



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Ecuacións p-Laplacianas

Paula Cambeses Franco

2022/2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Ecuacións p-Laplacianas

Paula Cambeses Franco

Xullo 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA





# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento:</b> Análise matemática
<b>Título:</b> Ecuacións p-Laplacianas
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>Os fluídos que non presentan unha relación linear entre o cizallamento e a velocidade de deformación coñécense como Fluídos non Newtonianos. Neste caso, o comportamento da cizalladura é non linear e depende dunha constante <math>p &gt; 1</math>. Se <math>p = 2</math> estamos no caso Newtoniano. No caso <math>1 &lt; p &lt; 2</math>, a viscosidade diminúe co aumento da tensión: son os fluídos pseudo-plásticos (sangue, barro, algún tipo de pinturas,...). Se <math>p &gt; 2</math>, os fluídos chámanse dilatantes e son aqueles nos que a viscosidade aumenta coa deformación do fluído (manteiga, area movediza, amidón,...).</p> <p>Neste traballo abordarase o estudo deste tipo de ecuacións, centrándonos na modelización das mesmas, así como no estudo das solucións dalgúns problemas de contorno por medio do desenrolo de teoría espectral.</p>
<b>Recomendacións</b>
Recoméndase cursar ou ter cursadas as materias Introducción ás Ecuacións Diferencias Ordinarias e Ecuacións Diferencias Ordinarias.
<b>Outras observacións</b>

# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Mecánica de fluídos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción á reoloxía . . . . .	1
1.2. Principais ecuacións dos fluídos . . . . .	3
1.2.1. Ecuacións de conservación da cantidade de movemento e de Navier-Stokes . . . . .	4
1.2.2. Ecuacións constitutivas de Fluídos non Newtonianos . . . . .	6
<b>2. Espectro de problemas de contorno <math>p</math>-Laplacianos</b>	<b>9</b>
2.1. Estudo do problema de valor inicial . . . . .	10
2.2. Estudo do problema de autovalores . . . . .	19
<b>3. O problema de Neumann con sub e sobre solucións ben ordenadas</b>	<b>27</b>
3.1. Exemplos . . . . .	35
<b>4. O problema de Neumann con sub e sobre solución en orde inversa</b>	<b>39</b>
4.1. Resultados preliminares . . . . .	41
4.2. Principios de comparación . . . . .	45
4.3. O método monótono . . . . .	47
4.3.1. Contraexemplos . . . . .	51
4.4. Exemplos . . . . .	54
<b>A. Relación entre <math>\nabla \cdot \mathbf{u}</math> e <math>tr(\mathbf{D})</math></b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



## Resumo

A fabricación de chalecos antibalas, a reparación de baches e outras moitas aplicacións motivaron o estudo dunha clase especial de fluídos, denominados Fluídos non Newtonianos. Estes caracterízanse por non presentar unha relación linear entre a tensión tanxencial e a velocidade de deformación. O seu estudo é de gran interese e conduce a análise das coñecidas como ecuacións  $p$ -Laplacianas, presentes tamén noutros campos como en problemas de reacción-difusión ou en medios porosos. En función do valor de  $p$  estaremos ante o caso de fluídos pseudo-plásticos ( $1 < p < 2$ ), dilatantes ( $p > 2$ ) ou Newtonianos ( $p = 2$ ).

O estudo e a modelización das mesmas foron o obxectivo principal deste traballo. Por un lado, buscáronse os autovalores de problemas  $p$ -Laplacianos non homoxéneos así como a solución dalgúns problemas de contorno por medio do desenvolvemento da teoría espectral. Por outra parte, analizáronse a existencia e a unicidade de solución do problema de Neumann coñecendo sub e sobre solucións do mesmo ben ordenadas ou dadas en orde inversa.

No cálculo dos autovalores atopouse unha descrición completa do espectro e unha representación das autofuncións. No referente ao problema de Neumann, no primeiro caso (sub e sobre solución ben ordenadas) os resultados foron xenéricos no sentido de que baixo hipóteses axeitadas podemos asegurar a existencia de solución para todo  $p > 1$ . Non obstante, no segundo (sub e sobre solución dadas en orde inversa) as deducións só foron válidas cando  $1 < p \leq 2$ .

## Abstract

The manufacture of bulletproof vests, road pothole repairs, and many other applications have motivated the study of a special class of fluids called Non-Newtonian fluids. These fluids are characterized by not having a linear relationship between shear stress and deformation velocity. Their study is of great interest and leads to the analysis of the

so-called  $p$ -Laplacian equations, which are also present in other fields such as reaction-diffusion problems or porous media. Depending on the value of  $p$ , we encounter the cases of pseudoplastic fluids ( $1 < p < 2$ ), dilatant fluids ( $p > 2$ ), or Newtonian fluids ( $p = 2$ ).

The study and modeling of these fluids were the main objective of this work. On the one hand, we sought the eigenvalues of non-homogeneous  $p$ -Laplacian problems and solved some boundary value problems using the development of spectral theory. On the other hand, we analyzed the existence and uniqueness of solutions for the Neumann problem by knowing lower and upper solutions that are either well-ordered or given in reverse order.

In the calculation of eigenvalues, a complete description of the spectrum and a representation of the eigenfunctions were found. Regarding the Neumann problem, in the first case (well-ordered lower and upper solutions), the results were generic in the sense that under suitable assumptions, we could ensure the existence of a solution for all  $p > 1$ . However, in the second case (lower and upper solutions given in reverse order), the deductions were only valid when  $1 < p \leq 2$ .

---

## Agradecementos

Gustaríame expresar o meu máis sincero agradecemento ás persoas que fixeron posible a realización deste Traballo Fin de Grao.

En primeiro lugar, quero agradecer ao meu titor, Alberto Cabada Fernández, pola súa inestimable orientación, paciencia e dedicación ao longo de todo este traballo. Foi un pracer que me permitira acudir, sempre que o necesitara, ao seu despacho, onde non só atopaba as respostas ás miñas dúbidas, senón tamén unha fonte de inspiración e motivación.

Tamén quero agradecer á miña familia polo seu constante apoio e comprensión. O seu amor e alento foron fundamentais para superar todos os retos e dificultades, xa non só deste traballo, senón ao longo da miña vida. Se hoxe podo presentar esta memoria é, en gran parte, grazas a ela.

Por último, quería agradecer a todas aquelas persoas que, dun xeito ou outro, estiveron presentes aguantando as miñas queixas e apoiándome tanto a nivel académico como persoal. Grazas por facerme sempre sorrir.

# Introdución

Que pensaríamos se vísemos a alguén camiñando sobre a auga? Creeríamos que é un efecto visual ou que de verdade é posible? Existe un fluído, denominado Oobleck, que permite camiñar sobre a auga sen case mollarnos, sempre que o fagamos á velocidade axeitada. Isto débese a que actúa como un líquido ao volcarse e como un sólido ao exercer presión sobre el. Mais isto non é simplemente unha anécdota curiosa, senón que da pé a falar dunha clase especial de fluídos.

Así, existen unha serie de fluídos cuxo comportamento se alonxa das leis clásicas da mecánica estudada por Newton. Todos sabemos, por exemplo, o que é un líquido, pero, un líquido será sempre un líquido? Poderá depender dita propiedade da forza que exercemos? Ou da temperatura a que estea sometido?

Efectivamente. Isto é o que acontece cos denominados Fluídos non Newtonianos, cuxa viscosidade varía coa temperatura ou a tensión cortante que se lle aplique. En outras palabras, existen materiais aparentemente líquidos que, ao sometelos a unha mínima presión, se volven duros como unha pedra (e viceversa). Non se trata tan só de complicados fluídos creados artificialmente nun laboratorio, senón que están presentes no noso día a día. Exemplos disto poden ser a pintura, a marmelada ou a maionesa. O seu estudo é moi importante pois teñen numerosas aplicacións como a fabricación de chalecos antibalas ou a reparación de baches. Por iso, estes fluídos foron analizados por numerosos autores [6, 18, 20].

Ao estudar estes fluídos chégase a unha ecuación, denominada ecuación  $p$ -Laplaciana, de gran utilidade non só en Fluídos non Newtonianos, senón tamén en problemas de reacción-difusión ou en medios porosos.

Así, os obxectivos desta memoria serán os seguintes. Comezarase no capítulo 1 definindo os conceptos fundamentais de reoloxía e presentando as principais ecuacións de fluídos ata chegar a obter a denominada ecuación  $p$ -Laplaciana [6, 13].

Seguidamente, no capítulo 2, centrarémonos no estudo dos autovalores de problemas  $p$ -Laplacianos non homoxéneos así como da búsqueda de solución dalgúns problemas de contorno por medio do desenvolvemento da teoría espectral [14].

A continuación, no capítulo 3, analizaremos a existencia de solución do problema

$\phi(u')' = f(t, u, u')$  con condicións Neumann dadas sub e sobre solucións do mesmo ben ordenadas. Obteranse unha serie de resultados que garanten a existencia da mesma baixo determinadas hipóteses para as funcións  $\phi$  e  $f$  [12, 25].

Por último, no capítulo 4 analizaremos o mesmo problema mais, neste caso, coas sub e sobre solucións dadas en orde inversa obtendo resultados que só serán válidos para o caso  $1 < p \leq 2$  [11].

# Capítulo 1

## Mecánica de fluídos

Este capítulo estará centrado na mecánica de fluídos. O obxectivo fundamental do mesmo é presentar as nocións básicas e as ecuacións principais de fluídos ata chegar ás ecuacións  $p$ -Laplacianas. Así mesmo, tamén se presentará o concepto de Fluído non Newtoniano e se mostrarán exemplos da utilidade dos mesmos, o cal nos dá unha idea da importancia da súa modelización e, por tanto, da relevancia do estudo das ecuacións  $p$ -Laplacianas.

### 1.1. Introducción á reoloxía

Nesta sección introduciremos conceptos esenciais relacionados cos fluídos e indicaremos a diferenza entre os Fluídos Newtonianos e os non Newtonianos. Así mesmo, presentaranse os distintos tipos de Fluídos non Newtonianos e as súas características. Seguiremos principalmente [18] xunto a [6, 7, 20]. Todas elas conteñen información sobre reoloxía, isto é, a rama da física que se encarga do estudo da deformación e o fluxo da materia.

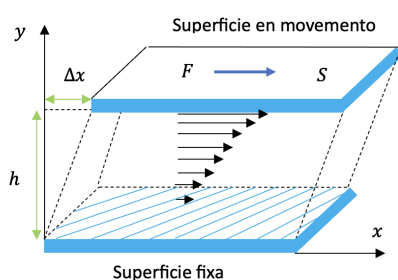


Figura 1.1: Viscosidade

Cando un fluído se ve sometido a unha forza ou a un esforzo cortante, este presenta unha resistencia ao movemento debido a unha fricción interna do mesmo. Esta fricción aparece cando unha capa de fluído se despraza en relación con outra. O fluído tende a deformarse e, posteriormente, flúe de forma que a velocidade aumenta a medida que se incrementa o esforzo. Esta propiedade de oposición ao movemento relativo entre capas adxacentes é o que se denomina viscosidade. Ilústrase na Figura 1.1.

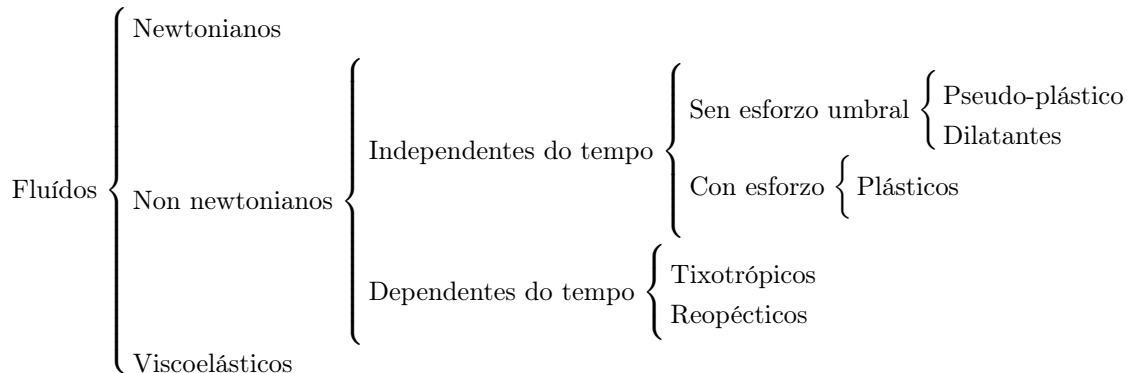
Newton plantexa unha lei da viscosidade que establece que en movementos de fluídos laminares existe unha relación lineal entre as tensións tanxenciais ou esforzo cortante (forza

por unidade de superficie tanxente á superficie) exercidas nun punto do fluído  $\tau$  e os gradientes de velocidade  $\frac{du}{dy}$ . A constante de proporcionalidade é a viscosidade, denotada por  $\mu$ .

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.1)$$

Existen moitos fluídos, tanto líquidos como gaseosos, que verifican a ecuación (1.1) e que se denominarán Fluídos Newtonianos. Exemplos disto poden ser a auga, a gasolina ou o alcohol. Sen embargo, este traballo estará centrado naquelas substancias que non se comportan seguindo a lei da viscosidade de Newton e que se denotarán, por contraposición, como Fluídos non Newtonianos. Neste caso, a viscosidade a unha temperatura e presión dadas é función do gradiente de velocidade ou velocidade de deformación, de tal forma que deixa de existir unha relación lineal entre tensión e velocidade de deformación. A ciencia que estuda este comportamento denomínase reoloxía e abrangue a rexión comprendida dende a Mecánica de Fluídos Newtonianos ata a elasticidade de Hooke.

En función de como varía a relación entre o esforzo cortante e o gradiente de velocidade, pode clasificarse aos Fluídos non Newtonianos nos seguintes grupos [18]:



Denomínanse fluídos con esforzo umbral a aqueles que necesitan un esforzo cortante mínimo para pasar de comportarse como un sólido a actuar como un líquido.

- Pseudo-plástico: característico de materiais de alta viscosidade, a cal diminúe rapidamente a medida que aumenta a velocidade de deformación aplicada. Exemplos disto son os polímeros en disolución, a marmelada ou as tintas de impresión.
- Plástico: o comportamento é moi similar ao caso anterior, pero precisan dun esforzo mínimo para que exista deformación continua. É o caso da pasta dentrífica, das pomadas ou do chocolate.
- Dilatante: aumento sobreproporcional da viscosidade ao aumentar a velocidade de deformación aplicada. Nesta categoría entran a area húmida ou o amidón de auga.
- Tixotrópicos e reopéticos: a viscosidade depende da velocidade de deformación e do tempo. Como exemplos pódese citar a maionesa ou o ketchup.

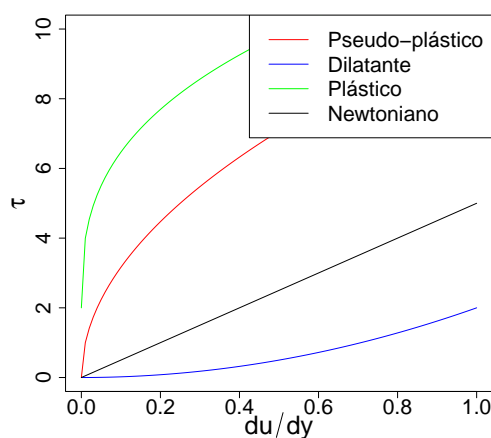


Figura 1.2: Tipos de fluídos

Na Figura 1.2 represéntase a tensión fronte á velocidade de deformación observando os distintos comportamentos en función do tipo de fluído do que se trate.

O estudo destes fluídos é esencial pois presentan un campo de aplicación moi amplo. Son útiles tanto en ramas de investigación fundamental como en medicina. O sangue, por exemplo, é un fluído pseudo-plástico: ó aumentar o ritmo cardíaco diminúe a viscosidade. Se fose dilatante, a xente podería morrer de infarto nunha carreira.

Por outro lado, os Fluídos non Newtonianos tamén están presentes na fisioloxía ou na química, así como en investigación máis aplicada. Neste último caso pódese falar da determinación do grosor de gotas, da fabricación de tellas, da creación de traxes militares flexibles, calzado deportivo, chalecos antibalas ou da posibilidade de parchear baches, por citar só algúns exemplos.

Ao traballar con este tipo de fluídos chegarase a unha ecuación da forma [6]:

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx},$$

denominada ecuación  $p$ -Laplaciana. O seu estudo e análise serán a parte principal desta memoria. Ademais, o estudo destas ecuacións tamén pode resultar útil noutras áreas como o da condutividade dos campos electromagnéticos.

## 1.2. Principais ecuacións dos fluídos

Unha vez presentados os conceptos de fluídos necesarios para poder entender a memoria, pasamos a describir as principais ecuacións que rixen os fluídos, ata chegar a mostrar a ecuación  $p$ -Laplaciana. Información acerca disto pode atoparse en [3, 6, 13, 15, 27]. Para a obtención da ecuación da conservación do movemento seguiremos fundamentalmente as referencias [13, 15] mentres que para o estudo das ecuacións constitutivas seguirase principalmente [6].

### 1.2.1. Ecuacións de conservación da cantidade de movemento e de Navier-Stokes

A ecuación de movemento dun fluído séguese da Segunda Lei de Newton, isto é, a tasa de cambio da cantidade de movemento dunha porción dada de fluído é igual á resultante das forzas que actúan sobre esta porción. Pódese escribir esta lei de distintas formas, as cales son equivalentes. Centrarémonos nas formas Lagranxianas e Eulerianas.

A descrición Lagranxiana consiste en facer un seguimento das partículas materiais, mentres que a Euleriana mide o que pasa en puntos fixos do espazo. Por exemplo, se se quere estudar que artigos levan os clientes dun supermercado, a forma Lagranxiana consistiría en seguir a cada cliente poñéndolle unha etiqueta mental, mentres que no punto de vista Euleriano estableceríase un sitio fixo (como pode ser a caixa rexistradora) e miraríanse os artigos que pasan.

Dado un volume material  $V$  rodeado por unha superficie material  $S$ , a cantidade de movemento contida en  $V$  é a que se amosa na seguinte ecuación.

$$\int \rho \mathbf{u} dV,$$

sendo  $\rho(X, t)$  a densidade e  $\mathbf{u}(X, t)$  a velocidade. Ambas son funcións xenéricas da posición  $X$  e do tempo  $t$ .

Sobre unha porción dada de fluído actúan forzas de volume e de superficie, cuxa resultante debe ser igual á derivada temporal da cantidade de movemento. Denotando por  $\mathbf{g}$  á resultante das forzas por unidade de volume e por  $\sigma$  á forza superficial deducimos que [15]:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \oint_s \sigma \cdot \mathbf{n} dS,$$

onde se usou a definición de derivada material (coincide coa derivada total):

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}.$$

Escribindo en notación indicial e derivando respecto ao tempo (derivada material) chegamos a:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right) dV, \quad (1.2)$$

onde se empregou a notación de Einstein para a suma e se usou o Teorema de transporte de Reynolds:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha u_j) \right) dV.$$

Por outro lado, empregando o Teorema de Gauss:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

tense que:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV + \oint_s \sigma \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_V (\nabla \cdot \sigma) dV. \quad (1.3)$$

Como isto debe ser válido para un volume arbitrario, obtense a seguinte ecuación (a partir das ecuacións (1.2) e (1.3)):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

Expandindo a ecuación anterior chégase a:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

Seguidamente, tendo en conta a ecuación de conservación da masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

deducimos

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

ou, en forma vectorial,

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma,$$

que é a forma diferencial Euleriana da ecuación de movemento.

