



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La función Zeta de Riemann

Ian Rico Pose

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

La función Zeta de Riemann

Ian Rico Pose

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: La función Zeta de Riemann
Breve descripción del contenido
En este trabajo se revisarán algunas nociones básicas del Análisis Complejo y se estudiará la función Zeta de Riemann. Inicialmente, se introducirá el contexto en el que surge dicha función, su definición, prolongación analítica, propiedades fundamentales, ecuación funcional, ceros y sus aplicaciones. Posteriormente, centraremos el trabajo en la formulación de la hipótesis de Riemann, su contexto histórico y algunos de sus vínculos con otros resultados de las matemáticas, especialmente en lo tocante a sus posibles implicaciones en la distribución de los números primos.
Recomendaciones
Haber cursado la asignatura de Variable Compleja.
Otras observaciones

Índice

Resumen	IX
Introducción	XI
1. Funciones de variable compleja	1
1.1. Definiciones básicas	1
1.1.1. El cuerpo de los números complejos	1
1.1.2. Sobre números complejos	2
1.1.3. Diferenciación compleja	2
1.2. Algunas funciones destacadas	4
1.2.1. La función exponencial y las funciones trigonométricas	4
1.2.2. La función logaritmo	5
1.3. Integración sobre curvas	6
1.4. Fórmula de Cauchy y sus consecuencias	7
1.4.1. Fórmula local de Cauchy	8
1.4.2. Fórmula global de Cauchy	8
1.5. Series de Laurent y singularidades	9
1.6. Cálculo de residuos	11
1.7. La función Gamma	12
2. La función Zeta de Riemann	17

2.1. Definición y propiedades fundamentales	17
2.2. Ecuación funcional	22
2.2.1. Aproximación de $\zeta(s)$ por sumas finitas	26
2.3. Valores particulares de $\zeta(s)$	27
2.3.1. Números de Bernoulli	28
2.3.2. Algunas desigualdades	30
2.3.3. Ceros de $\zeta(s)$	32
2.4. Aplicaciones de $\zeta(s)$	36
2.4.1. La Zeta-regularización	36
2.4.2. El efecto Casimir	37
2.4.3. Electrodinámica cuántica	38
2.4.4. La ley de Zipf	39
3. La hipótesis de Riemann	41
3.1. Contexto histórico	41
3.2. Teorema de los números primos	43
3.3. Sobre la validez de la hipótesis de Riemann	48
3.3.1. Equivalencias	48
3.3.2. Hipótesis relacionadas	49
3.3.3. Consecuencias	51
3.3.4. Evidencias	54
I. Figuras y tablas de datos	57
II. Código de las figuras	61
III. Recursos teóricos	67
III.1. Álgebra	67

III.2. Análisis	67
III.3. Aritmética	67
III.4. Productos infinitos	69
III.5. Series de Fourier	70
III.6. Teoría de la medida	70
Bibliografía	71

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la función Zeta de Riemann en profundidad y analizar la hipótesis de Riemann. Para ello, se comienza presentando algunas nociones básicas del análisis complejo, que serán necesarias a lo largo del trabajo, junto a un estudio de la función Gamma de Euler, altamente relacionada con la función Zeta de Riemann. Posteriormente, se introduce la definición de la función Zeta de Riemann, así como sus propiedades fundamentales y ecuación funcional. También se examinan algunos valores concretos de la misma que son de interés, haciendo especial énfasis en sus ceros, y se muestran algunas de sus aplicaciones en otros campos, como la física cuántica o la lingüística. Finalmente, se enfoca el trabajo en la hipótesis de Riemann. En un primer lugar, se examina su contexto histórico, después se demuestra el teorema de los números primos utilizando la función Zeta de Riemann y para terminar se presentan ciertos aspectos asociados a la hipótesis. Estos aspectos serán algunas equivalencias o modificaciones de la hipótesis, sus posibles consecuencias y la evidencia que existe sobre esta hipótesis.

Abstract

The main objective of this work is to study the Riemann Zeta function in depth and analyze the Riemann hypothesis. To this end, we begin by presenting some basic notions of complex analysis, which will be necessary throughout the work, along with a study of Euler's Gamma function, which is highly related to the Riemann Zeta function. Subsequently, the definition of the Riemann Zeta function is introduced, as well as its fundamental properties and functional equation. Some specific values of the function, which are of interest, are also examined, with particular emphasis on its zeros, and some of its applications in other fields, such as quantum physics or linguistics, are shown. Lastly, the work focuses on the Riemann hypothesis. First, its historical context is examined, then the prime number theorem is demonstrated using the Riemann Zeta function, and finally, certain aspects associated with the hypothesis are presented. These aspects will be some equivalences or modifications of the hypothesis, its possible consequences, and the existing evidence about this hypothesis.

Introducción

La función Zeta de Riemann ha interesado y fascinado a numerosos matemáticos a lo largo de la historia. Inicialmente, esta función se puede definir como la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

de manera que resulta lógico que las primeras manifestaciones de este interés se encontrasen en el cálculo de ciertos valores concretos de esta función. En particular, en el siglo XIV, Nicolás de Oresme probó que la serie armónica, obtenida al evaluar la función Zeta de Riemann en $s = 1$,

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

era divergente. Posteriormente, en 1673 se le propuso a Leibniz conseguir el valor de la serie

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

pero no logró obtenerlo. Del mismo modo, en 1689 Jacques Bernoulli admitió ser incapaz de calcular el valor de dicha suma. Sin embargo, probablemente sobre el año 1736, Euler halló el valor $\frac{\pi^2}{6}$ de $\zeta(2)$, respuesta del desde entonces conocido como problema de Basilea (en honor a la ciudad de origen de Euler). Además, en 1744, Euler consiguió obtener una expresión para $\zeta(s)$ cuando s es un número entero, obteniendo el famoso producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

donde \mathbb{P} representa el conjunto de números primos positivos. Esta ecuación puso de manifiesto en un primer momento la intensa relación que la función Zeta de Riemann posee con los números primos, motivando los posteriores trabajos de incontables matemáticos. De entre ellos, la figura más importante es sin duda la de Bernhard Riemann, quien en 1859 publica un manuscrito, cuyo título se puede traducir a castellano como “Sobre el número de primos menores a una cantidad dada”. En este manuscrito, Riemann retoma las ideas de Euler y extiende su producto a los números complejos con parte real mayor que uno, obteniendo la definición formal de $\zeta(s)$.

Además, obtiene algunas de las propiedades de esta función y una ecuación funcional para la misma que permite extenderla analíticamente a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. En ese mismo manuscrito, también proporciona una fórmula para el número de primos inferiores a x , en función de los ceros de $\zeta(s)$ y de la integral

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u},$$

mostrando de nuevo la conexión entre los ceros de la función Zeta, y la distribución de los números primos. Riemann determinó que los ceros de $\zeta(s)$ se pueden clasificar en triviales y no triviales, y gracias a la expresión obtenida para el número de primos menores a x , Riemann formuló su hipótesis que postula que los ceros no triviales de $\zeta(s)$ tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$, generando el problema abierto más importante en matemática pura, conocido como la hipótesis de Riemann, incluido en la lista de problemas de Hilbert y en la actualidad uno de los siete problemas del milenio.

En este trabajo, realizaremos un análisis en profundidad de la función Zeta de Riemann y estudiaremos la hipótesis de Riemann, dividiendo el trabajo en tres capítulos.

En el primer capítulo, realizaremos un repaso de algunas cuestiones de variable compleja. El propósito de esta sección es recordar algunos de los resultados fundamentales en la variable compleja, que usaremos en capítulos posteriores, además de estudiar la función Gamma de Euler. El motivo de estudiar esta función es que es necesaria para estudiar la función $\zeta(s)$. Por este motivo, se reservan las demostraciones en este capítulo al estudio de la función Gamma de Euler.

El segundo capítulo trata la función Zeta de Riemann y su objetivo primordial es proporcionar una comprensión avanzada de esta función. Comenzaremos introduciendo la definición de la función Zeta de Riemann, ciertas propiedades fundamentales de la misma, hasta llegar a la ecuación funcional. También veremos algunas expresiones y funciones asociadas a la función $\zeta(s)$. Posteriormente, nos centraremos en el estudio de ciertos valores concretos de la función Zeta de Riemann. Además, estudiaremos los ceros de la función Zeta de Riemann, que serán fundamentales en el último capítulo. Terminaremos el capítulo mostrando las aplicaciones que la función Zeta de Riemann posee en otras disciplinas.

En el tercer y último capítulo, se profundizará en la hipótesis de Riemann. El fin último de este capítulo es introducir al lector en el problema de la distribución de los números primos, para posteriormente comprender la hipótesis de Riemann y sus posibles consecuencias en diversas áreas. Se comienza comentando el contexto histórico de la hipótesis de Riemann, para situar temporalmente al lector. Después se da una prueba rigurosa del teorema de los números primos, proporcionando una comprensión mayor acerca de la distribución de los números primos. Finalmente, se examina la validez de la hipótesis de Riemann, así como otros aspectos relevantes de la misma, como algunas equivalencias, modificaciones, consecuencias y la evidencia que existe sobre esta hipótesis.

Además de estos tres capítulos, se añaden tres anexos al trabajo. El primero contiene dos tablas de datos y las figuras que se emplearán en varias demostraciones. El segundo incluye el código necesario para reproducir estas figuras. Finalmente, el tercero recopila ciertos resultados y definiciones que, sin pertenecer explícitamente al campo de la variable compleja, son interesantes de cara a desarrollar algunos razonamientos a lo largo del trabajo.

Con respecto a la bibliografía consultada, consideraremos las referencias de los tres capítulos. En lo que concierne al primer capítulo, se trata principalmente de las referencias [9], [14], [19] y [21]. Para elaborar el segundo capítulo, se han utilizado [1] y [17], junto a [2], [3], [15] y [22]. Esta bibliografía se complementa con [11], [12], [16], [20], [23] y [25] para la sección de las aplicaciones de $\zeta(s)$. En cuanto al último capítulo, las referencias principales son [1], [4], [5], [8], [17] y [24], complementadas con [7], [10], [13] y [18]. También se ha empleado [6] para las referencias históricas.

Capítulo 1

Funciones de variable compleja

Los números complejos forman la base sobre la que se construye gran parte de la teoría de la función Zeta de Riemann. Esta sección pretende introducir al lector en el campo de la variable compleja, con el objetivo de establecer gran parte de la notación y facilitar la lectura del capítulo siguiente. Al final del capítulo, se estudiará la función Gamma de Euler. Además, a lo largo del trabajo, asumiremos que el lector tiene conocimientos básicos del análisis real y de curvas.

1.1. Definiciones básicas

1.1.1. El cuerpo de los números complejos

Definición 1.1. Se define el *cuerpo de los números complejos*, denotado por \mathbb{C} , como el conjunto de todos los pares ordenados $s = (\sigma, t)$, donde $\sigma, t \in \mathbb{R}$, junto con las operaciones internas

$$\begin{aligned}(\sigma, t) + (\sigma', t') &= (\sigma + \sigma', t + t'), \\ (\sigma, t) \cdot (\sigma', t') &= (\sigma\sigma' - tt', \sigma t' + t\sigma').\end{aligned}$$

Es inmediato verificar que en estas condiciones \mathbb{C} es un cuerpo. Asimismo, se denomina *número complejo* a todo elemento de \mathbb{C} . Además, la multiplicación de números complejos es usualmente denotada por ss' en lugar de $s \cdot s'$.

También se puede ver que $(1, 0)$, es el elemento neutro de la multiplicación, motivo por el cual se le suele denotar $1_{\mathbb{C}}$. Por convención, se denota i al número complejo $(0, 1)$. Como $\{1_{\mathbb{C}}, i\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2 , todo número complejo $s = (\sigma, t) \in \mathbb{C}$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de $1_{\mathbb{C}}$ e i de la siguiente manera $s = \sigma 1_{\mathbb{C}} + ti$, donde a σ se le denomina la *parte real* de s , denotada como $\operatorname{Re}(s)$ o $\Re(s)$, y a t la *parte imaginaria*, denotada por $\operatorname{Im}(s)$ o $\Im(s)$. Aplicando la inyección canónica de \mathbb{R} en \mathbb{C} , se suele denotar por σ a $(\sigma, 0)$ y ti a $(0, t)$.

Observación 1.2. Aunque en la literatura de la variable compleja se suele emplear la notación $z = (x, y)$ para denotar un número complejo, en este trabajo se denotará $s = (\sigma, t)$, ya que es la notación que utiliza Riemann en [24] y es la más extendida en el campo de la función Zeta.

De ahora en adelante, siempre que se escriba σ , se entenderá que se habla de la parte real de un número complejo, que por defecto será s . Análogamente, si aparece t , se entenderá que se hace referencia a la parte imaginaria de s .

1.1.2. Sobre números complejos

Definición 1.3. Se define la *conjugación compleja* como la aplicación que asigna a cada número complejo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ el número complejo $\bar{s} = \sigma - it \in \mathbb{C}$.

Definición 1.4. Se define el *valor absoluto* o *módulo* como la aplicación que asigna a todo número complejo $s \in \mathbb{C}$ el número real $|s| = \sqrt{s\bar{s}}$.

Definición 1.5. Se define el *disco abierto centrado en a y de radio $r > 0$* , denotado por $D_r(a)$, como el conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - a| < r\}$. Análogamente, se define el *disco cerrado centrado en a y de radio $r > 0$* , denotado por $\overline{D_r(a)}$, como el conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - a| \leq r\}$.

Definición 1.6. Se define la *corona abierta centrada en a y de radios interior y exterior $r > 0$ y $R > 0$* , respectivamente, con $r < R$, denotada por $A(a; r, R)$, como el siguiente conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid r < |s - a| < R\}$. Análogamente, se define la *corona cerrada centrada en a y de radios interior y exterior $r > 0$ y $R > 0$* , respectivamente, con $r < R$, denotada por $\overline{A(a; r, R)}$, como el conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid r \leq |s - a| \leq R\}$. En el caso de que $r = 0$, se denomina *disco punteado en a y de radio $R > 0$* y se denota $D_R^*(a)$.

Definición 1.7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el *semiplano $\sigma > \alpha$* , denotado por \mathbb{H}_α , como el conjunto $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \alpha\}$.

1.1.3. Diferenciación compleja

Definición 1.8. Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación, donde S es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Se dice que:

- f es \mathbb{R} -diferenciable en el punto $s \in S$ si existe una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(s+h) - f(s) - Ah|}{|h|} = 0.$$

Si este es el caso, denotamos $Df(s) = A$ y decimos que A es la *matriz de la diferencial de f en el punto s* , también conocida como la *matriz jacobiana* de f en s .

- f es \mathbb{C} -diferenciable en un punto $s \in S$ si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h}.$$

En tal caso, dicho límite se llama *derivada compleja de f en s* y se denota $f'(s)$. Además, se dice que f es \mathbb{C} -diferenciable si lo es en cada punto de S . Se define también la *función derivada compleja* como la aplicación $f' : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid s \mapsto f'(s)$. Se dice que f es *continuamente \mathbb{C} -diferenciable* si f' es continua. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, se dice que f es *n veces \mathbb{C} -diferenciable* si $f^{(n-1)}$ es \mathbb{C} -diferenciable. Se dice que f es *infinitamente \mathbb{C} -diferenciable* si f es n veces \mathbb{C} -diferenciable, para todo n .

- f es *holomorfa en un punto $s \in S$* si f es \mathbb{C} -diferenciable en todos los puntos de un entorno de s . Se dice que f es *holomorfa* si lo es en todos los puntos de S . Se denota $\mathcal{H}(S)$ al conjunto de funciones holomorfas definidas en S . Se dice que f es *infinitamente holomorfa* si $f^{(n)}$ es holomorfa, para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
- f es una *función entera* si f es holomorfa y $S = \mathbb{C}$.
- f es *analítica en $a \in S$* si existen una serie entera $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$, y un número real $r \in (0, R]$, tal que $D_r(a) \subset S$ y además $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-a)^n$, $\forall s \in D_r(a)$. Del mismo modo, se dice que una función es *analítica* si es analítica en todo punto de su dominio de definición.
- una función $F : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una *primitiva holomorfa* de f en S , si F es holomorfa y además $F'(s) = f(s)$ para todo $s \in S$.

Observación 1.9. Nótese que la definición de \mathbb{C} -diferenciabilidad que se ha dado no es la más natural como definición de derivada compleja, ya que resulta más bien una generalización de la derivada de una función real de una variable real. La noción más natural de derivada compleja sería introducir la existencia de un cierto límite en función de la existencia o no de una determinada aplicación \mathbb{C} -lineal, análogamente a como se define la diferenciación de funciones de varias variables reales. En este trabajo, se ha elegido la definición menos natural porque resulta ser más simple y equivalente a la que se proponía líneas arriba.

Observación 1.10. La \mathbb{C} -diferenciabilidad implica la \mathbb{R} -diferenciabilidad. Además, una función puede ser \mathbb{C} -diferenciable en un punto, sin ser holomorfa en tal punto. Por ejemplo, la función $f(s) = s\bar{s}$, $\forall s \in \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -diferenciable en 0 pero no es holomorfa en tal punto, por no ser \mathbb{C} -diferenciable en ningún otro punto.

Propiedades

De ahora en adelante, y con el propósito de aligerar los enunciados de los resultados, los subconjuntos S y U serán subconjuntos abiertos de \mathbb{C} .

Teorema 1.11 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función \mathbb{R} -diferenciable, entonces f es holomorfa si y sólo si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial t} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial \sigma}.$$

Si es el caso, se tiene además que

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = -i \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Proposición 1.12. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, $\forall k \geq 1$, la serie de potencias $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(s-a)^{n-k}$ tiene radio de convergencia R .

Proposición 1.13. Sea $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f es infinitamente \mathbb{C} -diferenciable en su disco de convergencia $D_R(a)$ y además se verifica

$$\forall k \geq 1, \forall s \in D_R(a) : f^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(s-a)^{n-k}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Corolario 1.14. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la función $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-a)^n, \forall s \in D_R(a)$ es analítica.

1.2. Algunas funciones destacadas

El propósito de esta sección es introducir ciertas funciones complejas relevantes, así como abordar los conceptos de determinación continua del argumento y la función logaritmo.

1.2.1. La función exponencial y las funciones trigonométricas

Definición 1.15. Se define la *función exponencial*, denotada por e^s o $\exp(s)$, como la función

$$e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Observación 1.16. Nótese que el dominio de definición de $\exp(s)$ es efectivamente \mathbb{C} , ya que el radio de convergencia de la serie de potencias (1.1) es ∞ .

Proposición 1.17. Se verifican las siguientes propiedades de la función exponencial.

1. Si $s, z \in \mathbb{C}$, entonces $e^{s+z} = e^s e^z$. Además, se tiene $|e^s| = e^{\operatorname{Re}(s)}$ y $\overline{e^s} = e^{\overline{s}}$.
2. Para todo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, se tiene $e^s = e^\sigma (\cos(t) + i \sin(t))$.
3. Para todo $s \in \mathbb{C}$, se verifica $e^s = 1$ si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s = 2k\pi i$.

4. La función exponencial es entera, y su derivada compleja verifica $\exp'(s) = \exp(s)$.

5. Para todo $s \in \mathbb{C}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $s = |s|e^{it} = |s|(\cos(t) + i \sin(t))$.

Definición 1.18. Se definen las funciones *coseno* y *seno* complejas, denotadas por $\cos(s)$ y $\sin(s)$ respectivamente, como

$$\cos(s) = \frac{e^{is} + e^{-is}}{2}, \quad \sin(s) = \frac{e^{is} - e^{-is}}{2i}, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Observación 1.19. A diferencia del caso real, las funciones complejas $\sin(s)$ y $\cos(s)$ no están acotadas en \mathbb{C} . Sin embargo, se conservan ciertas propiedades que se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 1.20. Se verifican las siguientes propiedades sobre $\cos(s)$ y $\sin(s)$.

1. Las funciones $\cos(s)$ y $\sin(s)$ son enteras. En particular, se tiene $\cos'(s) = -\sin(s)$ y $\sin'(s) = \cos(s)$, para todo $s \in \mathbb{C}$.
2. Para cualesquiera $s, z \in \mathbb{C}$, se tiene $\cos(s+z) = \cos(s)\cos(z) - \sin(s)\sin(z)$.
3. Para cualesquiera $s, z \in \mathbb{C}$, se tiene $\sin(s+z) = \sin(s)\cos(z) + \cos(s)\sin(z)$.
4. Para todo $s \in \mathbb{C}$, se verifica la igualdad $\cos^2(s) + \sin^2(s) = 1$.

1.2.2. La función logaritmo

Con respecto a la función logaritmo, se dejan como referencias al lector [9] y [21].

Definición 1.21. Se denomina un *argumento* de $s \in \mathbb{C}^*$ a todo número real θ tal que $s = |s|e^{i\theta}$. Se dice que $\theta \in \mathbb{R}$ es el *argumento principal* de s , y se denota por $\text{Arg}(s)$, si además $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Observación 1.22. En virtud de la propiedad 5 de la función exponencial, presente en 1.17, para todo $s \in \mathbb{C}$ existe por lo menos un argumento $\theta \in \mathbb{R}$. De hecho, este argumento es único módulo 2π por la propiedad 3 de la Proposición 1.17, y se puede obtener como cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\theta) = \sigma/|s|$ y $\sin(\theta) = t/|s|$. Por tanto, si denominamos función *argumento principal* a la función que asigna a cada $s \in \mathbb{C}^*$ su argumento principal $\text{Arg}(s)$, se puede obtener

$$\text{Arg}(s) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{t}{|s|}\right) & \text{si } \sigma \geq 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{t}{|s|}\right) & \text{si } \sigma < 0 \text{ y } t \geq 0, \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{t}{|s|}\right) & \text{si } \sigma < 0 \text{ y } t < 0. \end{cases}$$

Proposición 1.23. Se tiene que la función argumento principal Arg es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Definición 1.24. Si S es un subconjunto conexo, se dice que la función $\theta : S \subset \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ es una *determinación continua del argumento*, si θ es continua y si $s = |s|e^{i\theta(s)}$, para todo $s \in S$.

Ejemplo 1.25. La función argumento principal Arg , definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, es una determinación continua del argumento.

