



ESCOLA DE DOUTORAMENTO  
INTERNACIONAL DA USC

Beatriz  
Álvarez Díaz

Tese de doutoramento  
Derivadores e cohomoloxía

Santiago de Compostela, 2023

Programa de Doutoramento en Matemáticas



TESE DE DOUTORAMENTO

Derivadores e cohomoloxía

BEATRIZ ÁLVAREZ DÍAZ

ESCOLA DE DOUTORAMENTO INTERNACIONAL  
DA UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA DE DOUTORAMENTO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

2023







## DECLARACIÓN DA AUTORA DA TESE

Dna. **Beatriz Álvarez Díaz**

Título da tese: **Derivadores e cohomoloxía**

Presento a miña tese, seguindo o procedemento axeitado ao Regulamento, e declaro que:

- 1) A tese abarca os resultados da elaboración do meu traballo.
- 2) De ser o caso, na tese faise referencia ás colaboracións que tivo este traballo.
- 3) Confirmo que a tese non incorre en ningún tipo de plaxio doutros autores nin de traballos presentados por min para a obtención doutros títulos.
- 4) A tese é a versión definitiva presentada para a súa defensa e coincide a versión impresa coa presentada en formato electrónico.

E comprométome a presentar o Compromiso Documental de Supervisión no caso de que o orixinal non estea na Escola.

En Santiago de Compostela, 12 de maio de 2023.

Asdo.: Beatriz Álvarez Díaz







## AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR / TITOR DA TESE

D. **Leovigildo Alonso Tarrío**

D. **Manuel Ladra González**

En condición de: **directores**

Título da tese: **Derivadores e cohomoloxía**

INFORMAN:

Que a presente tese se corresponde co traballo realizado por Dna. **Beatriz Álvarez Díaz** e autorizamos a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como directores desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

En Santiago de Compostela, 12 de maio de 2023.

Asdo.: Leovigildo Alonso Tarrío

Asdo.: Manuel Ladra González







DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# Derivadores e cohomoloxía

por

**BEATRIZ ÁLVAREZ DÍAZ**

DISERTACIÓN

Presentada para a obtención do título de

**DOUTORA EN MATEMÁTICAS**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Santiago de Compostela, 2023





Os resultados desta tese foron obtidos gracias ao apoio dun contrato predoutoral de Formación de Profesorado Universitario (FPU) do Ministerio de Ciencia, Innovación e Universidades, con referencia FPU18/01203. Á súa vez este traballo foi apoiado polo Grupo de Referencia Competitiva (GRC) ED431C 2019/10, financiado pola Consellería de Cultura, Educación e Universidade da Xunta de Galicia; polo proxecto MTM2017-89830-P, do Ministerio de Economía e Competitividade e polos proxectos MTM2016-79661-P e PID2020-115155GB-I00 do Ministerio de Ciencia e Innovación e da Axencia Estatal de Investigación; todos eles financiados con fondos FEDER Europeos.



FPU18/01203  
MTM2016-79661-P  
PID2020-115155GB-I00



Xunta de Galicia  
ED431C 2019/10



MTM2017-89830-P



**UNIÓN EUROPEA**  
Fondo Europeo de Desarrollo Regional  
*"Una manera de hacer Europa"*

Unión Europea  
Fondo Europeo de Desarrollo Regional  
Una manera de hacer EUROPA



---

---

# Índice xeral

---

---

<b>Resumo</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>Introdución</b>	<b>xvii</b>
<b>Obxectivos</b>	<b>xxiii</b>
<b>Metodoloxía</b>	<b>xxv</b>
<b>I Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>1 Categorías de complexos</b>	<b>3</b>
1.1 Teorías de homotopía e homoloxía en complexos . . . . .	3
1.2 Categorías trianguladas. A categoría homotópica . . . . .	9
1.3 Localización en categorías trianguladas. A categoría derivada . . . . .	20
1.4 Resolucións en $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ e funtores derivados . . . . .	29
1.5 Propiedades categóricas das categorías de complexos . . . . .	39

<b>II</b>	<b>Resultados</b>	<b>45</b>
<b>2</b>	<b>Teoría de derivadores</b>	<b>47</b>
2.1	Prederivadores . . . . .	48
2.2	Derivadores . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Derivador homolóxico</b>	<b>73</b>
3.1	Definición do derivador homolóxico . . . . .	73
3.2	O quinto axioma: derivador forte . . . . .	87
3.3	Estabilidade e estrutura triangulada inducida . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Localizacións de Bousfield a través dos derivadores</b>	<b>101</b>
4.1	Localizacións de Bousfield . . . . .	101
4.2	Categoría derivada e xeometría alxébrica . . . . .	104
4.3	Localizacións a través do derivador homolóxico . . . . .	108
4.4	Descrición das localizacións <i>smashing</i> . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Derivadores e cohomoloxía de grupos</b>	<b>125</b>
5.1	Invariantes e coinvariantes de representacións . . . . .	125
5.2	Cohomoloxía a través dos derivadores . . . . .	129
	<b>Conclusions</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>139</b>







basic properties of derived categories in terms of homological algebra without making a specific choice of model structure, bypassing the full theory of homotopical algebra. The basic results on unbounded derived categories were developed by Spaltenstein [S], and expanded by Bökstedt and Neeman [BN]. In both references, only homological algebra methods (additive homotopies, cones, cylinders and resolutions) are used.

In this thesis we stick to these methods. Specifically, for a Grothendieck abelian category with enough projective we associate a derivator whose underlying category is the unbounded derived category of the initial abelian category. The category of diagrams is the full bicategory of small categories so our derivator is also unbounded in this sense.

This approach provides some benefits. One is that it lowers the bar to get into this theory. Another one is that the structure inherent to the derivator is made explicit in terms of simple homological constructions. We give two applications of these ideas. The first one gives the description of local cohomology by Koszul complexes. It generalizes the well-known case of a closed subset of the spectrum of a commutative noetherian ring to the case of stable under specialization subsets. The second one derives some basic results in group cohomology from the basic structure of the derivator.



construción da categoría desexada de xeito máis eficiente.

A nova categoría, coñecida como categoría derivada, aínda sendo aditiva non posúe a propiedade de ser unha categoría abeliana. Un elemento básico da teoría de homoloxía é o teorema que produce unha sucesión exacta larga a partir dunha sucesión exacta curta de complexos mediante un functor con boas propiedades de exactitude. Dada a falta de abelianidade, resulta conveniente dotar á categoría derivada dunha estrutura que permita suplir as sucesións exactas curtas.

Inspirado polas investigacións en homotopía estable, Verdier establece a noción de categoría triangulada [V2]. Esta noción é hoxe en día familiar e usada de forma extensiva en ámbitos como as teorías cohomolóxicas en xeometría alxébrica, a teoría de representacións de álxebras e a homotopía estable.

A idea de categoría triangulada supón distinguir certos diagramas formados por tres obxectos e tres morfismos, denominados triángulos, que codifican propiedades de xeito que se corresponden coas sucesións exactas de complexos ou coas sucesións fibrantes en topoloxía. A axiomática é o suficientemente sinxela e á vez o suficientemente rica como para permitir expresar unha gran cantidade de construcións clásicas, resultados de dualidade e teorías de cohomoloxía xeneralizadas.

No contexto das categorías de complexos, a existencia de resolucións (proyectivas e inyectivas) sen hipóteses de limitación simplificou e ampliou o tratamento dos funtores derivados neste contexto. Este avance técnico permitiu un gran impulso na exploración das categorías derivadas de orixe alxébrico. Esta teoría no contexto alxébrico asenta as súas bases no traballo primeiro de Cartan e Eilenberg.

Porén, un elemento clave da axiomática da categoría triangulada, a posibilidade de completar un morfismo a un triángulo distinguido, presenta unha carencia fundamental. Esta construción non é functorial e non é posible reparalo salvo acudindo a un modelo, de xeito que certas construcións precisan esta estrutura extra.

A falta de functorialidade do terceiro punto do triángulo motivou unha das reflexións matemáticas ás que Grothendieck dedicou moita atención no seu período de retiro. A proposta de Grothendieck en [G2] é unha estrutura, a de derivador, que se expresa en termos 2-categorías e que constitúe unha propiedade máis que unha estrutura. Esta proposta forma parte da serie de reflexións sobre teoría de homotopía que realiza a finais dos anos 80 e principios dos 90 do século pasado. Estas notas saíron recentemente á luz suscitando o

interese dos especialistas.

Hai que sinalar que unha idea moi similar á de Grothendieck foi proposta por Heller no seu traballo [Hel] de 1988 titulado *Teorías de homotopía*, no que se desenvolven ideas similares. Posteriormente, Keller en 1991 presenta en [Ke1] as torres de categorías trianguladas e Franke (1996) propón un sistema similar en [Fra]. No caso de Keller utilízase o modelo simplicial, mentres que no de Franke é cúbico.

Só a principios deste século, co interese en categorías superiores, se apreciou a importancia de expresar de maneira intrínseca as construcións homotópicas. Neste senso, a idea de derivador proporciona unha descrición intrínseca extraordinariamente útil fronte á noción de  $(\infty, 1)$ -categoría, pero dependente dunha elección apropiada de modelo.

O teorema máis xeral da construción de derivadores débese a Cisinski. De xeito irónico, neste teorema utilízanse categorías modelo, contra a idea orixinal de Grothendieck que concibiu os derivadores para evitar este tipo de categorías. En [C1, Théorème 6.11], Cisinski demostra que unha categoría modelo con certas propiedades adecuadas de presentabilidade proporciona un derivador. Nun traballo posterior, [C2], estende o resultado dando condicións minimais sobre unha categoría para poder definir un derivador.

Estes resultados confirman a ubicuidade das teorías homotópicas, mais non conseguen cumprir o obxectivo de Grothendieck de determinar o derivador a partir unicamente dos morfismos que se converten en isomorfismos. Aínda que o resultado de Cisinski permite estender a estrutura de derivador a categorías derivadas non limitadas, a súa técnica depende da elección dunha estrutura de fibracións e cofibracións que á súa vez fagan controlable a correspondente categoría de homotopía, que no noso caso é a categoría derivada.

Como xa sinalamos previamente e veremos no capítulo 1, en categorías abelianas con boas propiedades existen resolucións non limitadas. En concreto, unha categoría abeliana con xeradores e límites directos filtrantes exactos é condición suficiente para a existencia de resolucións inxectivas non limitadas [BN]. Se ademais, esiximos que o xerador (ou familia de xeradores) sexa un obxecto proxectivo, tamén existirán resolucións proxectivas non limitadas.

O exemplo básico deste tipo de categorías son as categorías derivadas de categorías de módulos sobre un anel (asociativo e unitario). Con todo, en xeral pódense considerar categorías de módulos sobre categorías aditivas pequenas, que se adoitan denominar como aneis “con varios obxectos” no sentido análogo a considerar un grupoide como un grupo “con varios obxectos”.

O obxectivo esencial deste traballo é mostrar que a categoría de complexos de unha categoría de Grothendieck cun xerador proxectivo ten asociado un derivador cuxa categoría subxacente é a categoría derivada de partida. Para isto, apelaremos unicamente á estrutura inicial da categoría de complexos desa categoría (e das correspondentes categorías de diagramas) e ás propiedades básicas dos cuasi-isomorfismos.

Este será o obxectivo do capítulo 3: estableceremos a estrutura deste derivador, que denominaremos derivador homolóxico, sen apelar ao teorema de Cisinski. A idea é que a existencia de límites e colímites na categoría de complexos permite definir os correspondentes funtores nas categorías derivadas das categorías de diagramas correspondentes. O punto clave do traballo é que as propiedades universais dos funtores derivados proporcionan as propiedades universais requiridas nos (co)límites homotópicos, que se expresan aquí como límites derivados a través das oportunas resolucións non limitadas.

Próbase tamén no capítulo 3 que o derivador homolóxico é un derivador forte e estable. A estabilidade proporciona unha estrutura triangulada que neste caso coincidirá coa triangulación usual en categorías derivadas de complexos.

Este desenvolvemento ten aplicacións interesantes en ámbitos onde se traballe con categorías derivadas. Moitas construcións nestas categorías requiren unha construción que inclúe un (co)límite homotópico. Esas construcións adoitan realizarse cun diagrama que se expresa no modelo ou ben se utilizan límites finitos ou numerables indicados por un conxunto totalmente ordenado. O derivador presentado nesta memoria libéranos desta limitación.

Neste traballo estudamos as implicacións en dous casos concretos nos capítulos 4 e 5. A primeira construción é o cálculo da localización de Bousfield dunha categoría localizante asociada a un conxunto estable por especialización do espectro dun anel conmutativo noetheriano. No caso no que o conxunto sexa pechado, xa é posible unha construción a través de complexos de Koszul e un límite homotópico cuxo diagrama subxacente son os naturais coa súa orde. En xeral, os complexos de Koszul dos pechados determinan a súa categoría localizante, pero a fórmula non se xeneraliza xa que o límite se establece cunha categoría fibrante non necesariamente totalmente ordenada nin numerable. A definición mediante o límite homotópico obtense usando a descrición conceptual de Neeman, véxase [N1]. No capítulo 4 daremos unha descrición para conxuntos estables por especialización empregando límites derivados definidos a través do derivador homolóxico.

Outra construción que abordamos, no capítulo 5, é a (co)homoloxía de gru-

pos con coeficientes nun  $A$ -módulo, con  $A$  un anel conmutativo. A motivación é presentar o derivador homolóxico  $\mathcal{D}_A$  como un contexto natural para formular e demostrar resultados clave da (co)homoloxía de grupos. Resulta práctico estender os coeficientes a complexos, de xeito que o noso formalismo pode entenderse como unha teoría de hiper(co)homoloxía de grupos. Dado que os funtores que se derivan se poden expresar como límites para a homoloxía e colímites para a cohomoloxía, os seus valores atópanse de forma natural na teoría do derivador  $\mathcal{D}_A$ . Con esta linguaxe, as estruturas básicas da (co)homoloxía dun grupo con coeficientes nun anel  $A$  correspóndense simplemente con certos elementos xa presentes na estrutura de derivador  $\mathcal{D}_A$ .

Para finalizar, realizaremos unha descrición máis pormenorizada dos contidos da memoria, que está dividida en dúas partes: unha de preliminares e outra de resultados.

A parte I de preliminares consta dun só capítulo, o capítulo 1, no que se fai unha introdución ás categorías de complexos dunha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  e se presenta a súa vinculación co estudo da (co)homoloxía. Nesta introdución constrúense a partir da categoría de complexos  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  a categoría homotópica  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , a través dun paso ao cociente; e a categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ , mediante un cálculo de fraccións segundo Deligne.

Estudárase tamén como nestes procesos se produce un cambio nas propiedades categóricas respecto de  $\mathbf{A}$ . Dotaranse as novas categorías dunha estrutura triangulada, de xeito que se poida recuperar a información homotópica necesaria. Ademais abórdase a existencia de resolucións neste tipo de categorías, imprescindible para garantir a existencia dos funtores derivados que definirán o derivador homolóxico nos capítulos posteriores.

A parte II consta de catro capítulos. O capítulo 2 é unha introdución á teoría de derivadores, que inclúe a motivación da súa definición desde o punto de vista e as convencións de Groth e unha análise do comportamento das categorías de diagramas. Este capítulo está orientado tamén a motivar a definición do derivador homolóxico presentado no capítulo 3.

No terceiro capítulo preséntase unha descrición do derivador homolóxico partindo dunha categoría Grothendieck con suficientes proxectivos, que ten como categoría subxacente correspondente a categoría derivada. A descrición proposta só require de ferramentas básicas de álgebra homolóxica de xeito que non se empregan, como xa adiantabamos, as categorías modelo. Ademais, proporciona unha descrición explícita dos límites e colímites homotópicos nesta

categoría. Probarase en dito capítulo que o derivador é forte e estable, propiedade esta última que induce unha estrutura triangulada. Veremos que esta estrutura así definida coincide coa usual da derivada.

Os dous últimos capítulos da memoria presentan dúas aplicacións do formalismo xeral desenvolvido. No capítulo 4 xeneralízase a descrición das localizacións asociadas a pechados, no sentido definido en [N1], ao caso de conxuntos estables por especializacións. A descrición explícita de colímites homotópicos asociados a diagramas arbitrarios proporcionada polo derivador homolóxico fai posible esta nova caracterización. Os funtores localización e aciclización asociados quedan descritos mediante colímites que empregan complexos perfectos. A categoría localizante está, de feito, xerada por estes obxectos, o que caracteriza as localizacións.

Por último, no capítulo 5 reformularanse algúns resultados coñecidos de cohomoloxía de grupos usando a linguaxe do derivador desenvolvido, aproveitando o feito de que a (co)homoloxía se pode expresar a través de funtores derivados de certos límites. No contexto xeral da linguaxe de hiper(co)homoloxía, fórmulanse e demóstranse: a lei de reciprocidade de Frobenius; o Lema de Shapiro, que é consecuencia da pseudofunctorialidade das extensións de Kan; e a sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre, que se segue da bifunctorialidade das extensións de Kan homotópicas.

---

---

# Obxectivos

---

---

Esta tese ten como obxectivo principal simplificar a demostración do feito de que unha categoría derivada de módulos sobre un anel ou feixes cuasi-coherentes sobre un esquema é a base dun derivador. O interese deste proxecto radica en aplicar unha nova óptica para abordar problemas que presentan dificultades maiores coas técnicas actualmente dispoñibles. En concreto, os derivadores proporcionan ferramentas para o cálculo de límites e colímites homotópicos. Desta forma, certos problemas que se poden tratar no contexto abeliano, e cuxa solución require unha considerable complexidade técnica no contexto derivado, admiten unha perspectiva á vez máis natural e máis xeral no contexto dos derivadores.

Neste proxecto propuxéronse tres obxectivos. O primeiro trata de establecer un modelo homolóxico flexible das categorías derivadas de categorías de Grothendieck con suficientes proxectivos de modo que as súas estruturas básicas sexan explícitas e susceptibles de realización de cálculos en contextos específicos.

Unha primeira proposta é o desenvolvemento da estrutura de derivador asociado á categoría derivada dunha categoría abeliana de Grothendieck con suficientes proxectivos por medios puramente de álgebra homolóxica. Empregando, no espírito de [AJS1], versións adaptadas a complexos das construcións de límite e colímite homotópico en termos de totalización de bicomplexos asociados de forma natural a un diagrama, estudáranse as propiedades xerais que caracterizan un derivador estable seguindo a presentación de Groth [Gr1].

A primeira aplicación que se propón é a caracterización e descrición das localizacións homolóxicas dun anel noetheriano (cohomoloxía local). A segunda aplicación é o desenvolvemento básico dos teoremas da cohomoloxía de grupos no contexto de derivadores.

## Obxectivos específicos

1. Construción por métodos da álgebra homolóxica do derivador asociado a unha categoría abeliana de Grothendieck con suficientes proxectivos. Estudo das súas propiedades
2. Aplicación destas estruturas ao estudo da cohomoloxía local respecto a sistemas de soportes no espectro dun anel conmutativo noetheriano.
3. Estudo das aplicacións destas ferramenta á cohomoloxía de grupos.

---

---

# Metodoloxía

---

---

Esta tese seguiu a metodoloxía clásica en investigación básica en matemáticas. Algunhas tarefas estándar neste tipo de investigación son propostas de definicións, conxecturas de resultados que xeneralicen outros xa coñecidos, ou que poidan compararse con eles, e a procura de novos exemplos que sexan o suficientemente significativos ou teñan aplicacións importantes noutras áreas das matemáticas. Para iso, é necesario realizar un estudo previo e exhaustivo dos temas para tratar. Este estudo realízase de diversas formas, sendo predominante a consulta e estudo de bibliografía existente e sendo esencial poñerse en contacto e compartir ideas con expertos doutras universidades.

Precisamente, un elemento clave do método de traballo é a comunicación dentro do grupo: participando en sesións de traballo e seminarios de temas específicos e mantendo unha relación frecuente con outros especialistas do tema noutras universidades tanto nacionais como estranxeiras.



Parte I

Preliminares



## CAPÍTULO 1

---

# Categorías de complexos

---

Un dos obxectivos deste traballo é abordar o estudo da homoloxía e da cohomoloxía a través da linguaxe dos derivadores. O termo homoloxía provén do grego *homos* que significa idéntico. Así, as teorías matemáticas que reciben este nome buscan identificar obxectos que sexan idénticos en relación coa propiedade de se queira estudar en cada momento. Orixinariamente en topoloxía, a (co)homoloxía singular dun determinado espazo topolóxico é un complexo a través do cal se poden extraer propiedades do espazo orixinal. Desde o punto de vista alxébrico, establécense posteriormente distintas teorías de cohomoloxía (grupos, módulos, álxebras, álxebras de Lie...) que á súa vez se expresan mediante a construción de determinados complexos.

Queda patente logo a relación entre o estudo da (co)homoloxía e os complexos. Por esta razón, ao longo deste capítulo imos a realizar unha ampla introdución ás categorías de complexos, incluíndo o estudo pormenorizado das categorías coas que traballaremos posteriormente, categorías moi adecuadas para estudar homoloxía e cohomoloxía: as categorías homotópica e derivada.

### 1.1 Teorías de homotopía e homoloxía en complexos

Neste capítulo, excepto que se indique o contrario, consideraremos  $\mathcal{A}$  unha categoría abeliana, cuxa definición recordaremos na Definición 1.5.1.

### Categoría de complexos

**Definición 1.1.1.** Un *complexo*  $X$  nunha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  consiste nunha familia  $\{X^n, d_X^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de obxectos de  $\mathbf{A}$  e morfismos  $d_X^n \in \text{Hom}_{\mathbf{A}}(X^n, X^{n+1})$  tales que  $d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . A familia de morfismos  $d_X = \{d_X^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  denomínase *diferencial* do complexo  $X$ .

Para denotar un complexo  $X$  úsase ás veces a notación  $X^\bullet$  e representábase a miúdo por

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

**Definición 1.1.2.** Un *morfismo de complexos*  $f: X \rightarrow Y$  é unha sucesión  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos  $f^n: X^n \rightarrow Y^n$  de  $\mathbf{A}$  verificando

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n,$$

para calquera  $n \in \mathbb{Z}$ .

É dicir,  $f: X \rightarrow Y$  é unha sucesión  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos que fai o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Tomando como obxectos os complexos e como frechas os morfismos de complexos que acabamos de definir, chamaremos *categoría de complexos* á categoría resultante e denotáremola por  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ .

**Definición 1.1.3.** Diremos que un complexo  $X$  é *limitado*, *limitado inferiormente* ou *limitado superiormente* se  $X^n = 0$  para  $|n| \gg 0$ ,  $n \ll 0$  ou  $n \gg 0$  con  $n \in \mathbb{N}$ , respectivamente.

Denotaremos a subcategoría plena de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  formada polos complexos limitados, inferiormente limitados ou superiormente limitados como  $\mathbf{C}^b(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{C}^+(\mathbf{A})$  ou  $\mathbf{C}^-(\mathbf{A})$ , respectivamente. Ademais, identificaremos con  $\mathbf{A}$  a subcategoría plena de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  formada polos complexos  $X$  tales que  $X^n = 0$  para calquera  $n \neq 0$ .

Por ser os complexos “graduados”, tal e como están definidos pode ocorrer que dúas disposicións de obxectos e frechas idénticas pero con distinta graduación sexan complexos diferentes na categoría. O functor translación ou suspensión expresa estas relacións.

**Definición 1.1.4.** Sexa  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  a categoría de complexos asociada á categoría abeliana  $\mathbf{A}$ . Para un obxecto  $X$  de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  e  $k \in \mathbb{Z}$  definiremos o *complexo desprazado de  $X$  de grao  $k$*  como o complexo que verifica que  $X[k]^n = X^{k+n}$  e  $d_{X[k]}^n = (-1)^k d_X^{n+k}$ .

Do mesmo xeito, para un morfismo  $f: X \rightarrow Y$ , definiremos o seu *morfismo desprazado de grao  $k$*  como  $f[k]: X[k] \rightarrow Y[k]$ , de xeito que  $f[k]^n = f^{n+k}$ .

Chamarémoslle *functor translación de grao  $k$*  ou *functor suspensión de grao  $k$*  ao automorfismo aditivo

$$[k]: \mathbf{C}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A})$$

que para cada obxecto  $X$  e cada morfismo  $f$  de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  actúa como  $[k](X) = X[k]$  e  $[k](f) = f[k]$ .

En ocasións, denominaremos simplemente *functor translación* ou *functor suspensión* ao functor translación de grao 1, é dicir, ao functor  $[1]: \mathbf{C}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A})$ .

## Homotopía e homoloxía

Historicamente, os complexos nacen vinculados ao estudo de espazos topolóxicos. En topoloxía alxébrica, o complexo singular asociado a un determinado espazo topolóxico aporta información sobre a morfoloxía do mesmo. Un invariante topolóxico que é amplamente utilizado no estudo e caracterización de espazos é a cohomoloxía.

**Definición 1.1.5.** Para un complexo  $X$  de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  defínense os  $n$ -ciclos como  $Z^n(X) := \text{Ker } d_X^n$  e os  $n$ -bordes como  $B^n(X) := \text{Im } d_X^{n-1}$ . Denominaremos  $n$ -ésimo *obxecto de cohomoloxía* do complexo  $X$  ao conúcleo

$$H^n(X) := \text{Coker}(B^n(X) \rightarrow Z^n(X)),$$

ou equivalentemente, para  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$H^n(X) = \frac{\text{Ker } d_X^n}{\text{Im } d_X^{n-1}}.$$

Diremos que o complexo  $X$  é *acíclico* se  $H^n(X) = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Deste xeito  $H^n(-)$  define un functor entre as categorías  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  e  $\mathbf{A}$ , que se comporta axeitadamente con respecto aos funtores translación, pois é sinxelo comprobar que  $H^n(X) = H^0(X[n])$ .

Obsérvese ademais que todo functor entre categorías abelianas  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  induce un functor entre as correspondentes categorías de complexos, que por abuso de notación denotaremos habitualmente tamén como  $F: \mathbf{C}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{B})$ . Nestas condicións, o functor  $H^n(-)$  tamén ten boas propiedades con respecto aos funtores exactos, algo que será vital nalgúns capítulos posteriores. Recordemos que un functor exacto é aquel functor que conserva sucesións exactas.

**Proposición 1.1.6.** *Sexa  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  un functor entre categorías abelianas e  $X$  un complexo da categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ . Se  $F$  é un functor exacto, entón conserva a cohomoloxía, é dicir,  $H^n(F(X)) = F(H^n(X))$ .*

Dado que o noso interese é estudar a fondo a cohomoloxía dos complexos, imos identificar os morfismos que induzan o mesmo morfismo en cohomoloxía. Daremos o primeiro paso definindo o concepto de homotopía en complexos, mantendo así o paralelismo coas nocións topolóxicas tradicionais.

**Definición 1.1.7.** Un morfismo de complexos  $f: X \rightarrow Y$  en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é *homótopo a cero* se existe unha sucesión  $\{s^n: X^n \rightarrow Y^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos de  $\mathbf{A}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f^{n-1} & \swarrow s^n & \downarrow f^n & \swarrow s^{n+1} & \downarrow f^{n+1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

tales que  $f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . A sucesión  $s = \{s^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  coñécese como *homotopía de  $X$  a  $Y$* .

Dirase ademais que  $f$  é *homótopo a  $g$* , sendo  $g: X \rightarrow Y$  outro morfismo de complexos, se  $f - g$  é homótopo a cero.

**Definición 1.1.8.** Un complexo  $X$  de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é *homótopo a cero* ou *contráctil* se a identidade  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  é homótopa a cero.

A relación “ser homótopo a” é unha relación de equivalencia no grupo de morfismos  $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{A})}(X, Y)$ , que ademais é compatible coa composición de morfismos de complexos. Gracias a esta propiedade podemos definir a partir de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  unha nova categoría aditiva na que todos os morfismos homótopos a cero se identifican co morfismo cero.

**Definición 1.1.9.** Defínese a *categoría homotópica*  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  como a categoría descrita a partir de:

**Obxectos:** os obxectos de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ .

**Morfismos:** para cada par de obxectos  $X$  e  $Y$  en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathbf{A})}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{A})}(X, Y) / \text{Ht}(X, Y),$$

sendo  $\text{Ht}(X, Y)$  o subgrupo de  $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{A})}(X, Y)$  integrado polos morfismos que son homótopos a cero.

Cada un dos funtores translación  $[k]: \mathbf{C}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A})$  é compatible coa relación de homotopía e por tanto induce un functor translación  $[k]: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{A})$  na categoría homotópica.

**Definición 1.1.10.** Un morfismo de complexos  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{A})}(X, Y)$  é unha *equivalencia de homotopía* se é un isomorfismos na categoría  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , é dicir, se existe outro morfismo  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{A})}(Y, X)$  tal que  $g \circ f$  é homótopo á  $\text{id}_X$  e  $f \circ g$  é homótopo á  $\text{id}_Y$ .

Diremos que dous complexos  $X$  e  $Y$  son *homotopicamente equivalentes* se existe entre eles unha equivalencia de homotopía, ou o que é o mesmo, se son isomorfos en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ .

O concepto de homotopía está intimamente ligado ao de cohomoloxía. Un morfismo de complexos homótopo a cero induce en cohomoloxía o morfismo nulo e, deste xeito, dous morfismos de complexos homótopos inducen a mesma frecha entre as cohomoloxías. Os funtores  $H^n: \mathbf{C}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$  inducen funtores ben definidos como funtores de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  a  $\mathbf{A}$  e, aínda que caendo nun pequeno abuso de notación, denotarémolo do mesmo xeito:

$$H^n: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{A}.$$

O seguinte obxectivo será construír unha categoría adecuada para o estudo dos complexos atendendo á súa cohomoloxía. Neste sentido conviría que, ademais de identificar as frechas que inducen o mesmo morfismo en cohomoloxía como ocorre en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , puideramos identificar tamén os obxectos cuxas cohomoloxías coinciden salvo isomorfismo. É dicir, pretendemos atopar unha categoría na que as frechas que inducen isomorfismos en cohomoloxía sexan isomorfismos.

**Definición 1.1.11.** Diremos que un morfismo de complexos  $f: X \rightarrow Y$  é un *cuasi-isomorfismo* ou *quis* se os morfismos inducidos  $H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$  son isomorfismos, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , e utilizaremos en ocasións a notación  $X \xrightarrow{\text{quis}} Y$ .

Para construír unha categoría de complexos na que os *quis* sexan invertibles precisaremos manexar categorías con estrutura triangulada.

## 1.2 Categorías trianguladas. A categoría homotópica

Cando pasamos cunha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  á súa categoría de complexos  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ , practicamente non perdemos propiedades categoricamente falando, pois a categoría de complexos é tamén abeliana. Mais cando realizamos o paso da categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  á categoría homotópica  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , en xeral perdemos a abelianidade obtendo simplemente unha categoría aditiva. A cambio, podemos dotar a esta nova categoría homotópica do que se coñece como unha estrutura triangulada, que supla parcialmente as carencias de non ser abeliana.

Nesta sección imos simplemente a definir o concepto de categoría triangulada e tratar algunhas das súas características máis importantes, ademais de ver o exemplo canónico: a categoría homotópica de complexos.

Dada  $\mathbf{T}$  unha categoría aditiva cun automorfismo aditivo  $T: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ , ao que denominaremos *functor translación*, chamaremos *triángulo* a calquera diagrama en  $\mathbf{T}$  do tipo

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX,$$

onde  $TX$  é  $T(X)$ . O morfismo  $f: X \rightarrow Y$  denomínase *base* do triángulo e diremos que  $Z$  é o *vértice*. Nalgúns textos represéntanse os triángulos por diagramas como o seguinte, o que explica o nome de triángulos:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Definición 1.2.1.** Sexan  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX$  e  $X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow TX'$  dous triángulos de  $\mathbf{T}$ . Definimos un *morfismo de triángulos* entre eles como unha terna  $(u, v, w)$  de morfismos tales que o seguinte diagrama é conmutativo en  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

Facendo unha selección particular de triángulos podemos dotar a unha categoría aditiva cun functor translación dunha nova estrutura: a de categoría triangulada.

**Definición 1.2.2.** [KS2, Definition 10.1.6] Unha *categoría triangulada* é unha categoría aditiva  $\mathbf{T}$  cun functor translación  $T: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  e unha colección de triángulos que chamaremos *triángulos distinguidos* verificando as seguintes propiedades:

**TR1** a) Para todo obxecto  $X$  de  $\mathbf{T}$  o triángulo  $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow TX$  é distinguido.

b) Todo triángulo isomorfo a un triángulo distinguido é á súa vez distinguido.

c) Todo morfismo en  $\mathbf{T}$  é base dun triángulo distinguido.

**TR2** O triángulo  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  é distinguido se, e só se, o é o triángulo  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-T(f)} TY$ .

**TR3** Para calquera diagrama conmutativo da forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX'
 \end{array}$$

cuxas filas son triángulos distinguidos, existe un morfismo  $w$  (non necesariamente único) que completa o diagrama a un morfismo de triángulos.

**TR4** (Axioma do octaedro) Dados os triángulos distinguidos

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \rightarrow TX,$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \rightarrow TY,$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \rightarrow TX,$$

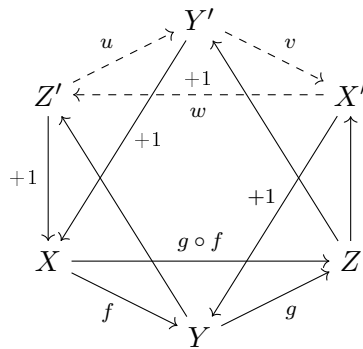
existe un triángulo distinguido

$$Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$$

de forma que o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z' & \longrightarrow & TX \\
 \text{id}_X \downarrow & & g \downarrow & & \text{---} \downarrow u & & \downarrow \text{id}_{TX} \\
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{l} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow & & \text{id}_X \downarrow & & \text{---} \downarrow v & & \downarrow T(f) \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow & TY \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X'} & & \downarrow T(h) \\
 Z' & \text{---} \xrightarrow{u} & Y' & \text{---} \xrightarrow{v} & X' & \text{---} \xrightarrow{w} & TZ'
 \end{array}$$

Este axioma adoita representarse tamén en forma de octaedro, dando nome ao axioma:



onde as caras do octaedro se corresponden ou ben con diagramas conmutativos ou ben con triángulos distinguidos.

*Observación 1.2.3.* Na literatura, podemos atopar definicións de categoría triangulada lixeiramente distintas, pero equivalentes á precedente. Isto é debido a que algúns destes axiomas admiten definicións alternativas. Por exemplo, o axioma TR3 admite outra formulación TR3' se asumimos que se verifica TR2: para calquera diagrama conmutativo con triángulos distinguidos por filas da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow r & & \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow T(r) \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX'
 \end{array}$$

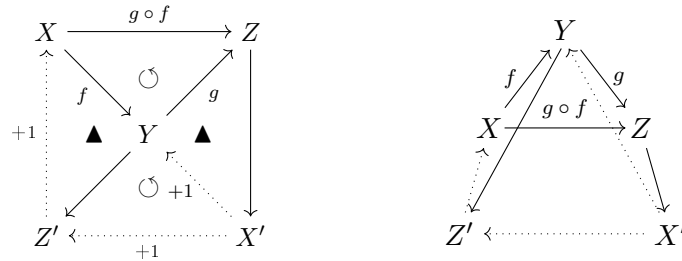
existe  $r: X \rightarrow X'$  tal que o diagrama resultante é conmutativo.

Os tres primeiros axiomas son os coñecidos como axiomas de Puppe, véxase [P]. En cambio, o axioma do octaedro foi incluído posteriormente por Verdier en [V1] e [V2].

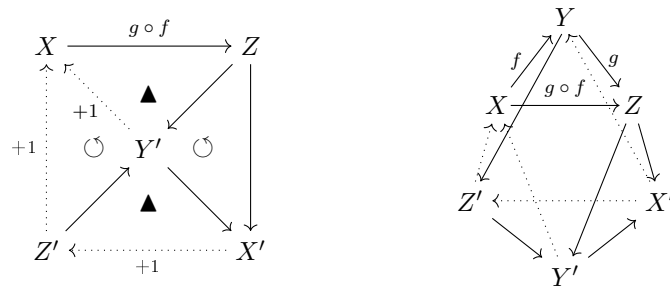
De feito, a definición así presentada é en certo sentido redundante, pois o axioma TR3 dedúcese dos axiomas TR1 e TR4: basta aplicar o axioma TR4 aos triángulos distinguidos con bases  $X \xrightarrow{f} Y$ ,  $Y \xrightarrow{v} Y'$  e  $X \xrightarrow{v \circ f} Y'$  e posteriormente aos triángulos distinguidos correspondentes ás bases  $X \xrightarrow{u} X'$ ,  $X' \xrightarrow{f'} Y'$ ,  $X \xrightarrow{f' \circ u} Y'$ . Obtense facilmente TR3 ao verificarse que  $f' \circ u = v \circ f$ .

O axioma do octaedro será o que nos permita formalizar o cálculo de fraccións sobre a categoría triangulada, como se verá na sección 1.3. Unha formulación interesante deste axioma é a seguinte, tomada de [BBD]:

**TR4'** Dados morfismos  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  e a súa composición  $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ , todo tetraedro da forma



(onde os triángulos superior e inferior do cadrado da esquerda, marcados con  $\circlearrowright$ , son diagramas conmutativos e o dereito e esquerdo, sinalados con  $\blacktriangle$ , son triángulos distinguidos) pode completarse a un octaedro tal que:



O primeiro tetraedro presentado en TR4' correspóndese coa parte inferior do octaedro de TR4. Logo o que se está a esixir en TR4' é que dada a parte inferior do octaedro de TR4 este se poida completar ao octaedro completo.

**Definición 1.2.4.** Sexan  $(\mathbf{T}_1, T_1)$  e  $(\mathbf{T}_2, T_2)$  dúas categorías trianguladas. Defínese un *functor de categorías trianguladas* ou  $\Delta$ -*functor* como un par  $(F, \theta)$  consistente nun functor aditivo  $F: \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$  e un isomorfismo de funtores  $\theta: F \circ T_1 \xrightarrow{\sim} T_2 \circ F$  tales que para cada triángulo distinguido en  $\mathbf{T}_1$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T_1(X)$$

o triángulo inducido

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \xrightarrow{\theta \circ F(h)} T_2(F(X))$$

é un triángulo distinguido en  $\mathbf{T}_2$ .

Abusando da linguaxe falaremos de forma habitual do  $\Delta$ -functor  $F$  englobando ao par  $(F, \theta)$ . Veremos que en moitos casos os isomorfismos  $\theta$  cos que traballaremos serán a identidade.

*Observación 1.2.5.* Na literatura existente é habitual denominar *functor exacto* a calquera  $\Delta$ -functor, máis neste traballo como xa establecemos anteriormente chamaremos functor exacto exclusivamente aos funtores de categorías abelianas que conservan sucesións exactas.

