FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Os Espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

Noelia Núñez Pereiro

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Os Espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

Noelia Núñez Pereiro

Xullo, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática

Título: Os espazos $L^p(X\mathcal{M}, \mu)$

Breve descrición do contido

Segundo algúns autores, a superioridade da integral de Lebesgue fronte á integral de Riemann foi indiscutible a partir dos resultados de F. Riesz (1880 -1956) e Fischer (1875-1954) que, de formas lixeiramente distintas, no ano 1907 caracterizan os coeficientes de Fourier das funcións de "cadrado sumable" no intervalo $[0, 2\pi]$, proporcionando un camiño de ida e volta entre os espazos ℓ^2 e L^2. Eses resultados foron posibles grazas a unha propiedade que, na actualidade, formulamos do seguinte xeito: L^2 é completo. Posteriormente, Riesz obtería unha versión máis xeral desta propiedade, facéndoa extensiva a outros espazos. O obxectivo deste traballo é iniciar o estudo dos espazos, $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é un espazo de medida abstracto, previa introdución dos conceptos e resultados que proporcionen os coñecementos necesarios para levar a cabo este estudo (noción de espazo de medida; integración en espazos de medida abstractos, etc.).

Recomendacións

É recomendable ter un coñecemento axeitado de nocións básicas de medida e integral de Lebesgue estudados ó longo do grao.

Outras observacións

Índice xeral

Resumo

Os espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, introducidos por F. Riesz en 1910, son uns dos espazos máis importantes de clases de funcións medibles. A partir da Teoría da Medida e Integración abstracta, presentamos nestre traballo un estudo da definición e construción dos espazos L^p e das súas principais propiedades. Comentaremos tamén algúns resultados sobre densidade e inclusión e veremos algúns exemplos particulares de espazos L^p.

Abstract

$L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ spaces, which were introduced by F. Riesz in 1910, are one of the most important spaces for classes of measurable functions. From the Abstract Measure and Integration Theory, in this work we study the definition and construction of L^p spaces and their properties. We also comment some results about density and inclusion and we present some particular examples.

Introdución

Os espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ foron introducidos por F. Riesz en 1910 como unha xeneralización dos espazos de Hilbert. Pódese dicir que estes espazos son, en certo sentido, o prototipo de todos os espazos funcionais. Destacan por satisfacer numerosas propiedades que os convirten nun obxecto de gran importancia dende o punto de vista da Análise Matemática e das súas aplicacións.

Os espazos de Lebesgue son, sen dúbida, un dos exemplos máis importantes dos espazos de clases de funcións medibles. Pero, que entendemos por *función medible*? Máis concretamente, que entendemos por *medida*? Hoxe en día, de maneira concreta, non é difícil entender o que é unha medida e mesmo obter o seu valor nalgúns casos. Por exemplo, todos entendemos o que é unha lonxitude, como a distancia entre dúas cidades, ou o cardinal dun conxunto, como o número de persoas que hai nunha aula. Veremos ó longo deste traballo que este concepto de medida pódese estender de maneira máis abstracta e obter así un valor da medida de conxuntos máis arbitrarios.

Pero isto que na actualidade nos parece tan claro non sempre foi así. No capítulo 1 deste traballo presentamos unhas notas históricas sobre o nacemento e evolución do concepto de medida. Veremos tamén que a necesidade de obter un valor para certas medidas motivou o nacemento da integral. Introduciremos a integral de Riemann, e veremos que presenta certas "deficiencias", como o mal comportamento ante o paso ó límite ou o feito de que son poucas as funcións integrables neste sentido. Estas foron as principais razóns que deron lugar a extensión da noción de integral e a formalización do concepto de medida. Introducimos aquí a integral de Lebesgue, que elimina, en parte, as deficiencias citadas anteriormente e que supuxo un gran paso para a evolución das matemáticas e da Teoría de Integración e Medida.

No capítulo 2 introducirémonos xa, máis profundamente, na Teoría da Medida e Integración. Comezaremos describindo os obxectos base para o seu desenvolvemento, os espazos de medida. Definimos aquí o concepto de medida e presentamos as súas propiedades. Introducimos tamén o concepto de medida exterior e vemos como a partir desta, mediante a condición de Carathéodory, podemos obter unha medida completa e o completamento dun espazo de medida. A segunda sección está dedicada ó estudo das funcións medibles. Expóñense aquí as súas principais propiedades e o seu bo comportamento fronte ás operacións aritméticas habituais ou ó proceso de tomar límite, cando este existe. Veremos tamén unha clase de funcións medibles importantes, as funcións simples, e probaremos que as funcións medibles simples abondan para representar calquera función medible. Isto facilitaranos a proba de moitos dos resultados posteriores. Na sección 2.3 dedicarémonos ao estudo da integral das funcións medibles e as súas principais propiedades. Presentamos nesta sección un método para obter unha medida a partir de dita integral. Destacan aquí pola súa importancia os teoremas da converxencia mónotona e da converxencia dominada.

No capítulo 3 introducimos xa os espazos de Lebesgue, $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$. As seccións 3.1 e 3.3 están dedicadas, respectivamente, aos espazos L^1 e L^∞, mentres que na sección 3.2 estúdanse os espazos L^p para o resto de valores de p. Introdúcense primeiramente os respectivos espazos $\mathcal{L}^p$, os cales veremos que son espazos vectorias complexos, dotados dunha aplicación que é unha seminorma. Como o noso interese reside nos espazos vectorias normados, mostraremos un procedemento para obtelos. Veremos que, identificando convenientemente as funcións iguais en case todo punto e pasando ao espazo cociente, obtemos os desexados espazos L^p, que seguen sendo espazos vectoriais complexos sobre os cales é posible xa definir unha norma. Na sección 3.2 probamos ademáis as desigualdades de Hölder e Minkowski, que serán de gran utilidade para a obtencións dos principais resultados de interese. Entre os resultados de gran importancia deste capítulo destacan os diferentes teoremas sobre a completitude dos espazos L^p para os diferentes valores de $p \in [1, \infty]$. Queda así probado que ditos espazos son espazos de Banach.

Finalmente, no capítulo 4, comezaremos vendo algúns subespazos densos dos distintos espazos L^p. Na sección 4.2 mostraremos como, engadindo certas hipóteses adicionais, é posible establecer unha relación de inclusión entre os espazos L^p. En particular, probaremos que para $1 \leq p < q < r \leq \infty$ tense que $L^p \cap L^r \subset L^q \subset L^p + L^r$. Na sección 4.3 definimos os espazos de sucesións ℓ^p como un exemplo de espazo L^p e reformularemos algúns dos resultados adaptándoos a este caso en particular. Finalmente, presentaremos o espazo L^2, formado polas clases de funcións de cadrado integrable, e veremos que ademais ten estrutura de espazo de Hilbert.

Capítulo 1

Orixe e desenvolvemento

A Teoría da medida xorde a partir do concepto de integral, máis concretamente a partir da integral de Lebesgue. Tanto o concepto de *medida* como o de *integral* foron introducidos fai miles de anos e desenvolvidos ó longo da historia. Os primeiros problemas de medida xorden da necesidade de calcular lonxitudes, áreas ou volumes de figuras xeométricas. O *Papiro de Moscú*, un papiro exipcio de 1800 a.C., e o *Rhind* son dous dos documentos que conteñen os problemas matemáticos máis antigos que se coñecen. Entre eles destacan o cálculo do volume dun tronco de pirámide ou o cálculo da área dunha superficie curva.

En cambio, non será ata o libro de Euclides (300 a.C.), *Los Elementos*, onde sen precisar unha definición de *medir* , aparecen as primeiras demostracións e teoremas relativos a áreas e volumes.

Anos máis tarde, xa na Antiga Grecia, Arquímedes (287-212 a.C.) consegue obter de maneira intuitiva valores de áreas e volumes de certas figuras usando procedementos semellantes aos que séculos máis tarde se coñecerían como sumas de Riemann.

Non se produciron moitos avances significativos durante séculos, ata que no século XVII, coas obras e aportacións de Newton (1643-1727) e Leibnitz (1646-1716), prodúcese o nacemento do cálculo infinitesimal. En particular, o Teorema Fundamental do Cálculo expresa a relación entre os problemas de tanxentes e áreas, é dicir, a relación entre os problemas de derivación e integración. A partir de entón, estas dúas operacións pasan a considerarse unha a inversa da outra. Ademais, o Teorema Fundamental do Cálculo proporciona un importante método para o cálculo de áreas, que á súa vez motiva a idea de integral. Obtense nese momento a primera relación entre o cálculo dunha integral e a obtención dunha medida.

No século XIX prodúcese definitivamente o nacemento das teorías modernas de medida e integración. A primeira definición de *integral* foi a dada por Cauchy (1789-1857) no ano 1823. Para cada función continua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e cada partición do intervalo $\mathcal{P} =$

$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ considerou as sumas

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

sendo unha partición dun intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un conxunto finito de números $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tales que $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_{i-1} \leqslant x_i$ para $i = 1, ..., n$. Defínese entón a integral de Cauchy como o valor do límite destas sumas cando $\|\mathcal{P}\| \longrightarrow 0$. É dicir,

$$\int_a^b f = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} S(\mathcal{P}, f)$$

onde $\|\mathcal{P}\| = max\{x_i - x_{i-1}; i = 1, ..., n\}$

En 1854, B. Riemann (1826-1866), coa xeneralización da integral de Cauchy estendeu o concepto de integral a unha maior clase de funcións prescindindo da hipótese de continuidade. Para unha función $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ unha partición do intervalo $[a, b]$, Riemann considerou sumas semellantes ás de Cauchy pero cunha pequena modificación respecto aos puntos nos que se avalía a función. As sumas de Riemann eran da forma:

$$S(\mathcal{P}, f, \{t_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Defínese agora a integral de Riemann como o límite destas sumas cando a lonxitude de cada subintervalo tende a cero e dirase que unha función f é Riemann-integrable no intervalo $[a, b]$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tales que, sendo $\mathcal{P}$ calquera partición de dito intervalo con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, cúmprese que

$$\left| S(\mathcal{P}, f, \{t_i\}_{i=1}^n) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Posteriormente, en 1875, J. G. Darboux (1842-1917) proporcionou unha xeneralización das sumas de Riemann e obtivo unha caracterización para as funcións Riemann-integrables. Darboux introduciu os conceptos de suma superior,

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

e suma inferior,

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

onde

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ e } m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

A partir destas sumas, Volterra (1860-1940) introduciu os conceptos de integral superior e inferior, que poden expresarse da seguinte maneira:

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \text{ partición de } [a, b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \text{ partición de } [a, b]\}.$$

Obeteñen así unha nova caracterización das funcións Riemann- integrables: unha función acotada dirase Riemann- integrable se a súas integrais superior e inferior coinciden.

Outras caracterizacións de funcións Riemann- integrables relacionan a integrabilidade de funcións limitadas co tamaño do conxunto dos puntos de discontinuidade. Para poder medir o tamaño destes conxuntos era necesario saber que se entendía por *medida* e por *conxunto medible.*

A primeira definición de *medida* para conxuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ data de 1885 e débese a G. Cantor (1845-1918). Este consideraba unións finitas de esferas de radio $r > 0$ centradas nos puntos do conxunto A a medir e chamáballe "medida de A", $m(A)$, ao ínfimo dos volumes destas unións.