Usando, de novo, a definición de derivada material obtense:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma, \quad (1.4)$$

que constitúe a forma diferencial Lagranxiana da ecuación de movemento [13].

A partir de aquí seguiremos principalmente a referencia [6]. Pode resultar útil descompoñer o tensor  $\sigma$  nunha compoñente isotrópica  $-p\mathbf{1}$  onde  $p$  se denominará presión (non no sentido termodinámico) e un tensor de desviación  $\tau'$  caracterizado por ter traza nula. Tendo isto en conta, pode escribirse a forma da ecuación dinámica Lagranxiana (1.4) tal e como se amosa na seguinte ecuación:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau' + \rho \mathbf{g}. \quad (1.5)$$

A ecuación (1.5) representa a igualdade entre a forza inercial debida á aceleración da partícula e o conxunto das forzas superficiais e de volume actuando sobre ela. Trátase dunha formulación directa da primeira lei de Newton.

No caso de fluídos con densidade constante, pódese descompoñer a tensión total como:

$$\sigma = -\alpha \mathbf{1} + \tau,$$

sendo  $\alpha$  un escalar arbitrario e  $\tau$  o chamado “tensor extra”, o cal virá dado por unha ecuación constitutiva (relación matemática que define de que xeito as propiedades mecánicas dun material, como son o estrés e a deformación, dependen de variables como a temperatura ou a taxa de deformación). O escalar  $\alpha$  non ten porque coincidir coa presión pois  $\tau$  non terá necesariamente traza nula.

Existe un tipo de fluídos, que se denominarán fluídos ideais, nos cales a tensión é sempre un tensor isotrópico. Isto implica que  $\tau' = 0$ .

Por outro lado, no caso de Fluídos Newtonianos incompresibles (aqueles nos que a densidade permanece constante), a lei de Newton pode escribirse da forma:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}', \quad (1.6)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade e  $\mathbf{D}$  o tensor de “estiramento” que vén definido por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T).$$

Claramente,  $\mathbf{D}$  é un tensor simétrico. Por último, substituíndo na ecuación (1.5), chégase á ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{u}. \quad (1.7)$$

A ecuación (1.7) proporciona o punto de partida para o tratamento dos Fluídos Newtonianos.

### 1.2.2. Ecuacións constitutivas de Fluídos non Newtonianos

Como consecuencia da ecuación de Navier-Stokes pode deducirse a lei de Hagen-Poiseuille que relaciona a tasa de fluxo volumétrico  $Q$  (cantidade de fluído que flúe a través dun canal nun período de tempo determinado) co gradiente de presión na dirección axial para un fluxo rectilíneo lineal ao longo dun tubo circular

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{16\mu L}, \quad (1.8)$$

sendo  $\Delta p$  a caída de presión,  $L$  a lonxitude do tubo e  $R$  o seu raio.

Moitos fluídos presentan a dependencia lineal entre o fluxo volumétrico  $Q$  e a caída de presión  $\Delta p$  que se deduce da ecuación (1.8). Non obstante, a predición falla para algúns materiais, os denominados Fluídos non Newtonianos.

O caso máis simple de fluído viscométrico (fluído cuxa viscosidade varía coa velocidade de deformación) é o fluxo lineal de Couette, que ten lugar entre dúas placas planas paralelas que se deslizan entre sí. No sistema cartesiano pode modelizarse coas seguintes ecuacións:

$$u^1 = \gamma x^2, \quad u^2 = u^3 = 0.$$

onde  $\gamma$  é a tasa de deformación que cumpre que  $|\frac{du}{dx}| = |\gamma|$ .

Neste caso, o tensor  $D$  viría dado por:

$$[\mathbf{D}] = \frac{\gamma}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e, seguindo a ecuación constitutiva do caso Newtoniano (1.6), debería terse:

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\boldsymbol{\tau}'] = \mu\gamma \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Con todo, os Fluídos non Newtonianos non presentan esta dependencia lineal entre  $\tau_{12}$  (compoñente (1,2) de  $\tau$ ) e  $\gamma$ . Neste caso, defínese unha nova cantidade,  $\eta$ , denominada “viscosidade viscométrica aparente”.

$$\eta = \frac{\tau_{12}}{\gamma}.$$

En función de como varíe  $\eta$  distínguense dous tipos de fluídos: os dilatantes, para os cales  $\frac{d\eta}{d\gamma} > 0$  e os pseudo-plásticos que cumpren que  $\frac{d\eta}{d\gamma} < 0$ .

Para estes materiais a ecuación constitutiva Newtoniana (1.6) é inadecuada, co cal será necesario buscar outras ecuacións capaces de modelar este comportamento. Ditas ecuacións deben ser invariantes ante un cambio na convención usada ou ante unha variación do sistema de coordenadas. Así mesmo, cumprirán o principio de obxectividade material, co cal non se verán afectadas por cambios no marco de referencia.

Tendo en conta o indicado anteriormente, podería deducirse unha ecuación non lineal que relacione  $\tau$  e  $\mathbf{D}$

$$\tau = \mathbf{g}(\mathbf{D}). \quad (1.10)$$

A ecuación (1.10) é aínda bastante restrictiva xa que asume que o valor de  $\tau$  nun punto e nun tempo concreto está determinado polo valor de  $\mathbf{D}$  nese punto e nese tempo.

O principio de obxectividade material impón a condición de que  $\mathbf{g}(\mathbf{D})$  debe ser un tensor isotrópico, co cal, tendo en conta que  $\mathbf{g}(\mathbf{D})$  é unha función tensorial simétrica e isotrópica, pódese empregar o seguinte Teorema de análise tensorial.

**Teorema 1.1.** *Calquera función escalar isotrópica dun tensor simétrico pode ser expresada en función dos tres principais invariantes do tensor, isto é*

$$\alpha = f(\mathbf{D}) = h(\mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D).$$

Para un tensor de orde 3 estes invariantes serían:

$$\mathbf{I}_D = \text{tr}(\mathbf{D}), \quad \mathbf{II}_D = \frac{1}{2}((\text{tr}(\mathbf{D}))^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)) \text{ e } \mathbf{III}_D = \det(\mathbf{D}).$$

**Teorema 1.2.** *Calquera función dun tensor isotrópico e simétrico  $\mathbf{g}(\mathbf{D})$  é da forma*

$$\mathbf{g}(\mathbf{D}) = \phi_0 \mathbf{1} + \phi_1 \mathbf{D} + \phi_2 \mathbf{D}^2, \quad (1.11)$$

onde  $\phi_i$  son funcións escalares dos tres principais invariantes de  $\mathbf{D}$ .

Os resultados anteriores poden deducirse de [27].

Substituíndo a ecuación (1.11) en (1.10) chégase á seguinte:

$$\tau = \phi_1(\mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D)\mathbf{D} + \phi_2(\mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D)\mathbf{D}^2, \quad (1.12)$$

onde  $\mathbf{I}_D$ ,  $\mathbf{II}_D$  e  $\mathbf{III}_D$  son os tres invariantes do tensor  $\mathbf{D}$ .

Na anterior ecuación, tívose en conta que para densidade constante verificase que  $\mathbf{I}_D = 0$  xa que, segundo pode verse no apéndice:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{D} = \mathbf{I}_D.$$

Chegado a este punto poderían seguirse dúas correntes. Por un lado, a denominada como mecánica dos Fluídos Newtonianos xeneralizada, para a cal a ecuación (1.10) resulta adecuada e, por outro lado, a mecánica dos fluídos con memoria que precisaría de ecuacións constitutivas máis complexas. Este traballo estará centrado na primeira categoría. Neste caso, pode verse que:

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} = 2\eta(S)\mathbf{D}, \quad (1.13)$$

onde o parámetro  $S$  ten dimensións de frecuencia ao cadrado e cumpre que, para fluídos con densidade constante, adopta a forma:

$$S = -4\mathbf{II}_{\mathbf{D}} = 2tr(\mathbf{D}^2). \quad (1.14)$$

No caso do fluxo lineal de Couette podería verse que  $\mathbf{II}_{\mathbf{D}} = -\frac{\gamma^2}{4}$  usando as ecuacións (1.9) e (1.12). Por último, tendo en conta a ecuación (1.14) obtense que  $S = \gamma^2$ .

Tendo en conta isto e substituíndo na ecuación de Navier-Stokes (1.7) chégase a:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \eta(S)\nabla^2\mathbf{u} + 2\mathbf{D} \cdot \nabla\eta.$$

Trátase dunha ecuación de Navier-Stokes xeneralizada.

Unha forma funcional moi usada para  $\eta(S)$  é a seguinte:

$$\eta(S) = KS^{(n-1)/2}, \quad (1.15)$$

onde  $n$  e  $K$  son parámetros constantes, chamados o índice da lei de poder e a consistencia, respectivamente. Nesta ocasión, en función do valor de  $n$  distínguense:

- $n < 1$ : fluídos pseudo-plásticos.
- $n = 1$ : fluídos Newtonianos.
- $n > 1$ : fluídos dilatantes.

Particularizando para o caso dun fluxo laminar ao longo dun tubo circular, dedúcese que:

$$u_z = u(r) \quad \text{e} \quad u_r = u_\theta = 0, \quad \text{co cal} \quad \frac{du}{dr} = -\gamma(r).$$

Facendo uso das ecuacións (1.13) e (1.15) tense:

$$\tau = \eta(\gamma^2)\gamma \propto |\gamma|^{n-1}|\gamma| = \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \frac{du}{dr},$$

onde  $\propto$  quere dicir "directamente proporcional a".

Por último, redefinindo:  $x \equiv r$ ,  $p = n + 1$ , chégase á ecuación  $p$ -Laplaciana que se buscaba:

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx}, \quad (1.16)$$

onde  $\mu$  é a denominada viscosidade.

En función do valor de  $p$  tense:

- $1 < p < 2$ : fluídos pseudo-plásticos.
- $p = 2$ : fluídos Newtonianos.
- $p > 2$ : fluídos dilatantes.

## Capítulo 2

# Espectro de problemas de contorno $p$ -Laplacianos

Unha vez introducidos os conceptos necesarios de mecánica de fluídos e chegado ata a ecuación  $p$ -Laplaciana, pasaremos ao seu estudo. Concretamente, este capítulo estará centrado no estudo dos autovalores de problemas  $p$ -Laplacianos con distintas condicións de contorno. Seguirase principalmente o artigo [14]. Como novidade, completaranse algunhas das demostracións presentadas, indicaranse os pasos para a obtención das ecuacións (2.2) e (2.3), engadiranse unha serie de ilustracións que serán útiles para entender os distintos resultados que se vaian obtendo e indicarse a relación entre a teoría desenvolvida neste capítulo e a de Sturm-Liouville. Para todo iso, serán de utilidade, ademais de [14], as referencias [1, 4, 16, 24, 26], as cales se fará mención ao longo do capítulo.

Comezaremos analizando unha ecuación máis xenérica que a  $p$ -Laplaciana indicada anteriormente (ecuación (1.16)) e dada por

$$(\phi_p(u'(t)))' + \lambda \phi_q(u(t)) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.1)$$

baixo condicións Dirichlet ( $u(0) = u(T) = 0$ ), Neumann ( $u'(0) = u'(T) = 0$ ) e periódicas ( $u(0) = u(T)$  e  $u'(0) = u'(T)$ ).

Nesta ocasión,  $T$  é un número real maior ca cero,  $\lambda$  un parámetro real e  $p$  e  $q$  números reais maiores ca 1. Ademais, a función  $\phi_m$  con  $m \in \{p, q\}$  vén dada por

$$\phi_m(s) = \begin{cases} |s|^{m-2}s, & \text{para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \\ 0 & \text{para } s = 0. \end{cases}$$

Na Figura 2.1 aparece representada a función  $\phi_m$  para distintos valores de  $m$ .

É conveniente indicar que ao longo deste apartado se empregará habitualmente a notación  $m^*$  para referirse a  $m^* := \frac{m}{m-1}$ . É obvio que  $\phi_m^{-1}(s) = \phi_{m^*}(s)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Ademais  $p = p^*$  se e só se  $p = 2$ , caso no que  $\phi_2(s) = s$ .

Por outro lado, resulta inmediato verificar que  $\Phi_m(s) = \frac{|s|^m}{m}$  é unha primitiva de  $\phi_m$ .

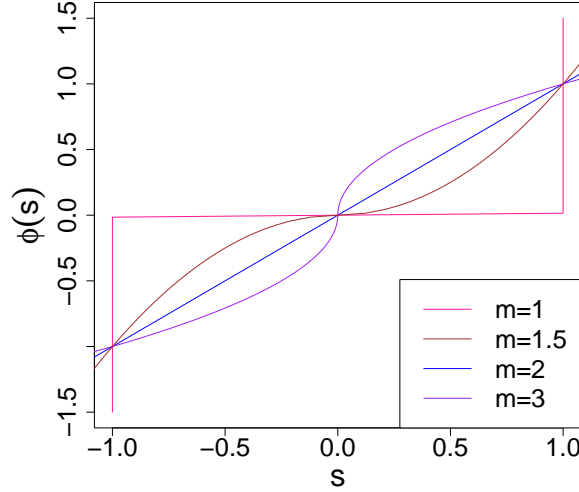


Figura 2.1: Representación de  $\phi_m(s)$  para distintos valores de  $m$ .

Entendemos que  $u$  é unha solución do problema (2.1) se  $u \in C^1[0, 1]$ ,  $\phi_p(u') \in C^1[0, T]$  e verifica a igualdade (2.1) en  $(0, T)$ .

Neste capítulo estudaranse as solucións da ecuación (2.1). Para iso, traballarase en primeiro lugar cos problemas de valor inicial e obterase unha solución que incluírá a función Gamma de Euler. A continuación, tendo en conta o anterior, conseguirase chegar a unha expresión explícita do espectro da ecuación (2.1) baixo as condicións Neumann, Dirichlet e periódicas.

Por tanto, na seguinte sección, comezamos plantexando o problema de valor inicial.

## 2.1. Estudo do problema de valor inicial

Neste apartado analizarase o seguinte problema:

$$(PVI) \begin{cases} (\phi_p(u'(t)))' + \lambda \phi_q(u(t)) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = a, \quad u'(t_0) = b, & t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

para calesquera  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

Antes de demostrar a existencia e unicidade de solución do problema (PVI), é necesario introducir un resultado previo, derivado do Teorema do punto fixo de Schauder, o Teorema de Picard Lipschitz [24]:

**Proposición 2.1.** *Sexa  $f : \Omega \subseteq (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  unha función continua, definida nun aberto  $\Omega$  e localmente Lipschitz respecto á variable espacial. Dado  $(t_0, u_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ , existe unha solución local da ecuación diferencial ordinaria:*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I_h, \quad u(t_0) = u_0$$

con  $I_h = [t_0 - h, t_0 + h] \subseteq [a, b]$ , onde  $h$  é un número positivo e  $(t, u(t)) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ , para todo  $t \in I_h$ .

O primeiro paso será estudar a existencia e a unicidade de solución do problema, para o cal se presenta a seguinte proposición.

**Proposición 2.2.** *Para calquera  $\lambda \in [0, +\infty)$ , o problema de valor inicial (PVI) ten unha solución única que está definida en todo  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Para  $\lambda = 0$  a proba é inmediata pois basta integrar a ecuación (PVI) directamente. Por tanto, sen perda de xeralidade podemos considerar  $t_0 = 0$  pois a ecuación é autónoma e  $\lambda > 0$ .

Pola Proposición 2.1 mencionada anteriormente, pódese deducir a existencia de solución local nun intervalo pequeno centrado no cero. O obxectivo seguinte é comprobar que esta solución é única para o cal se examirán catro posibilidades diferentes en función do valor de  $a$  e  $b$ .

Antes de nada, cabe citar que calquera solución de (PVI) satisfai

$$\frac{|u'(t)|^p}{p^*} + \lambda \frac{|u(t)|^q}{q} = \frac{|b|^p}{p^*} + \lambda \frac{|a|^q}{q}, \quad (2.2)$$

no seu dominio de definición.

Para comprobar o anterior chega con multiplicar a ecuación (2.1) por  $u'(t)$  e integrar, é dicir

$$(\phi_p(u'))' u' + \lambda \phi_q(u) u' = 0 \implies \int_0^t (\phi_p(u'(s)))' u'(s) ds + \lambda \int_0^t \phi_q(u(s)) u'(s) ds = 0.$$

Traballaremos coas dúas integrais anteriores por separado. Así, denotamos:

$$(A) \equiv \int_0^t (\phi_p(u'(s)))' u'(s) ds \quad (B) \equiv \int_0^t \phi_q(u(s)) u'(s) ds.$$

Para resolver a integral (A) aplicamos o seguinte cambio de variable

$$r = \phi_p(u'(s)) \implies dr = (\phi_p(u'(s)))' ds \quad \text{co cal} \quad u'(s) = \phi_p^{-1}(r) = \phi_{p^*}(r),$$

chegando a que

$$\begin{aligned} (A) &= \int_{\phi_p(u'(0))}^{\phi_p(u'(t))} \phi_{p^*}(r) dr = \Phi_{p^*}(\phi_p(u'(t))) - \Phi_{p^*}(\phi_p(u'(0))) \\ &= \frac{|\phi_p(u'(t))|^{p^*}}{p^*} - \frac{|\phi_p(u'(0))|^{p^*}}{p^*} = \frac{|u'(t)|^{(p-1)p^*}}{p^*} - \frac{|b|^{(p-1)p^*}}{p^*}. \end{aligned}$$

Como se verifica que  $(p-1)p^* = (p-1)\frac{p}{p-1} = p$ , temos finalmente que

$$(A) = \frac{|u'(t)|^p}{p^*} - \frac{|b|^p}{p^*}.$$

Por outro lado, para resolver a integral (B) aplicamos o cambio de variable  $r = u(s)$  tendo

$$(B) = \int_{u(0)}^{u(t)} \phi_q(r) dr = \Phi_q(u(t)) - \Phi_q(u(0)) = \frac{|u(t)|^q}{q} - \frac{|a|^q}{q}.$$

Xuntando o anterior chegamos a que

$$\frac{|u'(t)|^p}{p^*} + \lambda \frac{|u(t)|^q}{q} = \frac{|b|^p}{p^*} + \lambda \frac{|a|^q}{q}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Vexamos que ocorre nos distintos casos:

1.  $a = 0, b = 0$

Substituíndo na ecuación (2.2) con  $a = 0$  e  $b = 0$  vese trivialmente que a solución é única e igual a cero.