Definición 1.26. Se denomina un *logaritmo* de $s \in \mathbb{C}^*$, y se denota por $\log(s)$, a todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = s$. En particular, se dice que $z \in \mathbb{C}$ es el *logaritmo principal* de $s \in \mathbb{C}^*$, y se denota por $\text{Log}(s)$, si $z = \log |s| + i\text{Arg}(s)$. Análogamente, se define la función *logaritmo principal*, como

$$\text{Log} : s \in \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Log}(s) = \log |s| + i\text{Arg}(s) \in \mathbb{C}.$$

Observación 1.27. Debido a que la función argumento principal no es continua en el subconjunto $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{C}$, entonces la función logaritmo principal tampoco lo es en dicho subconjunto. Este es precisamente el motivo por el que ciertos autores optan por definir las funciones argumento y logaritmo principal directamente en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Observación 1.28. Como todo logaritmo z de s verifica $e^z = s = e^{\text{Log}(s)}$, en virtud de la propiedad 3 de la función exponencial, presente en 1.17, se tiene que necesariamente

$$z = \text{Log}(s) + 2k\pi i = \log |s| + i(\text{Arg}(s) + 2k\pi).$$

Nótese que, a diferencia del caso real, no es cierto en general que $\text{Log}(ss') = \text{Log}(s) + \text{Log}(s')$, aunque sí es cierta módulo $2\pi i$. Por ejemplo, $\text{Log}(-i) = (-\pi/2)i \neq (3\pi/2)i = \text{Log}(-1) + \text{Log}(i)$.

Definición 1.29. Si S es un subconjunto conexo, se dice que la función $f : S \subset \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ es una *determinación continua del logaritmo*, si f es continua y si se verifica $s = e^{f(s)}$, para todo $s \in S$.

Ejemplo 1.30. La función logaritmo principal Log , definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, es una determinación continua del logaritmo.

Definición 1.31. Sean S un subconjunto conexo, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\log : S \subset \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ una determinación continua del logaritmo. Se dice que la función $f : S \subset \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ es una *determinación continua de s^λ* , asociada a \log , si

$$f(s) = e^{\lambda \log(s)}, \text{ para todo } s \in S.$$

Observación 1.32. Siempre que se escriba n^s con $n \in \mathbb{N}$, se considerará la determinación del logaritmo principal, es decir, $n^s = e^{s\text{Log}(n)} = e^{s \log n}$, donde \log denota el logaritmo natural.

1.3. Integración sobre curvas

En esta sección, introduciremos algunos de los conceptos necesarios sobre curvas y caminos en \mathbb{C} para la teoría de variable compleja.

Definición 1.33. Se dice que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es *continuamente derivable* en $[a, b]$, denotado por $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$, si γ derivable en (a, b) y si γ' admite una extensión continua a $[a, b]$.

Definición 1.34. Se dice que una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es un *camino* si es de clase \mathcal{C}^1 a trozos en el intervalo $[a, b]$, es decir, si existe una partición $(t_n)_{n=0}^N$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\gamma|_{[t_n, t_{n+1}]} \in \mathcal{C}^1([t_n, t_{n+1}])$, $\forall n = 0, \dots, N-1$. Se dice que el camino γ es *cerrado* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 1.35. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino, siendo $(t_n)_{n=0}^N$ la subdivisión del intervalo. Se define la *longitud* del camino γ como

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(u)| du = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\gamma'(u)| du.$$

Se mencionan a continuación algunas de las propiedades más relevantes de la integración de funciones de variable compleja a lo largo de caminos.

Proposición 1.36. Sean $f, g : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones continuas y $\gamma : [a, b] \rightarrow S$, $\beta : [c, d] \rightarrow S$ dos caminos. Entonces, se verifican las siguientes propiedades

$$(i) \int_{\gamma} [f(s) + g(s)] ds = \int_{\gamma} f(s) ds + \int_{\gamma} g(s) ds, \text{ y } \int_{\gamma} K f(s) ds = K \int_{\gamma} f(s) ds, \forall K \in \mathbb{C}.$$

$$(ii) \left| \int_{\gamma} f(s) ds \right| \leq \left(\max_{s \in \gamma([a, b])} |f(s)| \right) \ell(\gamma).$$

Proposición 1.37. Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un camino y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de S en \mathbb{C} , que converge uniformemente a una función $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(s) ds = \int_{\gamma} f(s) ds \quad \text{y} \quad \int_{\gamma} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(s) ds = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\gamma} f_n(s) ds.$$

Proposición 1.38. Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ un camino. Si F es una primitiva holomorfa de f en S , entonces

$$\int_{\gamma} f(s) ds = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es un camino cerrado, entonces $\int_{\gamma} f(s) ds = 0$.

1.4. Fórmula de Cauchy y sus consecuencias

El teorema de Cauchy es probablemente uno de los teoremas más importantes de la teoría de la variable compleja. Con él, se pueden obtener resultados generales sobre el comportamiento de las funciones holomorfas.

1.4.1. Fórmula local de Cauchy

Teorema 1.39 (Fórmula local de Cauchy). *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que $\overline{D_R(w)} \subset S$ con $w \in S$ y que γ es el camino que parametriza la frontera del disco cerrado $\partial \overline{D_R(w)}$. Entonces, para todo $s \in D_R(w)$ se tiene*

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-s} dz. \quad (1.2)$$

Teorema 1.40. *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que $\overline{D_R(s_0)} \subset S$ con $s_0 \in S$ y que γ es el camino que parametriza la frontera del disco cerrado $\partial \overline{D_R(s_0)}$. Entonces f es analítica en s_0 y para todo $s \in D_R(s_0)$ se tiene*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-s_0)^n, \text{ con } a_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-s_0)^{n+1}} dz, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, si $\|f\|_{\gamma}$ denota el supremo de f a lo largo del camino γ , entonces $|a_n| \leq \|f\|_{\gamma}/R^n$. En particular, el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-s_0)^n$ es mayor o igual a R .

Teorema 1.41 (Principio de identidad). *Sean $f, g : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas con S conexo. Si el conjunto $Z = \{s \in S \mid f(s) = g(s)\}$ tiene un punto de acumulación en S , entonces $f(s) = g(s)$, para todo $s \in S$.*

Corolario 1.42. *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces f es holomorfa si y solo si f es analítica. En particular, si f es holomorfa, entonces f' es holomorfa, f'' es holomorfa y así sucesivamente, obteniendo así que f es infinitamente holomorfa.*

Teorema 1.43 (de Morera). *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que $\int_{\partial \Delta} f(s) ds = 0$ para todo triángulo Δ contenido en S , entonces f es holomorfa.*

Teorema 1.44 (del módulo máximo). *Sean S un subconjunto conexo y $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si existen $s_0 \in S$ y $r > 0$ tales que $|f(s_0)| \geq |f(s)|$, para todo $s \in D_r(s_0)$, entonces f es constante.*

1.4.2. Fórmula global de Cauchy

A lo largo de esta sección, si $U \subset \mathbb{C}$ y γ es un camino, se usará la notación $U \setminus \gamma := U \setminus \gamma([a, b])$. Del mismo modo, cuando se diga que s está en γ , se entenderá que $s \in \gamma([a, b])$. Para obtener una fórmula más general que (1.2), es interesante introducir los siguientes conceptos.

Definición 1.45. Sean γ un camino cerrado y $s \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Se define el *índice de s con respecto al camino γ* , denotado por $\text{Ind}_{\gamma}(s)$, como

$$\text{Ind}_{\gamma}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-s} dz.$$

Observación 1.46. A modo de interpretación, se puede decir que el índice de un punto s con respecto al camino cerrado γ , es el número de veces que el camino γ gira alrededor del punto s .

Definición 1.47. Sean dos caminos cerrados γ y β en S . Se dice que γ y β son *homólogos en S* , si se verifica $\text{Ind}_\gamma(s) = \text{Ind}_\beta(s)$, para todo $s \in \mathbb{C} \setminus S$. En el caso de que $\text{Ind}_\gamma(s) = 0$, para todo $s \in \mathbb{C} \setminus S$, se dice que γ es *homólogo a 0 en S* .

Proposición 1.48. Sea γ un camino cerrado y sea Ind_γ la aplicación que asigna a cada punto $s \in S \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$, su índice respecto al camino γ . Entonces, $\text{Ind}_\gamma(s) \in \mathbb{Z}$, para todo $s \in S$ y si S es conexo, entonces Ind_γ es constante en S .

Teorema 1.49 (de Cauchy). Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y γ un camino cerrado en S . Si γ es homólogo a 0 en S , entonces

$$\int_\gamma f(s) ds = 0.$$

Corolario 1.50. Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si γ, β son dos caminos cerrados homólogos en S , entonces

$$\int_\gamma f(s) ds = \int_\beta f(s) ds.$$

Teorema 1.51 (Fórmula global de Cauchy). Sean γ un camino cerrado en S , homólogo a 0 en S y $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $s \in S \setminus \gamma$, entonces

$$\text{Ind}_\gamma(s)f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-s} dz.$$

El siguiente teorema permite determinar la holomorfía de sucesiones y series.

Teorema 1.52. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en S . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto K de S y $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es su función límite, entonces f es holomorfa. Análogamente, si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto K de S , entonces la función $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s)$ es holomorfa en S .

1.5. Series de Laurent y singularidades

A continuación, introducimos las series de Laurent. Estas series son una herramienta matemática de alto interés de cara a examinar las singularidades de una función, que también serán estudiadas en esta sección.

Definición 1.53. Una *serie de Laurent centrada en $a \in \mathbb{C}$* es una serie que se puede expresar bajo la forma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(s-a)^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y definida para todo s en la denominada *corona de convergencia* $A(a; r, R)$, donde $r = \limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ y $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$.

Observación 1.54. Nótese que toda serie de Laurent se puede descomponer en dos series de potencias de la siguiente manera

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (s - a)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (s - a)^n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_{-n} (s - a)^{-n}. \quad (1.3)$$

Esta expresión motiva la siguiente definición.

Definición 1.55. Se dice que la serie de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (s - a)^n$ converge, ya sea *simple*, *uniforme* o *absolutamente*, en el subconjunto $S \subset \mathbb{C}$, si así lo hacen las dos series de potencias presentes en (1.3). En caso de convergencia, se define la *función suma* de la serie de Laurent, como la suma de las funciones suma de las series de potencias de (1.3).

Observación 1.56. Si las funciones suma de las series de potencias de (1.3) son f_r y f_R respectivamente, entonces $f(s) = f_r(s) + f_R(s)$, para todo s en la corona de convergencia.

Teorema 1.57. Sea $f : A(a; r, R) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, con $0 \leq r < R \leq \infty$, entonces

$$f(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (s - a)^n, \text{ para todo } s \in A(a; r, R),$$

y además si γ_α parametriza la frontera $\partial D_\alpha(a)$, con $r < \alpha < R$, entonces

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

Teorema 1.58. Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante y $a \in S$ con $f(a) = 0$. Entonces existen y son únicos $m \in \mathbb{N}^*$ y una función holomorfa $g : D_r(a) \subset S \rightarrow \mathbb{C}$, tales que

$$g(a) \neq 0 \text{ y } f(s) = (s - a)^m g(s), \text{ para todo } s \in D_r(a).$$

En particular, se tiene $f^{(m)}(a) = m!g(a) \neq 0$ y $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n < m$.

Definición 1.59. Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante y $a \in S$ tal que $f(a) = 0$. Si $m \in \mathbb{N}^*$ es el entero que otorga el Teorema 1.58, se dice que a es un *cero* de f de orden m . Si $m = 1, 2$ o 3 también se dice que a es un *cero simple*, *doble* o *triple*, respectivamente.

Definición 1.60. Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Se dice que $a \in \mathbb{C} \setminus S$ es una *singularidad aislada* de f , si existe $r > 0$ tal que f es holomorfa en $D_r^*(a) \subset S$.

Observación 1.61. Si $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y $a \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de f , entonces f se puede representar como una serie de Laurent centrada en a en $D_r^*(a) \subset S$

$$f(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (s - a)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (s - a)^n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_{-n} (s - a)^{-n}.$$

En caso de que $a_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se puede definir f en a como $f(a) := a_0$, de manera que f sería holomorfa en $D_r(a)$, por estar representada como una serie de potencias. Esta observación permite introducir la siguiente definición.

Definición 1.62. Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $a \in \mathbb{C} \setminus S$ una singularidad aislada de f . Con las notaciones de la Observación 1.61, se dice que a es una singularidad *evitable* de f si $a_{-n} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Si $a_{-n} \neq 0$ para un número finito de $n \in \mathbb{N}^*$, se dice que a es un *polo* de f , y se dice además que su *orden* es $m = \max\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_{-n} \neq 0\}$. Si $a_{-n} \neq 0$ para un número infinito de $n \in \mathbb{N}^*$, se dice que a es una singularidad *esencial* de f .

Daremos a continuación ciertas condiciones para determinar la naturaleza de una singularidad aislada a de una función f . Omitimos los resultados relativos a singularidades esenciales pues no serán de aplicación en este trabajo.

Teorema 1.63 (de la extensión de Riemann). *Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y a una singularidad aislada de f . Entonces, la singularidad a es evitable si y solo si $\lim_{s \rightarrow a} |f(s)|$ existe y es finito.*

Proposición 1.64. *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y a una singularidad aislada de f . Se tiene que a es un polo de orden m si y solo si $f(s)(s-a)^m$ es holomorfa en a y no tiene un cero en a .*

Teorema 1.65. *Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y a una singularidad aislada de f . La singularidad a es un polo si y solo si $\lim_{s \rightarrow a} |f(s)| = \infty$. En tal caso, su orden es m si y solo si m es el único exponente positivo tal que $\lim_{s \rightarrow a} |s-a|^m |f(s)| \in (0, \infty)$.*

Definición 1.66. Se dice que una función f es *meromorfa* en U si está definida y es holomorfa en U , salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas, que son polos.

1.6. Cálculo de residuos

El objetivo de esta sección es introducir el teorema de los residuos, que se utilizará a lo largo del siguiente capítulo para obtener propiedades de la función Zeta de Riemann.

Definición 1.67. Sean $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y a una singularidad aislada de f . Si $f(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (s-a)^n$ es el desarrollo en serie de Laurent en el disco punteado $D_r^*(a) \subset S$, se define el *residuo de f en a* , denotado por $\operatorname{Res}_{s=a} f(s)$, como el coeficiente $a_{-1} \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.68 (de los residuos). *Sea $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sean los puntos s_1, s_2, \dots, s_n , singularidades aisladas de f . Si γ es un camino cerrado en S y homólogo a 0 en S , entonces*

$$\int_{\gamma} f(s) ds = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Ind}_{\gamma}(s_j) \operatorname{Res}_{s=s_j} f(s).$$

Proposición 1.69. *Sean f una función y a un polo de orden m de f .*

1. Se tiene la siguiente fórmula para el residuo

$$\operatorname{Res}_{s=a} f(s) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} [(s-a)^m f(s)].$$

2. Si a es un polo simple y g una función holomorfa en a , entonces $\operatorname{Res}_{s=a} f(s)g(s) = g(a)\operatorname{Res}_{s=a} f(s)$.

3. Si a es un cero simple de f , entonces a es un polo simple de $1/f$ con $\operatorname{Res}_{s=a} 1/f(s) = 1/f'(a)$.

4. El cociente $f'(s)/f(s)$ tiene un polo simple en $s = a$ con residuo $-m$.

1.7. La función Gamma

Ahora, estudiaremos algunas de las propiedades más importantes de la función Gamma. Esta función será de gran interés en el siguiente capítulo. Se deja a [14] como referencia para el lector.

Definición 1.70. La función *Gamma*, denotada por $\Gamma(s)$, se define mediante la integral

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad \forall \sigma > 0.$$

Observación 1.71. Nótese que en otros textos, como en [24], se utiliza la notación de Gauss $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$. Esta definición tiene la ventaja de que se tiene $\Pi(n) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en lugar de $\Gamma(n) = (n-1)!$, como se verá en la Observación 1.75.

Proposición 1.72. La función *Gamma* está bien definida, es decir, la integral $\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ es convergente para todo $\sigma > 0$.

Demostración. Por un lado, se tiene que $|x^{s-1} e^{-x}| \leq x^{\sigma-1}$ y por lo tanto la integral converge en 0, por ser $\int_0^1 x^{\sigma-1} dx$ convergente para todo $\sigma > 0$. Además, como $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sigma-1}/e^{x/2} = 0$, utilizando la definición de límite, se puede escoger x suficientemente grande (por ejemplo, $x \geq K \geq 1$), tal que $|x^{s-1} e^{-x}| = x^{\sigma-1} e^{-x} \leq e^{\frac{\sigma}{2}} e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}$, para todo $x \geq K$. Como la integral $\int_K^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ es convergente, se tiene que la integral que define la función Γ converge para todo $\sigma > 0$. \square

Proposición 1.73. La función *Gamma* es una función holomorfa en \mathbb{H}_0 .

Demostración. Sea Δ un triángulo contenido en \mathbb{H}_0 . En virtud del Teorema de Morera 1.43, es suficiente con ver que $\int_{\partial\Delta} \Gamma(s) ds = 0$ para demostrar que Γ es holomorfa en \mathbb{H}_0 . Ahora bien, por el Teorema de Tonelli-Fubini III.25, se tiene

$$\int_{\partial\Delta} \Gamma(s) ds = \int_{\partial\Delta} \left(\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \right) ds = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial\Delta} x^{s-1} ds \right) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0,$$

ya que la función $s \rightarrow x^{s-1}$ es holomorfa, por lo que solo falta demostrar que estamos en condiciones de aplicar dicho teorema. Para verlo, es suficiente con ver que alguna de las integrales

iteradas con los valores absolutos es finita. Para ello, sean la función medible $g(x, s) = x^{s-1}e^{-x}$ y $h(s) = \int_0^\infty |g(x, s)| dx = \Gamma(\sigma)$. Como $h(s)$ depende continuamente de s , alcanzará un módulo máximo en el compacto $\partial\Delta$, es decir, $\exists M \geq 0$ tal que $|h(s)| \leq M, \forall s \in \partial\Delta$ y por tanto aplicando la propiedad (ii) de 1.36 se obtiene

$$\left| \int_{\partial\Delta} \left(\int_0^\infty |g(x, s)| dx \right) ds \right| = \left| \int_{\partial\Delta} h(s) \right| \leq M\ell(\partial\Delta),$$

donde esto último es finito y se verifica pues la condición del Teorema de Tonelli-Fubini III.25. \square

Proposición 1.74. *Sea $s \in \mathbb{H}_0$. Entonces*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \quad (1.4)$$

Demostración. Basta utilizar la definición de Γ e integración por partes con $u = x^s$ y $v = -e^{-x}$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^{(s+1)-1} e^{-x} dx = [-x^s e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty s x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s).$$

\square

Observación 1.75. A partir de (1.4) y teniendo en cuenta que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, se tiene por inducción que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 1.76. *La función Gamma se puede extender a una función meromorfa en \mathbb{C} , denotada igualmente por $\Gamma(s)$, cuyos únicos polos son simples en $s = 0, -1, -2, \dots$ y tal que*

$$\operatorname{Res}_{s=-k} \Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Demostración. Sean $s \in \mathbb{H}_0$ y $k \in \mathbb{N}$. En virtud de la fórmula (1.4), se tiene que

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)}\Gamma(s+2) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)} \cdots \frac{1}{(s+k)}\Gamma(s+k+1). \quad (1.6)$$

Ahora bien, el miembro derecho de (1.6) representa una función meromorfa en \mathbb{H}_{-k-1} con polos simples en $s = 0, -1, -2, \dots, -k$. Además, dicho miembro derecho es una extensión analítica de Γ a $\mathbb{H}_{-k-1} \setminus \{0, -1, -2, \dots, -k\}$. Como $k \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se puede extender Γ a una función meromorfa en \mathbb{C} con polos simples en $s = 0, -1, -2, \dots$. Finalmente, por (1.6), se tiene

$$\operatorname{Res}_{s=-k} \Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow -k} (s+k)\Gamma(s) = \frac{1}{-k} \frac{1}{(-k+1)} \cdots \frac{1}{(-1)}\Gamma(1) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

\square

Observación 1.77. Por el Principio de identidad 1.41, se tiene que la ecuación funcional $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ es válida para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $s \neq 0, -1, -2, \dots$. Por lo tanto, la función Γ proporciona una extensión meromorfa a \mathbb{C} del concepto de factorial de un número entero positivo.

El siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en [14], sirve de gran utilidad para obtener la expresión alternativa del Teorema 1.82 para $\Gamma(s)$, y que en ciertos textos, como en [9], se utiliza para definir la función Gamma.

Teorema 1.78. *Si $s \neq 0, -1, -2, \dots$ entonces*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}. \quad (1.7)$$

Corolario 1.79. *La función Gamma no se anula.*

Demostración. Si $s \neq 0, -1, -2, \dots$ entonces la función Gamma se expresa como el producto infinito convergente (1.7). Como los factores de dicho producto infinito son todos no nulos, en virtud de la Proposición III.17, se obtiene que $\Gamma(s) \neq 0$, para todo $s \neq 0, -1, -2, \dots$ \square

Definición 1.80. Se define la *constante de Euler-Mascheroni*, denotada por γ , como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right).$$

Observación 1.81. Se puede probar que este límite existe y es una constante positiva. Los cálculos muestran que $\gamma = 0,57721566\dots$ con una precisión de 8 decimales. El problema de si γ es un número irracional o no, sigue en abierto.

Teorema 1.82. *Si $s \neq 0, -1, -2, \dots$ entonces*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k} \right]. \quad (1.8)$$

Demostración. Basta con tener en cuenta la fórmula (1.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(s+1) \cdots (s+n) e^{-s \log(n)}}{n(n-1) \cdots 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s \left(1 + \frac{s}{1}\right) \left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s \log(n)} \\ &= s \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\left(1 + \frac{s}{1}\right) e^{-s} \left(1 + \frac{s}{2}\right) e^{-s/2} \cdots \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n} \right] \left[e^{-s(\log(n)-1-1/2-\cdots-1/n)} \right] \right\} \\ &= s \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k} \right] e^{\gamma s}. \end{aligned}$$

\square

El resultado que se enuncia a continuación, cuya demostración se puede ver en [9] o [14], muestra una propiedad fundamental de la función Gamma.