O primeiro en proporcionar unha definición de *conxunto medible* foi G. Peano (1858-1932). Peano considerou para cada $A \subset \mathbb{R}^2$ a medida exterior do conxunto A (o ínfimo das áreas dos polígonos que conteñen a A) e a medida interior (o supremo das áreas dos polígonos contidos en A) e definiu conxunto medible como aquel cuxas medidas exterior e interior coindiden. Ademais fixo patente a relación entre medida e integración demostrando que unha función acotada era Riemann-integrable se, e só se, o conxunto $A \subset \mathbb{R}^2$ limitado pola gráfica de f e as rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ era medible e $\int_a^b f(x)dx = m(A)$.

En 1892 C. Jordan (1838-1922) proporcionou unha definición equivalente á de Peano pero algo máis sinxela. Simplemente considerou mallas de cadrados no plano en lugar de considerar polígonos para aproximar o conxunto A. Jordan xeneralizou a integral de Riemann a funcións limitadas de n variables definidas en conxuntos J-medibles. A principal diferenza foi facer as particións do intervalo de definición en subconxuntos J-medibles en vez de facelas en intervalos.

A finais do século XIX E. Borel (1871-1956) deu un paso importante introducindo a aditividade numerable para as medidas e dando unha definición de conxuntos de medida nula. Borel concluíu que os racionais de $[0, 1]$ medían menos que $\sum \frac{1}{n^2}$, e, por tanto, cero. Outra aportación de Borel foi a definición dos conxuntos que se poden obter a partir dos abertos e dunha medida aditiva numerable para tales conxuntos. Posteriormente ditos conxuntos serían os coñecidos como *conxuntos Borelianos.*

A aditividade numerable de Borel foi unha propiedade básica que permitiría obter resultados fundamentais na Teoría da medida e integración abstracta, desenvolvida especialmente por H. Lebesgue (1875-1941).

O Teorema Fundamental do Cálculo mostra a relación entre o proceso de integración e diferenciación, e que estas operacións poden considerarse unha a inversa da outra. Por unha parte temos que se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función R-integrable e definimos a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F será continua en $[a,b]$. Ademais, para todo punto $c \in [a,b]$ no que f sexa continua, a función F será diferenciable e $F'(c) = f(c)$. Por outra banda, se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e a súa derivada f' son funcións R-integrables en $[a,b]$, entón $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

A principios do século XX, Lebesgue observou na súa tese doutoral de 1902 que diferenciación e integración non podían considerarse operacións inversas, xa que existían funcións derivables para as cales o Teorema Fundamental do Cálculo non era válido.

Outra limitación da integral de Riemann era o mal comportamento do paso ó limite baixo o signo integral. Por exemplo, sexa $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha enumeración dos números racionais de $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sexa $A_n := \{r_1, r_2, ..., r_n\}$. Consideramos a sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcións definidas no intervalo $[0,1]$ dada por :

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_n \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus A_n \end{cases}$$

Nótese que cada g_n ten soamente un número finito de discontinuidades, logo son Riemann integrables, con integral nula no intervalo $[0,1]$. Sen embargo, temos que a sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe á función de Dirichlet:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se x é racional} \\ 0, & \text{se x é irracional} \end{cases}$$

e esta non é Riemann integrable.

Vistas as deficiencias da integral de Riemann, Lebesgue trataría de encontrar unha nova definición de integración onde si se verificase o Teorema Fundamental do Cálculo e para a cal non xurdiran problemas ao intercambiar a orde de límite e integral.

A idea innovadora de Lebesgue foi considerar sumas asociadas á particións do intervalo dos valores da función en lugar de tomalas no propio intervalo, como fixeran anteriormente Cauchy e Riemann. Isto permitiría estender o concepto de integral a unha clase de funcións máis amplia.

Para cada función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, Lebesgue céntrase no intervalo $[l, L]$ dos valores que toma f. Para cada partición de dito intervalo,

$$l = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = y_0 < y_1 < ... < y_i < ... < y_n = L = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Lebesgue considera as sumas

$$y_0 m(E_0) + \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \quad e \quad y_0 m(E_0) + \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$$

onde $E_0 = \{x : f(x) = y_0\}$, $E_k = f^{-1}((y_{k-1}, y_k])$ se $k > 1$ e $m(E_k)$ denota a medida de E_k. Dirase así que f é integrable en $[a, b]$ se o límite das sumas anteriores cando o $\text{máx}\{y_k - y_{k-1}, k = 1, ..., n\}$ tende a 0 coinciden, independentemente dos y_k escollidos. En tal caso, o valor deste límite será o valor da integral de Lebesgue de f en $[a, b]$.

Con esta nova integral, Lebesgue consegue probar a posibilidade de integrar funcións limitadas discontinuas sen perder a relación entre derivación e integración proporcionada polo Teorema Fundamental do Cálculo, algo que non era posible coa integral de Riemann. Así queda probado que é posible integrar unha maior clase de funcións que as Riemann-integrables.

Outro importante éxito desta integral foi o descubrimento dos chamados *teoremas de converxencia*, que abordan o paso ó límite da integral. Demostrouse así a posibilidade de intercambiar a orde das operacións límite e integral sen alterar o valor dos resultados. Isto facilitaría importantes solucións a problemas de converxencia de series funcionais ou á integración das mesmas, problemas fundamentais para o estudo da representación de funcións mediante series trigonométricas.

A integral de Lebesgue e a súa construción permitirían dar un gran paso no desenvolvemento da Teoría da Medida, que foi introducida de forma máis abstracta por M. Fréchet (1878-1973).

Fréchet introduce na súa tese doutoral en 1906 as nocións de espazo métrico, compacidade, completitude e estuda estas propiedades sobre algúns espazos especiais. En particular, estudou a métrica da converxencia uniforme no espazo de funcións reais continuas e a converxencia puntual sobre outros espazos de funcións. A idea de estudar estas propiedades simultaneamente co desenvolvemento da Teoría de Integración de Lebesgue deron orixe a outro tipo de espazos funcionais, os espazos L^p:

$$L^p[a, b] = \left\{ f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue-medible e } \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

que serán o principal obxecto de estudo deste traballo.
O caso $p = 1$ xa estaba implícito con anterioridade nos traballos de Lebesgue. O caso $p = 2$ xurdiu en 1907 cando F.Riesz (1880-1956) e E. Fischer (1875-1954) descubriron, independentemente, o famoso Teorema de Riesz-Fischer que establece que todo espazo

métrico $L^2[a,b]$ é completo, separable e isomorfo ao espazo de Hilbert de sucesións:

$$\ell^2 = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.\}$$

Os espazos L^p para $1 < p < \infty$, foron introducidos en 1910 por F.Riesz para estudar e resolver o problema da existencia dunha función f cumprindo que

$$\int_a^b f(x)g_n(x)dx = c_n,\ n = 1, 2, ...$$

onde $\{g_n\}$ é unha sucesión de funcións e c_n unha sucesión de escalares prefixados.

Podemos asegurar que, os chamados *Espazos de Lebesgue*, supuxeron un avance importante para o desenvolvemento das Matemáticas, e , en especial, da Análise Funcional.

1.1. Referencias bibliográficas

As referencias bibliográficas usadas para a elaboración deste capítulo foron:

- [1] para as notas históricas sobre a evolución do concepto de integral e a definición da integral de Lebesgue.

- [6] para o estudo dos beneficios da integral de Lebesgue e a súa repercusión na Análise Matemática.

Capítulo 2

Medida e Integración Abstracta

Comezaremos este capítulo introducíndonos na teoría da medida a partir das estruturas básicas que interveñen nela. Partindo dun espazo base, describiremos as familias de subconxuntos sobre os que posteriormente definiremos as medidas. Logo estudaremos as funcións medibles, que son as funcións a integrar neste traballo, e finalmente veremos a integral destas funcións respecto a unha medida.

2.1. Espazos de medida

En primeiro lugar, presentaremos os chamados espazos de medida, que son a base para o desenvolvemento da teoría da medida. Un espazo de medida queda determinado por : un conxunto arbitrario, $\mathcal{X}$; unha $\sigma-$ *álxebra* de subconxuntos de $\mathcal{X}$, $\mathcal{M}$; e unha medida en $\mathcal{M}$, μ.

Definición 2.1. *Sexa $\mathcal{X}$ un conxunto arbitrario. Unha $\sigma-$ álxebra en $\mathcal{X}$ é unha familia de subconxuntos de $\mathcal{X}$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, cumprindo as seguintes propiedades:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

(ii) Se $A \in \mathcal{M}$, *entón,* $A^c \in \mathcal{M}$

(iii) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, *entón* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Na seguinte proposición recóllense algunhas propiedades das $\sigma-$ *álxebras*.

Proposición 2.2. *Sexa $\mathcal{M}$ unha $\sigma-$ álxebra de subconxuntos de $\mathcal{X}$. Verifícase que:*

a) $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$;

b) *Se* $A_1,\ A_2, ...,\ A_n\ \in \mathcal{M}$*, entón* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$*;*

c) *Se* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*, entón* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$*;*

d) *Se* $A_1,\ A_2, ...,\ A_n\ \in \mathcal{M}$*, entón* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$*;*

e) *Se* $A, B\ \in \mathcal{M}$*, entón* $A \setminus B\ \in \mathcal{M}$*.*

Definición 2.3. *Sexa* $\mathcal{X}$ *un conxunto arbitrario e* $\mathcal{M}$ *unha* $\sigma -$ *álxebra de subconxuntos de* $\mathcal{X}$*. O par* $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ *é un espazo medible. Os elementos da* $\sigma -$ *álxebra* $\mathcal{M}$ *denomínanse conxuntos medibles.*

Vexamos algúns exemplos:

Exemplos 1. *1. Un exemplo importante de espazo medible é cando* $(\mathcal{X}, \tau)$ *é un espazo topolóxico. Recordamos que* $\tau \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *é unha topoloxía se verifica que:*

(i) $\mathcal{X}, \emptyset \in \tau$ *;*

(ii) *Se* $A_1, ..., A_n \in \tau$*, entón,* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$*;*

(iii) *Se* $\{A_i\} \in \tau$*, entón* $\bigcup_{i} A_i \in \tau$*.*

Dado un espazo topolóxico $(\mathcal{X}, \tau)$*, defínese a* $\sigma-$*álxebra de Borel,* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$*, como a* $\sigma-$ *álxebra xerada polos abertos da topoloxía* τ*,* $\sigma(\tau)$*. Os elementos de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *denomínanse conxuntos borelianos.*

2. A $\sigma-$*álxebra trivial. Dado un conxunto* $\mathcal{X}$*,* $\mathcal{M} = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ *é unha* $\sigma-$*álxebra, e por tanto* $(\mathcal{X}, \{\emptyset, \mathcal{X}\})$ *é un espazo medible.*

3. O conxunto $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ *de todos os subconxuntos de* $\mathcal{X}$ *é unha* $\sigma-$ *álxebra, denominada* $\sigma -$ *álxebra discreta. Temos logo que* $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$ *é un espazo medible.*

Unha vez formalizado o concepto de $\sigma-$álxebra de partes dun conxunto, imos formalizar a noción de medida:

Definición 2.4. *Sexa* $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ *un espazo medible. Unha medida en* $\mathcal{M}$ *é unha aplicación* $\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ *cumprindo que:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) μ *é* σ*-aditiva: Se* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset$*, entón*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Se $\mu(\mathcal{X}) < \infty$ falaremos de medida finita. Vexamos a continuación as principais propiedades das medidas.

