}' + r \mathbf{u}' \times \mathbf{u}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2} \|\mathbf{u}'\|}.$$

Como $\mathbf{u}'(t)$ es tangente a la generatriz de dirección $\mathbf{u}(t)$, el vector anterior es la suma de un vector en la dirección de la generatriz y otro vector perpendicular a ella. Así, la tangente del ángulo θ que forma este vector normal con la generatriz viene dada por el cociente de sus módulos:

$$\tan \theta = \frac{|r| \|\mathbf{u}' \times \mathbf{u}\|}{|\lambda| \|\mathbf{u}'\|} = \frac{|r| \|\mathbf{u}'\| \|\mathbf{u}\|}{|\lambda| \|\mathbf{u}'\|} = \frac{|r|}{|\lambda|}, \quad (2.29)$$

donde hemos usado que $\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle = 0$ por ser \mathbf{u} unitario. Como la generatriz es totalmente regular, tenemos en particular que el punto central lo es, por lo que $\lambda \neq 0$ para toda la generatriz y la ecuación anterior está bien definida.

Hemos probado así el resultado, pues $|r|$ es la distancia de q al punto central de la generatriz. \square

Observación 2.36. Claramente, la proposición anterior se cumple también en el caso en que q sea el punto central de la generatriz. En este caso, el normal se reduce a

$$\mathbf{N}(q) = \frac{\lambda \mathbf{u}'}{|\lambda| \|\mathbf{u}'\|},$$

que tiene la misma dirección que la generatriz. Por tanto, $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (según sea el signo de λ), cumpliéndose así la relación (2.29), pues $r = 0$ en el punto central.

Proposición 2.37. *En los puntos regulares de una superficie reglada no cilíndrica la curvatura de Gauss viene dada por el parámetro de distribución según*

$$K(t, r) = \frac{-\lambda(t)^2}{(\lambda(t)^2 + r^2)^2} \quad (2.30)$$

Demostración. En la parametrización (2.26) tenemos:

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\beta}' + r\mathbf{u}', \quad \mathbf{x}_r = \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_{tr} = \mathbf{u}',$$

por lo que en los puntos regulares de la superficie el coeficiente L_{12} de la segunda forma fundamental se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \langle \mathbf{x}_{tr}, \mathbf{N} \rangle = \frac{\langle \mathbf{x}_{tr}, \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r \rangle}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\det(\mathbf{x}_{tr}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_r)}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\det(\mathbf{u}', \boldsymbol{\beta}' + r\mathbf{u}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\det(\mathbf{u}', \boldsymbol{\beta}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} \\ &= \frac{\det(\boldsymbol{\beta}', \mathbf{u}, \mathbf{u}')}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|} = \frac{\lambda \|\mathbf{u}'\|^2}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|}. \end{aligned}$$

Utilizando resultados hallados en las demostraciones de las Proposiciones 2.13 y 2.34 y el Lema 1.17, tenemos que la curvatura de Gauss en un punto regular viene dada por:

$$K = \frac{-L_{12}^2}{\det(g_{ij})} = \frac{-\lambda^2 \|\mathbf{u}'\|^4}{\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_r\|^4} = \frac{-\lambda^2 \|\mathbf{u}'\|^4}{(\lambda^2 + r^2)^2 \|\mathbf{u}'\|^4} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + r^2)^2}. \quad (2.31)$$

□

Corolario 2.38. *En los puntos regulares de una superficie reglada no cilíndrica con parámetro de distribución $\lambda(t)$ la curvatura de Gauss $K(t, r)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *A lo largo de una generatriz $\mathbf{R}_{t_0}(r) = \mathbf{x}(t_0, r)$, la curvatura de Gauss tiende a cero cuando r tiende a infinito.*
2. *$K(t, r) = 0$ si, y solo si, $\lambda(t) = 0$.*
3. *Si $\lambda(t_0)$ no se anula a lo largo de una generatriz $\mathbf{R}_{t_0}(r)$, entonces $K(r)$ es continua y su valor absoluto alcanza su máximo valor $\frac{1}{\lambda(t_0)^2}$ en $r = 0$.*

Dado que el parámetro de distribución es constante a lo largo de una generatriz, la proposición anterior nos indica que la curvatura de Gauss en un punto de la generatriz solo depende de la distancia $|r|$ a la que se encuentre dicho punto del punto central. Consecuentemente, en los puntos de una generatriz simétricos respecto al punto central, es decir, situados a la misma distancia, K tomará el mismo valor, explicando así el calificativo central. En dicho punto central la curvatura tomará su valor máximo (en valor absoluto) si es un punto regular e irá aproximándose cada vez más a cero a medida que nos separamos de él. Además, K solo será constante, concretamente nula, a lo largo de las generatrices que corten a la línea de estricción en un punto singular, único punto de la generatriz donde K no estará definida.

Corolario 2.39. *Sea S una superficie reglada no cilíndrica de la forma (2.26). Son equivalentes:*

1. *S es una superficie desarrollable.*

2. El parámetro de distribución λ es nulo en todo punto de S .

3. Todos los puntos centrales son singulares.

Demostración. Por definición, S es una superficie desarrollable si, y solo si, su curvatura de Gauss se anula en todo punto. Por la ecuación (2.30) esto es equivalente a que λ se anule en todo punto. En particular, λ se anula en toda la línea de estricción, lo que implica por la Proposición 2.34 que todos sus puntos son singulares. Por otro lado, si todos los puntos centrales son singulares, tenemos por la misma proposición, que el parámetro de distribución se anula sobre la línea de estricción $\beta(t)$. Luego, se anula en el resto de puntos de la superficie dado que $\lambda(t)$ se mantiene constante a lo largo de una generatriz. \square

Podemos clasificar las superficies desarrollables mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.40. *Sea $\mathbf{x}(t, r) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r\mathbf{u}(t)$, con $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, la parametrización de una superficie S desarrollable. Entonces,*

1. si $\mathbf{u}'(t) \equiv 0$, S es un cilindro (generalizado) o un plano,
2. si $\boldsymbol{\alpha}'(t) \equiv 0$, S es un cono (generalizado) o un plano, y
3. si \mathbf{u}' y $\boldsymbol{\alpha}'$ nunca se anulan, S es la superficie tangente a su línea de estricción.