Teorema 1.83 (Bohr-Mollerup). Sea $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ una función verificando que la composición $\log \phi(x)$ es una función convexa y $\phi(x+1) = x\phi(x)$, para todo $x > 0$, junto a $\phi(1) = 1$. Entonces $\phi(x) = \Gamma(x)$ y por tanto, la función Gamma es la única función meromorfa en \mathbb{C} satisfaciendo la ecuación funcional $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y $\Gamma(1) = 1$, que es logarítmicamente convexa en el eje real positivo.

Para finalizar el capítulo, se probarán algunas propiedades de la función Gamma que serán utilizadas en el capítulo siguiente.

Teorema 1.84. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Fórmula de reflexión de Euler:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \text{ para todo } s \notin \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

2. Fórmula de duplicación de Legendre:

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s). \quad (1.10)$$

3. Se verifica.

$$\Gamma'(2) = 1 - \gamma. \quad (1.11)$$

Demostración. Para probar (1.9), comenzaremos aplicando la expresión (1.8) y observando que

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} = s e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k} \right] (-s) e^{-\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{s}{k}\right) e^{s/k} \right] = -s^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right),$$

donde los productos infinitos se pueden unir ya que son convergentes, por serlo la función $\Gamma(s)$. Aplicando ahora la fórmula (1.4), válida para todo $s \neq 0, -1, -2, \dots$ junto con (III.2), se tiene

$$-s\Gamma(s)\Gamma(-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \left[s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right) \right]^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Con respecto a (1.10), utilizaremos (1.7) y la fórmula de Stirling III.2. Comenzamos calculando el producto $\Gamma(s)\Gamma(s + \frac{1}{2})$ para posteriormente dividirlo por $\Gamma(2s)$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 n^{2s + \frac{1}{2}}}{s \left(s + \frac{1}{2}\right) (s+1) \left(s + \frac{3}{2}\right) (s+2) \cdots (s+n) \left(s + n + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 n^{2s + \frac{1}{2}} 2^{2n+2}}{2s(2s+1)(2s+2)(2s+3) \cdots (2s+2n)(2s+2n+1)}. \end{aligned}$$

Además, tomando la subsucesión de los pares $(2n)_{n \in \mathbb{N}}$ en (1.7) tenemos

$$\Gamma(2s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{2s}}{2s(2s+1) \cdots (2s+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n)^{2s}}{2s(2s+1) \cdots (2s+2n)}.$$

Finalmente, aplicando (III.1) en *, obtenemos la fórmula de duplicación

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 n^{2s + \frac{1}{2}} 2^{2n+2}}{(2n)!(2n)^{2s}(2s + 2n + 1)} \stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot n^{2s} n^{\frac{1}{2}} 2^{2n} 2^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n} \cdot 2^{2s} n^{2s} (2s + 2n + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2\pi})^2 (\sqrt{n})^2 n^{\frac{1}{2}} 2^2}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{n}(2s + 2n + 1)2^{2s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}. \end{aligned}$$

Para (1.11), la prueba es más larga y técnica, por lo que se recomienda al lector acudir a [19]. \square

Capítulo 2

La función Zeta de Riemann

En este capítulo, se estudiará la función Zeta de Riemann en profundidad. Primero, se tratarán los conceptos básicos asociados a la función Zeta de Riemann con el objetivo de introducir la ecuación funcional. Posteriormente, se verán algunas expresiones y funciones asociadas a la función Zeta y se estudiarán algunos valores particulares de esta función, especialmente sus ceros. Finalmente, veremos algunas de las aplicaciones que esta función posee en otros campos, como la teoría cuántica de campos o la lingüística. La mayoría de resultados en este capítulo referentes a la función Zeta de Riemann han sido modificados a partir de [1] o provienen de [17].

2.1. Definición y propiedades fundamentales

El objetivo de esta sección es obtener las herramientas necesarias para llegar a la definición formal de la extensión analítica de la función Zeta de Riemann a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Definición 2.1. Se define la función *Zeta de Riemann* como la aplicación

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ para todo } \sigma > 1.$$

Observación 2.2. También se puede generalizar el concepto de la función Zeta de Riemann utilizando la *función Zeta de Hurwitz*, dada por la serie : $\zeta(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ con $a \in (0, 1]$. Se tiene entonces que $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$. Cabe destacar que la mayoría de resultados asociados a la función Zeta de Riemann, se pueden obtener de forma análoga para la función Zeta de Hurwitz.

Proposición 2.3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$. La convergencia es uniforme en cada semiplano $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$, por lo que $\zeta(s)$ es una función holomorfa en \mathbb{H}_1 .

Demostración. Sean $\delta > 0$ y $\sigma \geq \delta + 1$, entonces $|n^{-s}| = n^{-\sigma} \leq n^{-(1+\delta)}$. Además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\delta)}$ es hiperarmónica de orden mayor que 1 y por tanto convergente. Por el criterio

mayorante de Weierstrass, $\zeta(s)$ converge uniforme y absolutamente en $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq 1 + \delta\}, \forall \delta > 0$. En consecuencia, $\zeta(s)$ converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de \mathbb{H}_1 y en virtud del Teorema 1.52, se tiene que la serie $\zeta(s)$ es holomorfa en \mathbb{H}_1 .

□

Teorema 2.4. Si $\sigma > 1$ entonces se verifica la siguiente ecuación

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} dx. \quad (2.1)$$

Demostración. Primero probaremos el resultado para $s \in \mathbb{R}$ con $s > 1$ y luego lo extenderemos usando el Principio de identidad 1.41. Supongamos pues que $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > 1$. Sea $n \geq 1$, mediante el cambio de variable $t = nx$, obtenemos

$$n^{-s}\Gamma(s) = n^{-s} \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t} dt = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx} dx$$

y sumando, obtenemos

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx} dx.$$

Se tiene que la serie de la derecha es convergente si $\sigma = s > 1$ (ya que lo son las dos funciones a la izquierda). Ahora deseáramos intercambiar la suma con la integral y, para justificarlo, podemos ver la integral como una integral de Lebesgue. Como el integrando es no negativo y medible para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de sumas parciales asociada es creciente y en virtud del Teorema de la convergencia monótona III.24, tenemos que

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx} dx = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} dx,$$

donde la última igualdad es consecuencia de que si $t > 0$ entonces $0 < e^{-t} < 1$ y por tanto la serie es geométrica y se tiene

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Queda entonces demostrado si $s \in \mathbb{R}$ con $s > 1$. Para extender el resultado a \mathbb{H}_1 , falta demostrar que los dos miembros de la ecuación son holomorfos en dicho abierto. El lado izquierdo lo es ya que es producto de dos funciones holomorfas en el abierto. Para el lado derecho, escribamos

$$\int_0^\infty \left| \frac{e^{-x}x^{s-1}}{1-e^{-x}} \right| dx \leq \int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{\sigma-1}}{1-e^{-x}} dx = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \frac{e^{-x}x^{\sigma-1}}{1-e^{-x}} dx. \quad (2.2)$$

Para la primera integral, basta con utilizar que $e^x - 1 \geq x, \forall x \geq 0$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}x^{\sigma-1}}{1-e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{x^{\sigma-1}}{e^x - 1} dx \leq \int_0^1 x^{\sigma-2} dx.$$

Como $\sigma - 2 > -1$, se tiene que esta última integral converge, y en consecuencia la primera también lo hace. Con respecto a la segunda integral

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} x^{\sigma-1} / (1 - e^{-x})}{e^{-x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2} x^{\sigma-1}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\sigma-1}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = 0.$$

Como además la integral $\int_1^\infty e^{-x/2} dx$ es convergente, en virtud del criterio de comparación por paso al límite aplicado a la función $f(x) = e^{-x/2}$, se puede concluir que la segunda integral converge. Esto muestra pues que el lado derecho converge en el semiplano \mathbb{H}_1 . Ahora solo falta ver que el lado derecho es holomorfo en el abierto. Para ello, denotando para todo $s \in \mathbb{H}_1$

$$K(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx,$$

se tiene por el Teorema de Morera 1.43 que es suficiente con ver que $\int_{\partial\Delta} K(s) ds = 0$, donde Δ es un triángulo contenido en \mathbb{H}_1 . Ahora bien,

$$\int_{\partial\Delta} K(s) ds = \int_{\partial\Delta} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx ds \stackrel{*}{=} \int_0^\infty \int_{\partial\Delta} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} ds dx = 0,$$

ya que el integrando es holomorfo como función de s . Para justificar $*$ basta con aplicar el Teorema de Tonelli-Fubini III.25 a la función medible $g(x, s) = x^{s-1} / (e^x - 1)$, para el cual podemos probar que alguna de las integrales iteradas con los valores absolutos es finita. Sea $h(s) = \int_0^\infty |g(x, s)| dx$, para todo $s \in \mathbb{H}_1$, entonces como $h(s)$ está acotada por la integral convergente presente en (2.2), se tiene que $h(s)$ está bien definida. Como $h(s)$ depende continuamente de s , sabemos que en el compacto que es $\partial\Delta$, se alcanzará un módulo máximo, por lo que $\exists M \geq 0$ tal que $|h(s)| \leq M, \forall s \in \partial\Delta$ y por tanto, aplicando la propiedad (ii) de 1.36 se obtiene

$$\left| \int_{\partial\Delta} \int_0^\infty |g(x, s)| dx ds \right| = \left| \int_{\partial\Delta} h(s) ds \right| \leq M \ell(\partial\Delta),$$

donde esto último es finito. Por el Teorema de Tonelli-Fubini III.25, la aplicación de $*$ está justificada y $g(x, s) = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \in \mathcal{L}^1([0, \infty) \times \partial\Delta)$. En consecuencia, el lado derecho también es holomorfo en el abierto \mathbb{H}_1 y aplicando el principio de Identidad 1.41, la ecuación sigue siendo verdadera para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 1$, lo que prueba el teorema. \square

Observación 2.5. Nótese que el paso fundamental para demostrar la holomorfía de $K(s)$ de la anterior prueba se basa en aplicar los Teoremas de Morera 1.43 y de Tonelli-Fubini III.25. La idea de esto último funciona ya que la singularidad del denominador pierde poder frente al cero del numerador, y ya que la función exponencial tiene más potencia asintótica que la potencial. Este razonamiento ya se ha empleado en la prueba de la Proposición 1.73, y se empleará dos veces más a lo largo del trabajo, siendo la primera de ellas en el siguiente resultado.

Teorema 2.6. Si H_ε es la función definida por la integral sobre el camino de Hankel (ver Figura 1.1) y si se considera el siguiente límite

$$H(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(s) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz.$$

Entonces $H(s)$ es una función entera. Además, se tiene

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)H(s), \text{ para todo } \sigma > 1. \quad (2.3)$$

Demostración. Usando las parametrizaciones siguientes $z = re^{-i\pi}$ en H_1 y $z = re^{i\pi}$ en H_3 , con $r \in [\varepsilon, \infty)$, se tiene que $z^s = r^s e^{-i\pi s}$ en H_1 y $z^s = r^s e^{i\pi s}$ en H_3 . Como parametrización en H_2 usaremos $z = \varepsilon e^{i\theta}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $0 < \varepsilon < 2\pi$. Para probar el primer resultado, como el dominio de definición de $H_\varepsilon(s)$ es $S = \mathbb{C}$, basta con considerar la Observación 2.5 y emplear un razonamiento totalmente análogo al empleado en la prueba del Teorema 2.4. Se deja como ejercicio al lector desarrollar los detalles de dicha prueba. Ahora bien, si consideramos un disco compacto arbitrario y probamos que las integrales sobre H_1 y H_3 convergen uniformemente en dicho compacto (la integral sobre H_2 no propone ningún problema de convergencia), entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(s) = H(s)$ será una función entera, por ser límite uniforme funciones enteras, donde el integrando es una función entera (como función de s). Nótese que si $f_N(s) = H_{\frac{\varepsilon}{N}}(s)$ entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(s) = H(s)$ y podemos aplicar el Teorema 1.52. Sea pues $s \in \overline{D_M(0)}$. Sobre H_1 , con $r \geq 1$

$$|z^{s-1}| = r^{\sigma-1} \left| e^{-i\pi(\sigma-1+it)} \right| = r^{\sigma-1} e^{t\pi} \leq r^{M-1} e^{\pi M}.$$

De forma análoga sobre H_3 . En consecuencia, tanto para H_1 como para H_3 , si $r \geq 1$ se tiene

$$\left| \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} \right| \leq \frac{r^{M-1} e^{M\pi} e^{-r}}{1 - e^{-r}} = \frac{r^{M-1} e^{M\pi}}{e^r - 1}.$$

Como $e^r - 1 > e^r/2$, si $r > \log 2$, entonces el integrando se acota por $r^{M-1} e^{-r} C$, donde $C = 2e^{M\pi}$ es una constante que depende de M y no de r . También se tiene que $\int_\varepsilon^\infty r^{M-1} e^{-r} dr$ converge si $\varepsilon > 0$, por lo tanto las integrales sobre H_1 y H_3 convergen uniformemente en cada disco compacto $\overline{D_M(0)}$ y entonces $H(s)$ es una función entera. Para probar (2.3), consideramos la función $f(z) = e^z/(1 - e^z)$ y $\varepsilon \in (0, 2\pi)$. Entonces

$$2\pi i H_\varepsilon(s) = \left(\int_{H_1} + \int_{H_2} + \int_{H_3} \right) z^{s-1} f(z) dz.$$

Sobre H_1 y H_3 se tiene $f(z) = f(re^{\pm i\pi}) = f(-r)$, denotando $z = \varepsilon e^{i\theta}$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$ sobre H_2 tendremos

$$\begin{aligned} 2i\pi H_\varepsilon(s) &= \int_\varepsilon^\infty r^{s-1} e^{-\pi i s} f(-r) dr + i \int_{-\pi}^\pi \varepsilon^{s-1} e^{(s-1)i\theta} \varepsilon e^{i\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta + \int_\varepsilon^\infty r^{s-1} e^{\pi i s} f(-r) dr \\ &= 2i \sin(\pi s) \int_\varepsilon^\infty r^{s-1} f(-r) dr + i \varepsilon^s \int_{-\pi}^\pi e^{is\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Si se divide por $2i$ se obtendrá

$$\pi H_\varepsilon(s) = \underbrace{\sin(\pi s) \int_\varepsilon^\infty r^{s-1} f(-r) dr}_{I_1} + \underbrace{\varepsilon^s / 2 \int_{-\pi}^\pi e^{is\theta} f(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta}_{I_2}.$$

Ahora bien, si hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\sigma > 1$ se tendrá por (2.1) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \int_0^{\infty} \frac{r^{s-1} e^{-r}}{1 - e^{-r}} dr = \Gamma(s)\zeta(s).$$

Para probar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(s) = 0$, basta con tener en cuenta que $f(z)$ es cociente de funciones holomorfas cuyo denominador tiene un cero de primer orden en $z = 0$ y cuyo numerador no se anula, por lo que $f(z)$ tiene un polo de primer orden en $z = 0$ y es holomorfa en $D_{2\pi}^*(0)$. En consecuencia, al multiplicar por z se cancela el polo, por lo que $zf(z)$ es holomorfa en $D_{2\pi}(0)$ y por tanto, está acotada, digamos por la constante A , en dicho disco. Es decir,

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|} \quad \text{con } |z| = \varepsilon < 2\pi.$$

Por tanto

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon^\sigma}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta} \frac{A}{\varepsilon} d\theta \leq Ae^{\pi|t|} \varepsilon^{\sigma-1}.$$

Si $\sigma > 1$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $I_2 \rightarrow 0$ y en consecuencia

$$\pi H(s) = \sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s). \quad (2.4)$$

Finalmente, utilizando la Fórmula de reflexión de Euler (1.9) se obtiene (2.3). \square

Observación 2.7. Nótese que $H(s)$ se anula en los enteros positivos mayores que uno por (2.4). Esto sumado a que $H(s)$ es entera, y a que la función $\Gamma(1-s)$ es meromorfa en \mathbb{C} y sólo presenta polos simples en los valores enteros positivos de s , significa que $\Gamma(1-s)H(s)$ está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Como esta expresión coincide con $\zeta(s)$ para $\sigma > 1$ y ambas funciones son holomorfas y coinciden en el abierto \mathbb{H}_1 , se legitima en virtud del Principio de identidad 1.41 la siguiente definición.

Definición 2.8. Se define la *extensión analítica de la función Zeta de Riemann* para $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ con $\sigma \leq 1$ como $\zeta(s) = \Gamma(1-s)H(s)$.

Observación 2.9. El razonamiento es similar para extender analíticamente la función Zeta de Hurwitz a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Para la función Zeta de Riemann, aún se puede ser más específico, como se verá más adelante con la ecuación funcional y la aproximación por sumas finitas.

De ahora en adelante, cuando se mencione la función Zeta de Riemann, se entenderá que se hace referencia a la extensión analítica de la misma.

Proposición 2.10. $\zeta(s)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo 1.

Demostración. Para empezar, la función Zeta de Riemann es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ por los razonamientos presentes en la Observación 2.7 y la Definición 2.8. Como $H(s)$ es una función entera, las únicas posibles singularidades de $\zeta(s)$ son los polos simples de $\Gamma(1-s)$, es decir, los

puntos $s = 1, 2, 3, \dots$. Ahora bien, según la Proposición 2.3, $\zeta(s)$ es holomorfa en s para $\sigma > 1$, por lo que el único polo posible sería $s = 1$. Demostremos pues que $\zeta(s)$ posee un polo simple en $s = 1$. Basta con realizar, para un cierto $\varepsilon \in (0, 2\pi)$,

$$H_\varepsilon(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^z}{1-e^z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_1} \frac{e^z}{1-e^z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{H_2} \frac{e^z}{1-e^z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{H_3} \frac{e^z}{1-e^z} dz.$$

Como el integrando toma los mismos valores en la primera y en la última integral, éstas se cancelan, dejando solo la contribución de H_2 . Esta contribución se puede calcular explícitamente usando el Teorema de los residuos 1.68 y resulta

$$H_\varepsilon(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_2} \frac{e^z}{1-e^z} dz = \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{e^z}{1-e^z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{-e^z} = -1.$$

Entonces, como $H(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(1) = -1$, se tiene que $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$. Utilizando (2.3) en $*$, el valor de su residuo viene dado por

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) \stackrel{*}{=} -\lim_{s \rightarrow 1} (1-s)\Gamma(1-s)H(s) = -H(1) \lim_{s \rightarrow 1} \Gamma(2-s) = \Gamma(1) = 1.$$

□

2.2. Ecuación funcional

Ahora trataremos de dotar a $\zeta(s)$ de una extensión analítica más precisa. En 1859, Bernhard Riemann fue el primero en demostrar la herramienta fundamental para poder prolongar la función $\zeta(s)$, la ecuación funcional. Hay varias pruebas de la ecuación funcional pero, en este trabajo, se modificará la prueba que aparece en [1], hecha para la función Zeta de Hurwitz, al caso de $\zeta(s)$.

Lema 2.11. *Sea $S(r)$ la región resultante al quitar de \mathbb{C} los discos $D_r(2n\pi i)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, con $0 < r < \pi$ fijado (ver Figura I.2). Entonces, la función*

$$f(s) = \frac{e^s}{1-e^s}$$

está acotada en $S(r)$.

Demostración. Sean un número complejo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $r \in (0, \pi)$ y consideremos el siguiente conjunto $A(r) = \{s \in \mathbb{C} \mid |t| \leq \pi, |s| \geq r\}$ (ver Figura I.2). Como se tiene la siguiente desigualdad $|1 - e^s| = |e^s - 1| \geq |e^s| - 1 = e^\sigma - 1$, entonces se verifica la mayoración

$$\left| \frac{e^s}{1-e^s} \right| \leq \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} = g(\sigma)$$

con $g(\sigma) = -f(\sigma)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Teniendo en cuenta ahora que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} g(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} = 1,$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} g(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} = 0,$$

entonces, a partir de la definición de límite (tomando $\varepsilon = 1$), existen $M_1 > 0$ y $M_2 < 0$ tales que; si $\sigma > M_1$ entonces $|g(\sigma)| < 1 + 1 = 2$, y si $\sigma < M_2$ entonces: $|g(\sigma)| < 1 + 0 = 1$. En consecuencia, denotando $M = \max(M_1, |M_2|)$, si $\sigma \notin [-M, M]$, entonces

$$|f(s)| = \left| \frac{e^s}{1 - e^s} \right| \leq g(\sigma) \leq |g(\sigma)| \leq 2,$$

y si $\sigma \in [-M, M]$, como la función $f(s)$ es continua en el compacto $A(r) \cap \{\sigma' + it' \in \mathbb{C} \mid |\sigma'| \leq M\}$, en virtud del teorema de Weierstrass, $f(s)$ está acotada en dicho compacto. Por lo tanto, $f(s)$ está acotada en $A(r)$ y como $|f(s)| = |f(s + 2ni\pi)|$, entonces $f(s)$ está acotada en $S(r)$. \square

Ahora ya tenemos lo necesario para adaptar la ecuación funcional que se encuentra en [1].