Proposición 2.5. *Dados* $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ *un espazo medible e* μ *unha medida en* $\mathcal{M}$*, cúmprese que:*

a) ***Aditividade finita da medida:*** *Se* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{M}$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$*, daquela* $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$*.*

b) ***Monotonía da medida:*** *Se* $A, B \in \mathcal{M}$ *e* $A \subset B$*, daquela* $\mu(A) \leq \mu(B)$*.*

c) $\sigma-$ ***subaditividade da medida:*** *Se* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*, daquela* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$*.*

d) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *e* $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$*, daquela* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

e) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *e* $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\mu(A_1) < \infty$*, daquela* $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Xa temos agora todos os ingredientes necesarios para formar a terna que define os chamados espazos de medida.

Definición 2.6. *Sexan* $\mathcal{X}$ *un conxunto,* $\mathcal{M}$ *unha* $\sigma -$ *álxebra de subconxuntos de* $\mathcal{X}$ *e* μ *unha medida en* $\mathcal{M}$*. A terna* $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *denomínase espazo de medida.*

A continuación temos algúns exemplos de espazos de medida:

Exemplos 2. *1. Medidas de Dirac.*

Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *e* $x_0 \in \mathcal{X}$*. A aplicación* $\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ *tal que*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & se \quad x_0 \notin A, \\ \\ 1 & se \quad x_0 \in A, \end{cases}$$

é unha medida en $\mathcal{M}$*.*

A terna $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *é un espazo de medida.*

2. *Medidas de Contar.*
   Sexa $\mathcal{X}$ un conxunto arbitrario non baleiro e sexa $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. A aplicación

$$\mu_c \colon \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty] \text{ tal que } \mu_c(A) = \begin{cases} card(A), & se \quad A\, finito \\ \\ \infty, & se \quad A\ non\ finito \end{cases}$$

   é unha medida en $\mathcal{M}$.

   A terna $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu_c)$ é un espazo de medida.

3. *Sexan $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida e $E \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_E$ é a $\sigma -$ álxebra inducida por $\mathcal{M}$ en E. Entón, a restrición de μ a $\mathcal{M}_E$ é unha medida en $\mathcal{M}_E$. Así $(\mathcal{X}, \mathcal{M}_E, \mu_E)$ é un espazo de medida inducido polo espazo de medida orixinal $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ en cada subconxunto medible $E \in \mathcal{M}$.*

4. *O espazo de funcións Lebesgue-medibles e a medida de Lebesgue:*
   Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, chamamos medida exterior de E a

$$\mu^*(E) := \text{ínf}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : \{I_i\}_{i\in I} \text{ recubrimento de } E \right\}$$

   (sendo $v(I)$ o volume ou medida dun intervalo n-dimensional, que se define como o produto das lonxitudes dos intervalos factores).
   A aplicación

$$\begin{array}{cccc} \mu^* \colon & E \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0,\infty] \\ \\ & E & \dashrightarrow & \mu^*(E) \end{array}$$

   é a medida exterior de Lebesgue.
   Como a medida exterior de Lebesgue non cumpre a propiedade de aditividade, non é en si unha "medida". Para solucionar isto restrinxiremos a clase de conxuntos a medir impoñendo a condición de Carathéodory. Así diremos que un conxunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é Lebesgue-medible se, e só se, para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ se verifica que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Denotaremos por $\mathcal{M}$ á colección de subconxuntos de $\mathbb{R}^n$ que sexan Lebesgue medibles e consideraremos a medida de Lebesgue μ como a restición de μ^* a $\mathcal{M}$.
   Así, $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ é un espazo de medida.

Así como se obtén a medida de Lebesgue a partir da medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, pódese facer o mesmo en conxuntos arbitrarios. Para iso introduciremos o concepto de medida exterior.

Definición 2.7. *Sexa $\mathcal{X}$ un conxunto arbitrario. Unha medida exterior en $\mathcal{X}$ é unha aplicación $\mu^*\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow [0,\infty]$ cumprindo que:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) Se $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ e $A \subset B$, entón $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ***(monotonía)***,

(iii) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, entón $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ***($\sigma-$subaditividade)***.

Nótese que as medidas exteriores teñen a vantaxe de que están definidas en todo $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, pero teñen o inconveniente de que non son $\sigma-$aditivas, polo que non son en si unha "medida". Trataremos de encontrar unha $\sigma-$álxebra sobre a que si sexan aditivas. Para construír dita $\sigma-$álxebra daremos unha definición máis abstracta de conxunto medible baseándonos na condición de Carathéodory.

Definición 2.8 (Condición de Carathéodory)**.** *Dada μ^* unha medida exterior en $\mathcal{X}$ diremos que un conxunto E é Carathéodory-medible, ou simplemente medible, respecto a μ^*, se para cada $A \subset \mathcal{X}$ se verifica que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$.*

Deste xeito, se $\mu^*\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow [0,\infty]$ é unha medida exterior en $\mathcal{X}$ e $\mathcal{M}$ é a colección de subconxuntos medibles de $\mathcal{X}$, temos que $\mathcal{M}$ é unha $\sigma -$ *álxebra* e a restrición de μ^* a $\mathcal{M}$ é unha medida en $\mathcal{M}$.

Ademais, esta medida é completa. Diremos que unha medida μ é completa en $\mathcal{M}$ se cumpre que "$E \in \mathcal{M}$ *e* $\mu(E) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{M},\ \forall A \subset E$". É dicir, μ é completa en $\mathcal{M}$ se todo subconxunto dun conxunto medible de medida nula é medible. Baixo estas condicións, diremos que $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ é un espazo de medida completo. Ademais, procedendo como indica o seguinte teorema, temos que calquera medida se pode estender a unha medida completa, e así, a partir de calquera espazo de medida pódese obter un espazo de medida completo.

Teorema 2.9 (Completamento dun espazo de medida)**.** *Sexa $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida. Considerando*

$$\mathcal{M}^\star = \{E \subset \mathcal{X} : \exists A, B \in \mathcal{M} : A \subset E \subset B \text{ e } \mu(B \setminus A) = 0\}$$

e definindo $\mu^\star\colon \mathcal{M}^\star \longrightarrow [0,\infty]$ mediante $\mu^\star(E) := \mu(A) \equiv \mu(B)$ temos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^\star$ e $\mu^\star_{|\mathcal{M}} = \mu$. Deste xeito, $(\mathcal{X}, \mathcal{M}^\star, \mu^\star)$ é un espazo de medida completo e denomínase completamento do espazo $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$

2.2. Funcións medibles

Introduciremos agora o concepto e algunhas propiedades das funcións medibles, que son funcións reais ou complexas definidas nun espazo medible $(X, \mathcal{M})$ para as que logo definiremos unha integral.

Definición 2.10. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible e* (Y, τ) *un espazo topolóxico. Diremos que* $f: X \longrightarrow Y$ *é unha aplicación* $\mathcal{M} - medible$ *se cumpre que* $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}\ \forall\ G \in \tau$.

Se consideramos en Y a $\sigma - \acute{a}lxebra$ de Borel, $\mathcal{B}(Y)$, xerada polos conxuntos abertos, podemos dar a seguinte caracterización para as funcións medibles:

Proposición 2.11. *Sexa* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible e* (Y, τ) *un espazo topolóxico. Cúmprese que:*

$$f: X \longrightarrow Y \text{ é } \mathcal{M} - medible \ \Leftrightarrow\ [f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\ \forall\ B \in \mathcal{B}(Y)].$$

Considerando esta definición de función medible temos que, en xeral, a composición de funcións medibles non ten por que ser medible. Para que isto se cumpra é necesario esixir unha condición un pouco máis forte que indicaremos no seguinte teorema.

Teorema 2.12. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible,* Y, Z *espazos topolóxicos e* $f: X \longrightarrow Y$ *unha aplicación* $\mathcal{M} - medible$. *Se* $g: Y \longrightarrow Z$ *é unha aplicación* $\mathcal{B}(Y) - medible$ *(en particular continua), entón* $g \circ f$ *é* $\mathcal{M} - medible$.

Demostración. Se $f: X \longrightarrow Y$ é unha aplicación $\mathcal{M} - medible$ e $g: Y \longrightarrow Z$ é $\mathcal{B}(Y) - medible$, temos que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(B))\ \in \mathcal{M}\ \forall\ B\ \in\ \mathcal{B}(Z)$$

e así, pola proposición anterior, temos que $g \circ f$ é $\mathcal{M} - medible$ □

De agora en diante, diremos que unha función $f: X \longrightarrow Y$ no espazo medible $(X, \mathcal{M})$ é *medible* en lugar de $\mathcal{M} - medible$, simplemente por simplificación de notación, entendendo sempre que o é respecto as $\sigma-$álxebras $\mathcal{M}$ e $\mathcal{B}(Y)$ respetivamente.

Introduciremos a continuación algúns resultados que serán de interese para estudar o comportamento das funcións medibles, tanto reais como complexas, respecto ás operacións alxébricas principais suma, produto, cociente... En moitos casos o estudo das funcións medibles complexas reducirase ao estudo das funcións medibles reais. Comezaremos vendo a relación entre as funcións medibles complexas e as funcións medibles reais mediante os seguintes teoremas:

Teorema 2.13. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible,* $u, v\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcións medibles,* Y *un espazo topolóxico e* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$ *unha función continua. A aplicación*

$$\begin{array}{rccc} F\colon & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \dashrightarrow & \varphi(u(x), v(x)) \end{array}$$

é medible.

Demostración. Definimos a función

$$\begin{array}{rccc} h\colon & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \dashrightarrow & h(x) := (u(x), v(x)) \end{array}$$

Temos que $F(x) = \varphi \circ h(x)$.

A función φ é continua por hipótese. Vexamos que h é medible. Como todo aberto de $\mathbb{R}^2$ se pode expresar como unión numerable de rectángulos abertos, bastará demostrar que

$$h^{-1}(R) \in \mathcal{M} \ \forall \ R \equiv (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2.$$

Temos que $h^{-1}(R) = h^{-1}[(a, b) \times (c, d)] \equiv u^{-1}(a, b) \bigcap v^{-1}(c, d)$ medible, xa que u e v son funcións medibles. □

Teorema 2.14. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible e* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ *unha función. Entón*

$$f \textit{ é medible } \Leftrightarrow Re(f) \textit{ e } Im(f) \textit{ son medibles}$$

Demostración. $\Rightarrow$ Se $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ é unha función medible, como as proxeccións π_1 *e* π_2 son aplicacións continuas, temos que $Re(f) = \pi_1 \circ f$ e $Im(f) = \pi_2 \circ f$ son medibles.

$\Leftarrow$ Reciprocamente, se $Re(f)$ e $Im(f)$ son funcións medibles, considerando φ o isomorfismo canónico entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, polo teorema anterior temos que $f = \varphi(Re(f), Im(f))$ é continua. □

Por outra parte, cando están ben definidas as operacións aritméticas habituais (suma, produto, cociete) entre funcións medibles que toman valores en $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, estas dan lugar a novas funcións medibles. Recolleremos os resultados máis importantes na seguinte proposición:

Proposición 2.15. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible e* $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ *funcións medibles, entón:*

a) As funcións $f + g$ *e* $f \cdot g$ *son medibles.*

b) Se f *non se anula en ningún punto, a función* g/f *tamén é medible.*

c) $|f|$ *e* $|f|^p$ *son funcións medibles* $\forall p > 0$.

d) $a \cdot f + b \cdot g$ *é unha función medible* $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

A continuación, enunciaremos os resultados máis destacables en relación coas funcións que se poden definir a partir dunha sucesión de funcións medibles e o seu comportamento respecto ao proceso de paso ó límite.