2.  $a = 0, b \neq 0$

Supoñamos que  $u$  e  $v$  son dúas solucións locais de (PVI) verificando que  $a = 0$  e  $b \neq 0$ . Entón, integrando no problema (PVI) e restando as dúas posibles solucións tense:

$$\begin{aligned} \phi_p(u'(t)) - \phi_p(v'(t)) &= \lambda \int_0^t [\phi_q(v(\tau)) - \phi_q(u(\tau))] d\tau \\ &= \lambda \int_0^t \tau^{q-1} \left[ \phi_q\left(\frac{v(\tau)}{\tau}\right) - \phi_q\left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right) \right] d\tau, \end{aligned}$$

onde se aplicou a definición de  $\phi_q$  e se consideran valores de  $t > 0$ .

Temos que  $\frac{u(\tau)}{\tau} = \frac{u(\tau)-u(0)}{\tau} \rightarrow b$  e  $\frac{v(\tau)}{\tau} = \frac{v(\tau)-v(0)}{\tau} \rightarrow b$  cando  $\tau \rightarrow 0$ . Do anterior podemos deducir, sabendo que  $\phi_p$  e  $\phi_q$  son funcións lipschitzianas en todo intervalo limitado  $J$  tal que  $0 \notin \text{Cl}(J)$ , que existen  $K_1 > 0$  e  $K_2 > 0$  de forma que;

$$K_1 |u'(t) - v'(t)| \leq K_2 \lambda \int_0^t \tau^{q-1} \left| \frac{v(\tau)}{\tau} - \frac{u(\tau)}{\tau} \right| d\tau. \quad (2.3)$$

Comprobemos entón que podemos argumentar que  $\phi_p$  e  $\phi_q$  son funcións lipschitzianas.

Por unha parte  $\phi_p$  e  $\phi_q$  son localmente lipschitzianas en  $\mathbb{R}$  se  $p \geq 2, q \geq 2$ , pero non o son se  $1 < p < 2$  ou  $1 < q < 2$ . Isto débese a que  $\phi'_p(s) = \frac{(p-1)|s|^{p-2}}{s^2}$  e cando  $1 < p < 2$  ou  $1 < q < 2$  temos que a súa derivada non está limitada no 0.

O que sucede é que como  $\frac{v(\tau)}{\tau}, \frac{u(\tau)}{\tau} \rightarrow b \neq 0$  entón  $\left| \frac{v(\tau)}{\tau} \right|, \left| \frac{u(\tau)}{\tau} \right| > \left| \frac{b}{2} \right|$ , para todo  $\tau \in (0, t)$  suficientemente pequeno.

Co anterior deducimos que  $\phi_q$  é lipschitziana en  $\left[ \left| \frac{b}{2} \right|, \left| \frac{b}{2} \right| + \delta \right]$ . Por tanto existe  $\bar{K}_2 > 0$  tal que

$$\left| \phi_q\left(\frac{v(\tau)}{\tau}\right) - \phi_q\left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right) \right| \leq \bar{K}_2 \left| \frac{v(\tau)}{\tau} - \frac{u(\tau)}{\tau} \right|.$$

Por outro lado,  $\phi_{p^*} = \phi_p^{-1}$  tamén é lipschitziana en  $[\phi_p(b) - \varepsilon, \phi_p(b) + \varepsilon]$ . Polo tanto existe  $\bar{K}_1 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |u'(t) - v'(t)| &= |\phi_{p^*}(\phi_p(u'(t))) - \phi_{p^*}(\phi_p(v'(t)))| \leq K_1 |\phi_p(u'(t)) - \phi_p(v'(t))| \\ &\leq \lambda \bar{K}_1 \bar{K}_2 \int_0^t \tau^{q-1} \left| \frac{v(\tau)}{\tau} - \frac{u(\tau)}{\tau} \right| d\tau. \end{aligned}$$

Denotando  $K_2 \equiv \bar{K}_1 \bar{K}_2$  e tomando  $K_1 \equiv 1$  temos o resultado.

Seguidamente, definindo  $w = u - v$  e  $\|\cdot\|_\varepsilon$  representando a norma do supremo no intervalo  $[0, \varepsilon]$  chégase a partir da ecuación (2.3) a

$$K_1 \|w'\|_\varepsilon \leq K_2 \lambda \|w\|_\varepsilon \int_0^\varepsilon \tau^{q-2} d\tau = K_2 \lambda \frac{\varepsilon^{q-1}}{q-1} \|w\|_\varepsilon.$$

Posteriormente, empregando a ecuación anterior, xunto a

$$w(t) = \int_0^t w'(\tau) d\tau$$

e  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$  dedúcese, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, que

$$K_1 \|w'\|_\varepsilon \leq K_2 \lambda \frac{\varepsilon^{q-1}}{q-1} \int_0^\varepsilon \|w'\|_\varepsilon dt = K_2 \lambda \frac{\varepsilon^q}{q-1} \|w'\|_\varepsilon \implies (K_1 - K_2 \lambda \frac{\varepsilon^q}{q-1}) \|w'\|_\varepsilon \leq 0,$$

co cal se chega a unha contradición para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, derivada de supoñer que existen dúas solucións distintas.

Para  $t < 0$  o resultado próbbase de forma análoga.

### 3. $a \neq 0$ , $b = 0$

Este caso pode reducirse facilmente ao anterior. Para iso debe reescribirse a ecuación (PVI) como

$$\begin{cases} u' = \phi_{p^*}(v), \\ v' = -\lambda \phi_q(u), \end{cases} \quad (2.4)$$

de onde, a partir da segunda ecuación, se deduce que  $\phi_{q^*}\left(\frac{v'}{\lambda}\right) = -u$  [26]. Combinándoa entón coa primeira ecuación de (2.4), pode obterse que  $v$  satisfai

$$(\phi_{q^*}(v'))' + \lambda^{q^*-1} \phi_{p^*}(v) = 0 \text{ en } (0, T),$$

con condicións iniciais  $v(0) = 0$  e  $v'(0) = -\lambda \phi_q(a) \neq 0$ .

Con isto conséguese reducir o caso (3) ao caso (2).

### 4. $a \neq 0$ , $b \neq 0$ .

De novo trabállase co sistema (2.4). Como nesta ocasión  $u(0) \neq 0$  e  $v(0) \neq 0$ , temos que para  $t$  suficientemente pequeno as partes dereitas das igualdades (2.4) mantéñense nun subintervalo

onde as funcións  $\phi_{p^*}$  e  $\phi_q$  son  $C^1$ . Disto pode deducirse que as solucións son localmente únicas de xeito similar a como se fixo no caso 2.

Así, por un lado vimos que a solución de (PVI) é localmente única para todos os casos posibles. Ademais, observando a ecuación (2.2) pode deducirse que a solución debe estar definida en todo  $\mathbb{R}$  xa que está sobre as curvas de nivel de  $\frac{|b|^p}{p^*} + \lambda \frac{|a|^q}{q}$ . Por tanto, temos probado que existe unha solución global e única para o problema (PVI).

□

O seguinte paso consistirá en buscar a solución de (PVI). Para iso, tratarase de resolver o seguinte problema de valor inicial

$$(PVI)_0 \begin{cases} (\phi_p(u'))' + \lambda \phi_q(u) = 0 \\ u(0) = 0 \quad u'(0) = \alpha, \end{cases}$$

onde se pode considerar, sen perda de xeralidade  $\alpha > 0$ . Para  $\bar{\alpha} = -\alpha < 0$  bastaría tomar como solución  $v'(t) = -u(t)$ .

Sexa entón  $u$  unha solución do problema anterior (PVI)<sub>0</sub> e  $T(\alpha)$  o primeiro punto no que  $u'(t, \alpha) = 0$ . En  $(0, T(\alpha))$   $u$  satisfai que  $u(t, \alpha) > 0$  e  $u'(t, \alpha) > 0$  co cal a partir de (2.2) chégase a

$$\frac{u'(t)^p}{p^*} + \lambda \frac{u(t)^q}{q} = \lambda \frac{R^q}{q} = \frac{\alpha^p}{p^*}, \quad (2.5)$$

onde  $R = u(T(\alpha))$ .

Despexando  $u'(t)$  e integrando dedúcese que

$$u'(t) = \left( \frac{\lambda p^*}{q} \right)^{1/p} (R^q - u(t)^q) \implies t = \left( \frac{q}{\lambda p^*} \right)^{1/p} \int_0^t \frac{u'(s) ds}{(R^q - u(s)^q)^{1/p}}.$$

Seguidamente, facendo o cambio de variable  $x = \frac{u(s)}{R}$ , obtense

$$t = \left( \frac{q}{\lambda p^*} \right)^{1/p} \frac{1}{R^{\frac{q-p}{p}}} \int_0^{\frac{u(t)}{R}} \frac{ds}{(1-s^q)^{1/p}}. \quad (2.6)$$

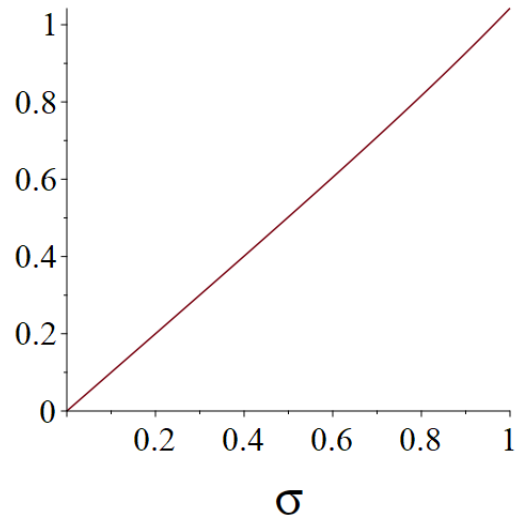
Por tanto, tendo en conta que  $R = u(T(\alpha))$ , o tempo buscado resulta ser

$$T(\alpha) = \left( \frac{q}{\lambda p^*} \right)^{1/p} \frac{1}{R^{\frac{q-p}{p}}} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^q)^{\frac{1}{p}}}. \quad (2.7)$$

Co anterior, para  $\sigma \in [0, \frac{q}{2}]$  vamos a definir a función

$$\arcsen_{pq}(\sigma) := \frac{q}{2} \int_0^{\frac{2\sigma}{q}} \frac{ds}{(1-s^q)^{\frac{1}{p}}}. \quad (2.8)$$

Na Figura 2.2 móstrase unha representación gráfica da función  $\arcsen_{pq}(\sigma)$  tomando  $p = 2$  e  $q = 3$ .

Figura 2.2: arcsen<sub>23</sub>  $\sigma$ 

Nótese que se  $p = q = 2$  a función definida en (2.8) é a función  $\arcsen(\sigma)$ .

Seguidamente presentamos unha animación feita con mathematica, Figura 2.3, na que representamos  $\int_0^{\frac{2\sigma}{q}} \frac{ds}{(1-s^q)^{\frac{1}{p}}}$  para valores de  $\sigma \in [0, \frac{q}{2}]$  con valores de  $p$  e  $q$  variando entre 1 e 10.

Figura 2.3: Animación de  $\int_0^{\frac{2\sigma}{q}} \frac{ds}{(1-s^q)^{\frac{1}{p}}}$ 

A continuación, debe substituírse  $s = z^{\frac{1}{q}}$  en (2.8) obtendo

$$\operatorname{arcsen}_{pq}(\sigma) = \frac{1}{2} \tilde{B} \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p^*}, \left( \frac{2\sigma}{q} \right)^q \right),$$

onde  $\tilde{B} \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p^*}, y \right)$  representa a función beta incompleta [1], isto é:

$$\tilde{B} \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p^*}, y \right) = \int_0^y z^{\frac{1}{q}-1} (1-z)^{\frac{-1}{p^*}} dz.$$

Do anterior xa podería deducirse que a integral é sempre converxente.

Ademais, tamén podemos escribir a ecuación (2.8) en termos da función hiperxeométrica  $F(a, b, c; \sigma)$  [1]

$$\operatorname{arcsen}_{pq}(\sigma) = \frac{1}{2} q \sigma^{\frac{1}{q}} F \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{q}; \sigma \right).$$

Por último, se substituímos con  $\sigma = \frac{q}{2}$  en (2.8) temos

$$\pi_{pq} := 2 \operatorname{arcsen}_{pq} \left( \frac{q}{2} \right) = B \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p^*} \right),$$

onde  $B$  denota a función beta.

De novo, é evidente que  $\pi_{22} = \pi$ .

Tendo en conta que a función  $B \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p^*} \right)$  cumpre que  $B \left( \frac{1}{q}, \frac{1}{p^*} \right) = B \left( \frac{1}{p^*}, \frac{1}{q} \right)$  pódese deducir que

$$\pi_{pq} = \pi_{q^* p^*}.$$

Por outro lado, a función  $\operatorname{arcsen}_{pq} : [0, \frac{q}{2}] \rightarrow [0, \frac{\pi_{pq}}{2}]$  é estritamente crecente. Para iso é suficiente con calcular a súa derivada aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral

$$\frac{d}{d\sigma} \operatorname{arcsen}_{pq}(\sigma) = \frac{1}{\left( 1 - \left( \frac{2\sigma}{q} \right)^q \right)^{\frac{1}{p}}}$$

comprobando de inmediato que é positiva no intervalo  $[0, \frac{q}{2}]$ .

Seguidamente, definimos a inversa da función como  $\operatorname{sen}_{pq}$ . A función estará definida en  $[0, \frac{\pi_{pq}}{2}] \rightarrow [0, \frac{q}{2}]$  e será estritamente crecente.

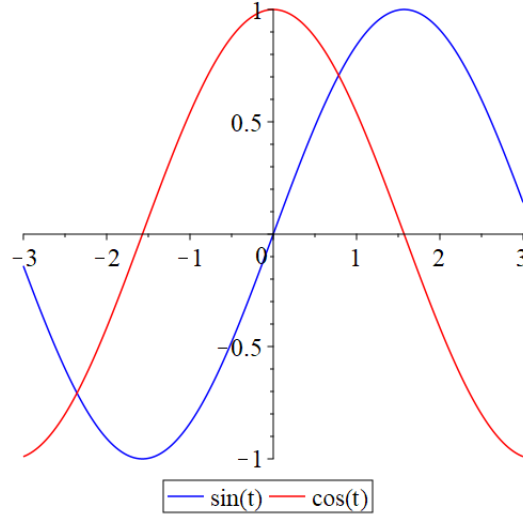
Porén, é posible estender a función anterior  $\operatorname{sen}_{pq}$  a todo  $\mathbb{R}$  da seguinte maneira:

- Para  $t \in [\frac{\pi_{pq}}{2}, \pi_{pq}]$  impoñemos  $\operatorname{sen}_{pq}(t) = \operatorname{sen}_{pq}(\pi_{pq} - t)$ .
- Para  $t \in [-\pi_{pq}, 0]$  definimos  $\operatorname{sen}_{pq}(t) = -\operatorname{sen}_{pq}(-t)$ .
- Finalmente, estendemos a función  $\operatorname{sen}_{pq}$  a todo  $\mathbb{R}$  como unha función  $2\pi_{pq}$  periódica.

Tamén pode resultar útil definir a derivada da función  $\operatorname{sen}_{pq}(t)$  da seguinte maneira

$$\operatorname{cos}_{pq}(t) := \frac{d}{dt} \operatorname{sen}_{pq}(t).$$

Na Figura 2.4 pode verse unha representación gráfica de  $\operatorname{sen}_{22}(t)$  e  $\operatorname{cos}_{22}(t)$  que coincide con  $\operatorname{sen}(t)$  e  $\operatorname{cos}(t)$ .

Figura 2.4: Gráfica de  $\text{sen}_{22}(t)$  e  $\text{cos}_{22}(t)$ 

Unha vez explicado o anterior, resulta relativamente sinxelo obter unha solución para o problema (PVI). Para iso, das ecuacións (2.6) e (2.8) deducimos

$$t = \frac{2}{(\lambda p^*)^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p^*}}} R^{\frac{p-q}{p}} \text{arcsen}_{pq} \left( \frac{q u(t)}{2R} \right)$$

e, polo tanto

$$u(t) = \frac{2R}{q} \text{sen}_{pq} \left( \frac{(\lambda p^*)^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p^*}}}{2} R^{\frac{q-p}{p}} t \right) \quad (2.9)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Seguidamente, pode ser útil obter o valor de  $R$  en función de  $\alpha$ , para o cal empregamos a ecuación (2.5). Así

$$\lambda \frac{R^q}{q} = \frac{\alpha^p}{p^*} \implies R = \left( \frac{q}{\lambda p^*} \right)^{\frac{1}{q}} \alpha^{\frac{p}{q}}$$

e, consecuentemente

$$R^{\frac{q-p}{p}} = \left( \frac{q}{\lambda p^*} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \alpha^{\frac{q-p}{q}}.$$

Tendo en conta esta expresión, empregando a ecuación (2.9) e definindo

$$A_{pq}(\alpha, \lambda) = \frac{(\lambda p^*)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q^*}}}{2} \alpha^{\frac{q-p}{q}} \quad (2.10)$$

chegamos a que podemos escribir a solución de  $(PVI)_0$  como

$$u(t) = \frac{\alpha}{A_{pq}(|\alpha|, \lambda)} \text{sen}_{pq}(A_{pq}(|\alpha|, \lambda)t) \quad (2.11)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Ademais, fixando  $\lambda$  pode verse que a solución é  $\tau(\alpha)$ -periódica con

$$\tau(\alpha) = \frac{2\pi_{pq}}{A_{pq}(|\alpha|, \lambda)}.$$

Unha vez obtida unha solución para o problema  $(PVI)_0$  é fácil obter unha solución xenérica para  $(PVI)$ . Para iso, debe terse en conta que a ecuación diferencial coa que se traballa é autónoma e que, por tanto, se pode modificar a ecuación (2.11) como

$$u(t) = \frac{\alpha}{A_{pq}(|\alpha|, \lambda)} \text{sen}_{pq}(A_{pq}(|\alpha|, \lambda)(t - t_0) + \delta), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

e segue a ser unha solución de  $(PVI)$ .

Agora, para satisfacer as condicións iniciais de  $(PVI)$  abonda con resolver as seguintes ecuacións para  $\alpha$  e  $\lambda$  en función das condicións iniciais  $a$  e  $b$

$$u(t_0) = a = \frac{\alpha}{A_{pq}(|\alpha|, \lambda)} \text{sen}_{pq}(\delta), \quad (2.13)$$

e

$$u'(t_0) = b = \alpha \text{cos}_{pq}(\delta). \quad (2.14)$$

Para obter unha expresión explícita para  $\alpha$  e  $\delta$  comezamos intentando relacionar o valor das funcións  $\text{sen}_{pq}(t)$  e  $\text{cos}_{pq}(t)$ . Para iso e, por simplicidade, buscamos unhas condicións iniciais tales que a solución sexa simplemente  $u(t) = \text{sen}_{pq}(t)$ . Partindo da ecuación (2.11) vemos que isto se cumpre para  $\alpha = 1$  e  $\lambda = \frac{2^q}{p^*q^{q-1}}$  con condicións iniciais  $u(0) = 0$  e  $u'(0) = 1$ . Por tanto,  $u(t) = \text{sen}_{pq}(t)$  é solución do problema

$$(\phi_p(u'(t)))' + \frac{2^q}{p^*q^{q-1}} \phi_q(u(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R} \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (2.15)$$

Seguidamente, empregando a expresión (2.2) chegamos a

$$|\text{cos}_{pq}(t)|^p + \left(\frac{2}{q}\right)^q |\text{sen}_{pq}(t)|^q = 1 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

A continuación, despéxase  $\text{cos}_{pq}(t)$  da ecuación anterior:

$$|\text{cos}_{pq}(t)|^p = 1 - \left(\frac{2}{q}\right)^q |\text{sen}_{pq}(t)|^q$$

e substitúese o seu valor na ecuación (2.14).