Teorema 2.12 (Ecuación funcional de la función Zeta de Riemann). *Si $s \neq 0$, se tiene*

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s). \quad (2.5)$$

Del mismo modo, si $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1 - s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1 - s). \quad (2.6)$$

Demostración. Sea $\varepsilon \in (0, 2\pi)$ y consideremos la función

$$H_{N,\varepsilon}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(N)} \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz$$

donde $C(N)$ es el contorno que se puede ver en la Figura I.3, con $N \in \mathbb{N}$. Primero probaremos que $\lim_{N \rightarrow \infty} H_{N,\varepsilon}(s) = H_\varepsilon(s)$, si $\sigma < 0$. Para probar esto, basta con demostrar que la integral sobre la circunferencia exterior tiende a 0 cuando $N \rightarrow \infty$. En la circunferencia exterior se tiene $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$, por lo tanto:

$$|z^{s-1}| = |R^{s-1} e^{i\theta(s-1)}| = R^{\sigma-1} e^{-t\theta} \leq R^{\sigma-1} e^{\pi|t|}.$$

Como la circunferencia exterior se encuentra en el conjunto $S(r)$ del lema previo, el integrando está entonces acotado por $Ae^{\pi|t|} R^{\sigma-1}$ donde A es la cota de la función $|f(s)|$ del lema. En consecuencia, la integral está acotada por $2\pi Ae^{\pi|t|} R^\sigma$, término que tiende a 0 si $\sigma < 0$ y si $R \rightarrow \infty$. Nótese que $R \rightarrow \infty$ si y solo si $N \rightarrow \infty$. Entonces, se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} H_{N,\varepsilon}(s) = H_\varepsilon(s)$, si $\sigma < 0$. Ahora bien, reemplazando s por $1 - s$ obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_{N,\varepsilon}(1 - s) = H_\varepsilon(1 - s), \text{ si } \sigma > 1.$$

Podemos calcular explícitamente el valor de $H_{N,\varepsilon}(1 - s)$ gracias al Teorema de los residuos 1.68

$$H_{N,\varepsilon}(1 - s) = - \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N R(n) = - \sum_{n=1}^N (R(n) + R(-n)),$$

donde

$$R(n) = \operatorname{Res}_{z=2n\pi i} \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} = \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} (z - 2n\pi i) \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} = \frac{e^{2n\pi i}}{(2n\pi i)^s} \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} \frac{z - 2n\pi i}{1 - e^z} = -\frac{1}{(2n\pi i)^s}.$$

Obtenemos por lo tanto

$$H_{N,\varepsilon}(1-s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n\pi i)^s} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(-2n\pi i)^s}.$$

Como además se tiene $i^{-s} = e^{-\pi i s/2}$ y $(-i)^{-s} = e^{\pi i s/2}$ entonces

$$H_{N,\varepsilon}(1-s) = \frac{e^{-\pi i s/2}}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{e^{\pi i s/2}}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}.$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$ y usando la convergencia simple de $(H_{N,\varepsilon}(s))_{N \in \mathbb{N}}$ a $H_\varepsilon(s)$ si $\sigma < 0$, se tiene

$$H_\varepsilon(1-s) = \frac{(e^{-\pi i s/2} + e^{\pi i s/2})}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{(e^{-\pi i s/2} + e^{\pi i s/2})}{(2\pi)^s} \zeta(s).$$

Ahora, simplemente tomamos el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, para obtener

$$H(1-s) = (e^{-\pi i s/2} + e^{\pi i s/2})(2\pi)^{-s} \zeta(s).$$

Finalmente, basta con aplicar (2.3) y se tendrá para $\sigma > 1$

$$\zeta(1-s) = \Gamma(s)H(1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s). \quad (2.7)$$

Ahora bien, para extender el resultado a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ aplicando el Principio de identidad 1.41, bastaría, al tratarse de un abierto, con comprobar la holomorfía de ambos miembros de (2.7) en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. El miembro izquierdo de (2.7) es obviamente una función holomorfa para todo $s \neq 0$, ya que $\zeta(s)$ es holomorfa para todo $s \neq 1$. Para el miembro derecho, conviene remarcar que si evaluamos $s = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}, n > 0$ en (2.7), obtenemos que $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Teniendo esto en cuenta, el miembro derecho de (2.7) también es una función holomorfa para todo $s \neq 0$, ya que los polos simples de $\Gamma(s)$ en los enteros negativos pares e impares se cancelan con los ceros de $\zeta(s)$ y $\cos(\frac{\pi s}{2})$ respectivamente, mientras que el polo simple de $\zeta(s)$ en $s = 1$ se cancela con el cero de $\cos(\frac{\pi s}{2})$. Aplicando entonces el Principio de identidad 1.41, la igualdad (2.7) sigue siendo verdadera en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para obtener (2.6), basta con reemplazar s por $1-s$, y aplicar la fórmula

$$\cos\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{-\pi s}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right),$$

donde se ha utilizado la fórmula del ángulo suma 2 presente en 1.20 para el coseno. De esta forma, se obtiene la validez de (2.6) en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. \square

Observación 2.13. Como se acaba de ver, al sustituir s por $2n + 1$, con $n \in \mathbb{N}, n > 0$ en (2.7), el término $\cos(\frac{\pi s}{2})$ se anula y por lo tanto $\zeta(-2n) = 0$ para $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Estos ceros se denominan *ceros triviales* de $\zeta(s)$ y tendrán una gran importancia en el capítulo siguiente.

Observación 2.14. Nótese que (2.6) permite obtener también el valor de $\zeta(0)$. Para ello, basta con tener en cuenta que $\zeta(s)$ tiene un polo simple con residuo 1 en $s = 1$ y por tanto

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1 - s)\zeta(s) = -\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1)\zeta(s) = -1,$$

lo que implica, utilizando (2.6), $-1 = \lim_{s \rightarrow 1} 2(2\pi)^{s-1} [(1 - s)\Gamma(1 - s)] \sin(\frac{\pi s}{2}) \zeta(1 - s)$. Esto sugiere, aplicando (1.4) en *,

$$-1 \stackrel{*}{=} 2 \lim_{s \rightarrow 1} (2\pi)^{s-1} \Gamma(2 - s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1 - s) = 2\zeta(0),$$

y finalmente se obtiene $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

También existe una versión equivalente a (2.6), que involucra otra función que será relevante en la formulación de la hipótesis de Riemann. Se muestra a continuación dicha equivalencia.

Teorema 2.15. *Sea $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s - 1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ para todo $s \in \mathbb{C}$. Entonces, se tiene la ecuación funcional*

$$\xi(s) = \xi(1 - s), \text{ siendo } \xi(s) \text{ una función entera.} \quad (2.8)$$

Demostración. En primer lugar, se define la función $\phi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ que tiene polos simples en $s = 0, 1$. Al multiplicar por $\frac{1}{2}s(s - 1)$, se cancelan dichos polos, obteniendo entonces que $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s - 1)\phi(s)$ es una función entera. Para obtener la ecuación funcional, basta con aplicar la Fórmula de duplicación de Legendre (1.10) a $(1 - s)/2$

$$2^s \sqrt{\pi} \Gamma(1 - s) = \Gamma\left(\frac{1 - s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right),$$

junto a la Fórmula de reflexión de Euler (1.9)

$$\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

y por tanto

$$\Gamma(1 - s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1 - s}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) 2^s}.$$

Finalmente, basta sustituir dicha expresión en (2.6) para obtener $\phi(s) = \phi(1 - s)$ y por tanto $\xi(s) = \xi(1 - s)$. \square

Observación 2.16. Nótese que la ecuación funcional (2.6) es equivalente a (2.8). Otra versión equivalente a la ecuación funcional es, denotando por $\Xi(s) = \xi(\frac{1}{2} + is)$, la ecuación funcional $\Xi(s) = \Xi(-s)$. Esta última ecuación se puede resumir diciendo que $\Xi(s)$ es una función par.

2.2.1. Aproximación de $\zeta(s)$ por sumas finitas

A continuación, se presenta una extensión analítica de $\zeta(s)$ que resulta ser una forma alternativa de extender $\zeta(s)$ para $s \neq 1$ con $\sigma > 0$. El siguiente teorema es una herramienta fundamental para aproximar esta función por medio de sumas finitas.

Teorema 2.17 (Fórmula de sumación de Euler). *Si f tiene una derivada continua f' en el intervalo $[y, x]$, donde $0 < y < x$, entonces*

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + f(x)([x] - x) - f(y)([y] - y).$$

Demostración. Sean $m = [y]$ y $k = [x]$. Para enteros $n - 1$ y n en $[y, x]$, se tiene

$$\int_{n-1}^n [t] f'(t) dt = \int_{n-1}^n (n-1) f'(t) dt = (n-1) \{f(n) - f(n-1)\} = \{nf(n) - (n-1)f(n-1)\} - f(n).$$

Sumando de $n = m + 1$ a $n = k$, obtenemos

$$\int_m^k [t] f'(t) dt = \sum_{n=m+1}^k \{nf(n) - (n-1)f(n-1)\} - \sum_{y < n \leq x} f(n) = kf(k) - mf(m) - \sum_{y < n \leq x} f(n).$$

Por tanto,

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = - \int_m^k [t] f'(t) dt + kf(k) - mf(m) = - \int_y^x [t] f'(t) dt + kf(x) - mf(y). \quad (2.9)$$

Finalmente, basta considerar integración por partes

$$\int_y^x f(t) dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x t f'(t) dt,$$

de donde se obtiene, sumando y restando $\int_y^x f(t) dt$ en (2.9), la fórmula de sumación de Euler. \square

Teorema 2.18. *Sean $N \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ con $\sigma > 0$, entonces*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{(N+1)^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{x - [x]}{(x+1)^{s+1}} dx. \quad (2.10)$$

Demostración. Aplicando la Fórmula de sumación de Euler 2.17 a la función $f(t) = t^{-s}$, con enteros $0 < y < x$ obtenemos

$$\sum_{y < n \leq x} \frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{1}{t^s} dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + \frac{[x] - x}{x^s} - \frac{[y] - y}{y^s}.$$

Ahora bien, considerando $f'(t) = -st^{-s-1}$, $y = N$ y haciendo $x \rightarrow \infty$ con $\sigma > 1$, observamos que de los 2 últimos términos de la igualdad, el primero converge a cero, y el segundo vale cero, por lo que obtenemos

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{1}{t^s} dt - s \int_N^{\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt \stackrel{*}{=} -\frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^{\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt = \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}.$$

Nótese que la última igualdad es consecuencia de la definición de $\zeta(s)$. Esto prueba (2.10) para $\sigma > 1$. Ahora, para ver que la integral en el segundo miembro de $*$ es holomorfa en $\mathbb{H}_0 \setminus \{1\}$, basta con emplear un razonamiento análogo al expuesto en la Observación 2.5 sobre la prueba del Teorema 2.4. Por tanto el segundo miembro de $*$ es una función (de s) holomorfa en $\mathbb{H}_0 \setminus \{1\}$. Finalmente, como $\zeta(s)$ también es holomorfa en $\mathbb{H}_0 \setminus \{1\}$, basta aplicar el Principio de identidad 1.41 para obtener (2.10) cuando $\sigma > 0$ con $s \neq 1$. \square

2.3. Valores particulares de $\zeta(s)$

En esta sección, se mostrarán algunos valores de $\zeta(s)$, así como ciertas propiedades vinculadas a dichos valores, con el objetivo de preparar al lector para la siguiente sección. A modo de motivación para el cálculo de estos valores, resulta interesante remarcar lo siguiente.

La probabilidad de que dos naturales escogidos “al azar” (consultar [15] para ver los detalles del razonamiento) tengan al primo p como factor común es $\frac{1}{p^2}$, por lo que la probabilidad de que no lo tengan sería $1 - \frac{1}{p^2}$. Por tanto, la probabilidad de que dos naturales no compartan ningún factor primo en común es $\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$. Ahora, utilizando que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, resulta

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1}.$$

La situación se puede generalizar si escogemos n naturales en lugar de 2, obteniendo que dicha probabilidad equivale a $\zeta(n)^{-1}$. Esto muestra una primera conexión de $\zeta(s)$ con los números primos. Una expresión para $\zeta(n)^{-1}$ se obtiene a continuación, con el llamado *producto de Euler*.

Teorema 2.19 (Producto de Euler). *Si $\sigma > 1$, entonces*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

donde \mathbb{P} representa el conjunto de números primos positivos.

Demostración. Para demostrar este resultado, existe la demostración original de Euler, publicada en 1744 (aunque habría que modificarla ligeramente ya que Euler la probó para enteros). En este

trabajo, se utilizará una prueba más moderna, presente en [22]. Sea S un conjunto finito de números primos y $q(S) = \prod_{p \in S} p$. Probaremos por inducción sobre el número de elementos de S que

$$\prod_{p \in S} (1 - p^{-s}) \zeta(s) = \sum_{m, (m, q(S))=1} m^{-s}.$$

Por convención, se asume que un producto sobre un conjunto vacío de elementos es 1, por lo que la fórmula es válida para $S = \emptyset$. Ahora hay que probar que si la fórmula es válida para S y p' es un primo que no está en S , entonces también es válida para $S \cup \{p'\}$. Por el Teorema fundamental de la aritmética III.3, se tiene que todo entero m se puede escribir de forma única como $m = (p')^k m_1$ con $k \geq 0$ y $(m_1, p') = 1$. Ahora, si $(m, q(S)) = 1$, entonces $(m_1, q(S)) = 1$ y, además, todos los números coprimos con $q(S)$ se pueden generar de esta forma. En consecuencia, como $(m_1, q(S)) = 1$ y $(m_1, p') = 1$ equivalen a $(m_1, q(S)p') = 1$, donde $q(S)p' = q(S \cup \{p'\})$, se tendrá

$$\sum_{m | (m, q(S))=1} m^{-s} = \sum_{m_1 | (m_1, q(S \cup \{p'\}))=1} \sum_{k \geq 0} (p')^{-ks} m_1^{-s} = \sum_{m_1 | (m_1, q(S \cup \{p'\}))=1} m_1^{-s} \frac{1}{1 - (p')^{-s}}.$$

Por tanto, solo hace falta multiplicar dicha ecuación por $1 - (p')^{-s}$ y aplicar la hipótesis de inducción para obtener la fórmula para $S \cup \{p'\}$. Finalmente, basta con considerar el conjunto $S = S(X) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq X\}$ con X número real positivo. Como el único número natural inferior a X y coprimo con todos los primos inferiores a X es 1, se tiene la siguiente inclusión $\{m \mid (m, q(S(X))) = 1\} \subset \{1\} \cup \{n \mid n > X\}$, y por tanto

$$\left| \prod_{p \leq X} (1 - p^{-s}) \zeta(s) - 1 \right| \leq \sum_{m > X} m^{-\sigma}.$$

Como la función $\zeta(s)$ es convergente si $\sigma > 1$, el segundo miembro de la desigualdad convergerá a cero si $X \rightarrow \infty$, lo que prueba el resultado. \square

A continuación procedemos a obtener fórmulas explícitas para algunos valores de $\zeta(s)$.

2.3.1. Números de Bernoulli

Los números de Bernoulli surgen con el propósito de calcular $\zeta(-n)$ para un entero n no negativo. Esto sucede ya que, al evaluar (2.3) en $s = -n$ y aplicar (1.4), resulta

$$\zeta(-n) = \Gamma(1 + n) H(-n) = n! H(-n).$$

Además,

$$H(-n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{-n-1} e^z}{1 - e^z} dz = \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{-n-1} e^z}{1 - e^z} \right),$$

lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.20. Los *números de Bernoulli* son la sucesión de números racionales $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\frac{se^s}{e^s - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} s^n, \quad \text{donde } |s| < 2\pi.$$

Observación 2.21. Del mismo modo a como ocurría con la función Zeta de Hurwitz, se pueden definir las *funciones de Bernoulli* (que de hecho, son polinomios) como las funciones $B_n(x)$ tales que

$$\frac{se^{xs}}{e^s - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} s^n, \quad \text{donde } |s| < 2\pi. \quad (2.11)$$

Cabe destacar que los resultados que involucran a la función Zeta de Hurwitz están relacionados con las funciones de Bernoulli, mientras que los resultados ligados a la función Zeta de Riemann, lo están a los números de Bernoulli.

Observación 2.22. En el Cuadro I.1 se pueden consultar los valores de B_n hasta $n = 10$. Nótese que ciertos autores sugieren considerar la función $s/(e^s - 1)$, en lugar de la presente en (2.11). Esto solo diferiría de nuestra definición en el valor de B_1 , que sería $-1/2$, en lugar de $1/2$.

Proposición 2.23. Para todo entero $n \geq 0$ se tiene

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}. \quad (2.12)$$

Además, $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. Para demostrar (2.12), basta con observar que se tiene la siguiente igualdad $\zeta(-n) = \Gamma(1+n)H(-n) = n!H(-n)$ para un entero $n \geq 0$ y calcular

$$H(-n) = \operatorname{Res}_{s=0} \left(\frac{s^{-n-1}e^s}{1-e^s} \right) = -\operatorname{Res}_{s=0} \left(s^{-n-2} \frac{se^s}{e^s-1} \right) = -\operatorname{Res}_{s=0} \left(s^{-n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} s^k \right) = -\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Multiplicando por $n!$ la igualdad queda probada. Con respecto a que $B_{2n+1} = 0$ basta con tener en cuenta que la función Zeta se anula en los *ceros triviales* y por tanto aplicando (2.12) en dichos ceros, resulta $\zeta(-2n) = 0 = -\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$ para $n \geq 1$. \square

Un gran interés por calcular ciertos valores de la función Zeta de Riemann, reposa en particular sobre el cálculo de $\zeta(2)$. Dicho valor es la solución del famoso *problema de Basilea*, cuyo enunciado consiste en averiguar el valor de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Este problema fue resuelto por Leonhard Euler probablemente en 1736 (y propuesto por Pietro Mengoli en 1650) utilizando desarrollos de Taylor de la función $\sin(x)/x$, y obteniendo el valor $\frac{\pi^2}{6}$. El siguiente teorema resulta dar una respuesta alternativa y generalizada a tal cuestión.

Proposición 2.24. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

Además, los números de Bernoulli alternan en signo.

Demostración. Surge como consecuencia de considerar $s = 2n$ en (2.5)

$$\zeta(1 - 2n) = 2(2\pi)^{-2n} \Gamma(2n) \cos(n\pi) \zeta(2n),$$

y del teorema previo

$$\zeta(1 - 2n) = \zeta(-(2n - 1)) = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

Para ver que los números de Bernoulli alternan en signo, basta con observar que $\zeta(2n) > 0$ y por tanto $(-1)^{n+1} B_{2n} > 0$. \square

Observación 2.25. Nótese que si quisiéramos obtener el valor de $\zeta(2n + 1)$ utilizando (2.5) para $s = 2n + 1$, se tendría la nula igualdad de ambos miembros de la ecuación, no obteniendo pues información sobre $\zeta(2n + 1)$. El problema de obtener una expresión explícita y simple de $\zeta(2n + 1)$ con n un entero sigue en abierto. Uno de tales valores sería $\zeta(3)$, conocido como la *constante de Apéry* (cuyo valor aproximado es de 1,202). Esta constante, junto a $\zeta(2)$, resultan ser irracionales.

2.3.2. Algunas desigualdades

En esta sección se presentan ciertas desigualdades de $\zeta(s)$ que serán útiles posteriormente.

Teorema 2.26. *Si $\sigma > 1$, entonces*

$$(i) \quad |\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad |\zeta(s)| \geq (1 - \varepsilon)\zeta(\sigma), \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande con } \varepsilon > 0.$$

Demostración. Para demostrar (i), es suficiente con tener en cuenta la definición de $\zeta(s)$, ya que se tiene $|\zeta(s)| = |\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} = \zeta(\sigma)$. Con respecto a (ii), conviene remarcar que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} e^{-it \log(n)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma - it},$$

y en consecuencia,

$$|\zeta(s)| \geq \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} \cos(t \log(n)) - \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}. \quad (2.13)$$

Aplicando el Teorema de Dirichlet III.4, existen $t \in [t_0, t_0 q^N]$ y $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{Z}$ tales que, dados $N \in \mathbb{N}$ y $q \geq 4$, se tiene

$$\left| \frac{t \log(n)}{2\pi} - x_n \right| \leq \frac{1}{q}, \forall n \in 1, 2, \dots, N.$$

Por tanto, $\cos(t \log(n)) \geq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$, $\forall n \in 1, 2, \dots, N$ y entonces

$$\sum_{n=1}^N n^{-\sigma} \cos(t \log(n)) \geq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \sum_{n=1}^N n^{-\sigma} > \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \zeta(\sigma) - \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}.$$

Teniendo en cuenta (2.13), resulta $|\zeta(s)| \geq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \zeta(\sigma) - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}$. Ahora bien, como

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} > \int_1^{\infty} u^{-\sigma} du = \frac{1}{\sigma-1}, \text{ y adem\u00e1s } \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} < \int_N^{\infty} u^{-\sigma} du = \frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1},$$

se tiene $|\zeta(s)| \geq \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) - 2N^{1-\sigma} \right\} \zeta(\sigma)$. Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ y $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}$ en las definiciones de los l\u00edmites $\lim_{q \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{1-\sigma}$, se obtiene directamente (ii). \square

Corolario 2.27. *La funci\u00f3n $\zeta(s)$ es no acotada en $\{s = \sigma + it \mid \sigma > 1, t > \delta > 0\} \subset \mathbb{H}_1$.*

Demostraci\u00f3n. Basta observar que la cota inferior de $|\zeta(s)|$ tiende a infinito cuando $\sigma \rightarrow 1$ en la desigualdad (ii) del teorema precedente. \square

Lema 2.28. *Si $\sigma > 1$, entonces*

$$\zeta(s) = \exp \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-s} \right\}, \quad (2.14)$$

donde $\Lambda(n)$ es la funci\u00f3n de Von Mangoldt III.7.

Demostraci\u00f3n. Haciendo uso del Producto de Euler 2.19 probaremos el resultado para $s \in \mathbb{R}$ con $s > 1$ y posteriormente lo extenderemos a \mathbb{H}_1 con el Principio de identidad 1.41. Si $s \in \mathbb{R}, s > 1$, entonces $\zeta(s) > 0$. Adem\u00e1s, tomando logaritmos y usando el desarrollo en serie de potencias de la funci\u00f3n $-\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$ obtenemos

$$\log \zeta(s) = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 - p^{-s}) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_1(n) n^{-s},$$

donde $\Lambda_1(n) = \frac{1}{m}$ si $n = p^m$ para alg\u00fan $p \in \mathbb{P}$ y 0 en otro caso. Si $n = p^m$ entonces $\log(n) = m \log(p) = m \Lambda(n)$, por lo que en dicho caso $\Lambda_1(n) = \frac{1}{m} = \frac{\Lambda(n)}{\log(n)}$ y en consecuencia

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-s},$$

lo cual implica (2.14) para $s \in \mathbb{R}$ con $s > 1$. Finalmente, como cada miembro de (2.14) es holomorfo en \mathbb{H}_1 , el resultado se extiende a dicho abierto por el Principio de identidad 1.41. \square

Observación 2.29. Por el Lema 2.28, se obtiene para $\sigma > 1$, derivando (2.14) que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) \exp\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-s}\right\}}{\exp\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-s}\right\}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad (2.15)$$

donde la derivación se justifica ya que $\zeta(s)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y por lo tanto, en virtud del Corolario 1.42, su derivada $\zeta'(s)$ también es holomorfa en dicho subconjunto.