Proposición 2.16. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *unha sucesión de funcións medibles e* $f_n\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*Entón:*

a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *e* $\operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *son medibles.*

b) $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ *e* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ínf} f_n$ *son medibles.*

c) Se $\forall x \in X\, \exists \lim_{n\to\infty} \operatorname{ínf} f_n(x) := f(x)$, *entón* f *é medible.*

As funcións máis "simples" de describir son aquelas que son combinacións lineais de funcións características dos conxuntos de $\mathcal{M}$. Chamaremos a estas funcións *funcións simples.*

Definición 2.17. *Unha función simple* s *nun espazo medible* X *é unha función complexa definida en* X *cuxa imaxe toma unha cantidade finita de valores.*

É dicir, unha función $s\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ é simple se $s(X)$ é un conxunto finito. Obsérvese que excluímos o valor ∞ dos valores que toma unha función simple.

Se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son os distintos valores que toma a función s e $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$, entón podemos expresar s de maneira unívoca da forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i},$$

onde χ_{A_i} é a función característica de A_i. É claro así que s é medible, se e só se, é medible cada conxunto A_i.

O principal interese das funcións simples é que son unha clase sinxela de funcións que nos permiten expresar calquera función medible como sucesión de ditas funcións da maneira que se expresa no seguinte teorema. Isto será de gran utilidade para logo enunciar e probar certas propiedades e resultados de funcións medibles de maneira máis xeral.

Teorema 2.18. *Sexan* $(X, \mathcal{M})$ *un espazo medible e* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ *unha función medible. Entón, existe unha sucesión de funcións medibles simples* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $s_n\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* *i)* $|s_1| \leq |s_2| \leq ... \leq |s_n| \leq ... \leq |f|$

ii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ $\forall x \in X$ *e a converxencia é uniforme en cada conxunto no que* f *sexa limitada. Ademais, se* f *é unha función non negativa, poderemos escoller a sucesión* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *crecente, i.e, de forma que* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$.

Demostración. Primeiro consideraremos o caso $f \geq 0$. Sexa logo $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ unha función medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n \cdot 2^n$, sexan

$$A_{n,k} = \{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\} \qquad \text{e} \qquad B_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Definimos

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \chi_{A_{n,k}} + n \cdot \chi_{B_n}$$

É claro que os conxuntos $A_{n,k}$ e B_n pertencen a $\mathcal{M}$ e que cada s_n é unha función medible simple. Vemos ademais facilmente que

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f, \qquad |s_n| \leq n \qquad e \qquad |f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Por tanto, $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ $\forall x \in X$. Ademais se $\exists M \in \mathbb{R} : |f| \leq M$, entón

$$\sup_{x\in X} |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \ \forall n \geq M,$$

polo que s_n converxe uniformemente a f en X.

Consideraremos agora o caso xeral. Se f é unha función medible non necesariamente positiva, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos expresala como $f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^- son as partes positiva e negativa, respectivamente, da función f, e verifican que $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$.

Finalmente se f é unha función complexa, $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$, podemos expresala da forma $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ onde cada $f_i \geq 0$, basta considerar $f_1 = Re(f)^+$,$f_2 = Re(f)^-$, $f_3 = Im(f)^+$ e $f_4 = Im(f)^-$.

Temos así que se cumpre o resultado para calquera función f medible. □

2.3. Integración de funcións medibles

Xa temos introducidos os espazos medibles nos que levaremos a cabo a Teoría da Integración. Tamén estudamos as funcións medibles, que son as funcións a integrar. Ao longo desta sección imos definir a integral destas funcións, estudar as súas propiedades e os os principais teoremas de converxencia. Veremos como obter unha medida integrando unha función medible non negativa sobre todos os conxuntos medibles.

Comezaremos definindo a integral das funcións simples non negativas e veremos como estender esta integral a toda función medible non negativa de xeito que se manteñan as propiedades máis relevantes de dita integral.

Definición 2.19. *Sexan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida e $s\colon X \longrightarrow [0, \infty)$ unha función simple non negativa $\mathcal{M}-$medible con forma canónica*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \text{ e } E \in \mathcal{M}.$$

Defínese a integral de s en E respecto da medida μ como

$$\int_E s d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E)$$

Na seguinte proposición recollemos as principais propiedades da integral de funcións simples non negativas.

Proposición 2.20. *Sexan $s\colon X \longrightarrow [0, \infty)$ e $t\colon X \longrightarrow [0, \infty)$ dúas funcións simples non negativas $\mathcal{M}-$medibles, $c \in [0, \infty)$ e $E \in \mathcal{M}$. Verifícase que:*

a) $\int_E c \cdot s \, d\mu = c \cdot \int_E s \, d\mu$,

b) $\int_E (s + t) \, d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$,

c) *Se* $s(x) \leq t(x) \ \forall \ x \in X \Rightarrow \int_E s \, d\mu \leq \int_E t d\mu$.

Como acabamos de ver na proposición anterior, a integral sobre funcións medibles simples e non negativas é aditiva e monótona, o que nos permitirá estender o concepto de integral a funcións medibles non negativas.

Definición 2.21. *Sexan $f\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ unha función $\mathcal{M}-$medible non negativa e $E \in \mathcal{M}$. Defínese a integral de f en E respecto da medida μ como*

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \in S, 0 \leq s \leq f \right\},$$

onde S é o conxunto de funcións simples $\mathcal{M}-$medibles.

Nótese que se f é unha función $\mathcal{M}-$medible simple non negativa a nova definición de $\int_E f d\mu$ coincide coa dada anteriormente para funcións simples.

Veremos agora algunhas propiedades básicas da integral de funcións $\mathcal{M}-$medibles non negativas como a monotonía, orde ou sobre a restrición da integral a un conxunto medible. Estas propiedades son consecuencia directa da definición e das propiedades da integral de funcións $\mathcal{M}-$medibles simples non negativas.

Proposición 2.22. *Sexan $f, g\colon X \longrightarrow [0,\infty)$ funcións $\mathcal{M}-$ medibles e $A, B, E \in \mathcal{M}$. Verifícase que:*

a) $f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ ***(monotonía da integral respecto o integrando);***

b) $A \subset B \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ ***(monotonía da integral respecto o conxunto de integración);***

c) Se $c \geq 0, \int_E c \cdot f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$*;*

d) Se $f(x) = 0\ \forall x \in X$*, entón* $\int_E f d\mu = 0$ *aínda que* $\mu(E) = \infty$*;*

e) Se $\mu(E) = 0$*, entón* $\int_E f d\mu = 0$ *aínda que* $f(x) = \infty\ \forall x \in X$*;*

f) $\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E d\mu$.

Dada unha función medible non negativa podemos construír unha medida a partir da integral indefinida de dita función. Para isto necesitaremos as propiedades que nos proporcionan os seguintes teoremas e resultados, onde veremos a facilidade coa que se manexan as operacións con límites e a linealidade da integral.

Teorema 2.23 (Teorema da converxencia monótona)**.** *Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións medibles non negativas definidas en X tales que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots\ \forall x \in X$$

e sexa o seu límite puntual $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in X$. Entón f é medible e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión crecente existe o seu límite f e é medible e non negativo por ser o límite dunha sucesión de funcións medibles non negativas. Ademais, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión monótona de funcións non negativas, pola monotonía da integral respecto o integrando, temos que $\{\int_X f_n d\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ tamén é unha sucesión monótona de elementos non negativos e, por tanto, existe o seu límite en $[0,\infty]$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $f_n \leq f$, cúmprese entón que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Vexamos que tamén se cumpre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

Sexa s unha función medible simple tal que $0 \leq s \leq f$ e sexa c unha constante tal que $0 < c < 1$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ os conxuntos $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq c \cdot s(x)\}$. A sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre que :

- $E_n \in \mathcal{M}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- $E_n \subset E_{n+1}$;
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$.

Temos así, pola proposición anterior, que

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} c \cdot s d\mu = c \cdot \int_{E_n} s d\mu.$$

Considerando agora a función de conxunto $\varphi\colon E \in \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\varphi(E) := \int_E s d\mu$, que é unha medida, temos que

$$\varphi(X) = \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n),$$

ou equivalentemente

$$\int_X s d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f_n d\mu \geq c \cdot \int_X s d\mu.$$

Finalmente, cando $n \to \infty$ e $c \to 1$ e tomando supremos temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu,$$

como queríamos probar. □

Como consecuencia da aproximación de funcións medibles non negativas mediante sucesións de funcións simples e das propiedades da súa integral, obtemos a propiedade de aditividade da integral:

Teorema 2.24. *Se $f, g\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ son funcións medibles non negativas, entón*

$$\int_X (f + g)\ d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

En xeral, para sumas finitas, se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de funcións medibles non negativas tense que

$$\int_X \sum_{i=1}^{n} f_i d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_X f_i d\mu$$

e tomando límites para sumas non finitas temos o seguinte resultado:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Estes resultados son válidos cando temos converxencia puntual na sucesión de funcións. Cando isto non é así, temos o resultado en forma de desigualdade, proporcionado polo lema de Fatou.

Teorema 2.25 (Lema de Fatou). *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de funcións medibles non negativas e*

$$f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) := \sup\{\inf\{f_m(x)\}\ m \geq n\ n \in \mathbb{N},\}$$

entón f é medible e

$$\int_X f d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Considerando agora a integral como unha función de conxunto podemos obter unha medida a partir de dita integral procedendo tal e como indica o seguinte teorema:

Teorema 2.26. *Sexa $f\colon X \longrightarrow [0,\infty]$ unha función medible e sexa a función de conxunto $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ con $E \in \mathcal{M}$. Entón φ é unha medida e ademais para cada función $g\colon X \longrightarrow [0,\infty]$ medible verifícase que $\int_X g\ d\varphi = \int_X g \cdot f d\mu$.*

Demostración. Comezaremos vendo que a aplicación $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty]$ dada por $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ é unha medida:

- É claro que $\varphi(\emptyset) = 0$.
- Vexamos que é $\sigma-$ aditiva: Sexa $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de elementos de $\mathcal{M}$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Temos entón que $\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ e, por tanto,

$$\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) := \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}} f d\mu = \int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E d\mu = \int_X f \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \cdot \chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n).$$

Vexamos agora que para cada función $g\colon X \longrightarrow [0,\infty]$ medible cúmprese que $\int_X g d\varphi = \int_X g \cdot f d\mu$. Diferenciaremos tres casos:

- Se $g = \chi_E$. Para $E \in \mathcal{M}$ temos que

$$\int_X g d\varphi = \int_X \chi_E d\varphi = \varphi(E) = \int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu = \int_X g \cdot f d\mu.$$

- Se g é unha función medible , simple e non negativa, temos que g pódese expresar como $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, con $\alpha_i \geq 0$ e $A_i \in \mathcal{M}$, $\forall i = 1, ..., n$. Logo temos que

$$\begin{aligned}\int_X g d\varphi &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int_X \chi_{A_i} d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int_X \chi_{A_i} f d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \cdot f d\mu = \int_x g \cdot f d\mu.\end{aligned}$$

- Se g é unha función medible non negativa, existe unha sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcións medibles simples non negativas tales que $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq g$ en X e que converxen puntualmente a g. Por tanto, $\{s_n \cdot f\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tamén unha sucesión monótona crecente de funcións medibles non negativas que converxe puntualmente a $g \cdot f$. Logo, aplicando o Teorema de converxencia monótona e o visto no caso anterior, temos que

$$\begin{aligned}\int_X f d\varphi &= \int_X \lim_{n\to\infty} s_n d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot f d\mu \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} s_n \cdot f d\mu = \int_X g \cdot f d\mu.\end{aligned}$$ □

Ata o momento traballamos coa integral de funcións medibles non negativas, pero podemos ampliar o concepto de integral a función definidas en $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Diremos que unha función medible non negativa é integrable se a súa integral é un número finito. Para funcións medibles con valores na recta real ampliada, estenderemos a integral integrando separadamente a parte positiva e a parte negativa da función. Definiremos a integral destas funcións respeto a medida μ como

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

e diremos que f é integrable se algunha (ou as dúas) das integrais $\int_X f^+ d\mu$ ou $\int_X f^- d\mu$ é finita.