Demostración. La demostración de 1 y 2 es trivial, pues las hipótesis implican que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ es un vector constante y $\boldsymbol{\alpha}(t) = p$ es un punto, respectivamente, por lo que, si $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathbf{u} no son coplanarios, se cumplen las definiciones de cilindro y de cono dadas por (2.3) y (2.4). En caso de ser las curvas coplanarias, ambas condiciones implicarían que la superficie se trata de un plano.

Demostremos el tercer caso. Dado que $\mathbf{u}'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, la línea de estricción $\beta(t)$ de la superficie existe, por lo que podemos reparametrizar S mediante $\mathbf{x}(t, r) = \beta(t) + r\mathbf{u}(t)$. Por definición de línea de estricción tenemos que $\langle \beta', \mathbf{u}' \rangle = 0$, con lo cual las velocidades de ambas curvas son linealmente independientes. Además, por definición de superficie desarrollable, $K \equiv 0$, por lo que la Proposición 2.37 implica que el parámetro de distribución λ se anula en todo punto regular de la superficie. En consecuencia, $\det(\beta', \mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0$. Como ninguno de los vectores del determinante se anula idénticamente y β' y \mathbf{u}' son linealmente independientes, el determinante anterior solo se puede anular si \mathbf{u} es dependiente de β' o de \mathbf{u}' (o de ambos). Sin embargo, $\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle = 0$ por ser \mathbf{u} un vector unitario, con lo cual concluimos que $\mathbf{u} = \mu\beta'$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$. La superficie S entonces está dada por $\mathbf{x}(t, \tilde{r}) = \beta(t) + \tilde{r}\beta'(t)$, con $\tilde{r} = \mu r$, que es la parametrización de la superficie tangente a la curva $\beta(t)$. \square

2.3. Superficies no cilíndricas: línea de estricción y parámetro de distribución. 35

Observación 2.41. Este teorema no incluye todas las posibilidades de superficies desarrollables. Si existen puntos de acumulación de ceros en alguna de las curvas α o u , el estudio de la superficie se vuelve más complejo. De todas formas, lejos de los puntos de acumulación, toda superficie desarrollable es la unión de trozos de planos, cilindros, conos o superficies tangentes, pues la superficie se puede subdividir en pequeñas porciones en las cuales se cumple alguna de las tres condiciones anteriores.

Capítulo 3

Superficies regladas en la arquitectura

Desde los inicios de la arquitectura, las superficies regladas han estado presentes en ella. El plano, el cilindro y el cono son formas elementales que solo requieren la utilización de una regla y un compás para ser diseñadas y que pueden ser encontradas en diversas construcciones a lo largo de la historia y de las diferentes culturas. El plano es la base principal de la construcción; los suelos, las paredes y las cubiertas de la mayor parte de edificaciones suelen ser creados a partir de superficies planas. A los cilindros los podemos encontrar principalmente en las columnas, usadas frecuentemente como soporte ya en la Antigüedad por los egipcios, los griegos o los romanos; o en las torres, elemento muy común en las murallas y castillos de la Edad Media con una función militar, o usadas también en edificios religiosos como los minaretes de las mezquitas musulmanas. También existen torres cilíndricas aisladas como la famosa Torre de Pisa. Habitualmente los conos eran utilizados en los tejados de edificaciones cilíndricas, como en las torres y los minaretes mencionados anteriormente o en casas de planta circular, como se pueden hallar, por ejemplo, en los castros de los celtas tan comunes en Galicia. Asimismo, los conos podían ser en sí mismos una estructura aislada, tal y como muestran los tipis de los indígenas americanos.

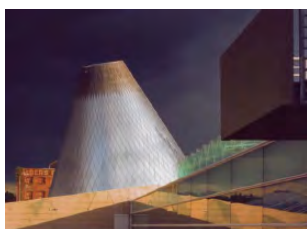
No obstante, para encontrar estructuras arquitectónicas formadas mediante superficies regladas más complejas, como el hiperboloide de una hoja o el paraboloides hiperbólico, hay que esperar hasta el siglo XIX a que Vladímir Shújov y Antoni Gaudí las introduzcan en sus obras [21]. El primero fue un ingeniero ruso que, gracias a su gran habilidad con las matemáticas, vio el hiperboloide de revolución como solución a su búsqueda para minimizar los materiales y la carga de trabajo en la construcción de tejados más eficientes. Utilizando simplemente barras de hierro creó en 1896 el primer tejado hiperbólico para los pabellones de una exposición rusa de artesanía. También utilizó este método y esta forma geométrica para el desarrollo eficiente de torres que presentaban una gran carga en su cima, como son las torres de agua, y diseñó más de 200 de este tipo de torres desde entonces [11]. Mientras, Gaudí fue un reconocido arquitecto

catalán que durante la misma época empleó el hiperboloide de una hoja en algunas de sus obras como el Palacio Güell o la Sagrada Familia. Inspirado por la naturaleza, utilizó esta y otras superficies regladas, como el helicoides, el conoide y el paraboloides hiperbólico, para innovar los diseños arquitectónicos pero atendiendo siempre a la practicidad de las estructuras [4].