Supoñamos que temos unha terceira categoría triangulada  $\mathbf{T}_3$  con functor translación  $T_3$ . Para dous  $\Delta$ -funtores  $(F, \theta_1): \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$  e  $(G, \theta_2): \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3$  a composición  $(G \circ F, \theta_2 \theta_1): \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_3$  é á súa vez un  $\Delta$ -functor, onde  $\theta_2 \theta_1$  é a composición

$$GFT_1 \xrightarrow{\text{vía } \theta_1} GT_2F \xrightarrow{\text{vía } \theta_2} T_3GF.$$

**Definición 1.2.6.** Sexan  $(\mathbf{T}_1, T_1)$  e  $(\mathbf{T}_2, T_2)$  categorías trianguladas. Dados  $(F, \theta_1): \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$  e  $(G, \theta_2): \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$  dous  $\Delta$ -funtores, un *morfismo de  $\Delta$ -funtores* ou *transformación  $\Delta$ -natural*,  $\eta: (F, \theta_1) \rightarrow (G, \theta_2)$ , é un morfismo de funtores  $\eta: F \rightarrow G$  de forma que para todo obxecto  $X$  da categoría  $\mathbf{T}_1$  o seguinte diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} FT_1(X) & \xrightarrow{\eta(T_1(X))} & GT_1(X) \\ \theta_1(X) \downarrow & & \downarrow \theta_2(X) \\ T_2F(X) & \xrightarrow{T_2(\eta(X))} & T_2G(X) \end{array}$$

Denotaremos por  $\text{Nat}_\Delta(F, G)$  o conxunto de transformacións  $\Delta$ -naturais entre os  $\Delta$ -funtores  $F$  e  $G$ .

## Propiedades das categorías trianguladas

Para traballar coa estrutura triangulada dunha categoría é necesario recoñecer os triángulos que son distinguidos. Ao longo desta sección exporemos algúns resultados que nos permitirán saber cando un triángulo é distinguido e probaremos algunhas propiedades destas categorías.

**Proposición 1.2.7.** [KS1, Corollary 1.5.5] *Dado un morfismo de triángulos distinguidos*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX'
 \end{array}$$

*Se  $u$  e  $v$  son isomorfismos, entón  $w$  é tamén un isomorfismo.*

Este resultado garántenos que o triángulo distinguido que se pode construír por TR1.c) para un certo morfismo base é único salvo isomorfismo, aínda que ese isomorfismo non sexa necesariamente único. Obsérvese que esta última apreciación é tan sutil como importante: o isomorfismo do que falamos non é un isomorfismo canónico e isto provoca dificultades na construción de diagramas no contexto das categorías trianguladas.

Con todo existen condicións para morfismos de triángulos baixo as cales dúas das tres frechas determinan a terceira, como son as recollidas no seguinte resultado.

**Proposición 1.2.8.** [BBD, Proposition 1.1.9] *Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada e sexan as filas do seguinte diagrama en  $\mathbf{T}$  dous triángulos distinguidos da categoría.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX'
 \end{array}$$

*Entón son equivalentes:*

i) *A composición  $g' \circ v \circ f$  é nula.*

- ii) *Existe un morfismo  $u$  que fai o cadrado da esquerda conmutativo. Se  $\text{Hom}(X, TZ') = 0$  entón o morfismo  $u$  é único.*
- iii) *Existe un morfismo  $w$  que fai o cadrado da esquerda conmutativo. Se  $\text{Hom}(X, TZ') = 0$  entón o morfismo  $w$  é único.*

### O cono e cilindro de complexos

Para construír a estrutura triangulada da categoría homotópica de complexos  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  asociada a unha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  debemos introducir previamente algúns obxectos que nos serán familiares da teoría de homotopía topolóxica. O primeiro que imos a presentar, o cono, será esencial tanto para definir a estrutura triangulada da categoría homotópica, como para posteriormente definir a estrutura da categoría derivada.

**Definición 1.2.9.** Defínese o *cono* dun morfismo de complexos  $f: X \rightarrow Y$  como o complexo  $C(f) := X[1] \oplus Y$ , cuxos obxectos en grao  $n \in \mathbb{Z}$  son

$$C(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n$$

e cuxa diferencial está definida en termos de elementos por

$$d_{C(f)}^n(x, y) = (d_{X[1]}^n(x), f^{n+1}(x) + d_Y^n(y))$$

ou expresada en forma matricial:

$$d_{C(f)}^n = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

Para operar co cono imos a definir á súa vez dous morfismos de complexos que denotaremos habitualmente por  $\alpha(f): Y \rightarrow C(f)$  e  $\beta(f): C(f) \rightarrow X[1]$  mediante a expresión

$$\alpha(f)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_Y^n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta(f)^n = (\text{id}_X^{n+1} \quad 0)$$

Así, cada frecha  $X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  ten asociado un diagrama de complexos da forma

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} Z \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

Na definición das estruturas trianguladas das categorías homotópica e derivada, o papel clave do cono débese á súa capacidade para caracterizar cuasi-isomorfismos.

**Lema 1.2.10.** [W, Corollary 1.5.4] *Un morfismo de complexos de  $\mathbf{C}(A)$  é un cuasi-isomorfismo se, e só se,  $C(f)$  é acíclico.*

Por último, imos definir o que se coñece como cilindro dun morfismo, cuxo nome vén ligado, ao igual que o do cono, ao concepto topolóxico do mesmo nome.

**Definición 1.2.11.** Defínese o *cilindro* dun morfismo de complexos  $f: X \rightarrow Y$  como o complexo  $\text{Cyl}(f) := X[1] \oplus X \oplus Y$ , que en cada grao  $n \in \mathbb{Z}$  verifica

$$\text{Cyl}(f)^n = X^{n+1} \oplus X^n \oplus Y^n$$

e cuxa diferencial vén dada por

$$d_{\text{Cyl}(f)}^n = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 & 0 \\ \text{id}_{X[1]}^n & d_X^n & 0 \\ -f^{n+1} & 0 & d_Y^n \end{pmatrix}$$

O cilindro é realmente un caso particular de cono: se tomamos o cono do morfismo  $\beta(f)$  antes definido, obtemos que

$$C(\beta(f))^n = C(f)^{n+1} \oplus X[1]^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1},$$

logo  $C(\beta(f))[-1] \cong \text{Cyl}(f)$ .

Imos agora a destacar unha propiedade moi versátil do cilindro dunha frecha: é homotopicamente equivalente ao codominio da frecha. Este feito permitíranos substituír precisamente o codominio dunha determinada frecha por este obxecto dentro da categoría homotópica. Veremos que esta substitución será útil para probar na sección 3.2 que o derivador definido no capítulo 3 é forte.

**Lema 1.2.12.** *Sexa  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de complexos e  $\alpha: Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$  a inclusión de  $Y$  na terceira compoñente do cilindro. Entón o morfismo  $\alpha$  é unha equivalencia de homotopía.*

*Demostración.* Podemos escribir a inclusión  $\alpha$  en forma matricial como

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{id} \end{pmatrix}$$

Definamos como candidata a inversa homotópica  $\beta := (0 \ f \ \text{id})$ . É sinxelo comprobar que  $\beta\alpha = \text{id}$  en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ . Por outra banda, tomando como homotopía a dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pódese comprobar que a composición  $\alpha\beta$  é homotopa á  $\text{id}$ . En conclusión,  $\alpha$  é unha equivalencia de homotopía.  $\square$

## A estrutura triangulada da categoría homotópica

Construamos finalmente a estrutura triangulada da categoría  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  e vexamos algunhas das súas propiedades principais.

**Proposición 1.2.13.** [KS1, Proposition 1.4.4] *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. A categoría  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  é unha categoría triangulada tomando como triángulos distinguidos os triángulos isomorfos a un da forma*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} C(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

para algún morfismo  $f$  de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ .

A definición da clase de triángulos distinguidos leva consigo inevitablemente asociada unha elección. Neste caso, para a categoría  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  tómanse os triángulos isomorfos aos definidos na proposición, máis podería facerse outra escolla obtendo unha estrutura triangulada distinta. Este é un dos fenómenos que se busca evitar coa teoría de derivadores, que a functorialidade dos mesmos, no caso dos derivadores estables, determine unha estrutura triangulada en certo sentido canónica, como introduciremos na sección 2.2.

Aínda que o trataremos en profundidade na sección 1.5, podemos avanzar que a categoría  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  raramente é abeliana. Por este motivo, o protagonismo e utilidade das sucesións exactas curtas vese afectado, xa que é nas categorías abelianas onde estas sucesións se comportan ben. Mais facendo uso da estrutura triangulada poderemos recuperar parte desa información, posto que en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  os triángulos corresponderanse precisamente cun tipo de sucesións exactas curtas: as semiescindidas.

**Definición 1.2.14.** Unha sucesión exacta curta  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  dise *semiescindida* se, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , a sucesión exacta curta en cada grao  $0 \rightarrow X^n \rightarrow Y^n \rightarrow Z^n \rightarrow 0$  escinde.

O seguinte resultado amósanos a correspondencia existente entre as sucesións exactas curtas semiescindidas e os triángulos distinguidos de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ .

**Proposición 1.2.15.** [Li, Final de 1.4.4] *Toda sucesión exacta curta semiescindida de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  dá lugar a un triángulo distinguido en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  e ademais todo triángulo distinguido é isomorfo a un desa forma.*

Na proba deste resultado demóstrase que para unha sucesión exacta curta semiescindida

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

o morfismo  $(0, g): C(f) \rightarrow Z$  posúe un inverso  $\psi: Z \rightarrow C(f)$  en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  que permite construír o triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1],$$

sendo  $h = \beta(f) \circ \psi$ . Reciprocamente, próbbase que dado

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} C(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

un triángulo distinguido en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , a sucesión

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \text{Cyl}(f) \longrightarrow C(f) \longrightarrow 0,$$

coas inclusións obvias, é exacta curta semiescindida.

### 1.3 Localización en categorías trianguladas.

#### A categoría derivada

##### Localización de categorías

A localización de categorías trata de resolver o seguinte problema: dada unha categoría  $\mathbf{C}$  e  $S$  unha clase de morfismos de  $\mathbf{C}$ , quérese construír de forma universal unha nova categoría  $S^{-1}\mathbf{C}$  xunto cun functor  $\mathbf{C} \rightarrow S^{-1}\mathbf{C}$  de xeito que os morfismos de  $S$  se convertan en isomorfismos na nova categoría  $S^{-1}\mathbf{C}$ . Para que a localización sexa posible, a clase de morfismos  $S$  debe cumprir unhas certas propiedades, que se recollen na seguinte definición.

**Definición 1.3.1.** Sexa  $\mathbf{C}$  unha categoría e  $S$  unha familia de morfismos en  $\mathbf{C}$ . Diremos que  $S$  é un *sistema multiplicativo* se verifica os axiomas S1–S4:

**S1** Para calquera obxecto  $X$  en  $\mathbf{C}$ , o morfismo  $\text{id}_X \in S$ .

**S2** Para calquera  $f, g \in S$  tales que existe  $g \circ f$ , entón  $g \circ f \in S$ .

**S3** (*Condición de Ore*) Calquera diagrama en  $\mathbf{C}$  do tipo do presentado á esquerda, con  $s \in S$ , se pode completar a un cadrado conmutativo como o da dereita, con  $t \in S$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 & \downarrow s & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 W & \overset{g}{\dashrightarrow} & Z \\
 \downarrow t & & \downarrow s \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

O mesmo se ten cambiando o sentido das frechas: todo diagrama como o do lado esquerdo da figura, con  $s \in S$ , se pode completar a un cadrado

conmutativo con  $t \in S$  como segue

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 & \uparrow s & \\
 X & \xleftarrow{f} Y & \\
 & & \\
 & W & \xleftarrow{g} Z \\
 & \uparrow t & \uparrow s \\
 X & \xleftarrow{f} Y & 
 \end{array}$$

**S4** (*Condición de cancelación*) Se  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  entón equivalen:

- a)  $t \circ f = t \circ g$ , para algún  $t \in S$ ,  $t: Y \rightarrow Y'$ ,
- b)  $f \circ s = g \circ s$ , para algún  $s \in S$ ,  $s: X' \rightarrow X$ .

A partir destes sistemas multiplicativos imos construír a localización da categoría  $\mathcal{C}$ . Inicialmente, para cada par de obxectos  $X$  e  $Y$  de  $\mathcal{C}$  definimos unha relación  $\sim_S$  entre as ternas  $(X', s, f)$  con  $s \in S$ , que representaremos como

$$\begin{array}{ccc}
 & X' & \\
 s \swarrow & & \searrow f \\
 X & & Y
 \end{array}$$

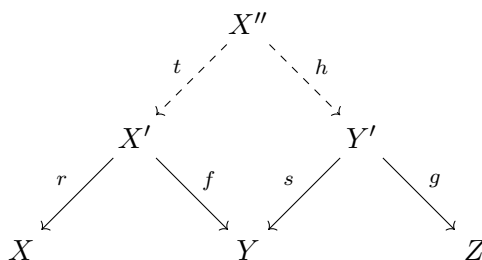
e denominaremos *tellados*. Denotaremos en ocasións  $(X', s, f)$  por  $f/s$ .

Diremos que dous tellados  $(X', r, f)$  e  $(X'', s, g)$  están relacionados se existe outro tellado  $(X''', t, h)$  e morfismos  $u$  e  $v$  tales que o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X' & & \\
 & r \swarrow & \uparrow u & \searrow f & \\
 X & \xleftarrow{t} X''' & & \xrightarrow{h} Y & \\
 & s \swarrow & \downarrow v & \searrow g & \\
 & & X'' & & 
 \end{array}$$

A relación así definida é de equivalencia (véxase [BG, I, Lemme 1.5]) e é ademais compatible coa composición de tellados, definida a continuación.

**Definición 1.3.2.** Sexan  $(X', r, f)$  e  $(Y', s, g)$  dous tellados. Utilizando o axioma S3 tense un diagrama conmutativo



con  $t \in S$ . A composición dos tellados  $(X', r, f)$  e  $(Y', s, g)$  defínese entón como

$$(Y', s, g) \circ (X', r, f) = (X'', r \circ t, g \circ h).$$

Expresado en notación de fraccións teríamos que  $g/s \circ f/r = (g \circ h)/(r \circ t)$ .

Para consultar detalladamente as demostracións destes resultados e os posteriores consúltese [BG, I, a partir de 1.7].

**Definición 1.3.3.** Sexa  $\mathbf{C}$  unha categoría e  $S$  un sistema multiplicativo. Definimos a categoría  $S^{-1}\mathbf{C}$  do seguinte xeito:

**Obxectos:** os obxectos da categoría de partida  $\mathbf{C}$ .

**Morfismos:** para cada par de obxectos  $X$  e  $Y$  en  $\mathbf{C}$ ,

$$\text{Hom}_{S^{-1}\mathbf{C}}(X, Y) = \{(X', s, f) \mid X' \text{ en } \mathbf{C}, X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y, s \in S\} / \sim_S$$

En principio os  $\text{Hom}_{S^{-1}\mathbf{C}}(X, Y)$  así definidos son clases. Por tanto  $S^{-1}\mathbf{C}$  non é unha categoría estritamente falando ao non ter garantía de ter un conxunto de morfismos entre cada par de obxectos, ou como se adoita dicir en ocasións, ao non ter Homs pequenos.

Na práctica, cada vez que se realice unha localización é necesario verificar que efectivamente a categoría posúe Homs pequenos. En diante ignoraremos

esta obxección, posto que todos os resultados enunciados son válidos en calquera contexto en que  $S^{-1}\mathbf{C}$  teña Homs pequenos e para o caso que nos interesa, a categoría derivada, veremos na Proposición 1.5.3 que se verifica esta condición.

**Definición 1.3.4.** Sexa  $\mathbf{C}$  unha categoría e  $S$  un sistema multiplicativo. Defínese o *functor localización*  $Q: \mathbf{C} \rightarrow S^{-1}\mathbf{C}$  como o functor definido, para calquera obxecto  $X$  de  $\mathbf{C}$ , como  $Q(X) = X$  e que verifica

$$Q(f) = (X, \text{id}_X, f) = f/\text{id}_X,$$

para calquera morfismo  $f$  en  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ .

Ademais, esta localización ten unha propiedade universal que a caracteriza.

**Proposición 1.3.5** (Propiedade universal da localización). [KS1, Proposition 1.6.3] *Sexa  $\mathbf{C}$  unha categoría,  $S$  un sistema multiplicativo e  $Q: \mathbf{C} \rightarrow S^{-1}\mathbf{C}$  o functor localización.*

- i) Para  $s \in S$ ,  $Q(s)$  é un isomorfismo en  $S^{-1}\mathbf{C}$ .*
- ii) Sexa  $\mathbf{D}$  outra categoría e  $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un functor tal que  $F(s)$  é un isomorfismo para todo  $s \in S$ . Entón  $F$  factorízase de forma única por  $Q$ .*

Na nova categoría  $S^{-1}\mathbf{C}$  os morfismos de  $S$  se convierten en morfismos invertibles, como se buscaba conseguir.

### Localización de categorías trianguladas

Ata este momento fomos introducindo o concepto de localización de categorías coa intención de centrarnos agora no comportamento da localización en categorías trianguladas. En concreto, para cada subcategoría triangulada imos poder construír un sistema multiplicativo asociado.

**Definición 1.3.6.** Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada. Unha subcategoría aditiva plena  $\mathbf{K}$  é unha *subcategoría triangulada* se cada obxecto de  $\mathbf{T}$  isomorfo a algún de  $\mathbf{K}$  está en  $\mathbf{K}$  e a inclusión  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{T}$  é un  $\Delta$ -functor.

Dicir que o functor inclusión  $\mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{T}$  é un  $\Delta$ -functor é equivalente a dicir que os triángulos distinguidos de  $\mathbf{K}$  son á súa vez triángulos distinguidos en  $\mathbf{T}$ . Dado que en  $\mathbf{T}$  todo morfismo se pode completar a un triángulo distinguido e calquera dous triángulos coa mesma base son isomorfos (Proposición 1.2.7), os triángulos de  $\mathbf{K}$  son exactamente os triángulos de  $\mathbf{T}$  cuxos obxectos están en  $\mathbf{K}$ . Por este razoamento se un morfismo é de  $\mathbf{K}$  tamén estará en  $\mathbf{K}$  o triángulo ao que se pode completar en  $\mathbf{T}$ .

Obsérvese que para probar entón que unha subcategoría  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{T}$  é triangulada bastará comprobar que é estable por translacións positivas e negativas e que se verifica a seguinte condición: para todo morfismo  $f$  de  $\mathbf{K}$  o vértice do triángulo distinguido de  $\mathbf{T}$  con base  $f$  é á súa vez un obxecto da subcategoría  $\mathbf{K}$ .

**Definición 1.3.7.** Sexa  $\mathbf{K}$  unha subcategoría triangulada dunha categoría triangulada  $\mathbf{T}$ . Defínese o *sistema multiplicativo asociado* a  $\mathbf{K}$ , que se denotará por  $S_{\mathbf{K}}$ , como segue:

$$S_{\mathbf{K}} = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ é a base en } \mathbf{T} \text{ dun triángulo distinguido} \\ X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow TX \text{ tal que } Z \in \mathbf{K}\}.$$

Os elementos de  $S_{\mathbf{K}}$  denomínanse  *$\mathbf{K}$ -cuasi-isomorfismos*.

En [KS1, Proposition 1.6.7] próbase que efectivamente o sistema  $S_{\mathbf{K}}$  asociado a unha subcategoría triangulada é un sistema multiplicativo. Pode comprobarse na proba deste resultado que o axioma do octaedro de categorías trianguladas, TR4, é esencial para a validez do enunciado. Como xa avanzaremos, esta foi precisamente a motivación orixinal de Verdier para introducirlo.

A categoría obtida ao localizar respecto a un sistema do tipo  $S_{\mathbf{K}}$ , a categoría  $S_{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{T}$ , resulta ser aditiva; máis sería desexable que tamén fose posible dalgunha maneira trasladar a estrutura triangulada de partida. Isto ocorrerá baixo os supostos da seguinte proposición.

**Proposición 1.3.8.** [BG, I, Theoreme 2.15] *Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada e  $S$  un sistema multiplicativo. Supoñamos que  $S$  verifica:*

**S5** *Un morfismo  $s \in S$  se, e só se,  $T(s) \in S$ .*

**S6** *Se na situación do axioma TR3 os morfismos  $u, v \in S$  entón tamén  $w \in S$ .*

Entón  $S^{-1}\mathbf{T}$  é triangulada tomando como triángulos distinguidos os triángulos isomorfos ás imaxes por  $Q: \mathbf{T} \rightarrow S^{-1}\mathbf{T}$  dos triángulos distinguidos de  $\mathbf{T}$ . Ademais, con esta estrutura,  $Q$  é un  $\Delta$ -functor.

En particular, todos os nosos sistemas  $S_K$  verifican S5 e S6, ou como se adoita recoller na literatura son *compatibles coa triangulación*. Por tanto obtemos o seguinte resultado

**Teorema 1.3.9.** [KS1, Proposition 1.6.9] *Para toda subcategoría triangulada  $K$  dunha categoría triangulada  $\mathbf{T}$ , a categoría  $S_K^{-1}\mathbf{T}$  é á súa vez unha categoría triangulada.*

**Proposición 1.3.10.** [N1, Theorem 2.1.8] *Baixo as hipóteses do teorema anterior o functor localización  $Q: \mathbf{T} \rightarrow S_K^{-1}\mathbf{T}$  asociado a  $S_K$  verifica as seguintes propiedades:*

- i) *Para todo obxecto  $X$  de  $K$ ,  $Q(X) \cong 0$ .*
- ii) *Calquera  $\Delta$ -functor entre categorías trianguladas  $F: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  verificando que  $F(X) = 0$  para todo obxecto  $X$  de  $K$  se factoriza de forma única por  $Q$ .*

O que estamos a provocar entón na nova categoría é, ademais de garantir a existencia de inversos para os elementos de  $S_K$  (véxase Proposición 1.3.5), que se anulen os obxectos da subcategoría  $K$ . Por esta razón denótase a miúdo  $S_K^{-1}\mathbf{T}$  como  $\mathbf{T}/K$ . Esta construción coñécese tamén baixo o termo *cociente de Verdier*.

De feito, pódese probar que a través do paso ao cociente  $Q: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/K$ , ademais de reducir a cero os obxectos de  $K$ , tamén se converten en nulos os sumandos directos dos obxectos desta categoría.

**Definición 1.3.11.** *Unha subcategoría  $K$  dunha categoría triangulada  $\mathbf{T}$  dise que é unha subcategoría gosa se é triangulada e ademais contén todos os sumandos directos dos seus obxectos.*

Noutras palabras, a subcategoría plena de obxectos que se anulan mediante o paso ao cociente  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/K$ , é dicir o núcleo de  $Q$ , é realmente a menor

subcategoría grosa que contén a  $\mathbf{K}$ , o que se coñece como a *clausura grosa* de  $\mathbf{K}$ .

Introduzamos agora os conceptos de categoría localizante e obxectos locais e colocais. Estes obxectos terán un papel fundamenta, pois permitirannos manexar os elementos da categoría localizada  $\mathbf{T}/\mathbf{K}$  a través dos da categoría de partida  $\mathbf{T}$ , como veremos na Proposición 1.3.14.

**Definición 1.3.12.** Para unha categoría  $\mathbf{T}$  triangulada con coprodutos, dise que unha subcategoría  $\mathbf{L}$  é *localizante* se é triangulada e ademais verifica que calquera coproduto en  $\mathbf{T}$  de elementos de  $\mathbf{L}$  é á súa vez un obxecto de  $\mathbf{L}$ , é dicir, se  $\mathbf{L}$  é unha subcategoría triangulada estable por coprodutos.

**Definición 1.3.13.** Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada e sexa  $\mathbf{L}$  unha subcategoría localizante. Un obxecto  $Y$  de  $\mathbf{T}$  dise  *$\mathbf{L}$ -local* se para calquera elemento  $X$  de  $\mathbf{L}$  se verifica que  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) = 0$ .

Dualmente dise que o devandito obxecto  $Y$  é  *$\mathbf{L}$ -colocal* se se verifica que  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X) = 0$  para calquera obxecto  $X$  de  $\mathbf{L}$ .

Denotaremos a subcategoría plena dos obxectos  $\mathbf{L}$ -locais por  $\mathbf{L}^{\perp}$  e a subcategoría plena dos obxectos  $\mathbf{L}$ -colocais por  ${}^{\perp}\mathbf{L}$ .

**Proposición 1.3.14.** [AJS1, Lemma 1.5] *Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada e  $\mathbf{L}$  unha subcategoría localizante. Se  $L$  é un obxecto  $\mathbf{L}$ -local, entón para calquera obxecto  $X$  de  $\mathbf{T}$  verificase*

$$\text{Hom}_{\mathbf{T}}(X, L) \cong \text{Hom}_{\mathbf{T}/\mathbf{L}}(X, L).$$

Este resultado establece unha correspondencia bixectiva de maneira que calquera morfismo cuxo codominio é un obxecto local na categoría localizada  $\mathbf{T}/\mathbf{L}$  se identifica cun na categoría de partida  $\mathbf{T}$ . Este feito permite entón identificar tellados con morfismos na categoría de partida, o que supón en ocasións unha simplificación importante.

## A categoría derivada

Para definir a categoría derivada dunha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  aplicaremos a  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  os resultados obtidos sobre localización en categorías trianguladas na

sección anterior. Se revisamos o proceso levado a cabo vemos que, en primeiro lugar, construímos para unha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  a súa categoría de complexos  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  e a partir dela a categoría homotópica  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ . Lembremos que en xeral esta última, que se constrúe mediante un paso ao cociente, perde a propiedade de ser unha categoría abeliana que  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  herda de  $\mathbf{A}$ . Con todo posúe unha estrutura diferente, a de categoría triangulada, como probamos na Proposición 1.2.13.

Sexa  $\mathbf{Z}$  a subcategoría plena de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  formada polos complexos acíclicos, é dicir, os complexos cuxa cohomoloxía é nula:

$$\mathbf{Z} = \{X \text{ en } \mathbf{K}(\mathbf{A}) \mid H^n(X) \cong 0, \text{ para calquera } n \in \mathbb{Z}\}$$

Esta subcategoría é triangulada e, como a toda subcategoría deste tipo, podemos asociarlle un sistema multiplicativo que imos denotar por  $S_{\mathbf{Z}}$ .

En certa forma os complexos de  $\mathbf{Z}$  son irrelevantes para a cohomoloxía. É por iso que necesitamos un proceso que permita “facelos nulos”. Ademais,  $\mathbf{Z}$  é unha subcategoría grossa, pois todo sumando directo dun acíclico é xa acíclico. Isto garante que non estamos anulando máis obxectos que os acíclicos, pois como xa explicamos anteriormente o núcleo do functor de paso ao cociente é precisamente a clausura grossa de  $\mathbf{Z}$ . Á súa vez, recordemos que anular estes obxectos é equivalente a facer isomorfismos as frechas cuxo cono está en  $\mathbf{Z}$ .

**Definición 1.3.15.** Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. Defínese a *categoría derivada* de  $\mathbf{A}$  e denótase  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  á categoría  $S_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{A})$  ou, o que é o mesmo, ao cociente de Verdier  $\mathbf{K}(\mathbf{A})/\mathbf{Z}$ .

Denotaremos, seguindo a notación descrita previamente, o functor de localización asociado como

$$Q: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}).$$

Esta nova categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  é triangulada en virtude do Teorema 1.3.9. Pódese comprobar, utilizando o Lema 1.2.10, que os elementos de  $S_{\mathbf{Z}}$  son precisamente os cuasi-isomorfismos, é dicir, os morfismos de complexos cuxas frechas inducidas en homoloxía son isomorfismos. Por esta razón, en virtude da Proposición 1.3.5, podemos asegurar que todo cuasi-isomorfismo pasa a ser invertible en  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ , como se buscaba nesta nova categoría na que estudar a cohomoloxía.

Apliquemos a Proposición 1.3.14 a este caso particular de cociente de Verdier, tomando como categoría triangulada  $\mathbf{T} = \mathbf{K}(\mathbf{A})$  e como subcategoría  $\mathbf{L}$  a subcategoría dos complexos acíclicos da categoría homotópica,  $\mathbf{Z}$ .

**Definición 1.3.16.** Na categoría triangulada  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  diremos que os obxectos  $\mathbf{Z}$ -locais son obxectos  $q$ -infectivos e denominaremos aos  $\mathbf{Z}$ -colocais obxectos  $q$ -profectivos.

Por exemplo, tomando  $\mathbf{A}$  a categoría de módulos sobre un anel conmutativo, os complexos de módulos infectivos limitados inferiormente son obxectos  $q$ -infectivos de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , mentres que os complexos de módulos profectivos limitados superiormente son obxectos  $q$ -profectivos.

**Corolario 1.3.17.** [BN, Lemma 2.9] *Se  $I$  é un obxecto  $q$ -infectivo entón para calquera obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  verificase*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathbf{A})}(X, I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathbf{A})}(X, I).$$

Igual que no caso de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , a categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  é triangulada e raramente é abeliana. Pese a isto, de novo existe unha relación estreita entre as sucesións exactas curtas da categoría de partida  $\mathbf{A}$  e os triángulos distinguidos na derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ .

**Proposición 1.3.18.** [Li, Final de 1.4.4] *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. Toda sucesión exacta curta dá lugar a un triángulo distinguido en  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  e viceversa, todo triángulo distinguido é isomorfo a un inducido por unha sucesión exacta curta en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ .*

A correspondencia entre sucesión exactas e triángulos coincide coa obtida na Proposición 1.2.15. Para unha sucesión exacta curta da forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

o triángulo distinguido en  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  asociado será o mesmo que no caso de dita proposición,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1],$$

aínda que as probas de ambos resultados difiran. No caso recíproco basta con aplicar a Proposición 1.2.15, pois todo triángulo distinguido de  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  é isomorfo á imaxe dun triángulo distinguido da categoría homotópica e todo triángulo distinguido en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  induce unha sucesión exacta curta (semiescindida).

Un dos principais inconvenientes que presentan as categorías trianguladas en xeral é a falta de determinación do vértice do triángulo a partires da súa base. Na categoría  $\mathbf{D}(A)$  esta dificultade materialízase na falta de functorialidade da construción do cono dun morfismo. O axioma TR3 esixe unha especie de functorialidade débil para o morfismo do cal afirma a existencia, máis non garante unicidade.

## 1.4 Resolucións en $\mathbf{D}(A)$ e funtores derivados

Os funtores aditivos entre categorías abelianas esténdense a funtores aditivos entre as correspondentes categorías de complexos e, á súa vez, estes a funtores aditivos entre as categorías homotópicas asociadas.

Nesta sección estudaremos de que maneira funtores definidos na categoría de complexos poden ser estendidos ás categorías derivadas correspondentes. Este caso será un pouco máis complexo e resolverase definindo certos funtores que sexan universais con respecto a todos os candidatos posibles.

Empezaremos estudando en xeral a existencia e características de certo tipo de resolucións na categoría derivada dunha abeliana. Empregaremos resolucións que non requiren de condicións de limitación sobre os complexos, como si ocorre en ocasións nas referencias clásicas. Este feito será imprescindible para garantir a existencia dos funtores derivados antes mencionados.

### Resolucións limitadas

Como o noso interese segue posto no comportamento e características da categoría derivada, imos centrarnos como paso previo na categoría de complexos e na homotópica. Comezaremos co caso de complexos limitados, que se pode tratar de forma directa, para posteriormente introducir as técnicas que permitan xeneralizalo ao caso dos non limitados.

Comecemos primeiro recordando os conceptos de obxecto inxectivo e obxecto proxectivo nunha categoría abeliana, pois estes serán básicos para a construción das resolucións buscadas.

**Definición 1.4.1.** Sexa  $A$  unha categoría abeliana. Diremos que un obxecto  $I$  de  $A$  é *inxectivo* se o functor contravariante  $\text{Hom}_A(-, I)$  é exacto. Dualmente,

diremos que un obxecto  $P$  de  $\mathbf{A}$  é *proyectivo* se o funtor covariante  $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(P, -)$  é exacto.

Para unha categoría abeliana ambos funtores son exactos pola esquerda, logo a condición imposta sería equivalente esixir na definición anterior soamente a exactitude pola dereita.

**Definición 1.4.2.** Diremos que unha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  *ten suficientes inyectivos* se para calquera obxecto  $X$  de  $\mathbf{A}$  existen un obxecto inyectivo  $I$  e un monomorfismo  $X \rightarrow I$ .

Dualmente, diremos que a categoría  $\mathbf{A}$  *ten suficientes proyectivos* se para calquera obxecto  $X$  de  $\mathbf{A}$  existe un obxecto proyectivo na devandita categoría e un epimorfismo  $P \rightarrow X$ .

**Definición 1.4.3.** Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana e sexa  $X$  un complexo limitado inferiormente definido sobre a devandita categoría. Chamaremos *resolución inyectiva* de  $X$  a un complexo limitado inferiormente para o cal existe un cuasi-isomorfismo

$$X \xrightarrow{\text{quis}} I,$$

onde  $I$  é un complexo cuxos elementos grao a grao son obxectos inyectivos de  $\mathbf{A}$ .

De forma dual, dise que  $P$  é unha *resolución proyectiva* dun complexo limitado superiormente  $X$  se é á súa vez un complexo limitado superiormente para o cal existe un cuasi-isomorfismo

$$P \xrightarrow{\text{quis}} X,$$

e  $P$  é un complexo formado por obxectos proyectivos de  $\mathbf{A}$ .

En particular, podemos pensar nun complexo  $X$  concentrado en grao cero, é dicir, tal que  $X^n = 0$  para todo  $n \neq 0$ . Se o devandito complexo ten unha resolución inyectiva no sentido que acabamos de definir entón teremos

un diagrama conmutativo dado polo cuasi-isomorfismo  $X \rightarrow I$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{d_I^0} & I^1 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Ademais  $H^0(I) = \text{Ker } d_I^0 \cong X^0$  e  $H^n(I) = 0$  para todo  $n \neq 0$ . Baixo estas condici3ns podemos construír unha sucesi3n exacta

$$0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d_I^0} I^1 \longrightarrow \dots$$

cos elementos  $I^k$  obxectos inxectivos de  $\mathbf{A}$ . Esta idea corresponde ao concepto usual de resoluci3n inxectiva. As resoluci3ns que acabamos de definir son unha xeneralizaci3n das anteriores e forman parte do que se coñece como teoría de hipercohomoloxía, que como xa avanzamos na introduci3n non é máis que un ámbito no que se estende o estudo cohomolóxico de obxectos ao de complexos de obxectos.

**Teorema 1.4.4.** [BG, I, Theoreme 7.5] *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. Se  $\mathbf{A}$  ten suficientes inxectivos, todo obxecto de  $\mathbf{C}^+(\mathbf{A})$  ten unha resoluci3n inxectiva.*

Por ser todos os elementos da proba dualizables tense tamén o teorema correspondente para obxectos proxectivos:

**Teorema 1.4.5.** *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. Se  $\mathbf{A}$  ten suficientes proxectivos, todo obxecto de  $\mathbf{C}^-(\mathbf{A})$  ten unha resoluci3n proxectiva.*

### Resoluci3ns $q$ -inxectivas e $q$ -proxectivas

Imos establecer unha nova xeneralizaci3n das resoluci3ns. Neste caso imos eliminar a condici3n de ser complexos limitados e tentar atopar resoluci3ns para calquera complexo, concretamente resoluci3ns  $q$ -inxectivas e  $q$ -proxectivas.

As resoluci3ns inxectivas de complexos limitados inferiormente teñen o comportamento análogo ao das resoluci3ns clásicas sen limitaci3n dun obxecto.

O caso dos complexos sen limitación require facer explícito o bo comportamento homotópico destas resolucións. Esta propiedade permitiranos construír as resolucións non limitadas.

**Definición 1.4.6.** Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana e sexa  $X$  un complexo definido sobre a devandita categoría. Unha *resolución  $q$ -inxectiva* de  $X$  é un complexo  $q$ -inxectivo  $I$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  xunto cun cuasi-isomorfismo

$$X \xrightarrow{\text{quis}} I.$$

Dualmente unha *resolución  $q$ -proxectiva* do complexo  $X$  é un complexo  $q$ -proxectivo  $P$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  cun cuasi-isomorfismo

$$P \xrightarrow{\text{quis}} X.$$

Para construír as resolucións  $q$ -inxectivas non limitadas van ser necesarias as limitadas presentadas no Teorema 1.4.4. Pódese comprobar que se  $I$  é un complexo de obxectos inxectivos limitado inferiormente en  $\mathbf{K}^+(\mathbf{A})$  entón  $I$  é  $q$ -inxectivo, [BN, Lemma 2.8]. Ademais, para unha categoría abeliana  $\mathbf{A}$ , a subcategoría plena de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  constituída polos obxectos  $q$ -inxectivos é triangulada e pechada para produtos arbitrarios. O último ingrediente para obter o resultado desexado será a definición de límite homotópico de [BN].

**Definición 1.4.7.** Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada con produtos. Sexa un sistema inverso formado por unha sucesión de obxectos  $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbf{T}$  xunto con morfismos  $\omega_m: X_{m+1} \rightarrow X_m$ . Defínese o *límite homotópico* da devandita sucesión como o primeiro elemento do triángulo distinguido

$$\text{Holim}_{m \in \mathbb{N}} X_m \longrightarrow \prod_{m \in \mathbb{N}} X_m \xrightarrow{\text{id} - \omega} \prod_{m \in \mathbb{N}} X_m \xrightarrow{+}$$

onde  $\omega$  é o morfismo cuxas coordenadas son os  $\omega_m$ , é dicir, para cada elemento de  $x_m$  tense

$$\begin{aligned} (\text{id} - \omega)(x_0, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots) = \\ (x_0 - \omega_0(x_1), \dots, x_m - \omega_m(x_{m+1}), x_{m+1} - \omega_{m+1}(x_{m+2}), \dots). \end{aligned}$$

En moitos textos, tanto ao morfismo  $\omega$  como ao análogo para límites directos coñéceseos tamén como o morfismo *shift*. Esta construción fai uso dos axiomas de categorías trianguladas. Por TR1.c) o morfismo  $\text{id} - \omega$  é base dalgún triángulo distinguido e basta aplicar TR2 para obter o triángulo desexado. Obsérvase que o  $\text{Holim}$  así definido non é un functor, pois como xa explicamos o cono dun morfismo é un obxecto definido salvo isomorfismo non necesariamente único.

Utilizando as resolucións limitadas, cuxa existencia coñecemos polo Teorema 1.4.4, pode fabricarse a través deste límite unha resolución  $q$ -infectiva. Mais este método de construción, utilizado por Bökstedt e Neeman en [BN], require algunha condición máis sobre a categoría abeliana  $\mathbf{A}$  da que partiamos. Na categoría de módulos, por exemplo, a exactitude do produto permite utilizar o argumento da demostración do vindeiro resultado directamente. Pero en xeral, por exemplo na categoría de feixes de módulos sobre un espazo anelado, os produtos non son exactos e a existencia de resolucións  $q$ -infectivas require doutro tipo de métodos.

**Teorema 1.4.8.** [BN, Application 2.4] *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana satisfacendo  $\text{AB4}^*$  con suficientes infectivos. Entón cada obxecto de  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  é cuasi-isomorfo a un complexo  $q$ -infectivo de obxectos infectivos da categoría  $\mathbf{A}$ . En particular, todo obxecto da categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  ten unha resolución  $q$ -infectiva.*

Centrémonos agora no caso dual, o das resolucións  $q$ -proyectivas. Definindo o colímite homotópico de xeito dual ao límite homotópico descrito previamente e dualizando a proba do resultado para resolucións  $q$ -infectivas podemos obter o resultado dual. Se pensamos na categoría de complexos de módulos este resultado é moito máis sinxelo, xa que na categoría de módulos os límites directos son exactos sempre e non se require dunha condición adicional como no caso das resolucións  $q$ -infectivas.