Despois disto, despéxase  $\text{sen}_{pq}(t)$  e iguálase ao valor da ecuación (2.13).

Facendo todo o anterior chegamos a que

$$\left(\frac{2}{q}\right)^q \left(\frac{|a|A_{pq}(|\alpha|, \lambda)}{|\alpha|}\right)^q + \left(\frac{|b|}{|\alpha|}\right)^p = 1, \quad (2.17)$$

e, polo tanto, empregando o valor de  $A_{pq}$  definido en (2.10) obtense finalmente

$$|\alpha|^p = \frac{|a|^q \lambda p^*}{q} + |b|^p. \quad (2.18)$$

Coas dúas ecuacións anteriores, (2.17) e (2.18), pode resolverse o problema (*PVI*) de maneira única para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\delta \in [0, \pi_{pq})$ . Por tanto, a ecuación (2.12) representa a única solución do problema (*PVI*) co valor de  $\alpha$  e  $\delta$  indicado anteriormente.

*Nota 2.3.* Nótese que se  $p = q = 2$ , a identidade (2.16) redúcese á clásica igualdade  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ .

## 2.2. Estudo do problema de autovalores

O obxectivo deste apartado da memoria é analizar os autovalores e as autofuncións para a ecuación (2.1) considerando condicións Dirichlet ou Neumann.

En primeiro lugar, trataremos as condicións Dirichlet. Para iso traballamos co problema

$$(E_d) \begin{cases} (\phi_p(u'(t)))' + \lambda \phi_q(u(t)) = 0, & t \in (0, T). \\ u(0) = 0, & u(T) = 0. \end{cases}$$

A continuación, presentamos un Teorema que permite deducir a forma dos autovalores e autofuncións para o problema mostrado anteriormente.

**Teorema 2.4.** *Para calquera  $\alpha \neq 0$  o conxunto de autovalores do problema ( $E_d$ ) vén dado por*

$$\lambda_n(\alpha) = \left( \frac{2n\pi_{pq}}{T} \right)^q \frac{|\alpha|^{p-q}}{p^* q^{q-1}} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$$

sendo as autofuncións correspondentes

$$u_{n,\alpha}(t) = \frac{\alpha T}{n\pi_{pq}} \operatorname{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} t \right). \quad (2.20)$$

*Demostración.* Queremos que para  $\alpha \in \mathbb{R}$  dado se verifiquen as condicións de Dirichlet para  $u$  cumprindo a ecuación (2.11). Isto implica, necesariamente, que

$$\operatorname{sen}_{pq}(A_{pq}(|\alpha|, \lambda)T) = 0.$$

Tendo en conta o anterior, é obvio deducir que as condicións se cumpren e  $\lambda$  é un autovalor se e só se verifica a ecuación

$$\frac{1}{2} p^{*\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q^*}} \lambda^{\frac{1}{q}} |\alpha|^{\frac{q-p}{q}} T = n\pi_{pq}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Despexando  $\lambda$  recuperamos a ecuación (2.19).

Co anterior e empregando de novo (2.11) chegamos a

$$u_{n,\alpha}(t) = \frac{\alpha T}{n\pi_{pq}} \operatorname{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} t \right),$$

xusto o que queríamos comprobar. □

A continuación consideraremos o espectro de  $(E_d)$  que se denotará por  $S(E_d)$  e que estará formado polo conxunto de pares  $(\alpha, \lambda)$  para os cales o problema  $(E_d)$  ten unha solución non trivial.

Se para cada valor de  $n \in \mathbb{N}$  denotamos  $S_n = \{(\alpha, \lambda_n(\alpha)) | (\alpha, \lambda_n(\alpha)) \text{ satisfán (2.19)}\}$  entón

$$S(E_d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Referirémonos a  $S_n$  como a curva xeralizada de autovalores para o problema  $(E_d)$  e asociaremos a cada valor de  $S_n$  a función  $t \rightarrow \frac{T}{n\pi pq} \operatorname{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi pq}{T} t \right)$ .

Con isto, será posible distinguir as propiedades cualitativas das curvas entre tres casos:  $q > p$ ,  $q < p$  e  $q = p$ . Así, dados  $n_0 \in \mathbb{N}$  e  $\alpha_0 \neq 0$  fixos, entón

- Caso  $q > p$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \lambda_{n_0}(\alpha) = 0, \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} \lambda_{n_0}(\alpha) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha_0) = \infty.$$

A interpretación xeométrica ten a forma da Figura 2.5.

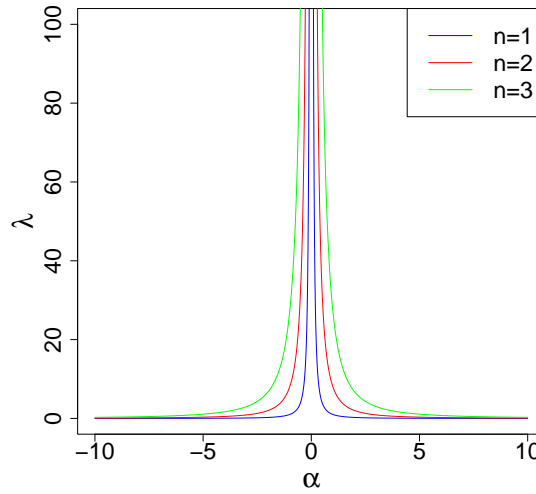


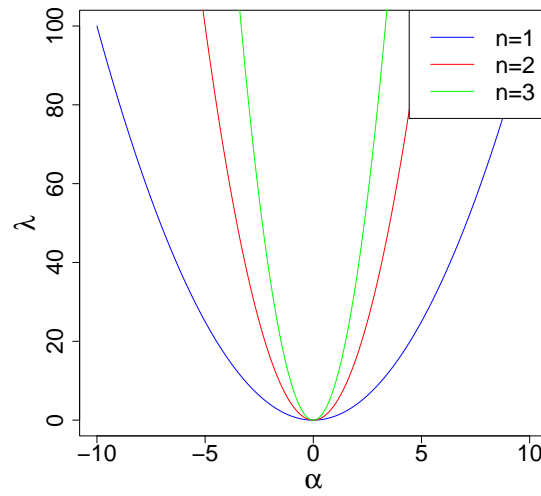
Figura 2.5:  $\lambda_n = n^3 |\alpha|^{-2}$

- Caso  $q < p$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \lambda_{n_0}(\alpha) = \infty, \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} \lambda_{n_0}(\alpha) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha_0) = \infty.$$

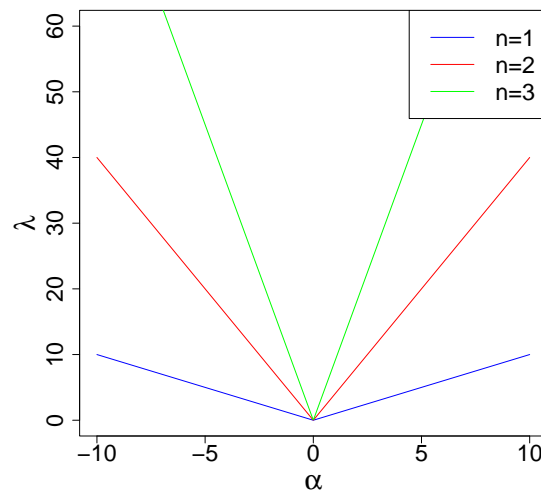
Nesta ocasión pódense distinguir tres comportamentos diferentes (figuras 2.6, 2.7 e 2.8):

- $q < p - 1$

Figura 2.6:  $\lambda_n = n^2|\alpha|^2$ 

Nesta ocasión  $\frac{d}{d\alpha}\lambda_{n_0}|_{\alpha=0} = 0$ .

- $q = p - 1$

Figura 2.7:  $\lambda_n = n^2|\alpha|$ 

Cúmprese que  $\frac{d}{d\alpha}\lambda_{n_0}|_{\alpha=0} = \left(\frac{2n_0\pi pq}{T}\right)^q \frac{1}{p^*q^{q-1}}$ .

- $p - 1 < q < p$

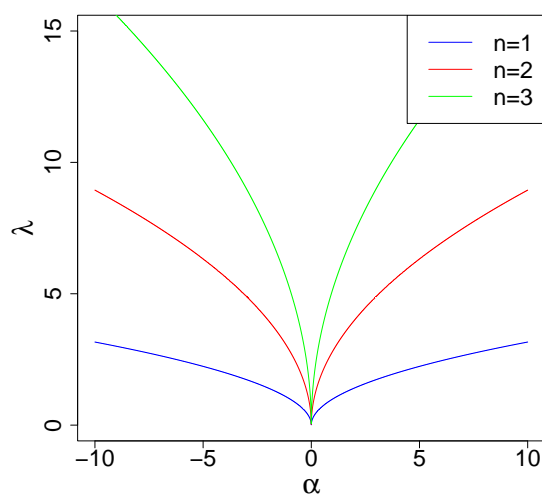


Figura 2.8:  $\lambda_n = n^{1,5}|\alpha|^{0,5}$

Aquí temos que  $\frac{d}{d\alpha} \lambda_{n_0} \Big|_{\alpha=0^\pm} = \pm\infty$ .

- $q = p$

$$\lambda_{n_0}(\alpha) = \lambda_{n_0}, \text{ para todo } \alpha \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \text{ (non depende de } \alpha).$$

Neste caso tense a Figura 2.9.

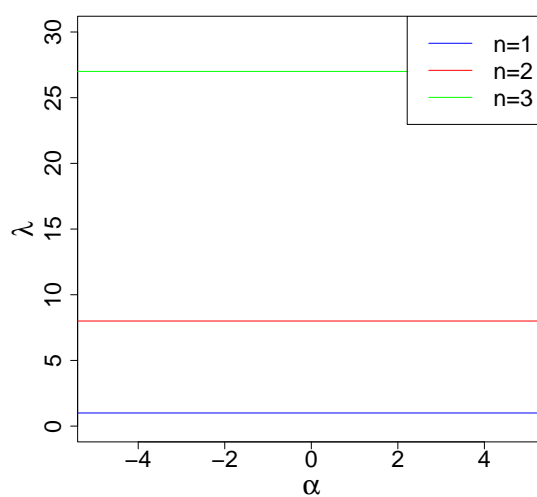


Figura 2.9:  $\lambda_n = n^3$

Se nos fixamos na forma que toman os autovalores  $\lambda_n$  podemos comprobar que para  $\alpha \neq 0$  e calquera  $n \in \mathbb{N}$  temos  $\frac{\lambda_n(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} = n^q$ . Ademais, os valores  $t$  para os que se anula a autofunción  $u_{n,\alpha}$  non dependen de  $\alpha$  e forman unha sucesión equidistante de puntos en  $(0, T)$ .

*Nota 2.5.* Consideremos agora o problema dual de  $(E_d)$  e denotemos por  $\mu_n = \mu_n(\beta)$  os autovalores correspondentes. Así

$$(E_d)^* = \begin{cases} (\phi_{q^*}(u'))' + \mu \phi_{p^*}(u) = 0 & \text{en } (0, T) \\ u(0) = 0, \quad u(T) = 0. \end{cases}$$

Sen máis que empregar a ecuación (2.19) podemos comprobar que os autovalores deste novo problema  $(E_d)^*$  teñen a forma

$$\mu_n(\beta) = \left( \frac{2n\pi_{q^*p^*}}{T} \right)^{p^*} \frac{|\beta|^{q^*-p^*}}{qp^{*p^*-1}}.$$

Tendo en conta que  $\pi_{pq} = \pi_{q^*p^*}$ , vexamos que se cumpre a seguinte igualdade

$$\lambda_n^{\frac{1}{q}} \left( (p^*)^{\frac{1}{p}} \right) = \mu_n^{\frac{1}{q^*}} \left( (q)^{\frac{1}{q^*}} \right). \quad (2.21)$$

A igualdade (2.21) é equivalente á seguinte:

$$\frac{(p^*)^{\frac{p-q}{pq}}}{(p^*)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{q^{\frac{q^*-p^*}{q^*p^*}}}{q^{\frac{1}{p^*}} (p^*)^{\frac{p^*-1}{p^*}}}.$$

Agora ben, dado que

$$\frac{p-q}{pq} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{p} = \frac{1-p^*}{p^*} \quad \text{e} \quad \frac{q^*-p^*}{p^*q^*} - \frac{1}{p^*} = \frac{p-q}{pq} - \frac{1}{p^*} = \frac{1-q}{q}$$

deducimos de inmediato (2.21).

Concretamente, cando  $p = q$ , da ecuación (2.21) dedúcese que

$$\lambda_n^{\frac{1}{p}} = \mu_n^{\frac{1}{p^*}}.$$

Obviamente, se  $p = q = 2$  temos que  $\lambda_n = \mu_n$ .

Seguidamente, consideramos as funcións da forma  $\omega_n(t) = \frac{1}{n} \text{sen}_{pq}(nt)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Tendo en conta as expresións (2.19) e (2.20) vemos que son solución do problema

$$(E_d^n) = \begin{cases} (\phi_p(\omega_n'))' + \frac{(2n)^q}{p^*q^{q-1}} \phi_q(\omega_n) = 0 & \text{en } (0, \pi_{pq}), \\ \omega_n(0) = 0, \quad \omega_n(\pi_{pq}) = 0. \end{cases}$$

Pola construción realizada anteriormente, temos que  $\omega_n'(0) = 1$ .

A continuación vamos a calcular as normas  $\|\omega_n\|_{L^q}$  e  $\|\omega_n'\|_{L^p}$ .

Sen máis que multiplicar por  $\omega_n$  a ecuación  $(E_d^n)$  e integrar en  $[0, \pi_{pq}]$  temos

$$\int_0^{\pi_{pq}} |\omega_n'(t)|^p dt = \frac{(2n)^q}{p^*q^{q-1}} \int_0^{\pi_{pq}} |\omega_n(t)|^q dt. \quad (2.22)$$

Por outro lado,  $\omega_n$  tamén satisfai

$$\frac{|\omega'_n(t)|^p}{p^*} + \frac{(2n)^q}{p^* q^{q-1}} \frac{|\omega_n(t)|^q}{q} = \frac{1}{p^*} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Integrando esta expresión en  $[0, \pi_{pq}]$  obtemos

$$\frac{1}{p^*} \int_0^{\pi_{pq}} |\omega'_n(t)|^p dt + \frac{(2n)^q}{p^* q^q} \int_0^{\pi_{pq}} |\omega_n(t)|^q dt = \frac{\pi_{pq}}{p^*}. \quad (2.23)$$

Resolvendo o sistema de ecuacións (2.22) e (2.23) temos que

$$\int_0^{\pi_{pq}} |\omega_n(t)|^q dt = \frac{\pi_{pq} p^* q^q}{(2n)^q (p^* + q)},$$

e

$$\int_0^{\pi_{pq}} |\omega'_n(t)|^p dt = \frac{\pi_{pq} q}{(p^* + q)}.$$

Do anterior pódese deducir

$$\int_0^T \left| \text{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq} t}{T} \right) \right|^q dt = \frac{T p^* q^q}{2^q (p^* + q)},$$

e

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} \text{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq} t}{T} \right) \right|^p dt = \frac{n^p \pi_{pq}^p q}{T^{p-1} (p^* + q)}.$$

Con todo o anterior xa estamos en disposición de estudar o problema de Neumann

$$(E_n) = \begin{cases} (\phi_p(v'(t)))' + \nu \phi_q(v(t)) = 0, & t \in (0, T), \\ v'(0) = 0, & v'(T) = 0. \end{cases}$$

É trivial ver que  $v_0 = 1$  é unha autofunción normalizada para o problema correspondente con autovalor  $\nu_0 = 0$ .

Por outro lado, calquera autofunción que non sexa constante de  $(E_n)$  debe cambiar o signo. Podemos comprobalo. Suporemos que  $\nu > 0$  (o caso  $\nu < 0$  resultaría análogo). Baixo estas hipóteses teríamos dúas posibilidades:

- Consideramos  $v(t) > 0$ . Teríamos que

$$(\phi_p(v'(t)))' = -\nu \phi_q(v(t)) < 0 \implies (\phi_p(v'(t)))' < 0 \implies v'(t) \text{ é unha función decrecente.}$$

Por tanto, se  $v(t)$  non é unha función constante, non é posible que  $v'(0) = v'(T) = 0$ .

- Consideramos  $v(t) < 0$ . Nesta ocasión temos que

$$(\phi_p(v'(t)))' = -\nu \phi_q(v(t)) > 0 \implies (\phi_p(v'(t)))' > 0 \implies v'(t) \text{ é unha función crecente.}$$

De novo, se  $v(t)$  non é unha función constante, é imposible que  $v'(0) = v'(T) = 0$ .

Dado que a ecuación anterior ( $E_n$ ) é unha ecuación autónoma, a Proposición 2.2 implica que os autovalores positivos de ( $E_n$ ) son os mesmos que para o caso do problema de Dirichlet. Por outro lado, as autofuncións serán traslacións das dadas pola ecuación (2.20). Con isto, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 2.6.** *Para calquera  $\alpha \neq 0$  o conxunto de autovalores do problema ( $E_n$ ) está formado por  $\nu_0 = 0$  e  $\nu_n(\alpha) = \lambda_n(\alpha)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dados pola ecuación (2.19). As autofuncións correspondentes serán  $v_0(t) = c$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e*

$$v_{n,\alpha}(t) = \frac{\alpha T}{n\pi_{pq}} \operatorname{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} \left( t - \frac{T}{2n} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.24)$$

*Demostración.* Vexamos que, efectivamente, as autofuncións non constantes terán a forma indicada na ecuación (2.24). Sabemos que son traslacións da ecuación (2.20)

$$v_{n,\alpha} = \frac{\alpha T}{n\pi_{pq}} \operatorname{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} (t - t_0) + \delta \right).$$

Por outro lado, deben verificarse as condicións de Neumann  $v'(0) = 0$  e  $v'(T) = 0$ . Dado que

$$v'_{n,\alpha}(t) = \alpha \operatorname{cos}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} (t - t_0) + \delta \right)$$

necesariamente,

$$\operatorname{cos}_{pq} \left( \frac{t_0 n\pi_{pq}}{T} + \delta \right) = 0 \text{ e } \operatorname{cos}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} (T - t_0) + \delta \right) = 0.$$

Tendo en conta que  $\operatorname{cos}_{pq}(t)$  se anula cando  $t = \frac{2n-1}{2}\pi_{pq}$  é fácil comprobar que  $t_0 = \frac{T}{2n}$ ,  $\delta = 0$  e as autofuncións teñen a forma da ecuación (2.24).  $\square$

*Nota 2.7.*  $\operatorname{sen}_{pq} \left( \frac{n\pi_{pq}}{T} \left( t - \frac{T}{2n} \right) \right)$  corresponde co  $\operatorname{cos}_{pq}(t)$  no caso usual.

*Nota 2.8.* Todos os resultados presentados neste capítulo xeneralizan o caso  $p = q = 2$  e engloban toda a teoría de oscilación da ecuación  $u'' + \lambda u = 0$  que se denomina Sturm-Liouville [4, 16].