Desde entonces, una gran cantidad de autores modernos han usado las superficies regladas en sus construcciones. Encontramos así el uso del cilindro generalizado en el IKMZ en Cottbus, diseñado por Herzog & de Meuron, y en la obra Triad en Hodaka de Fumihiko Maki; un cono oblicuo en el Museo del Vidrio en Tacoma, creado por Arthur Erickson; hiperboloides de una hoja en la Catedral de Brasilia, diseñada por Oscar Niemeyer, y en la Torre del Puerto de Kobe, obra del estudio Nikken Sekkei; el conoide en la cubierta del Museo de Arte y Técnica Japonesa en Cracovia, por el arquitecto Arata Isozaki; y el paraboloides hiperbólico en el techo del Pengrowth Saddledome en Calgary, del estudio de arquitectos Graham McCourt [20].



(a) IKMZ.



(b) Museo del Vidrio.



(c) Catedral de Brasilia.



(d) Torre del Puerto de Kobe.



(e) Triad.



(f) Museo de Arte y Técnica Japonesa.



(g) Pengrowth Saddledome.

Figura 3.1: Ejemplos de superficies regladas en la arquitectura moderna y contemporánea. Imágenes recuperadas de [20].

Una de las grandes ventajas de este tipo de superficies es la sencillez de construcción. Su carácter reglado permite que sean elaboradas simplemente a partir de barras de metal o la creación de un encofrado para su posterior recubrimiento por hormigón. En el caso de las superficies desarrollables, el hecho de que sean localmente isométricas al plano posibilita la modelización en papel de originales superficies y su construcción a partir de la deformación de planchas de materiales fácilmente maleables. Por otro lado, las superficies no desarrollables son altamente resistentes, pues su doble curvatura evita que desarrollen esfuerzos de flexión. En consecuencia, su espesor puede ser reducido al mínimo, lo que conlleva una disminución en los costes, haciéndolas

así aptas para cubrir grandes espacios con poco material [12].

A continuación, nos centraremos en el estudio de una serie de arquitectos en cuyas obras las superficies regladas han tenido un gran papel. Empezaremos por Gaudí, uno de los precursores en este ámbito; seguiremos con Félix Candela, el mayor exponente del paraboloides hiperbólico; luego con Santiago Calatrava, el cual utilizó las superficies regladas para la creación de estructuras plegables; y por último, describiremos las obras de Frank Gehry, que nos permitirán admirar intrincadas superficies desarrollables.

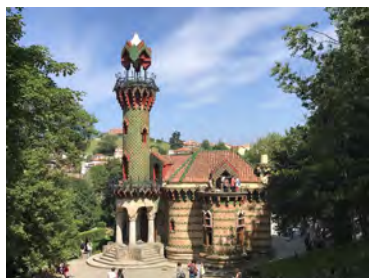
3.1. Antoni Gaudí

Uno de los arquitectos más influyentes en la renovación de la arquitectura europea de siglo XIX [14], y concretamente, uno de los representantes del modernismo catalán, fue Antoni Gaudí. Nació en Reus, Tarragona en 1852 en el seno de una familia humilde sin ningún antepasado involucrado en el mundo arquitectónico. Debido a una enfermedad reumática, ocupaba gran parte de su tiempo observando la naturaleza que lo rodeaba, percatándose así de las formas y estructuras presentes en ella, lo que reflejará posteriormente en su obra [3].

Desde sus inicios, la arquitectura se ha basado en el uso de la escuadra y el compás, instrumentos con los cuales se podían dibujar rectas y circunferencias. Estos permitían entonces el trazado de volúmenes simples, como son los prismas, cubos, pirámides, cilindros o esferas, que se usaban para la construcción de pilares, columnas y cúpulas, entre otros. Sin embargo, rara vez Gaudí observaba ejemplos en la naturaleza con este tipo de geometría. En cambio, se encontraba con la composición fibrosa de las plantas o de los tendones y huesos del cuerpo humano, adquiriendo estas formas como el conoide (las hojas de un árbol), el paraboloides hiperbólico (los tendones entre los dedos de una mano) o el hiperboloides de una hoja (el fémur). También le llamó la atención el crecimiento circular que siguen algunas plantas, que da lugar a la formación de helicoides, como en los troncos de los eucaliptos o las plantas trepadoras. Gaudí entendía que la formación natural de estas bellas estructuras era puramente una cuestión de funcionalidad, por lo que concluyó que debía adoptar él también estas formas en sus edificaciones, hecho que pudo realizar con bastante facilidad dada la sencillez de la construcción de las superficies regladas [4].

Durante su juventud se estaba produciendo en Europa una mezcla del estilo neogótico y del exotismo, lo que derivaría en el modernismo. Así, en sus inicios Gaudí exploró el exotismo, inspirándose principalmente en la arquitectura de la India, Japón y Persia. Durante esta época todavía no se basa en la naturaleza para la construcción de sus obras. No obstante, aún se pueden encontrar superficies regladas sencillas en ellas como la torre cilíndrica, similar a un alminar de Isphahan, de la casa El Capricho (1883-1885) [4], o la forma cónica de las chimeneas y de la cúpula colocada sobre el salón del Palacio Güell (1886-1888). También se pueden encontrar

superficies regladas no tan triviales en esta última obra, como en los capiteles hiperboloidales de las columnas de la sala situada en el centro de la fachada o la colocación de las vigas de hierro en forma de paraboloides hiperbólicos en las habitaciones de servicio de la tercera planta [3].



(a) El Capricho. Recuperado de [39].



(b) Azotea del Palacio Güell. Recuperado de [38].



(c) Palacio de Astorga. Recuperado de [36].

Figura 3.2

Gaudí también aprendió del neogoticismo que estaba surgiendo durante esa época, pues pensaba que los autores renacentistas eran solo simples decoradores, mientras que el estilo gótico era el más estructural de todos [4]. En esta línea realizó proyectos como el palacio episcopal de Astorga (1887-1893) o La Casa de los Botines (1891-1892), en los cuales solo podemos encontrar torres cilíndricas coronadas por capiteles cónicos [3].