No caso de funcións complexas, procederemos de maneira similar, integraremos por separado a parte real e a parte imaxinaria da función. Se $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ é unha función medible, $f = u + iv$, sendo u a función parte real de f e v a función parte imaxinaria de f, diremos que f é integrable se o son u e v. En tal caso, definiremos a súa integral como

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu.$$

É dicir, unha función $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ é integrable se $\int_X |f| d\mu$ é finita, xa que $\int_X |f| d\mu$ é finita se, e so se, as integrais $\int_X u^+ d\mu$,$\int_X u^- d\mu$,$\int_X v^+ d\mu$ e $\int_X v^- d\mu$ son finitas.

O conxunto formado polas funcións integrables $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ denótase por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou simplificadamente $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Teorema 2.27. *Dotado das operacións habituais $\mathcal{L}^1(\mu)$ é un espazo vectorial complexo sobre o cal a integral é un funcional lineal.*

Demostración. Sexan $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e α, β números complexos. Como f, g son funcións medibles, $\alpha f + \beta g$ tamén é medible. Ademais, verifícase que

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty,$$

polo que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e por tanto $\mathcal{L}^1(\mu)$ é un espazo vectorial complexo.

Probaremos agora a linealidade da integral, é dicir, temos que ver que

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

Para probar esto bastará demostrar que :

i) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ e

ii) $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.

Comezaremos probando i). O Teorema 2.24 dinos que esta igualdade verifícase para funcións non negativas. Sexan logo f e g funcións reais de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Definimos $h = f + g$ e temos así que

$$h^+ - h^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-) \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+,$$

onde cada sumando é unha función medible non negativa. Así, intengrando agora nesta igualdade e tendo en conta o Teorema 2.24, temos que

$$\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X h^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu,$$

e agrupando debidamente estas integrais chegamos a que

$$\begin{aligned}
\int_X h d\mu &= \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu \\
&= \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu \\
&= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.
\end{aligned}$$

Temos así que se cumpre o resultado para funcións reais medibles, e por tanto tamén se cumprirá para funcións complexas. Bastará recordar a definición de integral de ditas funcións. Se $h = h_1 + i h_2$ é unha función complexa a súa integral defínese como

$$\int_X h d\mu = \int_X h_1 d\mu + i \int_X h_2 d\mu,$$

onde h_1 e h_2 son funcións reais medibles, e por tanto cúmprese o resultado. Con isto temos demostrado i).

Probaremos agora ii): $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$. Distinguiremos tres casos:

- Polas propiedades da integral vistas anteriormente (Proposición 2.22. c)), para $\alpha \geq 0$ e f unha función non negativa xa temos que se cumpre que $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$. Sexa agora $f = f_1 + i f_2$ unha función complexa. Podemos decompoñer f do seguinte xeito
$$f = f_1 + i f_2 = f_1^+ - f_1^- + i(f_2^+ - f_2^-).$$
Temos así que:
$$\int_X \alpha f d\mu = \int_X \alpha f_1^+ d\mu - \int_X \alpha f_1^- d\mu + i \int_X f_2^+ d\mu + -i \int_X f_2^- d\mu,$$
onde cada $f_i^{\pm}, i = 1, 2$ é unha función real non negativa, e por tanto temos que
$$\begin{aligned}\int_X \alpha f d\mu &= \alpha \int_X f_1^+ d\mu - \alpha \int_X f_1^- d\mu + i\alpha \int_X f_2^+ d\mu - \alpha i \int_X f_2^- d\mu \\ &= \alpha \left(\int_X f_1^+ d\mu - \int_X f_1^- d\mu + i \left(\int_X f_2^+ d\mu - \int_X f_2^- d\mu \right) \right) \\ &= \alpha \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

- Para $\alpha = -1$ e f unha función real, temos que
$$\int_X -f d\mu = \int_X (-f)^+ d\mu - \int_X (-f)^- d\mu = \int_X f^- d\mu - \int_X f^+ d\mu = -\int_X f d\mu.$$
No caso de que f sexa unha función complexa, descompoñendo como antes en sumandos de funcións reais, obtemos o resultado equivalente.

- Se $\alpha = i$ e $f = f_1 + i f_2$ temos que $i \cdot f = i f_1 - f_2$ e por tanto
$$\begin{aligned}\int_X i \cdot f d\mu &= \int_X (i f_1 - f_2) d\mu = \int_X (-f_2) d\mu + \int_X i f_1 d\mu \\ &= -\int_X f_2 d\mu + i \int_X f_1 d\mu = i \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

Tendo en conta que calquera número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$ pódese expresar da forma $\alpha = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e i), xa temos que se cumpre ii) para calquera número complexo α . $\square$

En canto o comportamento da integral baixo o paso ó límite, en xeral para funcións complexas temos o Teorema de converxencia dominada, que veremos a continuación. Enunciaremos antes un resultado previo que será de utilidade para a demostración de tal teorema.

Teorema 2.28 (Teorema de acotación modular). *Sexa f unha función de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Entón cúmprese que*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$$

Demostración. Como $\int_X f d\mu$ é un número complexo,

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 : \alpha \cdot \int_X f d\mu = \left|\int_X f d\mu\right|.$$

Sexan $u = Re(\alpha f)$ e $v = Im(\alpha f)$ (cuxa integral é nula). Temos que $u \leq |\alpha f| = |f|$ e, por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_X f d\mu\right| &= \alpha \cdot \int_X d\mu = \int_X \alpha \cdot f d\mu = \int_X Re(\alpha f) d\mu + i \int_X Im(\alpha f) d\mu \\ &= \int_X u d\mu \leq \int_X |u| d\mu \leq \int_X |\alpha f| = \int_X |f|.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.29 (Teorema da converxencia dominada). *Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións complexas medibles tales que existe $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in X$. Se existe unha función $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entón $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ademais*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Demostración. Como f é o límite dunha sucesión de funcións medibles, f é medible. Ademais para cada $n \in \mathbb{N}$ cúmprese que $|f_n| \leq g$, polo que $|f| \leq g$ en X. Pola monotonía da integral, temos agora que

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty.$$

Por tanto $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Por outra parte, temos que $|f_n - f| \leq 2g$, considerando logo a sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $g_n = 2g - |f_n - f|$, temos que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de funcións medibles non negativas. Aplicando o Lema de Fatou a dita sucesión temos que

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_X 2g d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_X |f_n - f| d\mu\right) \\ &= \int_X 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu.\end{aligned}$$

Como $\int_X 2gd\mu < \infty$, restando en ambos lados temos que $0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu$, é dicir, $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu \leq 0$.

Por outra parte, como temos unha sucesión de números reales non negativos, é claro que $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu \geq 0$. Por tanto, necesariamente $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu = 0$ e temos así que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu = 0.$$

Agora, polo teorema de acotación modular aplicado a $f_n - f$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_X f_n - f d\mu \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu = 0,$$

e temos xa así que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \qquad \square$$

Nótese que, como os conxuntos medibles de medida nula non inflúen no cálculo de integrais, pódese prescindir deles ou engadilos (cando falamos de integración) sen que supoñan ningún problema. Así mesmo, diremos que unha propiedade P cúmprese en case todas as partes de X respecto da medida μ, $c.t.p.(\mu)$, cando o conxunto de puntos onde non se cumpre a propiedade P está contido nun conxunto medible de medida nula. Así, tanto as propiedades de monotonía, non negatividade e acotación uniforme que se tomaron como certas nas hipóteses do Teorema da converxencia monótona, no Lema de Fatou e no Teorema da converxencia dominada, respectivamente, poden considerarse certas soamente en $c.t.p.(\mu)$ sen alterar os resultados que nos proporcionan ditos teoremas.

2.4. Referencias bibliográficas

As referencias bibliográficas usadas para a elaboración deste capítulo foron:

- [10] principalmente para a elaboración da sección 2.1 sobre espazos de medida .
- [4] e [8] para consultar os conceptos e resultados sobre funcións medibles e a integración destas.
- [3] para consultar varios resultados ó longo de todo o capítulo.

Capítulo 3

Os espazos L^p

Os espazos de Lebesgue son un dos exemplos máis importantes dos espazos de funcións medibles, xa que cumpren certas propiedades notables e son de gran importancia tanto na Análise como nas súas aplicacións. Neste capítulo introduciremos os espazos $\mathcal{L}^p$ para os distintos valores de $p \in [1, \infty]$. Veremos como, a partir destes e identificando convenientemente funcións, contruír os espazos L^p de clases de funcións medibles. Probaremos que é posible definir en cada un deles unha norma coa que os espazos L^p son espazos de Banach.

Xa que ó longo de todo o capítulo faremos referencia numerosas veces aos conceptos de *norma* e *seminorma*, recordemos previamente o seu significado. Unha norma é unha aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow K$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) verificando as seguintes propiedades:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \ \forall \alpha \in K \ \forall x \in X$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$ (Desigualdade triangular).

Se soamente se cumpren (ii) e (iii) temos unha seminorma.

3.1. O espazo $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$

Comezaremos estudando o espazo de funcións Lebesgue- integrables introducido no capítulo anterior. Vimos que $\mathcal{L}^1(\mu)$ é un espazo vectorial complexo. Daremos unha relación de equivalencia que identifique as funcións de $\mathcal{L}^1(\mu)$ que sexan iguais en case todo punto. A partir desta relación veremos como pasando ó espazo cociente obtemos o espazo L^1, onde é posible definir unha norma $||\cdot||_1$. Ademais, a partir desta norma definiremos unha métrica en $L^1(\mu)$. Veremos así que $L^1(\mu)$ é un espazo vectorial métrico, normado e completo, *i.e.*, un espazo de Banach.

Recordemos que $\mathcal{L}^1(\mu)$ é o espazo de funcións Lebesgue-medibles con integral finita. É dicir, temos que:

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \textit{ medible e } \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

L^1 é un espazo vectorial complexo dotado das operacións habituais.

Definiremos agora en $\mathcal{L}^1(\mu)$ a aplicación :

$$\|f\|_1 \colon f \in \mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \|f\|_1 := \int_X |f(x)| d\mu,$$

que cumpre as seguintes propiedades :

i) $\|f\|_1 \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{L}^\infty$. Ademais, $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $c.t.p.(\mu)$ de X.

ii) $\|\alpha f\| = |\alpha\| \cdot \|f\|_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Por tanto, $\| \cdot \|_1$ é unha seminorma, pero, en xeral non é unha norma en $\mathcal{L}^1(\mu)$. De feito, se X contén algun subconxunto A medible, non baleiro, con medida nula, a función $f = \chi_A$ cumpre que $\|f\|_1 = 0$, pero f non é a función idénticamente nula. En cambio, se en $\mathcal{L}^1(\mu)$ consideramos a relación de equivalencia dada pola igualdade en case todo punto, pasando ao espazo cociente conseguiremos obter unha norma.

Definición 3.1. *Diremos que dúas funcións medibles $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ son equivalentes, $f \sim g$, se o conxunto $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ ten medida nula.*

Por tanto, para $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ para case todo $x \in X$.
É fácil ver que a relación $\sim$ é unha relación de equivalencia. A partir desta relación podemos definir o conxunto cociente $\mathcal{L}^1(\mu)/_\sim \equiv L^1(\mu)$. Temos que ter en conta que os elementos de $L^1(\mu)$ son clases de equivalencia. Para cada $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, denotaremos por $[f]$ á clase de equivalencia que contén a f, é dicir, $[f] = \{h \in \mathcal{L}^1(\mu) : h \sim f\}$.