## Capítulo 3

# O problema de Neumann con sub e sobre solucións ben ordenadas

Neste capítulo tratarase de probar a existencia de solucións para o problema

$$(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) \text{ para case todo } t \in I = [a, b] \quad (3.1)$$

con condicións de Neumann sabendo que existen sub e sobre solucións ben ordenadas. Para iso seguiranse os traballos [12, 25]. Así mesmo, serán de utilidade as referencias [2, 8, 9, 10, 17, 19, 21, 22, 26] tal e como se amosará ao longo do capítulo.

Ao final deste capítulo presentaranse dous exemplos que permiten ilustrar a importancia dos resultados probados.

**Definición 3.1.** Considérase que  $f : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función de Carathéodory se cumpre as tres condicións seguintes:

1. para case todo  $t \in I$ , a función  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(t, u, v) \in \mathbb{R}$  é continua.
2. para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , a función  $t \in I \rightarrow f(t, u, v)$  é Lebesgue medible.
3. para todo  $M > 0$  existe unha función de valor real  $\psi \equiv \psi_M \in L^1(I)$  tal que

$$|f(t, u, v)| \leq \psi(t)$$

para case todo  $t \in I$  e para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  con  $|u| \leq M$  e  $|v| \leq M$ .

Ademais, para o estudo do problema, asumiranse as seguintes hipóteses:

(H<sub>1</sub>)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é continua, estrictamente crecente e tal que  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

(H<sub>2</sub>)  $f$  é unha función de Carathéodory.

Traballarase cun intervalo compacto non baleiro  $[a, b]$ . Denótase como  $W^{1,1}(J)$  o espazo de Bannach das funcións absolutamente continuas en  $J$ .

Nótese que o operador  $p$ -Laplaciano  $\phi_p(x) = x|x|^{p-2}$  verifica as condicións da aplicación  $\phi$  impostas na hipótese  $(H_1)$  para todo  $p > 1$ . Por conseguinte, os resultados de existencia de solución que se proban neste capítulo serán de aplicación ás ecuacións  $p$ -Laplacianas.

**Definición 3.2.** Dado  $I$  un intervalo da recta real non baleiro. Unha función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é absolutamente continua sobre  $I$  se para todo número positivo  $\varepsilon$ , existe outro número positivo  $\delta_\varepsilon$  tal que calquera unión finita de subintervalos disxuntos dous a dous  $(x_k, y_k)$  de  $I$  con  $x_k, y_k \in I$ ,  $k = 1, \dots, n$ , verificando

$$\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \delta_\varepsilon$$

se satisfai

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

En [22] próbase que unha condición equivalente para que  $f$  sexa absolutamente continua en  $I$  é que  $f$  teña derivada  $f'$  en case todas partes, a derivada sexa integrable no sentido de Lebesgue e que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

para todo  $x \in [a, b]$ .

Dadas dúas funcións  $u, v \in C^1(I)$  con  $u(t) \leq v(t)$  para todo  $t \in I$  denótase

$$[u, v] \equiv \{z \in C^1(I) : u(t) \leq z(t) \leq v(t) \text{ para todo } t \in I\}.$$

**Definición 3.3.** Dise que unha función  $\alpha \in C^1(I)$  é unha subsolución para (3.1) se  $\phi(\alpha') \in W^{1,1}(I)$  e

$$(\phi(\alpha'(t)))' \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \text{ para casi todo } t \in I.$$

Unha función  $\beta \in C^1(I)$  é unha sobresolución para (3.1) se  $\phi(\beta') \in W^{1,1}(I)$  e

$$(\phi(\beta'(t)))' \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)) \text{ para casi todo } t \in I.$$

Dirase que  $u \in C^1(I)$  é solución de (3.1) se é unha subsolución e unha sobresolución.

**Definición 3.4.** Dirase que a función  $f$  satisfai unha condición de Nagumo respecto a dúas funcións continuas  $\alpha$  e  $\beta$ , con  $\alpha \leq \beta$  en  $I$ , se existen  $k \in L^p(I)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , e  $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  unha función continua, tales que

$$|f(t, u, v)| \leq k(t)\theta(|v|) \text{ en } \Omega,$$

onde  $\Omega = \{(t, u, v) \in \mathbb{R}^3 : t \in I, \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), v \in \mathbb{R}\}$ .

Ademais

$$\int_{-\infty}^{\phi(-\nu)} \frac{|\phi^{-1}(u)|^{\frac{p-1}{p}}}{\theta(|\phi^{-1}(u)|)} du > \mu^{\frac{p-1}{p}} \|k\|_p$$

e

$$\int_{\phi(\nu)}^{\infty} \frac{|\phi^{-1}(u)|^{\frac{p-1}{p}}}{\theta(|\phi^{-1}(u)|)} du > \mu^{\frac{p-1}{p}} \|k\|_p,$$

onde

$$\mu = \max_{t \in I} \beta(t) - \min_{t \in I} \alpha(t),$$

$$\nu = \frac{\max\{|\alpha(a) - \beta(b)|, |\alpha(b) - \beta(a)|\}}{b - a}$$

e

$$\|k\|_p = \begin{cases} \sup_{i \in I} |k(t)| & \text{se } p = \infty, \\ \left[ \int_a^b |k(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} & \text{se } p \in [1, \infty). \end{cases}$$

No caso de  $p = \infty$  denótase  $\frac{p-1}{p} = 1$ .

Ademais das hipóteses mencionadas anteriormente, para os resultados que se presentan a continuación é necesario engadir a seguinte:

( $H_3$ ) Existe unha subsolución  $\alpha$  e unha sobresolución  $\beta$ , con  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  para  $t \in I$  e a función  $f$  satisfai unha condición de Nagumo relativa a  $\alpha$  e  $\beta$  no conxunto  $\Omega$ .

Seguidamente defínese o problema con condicións de contorno que se pretende resolver. Dadas  $A, B \in \mathbb{R}$ , plantéxase o problema de Neumann.

$$(N_{A,B}) \begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) & \text{para case todo } t \in I, \\ u'(a) = A, \quad u'(b) = B. \end{cases}$$

Comezaremos analizando a existencia de solución para o problema mixto e o de Dirichlet. Para iso, preséntanse os seguintes teoremas.

As demostracións dos dous resultados seguintes poden atoparse en [17] e nelas empregárase a condición de Nagumo.

**Teorema 3.5.** *Supoñamos que se verifican as hipóteses ( $H_1$ )–( $H_2$ ) e asúmese que  $\alpha'(a) = \beta'(a) = A$ . Entón, para calquera  $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ , o problema:*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) & \text{para case todo } t \in I, \\ u'(a) = A, \quad u(b) = B, \end{cases}$$

ten, polo menos, unha solución  $u \in C^1(I)$ ,  $\phi(u') \in W^{1,1}(I)$ , tal que

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \text{ e } |u'(t)| \leq M \text{ para todo } t \in I,$$

onde a constante  $M$  depende só de  $\alpha, \beta, \phi, k$  e  $\theta$ .

**Teorema 3.6.** *Se se cumpren as hipóteses  $(H_1) - (H_3)$ , entón, para calquera  $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$  e para calquera  $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$  o problema*

$$\begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) & \text{para case todo } t \in I, \\ u(a) = A, \quad u(b) = B, \end{cases}$$

*ten, polo menos, unha solución  $u \in C^1(I)$ ,  $\phi(u') \in W^{1,1}(I)$ , satisfacendo*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \text{ e } |u'(t)| \leq M \text{ para todo } t \in I,$$

*onde  $M$  depende soamente de  $\alpha, \beta, \phi, k$  e  $\theta$ .*

Seguidamente vamos a probar a existencia de solucións do problema de Neumann. Tratará de verse que algunhas das solucións de certos problemas mixtos son tamén solucións do problema de Neumann.

Para iso será necesario citar unha serie de resultados previos.

**Definición 3.7.** Un subconxunto  $A$  dun espazo topolóxico  $X$  é relativamente compacto en  $X$  se a súa clausura  $\bar{A}$  en  $X$  é compacta.

Os conxuntos relativamente compactos en  $\mathbb{R}^n$  son precisamente os conxuntos limitados.

**Definición 3.8.** Sexa  $(X, d_X)$  un espazo métrico compacto e  $(Y, d_Y)$  un espazo métrico. Un subconxunto  $H$  de  $C(X, Y)$  é equicontínuo no punto  $z_0 \in K$  se, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para toda  $f \in H$ ,

$$d_Y(f(z), f(z_0)) < \epsilon \text{ se } d_X(z, z_0) < \delta.$$

Dirase que  $H$  é equicontínuo se o é en todo punto de  $K$ .

As dúas definicións anteriores poden atoparse en [19].

**Teorema 3.9.** *Teorema de Ascoli-Arzelà*

*Sexa  $X$  un espazo topolóxico compacto e  $Y$  un espazo métrico completo. Un conxunto  $H \subset C(X, Y)$  será relativamente compacto na topoloxía da métrica infinito se e só se:*

1.  *$H$  é equicontínuo.*
2. *Para todo  $x \in X$  o conxunto  $H_x = \{f(x) : f \in H\}$  é relativamente compacto en  $Y$ .*

*No caso no que  $Y = \mathbb{R}$ , a Condición 2 é equivalente a pedir que para cada  $x \in X$ , o conxunto  $H_x$  sexa limitado. Se, ademais,  $X$  é un espazo topolóxico conexo, chega con verificar que existe un  $x$  tal que a Condición 2 se cumpre.*

O resultado anterior pode atoparse en [21].

**Teorema 3.10.** *Teorema da Función Inversa para funcións continuas.*

*Sexa  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo e  $f : I \rightarrow f(I)$  unha función estritamente crecente e continua. Entón,  $f$  é un homeomorfismo.*

Dito Teorema pode verse en [8].

**Teorema 3.11.** *Teorema da converxencia dominada de Lebegue.*

Sexa  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións medibles converxentes case por doquier a unha función medible  $f$  ( $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $X$  conxunto Lebesgue medible). Entón, se existe unha función integrable  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  case por doquier, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tense que  $f$  é integrable e, ademais:

$$\int_X f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dz.$$

O Teorema anterior pode atoparse en [9].

Móstrase, a continuación, o resultado principal deste apartado.

**Teorema 3.12.** *Asumindo que se verifican as hipóteses  $(H_1) - (H_3)$  e que  $\alpha'(a) = \beta'(a) = A$  e  $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$ , entón, para calquera  $B \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$  o problema  $(N_{A,B})$  ten, polo menos, unha solución  $u$  satisfacendo*

$$u \in [\alpha, \beta] \text{ e } |u'(t)| \leq M \text{ para todo } t \in I,$$

onde  $M$  depende soamente de  $\alpha, \beta, \phi, k$  e  $\theta$ .

*Demostración.* Sexa  $C \in [\alpha(b), \beta(b)]$  e considérese o problema mixto

$$(M_C) \begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) & \text{para case todo } t \in I, \\ u'(a) = A, \quad u(b) = C, \end{cases}$$

Sen máis que aplicar o Teorema 3.5, pode verse que  $(M_C)$  admite unha solución  $u \in [\alpha, \beta]$  e que existe  $M_C > 0$  tal que  $|u'(t)| \leq M_C$  para todo  $t \in I$ . Ademais, para cada solución  $u$  de  $(M_C)$  en  $[\alpha, \beta]$  a constante  $M_C$  non depende de  $C$ , senón soamente de  $\alpha, \beta, \phi, \theta$  e  $k$ . Por tanto, denotarase simplemente como  $M$ .

Faremos a demostración por redución ao absurdo. Para iso, consideraremos un  $B$  arbitrario en  $[\alpha'(b), \beta'(b)]$  e suporemos que non existe solución de  $(N_{A,B})$  contida en  $[\alpha, \beta]$ .

Definimos:

$$X = \{C \in [\alpha(b), \beta(b)] : \text{ existe } u \text{ solución de } (M_C), u \in [\alpha, \beta] \text{ e } u'(b) < B\}.$$

Primeiro probaremos que o conxunto  $X$  verifica:  $\emptyset \neq X \neq [\alpha(b), \beta(b)]$ .

- $X \neq \emptyset$ . Aplicando o Teorema 3.5, sabemos que  $(M_{\alpha(b)})$  ten unha solución  $u_\alpha$  con  $u_\alpha(t) \geq \alpha(t)$  para todo  $t \in I$ . Como  $u_\alpha(b) = \alpha(b)$  dedúcese que:

$$u'_\alpha(b) \leq \alpha'(b) \leq B.$$

Por último, tendo en conta a hipótese de que non hai solución para o problema  $(N_{A,B})$  no sector  $[\alpha, \beta]$  conclúese que  $u'_\alpha(b) < B$ . Isto demostra que  $\alpha(b) \in X$ .

- $X \neq [\alpha(b), \beta(b)]$ . Cun razoamento practicamente análogo pode comprobarse que  $\beta(b) \notin X$ . Neste caso, considérase o problema  $(M_{\beta(b)})$ , o cal ten unha solución  $v_\beta$  verificando que  $\beta(t) \geq v_\beta(t)$ . Tendo en conta que  $v_\beta(b) = \beta(b)$  chégase a que  $v'_\beta(b) \geq \beta'(b) \geq B$ . Finalmente, empregando a hipótese de partida dedúcese que  $v'_\beta(b) > B$  para toda  $v$  solución de  $(M_{\beta(b)})$ . Polo tanto,  $\beta(b) \notin X$ .

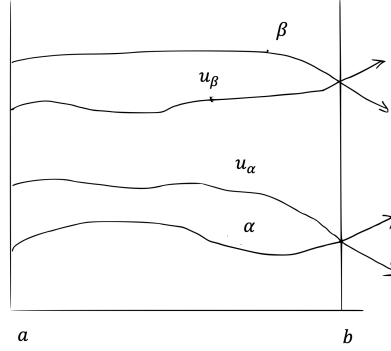


Figura 3.1: Ilustración do feito de que  $u'_\alpha(b) \leq \alpha'(b)$  e  $v'_\beta(b) \geq \beta'(b)$ .

Seguidamente, probarase que  $\sup X \equiv B^* \in X$ , co cal, necesariamente,  $B^* < \beta(b)$ .

Aplicando a definición de supremo pódese elixir unha sucesión  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $B_n \nearrow B^*$ . Isto é, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos atopar unha solución  $u_n \in [\alpha, \beta]$  do problema  $(M_{B_n})$  e  $u'_n(b) < B$ .

Usando que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está limitada e o Teorema de Ascoli-Arzelà próbese que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é un conxunto relativamente compacto de  $C(I)$ . Vexamos que se verifican as hipóteses do Teorema de Ascoli Arzelà.

Nesta ocasión  $Y = \mathbb{R}$  e  $X = I$  sendo un conxunto conexo (os intervalos son conexos). Por tanto, é suficiente con verificar que existe  $t$  tal que o conxunto  $\{u_n(t) : u_n \in \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$  é relativamente compacto en  $\mathbb{R}$  ou, equivalentemente é limitado. Isto último é trivial pois  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\alpha, \beta]$ .

Por outro lado, usando:

- A representación integral de  $u'_n$ :

$$u'_n(t) = \phi^{-1} \left( \phi(A) + \int_a^t f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds \right) \text{ para todo } t \in I. \quad (3.2)$$

Esta igualdade está ben definida, pois sabemos que  $\alpha(t) \leq u_n(t) \leq \beta(t)$  e  $|u'_n(t)| \leq M$  para todo  $t \in I$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Co cal, existirá unha constante  $R > 0$ , que non depende de  $n$  e tal que  $\|u_n\|_{C^1(I)} \leq R$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando, agora, a Condición 3 de ser  $f$  unha función de Carathéodory temos que existe unha función  $\psi \equiv \psi_R \in L^1(I)$  con

$$|f(s, u_n(s), u'_n(s))| \leq \psi(s) \text{ para case todo } s \in I \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entón, para cada valor de  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $f(\cdot, u_n(\cdot), u'_n(\cdot)) \in L^1(I)$ , o cal nos garantiza que (3.2) está ben definida. Como consecuencia directa, deducimos que

$$u_n(t) = B_n - \int_t^b \phi^{-1} \left( \phi(A) + \int_a^r f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds \right) dr \text{ para todo } t \in I.$$

- A continuidade uniforme de  $\phi^{-1}$  en intervalos compactos. Esta dedúcese de aplicar o Teorema da Función Inversa para funcións continuas e o Teorema de Heine.

■ Teorema de Ascoli-Arzelà

Probarase que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é un conxunto relativamente compacto en  $C^1(I)$ .

Para iso, é necesario ver que  $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é un conxunto equicontínuo en  $I$ .

Para simplificar a notación denotaremos

$$\int_a^t f(s, u_n(s), u'_n(s)) \equiv J_n(t),$$

co cal

$$u'_n(t) = \phi^{-1}(\phi(A) + J_n(t)) \text{ para todo } t \in I \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos realizar as seguintes acotacións

$$\phi(A) - \|\psi\|_1 \leq \phi(A) + J_n(t) \leq \phi(A) + \|\psi\|_1 \text{ para todo } t \in I \text{ e para todo } n \in \mathbb{N},$$

das que deducimos que os valores de  $\phi(A) + J_n(t)$  ao ir variando  $t$  e  $n$  varían no intervalo compacto  $K = [\phi(A) - \|\psi\|_1, \phi(A) + \|\psi\|_1]$ . Como  $\phi^{-1}$  é uniformemente continua en intervalos compactos temos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / [x, y \in K, |x - y| < \delta] \implies |\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y)| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Fixamos agora un valor de  $\varepsilon > 0$  e consideremos un  $\delta > 0$  tal que se verifique a condición (3.3).

Dados  $t_1, t_2 \in I$  con  $s < t$  tense que

$$|\phi(A) + J_n(t_1) - \phi(A) - J_n(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(r, u_n(r), u'_n(r)) dr \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi(r) dr.$$

Agora ben, como  $\psi \in L^1(I)$ , dado  $\delta > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$[t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| < \delta_1] \implies \int_{t_1}^{t_2} \psi(r) dr \leq \delta.$$

Xuntando todo o anterior con (3.2) chegamos finalmente a que

$$[t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| < \delta_1] \implies |u'_n(t_1) - u'_n(t_2)| < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O valor de  $\varepsilon > 0$  foi elixido de forma totalmente arbitraria e o  $\delta_1 > 0$  non depende de  $n$  co cal podemos concluir que a sucesión  $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é equicontínua en  $I$ .

Polo tanto, é posible atopar unha subsucesión converxente en  $C^1(I)$ . Asímesse que existe un  $u \in C^1(I)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  en  $C^1(I)$  (para non complicar a notación).

Como  $f$  é unha función de Carathéodory en  $I \times \mathbb{R}$  e  $u_n \rightarrow u$  en  $C^1(I)$ , tense que

$$f(t, u_n(t), u'_n(t)) \rightarrow f(t, u(t), u'(t)) \text{ en case todo punto } t \in I$$

e

$$|f(t, u_n(t), u'_n(t))| \leq \psi(t) \in L^1(I) \text{ en case todo punto } t \in I.$$

Ademais, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in I$  tense:

$$u_n(t) = B_n - \int_t^b \phi^{-1} \left( \phi(A) + \int_a^r f(s, u_n(s), u_n'(s)) ds \right) dr.$$

Usando o Teorema da converxencia dominada, a continuidade de  $\phi^{-1}$  e as converxencias  $u_n \rightarrow u$  en  $C^1(I)$  e  $B_n \rightarrow B^*$ , pódese afirmar que  $u$  é solución de  $(M_{B^*})$  verificando  $u \in [\alpha, \beta]$ .