Posteriormente, ya comienza su etapa naturalista, en la cual abandona el método tradicional del trazado en un plano para idear sus proyectos y comienza a realizar maquetas tridimensionales que le permitan practicar las diferentes estructuras que encontraba en la naturaleza. En esta época destaca el Parc Güell (1900-1914), que inicialmente era un proyecto que pretendía la creación de una urbanización privada siguiendo las ciudades jardín inglesas, pero que acabó convirtiéndose en un parque público. Los pabellones de la entrada del recinto están compuestos por diferentes formas geométricas, entre las que encontramos el paraboloides hiperbólico en sus cubiertas y el hiperboloides de una hoja en la torre del pabellón de servicios. También tiene forma de hiperboloides la columna central de una gruta cercana a estos pabellones, que servía para almacenar carruajes. Por otro lado, se pueden hallar columnas helicoidales en los pilares que cubren la rampa del final del pórtico posterior a la casa Güell, rampa que también presenta forma helicoidal [3]. También realizó las casas Batlló (1904-1906) y Milà (1906-1912), en las cuales se encuentran formas helicoidales en las escaleras o en las coronaciones de las chimeneas. En las escaleras esta forma aportaba estabilidad, mientras que en las chimeneas facilitaba la salida del humo, pues es la trayectoria natural que Gaudí había observado que seguía en su ascensión [4]. Por último, gracias a su percepción de la naturaleza, Gaudí se convierte en un pionero, pues en el porche frente a la entrada a la cripta de la Colonia Güell (1908-1918) construyó las primeras



(a) Pabellón de servicios del Parc Güell. Recuperado de [28].



(b) Pórtico de la Colonia Güell. Recuperado de [35].

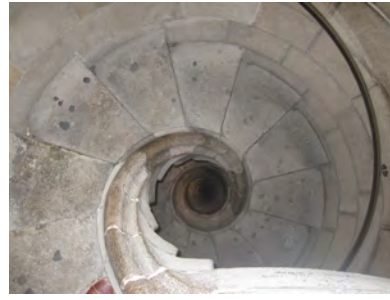
Figura 3.3

bóvedas con forma de paraboloides hiperbólicos de la historia [4].

El estilo definitivo de Gaudí, con el desarrollo de la geometría reglada, se da en las obras de la Sagrada Familia, edificio al cual dedicó sus últimos años de vida y que sigue actualmente en construcción. La depuración máxima de las formas geométricas que utilizó en el diseño de esta obra, se debe a dos proyectos que nunca se llegaron a construir: un edificio para las Misiones Católicas Franciscanas en Tánger y un hotel para Nueva York [4]. El primer ejemplo de superficies regladas de esta construcción lo encontramos en las Escuelas Parroquiales de la Sagrada Familia (1909). Este era un pequeño edificio con una cubierta diseñada mediante la intersección de dos conoides de plano director, tipo de superficie reglada. Esta superficie ondulada estaba formada por ladrillos que se apoyaban en tablonces de madera que se comportaban como las generatrices del conoide. Frente a un techo plano, esta forma permitía un ahorro de materiales, la supresión de sensaciones depresivas y mejoraba la estética [3]. No obstante, en el Templo de la Sagrada Familia es donde Gaudí alcanza la mayor depuración geométrica [4]. En la fachada orientada hacia el este, dedicada al Nacimiento de Jesús, presenta cuatro campanarios de planta cuadrada que toman una forma cilíndrica a partir de la cuarta parte de su altura. Dicha fachada tiene tres puertas de acceso, estando la entrada central separada de las laterales por dos columnas helicoidales, y sobre ella se encuentran cuatro torres de perfil parabólico con una escalera también helicoidal. En la fachada opuesta, la de la Pasión o la Muerte, existen otras tres entradas, las cuales tienen un pórtico de cinco arcos sujetos por columnas inclinadas que rematan en paraboloides hiperbólicos [3]. En general, la estructura del templo se basa en columnas helicoidales inclinadas que en su parte superior se ramifican para sostener bóvedas de paraboloides hiperbólicos, similares a las ya construidas en el pórtico de la Colonia Güell. En cuanto a los hiperboloides de una hoja, Gaudí los asociaba a la luz, por lo que los utilizó para diseñar ventanales como, por ejemplo, el ventanal de la nave central del templo [4].



(a) Escuelas Provisionales de la Sagrada Familia. Recuperado de [31].



(b) Escalera en el interior de la Sagrada Familia. Recuperado de [25].



(c) Ventanales en la bóveda de la Sagrada Familia. Recuperado de [34].

Figura 3.4

3.2. Félix Candela

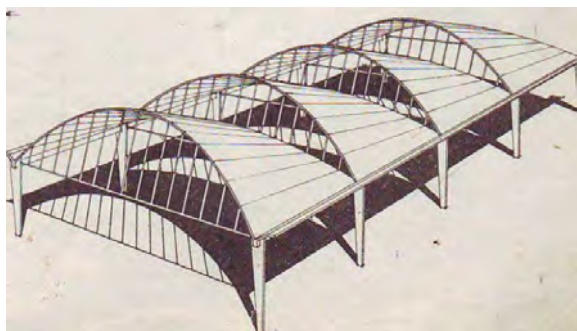
Aunque no fue el primero ni el único arquitecto en usar los cascarones o cubiertas de hormigón armado, la gran cantidad y variedad de este tipo de estructuras que construyó Félix Candela Outeriño durante su exilio en México lo convirtieron en un referente internacional en el uso de estructuras laminares de hormigón, especialmente, aquellas con forma de paraboloides hiperbólicos, también denominado *hypar*.