**Teorema 1.4.9.** *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana satisfacendo  $\text{AB4}$  con suficientes proyectivos. Entón todo obxecto da categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  ten unha resolución  $q$ -proyectiva.*

### Existencia de funtores derivados

Cabe esperar que os funtores entre categorías abelianas  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  induzan funtores nas novas categorías. Se partimos dun functor  $F$  aditivo entre as categorías  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , este esténdese facilmente a  $\mathbf{C}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{B})$ . Un functor deste tipo conserva homotopías, por estar estas definidas a base de composicións e sumas, logo esténdese á súa vez a un functor aditivo  $\hat{F}: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$ . De feito, é sinxelo comprobar que o functor resultante é un  $\Delta$ -functor: está claro que conmuta co functor translación e ademais leva conos en conos, ou o que é o mesmo, para calquera morfismo de complexos  $f$  en  $\mathbf{A}$

$$\hat{F}(C(f)) = C(\hat{F}(f)).$$

En diante, repárese no abuso de notación, pois denotaremos  $\hat{F}$  simplemente por  $F$ .

Se queremos estendelo a  $\mathbf{D}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$  necesitaríamos un functor que ademais conservase os cuasi-isomorfismos, pois estes convértense en isomorfismos na categoría derivada e todo functor debe conservar isomorfismos. En concreto, denotando  $Q_A: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  e  $Q_B: \mathbf{K}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$  os funtores localización, un tal functor  $G: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$  sería tal que o diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{F} & \mathbf{K}(\mathbf{B}) \\ Q_A \downarrow & & \downarrow Q_B \\ \mathbf{D}(\mathbf{A}) & \dashrightarrow_G & \mathbf{D}(\mathbf{B}) \end{array}$$

fose conmutativo, polo menos salvo isomorfismo natural. Noutras palabras buscamos  $G$  tal que  $Q_B \circ F \cong G \circ Q_A$ ; pero en xeral este functor, de existir, non será necesariamente único.

Se queremos entón definir a extensión de  $F$  ás categorías derivadas debemos atopar un xeito suficientemente canónico de facelo. Como veremos ao longo desta sección, escolleremos aqueles que teñan unha certa propiedade universal, que se corresponderá cos obxectos inicial e final da categoría formada por todos os posibles candidatos.

**Definición 1.4.10.** Sexan  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  categorías abelianas e sexan os  $\Delta$ -funtores canónicos  $Q_{\mathbf{A}}: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  e  $Q_{\mathbf{B}}: \mathbf{K}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$ . Diremos que un  $\Delta$ -functor  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$  é *derivable pola dereita* se existe  $(\mathbf{R}F, \zeta)$  formado por un  $\Delta$ -functor

$$\mathbf{R}F: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$$

e  $\zeta: Q_{\mathbf{B}} \circ F \rightarrow \mathbf{R}F \circ Q_{\mathbf{A}}$  unha transformación  $\Delta$ -natural, de forma que para cada  $\Delta$ -functor  $G: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$  a composición

$$\mathrm{Nat}_{\Delta}(\mathbf{R}F, G) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathrm{Nat}_{\Delta}(\mathbf{R}F \circ Q_{\mathbf{A}}, G \circ Q_{\mathbf{A}}) \xrightarrow{\mathrm{via } \zeta} \mathrm{Nat}_{\Delta}(Q_{\mathbf{B}} \circ F, G \circ Q_{\mathbf{A}})$$

é un isomorfismo.

Dualmente, o  $\Delta$ -functor  $F$  é *derivable pola esquerda* se existe un par do tipo  $(\mathbf{L}F, \xi)$  constituído por un  $\Delta$ -functor

$$\mathbf{L}F: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$$

e unha transformación  $\Delta$ -natural  $\xi: \mathbf{L}F \circ Q_{\mathbf{A}} \rightarrow Q_{\mathbf{B}} \circ F$ , de xeito que para calquera  $\Delta$ -functor  $G: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{B})$  a composición

$$\mathrm{Nat}_{\Delta}(G, \mathbf{L}F) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathrm{Nat}_{\Delta}(G \circ Q_{\mathbf{A}}, \mathbf{L}F \circ Q_{\mathbf{A}}) \xrightarrow{\mathrm{via } \xi} \mathrm{Nat}_{\Delta}(G \circ Q_{\mathbf{A}}, Q_{\mathbf{B}} \circ F)$$

é un isomorfismo.

Así, os pares  $(\mathbf{R}F, \zeta)$  e  $(\mathbf{L}F, \xi)$  denomínanse *functor derivado pola dereita* e *functor derivado pola esquerda* de  $F$ , respectivamente.

*Observación 1.4.11.* Nestas definicións realmente só estamos a esixir que o segundo dos morfismos da composición sexa isomorfismo, porque as frechas

$$\mathrm{Nat}_{\Delta}(\mathbf{R}F, G) \longrightarrow \mathrm{Nat}_{\Delta}(\mathbf{R}F \circ Q_{\mathbf{A}}, G \circ Q_{\mathbf{A}})$$

$$\mathrm{Nat}_{\Delta}(G, \mathbf{L}F) \longrightarrow \mathrm{Nat}_{\Delta}(G \circ Q_{\mathbf{A}}, \mathbf{L}F \circ Q_{\mathbf{A}})$$

en caso de existir  $\mathbf{R}F$  e  $\mathbf{L}F$ , son sempre isomorfismos por [Ha, I, Proposition 3.4].

Os  $\Delta$ -funtores entre dúas categorías trianguladas  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  son os obxectos dunha categoría, que denotaremos por  $\text{Fun}_\Delta(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$ , onde os morfismos son todas as transformacións  $\Delta$ -naturais existentes.

**Proposición 1.4.12.** [Li, (1.5.1)] *Sexa  $A$  unha categoría abeliana e  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada. A composición con  $Q_A$  define un functor fielmente pleno de categorías de  $\Delta$ -funtores*

$$\text{Fun}_\Delta(\mathbf{D}(A), \mathbf{T}) \longrightarrow \text{Fun}_\Delta(\mathbf{K}(A), \mathbf{T})$$

*cuxa imaxe é a subcategoría plena formada polos  $\Delta$ -funtores que transforman cuasi-isomorfismos de  $\mathbf{K}(A)$  en isomorfismos de  $\mathbf{T}$ .*

Esta proposición expresa o feito de que os funtores derivados se corresponden coa noción triangulada do concepto categórico xeral de extensión de Kan. Para máis detalles pódese consultar [ML, §10].

En particular temos esta correspondencia para a categoría triangulada  $\mathbf{D}(B)$ , é dicir, existe un isomorfismo entre a categoría  $\text{Fun}_\Delta(\mathbf{D}(A), \mathbf{D}(B))$  de  $\Delta$ -funtores e a subcategoría da categoría  $\text{Fun}_\Delta(\mathbf{K}(A), \mathbf{D}(B))$  cuxos obxectos son os  $\Delta$ -funtores que transforman cuasi-isomorfismos de  $\mathbf{K}(A)$  en isomorfismos en  $\mathbf{D}(B)$ .

Podemos entender entón o functor derivado pola dereita dun  $\Delta$ -functor  $F: \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{K}(B)$ , aínda que realmente falamos de  $\mathbf{R}F \circ Q_A$ , como un obxecto inicial na categoría cuxos obxectos son os pares  $(G', \rho')$  sendo  $G': \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{D}(B)$  un  $\Delta$ -functor que leva cuasi-isomorfismos en isomorfismos e  $\rho': Q_B \circ F \rightarrow G'$  unha transformación  $\Delta$ -natural. Os morfismos  $(G', \rho') \rightarrow (G'', \rho'')$  da devandita categoría son as transformacións  $\Delta$ -naturais  $\epsilon: G' \rightarrow G''$  tales que a composición  $(\epsilon \circ Q_A) \circ \rho' = \rho''$ .

Para comprobalo basta aplicar o que acabamos de explicar: para calquera  $\Delta$ -functor  $G': \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{D}(B)$  cumprindo dita propiedade tense que  $G' = G \circ Q_A$ . Temos entón que para cada transformación  $\Delta$ -natural  $\rho': Q_B \circ F \rightarrow G'$  existe unha única transformación natural  $\eta_{\rho'}: \mathbf{R}F \rightarrow G$  tal que, pola definición de

functor derivado, o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 Q_{\mathbf{B}} \circ F & \xrightarrow{\zeta} & \mathbf{R}F \circ Q_{\mathbf{A}} \\
 & \searrow \rho' & \downarrow \eta_{\rho'} \circ Q_{\mathbf{A}} \\
 & & G \circ Q_{\mathbf{A}}
 \end{array}$$

Pero para ser inicial desta categoría o obxecto debe pertencer á devandita categoría e para iso o functor  $\mathbf{R}F \circ Q_{\mathbf{A}}$  debe levar cuasi-isomorfismos de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  en isomorfismos en  $\mathbf{D}(\mathbf{B})$ . Isto ocorre dado que o functor canónico  $Q_{\mathbf{A}}$  verifica esta condición, pola Proposición 1.3.5. Visto o razoamento, e citando de novo [Ha, I, Proposition 3.4], podemos simplemente esquecernos das composicións con  $Q_{\mathbf{A}}$ . De feito, omitiremos escribir os funtores de localización canónicos cando traballemos sobre obxectos, xa que estes quedan invariantes.

En conclusión, o functor derivado pola dereita é un obxecto inicial de todos os posibles candidatos a functor derivado e, dualmente, o functor derivado pola esquerda é un obxecto final de todos os posibles candidatos. Desta forma temos que, de existir, tanto  $(\mathbf{R}F, \zeta)$  como  $(\mathbf{L}F, \xi)$  son únicos salvo isomorfismo canónico.

Vexamos agora o papel das resolucións  $q$ -infectivas e  $q$ -proyectivas en relación coa existencia destes funtores derivados. En primeiro lugar imos a definir a noción de complexo  $F$ -acíclico.

**Definición 1.4.13.** Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana,  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  a categoría homotópica e sexa  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{T}$  un  $\Delta$ -functor da categoría homotópica a outra categoría triangulada  $\mathbf{T}$ . Dise que un complexo  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  é  *$F$ -acíclico pola dereita* se para cada cuasi-isomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , existe outro cuasi-isomorfismo  $g: Y \rightarrow Z$  en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  de forma que  $F(g \circ f): F(X) \rightarrow F(Z)$  é un isomorfismo.

Diremos que un complexo  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  é  *$F$ -acíclico pola esquerda* se para calquera cuasi-isomorfismo  $f': Y \rightarrow X$ , existe outro cuasi-isomorfismo  $g': Z \rightarrow Y$  en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  tal que o morfismo  $F(f' \circ g'): F(Z) \rightarrow F(X)$  é un isomorfismo.

**Proposición 1.4.14.** [Li, Proposition 2.2.6] *Sean  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  categorías abelianas e sexa  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$  un  $\Delta$ -functor. Se para cada obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  existe un cuasi-isomorfismo  $\varphi_X: X \rightarrow A_X$  con  $A_X$  un complexo  $F$ -acíclico pola dereita, entón  $F$  ten un functor derivado pola dereita  $(\mathbf{R}F, \zeta)$  verificando que*

$$\mathbf{R}F(X) = F(A_X)$$

e  $\zeta(X) = F(\varphi_X): F(X) \rightarrow F(A_X) = \mathbf{R}F(X)$ , para todo obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ .

Ademais tense a seguinte propiedade:  $X$  é  $F$ -acíclico pola dereita se, e soamente se,  $\zeta(X)$  é un isomorfismo.

Aplicando [Li, Proposition 2.3.8], temos que un obxecto é  $q$ -infectivo se, e só se, é  $F$ -acíclico pola dereita para calquera  $\Delta$ -functor. Así obtemos directamente o seguinte resultado.

**Corolario 1.4.15.** *Sean  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  categorías abelianas. Supoñamos que existe unha familia de resolucións  $q$ -infectivas  $\varphi_X: X \rightarrow I_X$ , para cada  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ . Entón calquera  $\Delta$ -functor  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$  ten un functor derivado pola dereita  $(\mathbf{R}F, \zeta)$  tal que*

$$\mathbf{R}F(X) = F(I_X)$$

e  $\zeta(X) = F(\varphi_X): F(X) \rightarrow F(I_X) = \mathbf{R}F(X)$ , para todo obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ .

Ademais, estes funtores compórtanse ben coa composición baixo certas condicións, como se expón no seguinte teorema.

**Teorema 1.4.16.** [Li, Corollary 2.2.7] *Sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  categorías abelianas e  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$  e  $G: \mathbf{K}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{C})$   $\Delta$ -funtores, este último con functor derivado pola dereita  $\mathbf{R}G$ . Se  $F$  leva obxectos  $F$ -acíclicos pola dereita en  $G$ -acíclicos pola dereita e ademais para cada obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  existe un cuasi-isomorfismo  $X \rightarrow A_X$  tal que  $A_X$  é  $F$ -acíclico pola dereita, entón existen  $\mathbf{R}F$ ,  $\mathbf{R}G$  e  $\mathbf{R}GF$  os funtores derivados pola dereita. Ademais existe un único isomorfismo de  $\Delta$ -funtores*

$$\alpha: \mathbf{R}GF \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}G \circ \mathbf{R}F$$

de tal forma que o seguinte diagrama conmuta para todo obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ :

$$\begin{array}{ccc} Q_C \circ GF(X) & \longrightarrow & \mathbf{R}GF(Q_A(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha(Q_A(X)) \\ \mathbf{R}GQ_B F(X) & \longrightarrow & \mathbf{R}GRF(Q_A(X)) \end{array}$$

Do mesmo xeito, dualizando estes resultados temos os correspondentes enunciados para a existencia de funtores derivados pola esquerda.

**Corolario 1.4.17.** *Sexan  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  categorías abelianas. Supoñamos que existe unha familia de resolucións  $q$ -proyectivas  $\psi_X: P_X \rightarrow X$ , para  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ . Entón calquera  $\Delta$ -functor  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$  ten un functor derivado pola esquerda  $(\mathbf{L}F, \xi)$  tal que*

$$\mathbf{L}F(X) = F(P_X)$$

e  $\xi(X) = F(\psi_X): \mathbf{L}F(X) = F(P_X) \rightarrow F(X)$ , para todo obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ .

**Teorema 1.4.18.** *Sexan  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  categorías abelianas e  $F: \mathbf{K}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B})$  e  $G: \mathbf{K}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{C})$   $\Delta$ -funtores, este último con functor derivado pola esquerda  $\mathbf{L}G$ . Se  $F$  leva obxectos  $F$ -acíclicos pola esquerda en  $G$ -acíclicos pola esquerda e ademais para cada obxecto  $X$  de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  existe un cuasi-isomorfismo  $A_X \rightarrow X$ , sendo  $A_X$  un obxecto  $F$ -acíclico pola esquerda, entón existen  $\mathbf{L}F$ ,  $\mathbf{L}G$  e  $\mathbf{L}GF$  os funtores derivados pola esquerda. Ademais existe un único isomorfismo de  $\Delta$ -funtores*

$$\alpha: \mathbf{L}GF \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}G \circ \mathbf{L}F.$$

## 1.5 Propiedades categóricas das categorías de complexos

Unha vez construídas, a partir dunha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  a categoría de complexos  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ , a categoría homotópica  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  e a categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ , faga-

mos un repaso e ampliación das súas propiedades categóricas. Estas propiedades serán vitais para desenvolver os resultados de derivadores nos posteriores capítulos.

### Axiomas de categorías abelianas

A noción de categoría abeliana foi introducida por Alexander Grothendieck a través da definición dunha serie de axiomas en [G2].

**Definición 1.5.1.** Unha categoría aditiva  $\mathbf{A}$  dise *abeliana* se verifica

**AB1** Todo morfismo  $f: X \rightarrow Y$  ten núcleo  $\text{Ker } f$  e conúcleo  $\text{Coker } f$ .

**AB2** Se  $f: X \rightarrow Y$  é un morfismo da categoría  $\mathbf{A}$ , entón a aplicación canónica  $\text{Coker}(\text{Ker } f) \rightarrow \text{Ker}(\text{Coker } f)$  é un isomorfismo. A este obxecto denomínaseo *imaxe* de  $f$  e denótaseo por  $\text{Im } f$ .

Esta noción de categoría abeliana pódese completar con axiomas adicionais, cada un asociado ao seu dual. Ademais a descrición numerada indica que cada un destes axiomas implica e é máis restritivo que os de numeración inferior.

**AB3** Existen coprodutos arbitrarios. Se unha categoría verifica AB3 diremos que é *cocompleta*.

**AB3\*** Existen produtos arbitrarios. Se unha categoría verifica este axioma dirase que é *completa*.

**AB4** Verifícase AB3 e o coproduto de monomorfismos é monomorfismo.

**AB4\*** Verifícase AB3\* e o produto de epimorfismos é epimorfismo.

Realmente AB4 é equivalente a que os coprodutos sexan exactos mentres que, dualmente, AB4\* equivale a que os produtos sexan exactos.

**AB5** Verifícase AB3 e os límites directos filtrados son exactos.

**AB5\*** Verifícase AB3\* e os límites inversos filtrados son exactos.

Para unha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  non nula é imposible verificar á vez (AB5) e (AB5\*). Para comprobalo basta considerar o morfismo  $\coprod X_i \rightarrow \prod X_i$ .

**Definición 1.5.2.** Unha categoría abeliana  $\mathbf{A}$  é unha *categoría de Grothendieck* se verifica AB5 e está dotada dun xerador, é dicir, existe un obxecto  $U$  en  $\mathbf{A}$  tal que para dous morfismos distintos na categoría  $f, g: X \rightarrow Y$ , existe un morfismo  $h: U \rightarrow X$  tal que  $f \circ h \neq g \circ h$ .

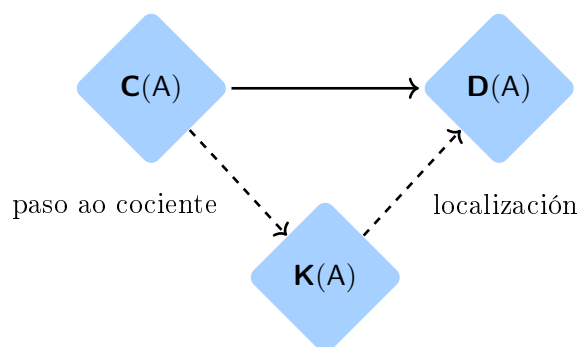
Na sección 1.3, onde explicabamos como se construían os cocientes de Verdier, advertiamos que os obxectos resultantes do proceso de paso ao cociente podían non resultar categorías, por non ter Homs pequenos. Neste caso, para unha categoría de Grothendieck temos garantido que a súa categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  é efectivamente unha categoría.

**Proposición 1.5.3.** [AJS1, Corollary 5.6] *Se  $\mathbf{A}$  é unha categoría de Grothendieck, entón a súa categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  ten Homs pequenos.*

A proba deste resultado baséase en que coñecer a existencia de resolucións  $q$ -infectivas para calquera complexo (Teorema 1.4.8) nos permite asegurar que a categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  é equivalente á subcategoría plena de obxectos  $q$ -infectivos de  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ , utilizando o Corolario 1.3.17. Isto forza a que, por ser a homotópica unha categoría e por tanto ter Homs pequenos, tamén os teña  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ .

### Análise categórico das categorías de complexos

O proceso de construción das categorías citadas pode resumirse no seguinte diagrama:



Cada paso ou transformación da categoría previa supón unha modificación da estrutura da categoría, o que provoca unha perda en ocasións de propiedades

como xa fomos poñendo de manifesto ao longo do capítulo. A propiedade que si se mantén durante todo o proceso é a aditividade das categorías.

Por ser abeliana a categoría  $\mathbf{A}$  sobre a que construímos os complexos, a categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  manterá dita estrutura. En primeiro lugar, é preaditiva, pois os conxuntos  $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{A})}(X, Y)$  son tamén grupos abelianos. Pero realmente  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é claramente aditiva, porque o obxecto cero da nova categoría é o complexo que en cada grao ten ao obxecto  $0$  de  $\mathbf{A}$  e o produto de dous complexos  $X$  e  $Y$  (así como o coproduto posto que nas categorías aditivas ambos coinciden) defínese como  $(X \oplus Y)^n = X^n \oplus Y^n$  con diferencial  $d_{X \oplus Y}^n = d_X^n \oplus d_Y^n$ . Por último,  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  verifica os axiomas de categoría abeliana ao herdar las propiedades de  $\mathbf{A}$ .

Como xa mencionamos anteriormente, a categoría  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  non adoita ser abeliana. Aínda que non é o noso obxectivo principal, e por iso non imos a profundar na demostración de feito, é sinxelo comprobalo utilizando a seguinte propiedade das categorías trianguladas: todo monomorfismo nunha categoría triangulada posúe unha retracción. Xa que todo núcleo é un monomorfismo nunha categoría abeliana  $\mathbf{A}$ , podemos presentar o seguinte contraexemplo en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ : o morfismo  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  con  $p$  un primo non ten núcleo en  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  debido a que  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  non se pode escribir como suma directa de grupos abelianos. Concluimos entón que en xeral  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  non é abeliana.

No caso da categoría derivada non recuperamos a propiedade, perdida xa no paso anterior, de ser abeliana. Mais, como xa vimos nas seccións previas, ámbalas dúas teñen unha estrutura triangulada que nos permite operar sobre elas.

Facendo un pequeno resumo destas propiedades temos que, en xeral:

	$\mathbf{A}$	$\mathbf{C}(\mathbf{A})$	$\mathbf{K}(\mathbf{A})$	$\mathbf{D}(\mathbf{A})$
Aditiva	✓	✓	✓	✓
Abeliana	✓	✓	✗	✗
Triangulada	✗	✗	✓	✓

Nos sucesivos capítulos partiremos dunha categoría  $\mathbf{A}$  que ademais de ser abeliana será de Grothendieck. Neste caso, esta propiedade hérdase tamén na categoría de complexos  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ .

**Proposición 1.5.4.** [KS2, Proposición 14.1.3] *Se  $\mathbf{A}$  é unha categoría de Grothendieck, entón  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é á súa vez unha categoría de Grothendieck.*

Por ser Grothendieck, a categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  ten coprodutos exactos, posto que AB5 implica AB4. Pero ademais, se a categoría de partida  $\mathbf{A}$  é Grothendieck con xerador proxectivo a categoría de complexos herda esta característica, o que nos permitirá asegurar que tamén ten produtos exactos.

**Proposición 1.5.5.** *Sexa  $\mathbf{A}$  é unha categoría de Grothendieck con xerador proxectivo. Entón a categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  ten á súa vez un xerador proxectivo.*

*Demostración.* Na demostración de [KS2, Proposición 14.1.3] preséntase como xerador da categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  o cono da identidade  $\text{id}_U: U \rightarrow U$ , sendo  $U$  o xerador da categoría  $\mathbf{A}$  pensado como complexo concentrado en grao cero. Pola caracterización dos complexos proxectivos de [W, Exercise 2.2.1] temos que ese xerador de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é efectivamente un obxecto proxectivo da categoría, concluindo a proba.  $\square$



# Parte II

## Resultados



## CAPÍTULO 2

---

# Teoría de derivadores

---

Como xa se expuxo no capítulo 1, as categorías obtidas por localización non se comportan como as categorías de conxuntos estruturados. Isto provoca que as construcións universais se establezan de xeito máis sutil. Por exemplo, as construcións habituais de límites e colímites nunha categoría homotópica ou nunha derivada non se poden realizar de xeito literal o que provoca que sexa preciso buscar nocións máis débiles.

O motivo é que estamos traballando en categorías nas que consideramos obxectos e frechas como “iguais” sen que nin tan sequera teñan por que ser isomorfas. Os límites, cuxas definicións son máis ríxidas categoricamente falando, non respectan estas nocións máis débiles de igualdade e é por iso que se perde en ocasións a canonicidade do obxecto que actuaba como tal.

Máis formalmente, o problema é que este tipo de categorías non poden ser embebidas de xeito fiel na categoría de conxuntos, é dicir, son categorías non concretas no sentido de Kurosh en [Ku].

Nacen así diversas teorías que pretenden dar solución a este problema, cada unha cun punto de vista diferente: categorías modelo,  $\infty$ -categorías... como explicamos na introdución deste traballo. No noso caso o enfoque de partida será a teoría de derivadores proposta por Grothendieck.

A teoría de derivadores baséase no uso de 2-categorías e busca dotar aos nosos espazos de traballo dunha estrutura que permita realizar cálculos de forma canónica, definindo obxectos que posúan unha certas propiedades universais que os caractericen sen que necesariamente se correspondan literalmente coas definicións clásicas. Un dos obxectivos é que a estrutura inducida polo derivador evite realizar eleccións como a escolla dos triángulos distinguidos da categoría homotópica para definir a estrutura triangulada.

Na teoría de categorías modelo, por exemplo, existen en moitas ocasións distintos modelos cada un adecuado para realizar un determinado cálculo ou outro, pero se precisamos un entorno no que realizar varios cálculos simultaneamente é posible que as estruturas modelo consideradas non sexan compatibles entre si. A estrutura de derivador permite, debido á súa axiomática, superar estas eleccións e incompatibilidades. A idea é que o derivador exprese información de forma simplemente 2-categoría e que as estruturas xurdan de maneira natural.

Para este capítulo tomaremos como referencias principais, en canto á teoría de derivadores, o punto de vista de Groth en [Gr1] e [Gr2].

## 2.1 Prederivadores

Unha das nocións principais que se pretende formalizar a través da linguaxe dos derivadores é a do cono dun morfismo de complexos (Definición 1.2.9), que será recollida na Definición 2.2.8. O cono pode verse como un conúcleo homotópico e, en definitiva, a idea de derivador busca entre outros obxectivos formalizar os límites e colímites homotópicos, que son esencialmente construcións 2-functoriais.

A idea xeral de Grothendieck é construír os derivadores como 2-funtores que actúen sobre a 2-categoría formada polas categorías pequenas,  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$ , dando liberdade a priori para que o obxecto matemático devolto polo derivador sexa unha 2-categoría non necesariamente pequena,  $\mathbf{CAT}$ .

**Definición 2.1.1.** [Gr1, Definition 1.1] Un prederivador  $\mathcal{D}$  é un 2-functor estrito  $\mathcal{D}: \mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CAT}$ .

Para cada categoría pequena  $I$ , o prederivador devolverá unha categoría  $\mathcal{D}(I)$ ; mentres que cada morfismo  $u: I \rightarrow J$  en  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$  ten asignado un functor  $\mathcal{D}(u): \mathcal{D}(J) \rightarrow \mathcal{D}(I)$ , tamén coñecido ás veces como *functor restrición* e denotado por

$$u^*: \mathcal{D}(J) \rightarrow \mathcal{D}(I).$$

Nótese que  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$  descríbese a partir de  $\mathbf{Cat}$  simplemente cambiando a dirección dos funtores e mantendo a dirección das transformacións naturais. A esixencia de que este functor sexa estrito garante precisamente que o efecto do mesmo respecte as composicións de 1-morfismos e de 2-morfismos estritamente, non permitindo que se manteñan sequera salvo único isomorfismo.

Esta convención para os prederivadores, que manteremos para a noción de derivador, responde á intuición de pensar que estamos traballando con diagramas (funtores covariantes). A convención coincide coa filosofía de Groth [Gr1], Heller [Hel] e Franke [Fra]; mais difire do punto de vista de Cisinski [C1], Grothendieck [G2] e Maltiniotis [Mal], cuxa motivación principal é o traballo con prefeixes (funtores contravariantes)<sup>1</sup>.

Un exemplo deste tipo de construción son os prederivadores representables. Usando a notación dada en [Gr1, Example 1.2], para calquera categoría  $\mathbf{C}$  podemos definir o *prederivador representable*  $y(\mathbf{C}): \mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CAT}$ , de xeito que para cada categoría pequena  $\mathbf{I}$  o prederivador devolva a categoría de funtores de  $\mathbf{I}$  a  $\mathbf{C}$

$$y(\mathbf{C})(\mathbf{I}) = \text{Fun}(\mathbf{I}, \mathbf{C}).$$

Por simplicidade, denotaremos  $\mathbf{C}^{\mathbf{I}} := \text{Fun}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$ . Para cada functor entre categorías pequenas  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  defínese

$$y(\mathbf{C})(u): \mathbf{C}^{\mathbf{J}} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{I}},$$

asignándolle a cada functor  $F$  de  $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$  a precomposición con  $u$

$$\mathbf{I} \xrightarrow{u} \mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{C},$$

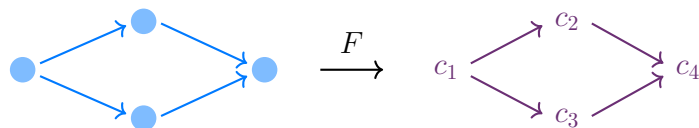
é dicir,

$$y(\mathbf{C})(u)(F) = F \circ u.$$

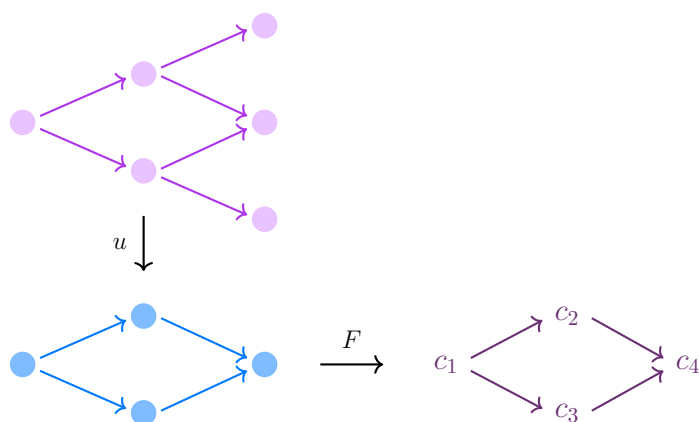
Seguindo a notación definida para os prederivadores en xeral, e para simplificar a notación, diremos que neste caso  $u^*(F) = F \circ u$ .

A partir de agora, e para motivar a definición de derivador, imos tomar como referencia os prederivadores representables pensados como 2-funtores que trasladan formas de diagramas a diagramas de dita forma nunha determinada categoría. É dicir, as categorías pequenas  $\mathbf{I}$  fixarán a forma do diagrama co que queremos traballar e será o prederivador o que proporcionará un diagrama na categoría base  $\mathbf{C}$  da forma indicada por  $\mathbf{I}$ . Por este motivo, referirémonos en ocasións á categoría de funtores  $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$  como a *categoría de diagramas en  $\mathbf{C}$  da forma  $\mathbf{I}$* .

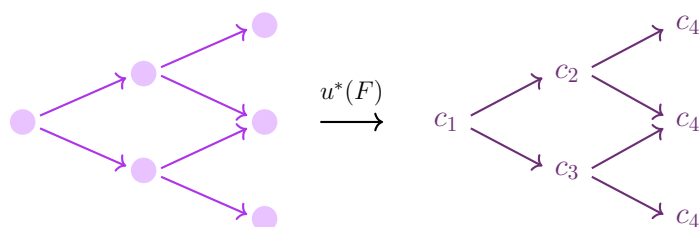
<sup>1</sup>Nese caso tomaríase como dominio do prederivador a 2-categoría  $\mathbf{Cat}^{\text{coop}}$ , na que tamén se inverterían as direccións das transformacións naturais, obtendo unha versión de prederivador diferente pero isomorfa.



Interpretaremos a actuación do derivador como un cambio na forma do diagrama, é dicir, para un functor  $u: I \rightarrow J$  e un diagrama  $F$  en  $\mathcal{C}^I$



obteremos un novo diagrama en  $\mathcal{C}^J$  simplemente precompoñendo este cambio de forma co diagrama orixinal:



**Notación:** denotaremos por  $\mathbf{e}$  a *categoría final*, formada por un único obxecto e un único morfismo: a identidade asociada a dito obxecto.

O prederivador  $y(\mathcal{C})$  permite recuperar a categoría base  $\mathcal{C}$  tomando no dominio a categoría  $\mathbf{e}$ :

$$y(\mathcal{C})(\mathbf{e}) \cong \mathcal{C}.$$

Inspirada neste comportamento establécese a seguinte definición.

**Definición 2.1.2.** Para calquera prederivador  $\mathcal{D}$ , diremos que  $\mathcal{D}(\mathbf{e})$  é a *categoría subxacente* de  $\mathcal{D}$ , sendo  $\mathbf{e}$  a categoría final.

### Prederivador de complexos de diagramas

Como explica Groth en [Gr2, §6.2], “a idea básica dos derivadores é englobar unha colección de categorías derivadas ou homotópicas xunto cun cálculo de extensións de Kan homotópicas que se comporte ben”. Por iso, para motivar a definición de derivador imos a partir do prederivador representable para a categoría de complexos dunha categoría abeliana.

En concreto, imos traballar con complexos cuxos obxectos pertencen a unha categoría de Grothendieck (Definición 1.5.2) con suficientes proxectivos, véxase Definición 1.4.2. Esta elección débese a que para os nosos intereses precisamos que a categoría teña límites e colímites e o feito de que conte cun xerador fai que sexa máis maleable. A existencia de suficientes proxectivos garantirá a existencia de resolucións  $q$ -proxectivas, ademais das resolucións  $q$ -inxectivas (no sentido definido na sección 1.4).

**Notación:** a partir deste punto, e salvo que se indique expresamente o contrario,  $\mathbf{A}$  será unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos.

Asociado a  $\mathbf{A}$ , a colección de categorías de diagramas de complexos constitúe un prederivador

$$\mathcal{C}_{\mathbf{A}}: \mathbf{Cat}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{CAT},$$

definido por  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}(\mathbf{I}) := \mathbf{C}(\mathbf{A})^{\mathbf{I}}$  e  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}(u) := u^*$ , para cada frecha  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  definida en  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$ . Na notación de prederivadores representables tense que  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}} = y(\mathbf{C}(\mathbf{A}))$ . En adiante, referirémonos a este tipo de prederivadores como *prederivadores de complexos*.

### Categorías de diagramas

Estudemos agora brevemente as propiedades categóricas destas categorías de diagramas. Posto que imos a traballar con complexos, e xa expuxemos que as condicións impostas sobre a categoría de partida  $\mathbf{A}$  tiñan o obxectivo de garantir a existencia de resolucións  $q$ -inxectivas e  $q$ -proxectivas, probemos que efectivamente para unha categoría  $\mathbf{A}$  de Grothendieck con suficientes proxectivos temos garantida a súa existencia.

O certo é que para calquera categoría de Grothendieck  $\mathbf{A}$ , a súa categoría de complexos  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é tamén unha categoría de Grothendieck (Proposición 1.5.4). Esta característica tamén se herda cando pasamos da categoría  $\mathbf{A}$  á categoría de diagramas  $\mathbf{A}^I$ .

**Proposición 2.1.3.** *Para unha categoría de Grothendieck  $\mathbf{A}$  e unha categoría pequena  $I$ , a categoría  $\mathbf{A}^I$  de funtores de diagramas de  $\mathbf{A}$  a  $I$  é de Grothendieck.*

*Demostración.* A categoría  $\mathbf{A}^I$  herda AB5 de  $\mathbf{A}$  por calcularse os límites en categorías de funtores punto a punto e, por [G2, Proposition 1.9.2], temos garantida a existencia de xerador, concluindo a proba.  $\square$

A referencia clásica para consultar as propiedades categóricas da categoría  $\mathbf{A}^I$  é [Fre]. Recordemos que o noso obxectivo final será demostrar que para unha categoría  $\mathbf{A}$  de Grothendieck con suficientes proxectivos, a categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})^I$  ten resolucións  $q$ -inxectivas e  $q$ -proxectivas. Vexamos en primeiro lugar que a propiedade de ter un xerador proxectivo na categoría  $\mathbf{A}$  tamén é herdada pola categoría  $\mathbf{A}^I$ .

Presentamos a continuación un par de resultados para categorías abelianas máis xerais, das cales as categorías de Grothendieck son un caso particular.

**Proposición 2.1.4.** [W, Example 2.3.13] *Sexa  $I$  unha categoría pequena e  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. Supoñamos que  $\mathbf{A}$  é completa, é dicir, existen produtos para calquera conxunto de obxectos de  $\mathbf{A}$ ; e ten suficientes inxectivos. Entón  $\mathbf{A}^I$  ten suficientes inxectivos.*

Recordemos que ser completa é equivalente na linguaxe dos axiomas de categorías abelianas a verificar AB3\*, véxase a sección 1.5. Dualizando a proba deste resultado podemos afirmar tamén que existirán suficientes proxectivos nesta categoría.

**Proposición 2.1.5.** *Sexa  $I$  unha categoría pequena e  $\mathbf{A}$  unha categoría abeliana. Supoñamos que  $\mathbf{A}$  é cocompleta e ten suficientes proxectivos. Entón  $\mathbf{A}^I$  tamén ten suficientes obxectos proxectivos.*

No noso caso, por ser  $\mathbf{A}$  unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos está claro que esta ten un xerador proxectivo: ao ter suficientes

proyectivos sempre poderemos cubrir ao xerador, que existe por ser definición de categoría de Grothendieck, cun obxecto proyectivo obtendo así un xerador proyectivo.

**Lema 2.1.6.** *Unha categoría de Grothendieck ten suficientes proyectivos se, e só se, ten un xerador proyectivo.*

Neste caso, as categorías de Grothendieck con esta propiedade presentan ademais garantía de exactitude nos produtos, como probamos no seguinte lema.

**Lema 2.1.7.** *Toda categoría de Grothendieck con xerador proyectivo verifica AB4\*.*

*Demostración.* Unha categoría de Grothendieck é AB3\* por [Kr, Proposition 2.5.16]. Ademais, vexamos que o produto de epimorfismos é epimorfismo. Para unha secuencia de epimorfismos  $A_\lambda \rightarrow B_\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , e vexamos que a sucesión

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \longrightarrow 0.$$

é exacta. Se  $U$  é o xerador proyectivo de  $\mathbf{A}$  tomemos a sucesión

$$\mathrm{Hom} \left( U, \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \longrightarrow \mathrm{Hom} \left( U, \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \longrightarrow 0 \quad (2.1.1)$$

que é isomorfa á sucesión de módulos

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}(U, A_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}(U, B_\lambda) \longrightarrow 0. \quad (2.1.2)$$

Por ser  $U$  proyectivo o functor  $\mathrm{Hom}(U, -)$  é exacto e en módulos os produtos son tamén exactos. Logo, por ser as sucesións  $A_\lambda \rightarrow B_\lambda \rightarrow 0$  exactas, tamén o é (2.1.2) e, equivalentemente, (2.1.1). Deste xeito, por ser  $U$  xerador, a exactitude mantense para o produto de epimorfismos  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \rightarrow 0$ , que é efectivamente un epimorfismo.  $\square$

**Proposición 2.1.8.** *Sexa  $\mathbf{I}$  unha categoría pequena e  $\mathbf{A}$  unha de Grothendieck con suficientes proyectivos. Entón a categoría de diagramas  $\mathbf{A}^{\mathbf{I}}$  ten suficientes obxectos inxectivos e proyectivos e verifica AB4 e AB4\*.*

*Demostración.* En primeiro lugar, por ser  $\mathbf{A}$  Grothendieck tamén o é  $\mathbf{A}^I$  pola Proposición 2.1.3. Unha categoría de Grothendieck ten sempre suficientes obxectos inxectivos, podemos garantilo por exemplo a través Proposición 2.1.4.

Por outra banda, a categoría de Grothendieck  $\mathbf{A}$  é abeliana e cocompleta por definición. Se  $\mathbf{A}$  ten suficientes proxectivos, entón  $\mathbf{A}^I$  ten suficientes proxectivos pola Proposición 2.1.5.