Por outro lado, tense que:

$$u'(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n'(b) \leq B$$

e, por hipótese,  $u'(b) < B$  co cal  $B^* \in X$ .

Agora sábese que  $u$  e  $\beta$  son sub e sobre solucións respectivamente para o problema  $(M_C)$ ,  $B^* \leq C \leq \beta(b)$  onde se cumpre que  $u \leq \beta$  en  $I$ . Ademais, a condición de Nagumo séguese verificando para as mesmas funcións  $k$  e  $\theta$  que eran válidas no caso  $\alpha$  e  $\beta$  xa que  $u \geq \alpha$ . Así

$$\nu_1 = \frac{\max\{|u(a) - \beta(b)|, |u(b) - \beta(a)|\}}{b - a} \leq \nu$$

e

$$\mu_1 = \max_{t \in I} \beta(t) - \min_{t \in I} u(t) \leq \mu,$$

do que se deduce

$$\int_{-\infty}^{\phi(-\nu_1)} \frac{|\phi^{-1}(u)|^{\frac{p-1}{p}}}{\theta(|\phi^{-1}(u)|)} du > \mu_1^{\frac{p-1}{p}} \|k\|_p$$

e

$$\int_{\phi(\nu_1)}^{\infty} \frac{|\phi^{-1}(u)|^{\frac{p-1}{p}}}{\theta(|\phi^{-1}(u)|)} du > \mu_1^{\frac{p-1}{p}} \|k\|_p.$$

Por outro lado, como  $B^* < \beta(b)$  (pois  $B^* \in X$ ) pódese atopar unha sucesión  $\{\overline{B_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [B^*, \beta(b)]$  tal que  $\overline{B_n} \searrow B^*$ . Isto implica que existe unha sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1(I)$  de solucións do problema  $(M_{\overline{B_n}})$  verificando

$$u(t) \leq v_n(t) \leq \beta(t) \text{ e } |v_n'(t)| \leq M \text{ para todo } t \in I.$$

Como  $\overline{B_n} \notin X$  ( $\sup X = B^* < \overline{B_n}$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , necesariamente  $v_n'(b) \geq B$ . Ademais, por hipótese  $v_n'(b) \neq B$ . Polo tanto,  $v_n'(b) > B$ .

Polo mesmo argumento desenvolvido antes pódese dicir que existe  $v \in C^1(I)$ ,  $v_n \rightarrow v$  en  $C^1(I)$ ,  $v \in [\alpha, \beta]$  e é solución do problema  $(M_{B^*})$ .

Como  $v \geq u$  en  $I$  e  $v(b) = u(b) = B^*$  sabemos que  $v'(b) \leq u'(b) < B$ . Por outro lado,  $v'(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n'(b) \geq B$ . Chégase a unha contradición que vén de supoñer que non existe solución do problema de Neumann para  $B$ . Queda, por tanto, probado o resultado. □

Consideremos agora o problema periódico

$$(P) \begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)) & \text{para case todo } t \in I, \\ u(a) = u(b), u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Realizando un estudo similar ao caso anterior chégase ao seguinte Teorema.

**Teorema 3.13.** *Supoñamos que se cumpren as hipóteses  $(H_1) - (H_3)$  e que  $\alpha(a) = \beta(a)$ ,  $\alpha'(a) \geq \alpha'(b)$ ,  $\beta(a) = \beta(b)$  e  $\beta'(a) \leq \beta'(b)$ , entón existe polo menos unha solución  $u \in C^1(I)$  do problema periódico  $(P)$  verificando*

$$u \in [\alpha, \beta] \text{ e } |u'(t)| \leq M \text{ para todo } t \in I,$$

onde a constante  $M > 0$  depende soamente de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $k$ .

### 3.1. Exemplos

A continuación preséntanse unha serie de exemplos de funcións  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : I = [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sub e sobre solucións  $\alpha$  e  $\beta$  que cumpren as hipóteses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  e  $(H_3)$ . Ademais, verificase que  $\alpha'(a) = \beta'(a) = A$  e  $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$ . Por tanto, podemos empregar o Teorema 3.12.

**Exemplo 3.14.** Consideraremos as funcións

$$\phi(x) = x^3 \quad f(t, u, v) = \text{sen } u + t^2 v^2$$

e vexamos que cumpren as hipóteses mencionadas anteriormente.

$(H_1)$  Trivialmente vemos que  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función continua (pois é polinómica nun aberto), estritamente crecente  $(\phi(x))' = 3x^2 \geq 0$  e  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (dado  $y \in \mathbb{R}$  podemos escribir  $y = \phi(x) = x^3$  co cal  $x = y^{1/3}$ ).

$(H_2)$   $f$  é unha función de Carathéodory.

1. A función  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{sen } u + t^2 v^2 \in \mathbb{R}$  é continua para todo  $t \in I$  pois trátase da suma e produto de funcións continuas nun conxunto aberto.
2. Para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , a función  $t \in I \rightarrow f(t, u, v)$  é Lebesgue medible pois é unha función continua definida nun intervalo  $I$ .
3. Para todo  $M > 0$  existe unha función de valor real  $\psi_M \in L^1(I)$  tal que

$$|f(t, u, v)| \leq \psi_M(t)$$

para case todo  $t \in I$  e para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  con  $|u| \leq M$  e  $|v| \leq M$ . Para iso basta considerar  $\psi_M(t) = 1 + M^2 t^2$ .

$(H_3)$  Comprobemos agora que existe unha subsolución  $\alpha$  e unha sobresolución  $\beta$  con  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  para todo  $t \in I$  e que a ecuación (3.1) satisfai unha condición de Nagumo relativa a  $\alpha$  e  $\beta$  no conxunto  $\Omega$ .

Para comprobar a condición de Nagumo para a función  $f$  consideraremos

$$k(t) = 1 + t^2 \quad \text{e} \quad \theta(|v|) = 1 + |v|^2,$$

co cal podemos tomar  $p = +\infty$  e considerar  $\frac{p-1}{p} = 1$

Temos que

$$|f(t, u, v)| = |\text{sen } u + t^2 v^2| \leq |\text{sen } u| + t^2 v^2 \leq 1 + t^2 v^2 \leq 1 + t^2 v^2 + t^2 + v^2 = (1 + t^2)(1 + v^2).$$

Como resultado previo para o estudo da converxencia das integrais enunciámos o seguinte criterio.

**Criterio 3.15.** *Dadas  $g$  e  $h$ , dúas funcións continuas en  $[a, \infty)$  con  $g(x) \geq 0$  e  $h(x) \geq 0$  nalgún intervalo  $[c, +\infty)$  con  $c \geq a$ . Se*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \rho$$

con  $0 < \rho < +\infty$ . *Entón*

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ é converxente se e só se } \int_a^{+\infty} h(x) dx \text{ é converxente}$$

*Observación 3.16.* O criterio pode plantexarse de forma análoga para integrais da forma  $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ .

O enunciado e demostración do criterio pode verse en [2].

Ademais

$$\int_{-\infty}^{\phi(-v)} \frac{|u|^{\frac{1}{3}} \frac{p-1}{p}}{1 + |u|^{\frac{2}{3}}} \geq \int_{-\infty}^{\phi(-v)} \frac{|u|^{\frac{1}{3}}}{1 + |u|^{\frac{2}{3}}}.$$

Aplicando o Criterio de comparación 3.15 vemos que

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{|u|^{\frac{1}{3}}}{1 + |u|^{\frac{2}{3}}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{|u|^{\frac{2}{3}}}{1 + |u|^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

Do anterior podemos concluir que a integral é diverxente a  $+\infty$  pois  $\int_{-\infty}^{\phi(-v)} \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}$  diverxe.

Seguindo o mesmo razoamento e aplicando, de novo, o Criterio de comparación 3.15 comprobamos que a integral

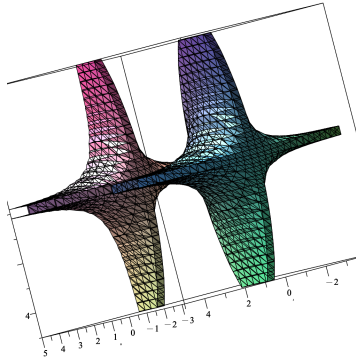
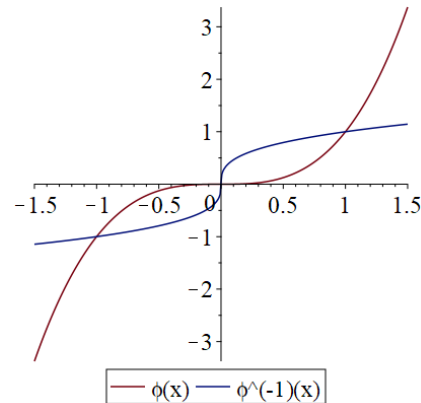
$$\int_{\phi(v)}^{+\infty} \frac{|u|^{\frac{1}{3}}}{1 + |u|^{\frac{2}{3}}}$$

diverxe a  $+\infty$ .

Co anterior temos que se cumpren as condicións para que a función  $f$  verifique a condición de Nagumo.

Por outra banda, é fácil ver que podemos considerar como subsolución e sobresolución as funcións constantes  $\alpha(t) = -\frac{\pi}{3}$  e  $\beta(t) = \frac{\pi}{3}$  pois

$$(\phi(\alpha'))' = 0 \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} = f(t, \alpha, \alpha') \quad \text{e} \quad (\phi(\beta'))' = 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(t, \beta, \beta').$$

Figura 3.2: Gráfica de  $f(t, u, v) = Cte$ Figura 3.3: Gráfica de  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$ 

Ademais  $\alpha'(t) = \alpha'(a) = \alpha'(b) = 0 = \beta'(t) = \beta'(a) = \beta'(b)$ .

Nas figuras 3.2 e 3.3 vemos unha representación de  $f(t, u, v) = Cte$ ,  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$  sendo  $Cte$  unha constante.

**Exemplo 3.17.** Neste caso consideramos as funcións

$$\phi(x) = x + \exp(x) \quad f(t, u, v) = u|t|(1 + v)$$

Comprobemos, de novo, que se cumpren as hipóteses necesarias.

( $H_1$ ) É fácil ver que  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función continua (pois é suma de funcións continuas nun aberto), estritamente crecente  $\phi'(x) = 1 + \exp(x) > 0$  e  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (podémolo asegurar como consecuencia do Teorema de Bolzano tendo en conta que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = +\infty$ ).

( $H_2$ )  $f$  é unha función de Carathéodory.

1. A función  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow u|t|(1 + v) \in \mathbb{R}$  é continua para todo  $t \in I$ , pois trátase da suma e produto de funcións continuas nun conxunto aberto.
2. Para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , a función  $t \in I \rightarrow f(t, u, v)$  é Lebesgue medible pois é unha función continua definida nun intervalo  $I$ .
3. Para todo  $M > 0$  existe unha función de valor real  $\psi_M \in L^1(I)$  tal que

$$|f(t, u, v)| \leq \psi_M(t)$$

para case todo  $t \in I$  e para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  con  $|u| \leq M$  e  $|v| \leq M$ . Para iso basta considerar  $\psi_M(t) = M|t|(1 + M)$ .

( $H_3$ ) Queda por probar que existe unha subsolución  $\alpha$  e unha sobresolución  $\beta$  con  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  para todo  $t \in I$  e que a ecuación (3.1) satisfai unha condición de Nagumo relativa a  $\alpha$  e  $\beta$  no conxunto  $\Omega$ .

Para demostrar a condición de Nagumo para  $f$  tomamos

$$k(t) = C|t| \quad \theta(|v|) = 1 + |v|,$$

sendo  $C$  unha constante que definiremos posteriormente en función dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  ( $C = \max\{\max|\alpha|, \max|\beta|\}$ ).

Será fácil comprobar que

$$|f(t, u, v)| = |ut(1 + v)| \leq C|t|(1 + |v|)$$

no conxunto  $\Omega = \{(t, u, v) \in \mathbb{R} : t \in I, \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), v \in \mathbb{R}\}$ .

Ademais, tendo en conta que  $|c(t)| = c(t)$ ,  $p = +\infty \implies \frac{p-1}{p} = 1$ ,  $v = \phi^{-1}(u) \Leftrightarrow u = \phi(v)$  e  $du = \phi'(v)dv = (1 + e^v)dv$  temos que

$$\int_{-\infty}^{\phi(-v)} \frac{|\phi^{-1}(u)|^{\frac{p-1}{p}} du}{1 + |\phi^{-1}(u)|} = \int_{-\infty}^{-v} \frac{|v|(1 + e^v)dv}{1 + |v|} \geq \int_{-\infty}^{-v} \frac{|v|}{1 + |v|} dv = +\infty.$$

Analogamente, pode verse que

$$\int_{\phi(v)}^{\infty} \frac{|\phi^{-1}(u)|^{\frac{p-1}{p}} du}{1 + |\phi^{-1}(u)|} = +\infty.$$

Por outro lado, é fácil ver que podemos considerar como subsolución e sobresolución as funcións constantes  $\alpha(t) = -1$  e  $\beta(t) = 1$  (co cal  $C = 1$ ) pois

$$(\phi(\alpha))' = 0 \geq -|t| = f(t, \alpha, \alpha') \quad \text{e} \quad (\phi(\beta'))' = 0 \leq |t| = f(t, \beta, \beta').$$

Ademais  $\alpha'(t) = \alpha'(a) = \alpha'(b) = 0 = \beta'(t) = \beta'(a) = \beta'(b)$ .

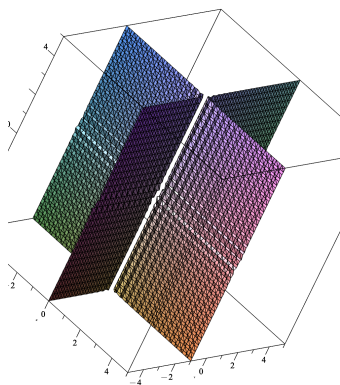


Figura 3.4: Gráfica de  $f(t, u, v) = Cte$

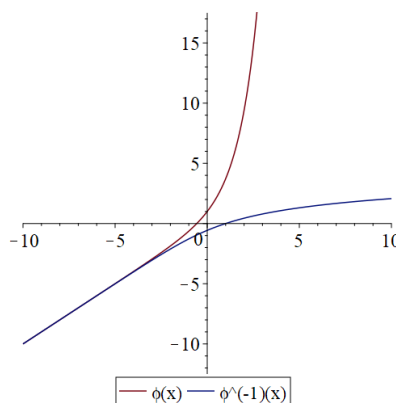


Figura 3.5: Gráfica de  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$

Nas figuras 3.4 e 3.5 vemos unha representación de  $f(t, u, v) = Cte$ ,  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$  sendo  $Cte$  unha constante.

## Capítulo 4

# O problema de Neumann con sub e sobre solución en orde inversa

Para a redacción deste capítulo foi de gran utilidade o artigo [11]. Así mesmo, tamén foron empregadas as referencias [5, 23] tal e como se indicará.

Ao longo do mesmo presentáronse moitos dos resultados do artigo [11] engadindo algunha demostración non indicada no mesmo. A continuación, mostráronse algúns contraexemplos que permitiron verificar como algúns dos resultados non eran válidos para a ecuación  $p$ -Laplaciana con  $p \neq 2$  e, concretamente, como o Teorema principal do capítulo, o Teorema 4.12 non se pode aplicar para  $p > 2$ . Por último, plantexáronse un par de exemplos co fin de ilustrar a utilidade dos resultados formulados previamente.

No capítulo anterior probamos unha serie de resultados nos que dadas  $\alpha$  e  $\beta$  sub e sobre solucións do problema de Neumann

$$-(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)), \text{ para case todo } t \in I \quad u'(a) = u'(b) = 0 \quad (4.1)$$

con  $\alpha \leq \beta$  se garante a existencia de  $u$  no sector  $[\alpha, \beta]$ .

Neste novo capítulo estudarase, de novo, o problema  $\phi$ -Laplaciano, mais, neste caso, tendo a subsolución  $\alpha$  e a sobresolución  $\beta$  do problema dadas en orde inverso, isto quere dicir:  $\alpha \geq \beta$  en  $I$ .

Baixo as condicións anteriores, o problema

$$-u'' = f(t, u), \quad u'(a) = u'(b) = 0$$

non ten, necesariamente, solución. Un exemplo podería ser:

$$u'' + u = \cos t, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0.$$

Trivialmente, verificase que  $\alpha(t) \equiv 1$  e  $\beta(t) \equiv -1$  son sub e sobre solucións. Non obstante, o problema non ten solución. Comprobémolo. Resolvendo a EDO lineal chégase a que a solución debe ter a forma:

$$u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t \sin t}{2}.$$

Deseguido, aplicando as condicións de contorno tense:

$$u'(0) = C_2 = 0 = u'(\pi) = -C_2 + \frac{\pi}{2},$$

o cal non pode ser certo.

Con todo o anterior, nesta ocasión, estudarase o problema no que a parte non lineal non depende da primeira derivada:

$$-(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t)), \text{ case todo punto } t \in I, \quad u'(a) = 0 = u'(b), \quad (4.2)$$

baixo as hipóteses:

(A<sub>1</sub>)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é un homeomorfismo crecente que cumpre  $\phi(0) = 0$ .

(A<sub>2</sub>) Para todo intervalo compacto  $[k_1, k_2]$  existe  $K > 0$  tal que para todo  $u, v \in [k_1, k_2]$

$$(\phi(u) - \phi(v))(u - v) \geq K(u - v)^2.$$

Esta condición é equivalente a que a inversa de  $\phi$ ,  $\phi^{-1}$  sexa localmente lipschitziana. Podemos comprobalo.

Para  $u = v$  a proba é trivial. Centrarémonos, por tanto, no caso  $u \neq v$

$$(u - v)(\phi^{-1}(u) - \phi^{-1}(v)) = (\phi(\phi^{-1}(u)) - \phi(\phi^{-1}(v)))(\phi^{-1}(u) - \phi^{-1}(v)) \geq K(\phi^{-1}(u) - \phi^{-1}(v))^2$$

o cal implica que

$$|\phi^{-1}(u) - \phi^{-1}(v)| \leq \frac{|u - v|}{K}.$$

Quedando probada a equivalencia.

(A<sub>3</sub>)  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función de Carathéodory.

Nalgúns resultados farase mención á seguinte condición (L), condición de Lipschitz.

(L) Unha función  $f(t, u, u') \equiv f(t, u)$  é unha función de Carathéodory que satisfai unha condición de Lipschitz unilateral

$$\text{para todo } t \in I, u, v \in [\beta(t), \alpha(t)], \quad u \leq v \implies f(t, u) - Mu \geq f(t, v) - Mv. \quad (4.3)$$

Dise que unha función é solución do problema de Neumann se  $u \in C^1(I)$  tal que  $\phi \circ u' \in W^{1,1}(I)$  e se verifica a ecuación (4.2).