Teorema 2.30. *Si $\sigma > 1$, se tiene*

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(s)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1. \quad (2.16)$$

Demostración. Para demostrar (2.16), usaremos el lema previo, por el cual se tiene

$$\zeta(s) = \exp\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-s}\right\} = \exp\left\{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m}\right\} = \exp\left\{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-imt \log(p)}}{mp^{m\sigma}}\right\}.$$

Ahora bien, calculando el módulo de $\zeta(s)$, obtendremos

$$|\zeta(s)| = \exp\left\{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt \log(p))}{mp^{m\sigma}}\right\}.$$

Aplicando entonces esta fórmula para los valores de s que intervienen en (2.16), se tiene

$$\zeta^3(\sigma) |\zeta(s)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = \exp\left\{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4 \cos(mt \log(p)) + \cos(2mt \log(p))}{mp^{m\sigma}}\right\} \stackrel{*}{\geq} 1,$$

donde $*$ se justifica mediante $3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 3 + 4 \cos(\theta) + 2 \cos^2(\theta) - 1 = 2(1 + \cos(\theta))^2$ y observando que entonces todos los términos de la serie son no negativos, lo que prueba (2.16). \square

Se finaliza la sección con una desigualdad que será de utilidad en el último capítulo, cuya prueba se puede ver en [1].

Teorema 2.31. *Existe una constante $M > 0$ tal que para todo $\sigma \geq 1$ y $t \geq e$, se tiene*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M \log^7 t \quad y \quad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < M \log^9 t. \quad (2.17)$$

2.3.3. Ceros de $\zeta(s)$

El estudio de los ceros de $\zeta(s)$ es una parte fundamental de toda la teoría que subyace a la misma. En esta parte trataremos de localizar lo máximo posible los ceros de la función Zeta. Comenzamos mostrando un resultado ampliamente conocido, consecuencia directa del Producto de Euler 2.19, que permite obtener una primera zona de no nulidad de la función Zeta.

Corolario 2.32. $\zeta(s)$ no tiene ceros en \mathbb{H}_1 .

Demostración. En virtud del Producto de Euler 2.19, $\zeta(s)$ está representada por un producto infinito convergente de factores no nulos en \mathbb{H}_1 , lo que implica, aplicando III.17, que $\zeta(s)$ no tiene ceros para $\sigma > 1$. \square

Definición 2.33. En el contexto de la función Zeta de Riemann, se denomina la *banda crítica* a la región del plano complejo $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \in [0, 1]\}$. Del mismo modo, se denomina la *línea crítica* a la recta $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \frac{1}{2}\}$.

Teorema 2.34. Los únicos ceros de $\zeta(s)$ distintos de los ceros triviales se encuentran en la banda crítica.

Demostración. Como ya anticipábamos con el Producto de Euler 2.19, el hecho de que la función Zeta se exprese como producto infinito de factores no nulos para $\sigma > 1$, ya implica que no se anula para dichos valores. Ahora bien, si $\sigma < 0$, utilizando (2.6) y teniendo en consideración la no nulidad de la función Gamma, así como el Corolario 2.32, podemos deducir lo siguiente

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) = 0 \iff \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0,$$

Utilizando a continuación la propiedad 3 de la exponencial compleja, presente en 1.17

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi s}{2}} - e^{-i\frac{\pi s}{2}}}{2i} = 0 \iff e^{i\frac{\pi s}{2}} = e^{-i\frac{\pi s}{2}} \iff e^{i\pi s} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid i\pi s = 2k\pi i.$$

Finalmente, como $\sigma < 0$, obtenemos directamente los *ceros triviales* $s = 2k, k \leq 0$, por lo que si $\zeta(s)$ se anula en algún punto que no sea un cero trivial, ha de ser dentro de la banda crítica. \square

Observación 2.35. Los ceros de $\zeta(s)$ que se encuentran en la *banda crítica* se denominan *ceros no triviales*. Estos ceros son los que aparecerán en la hipótesis de Riemann.

Teorema 2.36. Los ceros no triviales se sitúan simétricamente respecto a la línea crítica.

Demostración. Sea s un cero no trivial, es decir, un número complejo tal que $\zeta(s) = 0$, con $\sigma \in (0, 1)$. Entonces, por (2.5) resulta $\zeta(1-s) = 0$. Es decir, $s^* = 1-s$ es también un cero no trivial. \square

Teorema 2.37 (de Hadamard-de la Vallée Poussin). Se tiene $\zeta(1+it) \neq 0$, para todo $t \neq 0$.

Demostración. Si $\sigma > 1$, obtenemos dividiendo por $\sigma - 1$ en (2.16) lo siguiente

$$\{(\sigma - 1)\zeta(\sigma)\}^3 \left| \frac{\zeta(s)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq \frac{1}{\sigma - 1}. \quad (2.18)$$

Ahora bien, considerando el límite $\sigma \rightarrow 1^+$, podemos observar que el primer factor converge a 1, ya que $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo 1, y el tercer factor converge a $|\zeta(1 + 2it)|$. Si existiese $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$, tal que $\zeta(1 + it) = 0$, entonces se tendría

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1} \right|^4 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 1^+} |\zeta'(1 + it)|^4.$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de (2.18) convergería a $|\zeta'(1 + it)|^4 |\zeta(1 + 2it)|$ cuando $\sigma \rightarrow 1^+$, mientras que el lado derecho de (2.18) tiende a ∞ cuando $\sigma \rightarrow 1^+$, obteniendo una contradicción. \square

Corolario 2.38. *Se tiene $\zeta(it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 2.37, junto a (2.6). \square

Teorema 2.39. *Si $\sigma > 0$, $s \neq 1$, entonces*

$$(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, si $s = \sigma \in (0, 1)$ entonces $\zeta(s) < 0$.

Demostración. Sea $\sigma > 1$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = (1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots) - 2(2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + \dots) \\ &= 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - 6^{-s} + \dots \end{aligned}$$

lo cual demuestra (2.19) para $\sigma > 1$. Ahora, si $\sigma > 0$, $s \neq 1$, como la serie de la derecha en (2.19) converge y ambos miembros de (2.19) son holomorfos, se tiene por el Principio de identidad 1.41 que (2.19) es cierta para $\sigma > 0$, $s \neq 1$. Finalmente, si $s \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ es alternada y con suma positiva, por lo que si $s \in (0, 1)$, entonces $(1 - 2^{1-s}) < 0$ y entonces $\zeta(s) < 0$. \square

Observación 2.40. Como consecuencia de los Teoremas 2.37 y 2.39, así como del Corolario 2.38, la función Zeta de Riemann no tiene ceros en el eje real, a excepción de los ceros triviales, ni en el eje imaginario puro, ni en la línea $\sigma = 1$.

El siguiente teorema, probado por Godfrey Harold Hardy en 1914, fue el primer resultado teórico que se tuvo sobre los ceros de $\zeta(s)$ en la línea crítica. No se incluye esta prueba por su longitud y complejidad pero varias pruebas de este teorema se pueden encontrar en [17].

Teorema 2.41 (de Hardy). *$\zeta(s)$ tiene una infinidad de ceros en la línea crítica.*

Observación 2.42. Relacionado con la distribución de los ceros de la función Zeta de Riemann en la línea crítica, destaca también la *hipótesis de Lindelöf*, según la cual $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$.

A continuación, exponemos un razonamiento, cuyos fundamentos se encuentran rigurosamente explicados en [17].

Se puede demostrar que $\Xi(s)$ tiene una infinidad de ceros y que por lo tanto, lo mismo es cierto para $\xi(s)$. Ahora bien, se tiene que los ceros triviales de $\zeta(s)$ no se corresponden con ceros de $\xi(s)$, puesto que se cancelan con los polos de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ en la definición de $\xi(s)$. Del mismo modo, se deduce de la definición de $\xi(s)$ y de las propiedades demostradas sobre los ceros de $\zeta(s)$, que todos los ceros de $\xi(s)$ están en la banda crítica y son además ceros de $\zeta(s)$, ya que $s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ no tiene ceros en dicha banda, a excepción de $s = 1$, el cual se cancela con el polo de $\zeta(s)$. Se prueba de este modo que $\zeta(s)$ tiene una infinidad de ceros en la banda crítica. Además, en [24], Riemann prueba que la función $\Xi(s)$ de la Observación 2.16 es una función entera, cuyos ceros tienen parte imaginaria entre $-\frac{i}{2}$ e $\frac{i}{2}$. En dicha memoria, Riemann escribe también el siguiente resultado, que nosotros escribiremos en formato de teorema.

Teorema 2.43. *Se tiene que los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ son los números complejos $s = \frac{1}{2} + i\alpha$, donde α es un cero de $\Xi(s)$.*

Para finalizar la sección, se enuncian ciertas propiedades sobre los ceros de la función Zeta, cuya demostración omitiremos por los mismos motivos que previamente. Del mismo modo, se muestra una de las propiedades más importantes de la función Zeta, la universalidad. La prueba de este último resultado se puede consultar en [2] y [3].

Teorema 2.44. *Sea $N_0(T)$ el número de ceros de $\zeta(s)$ de la forma $s = \frac{1}{2} + it$ con $0 < t \leq T$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- *Existe una constante $A > 0$ tal que $N_0(T) > AT$. Por tanto, $N_0(T) \rightarrow \infty$ cuando $T \rightarrow \infty$.*
- *Existe una constante $B > 0$ tal que $N_0(T) > BT \log(T)$.*

Teorema 2.45 (Sobre la universalidad de la función Zeta). *Sea S un subconjunto compacto de la banda $\{s \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ tal que $\mathbb{C} \setminus S$ es conexo. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en S y holomorfa en el interior de S . Si f no tiene ceros en S , entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $t \geq 0$ tal que*

$$|\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon \text{ para todo } s \in S.$$

Además, si λ denota la medida de Lebesgue, se tiene

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda \left(\left\{ t \in [0, T] \mid \max_{s \in S} |\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

2.4. Aplicaciones de $\zeta(s)$

2.4.1. La Zeta-regularización

La principal aplicación de la función Zeta de Riemann en la física es en lo que se conoce como Zeta-regularización. Este método, consiste en una asignación de valores finitos, a cantidades infinitas, debidas generalmente a series, productos infinitos o integrales divergentes, haciendo uso de $\zeta(s)$. La idea es identificar la divergencia con esta función, y posteriormente, aplicando las definiciones que figuran en la sección, usar la extensión analítica de $\zeta(s)$, eliminando así la divergencia. Uno de los primeros científicos en describir este tipo de procedimiento, fue el físico teórico Stephen Hawking, quien en su artículo [16], estableció un método para Zeta-regularizar integrales de camino cuadráticas en espaciotiempo curvo. Toda la teoría que aparece sobre la Zeta-regularización se puede consultar con detalle en [12]. A continuación, introduciremos varias definiciones que permiten asignar un valor finito a series o productos infinitos divergentes.

Definición 2.46. Sea $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ una serie divergente. Se define, en caso de que exista, la *suma Zeta-regularizada* de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ como el valor $\zeta_a(-1)$, donde

$$\zeta_a(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n^s}, \text{ para } \sigma \text{ suficientemente grande.}$$

Ejemplo 2.47. Un caso particular en el que se puede encontrar una suma Zeta-regularizada es en el caso de que $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. En tal caso, se tiene que $\zeta_a(-1) = \zeta(-1) = -1/12$.

Definición 2.48. Dado un operador A , con autovalores positivos $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y verificando ciertas propiedades, se define su *función zeta*, denotada por $\zeta_A(s)$, como

$$\zeta_A(s) = \text{tr} A^{-s} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-s} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-s \log(\lambda_j)}, \text{ para } \sigma \text{ suficientemente grande.} \quad (2.20)$$

Observación 2.49. Estas funciones zeta son lo que se utiliza, en general, para Zeta-regularizar muchos objetos matemáticos divergentes. Además, derivando la expresión (2.20), se obtiene

$$\zeta'_A(s) = - \sum_{j \in \mathbb{N}} \log(\lambda_j) e^{-s \log(\lambda_j)}. \quad (2.21)$$

Evalutando (2.21) en $s = 0$, se obtiene $\zeta'_A(0) = - \sum_{j \in \mathbb{N}} \log(\lambda_j) = - \log \left(\prod_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \right)$. Esto motiva la siguiente asignación finita al producto infinito divergente $\prod_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j$.

Definición 2.50. Sea $a = \prod_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j$ un producto infinito divergente, donde $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son los autovalores positivos de un cierto operador A . Se define su *producto infinito Zeta-regularizado*, como el valor $\exp\{-\zeta'_A(0)\}$.

Observación 2.51. Esta definición es de gran valor en la teoría cuántica de campos, donde es frecuente encontrarse operadores para los que $\prod_{i \in I} \lambda_i$ es divergente.

En las siguientes dos secciones, trataremos dos casos particulares en los que tanto las funciones zeta, como $\zeta(s)$, se han utilizado para regularizar y realizar cálculos en teoría cuántica de campos.

2.4.2. El efecto Casimir

Para la elaboración de esta sección, se ha empleado principalmente [12], por lo que se recomienda al lector acudir a dicha obra para obtener más detalles.

El *efecto Casimir*, introducido por primera vez en 1948 por Hendrik Casimir, es un fenómeno físico por el que dos placas neutras, infinitas, conductoras y paralelas, situadas extremadamente cerca en el vacío, se sienten atraídas por una fuerza. Cabe destacar que, en un primer momento, el efecto Casimir se explicaba utilizando las fuerzas relativistas de Van der Waals, así como la teoría de Lifshitz. Hoy en día, sin embargo, la teoría cuántica de campos sugiere una perspectiva más razonable, utilizando lo que se denomina *punto de energía cero* del vacío. Este razonamiento postula que la fuerza del efecto Casimir proviene de desviaciones del punto de energía cero del vacío, debido a condiciones externas.

En esta sección veremos cómo la función Zeta de Riemann, así como las funciones zeta que se han definido previamente, se pueden aplicar para realizar cálculos y expresar magnitudes en dicho efecto. Debido al nivel de complejidad que suponen los cálculos involucrados, se ha optado por presentar las conclusiones y hallazgos que vinculan el efecto Casimir con la función Zeta de Riemann y la Zeta-regularización.

Con respecto al efecto Casimir, se considera una energía que resulta fundamental en el cálculo de la fuerza. Esta energía se denomina *energía de Casimir* y se puede expresar como

$$E_{\text{Cas}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n,$$

donde $\hbar = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ denota la *constante de Planck* y w_n^2 representan los autovalores del operador de Klein-Gordon. Ahora bien, esta suma es, en general, divergente, por lo que conviene regularizarla. Tras ciertos cálculos complejos, se llega a la siguiente expresión de la energía Zeta-regularizada

$$E_{\text{reg}}(\varepsilon) = \frac{\hbar}{2} c \mu \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\lambda_n}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2} - \varepsilon} = \frac{\hbar}{2} c \mu \zeta_{D_3} \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right),$$

donde D_3 es un cierto operador cuyos autovalores son λ_n , c es la velocidad de la luz y μ es un valor físico. Ahora, simplificando las hipótesis y suponiendo que las placas tienen superficie S y se encuentran a una longitud L , realizando algunos cálculos y utilizando la Zeta-regularización, se puede llegar a obtener una expresión para la energía de Casimir como

$$E_{\text{Cas}}(L, S) = -\frac{\hbar c S \pi^2}{12 L^3} \zeta(-3).$$

Finalmente, aplicando (2.12) y teniendo en cuenta que $B_4 = -1/30$, se tiene que $\zeta(-3) = 1/120$ y por lo tanto

$$E_{\text{Cas}}(L, S) = -\frac{\hbar c S \pi^2}{12L^3} \frac{1}{120} = -\frac{\hbar c S \pi^2}{1440L^3}. \quad (2.22)$$

Podemos ver entonces como la función Zeta de Riemann ha permitido realizar avances en el cálculo de la energía de Casimir. Para finalizar, cabe remarcar que varios avances en el campo han permitido realizar modificaciones sobre las hipótesis del efecto Casimir y, en la mayoría de ellas, el papel de las funciones zeta resulta fundamental, tanto para regularizar las operaciones, como para expresar las conclusiones.

2.4.3. Electrodinámica cuántica

En esta sección, veremos cómo $\zeta(s)$ influye en el campo de la electrodinámica cuántica y cómo podemos obtener, desde una perspectiva matemática, ecuaciones que se obtienen como el resultado de ciertos fenómenos físicos. La información presente en esta sección se basa en [11], por lo que se recomienda al lector acudir a tal obra para profundizar.

Para comenzar, conviene saber que, en física, un *lagrangiano* es una función que ayuda a describir el comportamiento de un sistema dinámico. Ahora bien, resulta que el primer lagrangiano efectivo en teoría cuántica de campos fue introducido por primera vez por Werner Heisenberg y Hans Euler, en 1936. Este lagrangiano considera una modificación del lagrangiano clásico de un campo electromagnético constante. Esta modificación se debe a la *polarización del vacío cuántico*, es decir, el efecto de un campo electromagnético constante exterior en el movimiento de electrones en el vacío.

Para simplificar, consideraremos un campo magnético constante en el eje Z . En este caso, el lagrangiano modificado tiene la forma $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}^{(0)}(B) + \mathcal{L}^{(1)}(B)$, donde

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2}B^2, \quad \mathcal{L}^{(1)}(B) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-im^2s}}{s^3} \left[(eBs) \cot(eBs) + \frac{1}{3}(eBs)^2 - 1 \right] ds.$$

Para calcular la integral que define $\mathcal{L}^{(1)}(B)$, se utilizó, entre otros métodos, la Zeta-regularización, obteniendo una expresión que no es demasiado manejable, pero que, para valores fuertes del campo $\frac{eB}{m^2} \gg 1$, la expresión se simplifica y de hecho se obtiene

$$\lim_{\frac{eB}{m^2} \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{(1)}(B) = \frac{(eB)^2}{24\pi^2} \left\{ \log\left(\frac{eB}{m^2}\right) + 12\zeta'(-1) - 1 + \log(2) \right\}. \quad (2.23)$$

Por otro lado, también se ha encontrado que

$$\lim_{\frac{eB}{m^2} \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{(1)}(B) = \frac{(eB)^2}{24\pi^2} \left\{ \log\left(\frac{eB}{\pi m^2}\right) - \gamma + \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2) \right\}. \quad (2.24)$$

Igualando ahora (2.23) y (2.24), se obtiene

$$12\zeta'(-1) - 1 = -\log(2\pi) - \gamma + \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2). \quad (2.25)$$

Es relevante observar que (2.25) no proviene de consideraciones propias de la matemática pura, sino de un fenómeno físico, que surge al considerar el movimiento de electrones en el vacío, sometidos a un campo magnético clásico, que es constante, externo y fuerte. Esto pone de manifiesto una de las maneras en que la función $\zeta(s)$ interviene en la física y, en particular, en el tratamiento del vacío cuántico. El teorema que se muestra a continuación, permite obtener (2.25) directamente, aplicando (2.6).

Teorema 2.52. *Se verifica la ecuación $12\zeta'(-1) - 1 = -\log(2\pi) - \gamma + \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2)$.*

Demostración. Como la función $\zeta(s)$ es holomorfa, entonces $\zeta'(s)$ también es holomorfa, en virtud del Corolario 1.42, por lo que la expresión (2.25) tiene sentido. Análogamente ocurre para la función $\Gamma(s)$. Teniendo en cuenta que $2(2\pi)^{s-1} = e^{s \log(2)} e^{(s-1) \log(\pi)}$ y derivando (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} \zeta'(s) = & (\log(2) + \log(\pi))2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \\ & + \frac{\pi}{2}2^s \pi^{s-1} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \\ & - 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) (\Gamma'(1-s)\zeta(1-s) + \Gamma(1-s)\zeta'(1-s)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ahora evaluando (2.26) en $s = -1$ y utilizando que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (problema de Basilea), junto a (1.11), se tiene

$$\zeta'(-1) = -\log(2)\frac{1}{12} - \log(\pi)\frac{1}{12} + (1-\gamma)\frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2}\zeta'(2) = \frac{1}{12} \left[1 - \log(2\pi) - \gamma + \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2) \right],$$

es decir, $12\zeta'(-1) - 1 = -\log(2\pi) - \gamma + \frac{6}{\pi^2}\zeta'(2)$. \square

Observación 2.53. Utilizando un razonamiento similar, evaluando (2.26) en $s = -2$, se tiene $\zeta'(-2) = \frac{\pi}{2}2^{-2}\pi^{-3} \cos(-\pi)\Gamma(3)\zeta(3)$, y como $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, se tiene $\zeta(3) = -4\pi^2\zeta'(-2)$. Ahora bien, $\zeta(3)$, que como sabemos es la constante de Apéry, es un valor necesario para realizar numerosos cálculos en electrodinámica cuántica. Por ejemplo, se utiliza para calcular las correcciones radiactivas de segundo y tercer orden del momento magnético anómalo del electrón y el muón. También es útil para comprender el decaimiento de π^0 en dos fotones. Además, los valores $\zeta'(1)$ y $\zeta'(-2)$ son fundamentales para evaluar los efectos de la contribución no lineal de Euler-Heisenberg en el lagrangiano modificado en electrodinámica cuántica.

2.4.4. La ley de Zipf

Otro de los aspectos en los que la función Zeta de Riemann ha influido considerablemente es en la teoría de la probabilidad. Esta influencia se manifiesta en gran parte en dos conceptos

profundamente relacionados: la distribución Zeta y la ley de Zipf. Para la redacción de esta parte, las referencias principales serán [20], [23] y [25]. Comenzaremos con la distribución Zeta.

Definición 2.54. Se dice que una variable aleatoria discreta X sigue la distribución Zeta, o la distribución de Pareto discreta, con parámetro $\sigma > 1$ si su función de masa de probabilidad es

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Observación 2.55. Aunque en [20] esta definición se dé para $\sigma > 0$, aquí se ha optado por considerar $\sigma > 1$ ya que de esta forma podemos utilizar la definición de $\zeta(s)$ como una serie.

A partir de la Definición 2.54 resulta evidente la siguiente proposición.