A estrutura de espazo vectorial de $\mathcal{L}^1(\mu)$ induce en $L^1(\mu)$ unha estrutura de espazo vectorial cociente. Temos así que $L^1(\mu)$ é un espazo vectorial complexo dotado das seguintes operacións:

$$[f] + [g] := [f + g],\ [f], [g] \in L^1(\mu) \qquad \text{e} \qquad \alpha[f] := [\alpha f],\ [f] \in L^1(\mu),\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Nótese que, para cada $f, g \in L^1(\mu)$, cúmprese que $f \sim g \Rightarrow \|f\|_1 = \|g\|_1$. Entón, a aplicación

$$\|f\|_1 \colon [f] \in L^1(\mu) \longrightarrow \|[f]\|_1 := \|f\|_1 = \int_X |f(x)| d\mu,$$

está ben definida e é ademais unha norma en $L^1(\mu)$. Así o seguinte resultado é inmediato:

Corolario 3.2. *O espazo* $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ *é un espazo vectorial normado.*

A partir da norma $\|\cdot\|_1$, podemos definir unha métrica en L^1 dada por $d_1(f,g) := \|f-g\|_1$ e temos así que o espazo $(L^1(\mu), d_1)$ é ademais un espazo métrico.

É importante ter claro que $L^1(\mu)$ é un espazo de clases de equivalencia de funcións, non de funcións. Non obstante, por comodidade e para evitar a engorrosa notación das clases de equivalencia, cometeremos un pequeno abuso de linguaxe substituíndo as clases de equivalencia por algún dos seus representantes. Así, cando digamos que f e g son funcións de L^1 e $f = g$ entenderemos que $f, g \in \mathcal{L}^1$ e coinciden en case todo punto de X.

Unha das propiedades máis importantes do espazo de funcións Lebesgue-integrables $L^1(\mu)$ é a súa completitude. Veremos que $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ é un espazo normado completo, i.e., un espazo de Banach. Por similitude, demostraremos este resultado máis adiante xunto co resto dos espazos $L^p(\mu)$.

3.2. Os espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $1 < p < \infty$

Para $p = 1$, temos o espazo de clases de funcións $L^1(\mu)$, que vimos que é un espazo vectorial complexo. Neste espazo podiamos definir unha norma, a partir da cal podiamos establecer unha métrica. Tiñamos así que $L^1(\mu)$ é un espazo normado, un espazo métrico e, ademais, un espazo de Banach, como probaremos nuns intres. Imos ver agora máis exemplos destes tipos de espazos, os espazos $L^p(\mu)$. Consideraremos agora para $1 < p < \infty$, o conxunto de funcións:

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \text{ f medible e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Temos neste caso tamén que:

Proposición 3.3. *Para* $1 < p < \infty$ *o espazo* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *é un espazo vectorial complexo dotado das operacións habituais.*

Demostración. Sexan $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Como f e g son funcións medibles, $f + g$ é tamén unha función medible. Ademais,

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max\{|f|, |g|\}^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Temos logo que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < \infty$$

Por tanto $f + g \in \mathcal{L}^p$.

Sexa agora $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{L}^p$. Como f é unha función medible, αf é tamén unha función medible. Ademais

$$\int_X |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

e por tanto, $\alpha f \in \mathcal{L}^p$. □

Definiremos agora en $\mathcal{L}^p$ a aplicaión:

$$\|f\|_p \colon f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mapsto \|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Veremos que as aplicacións $\|\cdot\|_p$ son seminormas en $\mathcal{L}^p(\mu)$. Para iso necesitamos os seguintes conceptos e resultados previos:

Definición 3.4. *Sexan p, q dous números reais positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Diremos que p e q son expoñentes conxugados.*
Outras formas de expresar a relación entre p e q son as seguintes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p \cdot q = p + q \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}.$$

Considéranse tamen 1 e ∞ como expoñentes conxugados.

Lema 3.5. *Sexan $a, b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$. Cúmprese que:*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 3.6 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sexan p e q dous expoñentes conxugados con $1 < p, q < \infty$. Se $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, entón $f \cdot q \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e ademais:*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

é dicir

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, temos que $f = 0$ ou $g = 0$ en *c.t.p.*(μ) de X. Entón, $f \cdot g = 0$ e a afirmación é obviamente certa.
Supoñamos entón $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Sexan

$$A := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{e} \qquad B := \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Supoñamos $F(x) := \frac{f(x)}{A}$ e $G(x) := \frac{g(x)}{B}$. Polo lema anterior temos que:

$$|F(x)| \cdot |G(x)| = (|F(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|G(x)|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}|F(x)|^p \ + \ \frac{1}{q}|G(x)|^q$$

Integrando agora en X temos que:

$$\begin{aligned}\int_X (|F(x)||G(x)|)\,d\mu &\leq \frac{1}{p}\int_X |F(x)|^p d\mu \;+\; \frac{1}{q}\int_X |G(x)|^q d\mu\\ &= \frac{1}{p}\int_X \left|\frac{f(x)}{A}\right|^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X \left|\frac{g(x)}{B}\right|^q d\mu\\ &= \frac{1}{p}\int_X \frac{|f(x)|^p}{\int_X |f|^p d\mu} d\mu + \frac{1}{q}\int_X \frac{|g(x)|^q}{\int_X |g|^q d\mu} d\mu\\ &= \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_X |g(x)|^q d\mu\\ &= \frac{1}{p}\cdot\frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Obtemos así que:

$$\int_X \left|\frac{f(x)}{A}\cdot\frac{g(x)}{B}\right| d\mu \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|AB|}\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq 1 \Leftrightarrow \int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq AB.$$

É dicir,

$$\int_X |f\cdot g|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

Nótese que no caso $p=q=2$ temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 3.7 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sexan p e q dous expoñentes conxugados con $1<p,q<\infty$ e $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$. Entón*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Supoñamos $\|f+g\|_p>0$, xa que se $\|f+g\|=0$ a afirmación é trivialmente certa. Temos logo que:

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f|+|g|)\cdot|f+g|^{p-1} = |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Integrando agora en X temos que:

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}d\mu.$$

Tendo en conta que $p-1=\frac{p}{q}$ e que p e q son expoñentes conxugados, aplicando a desigualdade de Hölder temos que:

$$\int_X |f||f+g|^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_X |g||f+g|^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Entón temos así que:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} = \|f\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p-1} \\
&= \|f+g\|_p^{p-1} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)
\end{aligned}$$

Como $\|f+g\|_p > 0, \ \|f+g\|_p^{p-1} > 0$, dividindo en ambos lados entre $\|f+g\|_p^{p-1}$ temos a igualdade buscada:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \square$$

Como consecuencia inmediata das desigualdades de Hölder e Minkowski podemos concluír o seguinte resultado:

Corolario 3.8. *Para cada p, $1 \leq p < \infty$, a aplicación $\|\cdot\|_p$ é unha seminorma en $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Como tiñamos antes no caso $p = 1$, temos agora para $1 < p < \infty$ que as aplicacións $\|\cdot\|_p$ definidas por

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

son seminormas en $\mathcal{L}^p(\mu)$, pero non son en xeral normas, polo mesmo motivo que xa mencionamos no caso $p = 1$. Como nos interesa traballar con espazos normados, indentificaremos as funcións que sexan iguais en case todo punto e traballaremos no espazo cociente $\mathcal{L}^p(\mu)/_\sim$, onde $f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ en *c.t.p.*(μ) de X. Denotamos tal conxunto cociente como segue:

$$\mathcal{L}^p(\mu)/_\sim \equiv L^p(\mu).$$

Temos que ter en conta que os elementos de $L^p(\mu)$ non son funcións, senón clases de equivalencia de funcións. Para cada $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ denotaremos mediante $[f]$ á súa clase de equivalencia. Así, o espazo $L^p(\mu)$ dotado das operacións

$$[f] + [g] := [f+g], \ [f], [g] \in L^1(\mu) \qquad \text{e} \qquad \alpha[f] := [\alpha f], \ [f] \in L^1(\mu), \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

é un espazo vectorial complexo.

Para cada $f, g \in L^p(\mu)$ cúmprese que $f \sim g \Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$. Entón, a aplicación

$$\|f\|_p \colon [f] \in L^p(\mu) \longrightarrow \|[f]\|_p := \|f\|_p = \int_X |f(x)| d\mu,$$

está ben definida e é unha norma en L^p. Podemos deducir que:

Corolario 3.9. *O espazo $(L^p, \|\cdot\|_p)$ é un espazo vectorial normado.*

Demostración. a) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ $\forall f, g, \in L^p$ (Minkowski).

b) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$, $\forall f \in L^p(\mu)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

c) $\|f\|_p \geq 0$, $\forall f \in L^p(\mu)$ e $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *en* $L^p(\mu)$.

Dado que $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$, temos que $(L^p, \| \ \|_p)$ é un espazo vectorial normado. □

Como acabamos de ver, a partir da norma $\|\cdot\|_p$ podemos definir a métrica $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$, e temos así que o espazo (L^p, d_p) é un espazo vectorial métrico.

Ao igual que no caso $p = 1$, por comodidade, cometeremos un pequeno abuso de linguaxe substituíndo as clases de equivalencia por algún dos seus representantes. Entón, cando digamos que f e g son funcións de $L^p(\mu)$ e $f = g$, entenderemos que $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $f = g$ en *c.t.p.*(μ) de X.

Como diximos anteriormente, unha das propiedades máis importantes dos espazos $L^p(\mu)$ é a súa completitude. Demostraremos agora que os espazos $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ son espazos normados completos. Para iso recordaremos previamente os seguintes conceptos:

Definición 3.10. *Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións de $L^p(\mu)$. Diremos que:*

(a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converxe cara* $f \in (L^p(\mu), \| \ \|_p)$ *se* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

(b) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é unha sucesión de Cauchy en* $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Teorema 3.11. *Para $1 \leq p < \infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ é un espazo normado completo, é dicir, un espazo de Banach.*

Demostración. Teremos que probar que toda sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ é converxente en tal espazo. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de Cauchy arbitraria en $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$. Cúmprese que:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

e ademais existe $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ unha subsucesión de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i} \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definiremos $g_k(x) := \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ e $g := \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$.
Pola desigualdade de Minkowski temos que

$$\|g_k\|_p = \left\{ \int_X |g_k(x)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i < 1.$$

Aplicando agora o lema de Fatou, temos que $\|g\|_p < 1$ e por tanto $g(x) < \infty$ para case todo $x \in X$.
Temos entón que a serie $f_{n_1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ converxe absolutamente para case todo $x \in X$.
Sexa logo

$$f(x) := \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| & \text{se } \sum_{i=1}^{\infty}, |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| < \infty \\ \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Temos que f é medible e dado que $f_{n_k} = f_{n_1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|\ \forall x \in X$ concluímos que $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ para case todo punto $x \in X$.
A continuación probaremos que $f \in L^p(\mu)$ e que a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a f. Sexa $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.
Así, para $m > N$, o lema de Fatou proba que

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \int_X \liminf_{i\to\infty} |f_{n_i} - f|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Por tanto $f - f_m \in (L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$, e como $f_m \in L^p(\mu)$ e $L^p(\mu)$ é un espazo vectorial concluímos que $f \in L^p(\mu)$.
Ademais, da desigualdade

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \int_X \liminf_{i\to\infty} |f_{n_i} - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

deducimos que para $n > N$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^p d\mu = 0,$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p^p = 0,$$

e por tanto temos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a f en $L^p(\mu)$. □

A converxencia en $L^p(\mu)$ denomínase *converxencia en media de orde* p e unha sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ denomínase tamén *sucesión de Cauchy en media de orde* p. O teorema anterior identifica as sucesións de Cauchy en media de orde p coas sucesións converxentes en media de orde p.