Como  $\mathbf{A}^I$  é de Grothendieck e verifica AB5, entón  $\mathbf{A}^I$  tamén verifica AB4. Probemos agora que verifica o axioma dual: como  $\mathbf{A}^I$  é Grothendieck con suficientes proxectivos, polo Lema 2.1.6 esta categoría ten un xerador proxectivo. Así, o Lema 2.1.7 garante que  $\mathbf{A}^I$  tamén é AB4\*.  $\square$

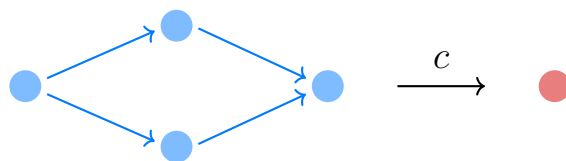
Dos resultados anteriores dedúcese a existencia de resoluciónns que buscamos.

**Teorema 2.1.9.** *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos. Todo complexo de  $\mathbf{C}(\mathbf{A}^I)$  ten resoluciónns  $q$ -inxectivas e  $q$ -proxectivas.*

*Demostración.* Polo Lema 2.1.8, a categoría  $\mathbf{A}^I$  atópase nas hipóteses do Teorema 1.4.8, garantindo que existen en resoluciónns  $q$ -inxectivas; e do Teorema 1.4.9, que nos asegura a existencia de resoluciónns  $q$ -proxectivas.  $\square$

## Límites e colímites a través de 2-funtores

Comecemos agora a desentrañar o significado de realizar un “cálculo de límites” a través dos derivadores partindo do caso do prederivador  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ . Tomemos en  $\text{Cat}^{\text{op}}$  o morfismo canónico  $c: I \rightarrow \mathbf{e}$ ,



que leva todos os obxectos do diagrama  $I$  ao único obxecto de  $\mathbf{e}$  e se comporta do mesmo xeito coas frechas.

A imaxe de  $c: I \rightarrow \mathbf{e}$  a través do prederivador representable  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$  é o 2-functor  $c^*$ , que podemos entender como o diagrama constante indexado por  $I$ .

**Lema 2.1.10.** *Sexa  $c: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{e}$  o functor canónico, sendo  $\mathbb{I}$  unha categoría pequena e  $\mathbf{e}$  a categoría final. Entón os límites directo e inverso canónicos son adxuntos de  $c^*$  pola esquerda e pola dereita respectivamente,*

$$\begin{array}{ccc} & \lim_{\rightarrow} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{C}_A(\mathbb{I}) & \xleftarrow{c^*} & \mathcal{C}_A(\mathbf{e}) \\ & \curvearrowleft & \\ & \lim_{\leftarrow} & \end{array}$$

é dicir,  $\lim_{\rightarrow} \dashv c^* \dashv \lim_{\leftarrow}$ .

A proba deste resultado pode consultarse en [ML, X.1], onde  $c^*$  se denota por  $\Delta$ .

A definición axiomática de derivador recollerá esta idea, de xeito que o “cálculo de límites” (directos e inversos) de diagramas sexa parte da estrutura de derivador. Dado que estamos a manexar un 2-functor que actúa sobre  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$ , precisamos considerar os casos nos que cambio de diagrama non sexa  $c: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{e}$ , senón que sexa un cambio de diagrama arbitrario  $u: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$ . O certo é que para calquera  $u$  o functor  $u^*: \mathcal{C}_A(\mathbb{J}) \rightarrow \mathcal{C}_A(\mathbb{I})$  tamén ten adxuntos a ambos lados.

**Proposición 2.1.11.** *Sexa  $u: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$  un functor entre dúas categorías pequenas e  $\mathcal{C}_A$  o prederivador representable de complexos. Sexa  $u^*$  o functor precomposición asociado a  $u$ . Entón existen funtores  $u_!$  e  $u_*$*

$$\begin{array}{ccc} & u_! & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{C}_A(\mathbb{I}) & \xleftarrow{u^*} & \mathcal{C}_A(\mathbb{J}) \\ & \curvearrowleft & \\ & u_* & \end{array}$$

de tal xeito que  $u_! \dashv u^* \dashv u_*$ .

Na proba deste resultado en [ML, X.3] descríbense os funtores  $u_!$  e  $u_*$  a través de extensións de Kan pola dereita e pola esquerda: para un obxecto  $F$  de  $\mathcal{C}_A(\mathbb{I})$  tense que  $u_!F = \text{Ran}_u F$  e, por dualidade,  $u_*F = \text{Lan}_u F$ . Precisamente a definición de extensións de Kan, concepto que abordaremos na seguinte sección, é o que permite deducir as adxuncións enunciadas.

### Extensións de Kan e categorías *slice* e *coslice*

Unha extensión de Kan está constituída por un functor e unha transformación natural que satisfán unha propiedade universal en relación con outros pares semellantes. Imos agora dar a definición de extensión de Kan no ámbito no das 2-categorías.

**Definición 2.1.12.** Sexan  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{J}$  categorías calquera. Dados dous funtores  $F: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$  e  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$ , unha *extensión de Kan pola esquerda* de  $F$  ao longo de  $u$  é un functor  $\text{Lan}_u F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  xunto cunha transformación natural  $\eta: F \Rightarrow \text{Lan}_u F \circ u$  tal que para calquera outro par functor-transformación natural  $(G: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}, \gamma: F \Rightarrow G \circ u)$  a transformación  $\gamma$  se factoriza de forma única a través de  $\eta$ .

Dualmente, unha *extensión de Kan pola dereita* de  $F$  ao longo de  $u$  é un functor  $\text{Ran}_u F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  xunto cunha transformación natural  $\epsilon: \text{Ran}_u F \circ u \Rightarrow F$  tal que para calquera par  $(G: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}, \delta: G \circ u \Rightarrow F)$ , a transformación  $\delta$  se factoriza de xeito único por  $\epsilon$ .

Baixo esta idea tan xeral podemos englobar unha gran variedade de conceptos matemáticos, desde os límites e colímites canónicos ata os propios funtores derivados, como xa avanzamos na sección 1.4. Para afondar nesta idea véxase [R, §6]. Obsérvese que nesta referencia o nome do capítulo é ben representativo: *All concepts are Kan extensions*.

Unha vez temos este concepto claro, e para comprender mellor como funcionan os adxuntos da Proposición 2.1.11, imos facer estas definicións máis explícitas expresándoas en termos de límites e colímites. Dado  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  un morfismo en  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$  comecemos co caso da existencia do adxunto pola dereita,  $u_!$ , sendo o caso dual a existencia de  $u_*$  o adxunto pola esquerda.

**Definición 2.1.13.** Sexan  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{J}$  categorías pequenas,  $j$  un obxecto de  $\mathbf{J}$  e  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  un functor. Definiremos a *categoría slice asociada a  $u$* , e denotarémola por  $\mathbf{I}/j$ , a través dos seus obxectos e frechas como:

**Obxectos:** os pares  $(i, u(i) \rightarrow j)$ , con  $u(i) \rightarrow j$  un morfismo na categoría  $\mathbf{J}$ .

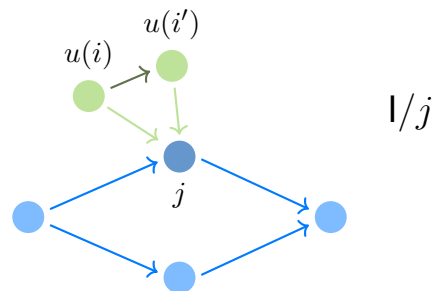
**Morfismos:** unha frecha de  $(i, u(i) \rightarrow j)$  a  $(i', u(i') \rightarrow j)$  é un morfismo  $i \rightarrow i'$  tal que  $u(i) \rightarrow u(i')$  conmuta coas frechas estruturais a  $j$ , é dicir, que fai

o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} u(i) & \longrightarrow & u(i') \\ & \searrow & \swarrow \\ & j & \end{array}$$

Denotemos por  $\pi_j: \mathbb{I}/j \rightarrow \mathbb{I}$  o functor esquecemento que leva cada obxecto  $(i, u(i) \rightarrow j)$  a  $i$  e se comporta analogamente coas frechas.

Os obxectos da categoría  $\mathbb{I}/j$  son os pares formados polos obxectos de  $\mathbb{I}$  que, unha vez aplicado o cambio de forma no diagrama  $u: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$ , acaban en  $j$ ; xunto coa frecha que se induce na categoría  $\mathbb{J}$  e que fai de enlace. Podemos pensalos como os “satélites” sobre  $j$  a través de  $u$ . Con esta interpretación, unha frecha da categoría  $\mathbb{I}/j$  é unha frecha que nos permite movernos de satélite en satélite de  $j$ :



Estamos así codificando os efectos do cambio de diagrama  $u: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$  en cada punto  $j$  de  $\mathbb{J}$  nunha única categoría  $\mathbb{I}/j$ .

O functor esquecemento definido  $\pi_j: \mathbb{I}/j \rightarrow \mathbb{I}$  será o que nos permita dar a continuación unha expresión de  $u_i$  a través dun límite indexado precisamente por esta categoría, de xeito que poidamos utilizar toda a información codificada nela. O functor

$$u_i: \mathbf{C}(A)^{\mathbb{I}} \longrightarrow \mathbf{C}(A)^{\mathbb{J}}$$

está definido para  $j$  en  $\mathbb{J}$  como

$$u_i(F)(j) := \varinjlim_{\mathbb{I}/j} (F \circ \pi_j). \quad (2.1.3)$$

Podemos entender o functor  $u_!$  como un límite ponderado pola categoría  $\mathbf{J}$ , de xeito que tomamos límite sobre todo o que se refire a un obxecto de  $\mathbf{J}$ , non obtendo un obxecto da categoría senón un diagrama da forma  $\mathbf{J}$ .

A functorialidade de  $u_!(F)$  séguese da existencia do diagrama conmutativo asociado a unha frecha  $\beta: j \rightarrow j'$  en  $\mathbf{J}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I}/j & \xrightarrow{\mathbf{I}/\beta} & \mathbf{I}/j' \\ & \searrow \pi_j & \swarrow \pi_{j'} \\ & & \mathbf{I} \end{array}$$

onde  $\mathbf{I}/\beta: \mathbf{I}/j \rightarrow \mathbf{I}/j'$  é o functor que leva un obxecto  $u(i) \rightarrow j$  na composición con  $\beta$ ,  $u(i) \rightarrow j \rightarrow j'$ . De novo podemos pensalo como un cambio na base do noso sistema de satélites, de xeito que se temos unha frecha que une dous puntos  $j$  e  $j'$ , os satélites do primeiro poden verse á súa vez como satélites do segundo mediante a composición.

Como se cumpre que  $F \circ \pi_j = F \circ \pi_{j'} \circ \mathbf{I}/\beta$ , obtemos a frecha

$$u_!(F)(\beta): \varinjlim_{\mathbf{I}/j} (F \circ \pi_j) \longrightarrow \varinjlim_{\mathbf{I}/j'} (F \circ \pi_{j'})$$

inducida pola propiedade universal dos colímites, que nos garante a functorialidade de  $u_!$ .

**Definición 2.1.14.** Sexan  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{J}$  categorías pequenas,  $j$  un obxecto de  $\mathbf{J}$  e  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  un functor. Definiremos a *categoría coslice asociada a  $u$* , e denotáremola por  $j \backslash \mathbf{I}$ , a través dos seus obxectos e frechas como:

**Obxectos:** os pares  $(i, j \rightarrow u(i))$ , sendo  $j \rightarrow u(i)$  un morfismo en  $\mathbf{J}$ .

**Morfismos:** unha frecha de  $(i, j \rightarrow u(i))$  a  $(i', j \rightarrow u(i'))$  é un morfismo  $i \rightarrow i'$  tal que  $u(i) \rightarrow u(i')$  conmuta coas frechas estruturais desde  $j$ , é dicir, que fai o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & j & \\ & \swarrow & \searrow \\ u(i) & \longrightarrow & u(i') \end{array}$$

Denotaremos por  $\varpi_j: j \setminus \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$  o functor esquecemento levando  $(i, j \rightarrow u(i))$  a  $i$ , definido analogamente para as frechas.

Tanto a categoría *slice* como a categoría *coslice* son casos particulares dun concepto máis xeral denominado categoría coma, véxase [ML, II.6].

Neste caso, na categoría *coslice* podemos entender os obxectos como os “descendentes” de cada punto  $j$ , en lugar de como “satélites”, e o resto de interpretación presentada previamente funciona dualmente.

Deste xeito, o functor

$$u_*: \mathbf{C}(\mathbf{A})^{\mathbf{I}} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A})^{\mathbf{J}}$$

pode definirse para  $j$  en  $\mathbf{J}$  como

$$u_*(F)(j) := \varprojlim_{j \setminus \mathbf{I}} (F \circ \varpi_j) \quad (2.1.4)$$

A functorialidade de  $u_*(F)$  séguese, como no caso anterior, do diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} j' \setminus \mathbf{I} & \xrightarrow{\beta \setminus \mathbf{I}} & j \setminus \mathbf{I} \\ & \searrow \varpi_{j'} & \swarrow \varpi_j \\ & \mathbf{I} & \end{array}$$

asociado a unha frecha  $\beta: j \rightarrow j'$ , onde  $\beta \setminus \mathbf{I}: j' \setminus \mathbf{I} \rightarrow j \setminus \mathbf{I}$  é o functor que leva  $j' \rightarrow u(i)$  á composición con  $\beta$ ,  $j \rightarrow j' \rightarrow u(i)$ . O morfismo

$$u_*(F)(\beta): \varprojlim_{j \setminus \mathbf{I}} (F \circ \varpi_j) \longrightarrow \varprojlim_{j' \setminus \mathbf{I}} (F \circ \varpi_{j'})$$

vén inducido por  $\beta \setminus \mathbf{I}$  a través da propiedade universal dos límites e a construción é exactamente a dual á anterior.

## 2.2 Derivadores

Sendo a noción de prederivador puramente categórica, a de derivador desenvólvese para expresar que debe cumprir unha categoría para posuír as estruturas

necesarias que nos permitan xeneralizar as construcións desexadas. Unha destas construcións, como xa avanzamos, é o cono da categoría derivada. Imos introducir previamente unha definición que se usará ao longo dos vindeiros capítulos de xeito recorrente.

**Definición 2.2.1.** Sexa  $\mathcal{I}$  unha categoría pequena e  $\mathcal{D}$  un prederivador. Cada obxecto  $i$  de  $\mathcal{I}$  determina un functor  $i: \mathbf{e} \rightarrow \mathcal{I}$ . Denomínase *functor avaliación “no punto  $i$ ”* ao functor  $i^*: \mathcal{D}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{e})$ . Dados  $F$  e  $G$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{I})$  e un morfismo  $f: F \rightarrow G$  en  $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ , denotaremos  $F_i := i^*F$  e  $f_i := i^*f$ .

Esta definición simplemente expresa a avaliación nun punto  $i$  do diagrama  $\mathcal{I}$  na linguaxe de 2-categorías que vimos utilizando.

**Definición 2.2.2.** [Gr1, Definition 1.10] Un *derivador*  $\mathcal{D}$  é un prederivador  $\mathcal{D}: \text{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \text{CAT}$  que verifica os seguintes axiomas:

**Der1**  $\mathcal{D}$  leva coprodutos en produtos. En particular,  $\mathcal{D}(\emptyset)$  é trivial.

**Der2** Un morfismo  $f: F \rightarrow G$  en  $\mathcal{D}(\mathcal{I})$  é un isomorfismo se, e só se,  $f_i: F_i \rightarrow G_i$  é un isomorfismo en  $\mathcal{D}(\mathbf{e})$ , para todo  $i$  en  $\mathcal{I}$ .

**Der3** Para cada functor  $u: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ , existen extensións de Kan homotópicas pola dereita e pola esquerda, é dicir, existen un par de funtores  $u_!$  e  $u_*$  tales que

$$(u_!, u^*): \mathcal{D}(\mathcal{I}) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathcal{J}) \quad \text{e} \quad (u^*, u_*): \mathcal{D}(\mathcal{J}) \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathcal{I})$$

son pares de adxuncións e se ten que  $u_! \dashv u^* \dashv u_*$ .

**Der4** Para cada functor  $u: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  e cada  $j$  en  $\mathcal{J}$ , sexan  $\mathcal{I}/j$  a categoría *slice* e  $\pi_j: \mathcal{I}/j \rightarrow \mathcal{I}$  o functor esquecemento asociado (Definición 2.1.13),  $j \backslash \mathcal{I}$  a categoría *coslice* e  $\varpi_j: j \backslash \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  o functor esquecemento asociado (Definición 2.1.14) e  $p: j \backslash \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{e}$  e  $q: j \backslash \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{e}$  os funtores canónicos. Os morfismos canónicos

$$p_! \pi_j^*(F) \rightarrow u_!(F)_j \quad \text{e} \quad u_*(F)_j \rightarrow q_* \varpi_j^*$$

son isomorfismos para todo  $F$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ .

Obsérvese que os axiomas están presentados de xeito que esixen unha propiedade, a única estrutura que se demanda é a estrutura básica de prederivador.

Os dous primeiros axiomas céntranse principalmente no comportamento das categorías que se atopan na imaxe do prederivador. O primeiro deles esixe que este 2-functor leve coprodutos en produtos, o cal permitirá manter a coherencia categórica. Pensando en termos de diagramas este axioma implica que un diagrama dentro dunha unión disxunta estará determinado polas restricións aos sumandos directos. A segunda parte do axioma está pensada para excluír ao derivador “baleiro”, mais tamén implicará a existencia de obxectos inicial e final nas categorías imaxe, véxase [Gr2, Lemma 6.32].

No caso de Der2, estase a impoñer a condición de que unha transformación natural sexa un isomorfismo natural se, e só se, é un isomorfismo “punto a punto”, esixindo que o derivador dependa dos valores nos obxectos das diversas categorías de índices.

Os dous últimos axiomas son os máis significativos en canto ao obxectivo marcado para os derivadores: permitir certo cálculo de límites “homotópicos”. Son o que se coñece en ocasións como “propiedades de bicompleción homotópica”. O terceiro axioma garante que para todo derivador as imaxes dos funtores teñen adxuntos a ambos lados en forma de extensións de Kan “homotópicos”. Podemos entender este axioma a través da intuición introducida na sección anterior para  $\mathcal{C}_A$ , pensando nas extensións de Kan como uns mecanismos que nos permiten realizar límites débiles functoriais. Dito doutra forma, Der3 expresa que o derivador posúe límites e colímites homotópicos, é dicir, ten o correspondente a ser completo e cocompleto respecto á estrutura dada polos seus isomorfismos.

Este terceiro axioma complementábase co cuarto. Podemos interpretar Der4 como a esixencia de que o cálculo dos límites creados a través dos adxuntos de Der3 debe poder realizarse punto a punto.

Para unha categoría arbitraria  $\mathbf{C}$  o prederivador representable, definido como  $y(\mathbf{C}): \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{I}}$ , é derivador se, e só se,  $\mathbf{C}$  é bicompleta; véxase [Gr1, Example 1.6]. Baixo esta premisa, e recordando que  $\mathbf{A}$  é unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos, podemos asegurar que o prederivador de complexos de diagramas  $\mathcal{C}_A$  é tamén derivador, xa que como xa expuxemos a categoría  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é bicompleta.

**Teorema 2.2.3.** *O prederivador*

$$\mathcal{C}_A: \text{Cat}^{\text{op}} \longrightarrow \text{CAT},$$

definido por  $\mathcal{C}_A(\mathbb{I}) := \mathbf{C}(A)^{\mathbb{I}}$  e  $\mathcal{C}_A(u) := u^*$  é un derivador.

### Derivadores fortes

En xeral, as categorías implicadas na definición do derivador  $\mathcal{C}_A$ , que vai a ser o noso derivador de referencia, teñen moi boas propiedades. En particular, baixo as nosas hipóteses existe un isomorfismo canónico entre a categoría de complexos de diagramas e a categoría de diagramas de complexos

$$\mathbf{C}(A)^{\mathbb{I}} \cong \mathbf{C}(A^{\mathbb{I}}),$$

para calquera categoría pequena  $\mathbb{I}$ , véxase [Gr2, Equation (3.9)].

Analicemos a diferenza, en termos de definición, entre estas dúas categorías. A categoría  $\mathbf{C}(A)^{\mathbb{I}}$  é a *categoría de diagramas de complexos* cuxos obxectos son funtores  $F: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{C}(A)$ . Para cada obxecto  $i$  de  $\mathbb{I}$  obteremos un complexo  $F(i)$  e para unha frecha  $i \rightarrow i'$  en  $\mathbb{I}$ , unha frecha de complexos  $F(i) \rightarrow F(i')$  en  $\mathbf{C}(A)$ . Se despregamos o diagrama grao a grao teremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & F^{n-1}(i) & \xrightarrow{d_{F(i)}^{n-1}} & F^n(i) & \xrightarrow{d_{F(i)}^n} & F^{n+1}(i) & \longrightarrow & \dots \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F^{n-1}(i') & \xrightarrow{d_{F(i')}^{n-1}} & F^n(i') & \xrightarrow{d_{F(i')}^n} & F^{n+1}(i') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

que será conmutativo por definición.

As frechas desta categoría  $\mathbf{C}(A)^{\mathbb{I}}$  serán entón morfismos entre funtores  $f: F \Rightarrow G$ , é dicir, transformacións naturais que garanten que o seguinte dia-

grama despregado grao a grao é conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & F^{n-1}(i) & \xrightarrow{d_{F(i)}^{n-1}} & F^n(i) & \xrightarrow{d_{F(i)}^n} & F^{n+1}(i) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 \dots & \longrightarrow & F^{n-1}(i') & \xrightarrow{d_{F(i')}^{n-1}} & F^n(i') & \xrightarrow{d_{F(i')}^n} & F^{n+1}(i') & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f_i^{n-1} & & \downarrow f_i^n & & \downarrow f_i^{n+1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & G^{n-1}(i) & \xrightarrow{d_{G(i)}^{n-1}} & G^n(i) & \xrightarrow{d_{G(i)}^n} & G^{n+1}(i) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f_{i'}^{n-1} & \searrow & \downarrow f_{i'}^n & \searrow & \downarrow f_{i'}^{n+1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & G^{n-1}(i') & \xrightarrow{d_{G(i')}^{n-1}} & G^n(i') & \xrightarrow{d_{G(i')}^n} & G^{n+1}(i') & \longrightarrow & \dots
 \end{array} \tag{2.2.1}$$

sendo  $G: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A})$  outro obxecto análogo a  $F$ . Para cada frecha entre dous obxectos de  $\mathbf{C}(\mathbf{A})^{\mathbb{I}}$  teremos un diagrama conmutativo do tipo (2.2.1) e viceversa.

Identifiquemos agora a estrutura de  $\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\mathbb{I}})$ , que imos denominar como a *categoría de complexos de diagramas*. Os seus obxectos son complexos,  $F$  e  $G$ , e as súas frechas son morfismos de complexos  $f: F \rightarrow G$ . Un morfismo  $f$  é entón unha sucesión  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos de  $\mathbf{A}^{\mathbb{I}}$  facendo o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & F^{n-1} & \xrightarrow{d_F^{n-1}} & F^n & \xrightarrow{d_F^n} & F^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \Downarrow f^{n-1} & & \Downarrow f^n & & \Downarrow f^{n+1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & G^{n-1} & \xrightarrow{d_G^{n-1}} & G^n & \xrightarrow{d_G^n} & G^{n+1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Nótese que cada  $f^n$  é unha frecha da categoría  $\mathbf{A}^{\mathbb{I}}$ , é dicir, en cada grao  $F^n$  e  $G^n$  son funtores de  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbf{A}$ , ou o que é o mesmo diagramas en  $\mathbf{A}$  da forma  $\mathbb{I}$ ; e cada  $f^n$  é unha transformación natural entre eles:  $f^n: F^n \Rightarrow G^n$ . Por esta razón, en cada  $n \in \mathbb{Z}$  temos outro cadrado conmutativo para cada frecha  $i \rightarrow i'$  entre obxectos de  $\mathbb{I}$ , obtendo exactamente o mesmo diagrama que en (2.2.1).

Así, como xa ocorría en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})^{\mathbb{I}}$ , cada frecha entre dous obxectos de  $\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\mathbb{I}})$  ven representada por un diagrama conmutativo como do tipo (2.2.1) e viceversa. Logo realmente podemos identificar estas dúas categorías. De feito, é posible

atopar na literatura o derivador de complexos  $\mathcal{C}_A$  definido como  $\mathcal{C}_A(\mathbb{I}) := \mathbf{C}(A)^{\mathbb{I}}$  ou  $\mathcal{C}_A(\mathbb{I}) := \mathbf{C}(A^{\mathbb{I}})$ . Pero esta propiedade é unha particularidade destas categorías.

Partindo da categoría de complexos podemos tomar o functor  $\mathbf{C}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ , realizando o paso ao cociente de  $\mathbf{C}(A)$  a  $\mathbf{K}(A)$  e posteriormente aplicando o functor localización  $Q: \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ , como se explica na sección 1.3. Pese a que as frechas en  $\mathbf{D}(A)$  con esta construción se representan como tellados, gracias ao Corolario 1.3.17 e á existencia de resolucións  $q$ -infectivas podemos representalas con frechas de  $\mathbf{K}(A)$ , é dicir, con clases de homotopía de frechas.

Se tomamos un obxecto da categoría  $\mathbf{D}(A)^{\mathbb{I}}$ , que corresponderá a un diagrama  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbf{D}(A)$ , obteremos para as conmutatividades presentes na categoría  $\mathbb{I}$  “conmutatividades salvo homotopía” en  $\mathbf{D}(A)$ . Isto leva consigo unha perda de información que podería evitarse se puideramos asegurar que calquera diagrama que conmuta salvo homotopía se pode substituír salvo cuasi-isomorfismo por un que conmute estritamente en  $\mathbf{C}(A)$ , máis a priori é algo que non temos garantido en xeral.

No caso da categoría  $\mathbf{D}(A^{\mathbb{I}})$ , os obxectos son complexos de diagramas cuxos elementos grao a grao son funtores. Neste caso os morfismos entre os obxectos son morfismos de complexos que podemos ver como clases de homotopía, como describiamos antes; mentres que grao a grao as conmutatividades veñen dadas polos funtores de  $A^{\mathbb{I}}$ , polo que son estritas. Por dicilo dalgún xeito, neste caso mantemos máis datos e por iso denominaremos *diagramas coherentes da forma  $\mathbb{I}$*  aos obxectos da categoría  $\mathbf{D}(A^{\mathbb{I}})$ , por ser os que gardan máis información; mentres que os obxectos de  $\mathbf{D}(A)^{\mathbb{I}}$  serán *diagramas incoherentes da forma  $\mathbb{I}$* . Sobre este feito volveremos a reflexionar na sección 3.2, pois neste caso non vai a existir un isomorfismo entre  $\mathbf{D}(A)^{\mathbb{I}}$  e  $\mathbf{D}(A^{\mathbb{I}})$ .

Para os obxectivos da teoría de derivadores non é necesario esixir que exista un isomorfismo entre os diagramas coherentes e incoherentes, mais os casos nos que existe unha certa relación entre eles dan lugar ao concepto de derivador forte. Esta relación vai estar definida a través do functor subxacente do derivador.

Sexa  $\mathcal{D}: \mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CAT}$  un derivador arbitrario. Retomando a notación da Definición 2.2.1, recordemos que calquera obxecto  $i$  dunha categoría  $\mathbb{I}$  induce un functor avaliación no punto,  $i^*: \mathcal{D}(\mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{D}(e)$ , de xeito que para un  $F$  en  $\mathcal{D}(\mathbb{I})$  denotaremos  $F_i := i^*F$ . Da mesma maneira, calquera morfismo  $f: i \rightarrow i'$  induce unha transformación natural  $f^*: i^* \Rightarrow i'^*$ . Deste xeito podemos definir

un functor

$$\mathrm{dia}_I: \mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathcal{D}(e)^I$$

tal que para  $F$  en  $\mathcal{D}(I)$  o functor  $\mathrm{dia}_I(F)$  estea definido como  $\mathrm{dia}_I(F)(i) = F_i$ , para cada obxecto  $i$  de  $I$ . O comportamento sobre as frechas sería o análogo.

Se identificamos as categorías  $I \times e \cong I$ , temos para calquera  $i$  de  $I$  un functor  $(i \times \mathrm{id}_J): J \rightarrow I \times J$ . Así, podemos finalmente definir o *functor subxacente* de  $\mathcal{D}$ :

$$\mathrm{dia}_{I,J}: \mathcal{D}(I \times J) \longrightarrow \mathcal{D}(J)^I \quad (2.2.2)$$

de xeito que para un  $F$  en  $\mathcal{D}(I \times J)$  o functor  $\mathrm{dia}_{I,J}(F)$  estea definido como

$$\mathrm{dia}_{I,J}(F)(i) = F_{(i \times \mathrm{id}_J)}$$

e analogamente para as frechas. A definición da súa construción paso a paso e a proba de que efectivamente se obtén un functor pode consultarse na descrición previa a [Gr1, Definition 1.8].

En particular, as frechas entre os obxectos dunha categoría calquera son diagramas na categoría. Se queremos centrarnos no comportamento dos diagramas correspondentes ás frechas da categoría tomaremos  $I = \mathbf{2}$ . Denotaremos por  $\mathbf{2}$  á categoría inducida polo conxunto parcialmente ordenado  $\{0 \rightarrow 1\}$ , coñecida tamén como *walking arrow*, con dous obxectos e unha única frecha entre eles distinta das identidades<sup>2</sup>. A partir desta categoría, podemos establecer a seguinte definición.

**Definición 2.2.4.** [Gr1, Definition 1.8] Un derivador dise *derivador forte* se verifica Der5:

**Der5** O functor subxacente

$$\mathrm{dia}_{\mathbf{2},J}: \mathcal{D}(\mathbf{2} \times J) \rightarrow \mathcal{D}(J)^{\mathbf{2}}$$

é pleno e esencialmente sobrexectivo para calquera categoría  $J$ .

<sup>2</sup>Na referencia [Gr1] esta categoría denótase por [1], mais neste caso evitaremos usar esta notación para non crear confusión co functor desprazamento da categoría de complexos, véxase a Definición 1.1.4 do capítulo 1.

**Notación:** no sucesivo denominaremos functor subxacente ao caso particular  $\mathbf{dia}_{2,J}$ , posto que será o único co que trataremos a partir deste momento.

Realmente todos os derivadores representables, non só  $\mathcal{C}_A$ , son fortes. De feito, os seus funtores subxacentes son realmente equivalencias. Mais, na maior parte dos casos o functor  $\mathbf{dia}_{2,J}$  non será unha equivalencia de categorías. A condición de  $\text{Der}5$  é máis débil que unha equivalencia, soamente existe sobrexectividade en obxectos e frechas, mais permitiranos referir diagramas incoherentes a diagramas coherentes como veremos na sección 3.2.

### Derivadores punteados

Poñendo o punto de mira nas categorías que subxacen en todo derivador, en lugar de centrarnos agora nas frechas imos a focalizar a atención na existencia de obxectos con propiedades universais. En [Gr2, Lemma 6.32] demóstrase que para un derivador calquera  $\mathcal{D}$  e calquera categoría pequena  $I$ , a categoría  $\mathcal{D}(I)$  admite obxecto inicial  $\emptyset$  e obxecto final  $*$ .

**Definición 2.2.5.** Un derivador dise *punteado* se a categoría subxacente ten obxecto cero.

O que estamos a requirirle a un derivador  $\mathcal{D}$  para ser punteado é que axiomáticamente a única frecha  $\emptyset \rightarrow *$  en  $\mathcal{D}(e)$  sexa un isomorfismo. Por exemplo, o derivador representable  $y(C)$  é punteado se, e só se, a categoría  $C$  é punteada.

Na teoría de derivadores, os de tipo punteado xogarán un papel análogo aos espazos punteados topolóxicos. De feito, para calquera derivador punteado podemos definir construcións análogas ás topolóxicas, como os funtores suspensión e espazo de lazos. A continuación, traduciremos estes conceptos á linguaxe de teoría de derivadores. As definicións habituais atópanse normalmente en termos de cadrados cartesianos e cocartesianos e para falar destes obxectos matemáticos imos a recuperar algunha das notacións de [Gr1].

Sexa  $\square$  a categoría pequena dada polo conxunto parcialmente ordenado

$$\begin{array}{ccc} (0, 0) & \longrightarrow & (1, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0, 1) & \longrightarrow & (1, 1) \end{array}$$

Sexan  $\Gamma$  e  $\sqcup$  as categorías dadas polos subconxuntos parcialmente ordenados:

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0,1) & & (0,1) \longrightarrow (1,1) \end{array}$$

e sexan  $i_\Gamma: \Gamma \rightarrow \square$  e  $i_\sqcup: \sqcup \rightarrow \square$  as inclusións en  $\square$  destas subcategorías, respectivamente.

**Definición 2.2.6.** Diremos que un obxecto en  $\mathcal{D}(\square)$  é *cocartesiano* se pertence á imaxe esencial de  $\mathbf{L}i_\Gamma: \mathcal{D}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{D}(\square)$ . Dualmente, dirase que é *cartesiano* se pertence á imaxe esencial de  $\mathbf{R}i_{\sqcup*}: \mathcal{D}(\sqcup) \rightarrow \mathcal{D}(\square)$ . Se un obxecto en  $\mathcal{D}(\square)$  é cartesiano e cocartesiano simultaneamente dirase que é un cadrado *bicartesiano*.

Habitualmente falaremos dos obxectos de  $\mathcal{D}(\square)$  como *cadrados*. Como se proba en [Gr2, Examples 5.35 (iii)], no caso dos derivadores representables un cadrado é cocartesiano se, e só se, é un cadrado cocartesiano no sentido habitual da teoría de categorías, tamén chamado *pushout* (véxase [R, Definition 3.1.23]). No caso de derivadores homotópicos ou de derivadores en categorías modelo o concepto de cadrado cocartesiano da definición previa redúcese a cadrados cocartesianos derivados ou cadrados cocartesianos homotópicos, [Gr2, Example 8.9]. Analogamente ocorre para o caso cartesiano de xeito dual.

**Definición 2.2.7.** [Gr1, Definition 3.16] Para un derivador punteado  $\mathcal{D}$ , denominaremos *functor suspensión*, e denotarémolo por  $\Sigma$ , á composición:

$$\Sigma: \mathcal{D}(e) \xrightarrow{00_\Gamma^*} \mathcal{D}(\Gamma) \xrightarrow{i_\Gamma!} \mathcal{D}(\square) \xrightarrow{11_\square^*} \mathcal{D}(e)$$

sendo  $00_\Gamma: e \rightarrow \Gamma$  a inclusión do obxecto de  $e$  no punto  $(0,0)$  do diagrama  $\Gamma$  e sendo  $11_\square: e \rightarrow \square$  a inclusión do obxecto de  $e$  no punto  $(1,1)$  do diagrama  $\square$ .

Denotaremos por  $\Omega$  ao *functor espazo de lazos* definido como a composición:

$$\Omega: \mathcal{D}(e) \xrightarrow{11_\sqcup!} \mathcal{D}(\sqcup) \xrightarrow{i_\sqcup^*} \mathcal{D}(\square) \xrightarrow{00_\square^*} \mathcal{D}(e)$$

sendo  $11_\sqcup: e \rightarrow \sqcup$  a inclusión do obxecto de  $e$  no punto  $(1,1)$  do diagrama  $\sqcup$  e sendo  $00_\square: e \rightarrow \square$  a inclusión do obxecto de  $e$  no punto  $(0,0)$  do diagrama  $\square$ .

Para calquera derivador punteado, o functor suspensión é adxunto pola esquerda do functor de lazos,  $\Sigma \dashv \Omega$ , véxase [Gr1, Proposition 3.17].

É evidente que a motivación desta definición é puramente topolóxica: para un espazo topolóxico punteado  $X$ , a suspensión constrúese tomando o cadrado cocartesiano categórico do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & CX \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX & \dashrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

sendo as frechas as inclusións canónicas de  $X$  no cono de  $X$ ,  $CX$ . A Definición 2.2.7 responde precisamente a este procedemento. Do mesmo xeito, seguindo os procedementos topolóxicos habituais, podemos definir os funtores cono e fibra:

**Definición 2.2.8.** [Gr1, Definition 3.18] Denotemos por  $\mathbf{2}_\Gamma: \mathbf{2} \rightarrow \Gamma$  a inclusión horizontal de  $\mathbf{2}$  en  $\Gamma$  e por  $\mathbf{2}_\lrcorner: \mathbf{2} \rightarrow \lrcorner$  a inclusión vertical de  $\mathbf{2}$  en  $\lrcorner$ . Para un derivador punteado  $\mathcal{D}$ , o *functor cono* que denotaremos por  $\mathbf{C}$  é o definido pola composición:

$$\mathbf{C}: \mathcal{D}(\mathbf{2}) \xrightarrow{\mathbf{2}_\Gamma^*} \mathcal{D}(\Gamma) \xrightarrow{i_\Gamma!} \mathcal{D}(\square) \xrightarrow{\mathbf{2}_\lrcorner^*} \mathcal{D}(\mathbf{2})$$

Á súa vez,  $\mathbf{F}$  será o *functor fibra* definido como a composición:

$$\mathbf{F}: \mathcal{D}(\mathbf{2}) \xrightarrow{\mathbf{2}_\lrcorner!} \mathcal{D}(\lrcorner) \xrightarrow{i_\lrcorner^*} \mathcal{D}(\square) \xrightarrow{\mathbf{2}_\Gamma^*} \mathcal{D}(\mathbf{2})$$

No caso de ser  $\mathcal{D}$  un derivador punteado, tense a adxunción  $\mathbf{C} \dashv \mathbf{F}$  entre o functor cono e o functor fibra da definición previa, véxase [Gr1, Proposition 3.20].

**Notación:** en adiante, denotaremos por  $\mathbf{C}: \mathcal{D}(\mathbf{2}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{e})$  o functor obtido avaliando no punto 1 de  $\mathbf{2}$  e  $\mathbf{F}: \mathcal{D}(\mathbf{2}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{e})$  o correspondente á avaliación en 0, sempre que o abuso de notación non dea lugar a confusión.

A razón de presentalos deste xeito é, por unha banda, comprobar a vinculación da teoría de derivadores con conceptos e procedementos de construción topolóxica; á vez que destacar estas nocións polo importante papel que terán na estrutura triangulada inducida polos derivadores estables, como veremos na seguinte sección.

## Estabilidade dos derivadores

Nesta parte do capítulo definiremos o concepto de estabilidade para un derivador forte. Como se apunta en [Gr1, inicio de §4.1], a idea de estabilidade inspírase en certa maneira nos conceptos de categoría modelo estable ou  $\infty$ -categoría estable, de xeito que o que se pretende é engadir unha “condición de aditividade” á versión punteada. Unha das consecuencias desta condición será que o par formado pola suspensión e o espazo de lazos establecen unha equivalencia:

$$(\Sigma, \Omega): \mathcal{D}(\mathbf{e}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathbf{e}).$$

A noción de estabilidade foi introducida por Maltzinotis en [Mal] a base dunha combinación dos axiomas de derivadores de Grothendieck, véxase [G1]; e dos sistemas triangulados de categorías de diagramas de Franke, expostos en [Fra]. Os detalles históricos en referencia a esta definición poden atoparse no artigo [CN] de Cisinski e Neeman.

**Definición 2.2.9.** [Gr1, Definition 4.1] Sexa  $\mathcal{D}$  un derivador forte (Der5). Diremos que  $\mathcal{D}$  é *estable* se verifica as seguintes condicións:

- i)  $\mathcal{D}$  é punteado e
- ii) en  $\mathcal{D}(\square)$  un cadrado é cocartesiano homotópico se, e só se, é cartesiano homotópico, ou o que é o mesmo, todo cadrado cartesiano ou cocartesiano homotópico é bicartesiano homotópico.