Nacido en Madrid en 1910, Candela comenzó a interesarse durante sus estudios arquitectónicos por las estructuras laminares que se llevaban construyendo en Europa desde los años veinte, como utilizaban Freyssinet en Francia, Dischinger en Alemania y Torroja en España. Tras la Guerra Civil, en la cual se unió al bando republicano, Candela tuvo que exiliarse en México, donde iniciaría su actividad como arquitecto [7].

En 1949 construyó su primer cascarón experimental, la bóveda funicular, un tipo de estructura que emplearía en una escuela rural en Tamaulipas en 1951. Esta bóveda es un cilindro con una catenaria como directriz que no precisaba la adición de refuerzos, dado que solamente presentaba

esfuerzos compresivos. Tras el éxito que tuvo con la bóveda experimental, decidió dedicarse a la construcción de cascarones y fundó la empresa *Cubiertas de Ala* con su amigo Fernando Fernández. Su primer proyecto en esta empresa fue una bóveda conoidal en el terreno de la fábrica de Fernández, cuyas dimensiones eran de 15×6 m y un espesor de solo 3 cm. Al igual que en la bóveda funicular, la directriz de esta superficie era una catenaria, que era el arco central, mientras que las otras dos costillas presentaban una curvatura diferente, proporcionándole así su forma alabeada [12].

Diseñó algunos cascarones cilíndricos más, hasta que fue encargado para la construcción del Pabellón de Rayos Cósmicos. La edificación de este laboratorio requería una cubierta de un espesor inferior a los 15 mm, para permitir así que los rayos cósmicos la atravesasen. Para darle rigidez a una bóveda de tal grosor, propuso utilizar una superficie de doble curvatura, llevándolo así a la construcción de su primera cubierta con forma de *hypar*. Esta obra lo impulsó a la fama y dio comienzo a una construcción primordialmente basada en los paraboloides hiperbólicos [7].



(a) Fábrica Fernández. Recuperado de [12].

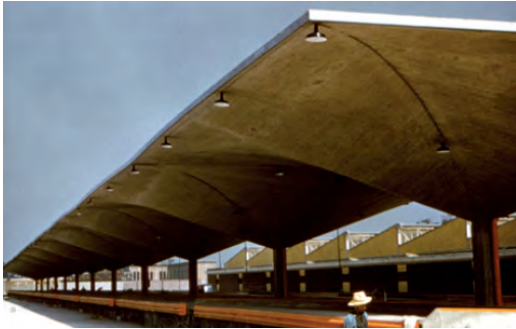


(b) Pabellón de Rayos Cósmicos. Recuperado de [8].

Figura 3.5

Los cascarones más simples de este tipo tenían forma de paraguas, con cuatro segmentos de *hypar* sostenidos por un apoyo central vertical [7], adquiriendo así una forma similar a la de una lámina rectangular con una depresión central. Estos se utilizaron en obras como el almacén de Río, el mercado de abasto Jamaica, la fábrica El León (donde se unieron dos mitades de paraguas), etc. En el techo de La Medalla Milagrosa, utilizó también una sucesión de paraguas, pero siendo ahora comparable a una lámina rectangular con las esquinas caídas. Esta necesitó un análisis de esfuerzos un poco más complejo, dada su gran inclinación [12].

Con la bóveda de la Bolsa de Valores, formada por la intersección de dos paraboloides, añadió el estudio de los efectos de bordes curvos en el comportamiento de esfuerzos, y en la Capilla del Altillio construyó el primer *hypar* con eje z oblicuo. Por último, con el restaurante Los Manantiales



(a) Mercado de Jamaica. Recuperado de [8].



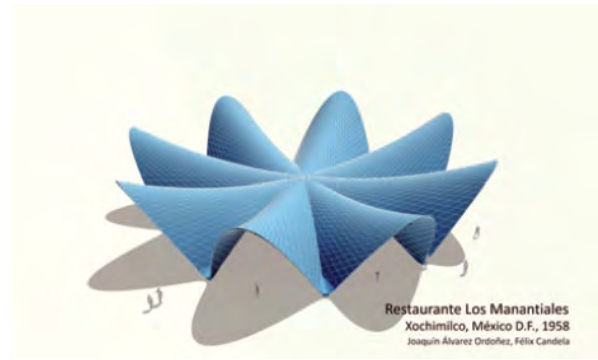
(b) Iglesia de la Virgen de la Medalla Milagrosa. Recuperado de [8].

Figura 3.6

y el cabaret de Jacaranda, formados por la intersección de cuatro y tres *hypars* en forma de silla de montar, respectivamente, inició las estructuras de borde libre, que se sostenían por su propio peso gracias a su simetría, que resultaba en la anulación de los esfuerzos normales al borde [12]. Estos son solo algunos ejemplos de las múltiples edificaciones en las que Candela usó este tipo de geometría.



(a) Capilla del Altílo. Recuperado de [8].



(b) Restaurante Los Manantiales. Recuperado de [8].

Figura 3.7

La razón principal por la que Candela pudo construir todos estos proyectos fue el bajo coste que suponía. La doble curvatura permitía realizar cubiertas muy delgadas, necesitando así una menor cantidad de hormigón, y su carácter reglado favorecía el uso de tablas de madera en los encofrados. El único inconveniente era la gran cantidad de obreros que se necesitaban. Hasta 1964 esto no suponía un problema, pues la mano de obra era bastante barata, pero con el cambio de presidente en México se implantó un salario mínimo, incrementando así los costes. Esto llevó

a Candela a cambiar el hormigón por una estructura metálica en el Palacio de los Deportes para las olimpiadas, una de sus obras más emblemática consistente en un cúpula esférica con un cerramiento formado por la combinación de paraboloides hipérbolicos, geometría que bien conocía [5]. La última obra que realizó antes de fallecer fue la cubierta del Oceanogràfic de Valencia [8], que tiene la misma forma que su anterior obra Los Manantiales.



Figura 3.8: Palacio de los Deportes. Recuperado de [8].