Fixémonos en que a hipótese de que  $\phi(0) = 0$  non supón ningunha restricción. É suficiente definir  $\Phi(s) = \phi(s) - \phi(0)$ , e teríamos  $(\Phi(u'))' = (\phi(u'))'$ .

## 4.1. Resultados preliminares

Antes de comezar é conveniente introducir a seguinte notación. Sexan  $I = [a, b]$  e  $p \in [1, \infty)$ . Para  $u \in L^1(I)$  denotamos

$$\bar{u} = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds \quad \text{e} \quad \tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}, t \in I,$$

para  $u \in L^p(I)$ ,

$$\|u\|_p = \left( \int_a^b |u(s)|^p ds \right)^{1/p}$$

e para  $u \in C(I)$ ,

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|.$$

Seguidamente preséntanse unha serie de resultados que serán necesarios posteriormente:

**Lema 4.1.** *Sexa  $u \in C^1(I)$*

(a) *Se  $u(a) = 0$  ou  $u(b) = 0$  entón  $\|u'\|_2^2 \geq \left(\frac{\pi}{2(b-a)}\right)^2 \|u\|_2^2$ .*

(b) *Se  $\bar{u} = 0$  entón  $\|u'\|_2^2 \geq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \|u\|_2^2$ .*

A demostración pode verse en [23].

Deducimos o seguinte resultado.

**Corolario 4.2.** *Se  $u \in C^1(I)$  é tal que  $\bar{u} = 0$  entón*

$$\|u\|_\infty \leq (b-a)^{1/2} \|u'\|_2.$$

*Demostración.* Sabemos que  $\bar{u} = 0 \implies \int_a^b u(s) ds = 0$ . Agora ben,  $u$  é unha función continua en  $I$  co cal, necesariamente, existe  $t_0 \in I$  tal que  $u(t_0) = 0$ . Así:

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t u'(s) ds \right| \leq \int_a^b 1 \cdot |u'(s)| ds.$$

Seguidamente, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz chégase a:

$$\int_a^b |u'(s)| ds \leq \left( \int_a^b 1 ds \right)^{1/2} \left( \int_a^b |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \|u'\|_2,$$

xusto o que se quería probar. □

Seguidamente veranse unha serie de resultados sobre o operador  $\phi$ -Laplaciano.

**Proposición 4.3.** Se  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfai a condición  $(A_1)$ . Entón o operador

$$\mathcal{A} : \text{Dom } \mathcal{A} \subset C(I) \rightarrow L^1(I)$$

definido por

$$\mathcal{A}(u)(t) = -\frac{d}{dt}(\phi \circ u')(t)$$

e

$$\text{Dom } \mathcal{A} = \{u \in C^1(I) \mid \phi \circ u' \in W^{1,1}(I), u'(a) = 0, \bar{u} = 0\},$$

ten unha inversa continua. Ademais, se  $\bar{\sigma} = 0$ ,  $u = \mathcal{A}^{-1}(\sigma)$  é tal que  $u'(b) = 0$ .

*Demostración.* O resultado próbase calculando explicitamente a inversa da función anteriormente definida. Sexa  $\sigma \in L^1(I)$ . Entón

$$-\frac{d}{dt}(\phi \circ u')(t) = \sigma(t) \text{ en case todo } t \in I,$$

se e só se

$$u'(t) = \phi^{-1} \left( -\int_a^t \sigma(r) dr + C \right) \text{ para todo } t \in I. \quad (4.4)$$

Daquela

$$u(t) = \int_a^t \phi^{-1} \left( -\int_a^s \sigma(r) dr + C \right) ds + k \text{ para todo } t \in I$$

sendo  $C$  e  $k$  constantes arbitrarias.

Tendo en conta que  $u'(a) = 0$ , e que  $\phi(x) = 0$  se e só se  $x = 0$  chégase a que  $C = 0$ .

Do feito de que  $\bar{u} = 0$  substituíndo obtense que

$$k = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^t \phi^{-1} \left( -\int_a^s \sigma(r) dr \right) ds dt,$$

co cal

$$\mathcal{A}^{-1}(\sigma)(t) = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^t \phi^{-1} \left( -\int_a^s \sigma(r) dr \right) ds dt + \int_a^t \phi^{-1} \left( -\int_a^s \sigma(r) dr \right) ds.$$

Fixémonos en que se  $\int_a^b \sigma(r) dr = 0$ , entón, dado que  $C = 0$ , deducimos da ecuación (4.4) que  $u'(b) = 0$ . □

Pode ser necesario reforzar a condición  $(A_2)$  para estudar a existencia de solución para o problema (4.2). Desta forma introducimos a condición:

$(A_2^*)$  Existe  $K > 0$  tal que para todo  $u, v \in \mathbb{R}$  se verifica

$$(\phi(u) - \phi(v))(u - v) \geq K(u - v)^2.$$

A cal, como xa vimos, é equivalente a que  $\phi^{-1}$  sexa lipschitziana en todo  $\mathbb{R}$ .

Antes de probar a seguinte proposición é necesario introducir algún concepto.

**Definición 4.4.** Operador compacto.

Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  entre dous espazos de Banach  $X$  e  $Y$  dise que é compacto se leva conxuntos relativamente compactos de  $X$  en conxuntos precompactos de  $Y$ . Isto é, para toda sucesión limitada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  a sucesión  $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ten unha subsucesión  $\{T(x_{n_k})\}_{n_k \in \mathbb{N}}$  que converxe en  $Y$ .

**Teorema 4.5.** *Teorema do Punto fixo de Schauder.*

Sexa  $K \subset X$  un conxunto convexo nun espazo de Banach  $X$  e  $T : K \rightarrow K$  unha aplicación continua e compacta. Entón  $T$  ten polo menos un punto fixo en  $K$ .

O resultado anterior pode atoparse en [5].

**Proposición 4.6.** Dada  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando as condicións  $(A_1)$  e  $(A_2^*)$ . Considérese  $M \in (-\infty, K\pi^2/(b-a)^2)$ ,  $M \neq 0$ , onde  $K$  é a constante dada en  $(A_2^*)$ . Entón, para calquera  $\sigma \in L^1(I)$  o problema:

$$-\frac{d}{dt}(\phi \circ u')(t) = Mu(t) + \sigma(t), \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \quad (4.5)$$

ten, polo menos, unha solución.

*Demostración.* Comézase a demostración integrando en  $[a, b]$  en ambos lados da ecuación (4.5) obtendo

$$M\bar{u} = -\bar{\sigma}$$

derivado de que  $\phi(u'(b)) = \phi(u'(a)) = 0$  pois partíamos da hipótese de que  $\phi(0) = 0$ .

Se atopamos unha función  $\tilde{u}$ , solución de

$$-\frac{d}{dt}(\phi \circ \tilde{u}')(t) = M\tilde{u}(t) + \tilde{\sigma}(t) \text{ en c.t.p } t \in I, \quad \tilde{u}'(a) = 0, \quad \tilde{u}'(b) = 0,$$

entón  $u = \tilde{u} - \bar{\sigma}/M$  será unha solución de (4.5).

Seguidamente trabállase coa homotopía

$$-\frac{d}{dt}\phi(u'(t)) = \lambda Mu(t) + \tilde{\sigma}(t) \text{ en c.t.p } t \in I, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \quad (4.6)$$

onde  $\lambda \in [0, 1]$ .

Dividiremos o estudo deste problema en dúas partes:

- Problema de punto fixo. A Proposición 4.3 implica que se pode escribir a ecuación (4.6) da forma:

$$\mathcal{A}(u) = \lambda Mu + \tilde{\sigma}, u \in \text{dom}(\mathcal{A})$$

co cal se pode pasar a traballar cun problema de punto fixo do estilo

$$u = T_\lambda u, \quad u \in X,$$

onde  $T_\lambda : X \subset C(I) \rightarrow C(I)$  vén dado por

$$T_\lambda(u) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda Mu + \tilde{\sigma}) \text{ e } X = \{u \in C^1(I) | \bar{u} = 0\}.$$

Ademais  $T_\lambda$  é un operador compacto e o conxunto  $X$  é un convexo limitado. Para probar que é convexo é suficiente considerar dúas funcións  $u_1 \in X$  e  $u_2 \in X$  e ver que  $u_3 = \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \in X$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Agora ben:

$$\int_a^b u_3(t)dt = \int_a^b \alpha u_1(t)dt + \int_a^b (1 - \alpha)u_2(t)dt = \alpha \int_a^b u_1(t)dt + (1 - \alpha) \int_a^b u_2(t)dt = 0$$

- *Cota a priori.* Empregando a hipótese  $(A_2^*)$ , para todo  $u \in X$  tense

$$\phi(u'(t))u'(t) \geq Ku'(t)u'(t), t \in I.$$

A continuación, integrando a expresión anterior chégase a

$$K\|u'\|_2^2 \leq \int_a^b \phi(u'(t))u'(t)dt.$$

Por último, restando en ambos lados da igualdade a cantidade  $\lambda M\|u\|_2^2$  pódese escribir

$$K\|u'\|_2^2 - \lambda M\|u\|_2^2 \leq \int_a^b \phi(u'(t))u'(t)dt - \lambda M\|u\|_2^2.$$

Seguidamente, integrando por partes e tendo en conta que  $u'(a) = u'(b) = 0$  tense

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(u'(t))u'(t)dt - \lambda M\|u\|_2^2 &= u(t)\phi(u'(t))\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}[\phi(u'(t))]u(t)dt - \lambda M\|u\|_2^2 \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt}[\phi(u'(t))]u(t)dt - \lambda M\|u\|_2^2 \leq \|\tilde{\sigma}\|_1\|u\|_\infty, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde se aplicou a ecuación (4.6).

Agora, temos dúas posibilidades en función do valor de  $M$ .

- $M \leq 0$ .

$$K\|u'\|_2^2 - \lambda M\|u\|_2^2 \geq K\|u'\|_2^2.$$

- $M > 0$ . Aplicando o Lema 4.1, (b) tense:

$$K\|u'\|_2^2 - \lambda M\|u\|_2^2 \geq \left(K - M \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\right)\|u'\|_2^2.$$

Por tanto, para calquera  $M \in (-\infty, K\pi^2/(b-a)^2)$  podemos atopar unha constante  $C > 0$ , independente de  $\lambda$ , tal que

$$K\|u'\|_2^2 - \lambda M\|u\|_2^2 \geq C(b-a)\|u'\|_2^2 \geq C\|u\|_\infty^2, \quad (4.8)$$

onde se aplicou o Corolario 4.2.

Finalmente, de (4.7) e (4.8) deducimos que

$$\|u\|_{\infty} \leq C^{-1} \|\tilde{\sigma}\|_1.$$

Aplicando o Teorema 4.5 chégase ao resultado buscado.

*Observación 4.7.* O resultado da Proposición seguiría sendo certo cambiando a condición  $(A_2^*)$  pola máis débil:

$(A_2^+)$  Existe  $K > 0$  tal que para todo  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(v)v \geq Kv^2$ .

A demostración sería exactamente a mesma que a mostrada anteriormente. □

## 4.2. Principios de comparación

O obxectivo desta sección é probar certos principios de comparación de funcións que serán necesarios posteriormente para aplicar o método monótono ao problema  $(N)$ .

**Proposición 4.8.** *Sexa  $\phi$  satisfacendo as condicións  $(A_1)$  e  $(A_2^*)$  e*

$$M \in \left( -\infty, \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2} \right).$$

*Se  $u_1, u_2$  son tales que  $u_i \in C^1(I)$ ,  $\phi \circ u'_i \in W^{1,1}(I)$ ,  $i = 1, 2$  e*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_1)(t) - Mu_1(t) &\geq -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_2)(t) - Mu_2(t), \\ u'_1(a) &\leq u'_2(a), \quad u_1(b) \geq u_2(b), \end{aligned} \tag{4.9}$$

*entón  $u_1 \geq u_2$  en  $I$ . Se ademais  $M \geq 0$ , temos que  $u'_1 \leq u'_2$  en  $I$ .*

*Demostración.* Faremos a demostración por redución ao absurdo. Supoñamos entón que  $u_1 - u_2$  alcanza un mínimo negativo en  $t_0 \in [a, b)$ . Nese caso  $u'_1(t_0) = u'_2(t_0)$  e existe  $t_1 > t_0$  tal que  $u_1(t_1) = u_2(t_1)$  e  $u_1(t) < u_2(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1)$ . Multiplicando por  $u_1 - u_2$ , usando a hipótese  $(A_2^*)$  e a desigualdade (4.9), integrando no intervalo  $(t_0, t_1)$ , chegamos á seguinte desigualdade

$$K \int_{t_0}^{t_1} (u'_1(t) - u'_2(t))^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1} (\phi(u'_1(t)) - \phi(u'_2(t)))(u'_1(t) - u'_2(t)) dt \leq M \int_{t_0}^{t_1} (u_1(t) - u_2(t))^2 dt.$$

A continuación, emprégase o Lema 4.1 (a), tendo en conta que  $u_1(t_1) - u_2(t_1) = 0$  e que  $t_1 - t_0 \leq b - a$  obtendo

$$K \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_{t_0}^{t_1} |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt \leq M \int_{t_0}^{t_1} |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt,$$

o que implica que

$$K \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \leq M,$$

en contradición coa suposición do enunciado de que  $M \in (-\infty, K\pi^2/4(b-a)^2)$ .

Por outro lado, sen máis que empregar a ecuación (4.9) pode deducirse que se  $M \geq 0$ , entón

$$-\frac{d}{dt}(\phi(u'_1(t)) - \phi(u'_2(t))) \geq M(u_1(t) - u_2(t)) \geq 0 \text{ en c.t.p } t \in I.$$

Por tanto,  $\phi \circ u'_1 - \phi \circ u'_2$  é decrecente e, como  $\phi(u'_1(a)) - \phi(u'_2(a)) \leq 0$  temos que  $\phi(u'_1(t)) \leq \phi(u'_2(t))$  para todo  $t \in I$  ou, equivalentemente,  $u'_1 \leq u'_2$  en  $I$ . □

De maneira similar próbase a seguinte Proposición.

**Proposición 4.9.** *Dada  $\phi$  satisfacendo as condicións  $(A_1)$  e  $(A_2^*)$  e*

$$M \in \left(-\infty, \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2}\right).$$

*Se  $u_1, u_2$  son tales que  $u_i \in C^1(I)$ ,  $\phi \circ u'_i \in W^{1,1}(I)$ ,  $i = 1, 2$  e*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_1)(t) - Mu_1(t) &\geq -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_2)(t) - Mu_2(t), \\ u_1(a) &\geq u_2(a), \quad u'_1(b) \geq u'_2(b), \end{aligned}$$

*entón  $u_1 \geq u_2$  en  $I$ . Se ademais  $M \geq 0$ , entón  $u'_1 \geq u'_2$  en  $I$ .*

*Demostración.* A proba é análoga á da Proposición anterior: □

Das dúas proposicións anteriores dedúcese a seguinte:

**Proposición 4.10.** *Dada  $\phi$  satisfacendo as condicións  $(A_1)$  e  $(A_2^*)$  e*

$$M \in \left(0, \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2}\right).$$

*Se  $u_1, u_2$  son tales que  $u_i \in C^1(I)$ ,  $\phi \circ u'_i \in W^{1,1}(I)$ ,  $i = 1, 2$  e*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_1)(t) - Mu_1(t) &\geq -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_2)(t) - Mu_2(t), \\ u'_1(a) &\leq u'_2(a), \quad u'_1(b) \geq u'_2(b), \end{aligned} \tag{4.10}$$

*entón  $u_1 \equiv u_2$  ou  $u_1(t) < u_2(t)$  en  $I$ .*

*Demostración.* Supoñamos que  $u_1 \not\equiv u_2$  e vexamos que entón non é posible que  $u_1 \geq u_2$  en ningún valor de  $I$ .

Así, se  $u_1 \geq u_2$  en  $I$ , integrando en  $[a, b]$  na ecuación (4.10) temos

$$\phi(u'_2(b)) - \phi(u'_1(b)) - \phi(u'_2(a)) + \phi(u'_1(a)) \geq M \int_a^b (u_1(s) - u_2(s)) ds > 0,$$

o cal non é posible pois contradi as condicións de contorno.

Partamos, por outro lado, de que existe  $t_0 \in [a, b)$  tal que  $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ . Como  $0 < (b-t_0)^2 \leq (b-a)^2$  entón pode aplicarse a Proposición 4.9 no intervalo  $[t_0, b]$  ( $u_1(t_0) \geq u_2(t_0)$  e  $u_1'(b) \geq u_2'(b)$ ) co cal  $u_1 \geq u_2$  nese intervalo. De maneira análoga, se  $t_0 \in (a, b]$ , dedúcese da Proposición 4.8 que  $u_1 \geq u_2$  en  $[a, t_0]$ . Unindo ambas deducións chégase a que  $u_1 \geq u_2$  en  $I$  o cal non é posible polo visto ao inicio da demostración.

Por conseguinte, queda probado que  $u_1(t) \neq u_2(t)$  para todo  $t \in I$ , co cal  $u_1(t) < u_2(t)$  en  $I$ .  $\square$

Da Proposición anterior pode deducirse un resultado de unicidade para o problema (4.5).

**Corolario 4.11.** *Dada  $\phi$  satisfacendo as condicións  $(A_1)$  e  $(A_2^*)$ ,*

$$M \in \left( 0, \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2} \right)$$

e  $\sigma \in L^1(I)$ .