O principal interese dos derivadores estables é que canonicamente toman valores en categorías trianguladas. Un derivador estable  $\mathcal{D}$  dota automaticamente ás categorías  $\mathcal{D}(\mathbf{l})$  dunha estrutura triangulada sen necesidade de realizar ningún tipo de elección, pois o derivador determina de xeito natural os triángulos distinguidos.

En [Gr1, inicio de §4.2] pódense consultar os detalles do orixe desta estrutura triangulada. Sen entrar en todos os pormenores, a idea é similar á utilizada para definir os funtores suspensión e espazo de lazos, así como o cono e a fibra: trátase de traducir as construcións topolóxicas á linguaxe de derivadores para xeneralizar estes conceptos. De feito, a suspensión da categoría triangulada inducida será precisamente a xa establecida na Definición 2.2.7. Neste caso ademais a clave está en combinar esas construcións coa propiedade de que,

no caso dos derivadores estables, estamos a esixir aos cadrados cartesianos ser tamén cocartesianos e viceversa.

Pensemos no caso  $\mathbf{l} = \mathbf{e}$  por simplicidade, podendo xeneralizar esta construción para calquera  $\mathbf{l}$ . Mantendo a notación de [Gr1, §4.2], denotaremos por  $\mathbf{K}$  a categoría definida polo conxunto parcialmente ordenado

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & \longrightarrow & (1, 0) & \longrightarrow & (2, 0) \\ & & \downarrow & & \\ & & (0, 1) & & \end{array}$$

Definiremos o functor  $T$  como a composición

$$T: \mathcal{D}(\mathbf{2}) \xrightarrow{i_{0*}} \mathcal{D}(\mathbf{K}) \xrightarrow{i_{1!}} \mathcal{D}(\mathbf{3} \times \mathbf{2}),$$

sendo  $\mathbf{3}$  a categoría asociada ao conxunto parcialmente ordenado  $\{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2\}$ ,  $i_0: \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{K}$  a inclusión na frecha horizontal esquerda e  $i_1: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{3} \times \mathbf{2}$  a inclusión obvia.

Tomemos  $f$  en  $\mathcal{D}(\mathbf{2})$  e denotemos o seu diagrama subxacente como  $X \rightarrow Y$ . Construindo agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T(f)_{(2,1)} \end{array} \quad (2.2.3)$$

pode comprobarse que este pertence á imaxe esencial de

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}) \xrightarrow{00_{\Gamma*}} \mathcal{D}(\Gamma) \xrightarrow{i_{\Gamma!}} \mathcal{D}(\square)$$

sendo  $00_{\Gamma}: \mathbf{e} \rightarrow \Gamma$  a mesma frecha que na Definición 2.2.7. Obtense así o isomorfismo canónico  $T(f)_{(2,1)} \cong \Sigma X$ .

De xeito análogo, partindo do diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T(f)_{(1,1)} \end{array} \quad (2.2.4)$$

pode comprobarse que este xace na imaxe esencial de

$$\mathcal{D}(\mathbf{2}) \xrightarrow{2_{\Gamma^*}} \mathcal{D}(\Gamma) \xrightarrow{i_{\Gamma^!}} \mathcal{D}(\square)$$

sendo  $2_{\Gamma} : \mathbf{2} \rightarrow \Gamma$  o morfismo establecido na Definición 2.2.8. Pode deducirse entón que existe un isomorfismo canónico entre  $T(f)_{(1,1)} \cong \mathbf{C}(f)$ .

Logo o diagrama subxacente correspondente a  $T(f)$  sería

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{C}(f) & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

Para cada  $f$  de  $\mathcal{D}(\mathbf{2})$  podemos restrinxir  $T(f)$  á categoría inducida polo conxunto parcialmente ordenado formado por catro obxectos e tres frechas horizontais,  $\{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4\}$  e tomar posteriormente o diagrama na categoría subxacente  $\mathcal{D}(\mathbf{e})$ . Deste xeito obteremos en  $\mathcal{D}(\mathbf{e})$  un triángulo que denotaremos por  $T_f$

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow \mathbf{C}(f) \longrightarrow \Sigma X. \quad (2.2.5)$$

**Teorema 2.2.10.** [Gr1, Theorem 4.16] *Sexa  $\mathcal{D}$  un derivador estable. A categoría  $\mathcal{D}(\mathbf{e})$  ten unha estrutura triangulada tomando como functor suspensión o functor  $\Sigma : \mathcal{D}(\mathbf{e}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{e})$  da Definición 2.2.7 e como triángulos distinguidos aqueles triángulos que son isomorfos a un triángulo  $T_f$  do tipo (2.2.5), para algún  $f$  en  $\mathcal{D}(\mathbf{2})$ .*

Sendo  $\mathcal{D}$  un derivador estable, esta construción pode xeneralizarse para calquera categoría  $\mathbf{l}$  pequena utilizando o *derivador desprazado*  $\mathcal{D}^{\mathbf{l}} : \mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CAT}$ , definido de xeito que para unha categoría  $\mathbf{J}$  se teña  $\mathcal{D}^{\mathbf{l}}(\mathbf{J}) = \mathcal{D}(\mathbf{l} \times \mathbf{J})$  e para un functor  $u : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}'$  devolva  $\mathcal{D}^{\mathbf{l}}(u) = (\text{id}_{\mathbf{l}} \times u)^*$ . A definición de *prederivador desprazado* pode atoparse en [Gr2, Example 7.30] e a proba de que o 2-functor así definido a partir dun derivador é á súa vez un derivador pode consultarse en [Gr2, Proposition 7.32].

**Corolario 2.2.11.** *Sexa  $\mathcal{D}$  un derivador estable e  $\mathbf{l}$  unha categoría pequena. A categoría  $\mathcal{D}(\mathbf{l})$  ten unha estrutura triangulada.*

*Demostración.* Se  $\mathcal{D}$  é un derivador estable entón tamén o é o derivador desprazado  $\mathcal{D}^l$ , por [Gr1, Proposition 4.3]. Como ademais temos que  $\mathcal{D}^l(e) = \mathcal{D}(l)$  por [Gr2, Example 7.30], estamos nas hipóteses do Teorema 2.2.10, concluindo a proba.  $\square$

## CAPÍTULO 3

---

# Derivador homolóxico

---

No capítulo anterior presentamos unha introdución á teoría de derivadores, aportando un punto de vista orientado á súa utilización en relación con categorías de complexos. Neste capítulo presentaremos unha descrición do derivador asociado ás categorías derivadas, que nomearemos *derivador homolóxico*.

Keller demostra en [Ke2] que a estrutura da categoría derivada para complexos limitados define un derivador con dominio en categorías esencialmente finitas e Cisinski proba en [C1] que calquera categoría modelo completa e co-completa define un derivador.

O obxectivo deste capítulo será dar unha descrición explícita do derivador asociado a  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ , sen restricións nas categorías de índices, sendo  $\mathbf{A}$  unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos. Ademais, mostrarase a súa utilidade para o cálculo de límites e colímites homotópicos na devandita categoría.

### 3.1 Definición do derivador homolóxico

Recordemos que  $\mathbf{A}$  vén denotando unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos. Partindo da categoría de complexos de  $\mathbf{A}$  podemos construír a categoría derivada asociada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  invertendo os cuasi-isomorfismos, como explicamos no capítulo 1. Esta construción proporciona un 2-functor estrito, é dicir, un prederivador

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}}: \text{Cat}^{\text{op}} \longrightarrow \text{CAT}$$

que denominaremos *prederivador homolóxico* de  $\mathbf{A}$ . Este prederivador está definido como segue: para unha categoría pequena  $\mathbf{I}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{I}) := \mathbf{D}(\mathbf{A}^{\mathbf{I}})$ ; e para un

functor entre categorías pequenas  $u: I \rightarrow J$ , terase  $\mathcal{D}_A(u) := u^*$ , onde o functor  $u^*$  segue a ser a precomposición co functor  $u$  como no caso do prederivador  $\mathcal{C}_A$ .

Obsérvese que dado un functor  $u: I \rightarrow J$ , o functor  $u^*: \mathcal{C}_A(J) \rightarrow \mathcal{C}_A(I)$  definido a través da precomposición se estende ás categorías derivadas correspondentes por ser un functor exacto.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_A(I) & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{C}_A(J) \\ \downarrow Q_I & & \downarrow Q_J \\ \mathcal{D}_A(I) & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{D}_A(J) \end{array}$$

Deste xeito, sabemos ademais que este coincide cos seus derivados pola dereita e pola esquerda. Ocorre o mesmo coas transformacións naturais asociadas, estas pasan á categoría derivada por razóns análogas.

O noso seguinte obxectivo será comprobar que o prederivador  $\mathcal{D}_A$  é un derivador. Verifiquemos entón os catro axiomas recollidos na Definición 2.2.2. Comecemos coa proba do primeiro deles, Der1, aproveitando a estrutura das categorías de complexos e a súa relación coas categorías derivadas asociadas.

### Primeiro axioma de derivador

**Proposición 3.1.1.** *O 2-functor  $\mathcal{D}_A$  leva coprodutos en produtos.*

*Demostración.* O 2-functor  $\mathcal{C}_A$  envía coprodutos en produtos por ser un derivador representable. Ademais, para calquera familia de categorías pequenas  $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , a equivalencia

$$\mathbf{c}\left(A \coprod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{c}\left(A^{I_\lambda}\right)$$

conserva cuasi-isomorfismos, polo que induce unha equivalencia entre as categorías

$$\mathbf{D}\left(A \coprod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{D}\left(A^{I_\lambda}\right).$$

Ademais, para o caso da categoría inicial  $\emptyset$  pódese deducir que a categoría  $\mathcal{D}(\emptyset)$  é trivial, do feito de que  $\mathcal{C}(\emptyset)$  tamén o é.  $\square$

### Segundo axioma de derivador

Dada  $\mathcal{I}$  unha categoría pequena, recordemos da Definición 2.2.1 a avaliación nun obxecto de  $\mathcal{I}$ . Cada obxecto  $i$  de  $\mathcal{I}$  pode pensarse como un functor  $i: \mathbf{e} \rightarrow \mathcal{I}$ , que á súa vez define un functor  $i^*: \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\mathbf{e})$ . Dados  $F$  e  $G$  en  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I})$  teremos  $F_i = i^*F$  e  $G_i = i^*G$ ; e para un morfismo  $f: F \rightarrow G$  en  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I})$ , denotaremos  $f_i = i^*f$  a frecha  $f_i: F_i \rightarrow G_i$ .

Nas demostracións dos seguintes axiomas será clave a existencia de resolucións dentro das categorías  $\mathbf{C}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$ , probada no Teorema 2.1.9, que nos permitirán tomar representantes dos morfismos de  $\mathbf{D}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$  en  $\mathbf{C}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$ . Desta forma poderemos aproveitar a condición de derivador de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  para probar a de  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ .

**Proposición 3.1.2.** *Un morfismo  $f: F \rightarrow G$  en  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I})$  é un isomorfismo se, e só se,  $f_i: F_i \rightarrow G_i$  é un isomorfismo en  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(\mathbf{e})$  para calquera  $i$  de  $\mathcal{I}$ .*

*Demostración.* Por unha banda, se  $f$  é un isomorfismo, entón todos os  $f_i$  herdán esta condición:  $f_i := i^*f$  son composición dun isomorfismo e un functor calquera, que conserva isomorfismos por definición. Para a implicación contraria (despois de tomar as resolucións apropiadas cuxa existencia temos garantida polo Teorema 2.1.9), podemos representar  $f: F \rightarrow G$  en  $\mathbf{D}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$  por un morfismo de diagramas de complexos, é dicir, por un morfismo en  $\mathbf{C}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$ . Como  $i^*$  é un functor exacto, e conmuta coa homoloxía pola Proposición 1.1.6, se todos os  $f_i$  son cuasi-isomorfismos entón tamén o será  $f$ , concluindo a proba.  $\square$

### Terceiro axioma de derivador

Sexa  $u: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  un functor entre categorías pequenas, ou o que é o mesmo, un cambio na forma do diagrama. Para probar Der3 precisaremos atopar adxuntos para cada  $u^*: \mathbf{D}(\mathcal{A}^{\mathcal{J}}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$ . Os nosos candidatos son os funtores derivados dos adxuntos na categoría de complexos do functor  $u^*: \mathbf{C}(\mathcal{A}^{\mathcal{J}}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$ , definidos na Proposición 2.1.11.

Se no caso do derivador  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  se tiña que os adxuntos eran as extensións de Kan na categoría ambiente, é natural que neste caso os adxuntos busca-

dos tamén o sexan. Os funtores derivados pola esquerda e pola dereita están definidos como extensións de Kan, o que é coherente con este punto de vista.

A diferenza do functor  $u^*: \mathbf{C}(A^J) \rightarrow \mathbf{C}(A^I)$ , os funtores  $u_!$  e  $u_*$  non son exactos. A existencia do functor derivado pola dereita de  $u_*: \mathbf{C}(A^I) \rightarrow \mathbf{C}(A^J)$ ,  $\mathbf{R}u_*$ , séguese gracias á existencia de resolucións  $q$ -infectivas en  $\mathbf{C}(A^I)$ , garantida polo Teorema 2.1.9, e á aplicación do Corolario 1.4.15. De xeito análogo, podemos falar do functor derivado pola esquerda de  $u_!: \mathbf{C}(A^I) \rightarrow \mathbf{C}(A^J)$ ,  $\mathbf{L}u_!$ , apelando á existencia de resolucións  $q$ -proyectivas e ao Corolario 1.4.17. Recordemos ademais que unha  $\Delta$ -adxunción é unha adxunción onde a unidade, ou equivalentemente a counidade, é un  $\Delta$ -functor, véxase [Li, Lemma-Definition 3.3.1].

Feitas estas aclaracións, estamos en condicións de probar Der3 para o noso prederivador  $\mathcal{D}_A$ .

**Proposición 3.1.3.** *Para un functor  $u: I \rightarrow J$ , existen  $\Delta$ -adxuncións*

$$\mathbf{L}u_! \dashv u^* \dashv \mathbf{R}u_*$$

que responden ao seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{L}u_! & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{D}_A(I) & \xleftarrow{u^*} & \mathcal{D}_A(J) \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathbf{R}u_* & \end{array}$$

*Demostración.* Para probar este resultado é suficiente con construír a unidade e a counidade das adxuncións e comprobar que verifican as identidades triangulares presentadas en [ML, Ch. 4, Theorem 2]. Para establecer a primeira das adxuncións,  $\mathbf{L}u_! \dashv u^*$ , definamos as correspondentes unidade e a counidade

$$\eta_I: \text{id} \longrightarrow u^* \mathbf{L}u_!$$

$$\varepsilon_I: \mathbf{L}u_! u^* \longrightarrow \text{id}$$

Para  $F$  en  $\mathcal{D}_A(J)$ , sexa  $P_{u^*F} \xrightarrow{\sim} u^*F$  unha resolución  $q$ -proyectiva. Definiremos a candidata a counidade  $\varepsilon_I$  sobre  $F$  como a composición

$$\varepsilon_I(F): \mathbf{L}u_! u^* F \xrightarrow{\sim} u_! P_{u^*F} \longrightarrow u_! u^* F \xrightarrow{\varepsilon_C} F,$$

sendo  $\varepsilon_{\mathcal{C}}: u_! u^* \rightarrow \text{id}$  a counidade non derivada, é dicir, a counidade da adxunción  $u_! \dashv u^*$  do derivador  $\mathcal{C}_A$ . O primeiro isomorfismo vén dado pola relación entre funtores derivados pola esquerda e obxectos  $q$ -proyectivos na categoría derivada, véxase o Corolario 1.4.17; e a frecha intermedia é a actuación do functor  $u_!$  sobre o morfismo de complexos correspondente á resolución  $q$ -proyectiva.

Analogamente definiremos a unidade  $\eta_!$  sobre un obxecto  $G$  de  $\mathcal{D}_A(\mathbb{I})$  como

$$\eta_!(G): G \xleftarrow{\sim} P_G \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}} u^* u_! P_G \xrightarrow{\sim} u^* \mathbf{L}u_! G,$$

onde  $\eta_{\mathcal{C}}: \text{id} \rightarrow u^* u_!$  denota a unidade non derivada da adxunción  $u_! \dashv u^*$  para o derivador  $\mathcal{C}_A$ . Recordemos que o functor  $u^*$  conserva cuasi-isomorfismos, por ser exacto.

Para demostrar que  $\mathbf{L}u_! \dashv u^*$ , con unidade e counidade asociadas as definidas previamente, debemos comprobar que as composicións

$$u^* \xrightarrow{\eta u^*} u^* \mathbf{L}u_! u^* \xrightarrow{u^* \varepsilon} u^* \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{L}u_! \xrightarrow{\mathbf{L}u_! \eta} \mathbf{L}u_! u^* \mathbf{L}u_! \xrightarrow{\mathbf{L}u_! \varepsilon} \mathbf{L}u_! \quad (3.1.2)$$

resulten ser a identidade.

Sexan de novo  $F$  un obxecto de  $\mathcal{D}_A(\mathbb{J})$  e  $G$  un obxecto de  $\mathcal{D}_A(\mathbb{I})$ , con resolucións  $q$ -proyectivas  $P_F \xrightarrow{\sim} F$  e  $P_G \xrightarrow{\sim} G$ . Vexamos primeiro que a composición (3.1.1) é efectivamente a identidade. Sexa  $P_{u^* F} \xrightarrow{\sim} u^* F$  unha resolución  $q$ -proyectiva e consideremos o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} u^* F & \xrightarrow{\text{vía } \eta_{\mathcal{C}}} & u^* u_! u^* F & \xrightarrow{\text{vía } \varepsilon_{\mathcal{C}}} & u^* F \\ \uparrow \wr & & \uparrow & & \parallel \\ u^* P_F & \xrightarrow{\text{vía } \eta_{\mathcal{C}}} & u^* u_! P_{u^* F} & & \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \parallel \\ u^* F & \xrightarrow{\text{vía } \eta_!} & u^* \mathbf{L}u_! u^* F & \xrightarrow{\text{vía } \varepsilon_!} & u^* F \end{array}$$

A fila de arriba resulta ser a identidade, por ser a composición correspondente á adxunción non derivada. Polo tanto a fila de abaixo tamén será a identidade, que se corresponde con (3.1.1) aplicado a  $F$ .

Para ver que a composición (3.1.2) é a identidade, comprobemos que o seguinte diagrama é conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 u_!P_G & \xrightarrow{\text{vía } \eta_{\mathbf{C}}} & u_!u^*u_!P_G & \xrightarrow{\text{vía } \varepsilon_{\mathbf{C}}} & u_!P_G \\
 \downarrow \wr & & \uparrow & & \downarrow \wr \\
 & & u_!P_{u^*u_!P_G} & & \\
 & & \downarrow \wr \quad \rho & & \\
 \mathbf{L}u_!G & \xrightarrow{\text{vía } \eta_!} & \mathbf{L}u_!(u^*\mathbf{L}u_!G) & \xrightarrow{\text{vía } \varepsilon_!} & \mathbf{L}u_!G
 \end{array}$$

sendo  $\rho$  o cuasi-isomorfismo definido pola composición

$$u_!P_{u^*u_!P_G} \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}u_!(u^*u_!P_G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}u_!(u^*\mathbf{L}u_!G)$$

onde o primeiro isomorfismo vén dado por tomar unha resolución  $q$ -proyectiva  $P_{u^*u_!P_G} \xrightarrow{\sim} u^*u_!P_G$ . De novo, como a fila superior é a identidade, isto obriga a que tamén o sexa a inferior.

Pasemos agora á segunda das adxuncións,  $u^* \dashv \mathbf{R}u_*$ , que de novo definiremos a través da unidade e a counidade asociadas que denotaremos por

$$\eta_*: \text{id} \longrightarrow \mathbf{R}u_*u^*$$

$$\varepsilon_*: u^*\mathbf{R}u_* \longrightarrow \text{id}$$

Sexa  $G \xrightarrow{\sim} I_G$  unha resolución  $q$ -injectiva dun obxecto  $G$  en  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{l})$ . Defina-  
mos  $\varepsilon_*$  sobre  $G$  como a composición

$$\varepsilon_*(G): u^*\mathbf{R}u_*G \xrightarrow{\sim} u^*u_*I_G \xrightarrow{\varepsilon_{\mathbf{C}}} I_G \xleftarrow{\sim} G,$$

na que  $\varepsilon_{\mathbf{C}}: u_*u^* \rightarrow \text{id}$  denota a counidade non derivada.

Para  $F$  en  $\mathcal{D}_A(J)$ , escollamos unha resolución  $q$ -infectiva  $u^*F \xrightarrow{\sim} l_{u^*}F$ . A partir destes morfismos podemos definir a transformación natural  $\eta_*$  sobre  $F$  como a composición

$$\eta_*(F): F \xrightarrow{\eta c} u_*u^*F \longrightarrow u_*l_{u^*}F \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}u_*u^*F.$$

Para comprobar agora que as seguintes composicións son a identidade,

$$u^* \xrightarrow{u^*\eta} u^*\mathbf{R}u_*u^* \xrightarrow{\varepsilon u^*} u^* \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{R}u_* \xrightarrow{\eta \mathbf{R}u_*} \mathbf{R}u_*u^*\mathbf{R}u_* \xrightarrow{\mathbf{R}u_*\varepsilon} \mathbf{L}R u_* \quad (3.1.4)$$

e probar así a existencia da adxunción desexada, basta con argumentar dualmente aos casos (3.1.1) e (3.1.2).

Por último restaría só comprobar que a unidade e a counidade de cada unha das adxuncións é  $\Delta$ -functorial. Por [Li, Lemma-Definition 3.3.1] é suficiente comprobar a compatibilidade dos funtores involucrados co functor translación, a cal está clara por como están definidos os funtores involucrados, garantindo así que as adxuncións son isomorfismos de  $\Delta$ -funtores.  $\square$

Como xa introducimos no capítulo 2, este terceiro axioma de derivador proporciona extensións de Kan “homotópicas” que podemos entender como unha especie de límites débiles functoriais. Se poñemos de novo o foco no caso do functor canónico  $c: l \rightarrow e$  obsérvase que

$$\mathbf{L}c_! = \mathbf{L}\lim_{\rightarrow} \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{R}c_* = \mathbf{R}\lim_{\leftarrow} \quad (3.1.6)$$

Así, para  $c: l \rightarrow e$  poderíamos reescribir a Proposición 3.1.3 obtendo a seguinte secuencia de adxuncións  $\Delta$ -functoriais

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{L}\lim_{\rightarrow} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{D}_A(l) & \xleftarrow{c^*} & \mathcal{D}_A(e) \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathbf{R}\lim_{\leftarrow} & \end{array} \quad (3.1.7)$$

Obsérvese que neste caso particular a categoría subxacente é a propia categoría derivada  $\mathcal{D}_A(\mathbf{e}) = \mathbf{D}(A)$ . Así visto, os funtores  $\mathbf{L}\lim$  e  $\mathbf{R}\lim$  xogan os papeis de límite e colímite homotópicos na categoría derivada, respectivamente.

### Frechas de Beck-Chevalley

Antes de pasar ao último dos axiomas de derivador introduciremos a condición de Beck-Chevalley. Consideremos un cadrado conmutativo (salvo isomorfismo) de funtores:

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & J' \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array} \quad (3.1.8)$$

onde os funtores  $u^*$  e  $u'^*$  teñen adxuntos a dereita e esquerda:

$$\begin{aligned} u_! &\dashv u^* \dashv u_* \\ u'_! &\dashv u'^* \dashv u'_* \end{aligned}$$

A través do isomorfismo natural  $v'^* u^* \xrightarrow{\sim} u'^* v^*$  podemos realizar composicións formando as seguintes cadeas de morfismos naturais

$$\begin{aligned} u'_! v'^* &\xrightarrow{\text{vía } \eta} u'_! v'^* u^* u_! \xrightarrow{\sim} u'_! u'^* v^* u_! \xrightarrow{\text{vía } \varepsilon} v^* u_! \\ v^* u_* &\xrightarrow{\text{vía } \eta} u'_* u'^* v^* u_* \xrightarrow{\sim} u'_* v'^* u^* u_* \xrightarrow{\text{vía } \varepsilon} u'_* v'^* \end{aligned}$$

sendo  $\eta$  e  $\varepsilon$  a unidade e counidade correspondentes en cada caso. Deste xeito, denominaremos *transformacións naturais de Beck-Chevalley* aos morfismos obtidos por composición

$$\begin{aligned} u'_! v'^* &\longrightarrow v^* u_! \\ v^* u_* &\longrightarrow u'_* v'^* \end{aligned}$$

No caso de que estes morfismos sexan isomorfismos diremos que se cumpre a condición de Beck-Chevalley.

Un estudo en profundidade destas frechas pode atoparse en [Gr1, Section 1.2], baixo o nome de “*calculus of mates*”; ou tamén pode consultarse [Li, Proposition 3.7.2].

### Cuarto axioma de derivador

Para o noso seguinte obxectivo, probar o que o derivador  $\mathcal{D}_A$  verifica Der4, será importante un caso particular do diagrama conmutativo precedente (3.1.8) involucrando as categorías *slice* e *coslice*, como veremos na Proposición 3.1.10. Como paso previo a probar o cuarto axioma, veremos que o functor  $\pi_j^*$  conserva obxectos  $q$ -proxectivos, no Lema 3.1.7; e que o  $\varpi_j^*$  conserva  $q$ -inxectivos, no Lema 3.1.8.

Na demostración do Lema 3.1.7 utilizaremos o concepto de *fibra discreta*. Máis concretamente, para o functor esquecemento  $\pi_j: I/j \rightarrow I$  asociado á categoría *slice*  $I/j$  (Definición 2.1.13) tomaremos a fibra discreta dun obxecto  $i$  de  $I$ , que denotaremos cunha barra  $\bar{\pi}_j^{-1}(i)$  para distinguila da fibra categórica usual. Esta subcategoría é a definida polos obxectos da preimaxe de  $i$ , tomando como morfismos soamente as identidades. Ademais, nesta proba utilizaremos tamén o concepto de subcategoría e functor cofinais.

**Definición 3.1.4.** [SGA 4<sub>1</sub>, I, Définition 2.7] Unha *categoría conexa* é unha categoría non baleira na cal dous obxectos calquera están conectados por unha secuencia de frechas, non impondo ningunha condición sobre a dirección das mesmas.

**Definición 3.1.5.** Un functor  $F: C \rightarrow D$  é *final* se para cada obxecto  $d$  de  $D$  a categoría *coslice*  $d \setminus C$  asociada a  $F$  é conexa. Dualmente, diremos que un functor  $F: C \rightarrow D$  é *cofinal* se a categoría *slice*  $C/d$  asociada a  $F$  é conexa.

Diremos que unha subcategoría  $C$  dunha categoría  $D$  é unha *subcategoría final* se o functor inclusión  $C \hookrightarrow D$  é final e, de xeito dual, diremos que  $C$  é unha subcategoría *cofinal* de  $D$  se o functor  $C \hookrightarrow D$  é cofinal.

**Lema 3.1.6.** *Todo functor adxunto pola dereita é un functor final.*

*Demostración.* Sexa  $R: C \rightarrow D$  un functor adxunto pola dereita doutro functor  $L: D \rightarrow C$ , é dicir,  $L \dashv R$ . Para ver que  $R$  é final comprobaremos que para calquera obxecto  $d$  en  $D$  a categoría *coslice*  $d \setminus C$  asociada a  $R$  é conexa. En primeiro lugar, é non baleira xa que contén ao obxecto  $(L(d), d \rightarrow RL(d))$ , que definimos a través da unidade da adxunción  $\text{id}_D \rightarrow RL$ .

Para ver que é conexa, tomemos dous obxectos arbitrarios  $(c, f: d \rightarrow R(c))$  e  $(c', g: d \rightarrow R(c'))$ . Pola propiedade universal da factorización das adxuncións sabemos que existen frechas  $\tilde{f}: L(d) \rightarrow c$  e  $\tilde{g}: L(d) \rightarrow c'$ , tales que o seguinte diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & d & \\
 f \swarrow & \downarrow & \searrow g \\
 & RL(d) & \\
 R(\tilde{f}) \swarrow & & \searrow R(\tilde{g}) \\
 R(c) & & R(c')
 \end{array}$$

Recordemos que, como explicamos na sección 2.1, as frechas da categoría  $d \setminus \mathbf{C}$  son frechas de  $\mathbf{C}$  que nos permiten movernos entre descendentes de  $d$ . Logo podemos conectar estes dous obxectos a través das frechas  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$

$$\begin{array}{ccc}
 & & (c, f: d \rightarrow R(c)) \\
 & \tilde{f} \nearrow & \\
 (L(d), d \rightarrow RL(d)) & & \\
 & \tilde{g} \searrow & \\
 & & (c', g: d \rightarrow R(c'))
 \end{array}$$

o que demostra que a categoría é conexa. Concluimos así que efectivamente o functor  $R$  é final.  $\square$

Procedamos entón a presentar o primeiro dos lemas mencionados e comprobar que o functor  $\pi_j^*$  conserva obxectos  $q$ -proyectivos, algo que será esencial para operar con resoluciónns  $q$ -proyectivas e que se conserve esta condición.

**Lema 3.1.7.** *Para un functor  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  e un obxecto  $j$  de  $\mathbf{J}$ , consideremos  $\mathbf{I}/j$  a categoría slice asociada ao functor  $u$  e o functor esquecemento  $\pi_j: \mathbf{I}/j \rightarrow \mathbf{I}$  da Definición 2.1.13. Entón o functor  $\pi_j^*$  conserva obxectos  $q$ -proyectivos.*

*Demostración.* Para ver que  $\pi_j^*$  conserva obxectos  $q$ -proyectivos e, dado que temos a adxunción  $\pi_j^* \dashv \pi_{j*}$ , bastará con probar que  $\pi_{j*}$  é un functor exacto,

véxase o dual de [Li, (2.4.5.3)]. Ademais é suficiente probar este feito punto a punto, pois traballaremos nas categorías de complexos.

Sexa  $i \setminus (I/j)$  a categoría *coslice* asociada ao functor  $\pi_j$  e denotemos por  $\varpi_i: i \setminus (I/j) \rightarrow I/j$  o functor esquecemento, véxase Definición 2.1.14. Observe-mos primeiro que para cada  $F$  de  $\mathcal{C}_A(I/j)$  e cada  $\mathbf{i} = (i, u(i) \rightarrow j)$  de  $I/j$ , temos que

$$\pi_{j*}(F)(\mathbf{i}) = \lim_{\leftarrow}^{i \setminus (I/j)} (F \circ \varpi'_i).$$

Centrémonos agora no indexado do límite precedente e busquemos unha subcategoría con boas propiedades que nos permita cambiar o aspecto do mesmo.

Concretamente, a fibra discreta  $\bar{\pi}_j^{-1}(i)$  do functor  $\pi_j$ , que recordemos que está formada polos obxectos da preimaxe de  $i$  e as identidades, pode identificarse cunha subcategoría de  $i \setminus (I/j)$ . Sexa  $\sigma: \bar{\pi}_j^{-1}(i) \rightarrow i \setminus (I/j)$  o functor fielmente pleno definido en obxectos como

$$(i, u(i) \xrightarrow{\beta} j) \rightsquigarrow (i, u(i) \xrightarrow{\beta} j, i \xrightarrow{\text{id}} i).$$

Realmente o segundo termo debería ser  $((i, u(i) \xrightarrow{\beta} j), i \xrightarrow{\text{id}} i)$ , pois ao ser un obxecto de  $i \setminus (I/j)$  debe estar formado por un obxecto de  $I/j$  e un morfismo de  $I$ ; mais omitiremos a dobre paréntese por simplificar a notación.

Probemos agora que ademais a subcategoría  $\bar{\pi}_j^{-1}(i)$  é cofinal, comprobando que o functor inclusión  $\sigma$  é cofinal. O functor  $\sigma$  posúe adxunto pola dereita: o functor  $\sigma': i \setminus (I/j) \rightarrow \bar{\pi}_j^{-1}(i)$  definido en obxectos como

$$(i', u(i') \xrightarrow{\beta'} j, i \xrightarrow{\gamma} i') \rightsquigarrow (i, u(i) \xrightarrow{u(\gamma)} u(i') \xrightarrow{\beta'} j).$$

Nótese que  $\sigma'\sigma = \text{id}_{\bar{\pi}_j^{-1}(i)}$ . Como todo functor adxunto pola esquerda é cofinal polo resultado dual á Proposición 3.1.6, temos garantido que o functor  $\sigma$  é efectivamente cofinal.

Descríbamos agora o comportamento de  $\pi_{j*}$  sobre as frechas. Para calquera morfismo  $v$  en  $\mathcal{C}_A(I/j)$  podemos escribir:

$$\lim_{\leftarrow}^{i \setminus (I/j)} v \circ \varpi'_i \cong \lim_{\leftarrow}^{\bar{\pi}_j^{-1}(i)} v \circ \varpi'_i \circ \sigma = \prod_{\bar{\pi}_j^{-1}(i)} v(\mathbf{i}) \quad (3.1.9)$$

tendo o primeiro isomorfismo por ser  $\bar{\pi}_j^{-1}(i)$  cofinal e estar nas hipóteses de [ML, Theorem 1, IX.3] e o segundo por ser  $\bar{\pi}_j^{-1}(i)$  unha categoría discreta. Posto que  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  é unha categoría de Grothendieck con xerador proxectivo podemos asegurar que os produtos son exactos en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ , pola Proposición 1.5.5 e o Lema 2.1.7. Utilizando a descrición de (3.1.9) para  $\pi_{j*}$  e tendo en conta a exactitude dos produtos, dedúcese que  $\pi_{j*}$  é exacto e polo tanto o seu adxunto  $\pi_j^*$  conserva  $q$ -proxectivos, como se quería demostrar.  $\square$

**Lema 3.1.8.** *Para un functor  $u: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J}$  e un obxecto  $j$  de  $\mathbf{J}$ , denotemos por  $j \setminus \mathbf{I}$  a categoría coslice asociada ao functor  $u$  e  $\varpi_j: j \setminus \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$  o functor esquecemento correspondente, considerados na Definición 2.1.14. Entón  $\varpi_j^*$  conserva obxectos  $q$ -infectivos.*

*Demostración.* Vexamos agora que  $\varpi_j^*$  conserva  $q$ -infectivos. Pola adxunción  $\varpi_{j!} \dashv \varpi_j^*$  é suficiente con demostrar que  $\varpi_{j!}$  é exacto, por [Li, (2.4.5.3)]; e como no caso anterior argumentaremos punto a punto. Para cada  $F$  en  $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(j \setminus \mathbf{I})$  e cada  $\mathbf{i}$  de  $j \setminus \mathbf{I}$  temos que

$$\varpi_{j!}(F)(\mathbf{i}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (j \setminus \mathbf{I})/i}} (F \circ \pi'_i),$$

onde  $(j \setminus \mathbf{I})/i$  é a categoría *slice* asociada a  $\varpi_j$  e  $\pi'_i: (j \setminus \mathbf{I})/i \rightarrow j \setminus \mathbf{I}$  o functor esquecemento. Razoando dualmente ao caso anterior vemos que ao fibra discreta  $\bar{\varpi}_j^{-1}(i)$  é final en  $(j \setminus \mathbf{I})/i$  a través do functor final inclusión  $\varsigma: \bar{\varpi}_j^{-1}(i) \rightarrow (j \setminus \mathbf{I})/i$ , definido dualmente ao  $\sigma$  previo. Para un morfismo  $w$  en  $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(j \setminus \mathbf{I})$  temos os isomorfismos

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ (j \setminus \mathbf{I})/i}} w \circ \pi'_i \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \bar{\varpi}_j^{-1}(i)}} w \circ \pi'_i \circ \varsigma = \coprod_{\bar{\varpi}_j^{-1}(i)} w(\mathbf{i})$$

polos resultados duais aos previamente citados. Os coprodutos son exactos en  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ , pois xa probamos que esta é unha categoría de Grothendieck na Proposición 1.5.4 e por tanto  $\mathbf{C}(\mathbf{A})$  verifica AB4. Temos entón que o functor  $\varpi_{j!}$  é exacto e por tanto o seu adxunto  $\varpi_j^*$  conserva obxectos  $q$ -infectivos.  $\square$

*Observación 3.1.9.* A presentación desta proba segue a liña da demostración de Der4 en [M, Theorem 6.1.7], mais o contexto neste caso é en certo sentido máis sinxelo.

Unha vez probado este resultado poderemos aplicalo para comprobar que as adxuncións descritas en Der3 se comportan ben a través do cálculo punto a punto. No seguinte resultado probaremos o último dos axiomas de derivador: Der4.

**Proposición 3.1.10.** *Para un functor  $u: I \rightarrow J$  e  $j$  un obxecto de  $J$  consideremos os diagramas de funtores*

$$\begin{array}{ccc} I/j & \xrightarrow{p} & e \\ \pi_j \downarrow & & \downarrow j \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array} \quad \begin{array}{ccc} j \setminus I & \xrightarrow{q} & e \\ \varpi_j \downarrow & & \downarrow j \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

*As transformacións naturais de Beck-Chevalley correspondentes*

$$\mathbf{L}p_! \pi_j^* \longrightarrow j^* \mathbf{L}u_! \quad (3.1.10)$$

$$j^* \mathbf{R}u_* \longrightarrow \mathbf{R}q_* \varpi_j^* \quad (3.1.11)$$

*son isomorfismos.*

*Demostración.* Como  $\mathcal{C}_A$  é un derivador, polo Teorema 2.2.3, sabemos que verifica o axioma Der4. Por tanto existen isomorfismos

$$p_! \pi_j^* \xrightarrow{\sim} j^* u_! \quad (3.1.12)$$

$$j^* u_* \xrightarrow{\sim} q_* \varpi_j^*. \quad (3.1.13)$$

Probemos en primeiro lugar (3.1.10). Sexa  $F$  en  $\mathcal{D}_A(I)$  e  $P_F \xrightarrow{\sim} F$  unha resolución  $q$ -proactiva. Partindo do lado esquerdo da expresión podemos afirmar que

$$\mathbf{L}p_! \pi_j^*(F) \cong \mathbf{L}p_! \pi_j^*(P_F) \cong p_! \pi_j^*(P_F),$$

onde o último isomorfismo canónico vén dado polo feito de que  $\pi_j^*(P_F)$  é tamén  $q$ -proyectivo polo Lema 3.1.7. Tomando agora o lado dereito da expresión (3.1.10):

$$j^*\mathbf{L}u_!(F) \cong j^*\mathbf{L}u_!(P_F) \cong j^*u_!(P_F).$$

Facendo uso do isomorfismo (3.1.12), sabemos que  $p_!\pi_j^*(P_F) \cong j^*u_!(P_F)$  de forma que (3.1.10) queda demostrado.