A proba do teorema anterior contén un resultado suficientemente interesante como para enuncialo explicitamente.

Lema 3.12. *Sexa $1 \leq p < \infty$ e sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ con límite f. Entón existe $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ unha subsucesión de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converxe puntualmente en case todo punto a $f(x)$.*

3.3. O espazo $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$

Para completar o estudo dos espazos $L^p(\mu)$ introduciremos agora o correspondente caso $p = +\infty$.

Defínese o espazo de funcións $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) \equiv \mathcal{L}^\infty(\mu)$ do seguinte xeito:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ medible e esencialmente limitada}\}.$$

Vexamos que se entende por función esencialmente limitada:

Definición 3.13. *Diremos que unha función medible $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ é esencialmente limitada se verifica que existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ en c.t.p.(μ) de X, ou equivalentemente, se para este M se verifica que $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$.*

En tal caso diremos que M é cota esencial de f. Denotaremos por S_f ao conxuntos de cotas esenciais de f, i.e, $S_f := \{M \geq 0 : M \text{ cota esencial de } f\}$. Podemos definir agora en $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ a aplicación

$$\|f\|_\infty := \text{ínf}\, S_f \equiv \text{ínf}\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

O valor $\|f\|_\infty$ denomínase supremo esencial de f.

Tendo en conta a desigualdade triangular $|f+g| \leq |f|+|g|$, que $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f|\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ e as propiedades das funcións medibles podemos concluír agora, ao igual que nos casos anteriores que:

Corolario 3.14. *O espazo $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ é un espazo vectorial complexo dotado da seminorma $\|f\|_\infty$.*

Introduciremos agora o correspondente espazo $L^\infty(\mu)$ como o cociente de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ao identificar funcións iguais en case todo punto.

$$\mathcal{L}^\infty(\mu)/_\sim \equiv L^\infty(\mu).$$

onde $\sim$ é de novo a relación de equivalencia $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ para case todo $x \in X$. Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ denotamos por $[f]$ a súa clase de equivalencia en $L^\infty(\mu)$. Se consideramos en $L^\infty(\mu)$ as operacións definidas xa nos casos anteriores

$$[f] + [g] := [f+g],\ [f],[g] \in L^1(\mu) \qquad \text{e} \qquad \alpha[f] := [\alpha f],\ [f] \in L^1(\mu),\ \alpha \in \mathbb{C},$$

e a aplicación

$$\|f\|_\infty\colon [f] \in L^\infty(\mu) \longrightarrow \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty.$$

concluímos que o espazo de clases de equivalencia de funcións $L^\infty(\mu)$ é un espazo vectorial complexo. Ademais, a aplicación $\|\cdot\|_\infty$ é unha norma en tal espazo. Temos entón que:

Corolario 3.15. *O espazo $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ é un espazo vectorial normado.*

A partir da norma $\|\cdot\|_\infty$ podemos definir tamén unha métrica. Novamente bastará tomar $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$, e temos así que o espazo (L^∞, d_∞) é un espazo vectorial métrico. Ademais, o espazo $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ tamén é completo, como demostraremos de seguido.

Teorema 3.16. *O espazo $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ é un espazo de Banach.*

Demostración. Queremos ver que toda sucesión de Cauchy en $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ é converxente en $L^\infty(\mu)$. Sexa logo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de Cauchy en $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$. Cúmprese que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Sexan agora

$$A_k := \{x \in X : |f_k(x) > \|f_k\|_\infty\},\ \mu(A_k) = 0$$

e

$$B_{n,m} := \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\},\ \mu(B_{n,m}) = 0.$$

Por tanto, sendo $E = \bigcup\limits_{k,n,m} (A_k \cup B_{n,m})$, temos que $\mu(E) = 0$, por ser unión numerable de conxuntos de medida nula.
Entón en $X \setminus E$ cúmprese que

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

e como ademais a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy temos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,\ \forall x \in X \setminus E.$$

É dicir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a unha función $f\colon X \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Ademais, esta función é limitada, xa que pola converxencia uniforme temos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N',\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in X \setminus E.$$

Así, $f_n - f$ é esencialmente limitada, é dicir, $f_n - f \in L^\infty(\mu)$, e como $L^\infty(\mu)$ é un espazo vectorial temos que $f \in L^\infty(\mu)$. Concluímos así que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a f en $L^\infty(\mu)$ □

3.4. Referencias bibliográficas

As referencias bibliográficas usadas para a elaboración deste capítulo foron:

- [8] e [9] principalmente para elaborar os principais resultados e as súas demostracións.
- [2] e [4] para consultar algúns conceptos e outras consultas puntuais.

Capítulo 4

Algúns subespazos notables

Xa temos agora introducidos os espazos de Lebesgue como espazos normados completos. Neste capítulo obteremos algúns resultados de densidade e algunha relación de inclusión entre os diferentes espazos L^p. Para rematar, veremos brevemente algúns exemplos particulares de tales espazos.

4.1. Subespazos densos sobre $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

Centrarémonos agora en mostrar algúns subespazos de especial interés nos espazos de Lebesgue $L^p(\mu)$, os subespazos densos.

Comezaremos vendo, como consecuencia do teorema de aproximación de funcións medibles mediante funcións medibles simples e o teorema da converxencia dominada, un caso no que $L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$ contén un subespazo denso. Sexan

$$\mathfrak{S} = \{s \colon X \longrightarrow \mathbb{C} : s \text{ medible e simple } \} \text{ e}$$

$$\mathcal{S} = \{s \colon X \longrightarrow \mathbb{C} : s \text{ medible e simple e } \mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty\}.$$

Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é un espazo de medida arbitrario, $\mathcal{S}$ é un subespazo de $L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$. Ademais, mediante a norma de $L^p(\mu)$, $\mathcal{S}$ adquire a estrutura de espazo normado. Vexamos ademais que tal subespazo é denso.

Teorema 4.1. *Sexa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida. Para $1 \leq p < \infty$, $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_p)$ é un subespazo denso de $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.*

Demostración. Temos xa que $\mathcal{S}$ é un subespazo de $L^p(\mu)$. Sexa $f \in L^p(\mu)$ veremos que existe unhs sucesión de funcións simples $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p = 0$.
Supoñamos $f \geq 0$. Como f é unha función medible, polo Teorema 2.18, temos que existe

unha sucesión crecente de funcións medibles simples $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de xeito que $0 \leq s_n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $0 \leq s_n \leq f$ temos que $s_n \in L^p(\mu)$ e por tanto $s_n \in \mathcal{S}$. Vexamos que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a f en $L^p(\mu)$, como $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq s_n \leq f,\ 0 \leq f - s_n \leq f,\ 0 \leq |f - s_n|^p \leq f^p \ \in L^1(\mu).$$

Aplicando agora o teorema da converxencia dominada temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - s_n|^p d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |f - s_n|^p d\mu = 0,$$

polo que concluímos así que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p = 0,$$

como queríamos probar. Para o caso xeral, cando f é unha función complexa, obtemos o mesmo resultado simplemente descompoñendo f da forma

$$f = Re(f)^+ - Re(f)^- + i(Im(f)^+ - Im(f)^-),$$

onde cada sumando é unha función non negativa. $\square$

O caso $p = \infty$ é algo distinto, xa que o resultado anterior non se cumpre, polo feito de que X pode ser un espazo de medida non finito. Comprobamos isto facilmente considerando a función $f(x) = 1$ $\forall x \in X$. É claro que $f \ \in L^\infty(\mu)$, pero $\|f - s\|_\infty \geq 1$, $\forall s \in \mathcal{S}$. Poderemos obter un resultado semellante engadindo a hipótese de que X sexa un conxunto de medida finita. Así temos que o subespazo de funcións medibles simples $(\mathfrak{S}, \|\cdot\|_\infty)$é denso en $L^\infty(\mu)$ e se $\mu(X) < \infty$ temos ademais que $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_\infty)$ é agora tamén un subespazo denso de $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Ata o momento estudamos os espazos $L^p(\mu)$ para calquera espazo de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Consideraremos agora $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo topolóxico Hausdorff e localmente compacto onde ademais a medida μ cumpra as seguintes propiedades:

- $\mu(K) < \infty$, $\forall K$ compacto de X,
- $\forall E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \ aberto\}$,
- $\forall E \in \mathcal{M}$, E aberto con $\mu(E) < \infty$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \ compacto\}$,
- Se $E \in \mathcal{M}$ e $A \subset E$ con $\mu(E) = 0$ entón $A \in \mathcal{M}$.

Nestas condicións poderemos encontrar outro subespazo denso de $L^p(\mu)$, que será o subespazo formado polas funcións continuas de soporte compacto. Introduciremos de seguido tal espazo, que denotaremos mediante $\mathcal{C}_c$, pero vexamos antes que entendemos por soporte dunha función.

Definición 4.2. *Sexa $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ unha función. Defínese o seu soporte como:*

$$sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

Por tanto,

$$\mathcal{C}_c = \{f\colon X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ continua e } sop(f) \text{ compacto}\}.$$

Veremos en breve que $(\mathcal{C}_c(X), \|\cdot\|_p)$ é un subespazo denso de $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$. Para probar isto faremos uso do Teorema de Luzin, que simplemente enunciaremos a continuación (pódese consultar a demostración en [9] Rudin, 2.24).

Teorema 4.3 (Teorema de Luzin)**.** *Sexa X un espazo topólico Hausdorff localmente compacto, V un aberto de X e K un compacto de X de xeito que $K \subset V$. Entón existe unha función $f \in \mathcal{C}_c$ tal que $\chi_K \leq f \leq \chi_V$.*

Podemos agora afirmar que :

Teorema 4.4. *Sexa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo topolóxico Hausdorff localmente compacto con μ cumprindo as propidedades indicadas anteriormente. Entón $(\mathcal{C}_c(X), \|\cdot\|_p)$ é un subespazo denso de $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Probaremos que cada función simple $s \in \mathcal{S}$ pode ser aproximada por funcións continuas de soporte compacto, e como xa vimos que S era denso en $L^P(\mu)$, xa teremos probado este resultado.
Sexa logo $s \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty$, polo Teorema de Luzin, temos que existe unha función $g \in \mathcal{C}_c$ tal que

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |s(x)| \equiv \beta$$
$$\text{e } \mu(B) < \varepsilon^p, \; B = \{x \in X : s(x) \neq g(x)\}.$$

En consecuencia temos que $|g - s|^p \leq (|g| - |s|)^p \leq 2^p\beta^p$, e por tanto :

$$\int_X |g - s|^p d\mu = \int_B |g - s|^p d\mu \leq 2^p\beta^p\varepsilon^p,$$

polo que $\|g - s\|_p < 2\beta\varepsilon$ $\square$

En particular, podemos considear por exemplo $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ a $\sigma-$álxebra xerada polos conxuntos Lebesgue medibles e μ a medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Temos así que para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k), \|\cdot\|_p)$ é un subespazo denso en $(L^p(\mathbb{R}^k), \|\cdot\|_p)$. Como $L^p(\mathbb{R}^k)$ é un espazo completo, temos que $L^p(\mathbb{R}^k)$ é o completamento de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ coa métrica inducida pola norma de $L^p(\mu)$.