3.3. Santiago Calatrava

Santiago Calatrava Valls nació en Benimamet, Valencia, en 1951. Ya desde muy pequeño presentó interés por el diseño, lo que lo llevó a inscribirse en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia. Durante su etapa estudiantil le cautivó la obra de Le Corbusier, concretamente, la Capilla de Notre-Dame du Haute, por lo que se dedicó al estudio de sus formas. Para ampliar sus conocimientos, estudió también una ingeniería civil y comenzó una tesis doctoral titulada *Sobre la plegabilidad de estructuras espaciales*. Tal como indica su nombre, el objetivo de dicha tesis era estudiar estructuras articuladas que pudiesen moverse, permitiendo así que pudiesen extenderse sobre un plano, abrirse, cerrarse, formar cúpulas, etc [24]. Este fue el punto de partida para sus obras, en las que implementará este tipo de estructuras plegables.

Entre los primeros proyectos que le fueron encargados, la marquesina era un elemento recurrente. Este era un tema que fascinaba a Calatrava, pues le permitía crear estructuras semejantes a las alas de un pájaro. Un caso es la marquesina situada a la entrada del Instituto Wohlen de enseñanza media (1983-1988), en Suiza. Esta está formada por un arco tubular de acero al que se acoplan los soportes rectilíneos que sostienen los cristales que constituyen las superficies en forma de alas. Estas superficies acristaladas surgen como secciones de dos conos intersecados, estructura que repetirá Calatrava varias veces en el futuro. Por ejemplo, para definir la cubierta del Auditorio de Tenerife (1991-2003), Calatrava utilizó esta intersección de dos fragmentos de cono, ahora de hormigón, para semejar la forma de una ola rompiendo, que primero se eleva 58m

sobre la base del edificio y luego se curva hacia abajo terminando en un pico [24].



(a) Marquesina del Instituto Wohlen. Recuperado de [41].

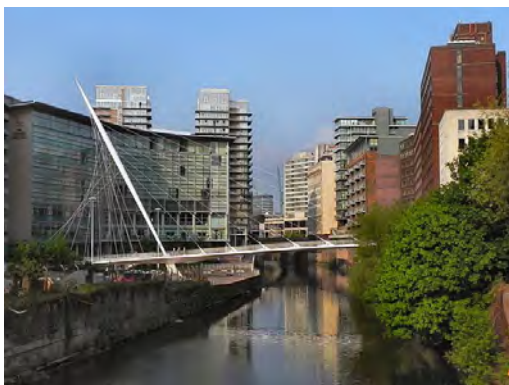


(b) Auditorio de Tenerife. Recuperado de [29].

Figura 3.9

El puente peatonal Trinity (1993-1995) fue el primer cruce que permitía a los peatones desplazarse de Salford a Manchester. Este está formado por tres elementos estructurales: un largo pilar inclinado, el tablero y los tensores que conectan los elementos anteriores. Estos tensores están dispuestos de tal manera que forman un paraboloides hiperbólico, lo que puede convertirlo en un homenaje a Gaudí, arquitecto que Calatrava admiraba y que pensaba que la constitución triádica de dicha superficie simbolizaba la Santísima Trinidad [24].

La Torre de Control del aeropuerto de Bilbao (1994-1999) fue un proyecto encargado a Calatrava dentro del plan de modernización de dicho aeropuerto. Esta consta de tres partes: la base, el fuste y el fanal. El fuste presenta un revestimiento exterior de láminas de aluminio con una forma determinada por un cono y dos planos. Su estructura está completada por el fanal de forma cónica, que está envuelto por un collar de acero también con forma de cono [22].



(a) Puente peatonal Trinity. Recuperado de [27].



(b) Torre de Control del aeropuerto de Bilbao. Recuperado de [37].

Figura 3.10

Para el Museo de Arte de Milwaukee (1994-2001), Calatrava diseñó un *brise-soleil* (parasol) plegable, de tal forma que al abrirse y cerrarse las dos estructuras simétricas que la forman simulan las alas de una gaviota. Cada una de las alas es una superficie reglada pues está formada por 36 placas de acero con longitudes variables en el rango de 8 a 32 m. Como cada una de las placas se une a la espina central rotatoria en un ángulo diferente, la forma que adquieren las alas es mutable. En posición de cierre toman una forma cónica, mientras que abiertas forman una superficie similar a un paraboloides [24].



(a) Museo de Arte de Milwaukee (parasol cerrado).



(b) Museo de Arte de Milwaukee (parasol abierto).

Figura 3.11: Recuperado de [32].

En el complejo de Bodegas Ysios (1998-2001), en Laguardia, la cubierta del edificio está constituida por una serie de vigas de madera con un revestimiento de aluminio que están dispuestas de manera que simulen el perfil de una ola. Crean así una superficie reglada en forma de conoide sinusoidal, similar a la cubierta que utilizó Gaudí en las Escuelas de la Sagrada Familia. Esta forma sinusoidal también la utilizó para crear el Muro de las Naciones del Complejo deportivo olímpico de Atenas (2001-2004), que es una enorme escultura compuesta por tubos de acero que se pueden girar para aparentar un movimiento ondulatorio [24].



(a) Bodegas Ysios. Recuperado de [30].



(b) Muro de las Naciones. Recuperado de [33].

Figura 3.12

Estos son solo algunos de los ejemplos de superficies regladas que encontramos en las obras de Calatrava y que podemos describir de manera sencilla. La mayor parte de sus edificaciones presentan estructuras elaboradas mediante barras de acero, por lo que podemos hallar una variedad mayor de superficies regladas.