Vexamos agora o caso (3.1.11). Sexa  $F$  en  $\mathcal{D}_A(\mathbb{1})$  e  $F \xrightarrow{\sim} I_F$  unha resolución  $q$ -infectiva. Por unha banda

$$j^*\mathbf{R}u_*(F) \cong j^*\mathbf{R}u_*(I_F) \cong j^*u_*(I_F)$$

e polo outro lado

$$\mathbf{R}q_*\varpi_j^*(F) \cong \mathbf{R}q_*\varpi_j^*(I_F) \cong q_*\varpi_j^*(I_F),$$

onde o último isomorfismo canónico vén dado polo feito de que  $\varpi_j^*(I_F)$  é tamén  $q$ -infectivo polo Lema 3.1.8. Neste punto estamos en condicións de aplicar o isomorfismo (3.1.13) á resolución  $I_F$ , obtendo  $j^*u_*(I_F) \cong q_*\varpi_j^*(I_F)$  de xeito que queda probado o resultado.  $\square$

*Observación 3.1.11.* Para un  $F$  de  $\mathcal{D}_A(\mathbb{1})$ , usando as notacións introducidas na Definición 2.2.1, temos que  $j^*\mathbf{L}u_!(F) \cong (\mathbf{L}u_!F)_j$  e  $j^*\mathbf{R}u_*(F) \cong (\mathbf{R}u_*F)_j$ . Ademais, na liña da notación previa, os funtores  $p$  e  $q$  poden identificarse co functor  $c$ . Así, como os adxuntos de  $c^*$  son os límites usuais, as fórmulas (3.1.10) e (3.1.11) poden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\varinjlim \pi_j^*(F) &\xrightarrow{\sim} (\mathbf{L}u_!F)_j \\ (\mathbf{R}u_*F)_j &\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\varprojlim \varpi_j^*(F), \end{aligned}$$

respectivamente. Como xa avanzabamos previamente, a idea que transmiten estas fórmulas pode resumirse en que estes límites e colímites derivados se poden calcular punto a punto.

**Teorema 3.1.12.** *Sexa  $A$  unha categoría de Grothendieck con suficientes pro-  
xectivos. O prederivador  $\mathcal{D}_A$  é un derivador que toma valores en  $\mathbf{Cat}$ .*

*Demostración.* Este resultado séguese da proba dos catro axiomas da Defini-  
ción 2.2.2 a través das Proposicións 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.10, respectivamen-  
te.  $\square$

### 3.2 O quinto axioma: derivador forte

Como xa avanzamos no capítulo 2, o caso das categorías de complexos de  
diagramas é especial no senso de que para dúas categorías pequenas calquera  
 $I$  e  $J$ , temos o isomorfismo canónico

$$\mathcal{C}_A(I \times J) = \mathbf{C}(A^{I \times J}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(A^J)^I = \mathcal{C}_A(J)^I.$$

Mais, como xa avanzamos no devandito capítulo, isto non é unha propiedade  
que se cumpra en todo derivador. Con todo, resulta útil na práctica que exista  
unha relación entre estas dúas categorías aínda que sexa algo máis feble. En  
concreto, a expresada na propiedade Der5 da Definição 2.2.4. Tomando o  
functor subxacente  $\mathbf{dia}_{I,J}$  de (2.2.2) correspondente ao derivador  $\mathcal{C}_A$  temos o  
morfismo

$$\mathbf{dia}_{I,J}: \mathcal{C}_A(I \times J) \longrightarrow \mathcal{C}_A(J)^I$$

A partir deste functor podemos construír o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_A(I \times J) & \xrightarrow{\mathbf{dia}_{I,J}} & \mathcal{C}_A(J)^I \\ \downarrow Q & & \downarrow Q^I \\ \mathcal{D}_A(I \times J) & \xrightarrow{\mathbf{dia}_{I,J}} & \mathcal{D}_A(J)^I \end{array} \quad (3.2.1)$$

onde  $Q$  e  $Q^I$  son os funtores de paso ao cociente canónicos. A existencia de  
 $\mathbf{dia}_{I,J}$  está garantida polo feito de que  $Q^I \circ \mathbf{dia}_{I,J}$  leva cuasi-isomorfismos en  
isomorfismos.

Neste caso, para o functor actuando sobre os derivadores asociados á categoría derivada, non obtemos un isomorfismo de categorías como no caso do derivador de complexos, mais si teremos un derivador forte, o que nos aporta información sobre a relación entre os diagramas coherentes e incoherentes.

Recordemos que xa no capítulo 2 denotabamos por  $\mathbf{2}$  a categoría correspondente ao conxunto parcialmente ordenado  $\{0 \rightarrow 1\}$  e que para unha categoría arbitraria  $\mathbf{C}$ , a categoría de funtores  $\mathbf{C}^{\mathbf{2}}$  non é máis que a categoría de frechas de  $\mathbf{C}$ .

Na seguinte proposición probaremos o axioma Der5, Definición 2.2.4, para o derivador homolóxico  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}: \mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CAT}$ , definido na sección anterior. No seu enunciado aparecen dúas categorías que cómpre identificar previamente, para que sexa máis sinxelo detectar que efectivamente son categorías diferentes:

- $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{2} \times \mathbf{J}) = \mathbf{D}(\mathbf{A}^{2 \times \mathbf{J}})$  é a categoría derivada de complexos de frechas entre diagramas da forma  $\mathbf{J}$ ,
- $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{J})^2 = \mathbf{D}(\mathbf{A}^{\mathbf{J}})^2$  é a categoría de frechas na categoría derivada de complexos de diagramas da forma  $\mathbf{J}$ .

A primeira diferenza que se aprecia entre estas categorías é que unha delas é unha categoría de complexos mentres que a outra é unha categoría de frechas. Pero ademais, en relación coa definición do cono, a diferenza é evidente. Como xa adiantamos no capítulo de preliminares, un dos principais inconvenientes das categorías trianguladas é a falta de functorialidade do cono. Para o noso derivador  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ , se tomamos  $\mathbf{J} = \mathbf{e}$  podemos definir o cono como un functor  $C: \mathbf{C}(\mathbf{A}^2) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{A})$ , véxase [Gr2, Example 3.31]. Este induce un functor entre as categorías derivadas  $C: \mathbf{D}(\mathbf{A}^2) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$ , que denotaremos do mesmo xeito. Agora ben, este functor non factoriza en xeral a través de  $\mathbf{dia}_{2,\mathbf{e}}$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{D}(\mathbf{A}^2) & \xrightarrow{C} & \mathbf{D}(\mathbf{A}) \\
 \downarrow \mathbf{dia}_{2,\mathbf{e}} & \nearrow \# & \\
 \mathbf{D}(\mathbf{A})^2 & & 
 \end{array}$$

o que se traduce en que o cono só é unha construción functorial se se define desde os diagramas coherentes. Precisamente, esta propiedade é a que xustifica

a definición do derivador  $\mathcal{D}_A$ , establecendo  $\mathcal{D}_A(1) = \mathbf{D}(A^1)$  de xeito que a construción do cono é functorial.

Mais como xa adiantamos, no caso destas categorías temos unha relación entre diagramas coherentes e incoherentes que vén dada polo carácter forte do derivador  $\mathcal{D}_A$ .

**Proposición 3.2.1.** *O functor subxacente*

$$\mathbf{dia}_{2,J}: \mathcal{D}_A(\mathbf{2} \times J) \rightarrow \mathcal{D}_A(J)^2$$

é pleno e esencialmente sobrexectivo para toda categoría  $J$  en  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$ . É dicir, o derivador  $\mathcal{D}_A$  é forte.

*Demostración.* Probemos primeiro que o functor é esencialmente sobrexectivo. Sexa  $[\phi: F \rightarrow G]$  un obxecto de  $\mathcal{D}_A(J)^2$ . Este obxecto correspóndese en  $\mathcal{C}_A(J)$  cun diagrama da forma

$$\begin{array}{ccc} & F' & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \psi \\ F & & G \end{array}$$

sendo  $\sigma$  un cuasi-isomorfismo. Representaremos  $\phi$  por  $\psi/\sigma$  para poder traballar en  $\mathcal{C}_A(J)$ . Tomando unha resolución  $q$ -inactiva  $G \rightarrow I_G$ , esta induce unha frecha en complexos  $\phi': F \rightarrow I_G$  que é un representante en  $\mathcal{C}_A(J)^2$  da mesma clase de equivalencia que  $[\phi: F \rightarrow G]$ . É dicir, temos que  $\phi = \psi/\sigma = Q^2(\phi')$

$$\begin{array}{ccc} & F' & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \psi \\ F & \overset{\phi'}{\dashrightarrow} & I_G \end{array}$$

Pola equivalencia de categorías en complexos  $\mathbf{dia}_{2,J}$  sabemos que existe  $\phi''$  en  $\mathcal{C}_A(\mathbf{2} \times J)$  cuxa imaxe a través de dita equivalencia é  $\phi'$ , é dicir, tal que

$\mathbf{dia}_{2,J}(\phi'') = \phi'$ . Agora, pola conmutatividade do cadrado (3.2.1) a imaxe de  $Q(\phi'')$  a través de  $\mathbf{dia}_{2,J}$  é necesariamente  $\phi$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \phi'' & & \phi' \\
 \vdots & & \vdots \\
 \mathcal{C}_A(1 \times 2) & \xrightarrow{\mathbf{dia}_{1,2}} & \mathcal{C}_A(1)^2 \\
 \downarrow Q & & \downarrow Q^2 \\
 \mathcal{D}_A(1 \times 2) & \xrightarrow{\mathbf{dia}_{1,2}} & \mathcal{D}_A(1)^2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 Q(\phi'') & & \phi
 \end{array}$$

Atopamos así para todo  $\phi$  unha preimaxe para o morfismo  $\mathbf{dia}_{2,J}$ , probando por tanto que este é esencialmente sobrexectivo.

Resta comprobar que  $\mathbf{dia}_{2,J}$  é pleno, é dicir, que é sobrexectivo nas frechas. Co mesmo procedemento que antes, tomando resolucións  $q$ -infectivas, calquera obxecto en  $\mathcal{D}_A(J)^2$  se pode representar a través dunha frecha de complexos  $[\varphi] = [\varphi: F \rightarrow G]$ , con  $G$  un complexo  $q$ -infectivo. Analogamente, un morfismo en  $\mathcal{D}_A(J)^2$ ,  $\gamma: [\varphi] \rightarrow [\varphi']$  pode representarse como un cadrado de morfismos de complexos

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\varphi} & G \\
 \gamma_1 \downarrow & \dashrightarrow s & \downarrow \gamma_2 \\
 F' & \xrightarrow{\varphi'} & G'
 \end{array} \tag{3.2.2}$$

que conmuta *salvo homotopía*. A homotopía involucrada na conmutatividade queda expresada a través dun morfismo graduado  $s: F[1] \rightarrow G'$  tal que  $\gamma_2\varphi - \varphi'\gamma_1 = ds + sd$ . Denotaremos o morfismo de  $\mathcal{D}_A(J)^2$  como  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, s)$ . Para obter unha preimaxe para  $\gamma$  a través de  $\mathbf{dia}_{2,J}$  é suficiente con atopar un cadrado cuasi-isomorfo ao anterior que conmute en  $\mathcal{C}_A(J) = \mathbf{C}(A^J)$ . Unha vez feito isto poderemos utilizar de novo a equivalencia  $\mathcal{C}_A(J)^2 \cong \mathcal{C}_A(2 \times J)$  de forma que obteñamos a preimaxe desexada en  $\mathcal{D}_A(2 \times J)$ .

Polo Lema 1.2.12, para calquera frecha  $\varphi$  temos unha equivalencia de homotopía  $\alpha: G \rightarrow \text{Cyl}(\varphi)$  entre o seu codominio e o cilindro da frecha. Consideremos entón o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\varphi} & G \\
 \parallel & & \downarrow \alpha \\
 \gamma_1 \downarrow & & F \xrightarrow{\gamma_2} \text{Cyl}(\varphi) \\
 & \swarrow \gamma_1 & \searrow \tilde{\gamma}_2 \\
 F' & \xrightarrow{\varphi'} & G'
 \end{array} \tag{3.2.3}$$

onde  $\text{Cyl}(\varphi)$  é o cilindro presentado na Definición 1.2.11, que para cada grao  $n \in \mathbb{Z}$  se pode expresar neste caso como

$$\text{Cyl}(\varphi)^n = F^{n+1} \oplus F^n \oplus G^n.$$

O morfismo  $\iota$  é a inclusión na segunda compoñente e  $\alpha$  é a inclusión na terceira.

Centrémonos agora no seguinte cadrado do prisma (3.2.3):

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\varphi} & G \\
 \parallel & \searrow t & \downarrow \alpha \\
 F & \xrightarrow{\iota} & \text{Cyl}(\varphi)
 \end{array} \tag{3.2.4}$$

Este diagrama é de novo conmutativo salvo homotopía: tomando como homotopía o morfismo graduado  $t: F[1] \rightarrow \text{Cyl}(\varphi)$  correspondente á inclusión na primeira compoñente, é sinxelo comprobar que  $\iota - \alpha\varphi = dt + td$ .

Por ser  $\alpha$  unha equivalencia homotópica é tamén un isomorfismo na categoría derivada. Logo, temos o isomorfismo  $\alpha: [\varphi] \xrightarrow{\sim} [\iota]$  en  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{J})^2$  dado por  $\alpha = (\text{id}, \alpha, t)$ .

Recordemos que o noso obxectivo é substituír (3.2.2) por un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}(\mathbf{J})$ . Poñamos o foco na outra das caras do prisma (3.2.3).

O morfismo  $\tilde{\gamma}_2: \text{Cyl}(\varphi) \rightarrow G'$ , definido pola matriz

$$\begin{pmatrix} -s & \gamma_2\varphi - d_{G'}s - sd_F & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

é un morfismo de complexos xa que

$$\begin{aligned} d_{G'}\tilde{\gamma}_2 &= (-d_{G'}s & d_{G'}\gamma_2\varphi - d_{G'}sd_F & d_{G'}\gamma_2) \\ &= (-d_{G'}s & \gamma_2\varphi d_F - d_{G'}sd_F & \gamma_2 d_G) \\ &= \tilde{\gamma}_2 d_{\text{Cyl}(\varphi)}, \end{aligned}$$

tendo a segunda igualdade por ser  $\gamma_2$  e  $\varphi$  de morfismos complexos.

O cadrado

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\iota} & \text{Cyl}(\varphi) \\ \gamma_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{\gamma}_2 \\ F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' \end{array} \quad (3.2.5)$$

é conmutativo en  $\mathcal{C}_A(\mathbf{J})$  e proporciónanos un morfismo  $\tilde{\gamma}: [\iota] \rightarrow [\varphi']$  dado por  $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \tilde{\gamma}_2, 0)$ .

Combinando agora os dous morfismos extraídos de (3.2.3), vexamos que  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \alpha$  en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{J})^2$ . Para facelo bastará con ver que  $\varphi'\gamma_1$  é homótopo a  $\tilde{\gamma}_2\alpha\varphi$ . Obsérvese que, pola conmutatividade salvo homotopía de (3.2.2) e por definición de  $\alpha$  e  $\tilde{\gamma}_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi'\gamma_1 &= \gamma_2\varphi - d_{G'}s - sd_F \\ \tilde{\gamma}_2\alpha\varphi &= \gamma_2\varphi \end{aligned}$$

Polo tanto, a diferenza  $\varphi'\gamma_1 - \tilde{\gamma}_2\alpha\varphi = \varphi'\gamma_1 - \gamma_2\varphi$  é o morfismo homotopicamente nulo  $-d_{G'}s - sd_F$ . Logo ambas composicións son homótopas, como se quería probar.

Como  $\alpha$  é un isomorfismo en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{J})^2$ , os morfismos  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  son entón isomorfos. Desta forma podemos asegurar que os cadrados (3.2.2) e (3.2.5) corresponden ao mesmo obxecto en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{J})^2$ . Pero  $\tilde{\gamma}$ , representado a través do cadrado (3.2.5), ten unha preimaxe en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{2} \times \mathbf{J})$  porque é un cadrado conmutativo en complexos, non só salvo homotopía. Así que utilizando a equivalencia  $\mathbf{dia}_{\mathbf{2}, \mathbf{J}}$ , obtemos unha preimaxe para ese cadrado e por tanto tamén para o cadrado inicial (3.2.2), completando a proba.  $\square$

Co resultado anterior queda probado entón que, sendo  $\mathbf{A}$  unha categoría de Grothendieck con suficientes proxectivos, o derivador  $\mathcal{D}_A$  é un derivador forte. Esta característica do derivador é imprescindible para que o noso derivador sexa estable e teña asociada unha estrutura triangulada.

### 3.3 Estabilidade e estrutura triangulada inducida

Estudar a estabilidade do derivador  $\mathcal{D}_A$  é interesante pola súa relación coa triangulación: a estabilidade é unha propiedade dos derivadores mentres que a estrutura triangulada das categorías é un dato adicional. Como xa fomos avanzando, a teoría de derivadores xeneraliza algúns conceptos clásicos utilizando a linguaxe de categorías. Neste caso, o derivador homolóxico pretende xeneralizar os conceptos clave da estrutura triangulada usual imposta sobre a categoría derivada á linguaxe de derivadores, para posteriormente poder inferir directamente a partir do derivador estable unha estrutura triangulada nas categorías subxacentes sen realizar eleccións.

Veremos que neste caso, a triangulación inducida pola estabilidade do derivador sobre a categoría subxacente  $\mathcal{D}_A(\mathbf{e})$ , definida na sección 2.2, coincide coa triangulación usual definida a través dos conos para a categoría derivada  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  na sección 1.3.

Recordemos que un derivador é punteado se a categoría subxacente admite obxecto cero, véxase a Definición 2.2.5. Segundo a Definición 2.2.9, este é o primeiro requisito para que un derivador sexa estable.

**Proposición 3.3.1.** *O derivador forte  $\mathcal{D}_A$  é punteado.*

*Demostración.* A categoría subxacente de  $\mathcal{D}_A$  é a categoría derivada asociada a  $\mathbf{A}$ ,  $\mathcal{D}_A(\mathbf{e}) = \mathbf{D}(\mathbf{A})$ , logo é evidente que posúe obxecto cero por ser unha

categoría aditiva.  $\square$

De feito, aínda que non se esixa para ser derivador punteado, neste caso particular todas as categorías  $\mathcal{D}_A(\mathbf{l})$  para unha categoría pequena  $\mathbf{l}$  son aditivas e por tanto punteadas.

Para probar a segunda condición de estabilidade, que todo cadrado cartesiano ou cocartesiano homotópico sexa bicartesiano, imos caracterizar os cadrados cartesianos e cocartesianos asociados a este derivador a través de certos triángulos.

**Lema 3.3.2.** *Un obxecto  $F$  de  $\mathcal{D}_A(\square)$  é cocartesiano se, e só se, admite unha representación en  $\mathcal{C}_A(\square)$  da forma*

$$\begin{array}{ccc} F_{00} & \xrightarrow{\varphi_{10}} & F_{10} \\ \varphi_{01} \downarrow & & \downarrow \\ F_{01} & \longrightarrow & F_{11} \end{array} \quad (3.3.1)$$

tal que, sendo  $\alpha := (\varphi_{10} - \varphi_{01})$ , o triángulo

$$F_{00} \xrightarrow{\alpha} F_{10} \oplus F_{01} \longrightarrow F_{11} \xrightarrow{+} \quad (3.3.2)$$

é distinguido en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{e})$ .

*Demostración.* Se  $F$  é cocartesiano, por definición existe  $F'$  en  $\mathcal{D}_A(\Gamma)$  tal que  $F = \mathbf{L}_{i_{\Gamma}} F'$ . Denotemos  $F' := (F_{00}, F_{10}, F_{01}, \varphi_{10}, \varphi_{01})$  o diagrama subxacente de  $F'$ . Tomando unha resolución  $q$ -proyectiva de  $F'$  podemos asumir que  $F = i_{\Gamma} F'$  e  $F_{11} := F_{10} \amalg_{F_{00}} F_{01}$  son obxectos de  $\mathbf{C}(A)$ . Neste caso podemos construír en  $\mathbf{C}(A)$  a sucesión exacta curta:

$$0 \longrightarrow F_{00} \xrightarrow{\alpha} F_{10} \oplus F_{01} \longrightarrow F_{10} \amalg_{F_{00}} F_{01} \longrightarrow 0,$$

sendo  $\alpha = \varphi_{10} - \varphi_{01}$ . Pola Proposición 1.3.18, esta sucesión exacta proporciona o triángulo distinguido desexado en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{e}) = \mathbf{D}(A)$ :

$$F_{00} \xrightarrow{\alpha} F_{10} \oplus F_{01} \longrightarrow F_{10} \amalg_{F_{00}} F_{01} \xrightarrow{+} .$$

Reciprocamente, supoñamos que existe un cadrado conmutativo (3.3.1), que de novo podemos asumir que está formado por complexos  $q$ -proyectivos, tal que o triángulo (3.3.2) é distinguido. Entón existe un isomorfismo  $F_{11} \xrightarrow{\sim} C(\alpha)$  en  $\mathcal{D}_A(\mathfrak{e})$  inducido polo isomorfismo dos correspondentes triángulos, en virtude de TR3 e da Proposición 1.2.7. Por outra banda  $F_{10} \amalg_{F_{00}} F_{01}$  é o conúcleo de  $\alpha$ , de xeito que é isomorfo ao cono  $C(\alpha)$  e por tanto a  $F_{11}$ , tendo o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 F_{00} & \xrightarrow{\varphi_{10}} & F_{10} \\
 \varphi_{01} \downarrow & & \downarrow \\
 F_{01} & \longrightarrow & F_{11}
 \end{array}
 \cong
 \begin{array}{ccc}
 F_{00} & \xrightarrow{\varphi_{10}} & F_{10} \\
 \varphi_{01} \downarrow & & \downarrow \\
 F_{01} & \longrightarrow & F_{10} \amalg_{F_{00}} F_{01}
 \end{array}$$

Así, dado que para  $F' := (F_{00}, F_{10}, F_{01}, \varphi_{10}, \varphi_{01})$  o cadrado da dereita verifica  $F = i_{\Gamma^{-1}} F'$ , concluímos que  $F$  tamén xace na imaxe esencial de  $i_{\Gamma^{-1}}$ . Como o asumimos  $q$ -proyectivo, iso implica que tamén pertence á imaxe esencial de  $\mathbf{L}i_{\Gamma^{-1}}$  e polo tanto  $F$  é cartesiano.  $\square$

No caso dual obtemos tamén o resultado correspondente:

**Lema 3.3.3.** *Un obxecto  $G$  de  $\mathcal{D}_A(\square)$  é cartesiano se, e só se, admite unha representación en  $\mathcal{C}_A(\square)$  da forma*

$$\begin{array}{ccc}
 G_{00} & \longrightarrow & G_{10} \\
 \downarrow & & \downarrow \psi_{10} \\
 G_{01} & \xrightarrow{\psi_{01}} & G_{11}
 \end{array}
 \tag{3.3.3}$$

tal que, sendo  $\beta := \psi_{10} - \psi_{01}$ , o triángulo

$$G_{00} \longrightarrow G_{10} \oplus G_{01} \xrightarrow{\beta} G_{11} \xrightarrow{+}
 \tag{3.3.4}$$

é distinguido en  $\mathcal{D}_A(\mathfrak{e})$ .

*Demostración.* A demostración é semellante á do resultado previo. Se  $G$  é cartesiano, temos que  $G = \mathbf{R}i_{\lrcorner*}G'$  para un  $G'$  en  $\mathcal{D}_A(\lrcorner)$ , que representaremos como  $G' = (G_{10}, G_{10}, G_{10}, \psi_{10}, \psi_{01})$ . Substituíndo  $G'$  por unha resolución  $q$ -infectiva podemos asumir que  $G = i_{\lrcorner*}G'$  e tamén que  $G_{00} := G_{10} \times_{G_{11}} G_{01}$  son obxectos de  $\mathbf{C}(A)$ . Temos entón a sucesión exacta curta

$$0 \longrightarrow G_{10} \times_{G_{11}} G_{01} \longrightarrow G_{10} \oplus G_{01} \xrightarrow{\beta} G_{11} \longrightarrow 0$$

en  $\mathbf{C}(A)$ , con  $\beta = (\psi_{10} \ \psi_{01})$ . De novo, pola Proposición 1.3.18, esta sucesión proporciónanos un triángulo distinguido en  $\mathbf{D}(A)$

$$G_{10} \times_{G_{11}} G_{01} \longrightarrow G_{10} \oplus G_{01} \xrightarrow{\beta} G_{11} \xrightarrow{+} .$$

Para a implicación contraria, asumamos que temos un cadrado conmutativo (3.3.3), que podemos supoñer formado por complexos  $q$ -infectivos, tal que o triángulo (3.3.2) asociado é distinguido. Este triángulo distinguido proporciona en  $\mathbf{D}(A)$  o isomorfismo

$$C(\beta)[-1] \xrightarrow{\sim} G_{10} \times_{G_{11}} G_{01}.$$

Mais como  $G_{10} \times_{G_{11}} G_{01}$  é o núcleo de  $\beta$ , é isomorfo a  $C(\beta)[-1]$  e por tanto tamén a  $G_{00}$ . Isto implica que  $G$  é cartesiano, como se quería probar.  $\square$

**Teorema 3.3.4.** *Sexa  $A$  unha categoría de Grothendieck con suficientes pro-  
xectivos. O derivador forte  $\mathcal{D}_A$  é estable.*

*Demostración.* O derivador  $\mathcal{D}_A$  é punteado pola Proposición 3.3.1. Supoñamos  $F$  en  $\mathcal{D}_A(\square)$  cocartesiano e vexamos que é á súa vez cartesiano. Denotaremos  $P \rightarrow F$  unha resolución  $q$ -proxectiva de  $F$  e  $F \rightarrow I$  unha resolución  $q$ -infectiva. Para cada  $i, j \in \{0, 1\}$ , sabemos que existen isomorfismos  $P_{ij} \xrightarrow{\sim} I_{ij}$  en  $\mathcal{D}_A(\epsilon) = \mathbf{D}(A)$ . Polo Lema 3.3.2 o triángulo

$$P_{00} \xrightarrow{\alpha_P} P_{10} \oplus P_{01} \longrightarrow P_{11} \xrightarrow{+}$$

é distinguido en  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ . Polos isomorfismos entre resolucións, existe un isomorfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_{00} & \xrightarrow{\alpha_P} & P_{10} \oplus P_{01} & \xrightarrow{\beta_P} & P_{11} & \xrightarrow{+} & \longrightarrow \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
 I_{00} & \xrightarrow{\alpha_I} & I_{10} \oplus I_{01} & \xrightarrow{\beta_I} & I_{11} & \xrightarrow{+} & \longrightarrow
 \end{array}$$

de xeito que podemos garantir que o triángulo inferior é tamén distinguido. Aplicando a equivalencia do Lema 3.3.3 queda probado que  $F$  é cartesiano.

Dándolle a volta ao argumento, se supoñemos que  $F$  é cartesiano entón o triángulo inferior é distinguido polo Lema 3.3.3. Logo tamén será distinguido o triángulo superior, pola existencia do isomorfismo de triángulos precedente. Como consecuencia,  $F$  é cocartesiano polo Lema 3.3.2, completando a demostración.  $\square$

Comprobemos agora que para o caso da categoría subxacente do derivador  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ , a estrutura triangulada inducida pola estabilidade coincide coa estrutura usual imposta sobre a categoría  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}) = \mathbf{D}(\mathbf{A})$ .

**Corolario 3.3.5.** *Sexa  $\mathbf{A}$  unha categoría de Grothendieck con suficientes pro-  
 projectivos. A estrutura triangulada en  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{e})$  inducida pola propiedade de ser  
 estable do derivador coincide coa triangulación usual de  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ .*

*Demostración.* En virtude do Teorema 3.3.4 sabemos que o derivador  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$  é estable. Por esta razón, e como xa explicamos na sección 2.2, o derivador induce unha estrutura triangulada en  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ , véxase o Teorema 2.2.10. Para esta estrutura, dado un morfismo  $\varphi: X \rightarrow Y$  en  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  temos un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow \mathbf{C}(\varphi) \longrightarrow \Sigma X,$$

sendo  $\Sigma$  e  $\mathbf{C}$  os funtores considerados na Definición 2.2.7 e na Definición 2.2.8, respectivamente. Para comprobar que as estruturas trianguladas son realmente

a mesma vexamos que os funtores desprazamento e as clases de triángulos distinguidos de ambas estruturas coinciden.

Denotemos por  $[\varphi]$  a preimaxe de  $\varphi$  en  $\mathbf{D}(\mathbf{A}^2)$ , que existe pola Proposición 3.2.1 aplicada ao caso particular de  $\mathbf{J} = \mathbf{e}$ . Sexa  $\mathbf{2}_\Gamma : \mathbf{2} \rightarrow \Gamma$  a inclusión horizontal de  $\mathbf{2}$  en  $\Gamma$ , considerada xa na Definición 2.2.8, e denotemos  $[\varphi_\Gamma] := \mathbf{2}_{\Gamma*}[\varphi]$ . Obsérvese que o diagrama subxacente de  $[\varphi_\Gamma]$  ten a forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Na sección 2.2, adiantamos que o cadrado (2.2.4), que representamos por

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T(\varphi)_{1,1} \end{array}$$

pertence á imaxe esencial de  $i_{\Gamma!} \circ \mathbf{2}_{\Gamma*}$ . Na nosa notación previa é o diagrama subxacente de  $i_{\Gamma!}[\varphi_\Gamma]$ . Deste feito deduciamos ademais que existe un isomorfismo canónico entre  $T(\varphi)_{1,1} \cong \mathbf{C}(\varphi)$ .

En particular, tomando resolucións  $q$ -proyectivas, podemos asegurar que o cadrado

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{C}(\varphi) \end{array}$$

pertence á imaxe esencial de  $\mathbf{L}i_{\Gamma!}$ , polo que é cocartesiano.

Aplicando agora o Lema 3.3.2 temos un triángulo distinguido na estrutura triangulada usual de  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ :

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow \mathbf{C}(\varphi) \longrightarrow X[1],$$

Pola definición da estrutura triangulada usual de  $\mathbf{D}(\mathbf{A})$  temos outro triángulo distinguido do cal  $\varphi$  é base

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow C(\varphi) \longrightarrow X[1],$$

e agora en virtude de TR3 e da Proposición 1.2.7, temos que existe o isomorfismo  $\mathbf{C}(\varphi) \cong C(\varphi)$ .

Para o caso do functor desprazamento, retomando o cadrado (2.2.3) da sección 2.2 xunto co feito de que  $T(f)_{2,1} \cong \Sigma X$ , obtemos de novo un cadrado cocartesiano. Se denotamos por  $\psi: X \rightarrow 0$  e aplicamos o Lema 3.3.2 temos un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{\psi} 0 \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow X[1].$$

Como para a estrutura triangulada usual tamén existe o triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{\psi} 0 \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow X[1]$$

e  $C(\psi) \cong X[1]$ , temos que  $\Sigma X \cong X[1]$ , rematando a proba.  $\square$

Tense ademais a mesma propiedade para todas as categorías  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{l})$  con  $\mathbf{l}$  unha categoría pequena, considerando os derivadores desprazados como en [Gr1, Proposition 4.3] e razoando na liña do Corolario 2.2.11.



## CAPÍTULO 4

---

# Localizacións de Bousfield a través dos derivadores

---

A primeira aplicación da teoría previamente desenvolvida será a expresión mediante complexos perfectos das localizacións *smashing*. É ben coñecido que a localización respecto dun pechado se pode expresar en termos de límites de funtores derivados e que a natureza secuencial dese límite permite expresalo cun límite homotópico, ao estilo Bökstedt e Neeman en [BN].

Neste capítulo xeneralizamos esta descrición a localizacións respecto a conxuntos estables por especialización, que se corresponden ao concepto clásico de sistemas de soportes. A descrición explícita dos colímites homotópicos asociados a diagramas arbitrarios que aporta o derivador fai posible esta nova caracterización.

Sentemos as bases da notación para este capítulo:  $A$  será un anel conmutativo e noetheriano e denotaremos por  $A\text{-Mod}$  a categoría de  $A$ -módulos. Sempre que non dea lugar a confusións denotaremos a categoría de complexos de  $A$ -módulos simplemente por  $\mathbf{C}(A)$  e analogamente para as categorías homotópica,  $\mathbf{K}(A)$ ; e derivada,  $\mathbf{D}(A)$ . Para simplificar a notación denotaremos tamén o derivador  $\mathcal{D}_{A\text{-Mod}}$  simplemente como  $\mathcal{D}_A$ .

### 4.1 Localizacións de Bousfield

Na sección 1.3 presentamos a noción de localización ou cálculo de fraccións en categorías, que ten a súa orixe nos traballos de Gabriel-Zisman en [GZ]. Nesta sección presentaremos o concepto de localización no contexto de catego-

rías trianguladas, que habitualmente se coñece como localización de Bousfield, seguindo a exposición dada en [AJS1].

En xeral, os procesos de localización requiren da conversión de certos morfismos en isomorfismos. Na xeneralización a categorías abelianas, isto exprésase describindo a subcategoría da categoría ambiente de partida que é anulada polo functor de paso ao cociente.

Nesta situación cabe preguntarse se podemos identificar os obxectos na categoría localizada cunha subcategoría plena da categoría de partida. En certas condicións a resposta é afirmativa e exprésase dicindo que o functor de inclusión da categoría dos obxectos locais na categoría ambiente posúe un adxunto á esquerda. Este é o enfoque das localizacións de Bousfield.

O problema básico destas teorías de localización consiste en caracterizar que tipo de subcategorías aparecen como o núcleo dun functor localización. Estas serán as denominadas subcategorías localizantes (Definición 1.3.12), dentro das que son especialmente interesantes as compactamente xeradas.

Recordemos a continuación a noción de localización de Bousfield e algunhas das súas propiedades básicas.

**Definición 4.1.1.** Sexa  $\mathbf{T}$  una categoría triangulada. Unha *localización de Bousfield en  $\mathbf{T}$*  é un par  $(\ell, \eta)$  con  $\ell: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  un  $\Delta$ -functor en  $\mathbf{T}$  e  $\eta: \text{id} \rightarrow \ell$  unha transformación  $\Delta$ -natural verificando:

- i)  $\ell\eta_X = \eta_{\ell X}$  para todo obxecto  $X$  de  $\mathbf{T}$  e
- ii)  $\eta: \text{id} \rightarrow \ell$  induce un isomorfismo  $\ell(X) \cong \ell\ell(X)$ .

O functor  $\ell$  denomínase *functor localización*.

Como xa adiantamos na introdución da sección, existe unha forma de caracterizar estas localizacións en función dos obxectos que se ven anulados polo functor localización.

**Proposición 4.1.2.** [AJS1, Proposition 1.2] *Sexa  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada cun functor localización  $\ell$ . A subcategoría plena  $\mathbf{L}$  formada polos obxectos  $X$  de  $\mathbf{T}$  que verifican  $\ell(X) = 0$  é unha subcategoría triangulada localizante.*

A través de [AJS1, Lemma 1.1] pode verse que os obxectos anulados por  $\ell$  están claramente relacionados co concepto de obxectos  $\mathbf{L}$ -locais, introducidos

na Definición 1.3.13. De feito  $\mathbf{L}^\perp$ , a subcategoría plena dos obxectos  $\mathbf{L}$ -locais, é precisamente a imaxe esencial do functor  $\ell$ . Estes obxectos teñen un papel fundamental á hora de manexar os elementos da categoría localizada, de xeito que nos permitirán traballar cos elementos localizados a través dos da categoría de partida, como xa vimos na Proposición 1.3.14.

O seguinte teorema caracteriza as localizacións de Bousfield en categorías trianguladas en termos de subcategorías localizantes e recolle de forma explícita a relación entre a localización e a estrutura triangulada da categoría de partida.

**Teorema 4.1.3.** [AJS1, Proposition 1.6] *Sexan  $\mathbf{T}$  unha categoría triangulada e  $\mathbf{L}$  unha subcategoría localizante de  $\mathbf{T}$ . Denotando  $i: \mathbf{L} \hookrightarrow \mathbf{T}$  e  $j: \mathbf{L}^\perp \hookrightarrow \mathbf{T}$  as inclusións canónicas e  $Q: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/\mathbf{L}$  o paso ao cociente, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

- i) *Existe un functor localización  $\ell$  con subcategoría localizante asociada  $\mathbf{L}$ .*
- ii) *O functor de paso ao cociente  $Q$  ten adxunto pola dereita.*
- iii) *A composición  $Q \circ j$  é unha equivalencia de categorías.*
- iv) *O functor  $j$  posúe adxunto pola esquerda e  ${}^\perp(\mathbf{L}^\perp) = \mathbf{L}$ .*
- v) *O functor  $i$  ten un functor adxunto pola dereita.*
- vi) *Para cada  $X$  de  $\mathbf{T}$  existe un triángulo distinguido da forma*

$$N_X \longrightarrow X \longrightarrow B_X \xrightarrow{+}$$

*con  $N_X$  en  $\mathbf{L}$  e  $B_X$  en  $\mathbf{L}^\perp$ .*

Para  $X$  de  $\mathbf{T}$  as asignacións  $\gamma(X) := N_X$  e  $\ell(X) := B_X$  son functoriais e teñen asociadas transformacións naturais  $\eta: \text{id} \rightarrow \ell$  e  $\zeta: \gamma \rightarrow \text{id}$ . Referirémonos ao functor  $\gamma(X): \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  como *functor aciclización* asociado á localización de Bousfield. Desta forma para cada obxecto  $X$  de  $\mathbf{T}$  obtemos un triángulo distinguido functorial:

$$\gamma(X) \longrightarrow X \longrightarrow \ell(X) \xrightarrow{+}$$

con  $\gamma(X)$  un obxecto de  $\mathbf{L}$  e  $\ell(X)$  un obxecto de  $\mathbf{L}^\perp$ .

En particular, para a categoría homotópica de complexos de  $A$ -módulos  $\mathbf{K}(A)$ , caso no que nos estamos a centrar neste capítulo, temos os obxectos  $\mathbf{Z}$ -locais e  $\mathbf{Z}$ -colocais que definimos como  $q$ -infectivos e  $q$ -proyectivos respectivamente na Definición 1.3.16. Lembremos que  $\mathbf{Z}$  era a subcategoría plena dos complexos acíclicos, subcategoría respecto á cal se construíu o cociente de Verdier que daba lugar a  $\mathbf{D}(A)$ .

Como consecuencia do Teorema 1.4.8 e por *iii*) do teorema anterior, podemos afirmar por exemplo que a subcategoría dos obxectos  $q$ -infectivos  $\mathbf{Z}^\perp$  de  $\mathbf{K}(A)$  é equivalente a  $\mathbf{D}(A)$ .

## 4.2 Categoría derivada e xeometría alxébrica

Inspirado no traballo de Hopkins en [Ho], Neeman demostra en [N1] que para un anel noetheriano  $A$  existe unha correspondencia bixectiva entre as subcategorías localizantes da categoría derivada  $\mathbf{D}(A)$  e os subconxuntos do esquema afín  $\text{Spec}(A)$ :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías localizantes} \\ \text{de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Subconxuntos} \\ \text{de } \text{Spec}(A) \end{array} \right\} \quad (4.2.1)$$

Este resultado establece unha conexión entre categorías das que a priori non se tiña ningunha intuición xeométrica, as categorías derivadas de complexos de módulos, e os subconxuntos dos esquemas afíns que forman as pezas básicas da xeometría alxébrica.

Supoñamos agora que en lugar dun subconxunto arbitrario temos un subconxunto estable por especialización  $Y \subset \text{Spec}(A)$ , é dicir, un subconxunto que pode expresarse como unha unión (arbitraria) de pechados de  $\text{Spec}(A)$ . Este caso abórdase en [N1, Theorem 3.3] e para presentalo imos definir os conceptos de functor e subcategoría *smashing*.

En [AJS2, Theorem 5.3] demóstrase que os conxuntos estables por especialización se corresponden cos funtores localización que conservan coprodutos, tamén coñecidos como *funtores smashing*. A partir das equivalencias do devandito teorema e utilizando o [AJS2, Corollary 5.8] podemos garantir que os funtores *smashing* se corresponden á súa vez coas subcategorías localizantes xeradas por obxectos compactos, coñecidas como *subcategorías smashing*.