Proposición 2.56. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución Zeta con parámetro σ , entonces su función de repartición viene dada por

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \frac{H_{n,\sigma}}{\zeta(\sigma)}, \text{ donde } H_{n,\sigma} = \sum_{j=1}^n j^{-\sigma}.$$

El interés fundamental de esta distribución es que es el elemento matemático empleado en la ley de Zipf para la resolución de diversos problemas. Esta ley, introducida en 1949 por George Kingsley Zipf, es una ley empírica, que sostiene que la frecuencia de aparición de la n -ésima palabra más frecuente en una lengua dada es inversamente proporcional a n . Esto es, si f_n denota la frecuencia de la n -ésima palabra más frecuente, entonces $f_n \propto 1/n^\sigma$, donde σ es un número real positivo poco superior a 1. Se recomienda al lector acudir a [23] o [25] para una lectura detallada al respecto. A modo de ejemplo, es interesante remarcar que en la mayoría de lenguajes naturales se aplica la ley de Zipf, e incluso en la música. Se piensa que esto es así debido al *principio del mínimo esfuerzo*. Además, la ley de Zipf no solo se utiliza en lingüística, sino que puede generalizarse a una situación en la que se tiene una lista de valores ordenados asociados a una división en m grupos de una población, en la que se postula que el valor n -ésimo es inversamente proporcional a n . En este contexto, se puede utilizar una versión aproximada de la distribución Zeta para realizar los cálculos de la siguiente forma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^{-\sigma}}{H_{m,\sigma}}, \text{ con } \sigma > 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*.$$

Esta generalización se aplica en diversos campos como la geoestadística, tráfico en la nube, economía, etc. Esto permite extender las aplicaciones de la función Zeta de Riemann a dominios más amplios, no sólo limitándose a aspectos científicos.

Aunque no se presente en esta sección debido a la importancia de la misma, es obvio que una de las aplicaciones más relevantes de la función $\zeta(s)$ es en el campo de la teoría de números, en particular, en la distribución de los números primos. Esta aplicación se tratará en profundidad en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

La hipótesis de Riemann

La *hipótesis de Riemann* es uno de los problemas más importantes en matemática pura, llegando a formar parte de los siete problemas del milenio. En este capítulo, se estudiará la hipótesis que le da nombre; comenzando con su contexto histórico, siguiendo con una prueba del teorema de los números primos basada en la función Zeta de Riemann y finalizando con un análisis de la hipótesis de Riemann. Esta hipótesis se enuncia a continuación.

Hipótesis de Riemann (HR). Todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$.

3.1. Contexto histórico

En esta sección introduciremos el contexto histórico que rodea la aparición de la hipótesis de Riemann, para el que nos basaremos principalmente en [4], [6] y [8], que serán buenas referencias para el lector en caso de buscar más detalles.

Como comentábamos en la introducción, la primera relación entre los números primos y $\zeta(s)$ aparece en 1748, en el libro de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum*, bajo la forma del Producto de Euler 2.19. Euler también demostró que la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ implicaba la infinitud de los números primos. Esta infinitud había sido probado previamente por Euclides en la proposición 20 del libro IX de sus *Elementos*. Uno de los grandes logros de Euler es conectar los campos del análisis y teoría analítica de números, sentando las bases de los posteriores trabajos de Riemann. En 1837, Dirichlet probó la existencia de una cantidad infinita de números primos en cualquier progresión aritmética $mn+p$ con m y p enteros coprimos positivos y doce años después, Gauss escribe en una carta que el número de primos inferiores a una cantidad x , denotado por $\pi(x)$, se puede aproximar asintóticamente bien por la función $\text{li}(x)$, definida para $x \neq 1$ (para

$x > 1$ se debe ver como un valor principal de Cauchy) por la expresión

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log u}.$$

Otra figura relevante en este contexto es la de Tchebychev, quien publica una memoria en 1850 en la que se estudia por primera vez $\pi(x)$ de una forma más rigurosa. Tchebychev comienza tomando logaritmos en el Producto de Euler 2.19

$$-\sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) + \log(s-1) = \log((s-1)\zeta(s)).$$

Continúa escribiendo que

$$\zeta(s) - 1 - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{s-1} dx.$$

A partir de esta fórmula y tras ciertos cálculos, Tchebychev es capaz de validar la intuición de Gauss sobre $\operatorname{Li}(x)$. Posteriormente, Tchebychev introduce en un artículo las funciones

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x, p \in \mathbb{P}} \log p \quad , \quad \phi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

y prueba que

$$\sum_{n \leq x} \phi \left(\frac{x}{n} \right) = \log[x]!.$$

A partir de esta identidad, consigue obtener cotas inferiores y superiores para $\phi(x)$, $\vartheta(x)$ y $\pi(x)$, algo que supuso un primer gran avance en la comprensión de los números primos. Ahora bien, el paso fundamental que dio inicio a la hipótesis de Riemann tiene lugar en 1859, cuando se publica la memoria de Riemann [24], cuyo título se puede traducir al castellano como “*Sobre el número de primos menores a una cantidad dada*”. Los conceptos que Riemann introduce en esta obra gozan de una alta originalidad. Para empezar, escribe la igualdad integral del Teorema 2.4

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx, \quad \text{para } \sigma > 1,$$

y obtiene la extensión analítica y la ecuación funcional. Después, introduce la función $\xi(t)$, que en nuestra notación, es la función $\Xi(s)$ de la Observación 2.16, establece algunas de sus propiedades y proporciona la ecuación funcional en su forma simétrica. Continúa escribiendo el logaritmo del Producto de Euler 2.19 como una transformada integral, válida para $\sigma > 1$

$$\frac{1}{s} \log \zeta(s) = \int_1^\infty \Pi(x) x^{-s-1} dx,$$

donde

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

Finalmente, Riemann expresa $\Pi(x)$ como una integral compleja y la calcula usando el Teorema de los residuos 1.68, considerando las singularidades de $\log \zeta(s)$ en $s = 1$ y en los ceros de $\zeta(s)$ y, tras ciertos cálculos, se obtiene la denominada *fórmula de Riemann*

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{1/n}\right),$$

donde

$$f(x) = \text{li}(x) - \sum_{\rho} \text{li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t}, \quad (3.1)$$

y donde la suma que aparece en (3.1) se realiza sobre los ceros no triviales ρ de la función $\zeta(s)$ de forma simétrica, según el Teorema 2.36. Esta fórmula pone de manifiesto de forma explícita la influencia de los ceros de la función $\zeta(s)$ en la distribución de los números primos.

En esta misma memoria, Riemann realiza el siguiente comentario sobre $\Xi(s)$ (traducido al castellano): “... es muy probable que todas las raíces sean reales. Sin ninguna duda, uno desearía tener una prueba rigurosa de esta proposición; sin embargo, he dejado esta investigación a un lado por el momento, debido a algunos insatisfactorios intentos, porque parece innecesario para el objetivo inmediato de mi estudio.” Este comentario condujo a la versión original de hipótesis de Riemann, que postula que todos los ceros de la función $\Xi(s)$ son reales. En virtud del Teorema 2.43, la versión original es claramente equivalente a la que se formula al inicio del capítulo.

3.2. Teorema de los números primos

Comenzamos la sección introduciendo un par de definiciones que serán fundamentales en la teoría de números y, en particular, para estudiar la distribución asintótica de los números primos.

Definición 3.1. Se define la *función contadora de primos*, denotada por $\pi(x)$, como el número de primos menores o iguales a x .

Definición 3.2. Sean f y g dos funciones definidas en un entorno de s_0 (finito o infinito). Se dice que f y g son *asintóticamente equivalentes en el punto s_0* , y se denota por $f(s) \sim g(s)$ cuando $s \rightarrow s_0$, si

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s)}{g(s)} = 1.$$

En las mismas condiciones, se denota $f(s) = O(g(s))$ cuando $s \rightarrow s_0$, si existe $M > 0$ tal que $|f(s)| \leq M|g(s)|$ para todo s en un entorno de s_0 . Además, se denota por $f(s) = o(g(s))$ cuando $s \rightarrow s_0$ si, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(s)| < \varepsilon|g(s)|$ para todo s en un entorno de s_0 .

Ahora, la primera versión del teorema de los números primos enuncia lo siguiente.

Teorema 3.3 (de los números primos). *Se tiene la siguiente relación asintótica*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Existen varias versiones equivalentes al Teorema 3.3. Por ejemplo, una que utiliza la función $\vartheta(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \log p$, y que postula $\vartheta(x) \sim x$ cuando $x \rightarrow \infty$, o también la versión que utiliza el logaritmo integral $\pi(x) \sim \text{li}(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$. Sin embargo, la versión equivalente que se demostrará en este trabajo es la presente en [1] e involucra a la siguiente función.

Definición 3.4. Se definen la *función de Chebyshev* $\psi(x)$, y la función $\psi_1(x)$, como

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad \psi_1(x) = \int_1^x \psi(u) du.$$

La versión equivalente al Teorema 3.3 que demostraremos es

$$\psi(x) \sim x \text{ cuando } x \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Para ello, demostraremos en primer lugar que

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

implica (3.2), y luego probaremos (3.3).

Proposición 3.5. *Se tiene*

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n). \quad (3.4)$$

Además, la relación asintótica (3.3) implica (3.2).

Demostración. Si consideramos la función aritmética $a(n) = \Lambda(n)$, entonces $a(n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ y basta con aplicar los Lemas III.13 y III.14 para obtener $A(x) = \psi(x)$ y $A_1(x) = \psi_1(x)$. \square

Introducimos a continuación un lema que nos será de utilidad para expresar $\psi_1(x)/x^2$ como una integral de contorno.

Lema 3.6. *Si $c > 0$ y $u > 0$, entonces para todo entero $k \geq 1$, se tiene*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-s}}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & \text{si } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{si } u > 1, \end{cases}$$

donde la integral es absolutamente convergente.

Demostración. En primer lugar, como se tiene la ecuación funcional (1.4), tenemos que el integrando es igual a $u^{-s}\Gamma(s)/\Gamma(s+k+1)$. Ahora, definiremos un contorno sobre el que aplicaremos el Teorema de los residuos 1.68. Sea pues $C(R)$ el contorno que se muestra en la Figura I.4. Nótese que dicho contorno depende del valor de u , y supongamos que el radio R del círculo es mayor que $2k+c$, de manera que todos los polos $s = 0, -1, \dots, -k$ se encuentren dentro del círculo. A continuación, demostremos que la integral sobre los arcos circulares tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$. Para un número complejo $s = \sigma + it$ en dichos arcos, tenemos $|s| = R$, y además, si $0 < u \leq 1$, la función (de σ) $u^{-\sigma}$ es creciente, mientras que si $u > 1$, la función es decreciente. En cualquier caso, siempre tenemos $u^{-\sigma} \leq u^{-c}$, de manera que

$$\left| \frac{u^{-s}}{s(s+1)\cdots(s+k)} \right| = \frac{u^{-\sigma}}{|s||s+1|\cdots|s+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|s+1|\cdots|s+k|}.$$

Ahora bien, como $R > 2k$, se tiene para $1 \leq n \leq k$ que

$$|s+n| \geq |s| - n = R - n \geq R - k \geq \frac{R}{2}.$$

Por lo tanto, el módulo de la integral sobre cada arco circular está acotado por

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R(\frac{1}{2}R)^k} = O(R^{-k}).$$

Como $k \geq 1$, esto tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$, que es lo que queríamos ver. Continuando con la demostración, si $u > 1$ el integrando es holomorfo en $C(R)$, por lo tanto la integral vale cero en este caso. En cambio, si $0 < u \leq 1$, podemos calcular la integral con el Teorema de los residuos 1.68. Los polos del integrando son $s = 0, -1, \dots, -k$, por lo tanto, aplicando (1.5) y teniendo en cuenta en * que los polos de $\Gamma(s)$ son simples, junto a la propiedad 2 de 1.69, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+k+1)} ds &= \sum_{n=0}^k \operatorname{Res}_{s=-n} \left(\frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+k+1)} \right) \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^k \frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)} \operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{u^n (-1)^n}{(k-n)!n!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $R \rightarrow \infty$, se obtiene el resultado enunciado en el lema. \square

Teorema 3.7. Si $c > 1$ y $x \geq 1$, entonces

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \quad (3.5)$$

Demostración. Por (3.4), se tiene $\psi_1(x)/x = \sum_{n \leq x} (1 - n/x)\Lambda(n)$. Aplicando ahora el Lema 3.6 con $k = 1$ y $u = n/x$, se tiene para $n \leq x$

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds.$$

Multiplicando por $\Lambda(n)$ y sumando sobre $n \leq x$, se obtiene

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds, \quad (3.6)$$

ya que la integral se anula si $n > x$ (por el Lema 3.6). Denotando por

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} \right),$$

se puede reescribir (3.6) como

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} f_n(s) ds. \quad (3.7)$$

Ahora, para intercambiar la suma con la integral, basta con probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |f_n(s)| ds \quad (3.8)$$

es convergente. Para ello, podemos expresar sus sumas parciales como

$$\sum_{n=1}^N \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{|s||s+1|} ds = \sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^c}{|s||s+1|} ds \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c},$$

donde A es una constante, por lo tanto la serie (3.8) converge. Intercambiando suma con integral en (3.7) y aplicando (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Finalmente, basta dividir por x en (3.9) para obtener (3.5). \square

Teorema 3.8. *Si $c > 1$ y $x \geq 1$, entonces*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds, \quad (3.10)$$

donde

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right).$$

Demostración. Comenzamos aplicando el Lema 3.6 con $k = 2$ para obtener

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} ds,$$

donde $c > 0$. Sustituyendo s por $s-1$ en la integral, manteniendo $c > 1$ y restando el resultado a (3.5), se obtiene (3.10). \square

Teorema 3.9. *Sea $x \geq 1$. Entonces,*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it \log x} dt,$$

donde la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ converge. Entonces, por el Lema de Riemann-Lebesgue III.22, se tiene que

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

y por tanto también se tiene

$$\psi(x) \sim x \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Demostración. En primer lugar, notemos que la función $-\zeta'(s)/\zeta(s) - 1/(s-1)$ es holomorfa en $s = 1$ ya que, en virtud del punto 4 de la Proposición 1.69, tanto $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ como $1/(s-1)$ tienen un polo simple en $s = 1$ con residuo 1, de manera que su diferencia es holomorfa en $s = 1$. Ahora, probaremos que podemos mover el camino sobre el que se integra en (3.10) a la línea $\sigma = 1$. Para ello, podemos aplicar el Teorema de Cauchy 1.49 sobre el rectángulo R que se muestra en la Figura I.5. La integral de $x^{s-1}h(s)$ sobre R es 0 ya que el integrando es holomorfo tanto en R como en su interior. Ahora, probaremos que las integrales sobre los segmentos horizontales tienden a 0 cuando $T \rightarrow \infty$. Como el integrando tiene el mismo valor absoluto en los puntos conjugados, es suficiente con considerar el segmento $t = T$. Sobre este segmento, se tiene

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right| \leq \frac{1}{T^2} \text{ y } \left| \frac{1}{s(s+1)(s-1)} \right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

En virtud del Teorema 2.31, existe una constante $M > 0$ tal que $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq M \log^9 t$ para todo $\sigma \geq 1$ y $t \geq e$. Por lo tanto, si $T \geq e$, entonces

$$|h(s)| \leq \frac{M \log^9 T}{T^2},$$

lo que implica

$$\left| \int_1^c x^{s-1} h(s) ds \right| \leq \int_1^c x^{c-1} \frac{M \log^9 T}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{\log^9 T}{T^2} (c-1).$$

Por lo tanto, las integrales a lo largo de los segmentos horizontales tienden a 0 cuando $T \rightarrow \infty$ y se tiene

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds.$$

Escribiendo $s = 1 + it$ en la línea $\sigma = 1$, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it \log x} dt. \quad (3.11)$$

Para probar que la integral converge absolutamente, podemos dividir la integral de la siguiente forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt = \left(\int_{-\infty}^{-e} + \int_{-e}^e + \int_e^{\infty} + \right) |h(1+it)| dt.$$

Ahora, por el Teorema 2.31, se tiene que para $t \geq e$

$$|h(1+it)| \leq \frac{M \log^9 t}{t^2}$$

y entonces la integral $\int_e^{\infty} |h(1+it)| dt$ converge, ya que así lo hace la integral de $M \log^9 t/t^2$. Del mismo modo lo hace $\int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)| dt$, y por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ converge. Basta entonces con aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue III.22 para obtener $\psi_1(x) \sim x^2/2$ cuando $x \rightarrow \infty$. Finalmente, por la Proposición 3.5 se tiene $\psi(x) \sim x$ cuando $x \rightarrow \infty$, lo que finaliza la prueba. \square

Observación 3.10. Nótese que en esta prueba, para poder mover el camino sobre el que se integra en (3.10), hemos necesitado que $\zeta(1+it) \neq 0$ para todo $t \neq 0$, es decir, el Teorema de Hadamard-de la Vallée Poussin 2.37. Este paso es fundamental en la demostración.

Este teorema muestra, de nuevo, la intrínseca relación de $\zeta(s)$ con los números primos. Además, este teorema tiene aplicaciones en diversos campos de la teoría de números, como por ejemplo en la *función indicatriz de Euler* $\varphi(n)$ o en la *función divisor* $d(n)$. Se recomienda al lector acudir a [1] para profundizar más en cualquiera de ellas.

3.3. Sobre la validez de la hipótesis de Riemann

En esta sección, se tratará de dar una visión global acerca de (HR). Para ello, se darán ciertas equivalencias de (HR) y algunas hipótesis relacionadas, se revisarán las consecuencias que supone su validez y finalmente se verá la evidencia que existe (por el momento) acerca de la misma.

3.3.1. Equivalencias

En primer lugar, (HR) es equivalente a las siguientes afirmaciones, que han sido recopiladas a partir de [5], [8] y [17], y que por tanto, se recomienda al lector acudir a tales obras para profundizar:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log x), \text{ donde } \text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \quad (3.12)$$

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x),$$

$$\int_1^X \left(\frac{\psi(x) - x}{x} \right)^2 dx \sim C \log X \quad \text{cuando } X \rightarrow \infty,$$

$$\begin{aligned} \text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \text{ es convergente para } \sigma > \frac{1}{2}, \\ M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = O\left(x^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right), \text{ para } \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde la función $M(x)$ se denomina la *función de Mertens*. Además, la siguiente afirmación implica (HR)

$$\int_1^X \left(\frac{M(x)}{x}\right)^2 dx \sim C \log X \quad \text{cuando } X \rightarrow \infty.$$

Además de las equivalencias mencionadas, existen muchas otras que poseen un formato similar. El interés de estas equivalencias reside principalmente en proporcionar equivalencias asintóticas que, como acabamos de ver con la prueba del Teorema de los números primos 3.9, podrían ser más fáciles de demostrar mediante métodos analíticos.

3.3.2. Hipótesis relacionadas

Hipótesis de Riemann generalizada

Uno de los motivos por los que (HR) es un problema tan importante, es porque la función $\zeta(s)$ no es una función aislada, sino que más bien, es un caso particular de un tipo de funciones más generales, denominadas *funciones L de Dirichlet*. Estas funciones se definen a continuación.

Definición 3.11. Se define la *función L de Dirichlet* asociada al carácter de Dirichlet χ_m III.9, denotada por $L(s, \chi_m)$, a la extensión analítica de la denominada *serie de Dirichlet* siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_m(n)}{n^s}, \text{ para todo } \sigma > 1.$$

Observación 3.12. Para el carácter de Dirichlet χ_1 con módulo 1, es evidente que $L(s, \chi_1) = \zeta(s)$.

Pues bien, resulta que sobre estas funciones L de Dirichlet se pueden obtener propiedades similares a las obtenidas para la función Zeta de Riemann, como el producto de Euler

$$L(s, \chi_m) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \chi_m(p)p^{-s}}, \text{ para todo } \sigma > 1,$$

o la ecuación funcional (ver Definiciones III.9 y III.10)

$$L(1-s, \chi_m) = \frac{m^{s-1} \Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e^{-i\pi s/2} + \chi_m(-1) e^{i\pi s/2} \right\} G(1, \chi_m) L(s, \overline{\chi_m}).$$

De hecho, si $\sigma > 1$ y χ_m es el carácter de Dirichlet módulo m principal, entonces $\chi_m(p) = 0$ si $p \mid m$ y $\chi_m(p) = 1$ si $p \nmid m$, de manera que

$$L(s, \chi_m) = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \cdot \prod_{p \mid m} (1 - p^{-s}) = \zeta(s) \prod_{p \mid m} (1 - p^{-s}).$$

También se comparte la definición de cero no trivial, como aquellos ceros de $L(s, \chi_m)$ en el interior de la banda crítica. Se aconseja al lector acudir a [1] y [5] para ver las pruebas de estas afirmaciones. Ahora, al igual que $\zeta(s)$ es un caso particular de función L de Dirichlet, (HR) también es un caso particular de una hipótesis más general, que se enuncia a continuación.

Hipótesis de Riemann generalizada (HRG). Los ceros no triviales de la función $L(s, \chi_m)$ tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$, para todo carácter de Dirichlet χ_m .

Observación 3.13. En virtud a la Observación 3.12, se deduce que la validez de (HRG) implica la validez de (HR).

Hipótesis de Riemann extendida

A continuación se muestra una hipótesis que se puede ver como un ejemplo de (HRG).

Definición 3.14. Sea $p \in \mathbb{P}$ impar. Se define la función $L_p(s)$ como la extensión analítica de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s}$, donde $\left(\frac{n}{p}\right)$ denota el símbolo de Legendre III.12.

Esta definición da lugar a la siguiente hipótesis.

Hipótesis de Riemann extendida, primera versión (HRE1). Los ceros de la función $L_p(s)$ en el interior de la banda crítica tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$, para todo número primo p impar.

Observación 3.15. Como (\cdot) es un ejemplo de carácter de Dirichlet, esta hipótesis es un caso particular de (HRG).

El interés principal de esta hipótesis es dar un ejemplo práctico de (HRG) que sea distinto de (HR).

También existe otra versión de la hipótesis de Riemann extendida que involucra las extensiones de cuerpos. De nuevo, necesitamos definir la siguiente función (ver Definición III.1).

Definición 3.16. Sea K un cuerpo de números algebraicos con anillo de enteros \mathcal{O}_K . Se define la *función Zeta de Dedekind de K* , denotada por $\zeta_K(s)$, como la extensión analítica de la serie

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \text{ para todo } \sigma > 1,$$

donde $N(\mathfrak{a})$ denota la norma de un ideal integral \mathfrak{a} de \mathcal{O}_K y la suma se realiza sobre todos los ideales integrales no nulos de \mathcal{O}_K .