3.4. Frank Gehry

Frank Goldberg Caplanski, o mejor conocido como Frank Gehry, nació en Toronto, Canadá en 1929. Su arquitectura se caracteriza por la originalidad de sus estructuras, que transgreden las reglas convencionales de la construcción y está llena de referencias a la pintura y la escultura, por lo que ha sido frecuentemente denominado como un artista más que un arquitecto. Aún así Gehry insiste en que es un arquitecto, pues su objetivo sigue siendo cumplir los requerimientos de un proyecto en relación a la forma y el espacio, conceptos vitales en cualquier obra arquitectónica [2].

Para llegar a las complejas estructuras de sus recientes trabajos, Gehry fue incrementando su ambición en las formas geométricas desde un inicio con figuras convencionales. Sus primeros trabajos comenzaron con la innovación del uso de las superficies planas. Mientras en las edificaciones tradicionales, los planos se disponen de manera ortogonal, esto es, paredes verticales frente a suelos horizontales, Gehry demuestra que tanto los materiales como las construcciones convencionales permiten crear originales estructuras [23]. Para ello juega con la inclinación de los planos y elimina los revestimientos dejando a la vista el entramado ligero de las estructuras [6], como hace en la renovación de su propia casa en California, construcción con la que quería simular cajas caídas del cielo [13].



(a) Casa de Frank Gehry. Recuperado de [26].



(b) Pabellón de Invitados de la Casa Winton. Recuperado de [20].

Figura 3.13

Posteriormente, trabajó con volúmenes sencillos para crear relaciones complejas. Estos volúmenes se encontraban separados entre sí, pero mediante telas metálicas, arcadas y otros elementos visuales eran unidos para dar la sensación de una estructura conjunta [2]. Por ejemplo, el Pabellón de Invitados de la Casa Winton, está formado por un conjunto de cubos y prismas situados alrededor de un volumen central piramidal. Además, utiliza fragmentos de cilindros de revolución para formar el tejado y una de las paredes de la habitación con formas curvilíneas y también emplea un cilindro como columna para sujetar el volumen que hay sobre la cocina [20].

Para avanzar en la complejidad y en la innovación de las formas, Gehry se centra en las llamadas superficies de papel. Estas son las que se pueden construir mediante la deformación de láminas planas de materiales flexibles. Este tipo de superficies siguen siendo predominantes en sus actuales obras. Dentro de esta clasificación de superficies podemos incluir las superficies desarrollables, pues se pueden desenvolver en el plano, como ya hemos estudiado. El ejemplo representativo de la construcción con superficies desarrollables es el edificio Peter B. Lewis de la Escuela de Negocios Weatherhead, en el cual el principal método de construcción fue el aprovechamiento del carácter reglado de dichas superficies. Para construir la mayor parte de las superficies curvadas de hormigón se utilizaron estructuras de madera contrachapada según las generatrices indicadas por el modelo en CATIA, un programa informático de diseño. Pero según avanzaba el proyecto, se empezaron a utilizar plantillas de madera con formas que siguiesen la estructura deseada para construir el encofrado de hormigón. Como recubrimiento se usaron tubos rectos de acero en la dirección de las generatrices junto con láminas de acero galvanizado superpuestas [23].



(a) Edificio Peter B. Lewis. Recuperado de [40].



(b) Sala de Conciertos Walt Disney. Recuperado de [20].

Figura 3.14

Otros proyectos destacables en los que utiliza superficies regladas y desarrollables o aproximaciones a estas son la Sala de Conciertos Walt Disney, en la que utiliza un conjunto de superficies provenientes de cilindros y cilindroides [16]; el Museo Guggenheim de Bilbao, cuyos diseños ini-

ciales se elaboraron mediante el plegamiento de hojas de papel y luego se modelaron mediante ordenador con superficies desarrollables o deformaciones de ellas, o el Museo de Arte Weissman, en el que combina formas cónicas, cúbicas y cilíndricas [23].



(a) Museo Guggenheim. Recuperado de [20].



(b) Museo de Arte Weissman. Recuperado de [23].

Figura 3.15

Para finalizar, cabe comentar que estos son solo algunos de los tantos ejemplos de superficies regladas que se pueden encontrar en la arquitectura. Aunque existen muchos otros profesionales que utilicen las propiedades de estas superficies en la construcción, los cuatro arquitectos tratados conforman una muestra representativa de este uso. Además, con los avances tecnológicos y los programas de diseño gráfico se puede esperar que se construyan aún formas más complejas que las usadas hasta ahora, pero que sigan manteniendo la simplicidad del carácter reglado.

Bibliografía

- [1] Abbena, E., Gray, A. y Salamon, S. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition* (3rd ed). Chapman & Hall/CRC.
- [2] Asenjo Díaz, Á. (2015). Aproximación a la arquitectura de Frank Gehry. *Anuario. Real Academia de Bellas Artes de San Telmo*, 15, 98-116.
- [3] Bassegoda Nonell, J. (1989). *El gran Gaudí*. AUSA.
- [4] Bassegoda Nonell, J. y García Gabarró, G. (1998). *La cátedra de Antoni Gaudí: Estudio analítico de su obra*. Edicions UPC.
- [5] Blanco García, F. L. del y García Ríos, I. (2016). De las estructuras laminares a las estructuras metálicas en la arquitectura de Félix Candela. Análisis y reconstitución de la sala de exposiciones para el concurso del Palacio Olímpico de los Deportes, México 1968. *rita*, 5(abril), 98-105.
- [6] Collantes, E. (2023). La estructura de entramado ligero como recurso proyectual en la obra de Frank O. Gehry (1978-1997). *VLC arquitectura*, 10(1), 1-23. <https://doi.org/10.4995/vlc.2023.17086>
- [7] Cueto Ruiz-Funes, J. I. del (1999). Félix Candela, el mago de los cascarones de concreto. *DC: revista de crítica arquitectónica*, núm. 2(marzo).
- [8] Cueto Ruiz-Funes, J. I. del (2011). *Félix Candela*. Catálogo Exposición "Félix Candela 1910-2010". Acción Cultural Española, México.
- [9] do Carmo, M. P. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, Madrid.
- [10] Eisenhart, L. P. (1909). *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Ginn and Company, Boston.
- [11] English, E. C. (2005). Vladimir Shukhov and the Invention of Hyperboloid Structures. *Structures Congress 2005*, 1-9. [https://doi.org/10.1061/40753\(171\)73](https://doi.org/10.1061/40753(171)73)