**Definición 4.2.1.** Unha subcategoría localizante dise *smashing* se está xerada por obxectos compactos.

De feito, se tomamos literalmente o [AJS2, Corollary 5.8], sabemos que se corresponden coas subcategorías xeradas por obxectos perfectos; mais os obxectos compactos de  $\mathbf{D}(A)$  son precisamente os obxectos perfectos.

**Definición 4.2.2.** Diremos que un obxecto de  $\mathbf{D}(A)$  é *perfecto* se é cuasi-isomorfo a un complexo limitado de  $A$ -módulos proxectivos de rango finito.

**Lema 4.2.3.** *Os obxectos compactos da categoría derivada  $\mathbf{D}(A)$  son exactamente os obxectos perfectos da devandita categoría.*

A proba deste resultado é consecuencia, por unha banda, do [N2, Lemma 2.2] que nos garante que a menor subcategoría grosa que contén ao anel  $A$  pensado como complexo é a subcategoría plena dos compactos de  $\mathbf{D}(A)$ . Recordemos que unha subcategoría grosa dunha categoría triangulada é unha subcategoría triangulada que contén todos os sumandos directos dos seus obxectos, véxase Definición 1.3.11. Temos entón unha correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \text{subcategoría de} & & \text{menor subcategoría grosa} \\ \text{complexos compactos} & = & \text{que contén a } A \\ \text{de } \mathbf{D}(A) & & \text{de } \mathbf{D}(A) \end{array}$$

Por outra banda, é sinxelo comprobar que a menor subcategoría grosa que contén a  $A$  é precisamente a de complexos perfectos: a menor subcategoría triangulada que contén a  $A$  está formada por complexos limitados de módulos libres de rango finito, polo tanto a menor subcategoría grosa que contén a  $A$  estará formada polos sumandos directos destes complexos, é dicir, por complexos limitados de módulos proxectivos de rango finito.

Por tanto, a menor subcategoría grosa que contén a  $A$  será precisamente a subcategoría plena de complexos perfectos de  $\mathbf{D}(A)$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{menor subcategoría grosa} & & \text{subcategoría de} \\ \text{que contén a } A & = & \text{complexos perfectos} \\ \text{de } \mathbf{D}(A) & & \text{de } \mathbf{D}(A) \end{array}$$

Deste xeito, temos que a correspondencia bixectiva (4.2.1) se particulariza a unha correspondencia bixectiva entre:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Subcat. } \textit{smashing} \\ \text{en } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Subconxuntos estables por} \\ \text{especialización de } \text{Spec}(A) \end{array} \right\} \quad (4.2.2)$$

Afondemos en como se establecen estas correspondencias. A través de (4.2.1), unha subcategoría localizante  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{D}(A)$  ten asociado o subconxunto de  $\text{Spec}(A)$  determinado polos puntos  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  tales que  $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \mathbf{L}$ . Se partimos dun subconxunto  $Y$  de  $\text{Spec}(A)$  denotaremos como  $\mathbf{L}_Y$  a menor subcategoría localizante de  $\mathbf{D}(A)$  que contén todos os corpos residuais  $\kappa(\mathfrak{p})$ , con  $\mathfrak{p} \in Y$ .

Por [AJS1, Proposition 4.5] existe  $\ell_Y: \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$  un functor localización cuxo núcleo é precisamente a subcategoría  $\mathbf{L}_Y$ . Este resultado garante a existencia do functor  $\ell_Y$ , mais non proporciona unha descrición manexable do mesmo.

A través de [N1, Lemma 3.5], este functor pode caracterizarse polo seu comportamento sobre os corpos residuais:

$$\ell_Y(\kappa(\mathfrak{p})) = \begin{cases} \kappa(\mathfrak{p}) & \text{se } \mathfrak{p} \notin Y \\ 0 & \text{se } \mathfrak{p} \in Y. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

con  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ .

A caracterización precedente tampouco dá unha descrición explícita do functor localización en si mesmo, pois non nos indica como actúa en calquera outro obxecto de  $\mathbf{D}(A)$  que non sexa un corpo residual.

Como xa explicamos na sección 4.1 e se demostra en [AJS1, §1], asociada á localización  $(\ell, \eta)$  existe sempre unha aciclización  $(\gamma, \zeta)$ . Polo Teorema 4.1.3, as propiedades da aciclización son duais ás de  $(\ell, \eta)$  de xeito que unha determina univocamente á outra: para cada  $M$  de  $\mathbf{D}(A)$  existe un triángulo distinguido

$$\gamma M \xrightarrow{\zeta_M} M \xrightarrow{\eta_M} \ell M \xrightarrow{+}$$

que vincula ambos funtores.

Para a subcategoría localizante  $\mathbf{L}_Y$  definida previamente, tendo en conta a descrición de  $\ell_Y$  en (4.2.3), podemos caracterizar o functor aciclización  $\gamma_Y$  como

$$\gamma_Y(\kappa(\mathfrak{p})) = \begin{cases} \kappa(\mathfrak{p}) & \text{se } \mathfrak{p} \in Y \\ 0 & \text{se } \mathfrak{p} \notin Y. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

con  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ .

O propósito deste capítulo será dar unha descrición explícita do functor  $\gamma_Y$  para un subconxunto  $Y \subset \text{Spec}(A)$  estable por especialización, utilizando

precisamente complexos perfectos e funtores coñecidos. Esa descrición virá dada polo derivador homolóxico presentado no capítulo 3.

Para conxuntos estables por especialización é posible dar unha descrición alternativa dos funtores  $\ell_Y$  e  $\gamma_Y$  en termos de ideais na liña de [BS, Example 1.2.9]. Para un conxunto estable por especialización  $Y$ , sexa  $J_Y$  o conxunto de todos os ideais de  $A$  cuxo soporte está contido en  $Y$ . Este é un conxunto parcialmente ordenado, de xeito que se pode interpretar como unha categoría pequena que, ademais, é cofiltrada. Partindo destes datos podemos definir os funtores

$$L'_Y(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in J_Y} \mathbf{R} \operatorname{Hom}^\bullet(\mathfrak{a}, M) \quad (4.2.5)$$

$$I'_Y(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in J_Y} \mathbf{R} \operatorname{Hom}^\bullet(A/\mathfrak{a}, M) \quad (4.2.6)$$

que corresponderían respectivamente con  $\ell_Y$ , descrito en (4.2.3); e  $\gamma_Y$ , definido en (4.2.4). A expresión de  $I'_Y$  é a versión derivada da fórmula descrita por Gabriel en [Ga], aínda que en ocasións se coñece como a “Fórmula de Deligne” polo uso destes funtores no apéndice de [Ha].

Pese a que cos mesmos argumentos que na Proposición 4.4.3 se pode comprobar que  $I'_Y$  é un functor aciclización e seguindo as ideas do Teorema 4.4.5 podemos á súa vez probar que  $L'_Y = \ell_Y$ , esta non será a nosa descrición definitiva. Inspirarémonos nela para configurar a nova definición de  $\ell_Y$  e  $\gamma_Y$ .

Para a definición dos funtores (4.2.5) e (4.2.6) é preciso tomar resolucións para trasladarse ao caso non derivado: ben resolucións  $q$ -proyectivas de  $A/\mathfrak{a}$  e de  $\mathfrak{a}$  para cada  $\mathfrak{a} \in J_Y$ , ou ben unha resolución  $q$ -inxectiva de  $M$ . A nosa proposta será substituír  $A/\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{a}$  por complexos perfectos, propiedade que non temos garantida a priori para  $A/\mathfrak{a}$  ou  $\mathfrak{a}$ .

Para esta nova descrición utilizaremos o derivador homolóxico descrito no capítulo 3. Por esta razón, o primeiro que faremos será buscar un “índice” adecuado para a expresión do límite, xa que xa non traballaremos en termos de ideais como en (4.2.5) e (4.2.6). Máis concretamente, neste caso precisaremos unha categoría asociada a cada conxunto  $Y$  estable por especialización.

### 4.3 Localizacións a través do derivador homolóxico

Recordemos que o noso obxectivo é dar unha descrición alternativa dos funtores  $\ell_Y$  e  $\gamma_Y$ . Procederemos en primeiro lugar a buscar unha descrición explícita do functor aciclización para, posteriormente, obter a do functor localización vinculado. O primeiro paso será construír unha categoría de diagramas sobre a que aplicar o noso derivador.

#### Categoría de índices asociada a un estable por especialización

Recordemos que o *soporte dun ideal*  $I \subset A$  é o conxunto de primos  $\mathfrak{p}$  de  $\text{Spec}(A)$  tales que  $I \subset \mathfrak{p}$ , ou noutras palabras, o soporte do  $A$ -módulo  $A/I$ . Como é habitual, denotaremos por  $V(I) \subset \text{Spec}(A)$  o soporte do ideal  $I$ , sendo  $V$  a correspondencia clásica que leva ideais de  $A$  en subconxuntos de  $\text{Spec}(A)$ .

**Definición 4.3.1.** Para calquera subconxunto  $Y$  de  $\text{Spec}(A)$  estable por especialización definimos a *categoría de índices asociada*  $\mathcal{I}_Y$  como segue:

**Obxectos:** os homomorfismos de  $A$ -módulos  $\mathbf{f}: A^n \rightarrow A$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , tales que o ideal  $\text{Im}(\mathbf{f})$  está soportado en  $Y$ , é dicir, o soporte do  $A$ -módulo  $\text{Im}(\mathbf{f})$  está contido en  $Y$ .

**Morfismos:** unha frecha  $\bar{\varphi}: \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{g}$  defínese como un homomorfismo de módulos libres  $\varphi: A^n \rightarrow A^m$  que fai conmutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi} & A^m \\ & \searrow \mathbf{f} & \swarrow \mathbf{g} \\ & & A \end{array}$$

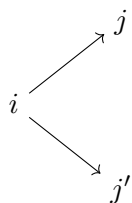
En xeral, describiremos un obxecto  $\mathbf{f}$  desta categoría a través dos seus valores na base canónica de  $A^n$ , é dicir, identificaremos  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ , cos  $f_i \in A$ . Nótese que de feito  $\text{Im}(\mathbf{f}) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$  é o ideal xerado polos  $f_1, \dots, f_n$ . En adiante, referirémonos ao soporte do ideal  $\text{Im}(\mathbf{f})$  como *soporte de  $\mathbf{f}$* .

Por construción, a categoría  $\mathcal{I}_Y$  así definida é unha categoría pequena. Deste xeito, esta categoría está no dominio do noso derivador  $\mathcal{D}_A: \text{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \text{CAT}$ .

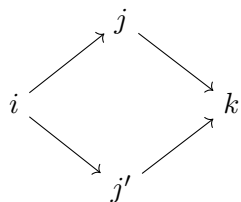
Vexamos a continuación algunhas das súas propiedades, que van a ser esenciais para o seu papel como índice dos límites asociados aos funtores localización e aciclización. En concreto, probaremos que  $\mathcal{L}_\gamma$  é unha categoría cofiltrada e, para iso, imos a recordar a definición de categoría filtrada.

**Definición 4.3.2.** [SGA 4<sub>1</sub>, I, Définition 2.7] Unha categoría  $\mathcal{I}$  é *pseudo-filtrada* se posúe as seguintes propiedades:

**PS1.** Todo diagrama en  $\mathcal{I}$  da forma



pode ser completado a un diagrama conmutativo



**PS2.** Todo diagrama da forma

$$i \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{u} \end{array} j$$

se pode inserir nun diagrama

$$i \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{u} \end{array} j \xrightarrow{w} k$$

tal que  $w \circ u = w \circ v$ .

Dirase que unha categoría  $\mathcal{I}$  é *filtrada* se é pseudo-filtrada, non baleira e conexas. Diremos que unha categoría  $\mathcal{I}$  é *cofiltrada* se  $\mathcal{I}^{\text{op}}$  é filtrada.

Aínda que respectamos a presentación da definición [SGA 4<sub>I</sub>, I, Définition 2.7] de xeito literal, realmente a condición de ser non baleira é redundante xa que está normalmente incluída na definición de categoría conexas, como é o noso caso (Definición 3.1.4).

**Lema 4.3.3.** *Sexa  $Y$  un subconxunto de  $\text{Spec}(A)$  estable por especialización. A categoría de índices  $\mathcal{I}_Y$  asociada a este subconxunto é cofiltrada.*

*Demostración.* Probaremos en primeiro lugar que  $\mathcal{I}_Y$  é pseudo-cofiltrada. Seguindo o dual da Definición 4.3.2 debemos verificar que se cumpren dúas propiedades. Comecemos por PS1', dual de PS1:

**PS1'.** Todo diagrama en  $\mathcal{I}_Y$  da forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f} & & \\ & \searrow \varphi & \\ & & \mathbf{h} \\ & \nearrow \bar{\psi} & \\ \mathbf{g} & & \end{array}$$

pode ser completado a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & \overline{\text{id} \otimes \mathbf{g}} & \mathbf{f} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathbf{h} \\ \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} & \nearrow & & & \\ & \overline{\mathbf{f} \otimes \text{id}} & \mathbf{g} & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathbf{h} \end{array} \quad (4.3.1)$$

sendo o obxecto  $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}: A^n \otimes A^m \rightarrow A$  o covector definido por

$$(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})(e \otimes e') := \mathbf{f}(e) \mathbf{g}(e')$$

para  $e \in A^n$  e  $e' \in A^m$ ; e as frechas  $\overline{\text{id} \otimes \mathbf{g}}$  e  $\overline{\mathbf{f} \otimes \text{id}}$  as determinadas polos morfismos  $\text{id} \otimes \mathbf{g}: A^n \otimes A^m \rightarrow A^n$  e  $\mathbf{f} \otimes \text{id}: A^n \otimes A^m \rightarrow A^m$  definidos

como

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \mathbf{g})(e \otimes e') &:= \mathrm{id}(e) \mathbf{g}(e') \\ (\mathbf{f} \otimes \mathrm{id})(e \otimes e') &:= \mathbf{f}(e) \mathrm{id}(e').\end{aligned}$$

Vexamos que efectivamente o diagrama (4.3.1) conmuta. Por unha banda temos a composición  $\bar{\varphi} \circ \overline{\mathrm{id} \otimes \mathbf{g}}$ :

$$\begin{array}{ccccc} A^n \otimes A^m & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathbf{g}} & A^n & \xrightarrow{\varphi} & A^k \\ & \searrow \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} & \downarrow \mathbf{f} & \swarrow \mathbf{h} & \\ & & A & & \end{array}$$

Teñamos en conta que por ser  $\bar{\varphi}: \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{h}$  e  $\bar{\psi}: \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{h}$  morfismos da categoría  $\mathcal{L}_Y$  temos por definición que  $\mathbf{h} \circ \varphi = \mathbf{f}$  e  $\mathbf{h} \circ \psi = \mathbf{g}$ .

Para un elemento  $e \otimes e'$  de  $A^n \otimes A^m$ , temos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{h} \circ \varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \mathbf{g}))(e \otimes e') &= (\mathbf{h} \circ \varphi)(\mathbf{g}(e')e) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{g}(e')\varphi(e)) \\ &= \mathbf{g}(e') \mathbf{h} \varphi(e) \\ &= \mathbf{g}(e') \mathbf{f}(e)\end{aligned}$$

Nótese que  $\mathbf{f}(e)$  e  $\mathbf{g}(e')$  son elementos de  $A$ .

Razoando analogamente temos que

$$(\mathbf{h} \circ \psi \circ (\mathbf{f} \otimes \mathrm{id}))(e \otimes e') = \mathbf{f}(e) \mathbf{g}(e')$$

obtendo o mesmo resultado que na outra composición. Logo podemos concluir que o diagrama (4.3.1) é efectivamente conmutativo.

Para ver que este novo obxecto  $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$  é un obxecto da categoría, obsérvase que o ideal

$$\mathrm{Im}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) = \langle f_i g_j / i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \rangle.$$

Por tanto, o soporte de  $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$  está contido en  $Y$  e, de feito, este é a unión dos soportes de  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ :

$$V(\text{Im}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})) = V(\langle \mathbf{f} \rangle \cdot \langle \mathbf{g} \rangle) = V(\langle \mathbf{f} \rangle \cap \langle \mathbf{g} \rangle) = V(\mathbf{f}) \cup V(\mathbf{g}),$$

sendo  $V$  a correspondencia clásica que leva ideais de  $A$  en subconxuntos de  $\text{Spec}(A)$ .

Vexamos agora a propiedade PS2', dual de PS2:

**PS2'**. Sexan  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2: \mathbf{f} \rightrightarrows \mathbf{g}$  dúas frechas paralelas en  $\mathcal{I}_Y$ . Vexamos que existe entón unha frecha que as iguala.

Tomando  $N = \ker(\varphi_1 - \varphi_2)$  podemos elixir unha aplicación sobrexectiva  $A^p \twoheadrightarrow N$ , por ser  $N$  finitamente xerado. Sexa  $\psi: A^p \rightarrow A^n$  a composición da presentación elixida  $A^p \twoheadrightarrow N$  e a inclusión  $N \subset A^n$ . Sendo  $\mathbf{h} := \mathbf{f} \circ \psi$ , o morfismo  $\bar{\psi}: \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{f}$  é tal que  $\varphi_1 \psi = \varphi_2 \psi$  por construción:

$$\mathbf{h} \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathbf{f} \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} \\ \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \end{array} \mathbf{g}$$

Resta soamente comprobar que  $\mathbf{h}$  é un obxecto da categoría  $\mathcal{I}_Y$ . Mais isto é certo pola definición de  $\mathbf{h}$ , da que se deduce que  $\text{Im}(\mathbf{h}) = \text{Im}(\mathbf{f})$ .

Como a categoría  $\mathcal{I}_Y$  é claramente non baleira, basta probar que é conexa para demostrar que estamos a tratar cunha categoría cofiltrada. Sexan  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  obxectos de  $\mathcal{I}_Y$  e sexa  $\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}$  o covector asociado á secuencia  $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$ . Se  $\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}$  fora un obxecto de  $\mathcal{I}_Y$ , poderíamos construír o seguinte diagrama en  $\mathcal{I}_Y$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathbf{f} \oplus \mathbf{g} \\ & \nearrow & \\ \mathbf{g} & & \end{array}$$

Como o soporte de  $\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}$  é a intersección dos soportes de  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , temos garantido que dito soporte está contido en  $Y$ . Logo  $\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}$  está en  $\mathbf{l}_Y$ , concluíndo así a proba.  $\square$

Realmente, dado que na nosa definición de categoría conexas, Definición 3.1.4, non impoñemos ningunha condición sobre a dirección das frechas, no caso da definición anterior o obxecto  $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$  presentado para probar PS1' podería servir como conexión entre dous obxectos  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ . Neste caso a definición deste obxecto é independente da  $\mathbf{h}$  presentada en PS1', mais isto non sempre ten por que ocorrer, non toda categoría pseudo-cofiltrada é conexa.

Unha vez temos o noso candidato a índice, vexamos que tipo de obxectos podemos utilizar para substituír a  $A/\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{a}$  nas representacións en (4.2.5) e (4.2.6).

### Complexos de Koszul

Recordemos que, como xa vimos en (4.2.2), para o caso dos conxuntos estables por especialización temos unha correspondencia coas subcategorías xeradas por compactos. Vimos tamén no Lema 4.2.3 que en  $\mathbf{D}(A)$  os obxectos compactos se corresponden cos perfectos. Os complexos perfectos cuxo comportamento e propiedades nos interesan para realizar a substitución de  $A/\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{a}$ , para un ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A$ , son os complexos de Koszul definidos por sistemas de xeradores do ideal  $\mathfrak{a}$ .

Dada unha colección de elementos  $f_1, \dots, f_n$  do anel  $A$ , denotaremos por  $K(\mathbf{f})$  ao complexo de Koszul asociado a  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ . Na literatura existen diferentes descrições de dito complexo, mais ao longo deste capítulo utilizaremos a de [E, §17.4]. Como módulo graduado pódese representar como  $\bigwedge^\bullet A^n$ , a álgebra exterior de  $A^n$  concentrado en graos  $[-n, 0]$ . O noso complexo de Koszul para un  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  é, polo tanto, un complexo concentrado en graos negativos

$$K(\mathbf{f}) := \dots \rightarrow \bigwedge^r A^n \rightarrow \bigwedge^{r-1} A^n \rightarrow \dots \rightarrow A^n \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

A súa diferencial denótase na referencia bibliográfica previa como  $\delta_{\mathbf{f}}$  e, para a descrición como álgebra exterior do anel  $A$ , teríamos que

$$\delta_{\mathbf{f}}^r: \bigwedge^r A^n \longrightarrow \bigwedge^{r-1} A^n$$

está definida pola expresión

$$\delta_{\mathbf{f}}^r(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} f_l \cdot e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_l \wedge \dots \wedge e_r,$$

sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a base canónica de  $A^n$ . Nótese que este complexo varía en función da representación de  $\mathbf{f}$  escollida.

É vidente que os complexos de Koszul son complexos perfectos (Definición 4.2.2): son limitados e grao a grao están constituídos por módulos libres finitamente xerados. Outra propiedade clave que utilizaremos reiteradamente é a súa autodualidade.

**Proposición 4.3.4** (Autodualidade do complexo de Koszul). [E, Proposition 17.15] *Sexa  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{l}_Y$  e sexa  $K^\vee(\mathbf{f}) := \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), A)$  o complexo dual de  $K(\mathbf{f})$ . Entón  $K(\mathbf{f})$  é autodual salvo desprazamento, é dicir,*

$$K^\vee(\mathbf{f}) \cong K(\mathbf{f})[-n],$$

sendo  $n$  a lonxitude da secuencia de  $\mathbf{f}$ .

#### 4.4 Descrición das localizacións *smashing*

Sexan  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  e  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$  obxectos da categoría  $\mathbf{l}_Y$  para  $Y$  un subconxunto de  $\text{Spec}(A)$  estable por especialización. Cada frecha  $\bar{\varphi}: \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{g}$  en  $\mathbf{l}_Y$  induce un morfismo entre os complexos de Koszul  $K(\bar{\varphi}): K(\mathbf{f}) \rightarrow K(\mathbf{g})$ , que vén dado polo morfismo  $\bigwedge^\bullet \varphi: \bigwedge^\bullet A^n \rightarrow \bigwedge^\bullet A^m$  cuxa definición grao a grao sería

$$\bigwedge^r \varphi(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_r)$$

É sinxelo comprobar que conmuta coas diferenciais descritas e por tanto define un morfismo de complexos entre  $K(\mathbf{f})$  e  $K(\mathbf{g})$ . Deste xeito, podemos definir un functor

$$\mathbf{K}_Y: \mathbf{l}_Y \rightarrow \mathbf{C}(A),$$

que asocia a cada  $\mathbf{f}$  de  $\mathbf{l}_Y$  o seu correspondente complexo de Koszul,  $K(\mathbf{f})$ .

A partir deste, podemos definir outro functor que asocie a cada complexo  $M$  da categoría  $\mathbf{D}(A)$  a “parte soportada en  $Y$ ”. Consideremos o functor

$$\mathbf{K}'_Y(M): \mathbf{l}_Y^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}(A)$$

definido compoñendo o functor contravariante  $\mathrm{Hom}^\bullet(-, M)$  co definido previamente, obtendo para cada  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{K}'_Y(M)(\mathbf{f}) = \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M).$$

Cambiando o punto de vista, podemos definir o functor:

$$\mathbf{K}'_Y: \mathbf{C}(A) \longrightarrow \mathbf{C}\left(A\text{-Mod}^{\mathrm{lop}}\right),$$

que envía a cada  $M$  en  $\mathbf{D}(A)$  ao seu functor  $\mathbf{K}'_Y(M)$  asociado, que é un obxecto de  $\mathbf{C}(A)^{\mathrm{lop}} \cong \mathbf{C}\left(A\text{-Mod}^{\mathrm{lop}}\right)$ .

Derivando o último functor definido,  $\mathbf{K}'_Y$ , obtemos

$$\mathbf{R}\mathbf{K}'_Y: \mathbf{D}(A) \longrightarrow \mathbf{D}\left(A\text{-Mod}^{\mathrm{lop}}\right),$$

de xeito que para cada complexo  $M$  en  $\mathbf{D}(A)$ ,  $\mathbf{R}\mathbf{K}'_Y(M)$  se corresponde co diagrama  $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M)$ . A partir deste functor definiremos o functor de complexos dos soportes topolóxicos sobre  $Y$ .

**Definición 4.4.1.** Sexa  $Y$  un subconxunto de  $\mathrm{Spec}(A)$  estable por especialización e  $M$  un complexo na categoría derivada  $\mathbf{D}(A)$ . Definiremos o *functor de complexos dos soportes topolóxicos sobre  $Y$*  como o functor  $\Gamma_Y: \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$  tal que

$$\Gamma_Y(M) = \varinjlim \mathbf{R}\mathbf{K}'_Y(M),$$

de xeito que para cada  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{l}_Y$  se ten

$$\Gamma_Y(M) = \varinjlim_{\mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y} \mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M).$$

En virtude dos resultados probados nas seccións anteriores poderemos simplificar a expresión desta definición utilizando o seguinte lema.

**Lema 4.4.2.** *Sexa  $Y$  un subconxunto de  $\mathrm{Spec}(A)$  estable por especialización e  $M$  un complexo na categoría derivada  $\mathbf{D}(A)$ . O functor de complexos dos soportes topolóxicos sobre  $Y$  verifica*

$$\Gamma_Y(M) = \varinjlim_{\mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M).$$

*Demostración.* Recordemos que  $K'_Y(M)(\mathbf{f}) = \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M)$ . Como os  $K(\mathbf{f})$  son obxectos  $q$ -proyectivos por ser complexos limitados de módulos libres, podemos asegurar que

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M) \cong \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M).$$

Por outra banda, polo Lema 4.3.3 sabemos que a categoría  $\mathbf{l}_Y$  é cofiltrada. Como os colímites directos con valores en módulos sobre índices cofiltrados son exactos (véxase [SGA 4<sub>1</sub>, III, Corollaire 2.10]), podemos afirmar que:

$$\mathbf{L}\lim_{\rightarrow} \mathbf{R}K'_Y(M) = \lim_{\rightarrow} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M)$$

e  $\Gamma_Y(M)$  pode describirse na categoría derivada como indica o enunciado.  $\square$

Este endofunctor  $\Gamma_Y: \mathbf{D}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  é o noso candidato a functor aciclización asociado ao conxunto estable por especialización  $Y$ . Mais unha aciclización está formada por un par, de xeito que precisamos unha transformación natural asociada a dito functor, que procederemos a definir a continuación.

Se para un  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{l}_Y$  tomamos o morfismo natural

$$p_{\mathbf{f}}: A \rightarrow K(\mathbf{f}) \tag{4.4.1}$$

definido simplemente como a identidade en grao 0, este induce unha transformación natural

$$\zeta_Y: \Gamma_Y(M) \longrightarrow M \tag{4.4.2}$$

aplicando o functor contravariante  $\lim_{\rightarrow} \mathrm{Hom}^\bullet(-, M)$  ao morfismo (4.4.1).

Vexamos agora que efectivamente o functor e a transformación natural previamente definidos constitúen unha aciclización.

**Proposición 4.4.3.** *O par  $(\Gamma_Y, \zeta_Y)$  proporciona unha aciclización.*

*Demostración.* Para probar este resultado, seguindo a [AJS1, Proposition 1.7], debemos verificar que  $\Gamma_Y$  é idempotente vía  $\zeta_Y$  e que as dúas posibles realizacións de idempotencia coinciden.

Probemos en primeiro lugar que para calquera  $M$  de  $\mathbf{D}(A)$  se verifica que  $\Gamma_Y \Gamma_Y(M) \cong \Gamma_Y(M)$ , é dicir, o dual á condición ii) da Definición 4.1.1. Consideremos a cadea de isomorfismos:

$$\Gamma_Y \Gamma_Y(M) = \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \mathbf{R} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{g} \in \mathbf{l}_Y}} \mathbf{R} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{g}), M)) \quad (4.4.3)$$

$$\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{g} \in \mathbf{l}_Y}} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{g}), M)) \quad (4.4.4)$$

$$\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{g} \in \mathbf{l}_Y}} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{g}), M)) \quad (4.4.5)$$

$$\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{l}_Y}} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}) \otimes K(\mathbf{g}), M) \quad (4.4.6)$$

$$\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{l}_Y}} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}), M) \quad (4.4.7)$$

$$\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{h} \in \mathbf{l}_Y}} \operatorname{Hom}^\bullet(K(\mathbf{h}), M) \quad (4.4.8)$$

$$= \Gamma_Y(M)$$

O primeiro dos isomorfismos, (4.4.4), obtense aplicando dúas veces o Lema 4.4.2. No caso de (4.4.5) aplicamos que os colímites filtrados son exactos e por tanto conmutan co functor  $\operatorname{Hom}$  graduado na segunda variable. O isomorfismo (4.4.6) obtense pola adxunción tensor- $\operatorname{Hom}$  en  $\mathbf{D}(A)$ , por ser esta unha categoría monoidal pechada. Para deducir (4.4.7) simplemente se aplica que a álgebra exterior transforma coprodutos en produtos tensores e por último, (4.4.8) é sinxelamente volver a etiquetar os obxectos da categoría  $\mathbf{l}_Y$ .

Resta soamente probar que  $\Gamma_Y(\zeta_M) = \zeta_{\Gamma_Y(M)}$ . Este feito dedúcese da con-

mutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_Y \Gamma_Y(M) & \xrightarrow{\Gamma_Y(\zeta_M)} & \Gamma_Y(M) \\
 \downarrow \zeta_{\Gamma_Y(M)} & & \downarrow \zeta_M \\
 \Gamma_Y(M) & \xrightarrow{\zeta_M} & M
 \end{array}$$

Utilizando o Lema 4.4.2 e o paso (4.4.7) da secuencia de isomorfismos anterior, este cadrado correspóndese co seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \lim_{\rightarrow} \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}), M) & \xrightarrow{\text{vía } \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} \oplus \mathbf{g}} & \lim_{\rightarrow} \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M) \\
 \downarrow \text{vía } \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{f} \oplus \mathbf{g} & & \downarrow \text{vía } p_{\mathbf{f}} \\
 \lim_{\rightarrow} \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{g}), M) & \xrightarrow{\text{vía } p_{\mathbf{g}}} & M
 \end{array}$$

que é conmutativo, concluíndo a proba.  $\square$

Recordemos que para todo functor localización existe un functor aciclización asociado e viceversa, vinculados por un triángulo distinguido como xa explicamos a partir do Teorema 4.1.3. Para atopar o functor localización vinculado a  $\Gamma_Y$  imos procurar en primeiro lugar o devandito triángulo distinguido.

Recuperemos de novo o morfismo  $p_{\mathbf{f}}: A \rightarrow K(\mathbf{f})$  definido en (4.4.1). Este posúe unha sección graduada de forma que podemos inserilo nunha sucesión exacta curta semiescindida de complexos:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow K(\mathbf{f}) \longrightarrow \sigma^{\leq -1} K(\mathbf{f}) \longrightarrow 0, \quad (4.4.9)$$

sendo o complexo  $\sigma^{\leq -1} K(\mathbf{f})$  o truncado basto segundo a seguinte definición.

**Definición 4.4.4.** Para un complexo  $M$  de  $\mathbf{C}(A)$  denotaremos por  $\sigma^{\geq n}M$  o *complexo truncado basto superior*  $\sigma^{\geq n}M$ , definido como o subcomplexo de  $M$  tal que

$$\sigma^{\geq n}M = \begin{cases} 0 & \text{se } i < n \\ M^i & \text{se } i \geq n \end{cases}$$

Así, definiremos tamén  $\sigma^{\leq n+1}M := M/\sigma^{\geq n}M$  o *complexo truncado basto inferior*.

Con esta notación definamos  $C(\mathbf{f}) := \sigma^{\leq -1}K(\mathbf{f})[-1]$ . Obsérvese que así definido, o colímite en  $n$  dos complexos  $C(\mathbf{f}^n)$  tomando as potencias apropiadas de  $\mathbf{f}$  pode identificarse co complexo de Čech no aberto complementario ao soporte de  $\mathbf{f}$ .

Pola Proposición 1.3.18, da sucesión (4.4.9) obtemos un triángulo distinguido en  $\mathbf{D}(A)$

$$C(\mathbf{f}) \longrightarrow A \longrightarrow K(\mathbf{f}) \xrightarrow{+}.$$

Aplicando a este triángulo o functor contravariante  $\mathrm{Hom}^\bullet(-, M)$  para un complexo  $M$  obtemos sistemas directos de triángulos

$$\mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M) \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(C(\mathbf{f}), M) \xrightarrow{+}. \quad (4.4.10)$$

Recordemos que polo Lema 4.4.2:

$$\Gamma_Y(M) = \varinjlim_{\mathbf{f} \in I_Y} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M)$$

Deste xeito, tomando colímites en (4.4.10) obtemos un novo triángulo distinguido en  $\mathbf{D}(A)$ :

$$\Gamma_Y(M) \longrightarrow M \longrightarrow L_Y(M) \xrightarrow{+},$$

onde

$$L_Y(M) := \varinjlim_{\mathbf{f} \in I_Y} \mathrm{Hom}^\bullet(C(\mathbf{f}), M). \quad (4.4.11)$$

A transformación natural asociada ao functor  $L_Y$  pódese construírse análogamente a como se construíu (4.4.2) para o functor  $\Gamma_Y$ . Así, combinando a Proposición 4.4.3 co Teorema 4.1.3, podemos deducir que  $L_Y$  é un functor localización.

Finalmente probemos que os funtores  $L_Y$  e  $\Gamma_Y$ , xunto coas correspondentes transformacións naturais, coinciden cos funtores  $\ell_Y$  e  $\gamma_Y$  definidos en [N1].

**Teorema 4.4.5.** *Sexa  $A$  un anel noetheriano,  $Y$  un subconxunto de  $\text{Spec}(A)$  estable por especialización e  $\ell_Y$  a localización (4.2.3) descrita en [N1], entón  $L_Y = \ell_Y$ .*

*Demostración.* Pola natureza das nocións de localización e de aciclización, probar que  $L_Y = \ell_Y$  é equivalente a ver que  $\Gamma_Y = \gamma_Y$ . Como xa se expuxo anteriormente, tanto  $\ell_Y$  como  $\gamma_Y$  están caracterizados por como actúan sobre os corpos residuais, véxanse (4.2.3) e (4.2.4) respectivamente. Por tanto será suficiente con probar que  $\Gamma_Y$  verifica (4.2.4).

O conxunto estable por especialización  $Y$  pode pensarse como unión de pechados de xeito que

$$Y = \bigcup_{\mathbf{f} \in \mathfrak{l}_Y} V(\mathbf{f}).$$

Imos segmentar a proba, seguindo a definición de (4.2.4), en dous casos.

**Caso 1:** se  $\mathfrak{p} \in Y$ , obsérvese que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in Y = \bigcup_{\mathbf{f} \in \mathfrak{l}_Y} V(\mathbf{f}) &\Leftrightarrow \exists \mathbf{h} \in \mathfrak{l}_Y \mid \mathfrak{p} \in V(\mathbf{h}) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{h} \in \mathfrak{l}_Y \mid \text{Im}(\mathbf{h}) = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \subset \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Logo, se  $\mathfrak{p} \in Y$ , partimos de que existe un  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m)$  en  $\mathfrak{l}_Y$  tal que  $\text{Im}(\mathbf{h}) \subset \mathfrak{p}$  e queremos probar que

$$\Gamma_Y(\kappa(\mathfrak{p})) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathfrak{l}_Y}} \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \kappa(\mathfrak{p})) = \kappa(\mathfrak{p}).$$

Para calquera  $\mathbf{f}$  de  $\mathfrak{l}_Y$ , recordemos que  $K(\mathbf{f})$  é autodual salvo desprazamento pola Proposición 4.3.4, é dicir, tense que  $K^\vee(\mathbf{f}) \cong K(\mathbf{f})[-n]$ , sendo  $n$  a lonxitude da secuencia de  $\mathbf{f}$ . En vista disto podemos escribir a seguinte cadea de isomorfismos para cada  $\kappa(\mathfrak{p})$  con  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \kappa(\mathfrak{p})) &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), A \otimes \kappa(\mathfrak{p})) \\
&\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), A) \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \quad (K(\mathbf{f}) \text{ é perfecto}) \\
&\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} (K^\vee(\mathbf{f}) \otimes \kappa(\mathfrak{p})) \quad (\text{definición de } K^\vee(\mathbf{f})) \\
&\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} (K^\vee(\mathbf{f}) \otimes A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \\
&\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} (K(\mathbf{f}) \otimes A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}[-n] \quad (\text{autodualidade } K(\mathbf{f}))
\end{aligned}$$

Estudando agora as homoloxías deste último complexo, vexamos que  $\kappa(\mathfrak{p})$  e  $\Gamma_Y(\kappa(\mathfrak{p}))$  son cuasi-isomorfos. Como o límite involucrado é un límite directo filtrado de módulos, este é exacto e basta con realizar os cálculos en cada grao.

Para o nivel cero obsérvase que  $K^0(\mathbf{f}) = A$  para todo obxecto  $\mathbf{f}$  de  $\mathbf{l}_Y$ , así que

$$H^0 \left( \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \kappa(\mathfrak{p})) \right) = \kappa(\mathfrak{p}).$$

Para  $f$  en  $\mathbf{l}_Y$  de lonxitude  $n$ , tomando  $r \in \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ , obteremos  $K^{-r}(\mathbf{f}) = \bigwedge^r A^n$ . Para o  $\mathbf{h}$  inicial, sexa  $\varphi_{\mathbf{h}}: A^n \otimes A^m \rightarrow A^n$  o morfismo definido como  $\varphi_{\mathbf{h}}(e_i \otimes e_j) = h_j e_i$ , onde  $m$  denota a lonxitude da secuencia  $\mathbf{h}$ . Está claro que para cada  $\mathbf{f}$  de  $\mathbf{l}_Y$  se verifica que  $\mathbf{f} \circ \varphi_{\mathbf{h}} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{h}$ . Logo, temos unha frecha en  $\mathbf{l}_Y$  que denotaremos por

$$\overline{\varphi_{\mathbf{h}}}: \mathbf{f} \otimes \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{f}.$$

Esta induce o morfismo entre os complexos de Koszul

$$K(\overline{\varphi_{\mathbf{h}}}): K(\mathbf{f} \otimes \mathbf{h}) \rightarrow K(\mathbf{f})$$

que, despois de tensorizar por  $A/\mathfrak{p}$ , e identificando  $A^n \otimes A^m$  con  $A^{nm}$ , en cada nivel é

$$\bigwedge^r \varphi_{\mathbf{h}} \otimes \mathrm{id}: \bigwedge^r A^{nm} \otimes A/\mathfrak{p} \longrightarrow \bigwedge^r A^n \otimes A/\mathfrak{p}$$

con  $r > 0$ . Pero como vimos ao inicio  $\text{Im}(\mathbf{h}) \subset \mathfrak{p}$  e isto implica que os morfismos do diagrama do límite en  $\bigwedge^r \varphi_{\mathbf{h}} \otimes \text{id}$ , cuxas entradas son múltiplos das compoñentes de  $\mathbf{h}$ , son morfismos cero. Por tanto

$$H^r \left( \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \kappa(\mathfrak{p})) \right) = 0$$

para todo  $r \neq 0$ .