De nuevo, las funciones ζ_K verifican un producto de Euler para todo $\sigma > 1$

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}},$$

donde \mathfrak{p} indica un ideal primo no nulo de \mathcal{O}_K . Estas funciones también cumplen una ecuación funcional pero, debido a la complejidad que su enunciado supone, se aconseja al lector acudir a [18] para verla con detalle. Cabe destacar además que las funciones Zeta de Dedekind tienen un papel importante en la teoría de cuerpos algebraicos. Análogamente, se formula la siguiente versión extendida de (HR).

Hipótesis de Riemann extendida, segunda versión (HRE2). Los ceros de $\zeta_K(s)$ en el interior de la banda crítica tienen parte real igual a $\frac{1}{2}$, para todo cuerpo K de números algebraicos.

Observación 3.17. Se puede observar que si se considera el cuerpo de los números racionales $K = \mathbb{Q}$, entonces $\zeta_{\mathbb{Q}} = \zeta$, de manera que la veracidad de (HRE2), implica la veracidad de (HR). Se recomienda al lector consultar [7] y/o [18] para profundizar sobre la función Zeta de Dedekind.

Finalmente, cabe destacar que existen otras versiones de (HR) que vinculan funciones que poseen una relación similar a la presentada con $\zeta(s)$ en las versiones previas. No se proporcionarán estas versiones pues se considera que con las presentadas en la sección, el lector ya adquiere el concepto de generalidad que (HR) presenta a este respecto. La información acerca de estas versiones ha sido recopilada principalmente a partir de [5]. Para ver con más detalle estas versiones, se redirige al lector a dicha referencia.

3.3.3. Consecuencias

En esta sección, comentaremos ciertas posibles consecuencias de (HR) y (HRG). La gran parte de estas consecuencias, se aplican en la teoría de números, cuyos vínculos con la función Zeta han sido presentados a lo largo del trabajo. Ahora bien, no hay que ignorar que la relación entre la teoría de números y diversos campos, como por ejemplo la criptografía, es fuerte, por lo que dichas consecuencias pueden verse amplificadas en dichos campos. De nuevo, las referencias principales para esta sección serán [5] y [17], junto a [10]. Comenzamos con un resultado que vincula una hipótesis presentada previamente con (HR).

Hipótesis de Lindelöf

Presentamos a continuación una primera consecuencia, cuya prueba es demasiado extensa y se recomienda al lector acudir a [17] para ver una prueba de este resultado.

Consecuencia 1. *La veracidad de (HR) supone la validez de la hipótesis de Lindelöf 2.42.*

Sin embargo, no se sabe si el recíproco es cierto. Ahora, mostraremos una afirmación equivalente a la hipótesis de Lindelöf. Para ello, introducimos la siguiente definición.

Definición 3.18. Se denota por $N(\sigma, T)$ al número de ceros de $\zeta(\beta + it)$ tales que $\beta > \sigma$, para $0 < t \leq T$.

Se tiene el siguiente resultado, cuya prueba se puede consultar en [17], sobre la validez de la hipótesis de Lindelöf.

Equivalencia de la hipótesis de Lindelöf: para todo $\sigma > \frac{1}{2}$, se tiene

$$N(\sigma, T + 1) - N(\sigma, T) = o(\log T).$$

En teoría de números, podemos destacar las siguientes consecuencias, tanto de la (HR), como de sus versiones generalizada y extendida.

Conjetura débil de Goldbach

En primer lugar, presentamos una conjetura (que actualmente ya no lo es) relacionada con la *conjetura fuerte de Goldbach*, denominada *conjetura débil de Goldbach*, la cual postula que todo número impar mayor que 7 se puede expresar como suma de tres números primos impares. Pues bien, resulta que Hardy y Littlewood probaron el siguiente resultado.

Consecuencia 2. *Si se asume (HRG), entonces se verifica la conjetura débil de Goldbach para n suficientemente grande.*

Ahora bien, esta consecuencia se puede refinar si se consideran los trabajos de Deshouillers, Effinger, te Riele y Zinoviev, quienes probaron el siguiente resultado.

Consecuencia 3. *Si se asume (HRG), entonces se verifica que todo número impar mayor que 5 se puede expresar como suma de tres números primos.*

Hardy y Littlewood proporcionaron también la siguiente consecuencia.

Consecuencia 4. *Si (HRG) es cierta, entonces casi todos los números pares se pueden expresar como suma de dos números primos. En particular, si (HRG) es cierta y si $P(N)$ denota el número de enteros pares $n < N$ que no son suma de dos primos, entonces $P(N) = O(N^{\frac{1}{2} + \epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$.*

Posteriormente, en 2013, Harald Andrés Helfgott Seier demostró la veracidad de la conjetura débil de Goldbach. Dado que dicha conjetura es una consecuencia de (HRG), este descubrimiento va en la dirección correcta de cara a la validez de (HRG), y por tanto también de (HR).

Sobre el número de primos en un intervalo

Un aspecto altamente relevante en la teoría de números es, dado un intervalo (a, b) , conocer la existencia de un primo $p \in (a, b)$. Sobre esta cuestión, el postulado de Bertrand en 1845

conjeturaba que, para $a > 1$, siempre existe un primo $p \in (a, 2a)$. Este postulado se convirtió en teorema, gracias a Chebyshev, cinco años después. La respuesta de (HR) a esta cuestión, es la siguiente.

Consecuencia 5. *Si (HR) es cierta, entonces para x suficientemente grande y para todo $\alpha > \frac{1}{2}$, existe un número primo $p \in (x, x + x^\alpha)$.*

De nuevo, sobre esta cuestión, Ingham demostró en 1937 que siempre existe un número primo en $(x, x + x^{\frac{5}{8}})$ para x suficientemente grande, independientemente de la validez de (HR). Es decir, se ha demostrado un caso particular de esta consecuencia que, de nuevo, se encuentra en la dirección correcta de cara a la validez de (HR).

Test de Primalidad

Otra de las aplicaciones más relevantes de (HRG) es en los test de primalidad, que se utilizan para determinar si un número dado es primo o no. En este contexto, existen dos test fundamentales para dicho propósito, conocidos como el *test de primalidad probabilístico de Miller-Rabin* y el *algoritmo probabilístico Solovay-Strassen*. A este respecto, se tiene la siguiente consecuencia.

Consecuencia 6. *Asumiendo la validez de (HRG), se verifican tanto que el test de primalidad probabilístico de Miller-Rabin se ejecuta de forma determinista en tiempo polinómico, como que el algoritmo probabilístico Solovay-Strassen es probablemente determinista.*

Esto básicamente quiere decir, entre otras cosas, que bajo (HRG) se puede determinar si un número es primo o no en tiempo polinómico. Este tipo de test son ampliamente utilizados en criptografía y, en particular, en la encriptación de datos privados de, por ejemplo, tarjetas bancarias. Este es uno de los motivos por el que se piensa que (HR) puede llegar a influir en la seguridad de las mismas.

Conjetura de Artin sobre raíces primitivas

Una aplicación más de (HRG) tiene lugar en una conjetura vinculada con el cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para p primo. Antes de comentar esta conjetura, se introduce la siguiente definición.

Definición 3.19. Dado un número primo $p \in \mathbb{P}$, se dice que un entero n es una *raíz primitiva módulo p* si $n^\alpha \not\equiv 1 \pmod{p}$, para todo $0 < \alpha \leq p - 2$.

Ahora, ya podemos enunciar la *conjetura de Artin*, que postula que todo entero $n \neq -1$ que no sea un cuadrado, es una raíz primitiva módulo p , para un número infinito de primos p . Sobre esta conjetura, en 1967 Hooley probó el siguiente resultado.

Consecuencia 7. *Si (HRG) es cierta, entonces la conjetura de Artin también es verdadera.*

Otros resultados han demostrado que, independientemente de la validez de (HRG), la conjetura de Artin puede fallar para como mucho dos números primos positivos.

Huecos entre números primos

Otro de los aspectos que ha interesado a los matemáticos es el patrón detrás de los huecos entre números primos. La validez de (HR) permite obtener información acerca de estos huecos, tal y como se muestra en la siguiente consecuencia, cuya prueba se puede ver en [10].

Consecuencia 8. *Si (HR) es cierta, entonces para n suficientemente grande, se tiene*

$$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \log p_n).$$

En relación a esta consecuencia, Harald Cramér sugirió en [10] que $p_{n+1} - p_n = O((\log p_n)^2)$ para n suficientemente grande, dando lugar a la *conjetura de Cramér*.

3.3.4. Evidencias

En la actualidad, (HR) goza de un prestigio de veracidad, ampliamente difundido en la comunidad matemática, desde hace más de un siglo. Esto se debe principalmente a dos motivos. El primero es la prueba independiente de particularizaciones de algunas de las consecuencias de las hipótesis relacionadas que se pueden generar a partir de la versión original, que sugiere que la hipótesis sea verdadera, sumado a la “belleza matemática” de la misma, que suele ser un buen indicador. El segundo motivo es una colección de evidencia empírica que se puede deducir de cálculos numéricos, realizados a través de algoritmos implementados en ordenador. Hasta la fecha, se han calculado numéricamente sobre diez billones de ceros de $\zeta(s)$, y todos concuerdan con (HR). En las siguientes tres subsecciones exploraremos cada uno de estos dos motivos, así como el contexto de la investigación sobre (HR), utilizando [5] y [8] como fuentes bibliográficas.

Belleza matemática

A lo largo de la sección previa se han ido comentando ciertas particularizaciones probadas de algunas consecuencias de las hipótesis relacionadas. Aunque en este trabajo no aparezcan todas las consecuencias, para muchas de ellas también se han probado estas particularizaciones. Si bien estas pruebas no suponen un argumento sólido, sí contribuyen a inclinarse hacia la validez de (HR), en una primera instancia. Además, como se indicaba en la introducción a la sección, la

belleza matemática es un motor natural para el desarrollo de resultados matemáticos para los que, en muchos casos, se necesita una “inspiración” que permita dirigir la prueba de un cierto resultado hacia el lugar correcto. A este respecto, (HR) parece apuntar en la dirección correcta, ya que dota de cierta armonía a una estructura tan fundamental como lo son los números primos.

Evidencia numérica de la hipótesis de Riemann

En el Cuadro I.2 se puede ver la evolución del número de ceros de $\zeta(s)$ calculados numéricamente. A la vista de dicho cuadro, uno tendería a pensar que hay una base sólida (al menos, numéricamente) para “creer” en (HR). Si bien la información que aparece en el cuadro es un buen indicador, hay que ser precavido a la hora de interpretar el cuadro. Esto se debe a que, por el momento, en el contexto de (HR), no podemos verificar la localización de una infinidad de ceros, únicamente con cálculos numéricos por ordenador. De hecho, un ejemplo en el que cálculos por ordenador han llegado a sugerir la validez de una afirmación que no lo era, es en el caso del *número de Skewes*, definido como el primer entero positivo n tal que $\pi(n) < \text{Li}(n)$ falla. Algunos matemáticos como Riemann o Gauss pensaban que $\pi(n) < \text{Li}(n)$, para todo n . Sin embargo, en 1914, Littlewood probó la desigualdad fallaba para una cantidad infinita de enteros n . Este ejemplo muestra que es posible que un contraejemplo para (HR) resida en algún lugar más lejos de lo que nuestros límites computacionales nos permiten ir.

Investigación

Con respecto a cómo se orienta la investigación en la prueba de (HR), comenzaremos comentando algunos intentos fallidos, y después comentaremos una línea de investigación abierta.

En cuanto a los intentos fallidos, uno de los primeros estuvo relacionado con la función de Mertens (3.13), mediante la denominada *conjetura de Mertens*, que postula que $|M(n)| < \sqrt{n}$, para todo $n \geq 1$. A este respecto, se demostró que la validez de esta conjetura implicaba (HR), por lo que algunos matemáticos trataron de probar la conjetura de Mertens en lugar de (HR). Uno de estos matemáticos fue Stieltjes, quien afirmó en 1885 estar en posesión de una prueba de que $|M(n)| = O(\sqrt{n})$, pero nunca se publicó ni encontró dicha prueba. Posteriormente, Odlyzko y te Riele demostraron que la conjetura era falsa, finalizando con la investigación en esa línea. Asimismo, Pál Turán mostró que si para N suficientemente grande, $S_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s}$ no tiene ceros para $\sigma > 1$ (denominada la *condición de Turán*), entonces (HR) es cierta. Más tarde, Hugh Montgomery demostró que para cualquier constante positiva $c < 4/\pi - 1$, se tiene que $S_N(s)$ tiene ceros en \mathbb{H}_β con $\beta = 1 + c \frac{\log \log N}{\log N}$, finalizando las aproximaciones al problema desde ese punto de vista. La mayoría de intentos fallidos son similares a estos dos que se mencionan, y en general no consistían en probar directamente (HR), sino afirmaciones más generales que

impliquen (HR). A estos intentos deben sumarse los de muchos otros matemáticos que aseguran disponer de una prueba de (HR) (tanto de su validez como de lo contrario) aunque haya sido rechazada por la comunidad matemática. La mayoría de estos matemáticos no presentan una trayectoria relevante, pero también existen otros que realmente sí la presentan. Uno de ellos es el matemático Louis de Branges quien publicó en 1985 una prueba de la *conjetura de Bieberbach* y desde entonces, afirmó varias veces disponer de una prueba de (HR). Sin embargo, ninguna de ellas es aceptada por la comunidad matemática. En cambio, otros matemáticos como Hans Rademacher afirmaron en un primer momento tener una prueba de la falsedad de (HR) pero más tarde rectificaron tras detectar un error en el razonamiento.

En la actualidad, no existen muchas líneas de investigación abiertas para probar (HR), pero comentaremos una que es relevante conceptualmente. En relación a la “belleza matemática” que se comentaba previamente, un aspecto en el que muchos matemáticos encuentran la belleza matemática no es en la propia matemática en sí (que también), sino en la descripción pura que las matemáticas pueden hacer sobre ciertos fenómenos físicos. Un ejemplo de esto último es una línea de investigación iniciada por Pólya y Hilbert entre 1912 y 1914. Estos matemáticos se preguntaron, de forma independiente, si existía alguna razón física por la que (HR) fuera cierta y dieron así lugar a la *conjetura de Hilbert-Pólya*, que postula que para los ceros $\frac{1}{2} + i\lambda_j$ de $\zeta(s)$, los números λ_j pertenecen a un conjunto de autovalores de un cierto operador hermítico, y que por tanto son reales. Aplicando resultados de física, la validez de esta conjetura también permitiría dar una visión física de los ceros de $\zeta(s)$ como objetos implicados en ciertos fenómenos físicos. Esta línea de investigación ha evolucionado ampliamente hoy en día, hasta el punto en el que conecta tanto la teoría espectral como la teoría de matrices aleatorias con la (HR). Por otra parte, es interesante remarcar el pensamiento de dos matemáticos sobre por qué no hay muchas líneas de investigación abiertas para probar (HR). El primero, Atle Selberg, comenta (traducido al castellano): “Probablemente ha habido muy pocos intentos de demostrar la hipótesis de Riemann, porque, simplemente, ¡nadie ha tenido nunca una idea realmente buena de cómo abordarlo!”. El segundo, Terence Tao, responde en una entrevista (la versión original se puede consultar en [13]) que en la actualidad no se dispone de las herramientas necesarias para probar (HR).

Para terminar el trabajo, considero apropiado realizar la reflexión siguiente. Si bien la hipótesis de Riemann no ha sido probada, sí se ha avanzado en la dirección correcta, tanto descartando algunas líneas de investigación que han surgido, como desarrollando toda una teoría que rodea a la hipótesis de Riemann y $\zeta(s)$. Esta teoría, es de gran valor, puesto que presenta una estructura muy sólida, avanzada y de una calidad excepcional. Además, esta teoría interseca con muchas otras áreas, como la teoría de números o la física cuántica, lo que la hace altamente transversal. Finalmente, es posible que algún día ciertos avances en esta teoría nos permitan dar una respuesta rigurosa a la hipótesis de Riemann, resolviendo así uno de los problemas más importantes jamás formulados en la historia de las matemáticas.

Anexo I

Figuras y tablas de datos

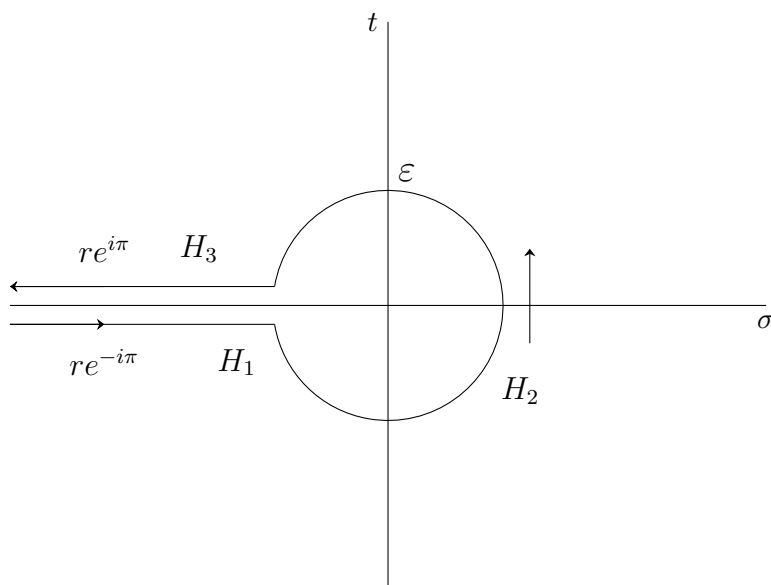


Figura I.1: Contorno de Hankel C_ε .

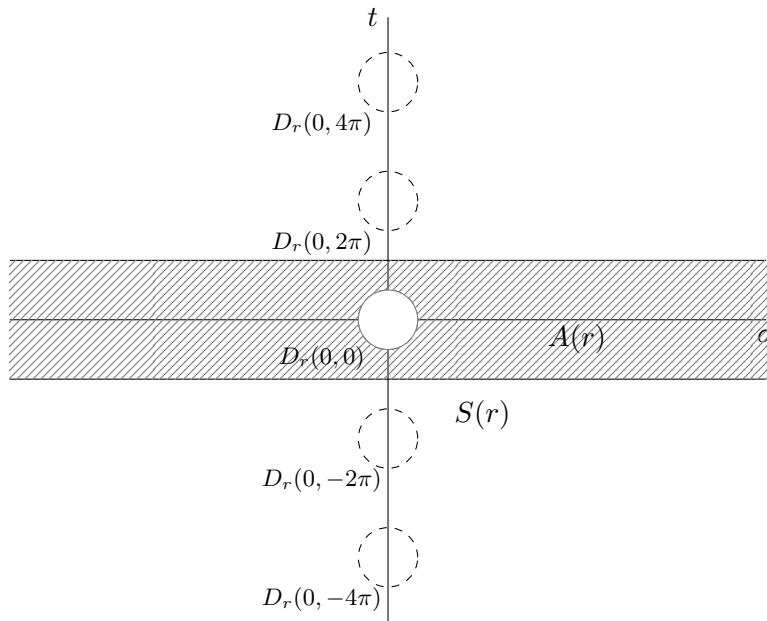


Figura I.2: Representación de $S(r)$ y $A(r)$ (región sombreada).

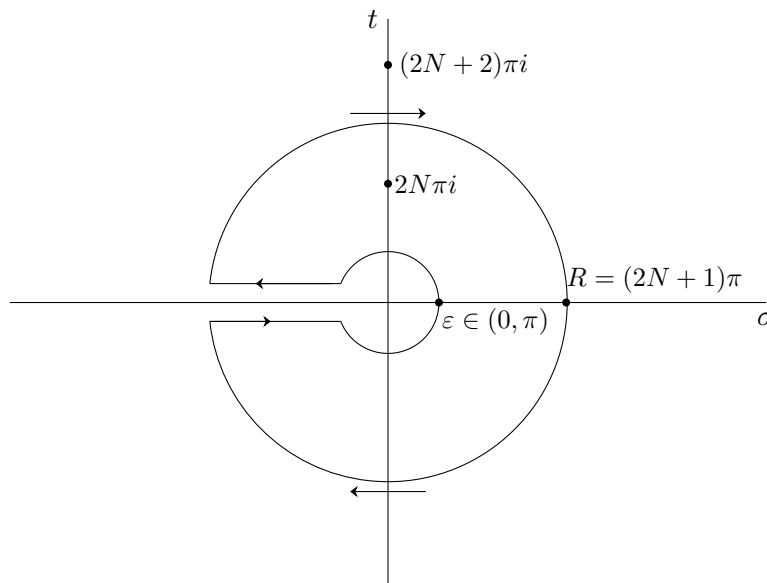


Figura I.3: Representación del contorno $C(N)$.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
1	1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	-1/30	0	5/66

Cuadro I.1: Primeros 11 números de Bernoulli.

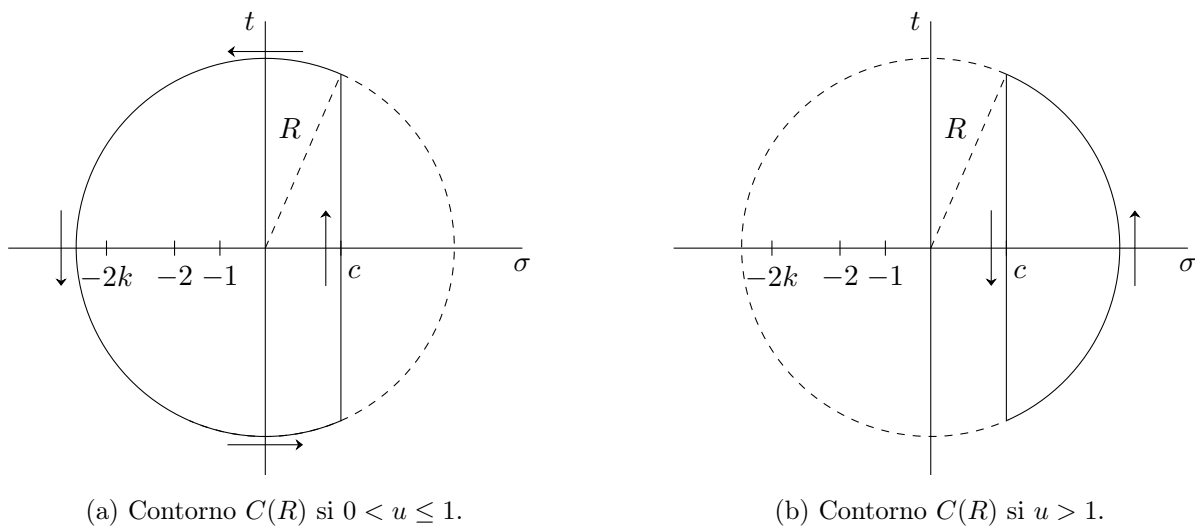


Figura I.4: Contorno $C(R)$.