- [12] Faber, C. (1970). *Las Estructuras de Candela* (M. M. Echeagaray, Trad.). Compañía Editorial Continental S.A, México.
- [13] Gehry, F. O., Aycock, A., Johnson, P., Robertson, J. T., Graves, M. y Tigerman, S. (1980). Casa Gehry, Santa Mónica. California. *Arquitectura: Revista del Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid (COAM)*, 224, 56-59.
- [14] González Moreno-Navarro, A. (1990). Gaudí, constructor (la materialización de una arquitectura singular). *Informes de la Construcción*, 42(408), 5-8. <https://doi.org/10.3989/ic.1990.v42.i408.1423>
- [15] Hernández Cifre, M. de los Á., & Pastor Gonzáles, J. A. (2010). *Un curso de geometría diferencial*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- [16] Kocić, N., Nikolic, M., Krasic, S. y Tomić, J. (2021). Rationalization of cylinders and cylindroids on the Frank Gehry object—Case study Walt Disney Concert Hall. *Proceedings of the Conference:moNGeometrija2021(Belgrade)*, 195-200.
- [17] Kreyszig, E. (1991). *Differential Geometry*. Dover Publications, INC, New York.
- [18] Krivoshapko, S. N. y Ivanov, V. N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Springer.
- [19] Montiel, S. y Ros, A. (1998). *Curvas y superficies*. Proyecto Sur D.L., Granada.
- [20] Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M. y Kilian, A. (2007). *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press.
- [21] Prousalidou, E. y Hanna, S. (2007). A Parametric Representation of Ruled Surfaces. En *Computer-Aided Architectural Design Futures (CAADFutures) 2007*, Springer Netherlands, 265-278. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6528-6_20
- [22] Rosselli, P. (1999). Aeropuerto de Bilbao: Torre de control. Loiu-Vizcaya. *Arquitectura: Revista del Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid (COAM)*, 320, 60-63.
- [23] Sheldon, D. R. (2002). *Digital surface representation and the constructibility of Gehry's architecture* [PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology]. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/16899>
- [24] Tzonis, A. (2007). *Santiago Calatrava: Obra completa*. Ediciones Polígrafa, Barcelona.

Imágenes online

- [25] @run1983. (2009). *IMG_0301* [Fotografía]. Flickr. <https://shorturl.at/Kp2py>

- [26] cs@sf. (2006). *Gehry House 4* [Fotografía]. Flickr. <https://www.flickr.com/photos/isar/117062688/>
- [27] Dixon, D. (2011). *River Irwell, Trinity Bridge* [Fotografía]. Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:River_Irwell,_Trinity_Bridge_-_geograph.org.uk_-_2372926.jpg
- [28] Etten, M. (2008). *parc Guell* [Fotografía]. Flickr. <https://shorturl.at/Xtmzq>
- [29] [Fotografía del Auditorio de Tenerife]. (n.d.). WikiArquitectura. <https://es.wikiarquitectura.com/edificio/auditorio-de-tenerife/#>
- [30] [Fotografía de las Bodegas Ysios como escenario del Festival Esférica Rioja Alavesa]. (2022). <https://www.casagourmet.es/blog/bodegas-ysios-escenario-del-festival-esferica-rioja-alavesa/>
- [31] [Fotografía de la cubierta de las Escuelas de la Sagrada Familia]. (2019). <https://blog.sagradafamilia.org/es/divulgacion/las-escuelas-de-la-sagrada-familia/>
- [32] [Fotografía del Pabellón Quadracci del Museo de Arte Milwaukee]. (n.d.). WikiArquitectura. <https://es.wikiarquitectura.com/edificio/pabellon-quadracci-museo-arte-milwaukee/>
- [33] gichristof. (2004). *Athens Olympic Complex* [Fotografía]. Flickr. <https://www.flickr.com/photos/gichristof/2517139662>
- [34] kelkian. (2009). *Bóveda de la Sagrada Familia (Barcelona)* [Fotografía]. Flickr. <https://www.flickr.com/photos/11979564@N00/>
- [35] ll.loren. (2011). *Pòrtic de la Cripta de la Colònia Güell* [Fotografía]. Flickr. <https://shorturl.at/Xz7Yg>
- [36] PRIMIFER. (2014). *Palacio Episcopal de Astorga* [Fotografía]. Flickr. <https://shorturl.at/1Be4W>
- [37] Rapoport, Y. (2015). *Bilbao Airport* [Fotografía]. Flickr. <https://www.flickr.com/photos/147897064@N02/24146989707/>
- [38] Steffensen, O. M. (2017). *Palau Güell* [Fotografía]. Flickr. <https://shorturl.at/efzuc>
- [39] Triplecaña. (2017). *El Capricho de Gaudí, Comillas* [Fotografía]. Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:El_Capricho_Gaud%C3%AD_02.jpg
- [40] Usaf 1832. (2023). *Peter B Lewis (PBL) Building Case Western Reserve Weatherhead School of Management* [Fotografía]. Wikimedia Commons. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peter_B_Lewis_\(PBL\)_Building_Case_Western_Reserve.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peter_B_Lewis_(PBL)_Building_Case_Western_Reserve.jpg)

- [41] Voyager. (2009). *Kantonsschule Wohlen, Haupteingang (Gestaltung durch Santiago Calatrava)* [Fotografía]. Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wohlen_Kantonsschule.jpg