**Caso 2:** se  $\mathfrak{p} \notin Y$ , entón

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \notin Y = \bigcup_{\mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y} V(\mathbf{f}) &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \notin V(\mathbf{f}), \forall \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y \\ &\Leftrightarrow \text{Im}(\mathbf{f}) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \not\subset \mathfrak{p}, \forall \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y \end{aligned}$$

Polo tanto, para todo  $\mathbf{f}$  de  $\mathbf{l}_Y$  cúmprese que  $\text{Im}(\mathbf{f}) \not\subset \mathfrak{p}$  e temos que probar que

$$F_Y(\kappa(\mathfrak{p})) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{f} \in \mathbf{l}_Y}} \text{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \kappa(\mathfrak{p})) = 0.$$

O obxecto  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  pode representarse tamén como  $\mathbf{f} = f_1 \oplus \dots \oplus f_n$ , de xeito que podemos asegurar que  $K(\mathbf{f}) = K(f_1) \otimes \dots \otimes K(f_n)$ . Por outra banda, recordemos que pola Proposición 4.3.4 se ten  $K^\vee(\mathbf{f}) \cong K(\mathbf{f})[-n]$  por autodualidade. Logo podemos realizar a descomposición

$$K^\vee(\mathbf{f}) \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \cong K(\mathbf{f})[-n] \otimes \kappa(\mathfrak{p}) = K(f_1)[-1] \otimes \dots \otimes K(f_n)[-1] \otimes \kappa(\mathfrak{p}).$$

O feito de que  $\text{Im}(\mathbf{f}) \not\subset \mathfrak{p}$  implica que existe polo menos un  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $f_i \notin \mathfrak{p}$ . Así, será suficiente demostrar que  $K(f_i) \otimes \kappa(\mathfrak{p}) = 0$ .

Polo [E, Lemma 17.13] o endomorfismo  $\mu_{f_i}: K(f_i) \rightarrow K(f_i)$  definido pola multiplicación por  $f_i$  é homótopo a 0. Deste xeito, tamén o será o morfismo inducido

$$\mu_{f_i} \otimes \text{id}: K(f_i) \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \rightarrow K(f_i) \otimes \kappa(\mathfrak{p}).$$

Por outra banda, este morfismo identifícase con

$$\mu_{f_i}: (K(f_i) \otimes A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \rightarrow (K(f_i) \otimes A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}},$$

que é un isomorfismo cuxa inversa  $\mu_{1/f_i}$  temos garantido que existe porque  $f_i \notin \mathfrak{p}$ . Logo, necesariamente  $K(f_i) \otimes \kappa(\mathfrak{p}) = 0$ , o cal á súa vez implica que  $K^\vee(\mathbf{f}) \otimes \kappa(\mathfrak{p}) = 0$ . Lembremos que  $\mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), \kappa(\mathfrak{p})) = K^\vee(\mathbf{f}) \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ , por ser  $K(\mathbf{f})$  perfecto, o cal proba que  $\Gamma_Y(\kappa(\mathfrak{p})) = 0$  como se quería demostrar.  $\square$

Finalmente obtemos así, para un complexo  $M$ , descrições dos funtores  $\ell_Y$  e  $\gamma_Y$ :

$$\ell_Y = \varinjlim_{\mathbf{f} \in \mathbf{I}_Y} \mathrm{Hom}^\bullet(C(\mathbf{f}), M)$$

$$\gamma_Y = \varinjlim_{\mathbf{f} \in \mathbf{I}_Y} \mathrm{Hom}^\bullet(K(\mathbf{f}), M)$$

nas que só se utilizan obxectos compactos de  $\mathbf{D}(A)$ , ou o que é o mesmo obxectos perfectos, que facilitan a posibilidade de computar as localizacións e aciclizacións. Obsérvese ademais que coa descrição  $L_Y$  do funtor  $\ell_Y$  a comprobación de que este conmuta con coprodutos é evidente.



---

# Derivadores e cohomoloxía de grupos

---

A (co)homoloxía de grupos pode interpretarse a través de funtores derivados de certos (co)límites de sistemas non dirixidos. A noción de derivador e a descrición explícita proporcionada polos resultados desta tese permiten dar unha proba directa de resultados fundamentais neste ámbito como son o lema de Shapiro e a sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre.

Ao longo do capítulo denotaremos por  $A$  un anel conmutativo. Para o caso clásico dos resultados que imos a tratar adoitase tomar  $A = \mathbb{Z}$ , mais coa linguaxe que presentamos todo funciona do mesmo xeito xeneralizándoo a un anel conmutativo arbitrario  $A$ . Como nos imos a centrar nas representacións  $A$ -lineais, imos a traballar de novo co derivador  $\mathcal{D}_A := \mathcal{D}_{A\text{-Mod}}$ .

## 5.1 Invariantes e coinvariantes de representacións

**Definición 5.1.1.** Para un grupo  $G$ , unha *representación  $A$ -linear* de  $G$  é un par  $(M, \rho)$  constituído por un  $A$ -módulo  $M$  xunto con un homomorfismo de grupos

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_A(M), \tag{5.1.1}$$

sendo  $\text{Aut}_A(M)$  o grupo de  $A$ -automorfismos de  $M$ .

Para simplificar a notación, a partir de agora, referirémonos á representación  $(M, \rho)$  unicamente polo seu módulo subxacente  $M$ , de forma que o homomorfismo quedará implícito.

Recordemos que dar unha representación  $A$ -lineal  $M$  do grupo  $G$  é equivalente a dar unha acción  $A$ -lineal

$$G \times M \longrightarrow M,$$

é dicir, tal que as aplicacións  $(g, -): M \rightarrow M$ , con  $g \in G$ , que levan  $m$  en  $g \cdot m$  sexan  $A$ -lineais.

A calquera grupo  $G$  pode asociárselle a categoría  $BG$  con un único obxecto  $\bullet$  e tal que as frechas da categoría estean definidas polos propios elementos do grupo:  $\text{Hom}_{BG}(\bullet, \bullet) = G$ . A categoría  $BG$  denomínase *categoría clasificante* de  $G$ . Para unha representación  $A$ -lineal de  $G$ ,  $M$ , denotaremos

$$\widetilde{M}: BG \longrightarrow A\text{-Mod}$$

o functor definido pola propia representación  $(M, \rho)$ , é dicir, tal que  $\widetilde{M}(\bullet) = M$  e que actúa sobre unha frecha  $g$  de  $BG$  como  $\widetilde{M}(g) = \rho(g)$ .

**Definición 5.1.2.** Para  $M$  unha representación  $A$ -lineal de  $G$  defínese o  *$A$ -módulo de invariantes* como

$$M^G = \{m \in M \mid gm = m, \forall g \in G\}$$

e o  *$A$ -módulo de coinvariantes*

$$M_G = \frac{M}{\langle gm - m \mid g \in G, m \in M \rangle}.$$

Pola súa definición, estes  $A$ -módulos poden expresarse en termos de límites cuxo índice vén dado pola categoría clasificante do grupo  $G$  en cuestión:

$$M^G = \varprojlim_{BG} \widetilde{M} \tag{5.1.2}$$

$$M_G = \varinjlim_{BG} \widetilde{M} \tag{5.1.3}$$

Estas expresións dos invariantes e coinvariantes, vitais para o estudo da (co)homoloxía de grupos, supuxeron a motivación para considerar o emprego da teoría de derivadores neste contexto. Para continuar avanzando precisaremos pasar de utilizar módulos a complexos de módulos, pois son a base do noso derivador homolóxico.

Un complexo de representacións pode ser interpretado como un functor

$$\widetilde{M}: BG \longrightarrow \mathbf{C}(A)$$

que corresponde a un homomorfismo de grupos

$$G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbf{C}(A)}(M)$$

con  $M$  pensado en  $\mathbf{C}(A)$ . Nótese que neste sentido podemos entender que  $\widetilde{M}$  é un obxecto de  $\mathbf{C}(A\text{-Mod}^{BG})$ . Noutras palabras, unha representación  $A$ -linear de  $G$  (un módulo ou, máis xeralmente, un complexo) é simplemente un obxecto de  $\mathcal{C}_A(BG)$ .

A partir desta idea podemos introducir o concepto de representación derivada: do mesmo xeito que no caso da categoría de complexos, unha representación derivada pode ser identificada cun complexo de representacións.

**Definición 5.1.3.** Unha *representación derivada*  $A$ -linear de  $G$  é un elemento de  $\mathcal{D}_A(BG)$ .

Sexa  $c$  o functor canónico  $c: BG \rightarrow e$ , o functor constante desde a categoría  $BG$ . Recuperando de (3.1.7) as adxuncións  $\Delta$ -functoriais derivadas do functor  $c^*$ , obtemos

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{L}\lim_{\rightarrow} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{D}_A(BG) & \xleftarrow{c^*} & \mathcal{D}_A(e) \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathbf{R}\lim_{\leftarrow} & \end{array}$$

onde, sendo coherentes coa notación precedente, denotaremos  $\mathbf{L}\lim_{\rightarrow} = \mathbf{L}c_!$  e  $\mathbf{L}\lim_{\leftarrow} = \mathbf{L}c_*$ .

Vexamos agora que os módulos de (co)homoloxía dun grupo xorden de xeito natural como homoloxías de complexos que se expresan en termos de (co)límites homotópicos.

**Proposición 5.1.4.** *Sexa  $M$  unha representación  $A$ -linear de  $G$ . Entón existen isomorfismos canónicos*

$$H_n(G, M) \cong H^{-n} \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}G}} \widetilde{M} \quad (5.1.4)$$

$$H^n(G, M) \cong H^n \mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}G}} \widetilde{M} \quad (5.1.5)$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Probemos en primeiro lugar (5.1.5). O functor  $H^n(G, M)$  é o functor derivado do functor de invariantes  $M \rightsquigarrow M^G$ . Como ambos funtores coinciden en grao cero por (5.1.2), os seus funtores derivados son isomorfos.

Do mesmo xeito se proba para (5.1.4), xa que neste caso  $H_n(G, M)$  é o functor derivado do functor de coinvariantes  $M \rightsquigarrow M_G$  e podemos aplicar (5.1.3).  $\square$

Sexa  $\phi: H \rightarrow G$  un homomorfismo de grupos. O seguinte diagrama de adxuncións representa a reciprocidade clásica de Frobenius, véxase [R, Example 4.1.11],

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ind}_H^G & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{C}(A\text{-Mod}^{\mathbf{B}G}) & \xrightarrow{\phi^\#} & \mathbf{C}(A\text{-Mod}^{\mathbf{B}H}) \\ & \curvearrowleft & \\ & \text{CoInd}_H^G & \end{array} \quad (5.1.6)$$

onde  $\phi^\#$  é o functor restrición ou functor esquecemento (como en [W, Definition 6.7.1]) e  $\text{Ind}_H^G$  e  $\text{CoInd}_H^G$  se adoitan coñecer como *funtores indución e coindución*, respectivamente.

Asociado ao morfismo  $\phi: H \rightarrow G$ , temos o functor inducido  $\mathbf{B}\phi: \mathbf{B}H \rightarrow \mathbf{B}G$ . Con esta notación,  $\phi^\#$  pode identificarse, pensando en complexos, con

$$\mathbf{B}\phi^*: \mathbf{C}(A\text{-Mod}^{\mathbf{B}G}) \longrightarrow \mathbf{C}(A\text{-Mod}^{\mathbf{B}H}).$$

e os funtores  $\text{Ind}_H^G$  e  $\text{CoInd}_H^G$  cos correspondentes adxuntos  $\mathbf{B}\phi_!$  e  $\mathbf{B}\phi_*$  asociados ao derivador  $\mathcal{C}_A$ , respectivamente.

**Proposición 5.1.5** (Reciprocidade de Frobenius derivada). *Sexa  $\phi: H \rightarrow G$  un homomorfismo de grupos. Para o derivador  $\mathcal{D}_A$  existen adxuntos*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{LB}\phi_! & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{D}_A(\mathbf{B}G) & \xrightarrow{\mathbf{B}\phi^*} & \mathcal{D}_A(\mathbf{B}H) \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathbf{RB}\phi_* & \end{array}$$

onde  $\mathbf{B}\phi^* = \phi^\#$ ,  $\mathbf{LB}\phi_! = \mathbf{LInd}_H^G$  e  $\mathbf{RB}\phi_* = \mathbf{RCoInd}_H^G$ .

*Demostración.* Como o functor  $\mathbf{B}\phi^*$  é exacto, este induce un functor entre as categorías derivadas. O resultado séguese directamente do axioma de derivador Der3 (Proposición 3.1.3) e da unicidade dos adxuntos.  $\square$

## 5.2 Cohomoloxía a través dos derivadores

Nesta sección probaremos as versións derivadas de resultados de (co)homoloxía de grupos, que tratan sobre o comportamento da (co)homoloxía en relación cos subgrupos e cocientes do grupo de partida. Para demostrar estes resultados, unha vez establecido o entorno matemático da sección anterior, utilizaremos os resultados de derivadores expostos nos capítulos previos.

### Lema de Shapiro

En primeiro lugar imos demostrar a versión derivada do Lema de Shapiro en (co)homoloxía de grupos, [W, Lemma 6.3.2]. Sexa agora  $H$  un subgrupo do grupo  $G$  e denotemos por  $\iota: H \hookrightarrow G$  a inclusión. Sexan  $c_G: \mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{e}$  e  $c_H: \mathbf{B}H \rightarrow \mathbf{e}$  os funtores constantes canónicos e  $\mathbf{B}\iota: \mathbf{B}H \rightarrow \mathbf{B}G$  a transformación natural asociada á inclusión  $\iota$ .

**Proposición 5.2.1** (Lema de Shapiro derivado). *Sexa  $\widetilde{M}$  en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{B}H)$  unha representación derivada de  $H$ . Entón existen os isomorfismos naturais*

$$\mathbf{L} \lim_{\mathbf{B}G} \mathbf{B}\iota_! \widetilde{M} \cong \mathbf{L} \lim_{\mathbf{B}H} \widetilde{M} \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{R} \lim_{\leftarrow \mathbf{B}G} \mathbf{B}\iota_* \widetilde{M} \cong \mathbf{R} \lim_{\leftarrow \mathbf{B}H} \widetilde{M} \quad (5.2.2)$$

*Demostración.* Dado que existen os isomorfismos sen derivar

$$\begin{aligned} \lim_{\rightarrow \mathbf{B}G} \mathbf{B}\iota_! \widetilde{M} &\cong \lim_{\rightarrow \mathbf{B}H} \widetilde{M} \\ \lim_{\leftarrow \mathbf{B}G} \mathbf{B}\iota_* \widetilde{M} &\cong \lim_{\leftarrow \mathbf{B}H} \widetilde{M} \end{aligned}$$

é suficiente con comprobar que  $\mathbf{B}\iota_!$  conserva obxectos  $q$ -proyectivos e que  $\mathbf{B}\iota_*$  conserva  $q$ -infectivos. Mais isto está garantido en virtude de [Li, (2.4.5.3)], posto que  $\mathbf{B}\iota_!$  ten como adxunto exacto pola dereita,  $\mathbf{B}\iota^*$ ; functor que á súa vez é adxunto exacto pola esquerda de  $\mathbf{B}\iota_*$ .  $\square$

**Corolario 5.2.2** (Lema de Shapiro). *Sexa  $M$  unha representación  $A$ -linear de  $H$ . Entón, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , existen isomorfismos canónicos*

$$\mathbf{H}_n(G, \text{Ind}_H^G(M)) \cong \mathbf{H}_n(H, M) \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{H}^n(G, \text{CoInd}_H^G(M)) \cong \mathbf{H}^n(H, M) \quad (5.2.4)$$

*Demostración.* Recordemos as identificacións  $\mathbf{B}\iota_! = \text{Ind}_H^G$  e  $\mathbf{B}\iota_* = \text{CoInd}_H^G$ , garantidas polas adxuncións de (5.1.6) e pola unicidade das mesmas. Unha vez establecidas estas igualdades, probemos en primeiro lugar (5.2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n(H, M) &\cong \mathbf{H}^{-n} \mathbf{L} \lim_{\rightarrow \mathbf{B}H} \widetilde{M} && \text{(por (5.1.4))} \\ &\cong \mathbf{H}^{-n} \mathbf{L} \lim_{\rightarrow \mathbf{B}G} \mathbf{B}\iota_! \widetilde{M} && \text{(por (5.2.1))} \\ &\cong \mathbf{H}^{-n} \mathbf{L} \lim_{\rightarrow \mathbf{B}G} \text{Ind}_H^G \widetilde{M} && (\mathbf{B}\iota_! = \text{Ind}_H^G) \\ &\cong \mathbf{H}_n(G, \text{Ind}_H^G(M)). && \text{(por (5.1.4))} \end{aligned}$$

Analogamente pódese probar (5.2.4), obtendo unha cadea de isomorfismos na que será preciso aplicar (5.1.5) e (5.2.2).  $\square$

É interesante comparar o tratamento que se fai deste resultado noutras referencias máis tradicionais, como por exemplo en [W, §6.3]. Na proposta presentada na presente memoria, unha vez interpretados os distintos elementos implicados en termos da teoría de derivadores, o Lema de Shapiro convértese nun resultado que é consecuencia simplemente das propiedades formais dos derivadores, en particular dos límites.

### Sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre

A continuación, imos realizar un procedemento semellante ao anterior para obter a versión derivada da clásica sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre facendo uso do derivador homolóxico. Neste caso, centrarémonos en estudar a cohomoloxía dos grupos cocientes.

A partir deste punto,  $H$  será un subgrupo normal do grupo  $G$  e manteremos a notación  $\iota: H \hookrightarrow G$  para o monomorfismo inclusión. Denotaremos por  $m: G \rightarrow G/H$  o epimorfismo canónico de paso ao cociente, cuxa existencia temos garantida por ser  $H$  normal en  $G$ .

**Proposición 5.2.3** (Lyndon-Hochschild-Serre derivada). *Sexa  $G$  un grupo e  $H$  un subgrupo normal de  $G$ . Sexan  $\iota: H \hookrightarrow G$  o morfismo inclusión e  $m: G \rightarrow G/H$  o morfismo de paso ao cociente. Entón, para unha representación derivada  $\widetilde{M}$  en  $\mathcal{D}_A(BG)$  existen os seguintes isomorfismos de funtores:*

$$\mathbf{L} \lim_{\mathbf{B}_{\frac{G}{H}}} \mathbf{L}Bm_! \widetilde{M} \cong \mathbf{L} \lim_{\mathbf{B}G} \widetilde{M} \quad (5.2.5)$$

$$\mathbf{R} \lim_{\mathbf{B}_{\frac{G}{H}}} \mathbf{R}Bm_* \widetilde{M} \cong \mathbf{R} \lim_{\mathbf{B}G} \widetilde{M} \quad (5.2.6)$$

*Demostración.* Denotemos por  $c_G: \mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{e}$  e  $c_{\frac{G}{H}}: \mathbf{B}_{\frac{G}{H}} \rightarrow \mathbf{e}$  os funtores canónicos constantes e consideremos tamén o functor  $Bm: \mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{B}_{\frac{G}{H}}$  inducido entre as categorías clasificantes polo paso ao cociente.

Por definición  $c_{\frac{G}{H}} \circ \mathbf{B}m = c_G$ . Por ser  $(-)^*$  un 2-functor, temos garantido que os seus adxuntos  $\mathbf{L}(-)_!$  e  $\mathbf{R}(-)_*$  tamén o son. Así, é sinxelo comprobar que se verifican as hipóteses do Teorema 1.4.16 e do Teorema 1.4.18 de xeito que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}c_{\frac{G}{H}!} \mathbf{L}Bm_! &\cong \mathbf{L}c_G! \\ \mathbf{R}c_{\frac{G}{H}*} \mathbf{R}Bm_* &\cong \mathbf{R}c_G* \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{L}c_! = \mathbf{L}\varinjlim$  por (3.1.5) e  $\mathbf{R}c_* = \mathbf{R}\varprojlim$  por (3.1.6), o resultado séguese de aplicar estes isomorfismos naturais sobre  $\widetilde{M}$ .  $\square$

Para pasar da versión derivada á versión clásica do teorema de Lyndon-Hochschild-Serre, descompostemos o argumento en varios resultados.

**Lema 5.2.4.** *Sexan  $\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}$  e  $\bullet_{G/H}\backslash\mathbf{B}G$  as categorías slice e coslice, respectivamente, asociadas ao functor  $\mathbf{B}m: \mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{B}\frac{G}{H}$ . Sexan  $\pi: \mathbf{B}G/\bullet_{G/H} \rightarrow \mathbf{B}G$  e  $\varpi: \bullet_{G/H}\backslash\mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{B}G$  os funtores esquecemento da Definición 2.1.13 e da Definición 2.1.14, respectivamente. Existen entón equivalencias de categorías*

$$\begin{aligned} \lambda: \mathbf{B}H &\xrightarrow{\sim} \mathbf{B}G/\bullet_{G/H} \\ \mu: \mathbf{B}H &\xrightarrow{\sim} \bullet_{G/H}\backslash\mathbf{B}G \end{aligned}$$

tales que  $\pi \circ \lambda = \mathbf{B}l$  e  $\varpi \circ \mu = \mathbf{B}l$ , respectivamente.

*Demostración.* Comezaremos describindo a categoría  $\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}$ : os seus obxectos correspóndense simplemente con elementos de  $G$  e as frechas entre dous obxectos  $g, g' \in G$  son aqueles elementos  $h \in H$  que verifican que  $hg' = g$ . Esta última condición é equivalente a que  $g$  e  $g'$  teñan a mesma clase de equivalencia en  $G/H$ . Noutras palabras,  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}}(g, g') = H = \mathrm{Aut}_{\mathbf{B}H}(\bullet)$ .

O functor  $\lambda$  leva o obxecto  $\bullet$  de  $\mathbf{B}H$  ao elemento neutro 1, considerado como un obxecto de  $\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}$  segundo a interpretación que acabamos de expoñer. Como  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}H}(\bullet, \bullet) = H$  por definición, temos que a frecha

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}H}(\bullet, \bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}}(\lambda(\bullet), \lambda(\bullet))$$

é bixectiva. Séguese así que  $\lambda$  é fielmente pleno.

Ademais, se pensamos na descrición previa, está claro que todos os elementos de  $\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}$  son isomorfos. Logo todo obxecto de  $\mathbf{B}G/\bullet_{G/H}$  é isomorfo ao obxecto  $\lambda(\bullet)$  e isto garante que  $\lambda$  é denso. En conclusión,  $\lambda$  é fielmente pleno e denso, por tanto podemos asegurar que é unha equivalencia de categorías, como se quería demostrar.

Finalmente, está claro que  $\pi \circ \lambda = \mathbf{B}\iota$  en obxectos. Por outra banda, en canto ás frechas, esta composición identifica cada  $h$  en  $H$  coa frecha  $h$  de  $\mathbf{B}H$ . O mesmo ocorre se pensamos en  $h$  como elemento dentro de  $G$  e equivalentemente como frecha de  $\mathbf{B}G$ .

Para  $\bullet_{G/H} \setminus \mathbf{B}G$  o razoamento é análogo. A única diferenca radica en que o conxunto de frechas entre  $g$  e  $g'$  de  $G$ , pensadas como obxectos da categoría  $\bullet_{G/H} \setminus \mathbf{B}G$ , está formado por aqueles  $h \in H$  tales que  $g' = gh$ . O resto de argumentos funcionan do mesmo xeito, incluíndo o feito de que  $\varpi \circ \mu = \mathbf{B}\iota$ .  $\square$

**Lema 5.2.5.** *Sexa  $M$  unha representación  $A$ -linear de  $G$  e  $\widetilde{M}$  en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{B}G)$  a súa correspondente representación derivada. Entón, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , verifícase*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n(H, M) &\cong \mathbf{H}^{-n} \mathbf{L} \mathbf{B}m_1 \widetilde{M} \\ \mathbf{H}^n(H, M) &\cong \mathbf{H}^n \mathbf{R} \mathbf{B}m_* \widetilde{M} \end{aligned}$$

onde nos elementos á esquerda dos isomorfismos se considera  $M$  como unha representación  $A$ -linear de  $H$ .

*Demostración.* Denotemos por  $c_H: \mathbf{B}H \rightarrow \mathbf{e}$  o functor canónico constante. Calquera  $\widetilde{M}$  en  $\mathcal{D}_A(\mathbf{B}G)$  pode ser considerada como unha representación  $A$ -linear de  $H$  tomando  $\mathbf{B}\iota^* \widetilde{M}$ . Cometeremos un abuso de notación, como no enunciado do resultado, escribindo  $\mathbf{H}_n(H, M)$ , mais realmente estaremos falando implicitamente de  $\mathbf{H}_n(H, \mathbf{B}\iota^* \widetilde{M})$ . Así, pola Proposición 5.1.4, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n(H, M) &\cong \mathbf{H}^{-n} \mathbf{L} \lim_{\mathbf{B}H} \mathbf{B}\iota^* \widetilde{M} \\ \mathbf{H}^n(H, M) &\cong \mathbf{H}^n \mathbf{R} \lim_{\mathbf{B}H} \mathbf{B}\iota^* \widetilde{M} \end{aligned}$$

Por outra banda, sendo  $\pi: \mathbf{B}G/\bullet_{G/H} \rightarrow \mathbf{B}G$  e  $\lambda: \mathbf{B}H \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}G/\bullet_{G/H}$  os funtores definidos no Lema 5.2.4, podemos escribir a seguinte cadea de isomorfismos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}Bm_l \widetilde{M} &= \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}G/\bullet_{G/H}}} (\widetilde{M} \circ \pi) && \text{(Definición 2.1.13)} \\
&\cong \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}H}} (\widetilde{M} \circ \pi \circ \lambda) && \text{(Lema 5.2.4)} \\
&= \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}H}} (\widetilde{M} \circ \mathbf{B}\iota) && \text{(Lema 5.2.4)} \\
&= \mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}H}} \mathbf{B}\iota^* \widetilde{M} && \text{(por definición de } \mathbf{B}\iota^*)
\end{aligned}$$

Aplicando entón  $\mathbf{H}^{-n}$  obteremos o isomorfismo enunciado.

Analogamente, sendo  $\varpi: \bullet_{G/H} \backslash \mathbf{B}G \rightarrow \mathbf{B}G$  e  $\mu: \mathbf{B}H \xrightarrow{\sim} \bullet_{G/H} \backslash \mathbf{B}G$  os funtores xa definidos no Lema 5.2.4, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}Bm_* \widetilde{M} &= \mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \bullet_{G/H} \backslash \mathbf{B}G}} (\widetilde{M} \circ \varpi) && \text{(Definición 2.1.14)} \\
&\cong \mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}H}} (\widetilde{M} \circ \varpi \circ \mu) && \text{(Lema 5.2.4)} \\
&= \mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}H}} (\widetilde{M} \circ \mathbf{B}\iota) && \text{(Lema 5.2.4)} \\
&= \mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}H}} \mathbf{B}\iota^* \widetilde{M} && \text{(por definición de } \mathbf{B}\iota^*)
\end{aligned}$$

Aplicando agora  $\mathbf{H}^n$  obtemos o segundo isomorfismo, concluíndo a proba.  $\square$

**Teorema 5.2.6** (Sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre). *Para unha representación  $A$ -linear  $M$  de  $G$ , as seguintes sucesións espectrais converxen*

$$E_{pq}^2 = \mathbf{H}_p(G/H, \mathbf{H}_q(H, M)) \Rightarrow \mathbf{H}_{p+q}(G, M) \quad (5.2.7)$$

$$E_2^{pq} = \mathbf{H}^p(G/H, \mathbf{H}^q(H, M)) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}(G, M) \quad (5.2.8)$$

*Demostración.* Por ter os isomorfismos (5.2.5) e (5.2.6), estamos nas hipóteses de [GM, III, Theorem 7.7] e do resultado dual. Así, podemos garantir a converxencia das sucesións espectrais

$$E_{pq}^2 = H^{-p}(\mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}_{\mathbb{H}}^G}} H^{-q}(\mathbf{L} \mathbf{B} m_! \widetilde{M})) \Rightarrow H^{-(p+q)}(\mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}G}} \widetilde{M}) \quad (5.2.9)$$

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}_{\mathbb{H}}^G}} H^q(\mathbf{R} \mathbf{B} m_* \widetilde{M})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}G}} \widetilde{M}) \quad (5.2.10)$$

Para obter a partir da parte esquerda da expresión precedente (5.2.9) a correspondente da expresión (5.2.7) do enunciado do teorema consideraremos os isomorfismos:

$$\begin{aligned} H^{-p}(\mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}_{\mathbb{H}}^G}} H^{-q}(\mathbf{L} \mathbf{B} m_! \widetilde{M})) &\cong H^{-p}(\mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}_{\mathbb{H}}^G}} H_q(H, M)) && \text{(Lema 5.2.5)} \\ &\cong H_p(G/H, H_q(H, M)) && \text{(por (5.1.4))} \end{aligned}$$

Por outra banda, utilizando outra vez (5.1.4) podemos garantir que para a parte dereita de (5.2.9) se verifica

$$H^{-(p+q)}(\mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbf{B}G}} \widetilde{M}) \cong H_{p+q}(G, M)$$

obtendo así a expresión (5.2.7).

Para o outro caso, (5.2.8), a demostración é análoga. Operando primeiro á esquerda de (5.2.10) tense que

$$\begin{aligned} H^p(\mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}_{\mathbb{H}}^G}} H^q(\mathbf{R} \mathbf{B} m_* \widetilde{M})) &\cong H^p(\mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}_{\mathbb{H}}^G}} H^q(H, M)) && \text{(Lema 5.2.5)} \\ &\cong H_p(G/H, H^q(H, M)) && \text{(por (5.1.5))} \end{aligned}$$

e aplicando logo (5.1.5) á dereita da mesma expresión obtemos:

$$H^{p+q}(\mathbf{R} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbf{B}G}} \widetilde{M}) \cong H^{p+q}(G, M)$$

□

*Observación 5.2.7.* Este último teorema, que é unha pedra angular na teoría de (co)homoloxía de grupos, dedúcese simplemente da 2-functorialidade dos derivadores. Nótese ao comparar con referencias clásicas, como por exemplo [W, 6.8.2], que o feito de que unha  $G$ -representación induza unha  $H$ -representación vai implícito na notación. Na nosa descrición, este feito ponse de manifesto pola aparición do functor  $\mathbf{B}l^*$  e a identificación da (co)homoloxía respecto a  $H$  a través funtores  $\mathbf{B}m_l$  e  $\mathbf{B}m_*$ , respectivamente, no Lema 5.2.5.

---

---

# Conclusions

---

---

Throughout this dissertation, we have achieved the main objectives stated. Namely:

Chapter 1 is devoted to recall known results casted in a language and notations convenient for our purposes, and setting the basic notations that will be used throughout the manuscript. We present some basic results and constructions on the unbounded category of complexes that will be needed afterwards.

In Chapter 2 we present an introduction to derivators theory, following the point of view of Groth. One of the main observations is that the diagram category of complexes over a Grothendieck category with enough projectives has this property too. Therefore all such categories possess all (co)limits and can be organized in a representable derivator. We use it later to give a construction of the derivator associated to the derived category by deriving the relevant functors. We also give a detailed description of the Kan extension functors  $u_*$  and  $u_!$  that will be of use along the manuscript.

The word “unbounded” is used here in two senses: first, we consider unbounded complexes of objects of the initial abelian category; and second, the 2-category of diagrams on which homotopy (co)limits and homotopy Kan extensions are defined, namely, the full 2-category of small categories. So, there is no bound neither on complexes nor in the shape of the (co)limit diagrams.

In Chapter 3 we prove one of our main results: the verification of the axioms of derivator with values in derived categories, defining the homological derivator. The axioms Der1 and Der2 follow from the structure already present in complexes. Axiom Der3 is proved by exhibiting that, given a morphism  $u$  between small categories, the derived functors of  $u_*$  and  $u_!$ , namely  $\mathbf{R}u_*$  and  $\mathbf{L}u_!$ , are the adjoints required in the derived context. This happens essentially

because they are defined by Kan extensions. Axiom Der4 uses an argument on preservation of  $q$ -projectivity (and  $q$ -injectivity) for the functors from the *slice* and *coslice* categories. In section 3.2 we prove that the derivator is strong Der5. For this, we make an explicit homotopy rectification of squares using basic homological tools, namely, cylinders and homotopies.

In section 3.3 we prove another important result: for a Grothendieck category  $\mathbf{A}$  with enough projective objects, its associated homological derivator  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$  is stable. A consequence of this construction is that the classical cone construction agrees with the natural cone provided by the derivator, showing its true intrinsic nature.

It is perhaps noteworthy to point out that the structure of derivator is a consequence of the existence of unbounded  $q$ -projective and  $q$ -injective resolutions and no deeper results are required.

The following chapters complete the work by giving applications provided by this framework. Chapter 4 gives a description of the localization functor associated to a specialization closed subset  $Y$  of the spectrum of a commutative noetherian ring  $A$ . In the case where  $Y$  is closed, countable homotopy colimits *a la* Bökstedt and Neeman [BN] suffice. When  $Y$  is arbitrary we use a more general diagram of Koszul complexes to extend the description. Our methods show that this approach fits naturally in the context of derivators.

Finally, in Chapter 5 we show that the structure of the homological derivator provides a more general (arbitrary base ring, complexes as coefficients) and simpler approach to some basic theorems of group (co)homology. For example: the derived Frobenius reciprocity is a restatement of Der3; Shapiro's Lemma follows again from the relations between de adjoint functors given by the derivators; and we give a version of Lyndon-Hochschild-Serre, interpreted as a composition of derived functors that follows from 2-functoriality of  $(-)_*$  and  $(-)_!$ .

In conclusion, our results provide a new set of flexible tools to develop advanced constructions in homological algebra. We expect it to provide new applications in the future.

---

---

## Bibliografía

---

---

- [AJS1] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Souto Salorio, M. J.; Localization in categories of complexes and unbounded resolutions, *Canad. J. Math.* **52** (2000), no. 2, 225–247.
- [AJS2] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Souto Salorio, M. J.; Bousfield localization on formal schemes, *J. Algebra* **278** (2004), no. 2, 585–610.
- [BBD] Beilinson A.; Bernstein J.; Deligne P.; Faisceaux Pervers, *Astérisque* **100** (1983), 5–171.
- [BG] Borel A.; Grivel P.; Kaup B.; Haefliger A.; Malgrange B.; Ehlers F.; *Algebraic D-Modules. Perspectives in Mathematics*, **2**, Academic Press, 1987.
- [BN] Bökstedt, M.; Neeman, A.; Homotopy limits in triangulated categories, *Compositio Math.* **86** (1993), 209–234.
- [BS] Brodmann, M. P.; Sharp R. Y.; *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*. Cambridge studies in advanced mathematics, **136**, Cambridge University Press, 2012.
- [C1] Cisinski, D. C.; Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles, *Ann. Math. Blaise Pascal* **10** (2003), no. 2, 195–244.
- [C2] Cisinski, D. C.; Catégories dérivables. *Bull. Soc. Math. France* **138** (2010), no. 3, 317–393.
- [CD] Cisinski, D. C.; Déglise, F.; Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories, *Theory Appl. Categ.* **11** (2009), no. 1, 219–260.

- [CN] Cisinski, D. C.; Neeman, A.; Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées, *Homology Homotopy Appl.* **20** (2008), no. 17, 605–649.
- [E] Eisenbud, D.; *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Fra] Franke J.; Uniqueness theorems for certain triangulated categories possessing an Adams spectral sequence, *Preprint* (1996).
- [Fre] Freyd P.; *Abelian categories*. Theory and Applications of Categories **3**, 2003.
- [Ga] Gabriel, P.; Des catégories abéliennes, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **90** (1962), 323–448.
- [GZ] Gabriel, P.; Zisman, M.; *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, **35**, Springer Berlin Heidelberg, 1967.
- [Gr1] Groth, M.; Derivators, pointed derivators, and stable derivators. *Algebr. Geom. Topol.* **13** (2013), no. 1, 313–374.
- [Gr2] Groth, M.; Book project on derivators: Introduction to the theory of derivators. *Book in progress* (2016).
- [G1] Grothendieck, A.; Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), no.2 , 119-221.
- [G2] Grothendieck, A.; *Les dérivateurs*. Manuscrito, 1990.
- [GM] Gelfand, S. I.; Manin, Y. I.; *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Ha] Hartshorne, R.; *Residues and Duality*. Lecture Notes in Math., **20**, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [Ho] Hopkins, M. J.; Global methods in homotopy theory, *Homotopy Theory-Proc. Durham Symp. 1985*. Cambridge University Press, 1987.
- [Hel] Heller, A.; Homotopy theories, *Mem. Amer. Math. Soc.* **71** (1988), no. 383.

- [KS1] Kashiwara M.; Schapira P.; *Sheaves on manifolds*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **292**, 1990.
- [KS2] Kashiwara M.; Schapira P.; *Categories and sheaves*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **332**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [Ke1] Keller B.; Derived categories and universal problems, *Comm. Algebra* **19** (1991), 699–747.
- [Ke2] Keller B.; *Appendice: Le dérivateur triangulé associé à une catégorie exacte* de *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*. Contemporary Mathematics, 2007.
- [Kr] Krause. H. *Homological theory of representations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **195**, Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [Ku] Kurosch, A. G.; Liwshitz, A. Ch.; Schulgeifer, E. G.; Zalenko, M. S. *Zur Theorie der Kategorien*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
- [Li] Lipman, J.; Notes on derived categories and Grothendieck Duality. *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*, Lecture Notes in Math., **1960**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2009, 1–259.
- [ML] Mac Lane S.; *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [Mal] Maltiniotis G.; Introduction à la théorie des dérivateurs, d’après Grothendieck, *Preprint* (2001).
- [M] Moser, L.; *Basic Localizers and Derivators*, Master Thesis, Lausanne, 2017.
- [N1] Neeman, A.; The chromatic tower for  $D(R)$ , *Topology* **31** (1992), no. 3, 519–532.
- [N2] Neeman A.; The connection between the  $K$ -theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **25** (1992), no. 5, 547–566.

- [P] Puppe, D.; On the stable homotopy category. *Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications (Budva, 1972)* (1973), 200–212.
- [R] Riehl, E.; *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals, **148**, Dover Publications, 2017.
- [S] Spaltenstein, N.; Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.* **65** (1988), no. 2, 121–154.
- [SGA 4<sub>1</sub>] Artin, M.; Grothendieck, A.; Verdier, J. L. (avec la collaboration de Bourbaki, N.; Deligne, P.; Saint-Donat, B.); *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Tome 1: Théorie des topos. (French) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Lecture Notes in Mathematics, **269**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [V1] Verdier J. L.; Des catégories dérivées des catégories abéliennes, *Astérisque* **239** (1996), *Soc. Math. France*, Paris.
- [V2] Verdier J. L.; Catégories dérivées. Quelques resultats (Etat 0). *Sémin. Geom. algebr. Bois-Marie*, SGA 4 $\frac{1}{2}$ , Lect. Notes Math. **569**, 1977, 262–311.
- [W] Weibel, C. A.; *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**, Cambridge University Press, 1994.



As operacións básicas en cohomoloxía requiren do emprego das categorías derivadas. Esta noción presenta limitacións cando se realizan construcións de paso ao límite, pero a través da teoría de derivadores é posible de inir conceptos lixeiramente máis débiles que permitan en certo sentido superar esas limitacións. O obxectivo principal será obter unha descrición lexible e sinxela da estrutura de derivador da categoría derivada dunha categoría de Grothendieck con su icientes proxectivos, para desenvolver as operacións mencionadas e aplicalas ao estudo de problemas tanto no ámbito da álgebra conmutativa e a xeometría alxébrica como da teoría de grupos.