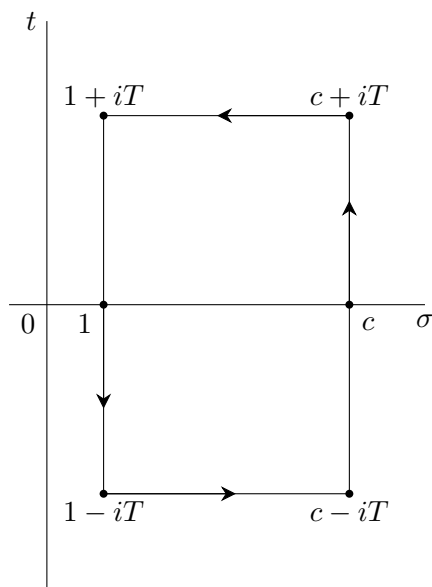


Figura I.5: Representación del rectángulo R .

Año	Número de ceros	Calculado por
1859 (aprox.)	1	B. Riemann
1903	15	J. P. Gram
1914	79	R. J. Backlund
1925	138	J. I. Hutchinson
1935	1041	E. C. Titchmarsh
1953	1104	A. M. Turing
1956	15 000	D. H. Lehmer
1956	25 000	D. H. Lehmer
1958	35 337	N. A. Meller
1966	250 000	R. S. Lehman
1968	3 500 000	J. B. Rosser, et al.
1977	40 000 000	R. P. Brent
1979	81 000 001	R. P. Brent
1982	200 000 001	R. P. Brent, et al.
1983	300 000 001	J. van de Lune, H. J. J. te Riele
1986	1 500 000 001	J. van de Lune, et al.
2001	10 000 000 000	J. van de Lune (no publicado)
2004	900 000 000 000	S. Wedeniwski
2004	10 000 000 000 000	X. Gourdon

Cuadro I.2: Tabla ilustrativa sobre los ceros de la función $\zeta(s)$ calculados con ordenador. Información extraída de [5].

Anexo II

Código de las figuras

En este anexo, se mostrará el código referente a las representaciones gráficas que se han utilizado a lo largo del trabajo, excluyendo las correspondientes a tablas de datos, por carecer de interés matemático reproducirlas de nuevo. Estas representaciones gráficas se han realizado con el paquete TikZ de L^AT_EX. El motivo de proporcionar este código es que el lector pueda reproducir estas representaciones en caso de querer hacerlo.

Comenzamos con el código referente a la Figura I.1.

```
\begin{figure} [H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=0.25]
% Se dibujan los ejes
\draw[] (-20,0) -- (20,0) node[anchor=north] {$\sigma$};
\draw[] (0,-15) -- (0,15) node[anchor=east] {$t$};

% Se dibujan lineas horizontales
\draw (-20,-1) -- (-6,-1);
\draw (-20,1) -- (-6,1);

% Se dibuja una curva de circunferencia
\draw (-6,1) arc (170.5376:-170.5376:6.0827625303);

% Se agregan las etiquetas
\node at (-8,-3) {\large $H_{1}$};
\node at (1,7) {\Large $\varepsilon$};
\node at (-15,-3) {\large $re^{-i\pi}$};
\node at (-15,3) {\large $re^{i\pi}$};
\node at (-10,3) {\large $H_{3}$};
\node at (7,-4.5) {\large $H_{2}$};

% Se dibujan flechas para indicar la orientacion
```

```

\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm}}] (-20,-1) -- (-15,-1);
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm}}] (-15,1) -- (-20,1);
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm}}] (7.5,-2) -- (7.5,3);

\end{tikzpicture}
% Se agrega un titulo
\caption{Contorno de Hankel  $C_{\{\varepsilon\}}$ .}
\end{figure}

```

A continuación se muestra el código para generar la Figura I.2.

```

\begin{figure}
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=0.25]
% Se dibujan los ejes
\draw[] (-20,0) -- (20,0) node[anchor=north] {$\sigma$};
\draw[] (0,-16) -- (0,16) node[anchor=east] {$t$};

% Se dibujan los discos
\foreach \n in {-2,-1,0,1,2} {
\draw[dashed] (0,\n*2*pi) circle (pi/2);
}

% Se dibujan las lineas horizontales
\draw (-20,pi) -- (20,pi);
\draw (-20,-pi) -- (20,-pi);

% Se rellena la zona sombreada
\fill[pattern=north east lines, pattern color=gray] (-20,-pi) rectangle (20,
pi);
\fill[white] (0,0) circle (pi/2);
\draw[gray] (0,0) circle (pi/2);

% Se agregan las etiquetas
\node at (5,-5) {$S(r)$};
\node at (10,-1) {$A(r)$};
\node at (-3.5,-2) {\footnotesize $D_{\{r\}}(0,0)$};
\node at (-3.5,2*pi-2.2) {\footnotesize $D_{\{r\}}(0,2\pi)$};
\node at (-3.5,4*pi-2.2) {\footnotesize $D_{\{r\}}(0,4\pi)$};
\node at (-3.5,-2*pi-2.2) {\footnotesize $D_{\{r\}}(0,-2\pi)$};
\node at (-3.5,-4*pi-2.2) {\footnotesize $D_{\{r\}}(0,-4\pi)$};

\end{tikzpicture}
% Se agrega el titulo
\caption{Representaci\`on de  $S(r)$  y  $A(r)$  (regi\`on sombreada).}
\end{figure}

```

Continuamos con el código para dibujar la Figura I.3.

```

\begin{figure} [H]
  \centering
  \begin{tikzpicture}[scale=0.25]
    % Se dibujan los ejes
    \draw[] (-20,0) -- (20,0) node[anchor=north] {$\sigma$};
    \draw[] (0,-15) -- (0,15) node[anchor=east] {$t$};

    % Se dibujan los segmentos para los arcos
    \draw[] (-9.42477,1) -- (-2.5,1);
    \draw[] (-9.42477,-1) -- (-2.5,-1);

    % Se dibujan los arcos
    \draw (-9.42477,1) arc (173.943384:-173.943384:9.4777);
    \draw (-2.5,1) arc (158.1985905:-158.1985905:2.692582);

    % Se agregan las etiquetas
    \node at (14.1,1.25) {\small $R = (2N+1)\pi$};
    \node at (2,6.283185) {\small $2N\pi$};
    \node at (4,12.56637) {\small $(2N+2)\pi$};
    \node at (5.692582,-1) {\small $\varepsilon$ in $(0,\pi)$};

    % Se dibujan los puntos
    \fill (9.42477,0) circle (6pt);
    \fill (0,6.283185) circle (6pt);
    \fill (0,12.56637) circle (6pt);
    \fill (2.692582,0) circle (6pt);

    % Se dibujan las flechas
    \draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (-9.42477,-1) -- (-6.2,-1);
    \draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (-3,1) -- (-7,1);
    \draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (2,-10) -- (-2,-10);
    \draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (-2,10) -- (2,10);
  \end{tikzpicture}
  % Se agrega el titulo
  \caption{Representación del contorno $C(N)$}
\end{figure}

```

Ahora mostramos el código para representar la Figura I.4.

```

\begin{figure}[ht]
  \centering
  \begin{subfigure}{0.45\textwidth}
    \centering
    \begin{tikzpicture}
      % Se dibujan los ejes
      \draw (-3.4,0) -- (3.4,0) node[anchor=north] {$\sigma$};
    \end{tikzpicture}
  \end{subfigure}

```

```

\draw (0,-3) -- (0,3) node[anchor=east] {$t$};

% Se dibujan los puntos
\draw (-0.6, 0.1) -- (-0.6, -0.1) node[below] {$-1$};
\draw (-1.2, 0.1) -- (-1.2, -0.1) node[below] {$-2$};
\draw (-2.1, 0.1) -- (-2.1, -0.1) node[below] {$-2k$};
\draw (1, 0.1) -- (1, -0.1) node[below,xshift=5pt] {$c$};

% Se dibuja el circulo de radio R (centrado en (0,0))
% Parte izquierda (continua)
\draw (1,2.3) arc[start angle=66.4,end angle=293.6,radius=2.5];
\draw[dashed] (0,0) -- (1,2.3) node[midway, above=5pt, xshift=-5pt]
  {$R$};

% Parte derecha (discontinua)
\draw[dashed] (1,2.3) arc[start angle=66.4,end angle=-113.6,radius
  =2.5];

% Se dibuja una linea vertical desde c hasta la circunferencia
\draw (1, -2.29) -- (1, 2.3);

% Se dibujan flechas para indicar la orientacion
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (0.8,-0.5) -- (0.8,0.5);
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (-2.7,0.5) -- (-2.7,-0.5);
;
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (0.5,2.6) -- (-0.5,2.6);
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (-0.5,-2.6) -- (0.5,-2.6);
;
\end{tikzpicture}
\caption{Contorno  $C(R)$  si  $0 < u \leq 1$ .}
\end{subfigure}
\hfill
\begin{subfigure}{0.45\textwidth}
\centering
\begin{tikzpicture}
% Se dibujan los ejes
\draw (-3.4,0) -- (3.4,0) node[anchor=north] {$\sigma$};
\draw (0,-3) -- (0,3) node[anchor=east] {$t$};

% Se dibujan los puntos
\draw (-0.6, 0.1) -- (-0.6, -0.1) node[below] {$-1$};
\draw (-1.2, 0.1) -- (-1.2, -0.1) node[below] {$-2$};
\draw (-2.1, 0.1) -- (-2.1, -0.1) node[below] {$-2k$};
\draw (1, 0.1) -- (1, -0.1) node[below,xshift=5pt] {$c$};

% Se dibuja el circulo de radio R (centrado en (0,0))
% Parte izquierda (discontinua)

```

```

\draw[dashed] (1,2.3) arc[start angle=66.4,end angle=294.3,radius
=2.5];
\draw[dashed] (0,0) -- (1,2.3) node[midway, above=5pt, xshift=-5pt]
  {$R$};

% Parte derecha (continua)
\draw (1,2.3) arc[start angle=66.4,end angle=-65.85,radius=2.5];

% Se dibuja una linea vertical desde c hasta la circunferencia
\draw (1, -2.29) -- (1, 2.3);

% Se dibujan flechas para indicar la orientacion
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (2.7,-0.5) -- (2.7,0.5);
\draw[-{Stealth[length=1mm, width=1.5mm]}] (0.8,0.5) -- (0.8,-0.5);
\end{tikzpicture}
\caption{Contorno  $C(R)$  si  $u > 1$ .}
\end{subfigure}
% Se agrega el titulo
\caption{Contorno  $C(R)$ .}
\end{figure}

```

Finalmente, se proporciona el código para la Figura I.5.

```

\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=0.25]
% Se dibujan los ejes
\draw[] (-2,0) -- (20,0) node[anchor=north] {$\sigma$};
\draw[] (0,-15) -- (0,15) node[anchor=east] {$t$};

% Se agregan las etiquetas
\node at (-1,-1) {$0$};
\node at (2,-1) {$1$};
\node at (17,-1) {$c$};
\node at (3,-11) {$1-iT$};
\node at (16,-11) {$c-iT$};
\node at (3,11) {$1+iT$};
\node at (16,11) {$c+iT$};

% Se dibujan los puntos
\fill (3,0) circle (6pt);
\fill (16,0) circle (6pt);
\fill (3,10) circle (6pt);
\fill (3,-10) circle (6pt);
\fill (16,10) circle (6pt);
\fill (16,-10) circle (6pt);

```

```
% Se dibuja el rectangulo
\draw (3,10) -- (16,10) -- (16,-10) -- (3,-10) -- cycle;

% Se dibujan las flechas
\draw[-{Stealth[length=2mm,width=2mm]}] (16,10) -- (9,10);
\draw[-{Stealth[length=2mm,width=2mm]}] (16,0) -- (16,5.5);
\draw[-{Stealth[length=2mm,width=2mm]}] (3,-10) -- (10,-10);
\draw[-{Stealth[length=2mm,width=2mm]}] (3,0) -- (3,-5.5);

\end{tikzpicture}
% Se agrega el titulo
\caption{Representaci\`on del rect\`angulo  $RR$ .}
\end{figure}
```

Anexo III

Recursos teóricos

III.1. Álgebra

Definición III.1. Se denomina *cuerpo de números algebraicos* a una extensión finita (y algebraica) K sobre los números racionales \mathbb{Q} . Se define su *anillo de enteros* \mathcal{O}_K como la clausura integral de \mathbb{Z} en dicho cuerpo y se denomina *ideal integral* a todo ideal de \mathcal{O}_K . Para un ideal integral no nulo \mathfrak{a} de \mathcal{O}_K , se define su *norma* como $N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$.

III.2. Análisis

Proposición III.2. La fórmula de Stirling es una aproximación de $n!$ para n suficientemente grande, y se expresa como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1. \quad (\text{III.1})$$

III.3. Aritmética

Teorema III.3 (Teorema fundamental de la aritmética). *Todo entero $n > 1$ se puede escribir como producto de números primos y este producto es único salvo el orden de los factores. En particular, si los distintos factores primos de n son p_1, p_2, \dots, p_r , y si p_i aparece α_i veces en el producto para todo $i = 1, \dots, r$, se puede escribir*

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}.$$

Teorema III.4 (de Dirichlet). Sean $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 0$ y $t_0 > 0$. Entonces, existen $t \in [t_0, t_0q^N]$ y $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{Z}$ tales que

$$|ta_n - x_n| \leq \frac{1}{q}, \forall n \in 1, 2, \dots, N.$$

La idea sobre la prueba de este teorema se puede encontrar en [17].

Definición III.5. Se denomina *función aritmética* a toda función $a(n)$ definida en \mathbb{N}^* y a valores en \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Definición III.6. Sea a una función aritmética, se dice que a es *multiplicativa* si a es no idénticamente nula, y si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $(m, n) = 1$, entonces $a(mn) = a(m)a(n)$. Si $a(mn) = a(m)a(n)$ se verifica para $m, n \in \mathbb{N}$, se dice que $a(n)$ es *completamente multiplicativa*.

Definición III.7. Se define la *función de Von Mangoldt*, denotada por $\Lambda(n)$, como la función aritmética

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ para un primo } p \text{ y un entero } m \geq 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Definición III.8. Se define la *función de Möbius*, denotada por $\mu(n)$, como la función aritmética

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} > 1 \text{ con } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición III.9. Se denomina *carácter de Dirichlet de módulo m* , donde m es un entero positivo, a toda función aritmética $\chi_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, que sea completamente multiplicativa, periódica con período m y tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi_m(n) = 0$ si y solo si $(m, n) > 1$. Además, se denota $\bar{\chi}$ al carácter de Dirichlet definido por $\bar{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$.

Definición III.10. Si χ_m es un carácter de Dirichlet módulo m , se define la *suma de Gauss* asociada a χ_m como

$$G(n, \chi_m) = \sum_{r=1}^m \chi_m(r) e^{2\pi i r n / m}.$$

Definición III.11. Se dice que un carácter de Dirichlet de módulo m es *principal* si $\chi_m(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ con $(m, n) = 1$.

Definición III.12. Sea $p \in \mathbb{P}$ impar. Se define el *símbolo de Legendre*, denotado por $\left(\frac{m}{p}\right)$, como

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si la congruencia } x^2 \equiv m \pmod{p} \text{ tiene solución,} \\ 0 & \text{si } p \mid m, \\ -1 & \text{si la congruencia } x^2 \equiv m \pmod{p} \text{ no tiene solución.} \end{cases}$$

Lema III.13. Sea $a(n)$ una función aritmética y sea $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, donde $A(x) = 0$ si $x < 1$. Entonces,

$$\sum_{n \leq x} (x - n)a(n) = \int_1^x A(u) du.$$

Lema III.14. Sean $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ y $A_1(x) = \int_1^x A(u) du$. Supongamos que $a(n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Si se tiene

$$A_1(x) \sim Lx^c \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

para algún $c > 0$ y $L > 0$, entonces también se tiene

$$A(x) \sim cLx^{c-1} \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

III.4. Productos infinitos

Definición III.15. Se denomina *producto infinito* a una expresión de la forma

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n),$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición III.16. Se dice que el producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ *converge* si se verifican las siguientes dos condiciones

- (i) Solo un número finito de los a_n es igual a -1 .
- (ii) Si $N > 0$ es suficientemente grande para que $a_n \neq -1$ para todo $n > N$, entonces existe y es no nulo el siguiente límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=N+1}^m (1 + a_n).$$

En tal caso, se define el *valor* del producto infinito como

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) = \left(\prod_{n=0}^N (1 + a_n) \right) \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=N+1}^m (1 + a_n).$$

Proposición III.17. Si un producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ es convergente y todos sus factores son no nulos, entonces

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) \neq 0.$$

Teorema III.18. Sea el producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$. Entonces

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + |a_n|) \text{ converge si y sólo si } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Definición III.19. Se dice que el producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$ converge absolutamente si $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + |a_n|)$ converge.

Teorema III.20. Si el producto infinito $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + |a_n|)$ converge, entonces $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$ también converge.

Ejemplo III.21. Se tiene la siguiente descomposición del $\sin(s)$ como producto infinito

$$\sin(\pi s) = \pi s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right). \quad (\text{III.2})$$

III.5. Series de Fourier

Lema III.22 (de Riemann-Lebesgue). Si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ converge, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt = 0.$$

III.6. Teoría de la medida

Definición III.23 (espacios \mathcal{L}^p). Sean un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y $1 \leq p < \infty$. Se denota por $\mathcal{L}^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ al conjunto de todas las funciones reales medibles f tales que $|f|^p$ es integrable.

Teorema III.24 (de la convergencia monótona). Sea $(\mathbb{R}^n, \Lambda, \lambda)$ el espacio de medida de Lebesgue. Supongamos que $X \in \Lambda$ y $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, son funciones medibles no negativas tales que:

- I. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$.
- II. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$, con $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible no negativa.

Entonces $\int f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda$.

Teorema III.25 (de Tonelli-Fubini). Sean X e Y dos espacios de medida σ -finitos, junto a $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible tal que alguna de las integrales

$$\left| \int_{X \times Y} |f(x, y)| dx \times dy \right|, \left| \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| dy \right) dx \right|, \left| \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy \right|,$$

es finita. Entonces, todas ellas existen y son iguales. Además, la igualdad de dichas integrales es cierta sin los valores absolutos.

Bibliografía

- [1] Apostol, T.M. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.
- [2] Bagchi, B. (1981). *Statistical behaviour and universality properties of the riemann zeta function and other allied dirichlet series*, Indian Statistical Institute, Kolkata.
- [3] Bagchi, B. (1982). *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Mathematische Zeitschrift 181, 319-334.
- [4] Bombieri, E. (2000). *The Riemann Hypothesis*, Clay Mathematics Institute. Disponible en <https://www.claymath.org/wp-content/uploads/2022/05/riemann.pdf> (consultado por última vez el 06/06/2024).
- [5] Borwein, P., Choi, S., Rooney B. y Weirathmueller, A. (2008). *The Riemann Hypothesis. A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, Springer, New York.
- [6] Boyer, C.B y Merzbach, U.C. (2011). *A History of Mathematics*, 3rd ed., John Wiley & Sons.
- [7] Cohen, H. (2007). *Number Theory. Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Mathematics 240, Springer, New York.
- [8] Conrey, B. (2019). *Riemann's Hypothesis*, American Institute of Mathematics. Disponible en <https://aimath.org/~kaur/publications/90.pdf> (consultado por última vez el 06/06/2024).
- [9] Conway, J.B. (1978). *Functions of One Complex Variable I*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 11, Springer, New York.
- [10] Cramér, H. (1936). *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arithmetica 2, 1, 23-46.
- [11] Dittrich, W. (2019). *The Role of Riemann's Zeta Function in Mathematics and Physics*, Universe 2019, 5, 79.

-
- [12] Elizalde, E. (2012). *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, 2nd ed., Lecture Notes in Physics 855, Springer Berlin, Heidelberg.
- [13] Entrevista realizada a Terence Tao en el canal de Youtube Numberphile, disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=MXJ-zpJeY3E> (consultada por última vez el 07/06/2024).
- [14] Greene, R.E. y Krantz, S.G. (2006). *Function Theory of One Complex Variable*, 3rd ed., Graduate Studies in Mathematics 40, American Mathematical Society.
- [15] Hardy, G.H. y Wright, E.M. (1960). *An Introduction To The Theory Of Numbers*, 4th ed., Oxford University Press, 268-269.
- [16] Hawking, S.W. (1977). *Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime*, Communications in Mathematical Physics 55, 133–148.
- [17] Heath-Brown, D.R. y Titchmarsh, E.C. (1986). *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford University Press.
- [18] Lang, S. (1994). *Algebraic Number Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 110, Springer, New York.
- [19] Lang, S. (1999). *Complex Analysis*, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics 103, Springer, New York.
- [20] Naldi, M. (2006). *Approximation of the truncated Zeta distribution and Zipf's law*, Università di Roma Tor Vergata.
- [21] Palka, B.P. (1991). *An Introduction to Complex Function Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York.
- [22] Patterson, S. J. (1988). *An Introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 14, Cambridge University Press, 1-2.
- [23] Piantadosi, S.T. (2014). *Zipf's word frequency law in natural language: A critical review and future directions*, Psychon Bull Rev 21, 1112–1130.
- [24] Riemann, B. (1859). *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie.
- [25] Zipf, G.K. (1949). *Human Behavior and the Principle of Least Effort. An Introduction to Human Ecology*, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge 42, Massachusetts.