De novo, o caso $p = \infty$ é diferente, xa que este resultado non se cumpre en $L^\infty(\mu)$. Pero, poderemos encontrar algún subconxunto de $L^\infty(\mu)$ sobre o cal $\mathcal{C}_c(X)$ sexa denso? A resposta é afirmativa. Consideraremos en $L^\infty(\mu)$ o subconxunto $\mathcal{C}_0$ formado polas clases das funcións continuas que se anulan no infinito, é dicir

$$\mathcal{C}_0 = \{f \in \mathcal{C}_c : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subset X,\ K \text{ compacto } : \ |f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X \setminus K\}.$$

É claro que $\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{C}_0(X) \subset L^\infty(X)$ e ademais verifícase que se X é un espazo Hausdorff localmente compacto, entón $\mathcal{C}_0(X)$ é denso en $\mathcal{C}_c$ coa norma definida en $L^\infty(\mu)$.

4.2. Inclusións entre espazos L^p

En xeral, non é posible establecer unha relación de inclusión entre os espazos L^p para os diferentes valores de p. Por exemplo, se consideramos $X = [0, 16]$, μ a medida de Lebesgue e $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}$ temos que $f \in L^1(\mu)$ pero $f \notin L^4(\mu)$. Veremos nas seguintes proposicións, que baixo certas condicións e hipóteses, é posible establecer unha relación de inclusión entre os espazos $L^p(\mu)$ para os diferentes expoñetes p.

En primeiro lugar, veremos que, simplemente considerando X un conxunto de medida finita, é posible dar unha relación de inclusión entre distintos espazos $L^p(\mu)$.

Proposición 4.5. *Sexa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida con $\mu(X) < \infty$. Entón, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$, cúmprese que $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ e $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.*

Demostración. Veremos primeiro o caso $q = \infty$. Dada $f \in L^\infty(\mu)$, como $|f| \leq \|f\|_\infty$, temos que :

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \|f\|_\infty^p < \infty,$$

e por tanto $f \in L^p(\mu)$.

Para $q < \infty$, sexa $f \in L^\infty(\mu)$. Temos que

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_X \left((|f|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} d\mu = \int_X (|f|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu = \left[\left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p = (\|f\|_q)^p < \infty.$$

Considerando os expoñentes conxugados $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$ e aplicando a desigualdade de Hölder en $L^{\frac{q}{p}}$ temos que :

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \||f|\|_{\frac{q}{p}} \cdot \|1\|_{\frac{q}{p-q}} = (\|f\|_q)^p \cdot \|1\|_{\frac{q}{p-q}} = \|f\|_q^p \cdot \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Extraendo agora a raíz p-ésima en ambos lados, concluímos que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(X)^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} < \infty,$$

e por tanto, $f \in L^p(\mu)$. □

Outro caso no que podemos establecer unha relación de inclusión conséguese añadindo un terceiro expoñente. Veremos que é posible expresar calquera función dun espazo L^p como suma de dúas funcións doutros dous espazos, coa debida relación entre os seus expoñentes.

Proposición 4.6. *Sexa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida e $1 \leq p < q < r \leq \infty$. Entón, $L^q(\mu) \subset L^p(\mu) + L^r(\mu)$. É dicir, toda función $f \in L^q(\mu)$ pódese expresar como suma dunha función de $L^p(\mu)$ e outra de $L^r(\mu)$.*

Demostración. Sexa $f \in L^q(\mu)$. Definimos o conxunto

$$E = \{x \in X : |f(x)| > 1\}.$$

Sexan $g = f_{|E}$ e $h = f_{|E^c}$. Temos que

$$|g|^p = |f_{|E}|^p \leq |f_{|E}|^q \Rightarrow g \in L^p(\mu),$$

$$|h|^r = |f_{|E^c}|^r \leq |f_{|E^c}|^r \Rightarrow h \in L^r(\mu).$$

Por tanto, $f = g + h \in L^p(\mu) + L^r(\mu)$. □

Finalmente, veremos a inclusión que podemos establecer entre a intersección de dous espazos, L^p e L^r, e un terceiro, L^q.

Proposición 4.7. *Sexa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espazo de medida e $1 \leq p < q < r \leq \infty$. Temos entón que $L^p(\mu) \cap L^r(\mu) \subset L^q(\mu)$ e $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_r^{1-\lambda}$, onde $\lambda \in (0, 1)$ cumpre que $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$.*

Demostración. Sexa $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$. Temos así que $\|f\|_p < \infty$ e $\|f\|_r < \infty$.
Se $r = \infty$, temos que $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \cdot |f|^p$ e $\lambda = \frac{p}{q}$, polo que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_\infty^{1-\lambda}.$$

Para $r < \infty$ usaremos a desigualdade de Hölder para os expoñentes $\frac{p}{\lambda q}$ e $\frac{r}{(1-\lambda)q}$. Temos así que:

$$\begin{aligned}\int_X |f|^q d\mu &= \int_X |f|^{\lambda q} \cdot |f|^{(1-\lambda)q} d\mu \leq \||f|^{\lambda q}\|_{\frac{p}{\lambda q}} \cdot \||f|^{(1-\lambda)q}\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\ &= \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \cdot \left(\int_X |f|^r\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} = \|f\|_p^{\lambda q} \cdot \|f\|_r^{(1-\lambda)q} < \infty.\end{aligned}$$

E por tanto $f \in L^q(\mu)$. □

4.3. Os espazos $\ell^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

Imos ver agora brevemente un exemplo particular de espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$: os espazos de sucesións. Considerando $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, e $\mu = \mu_c$ a medida de contar, obtemos o espazo $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$, que identificaremos co espazo de sucesións $\ell^p(\mathbb{N})$.

Sexa $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ unha función de $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$. Temos que f é medible e que $\int_X |f|^p d\mu_c < \infty$. Usando algúns dos resultados vistos o longo do traballo, como as propiedades da integral, vemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} |f|^p d\mu_c &= \int_{\cup_{n\in\mathbb{N}}} |f|^p d\mu_c = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{n\}} |f|^p d\mu_c \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p \mu_c(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p.\end{aligned}$$

Se definimos $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ de xeito que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, temos que a condición anterior de finitude da integral pode traducirse agora en

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Así, para cada $1 \leq p < \infty$, defínese o espazo ℓ^p como:

$$L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c) = \ell^p \equiv \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

É dicir, denotamos por ℓ^p ao conxunto de sucesións de números complexos $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para os cales a serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ é converxente.

Ademais, a norma $\|\cdot\|_p$ pode reescribirse da forma :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

sendo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números complexos.

Temos así, equivalentemente, que

$$\ell^p = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p < \infty\}.$$

Podemos reformular agora algúns dos resultados que vimos anteriormente de maneira xeral para os espazos L^p que se verifican para os espazos ℓ^p, por seren un caso particular dos anteriores. Por exemplo, as desigualdades de Hölder e Minkowski para dúas sucesións de números complexos $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ poden reescribirse do seguinte xeito:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ (Hölder)},$$

$$b) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (Minkowski).}$$

Outra característica importante a comentar é que os espazos $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ son espazos de Banach.

Analizaremos agora brevemente a relación de inclusión entre os espazos ℓ^p para os distintos valores de p. Sexa $x \in \ell^p$. Tomando $1 \leq p < q < \infty$, é claro que para cada $n \in \mathbb{N}$ verifícase que

$$|x_n| = (|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Entón $\frac{|x_n|}{\|x\|_p} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, por tanto,

$$\left(\frac{|x_n|}{\|x\|_p}\right)^q \leq \left(\frac{|x_n|}{\|x\|_p}\right)^p \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sumando esta desigualdade para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, $\forall x \in \ell^p$. Por tanto, concluímos así que $l^p \subset l^q$.

Comentaremos agora algúns aspectos sobre o caso $p = \infty$, o espazo formado polas sucesións acotadas. Defínese do seguinte xeito:

$$\ell^\infty \equiv \ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$$

O espazo ℓ^∞ é tamén un espazo de Banach dotado da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \ \forall x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty.$$

Finalmente, mencionar un par de subespazos destacables de ℓ^∞, que son o espazo das sucesións converxentes a cero, que denotaremos por c_0; e o espazo das sucesión converxentes, c. Ambos son subespazos cerrados de ℓ^∞ e ademais, coa norma $\|\cdot\|_\infty$, son tamén espazos de Banach.

4.4. O espazo $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$

Comentaremos agora brevemente o caso correspondente a $p = 2$. A particularidade en tal caso é que, dado un espazo de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, o espazo $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ goza da estrutura de espazo de Hilbert. Recordemos que un espazo de Hilbert é un espazo vectorial, real ou complexo, completo dotado dun produto interior. Chamaremos produto interior de x e y ao valor $\langle x, y\rangle$ verificando que:

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(ii) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \ \forall x, y, z \in H$

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \ \forall x, y \in H \ \forall \alpha \in K$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H$ e $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Veremos como construír un produto interior en $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ e como, a partir deste, poderemos definir unha norma.

Definición 4.8. *Sexan $f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$. Defínese:*

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)\overline{g}(x)d\mu,$$

onde $\overline{g}$ denota a función complexa conxugada: $\overline{g}(x) = \overline{g(x)}$, $\forall x \in X$.

O valor $\langle f, g\rangle$ é o produto interior de f e g en $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Como vimos nas seccións anteriores, os espazos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ son espazos vectoriais dotados dunha norma coa cal estes espazos forman espazos vectoriais completos. Para $p = 2$ teríamos que a norma correspondente sería

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Veremos como conseguir esta norma a partir do produto interior definido anteriormente en $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$. Bastará considerar para cada $f \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$,

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X f(x)\overline{f}(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

como cabía esperar.

Xa temos así que o espazo $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ das clases de funcións medibles de cadrado integrable é un espazo de Hilbert.

No caso particular de tomar $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu = \mu_c$ a medida de contar, teríamos que o espazo $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ identifícase co espazo $\ell^2(\mathbb{N})$, formado polas sucesións complexas $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$. O espazo $\ell^2(\mathbb{N})$ é tamén un espazo de Hilbert.

4.5. Referencias bibliográficas

As referencias bibliográficas usadas para a elaboración deste capítulo foron:

- [5] para consultar os resultados sobre as inclusións entre os espazos L^p vistos na sección 4.2.

- [8] e [9] principalmente para o estudo dos subespazos densos.
- [7] para outras consultas puntuais.

Bibliografía

[1] Abbott, S., *Understanding analysis*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2015.

[2] Castillo, R. E. and Rafeiro, H., *An introductory course in Lebesgue spaces*, Springer, Switzerland, 2016.

[3] Cerdà, J. L., *Análisis Real*, col·lecció UB, 23, Edicions de la Universitat de Barcelona, D.L., Barcelona 1996.

[4] Dyachenko, M. I. and Ulyánov, P. L., *Análisis real: medida e integración*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2000.

[5] Folland, G. B., *Real analysis modern techniques and their applications*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc, New York ,1999.

[6] Hawkins, T., *Lebesgue theory of integration: it's origins and development*, 2nd ed., Vol 282, American Mathematical Society, Rhode Island, 2001.

[7] Hewitt, E. and Stromberg, K. *Real and abstract analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 25, Springer-Verlag, New York, 1965.

[8] Rana, I. K., *An introdution to measure and integration*, 2nd ed., Alpha Science International Ltd, Harrow, U. K, 2005.

[9] Rudin, W., *Análisis real y complejo*, 3rd ed., McGraw-Hill, Madrid, 1987.

[10] Tao, T. *An introduction to measure theory*, Graduate Texts in Mathematics, 126, American Mathematical Society, Rhode Island, 2011.