*Entón o problema (4.5) ten unha única solución.*

*Demostración.* Pola Proposición 4.6 xa sabemos que o problema (4.5) ten solución. Supoñamos que existen dúas solucións do problema (4.5):  $u_1$  e  $u_2$ . Sabemos por hipótese que  $u_1'(a) = u_2'(a) = 0$  e  $u_1'(b) = u_2'(b) = 0$  e que

$$-\frac{d}{dt}(\phi \circ u_1')(t) - Mu_1(t) = -\frac{d}{dt}(\phi \circ u_2')(t) - Mu_2(t),$$

co cal se cumpren as hipóteses da Proposición 4.10. Necesariamente  $u_1(t) = u_2(t)$  ou  $u_1(t) < u_2(t)$  en  $I$ . Agora ben, se  $u_1(t) < u_2(t)$  en  $I$ , integrando a ecuación (4.2)

$$\phi(u_1'(b)) - \phi(u_2'(b)) - \phi(u_1'(a)) + \phi(u_2'(a)) \geq M \int_a^b (u_2(s) - u_1(s)) ds > 0,$$

o cal contradi as condicións de contorno. Necesariamente  $u_1 = u_2$  en  $I$ , xusto o que queríamos ver.  $\square$

### 4.3. O método monótono

Nesta ocasión diremos que  $\alpha \in C^1(I)$  é unha subsolución de  $(N)$  se  $\phi \circ \alpha' \in W^{1,1}(I)$  e

$$-\frac{d}{dt}\phi(\alpha'(t)) \leq f(t, \alpha(t)), \text{ c.t.p. } t \in I \quad \alpha'(a) \geq 0 \geq \alpha'(b).$$

Por outro lado,  $\beta \in C^1(I)$  é unha sobresolución se  $\phi \circ \beta' \in W^{1,1}(I)$  e

$$-\frac{d}{dt}\phi(\beta'(t)) \geq f(t, \beta(t)), \text{ c.t.p. } t \in I \quad \beta'(a) \leq 0 \leq \beta'(b).$$

Dadas  $\alpha$  e  $\beta \in C^1(I)$  sub e sobre solucións de (4.6) tales que  $\beta(t) \leq \alpha(t)$  en  $I$ . Denotamos

$$[\beta, \alpha] = \{v \in C^1(I) \mid \beta(t) \leq v(t) \leq \alpha(t) \text{ para todo } t \in I\}.$$

Usando a hipótese  $(A_3)$ , atopamos  $\psi \in L^1(I)$  tal que  $|f(t, u)| \leq \psi(t)$  para case todo  $t \in I$  e todo  $u \in [\beta(t), \alpha(t)]$ . Seguidamente defínese

$$k_1(\alpha, \beta) = \phi^{-1}(-\|\psi\|_1) \quad \text{e} \quad k_2(\alpha, \beta) = \phi^{-1}(\|\psi\|_1).$$

Se ademais  $\alpha$  e  $\beta$  son sub e sobre solucións, verificase que para todo  $t \in I$

$$\alpha'(t), \beta'(t) \in [k_1(\alpha, \beta), k_2(\alpha, \beta)],$$

o cal se deduce directamente de integrar e calcular a inversa en

$$-\frac{d}{dt}\phi(\alpha'(t)) \leq f(t, \alpha(t)) \quad \text{e} \quad -\phi(\beta'(t)) \geq f(t, \beta(t)).$$

**Teorema 4.12.** *Sexan  $\phi(v)$  e  $f(t, u)$  funcións que satisfán  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  e  $(A_3)$ . Supoñamos que o problema (4.2) ten unha subsolución  $\alpha$  e unha sobresolución  $\beta$  tales que  $\alpha(t) \geq \beta(t)$  para todo  $t \in I$  e sexa  $K > 0$  a constante dada en  $(A_2)$  no intervalo  $[k_1(\alpha, \beta), k_2(\alpha, \beta)]$ . Asíumese, ademais, que  $f$  satisfai a condición  $(L)$  para algún  $M \in (0, K\pi^2/4(b-a)^2)$ .*

*Entón existen dúas sucesións monótonas  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\beta, \alpha]$  que son respectivamente decrecentes e crecentes e que converxen uniformemente ás solucións  $u_{min}$  e  $u_{max}$  de (4.2) tales que*

$$\beta(t) \leq u_{min}(t) \leq u_{max}(t) \leq \alpha(t), t \in I.$$

*Ademais, estas solucións son extremas, isto é, para calquera outra solución  $u$  de (4.2) tal que  $\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$  satisfaise*

$$u_{min}(t) \leq u(t) \leq u_{max}(t), t \in I.$$

*Demostración.* Para a demostración consideraremos o seguinte homeomorfismo:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(k_2) + K(x - k_2) & \text{se } x > k_2, \\ \phi(x) & \text{se } k_1 \leq x \leq k_2, \\ \phi(k_1) - K(x - k_1) & \text{se } x < k_1. \end{cases}$$

Trátase basicamente dun homeomorfismo crecente  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando que  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(x) = \phi(x)$  para todo  $x \in [k_1, k_2]$  e con  $\Phi$  cumprindo a condición  $(A_2^*)$  con  $K$ .

Paso 1: Primeiros iterantes. Considérese  $\alpha_0 = \alpha$  e sexa  $\alpha_1$  unha solución de

$$-\frac{d}{dt}\Phi(u'(t)) - Mu(t) = \sigma_0(t), \quad \text{c.t.p. } t \in I \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0,$$

onde  $\sigma_0(t) = f(t, \alpha_0(t)) - M\alpha_0(t)$ . Aplicando o resultado do Corolario 4.11 pódese deducir que a función  $\alpha_1$  existe e é única.

Pola definición de subsolución e tendo en conta que  $\alpha'(t) \in [k_1, k_2]$  temos

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'(t)) - M\alpha(t) = -\frac{d}{dt}\phi(\alpha'(t)) - M\alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)) - M\alpha(t).$$

De aquí dedúcese que

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_1(t)) - M\alpha_1(t) \geq -\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'(t)) - M\alpha(t) \quad \text{en c.t.p } t \in I$$

$$\alpha'_1(a) \leq \alpha'(a), \quad \alpha'_1(b) \geq \alpha'(b),$$

e chégase a que  $\alpha_1 \leq \alpha$  en  $I$ , sen máis que usar a Proposición 4.10.

Para demostrar que  $\beta \leq \alpha_1$  en  $I$ , usando a condición (L), do feito de que  $\alpha \geq \beta$  en  $I$  e de que  $\phi(\beta') = \Phi(\beta')$  deducimos que

$$f(t, \beta(t)) - M\beta(t) \geq f(t, \alpha(t)) - M\alpha(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_1(t)) - M\alpha_1(t).$$

Seguidamente, tendo en conta que  $\beta$  é unha sobresolución obtense

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_1(t)) - M\alpha_1(t) \leq -\frac{d}{dt}\Phi(\beta'(t)) - M\beta(t)$$

$$\beta'(a) \leq \alpha'_1(a) \quad \beta'(b) \geq \alpha'_1(b),$$

e, finalmente, usando a Proposición 4.10 dedúcese que  $\beta \leq \alpha_1$  en  $I$ .

Paso 2: Construción de  $\alpha_n$ . Partimos da base de que coñecemos  $\alpha \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq \beta$  para  $n \geq 1$ , e, por analoxía, escribimos  $\alpha_{n+1}$  como a solución (que ademais é única) de

$$-\frac{d}{dt}\Phi(u'(t)) - Mu(t) = \sigma_n(t), \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \quad (4.11)$$

onde  $\sigma_n(t) = f(t, \alpha_n(t)) - M\alpha_n(t)$ .

Dado que  $\alpha_{n-1} \geq \alpha_n$  en  $I$  temos que  $\sigma_{n-1} \geq \sigma_n$  en  $I$ , co cal

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_{n+1}(t)) - M\alpha_{n+1}(t) \geq f(t, \alpha_{n-1}(t)) - M\alpha_{n-1}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_n(t)) - M\alpha_n(t),$$

e

$$\alpha'_{n+1}(a) = 0 = \alpha'_n(a), \quad \alpha'_{n+1}(b) = 0 = \alpha'_n(b),$$

de onde obtemos  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$  en  $I$ .

De novo, usando a condición (L) chégase a

$$f(t, \beta(t)) - M\beta(t) \geq f(t, \alpha_n(t)) - M\alpha_n(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_{n+1}(t)) - M\alpha_{n+1}(t).$$

A continuación, tendo en conta que  $\beta$  é unha sobresolución e que  $\phi(\beta') = \Phi(\beta')$ , obtense

$$-\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_{n+1}(t)) - M\alpha_{n+1}(t) \leq -\frac{d}{dt}\Phi(\beta'(t)) - M\beta(t) \quad \text{c.t.p } t \in I$$

$$\beta'(a) \leq \alpha'_{n+1}(a) \quad \beta'(b) \geq \alpha'_{n+1}(b),$$

e, finalmente, usando a Proposición 4.10 dedúcese que  $\beta \leq \alpha_{n+1}$  en  $I$ .

Paso 3: Existencia de  $u_{max}$ . Vimos nos apartados anteriores que a sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona e limitada en  $C^1(I)$  (terceira condición de función de Carathéodory). Disto pode deducirse a converxencia uniforme a algunha función  $u_{max} \in C(I)$ .

Partimos de

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\Phi(\alpha'_{n+1}) &= M(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + f(t, \alpha_n(t)) \\ \alpha'_{n+1}(a) &= \alpha'_{n+1}(b) = 0. \end{aligned}$$

Integrando na ecuación anterior obtense

$$-\Phi(\alpha'_{n+1}(t)) + \Phi(\alpha'_{n+1}(a)) = \int_a^t (M(\alpha_{n+1}(a) - \alpha_n(s)) - f(s, \alpha_n(s))) ds.$$

Calculando a inversa e tendo en conta que  $\Phi(\alpha'_{n+1}(a)) = 0$  chegamos a

$$\alpha'_{n+1}(t) = \Phi^{-1} \left( -\int_0^t M(\alpha_{n+1}(s) - \alpha_n(s)) + \int_0^t f(s, \alpha_n(s)) ds \right).$$

Seguidamente, por ser  $\Phi^{-1}$  homeomorfismo temos que

$$\Phi^{-1} \left( -\int_0^t M(\alpha_{n+1}(s) - \alpha_n(s)) + \int_0^t f(s, \alpha_n(s)) ds \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi^{-1} \left( \int_0^t f(s, u_{max}(s)) ds \right) \in C(I).$$

Dado que

$$M \int_0^t (\alpha_{n+1}(s) - \alpha_n(s)) + \int_0^t f(s, \alpha_n(s)) ds \in [M_1, M_2],$$

isto implica que  $\Phi^{-1}$  é uniformemente continua en  $[M_1, M_2]$  co cal

$$\Phi^{-1} \left( -\int_0^t M(\alpha_{n+1}(s) - \alpha_n(s)) + \int_0^t f(s, \alpha_n(s)) ds \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi^{-1} \left( \int_0^t f(s, u_{max}(s)) ds \right)$$

uniformemente en  $I$ .

Do anterior deducimos que

$$\alpha'_{n+1}(t) \rightarrow u'_{max}(t) \text{ uniformemente en } I.$$

Ademais

$$\Phi(u'_{max}(t)) = \int_0^t f(s, u_{max}(s)) ds \in W^{1,1}(I) \text{ por ser a integral dunha función de } L^1(I).$$

Dedúcese, por tanto que

$$-\frac{d}{dt}\Phi(u'_{max}(t)) = f(t, u_{max}(t)), \text{ c.t.p. } t \in I \quad u'_{max}(a) = 0, \quad u'_{max}(b) = 0. \quad (4.12)$$

Seguidamente comprobemos que a solución obtida é maximal. Se  $u \in [\beta, \alpha]$  é outra solución de (4.12), repetindo a demostración dos pasos de aproximación e construción de  $\alpha_n$ , teríase que  $\alpha_n \geq u$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $u_{max} \geq u$ . Por tanto,  $u_{max}$  é solución maximal de (4.12) en  $[\beta, \alpha]$ .

*Conclusión.* Sexa  $x \in [\beta, \alpha]$  unha solución de (4.2). Como  $|f(t, x(t))| \leq \psi(t)$ , da definición de  $\Phi$ ,  $k_1$  e  $k_2$  dedúcese que

$$k_1 = \Phi^{-1}(-\|\psi\|_1) \leq x'(t) = \Phi^{-1}(\|\psi\|_1) \leq k_2,$$

e, por tanto,  $u$  é unha solución de (4.2) en  $[\beta, \alpha]$ .

De maneira similar, podemos probar que toda solución de (4.12) en  $[\beta, \alpha]$  é unha solución de (4.2), concluíndo que  $u_{max}$  é unha solución maximal de (4.2) en  $[\beta, \alpha]$ .

Analogamente próbase a existencia dunha sucesión decrecente  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e da solución minimal  $u_{min}$ . □

*Observación 4.13.* O último teorema pódese aplicar para o problema  $p$ -Laplaciano, onde  $\phi_p = |v|^{p-2}v$  con  $1 < p \leq 2$ . Isto débese a que para  $1 < p \leq 2$  a función  $\phi_p^{-1}$  é localmente lipschitziana co que se verifica a hipótese  $(A_2)$ . Mentres que para  $p > 2$  non se verifica  $(A_2)$ . Podemos comprobalo

$$\phi^{-1}(v) = |v|^{\frac{1}{p-1}} \implies |(\phi^{-1})'(v)| = \left| \frac{v^{\frac{1}{p-1}}}{(p-1)v} \right| = \left| \frac{v^{\frac{2-p}{p-1}}}{p-1} \right|. \quad (4.13)$$

Vemos que para calquera intervalo compacto  $[c, d]$  e con  $1 < p \leq 2$ ,  $(\phi^{-1})'(v)$  está limitada sen máis que tomar  $\max\{\frac{1}{p-1}, \frac{|c|^{\frac{2-p}{p-1}}}{p-1}, \frac{|d|^{\frac{2-p}{p-1}}}{p-1}\}$ . Por outro lado, para  $p > 2$ ,  $\frac{2-p}{p-1} < 0$  co cal  $(\phi^{-1})'(v)$  non está limitada nun intervalo que conteña ao 0.

### 4.3.1. Contraexemplos

Como acabamos de comentar, o Teorema 4.12 non se pode aplicar á ecuación  $p$ -Laplaciana  $\phi_p(v) := |v|^{p-2}v$  con  $p > 2$ . Isto débese a que a inversa  $\phi_p^{-1}$  non é localmente lipschitziana, co cal non se verifica a hipótese  $(A_2)$  e non se pode aplicar o Teorema 4.12. Tampouco é aplicable a Proposición 4.10, xa que é necesario que  $\phi$  verifique  $(A_2^*)$ , non é suficiente con que se cumpra  $(A_2)$ .

Vimos antes que a función  $\phi_p^{-1}(v)$  para  $1 < p < 2$  era localmente lipschitziana. Temos que ver agora que non se verifica a hipótese  $(A_2^*)$ . Para isto, chega con observar que a derivada (4.13) non está acotada cando  $v \rightarrow \infty$  cando  $p \neq 2$ . Polo que  $\phi_p^{-1}$  é lipschitziana en  $\mathbb{R}$  se e só se  $p = 2$ .

A continuación, vamos a construír uns contraexemplos nos que verificamos que o Teorema 4.12 é falso para  $p > 2$  e que a Proposición 4.10 é falsa para todo  $p \neq 2$ .

Con ese fin, sexa  $\lambda > 0$ . Defínese  $u(t, u_0)$  como a única solución do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|u'|^{p-2}u') + \lambda u &= 0, \\ u(a) &= u_0, \quad u'(a) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Seguidamente introdúcese a aplicación temporal  $T(u_0)$  definida para  $u_0 < 0$  como o número positivo máis grande tal que

$$u(t, u_0) < 0, \quad \text{para todo } t \in [a, a + T(u_0)). \quad (4.15)$$

Tendo en conta o que vimos no Capítulo 2 e seguindo uns pasos análogos aos necesarios para obter a ecuación (2.7) pode verse que, para este caso,

$$T(u_0) = \left( \frac{2(p-1)}{\lambda p} \right)^{1/p} \frac{1}{(-u_0)^{\frac{2-p}{p}}} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{p}}}.$$

Sexa agora  $p \in (1, 2)$ .

Sabemos que a aplicación temporal  $T(u_0)$  é continua, crecente e que

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} T(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0^-} T(u) = +\infty.$$

Do anterior dedúcese que para todo  $a < b$  existe un único  $u_0$  tal que  $T(u_0) = b - a$ . Pola definición de  $T$ , temos que  $u(t, u_0) < 0$  para  $t \in [a, b]$  e  $u(b, u_0) = 0$ . Seguidamente integrando a ecuación (4.14) obtemos

$$|u'(t, u_0)|^{p-2} u'(t, u_0) = -\lambda \int_a^t u(s, u_0) ds > 0 \quad \text{para todo } t \in (a, b].$$

A continuación, elixindo  $u_1 < u_0$ , suficientemente cerca de  $u_0$ , tense

$$T(u_1) < T(u_0) = b - a \quad \text{e} \quad u'(t, u_1) > 0 \quad \text{para todo } t \in (T(u_1), b].$$

Co anterior chegamos a que a función  $v(t) = v(t, u_1)$  é tal que

$$-\frac{d}{dt} (|v'(t)|^{p-2} v'(t)) - \lambda v(t) = 0 \quad \text{en } [a, b], \quad v'(a) = 0, \quad v'(b) > 0,$$

e  $v$  cambia de signo en  $[a, b]$  pois  $T(u_1) < T(u_0)$ . Contradiciendo a Proposición 4.10 dado que  $v \not\leq 0$

Para o caso  $p > 2$ ,  $T$  é decrecente en  $(-\infty, 0)$  e cúmprese que

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} T(u) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} T(u) = +\infty.$$

Neste caso, hai que considerar  $u_1 < 0$ , suficientemente cercano a 0 xa que  $T(u_1) < T(u_0)$ . Seguidamente o argumento é análogo ao indicado anteriormente tomando  $v(t) = u(t, u_1)$ . Contradiciendo de novo a Proposición 4.10. Nas figuras 4.1 e 4.2 ilústrase o comportamento da aplicación temporal  $T(u_i)$  en función do valor  $u(a) = u_i$  tanto no caso  $1 < p < 2$  como para  $p > 2$ .

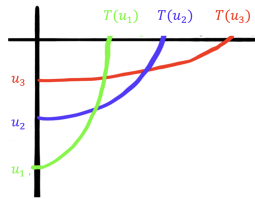


Figura 4.1: Caso  $1 < p < 2$ .

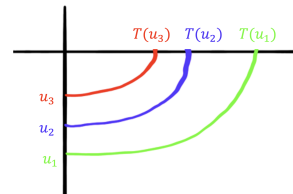


Figura 4.2: Caso  $p > 2$ .

Vexamos agora que para  $p > 2$  o Teorema 4.12 é falso. Basearémonos de novo no problema (4.14). Dados  $a, b$  e  $\lambda > 0$  fixos. Consideramos un  $u_0 < 0$  tal que  $b - a = 2 T(u_0)$ . Polo indicado anteriormente, por simetría, podemos atopar  $\hat{u} \in C^1(I)$  solución de

$$-\frac{d}{dt} (|u'(t)|^{p-2} u'(t)) - \lambda u(t) = 0, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \quad (4.16)$$

que verifique  $\hat{u}'(t) > 0$  en  $(a, b)$ ,  $\hat{u}(a) = u_0$  e  $\hat{u}(b) = -u_0$ .

Definindo  $\alpha(t) = \hat{u}(t) + v_0 - u_0$  para  $t \in [a, b]$ , con  $u_0 < v_0 < 0$  tal que  $T(v_0) \neq \frac{b-a}{2k}$  para todo  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\alpha(t)$  é unha subsolución do problema (4.16) pois

$$-\frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|^{p-2}\alpha'(t)) \leq \lambda\alpha(t), \quad \alpha'(a) = 0, \alpha'(b) = 0.$$

Por outro lado,  $\beta = v_0$  é unha sobresolución de (4.16). Sen embargo, o problema (4.16) non ten solucións no intervalo  $[\beta, \alpha]$  para  $p > 2$ . Para ver isto, sabemos que se  $u$  é unha solución do problema entón  $u'(a) = 0$  e  $u(a) = v_0$ . Polo tanto, tendo en conta a elección que  $T(v_0) \neq \frac{b-a}{2k}$  temos que  $u'(b) \neq 0$ , o que contradi as condicións de contorno.

**Aclaración:** Por un razoamento similar ao da observación anterior, pódese probar que para  $1 < p < 2$  non existe solución para o Problema (4.16) en  $[\beta, \alpha]$ , a pesar de ser  $\phi_p^{-1}$  continuamente diferenciable en  $\mathbb{R}$  e cumprirse as condicións  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  e  $(A_3)$ .

Neste caso, a pesar diso, as condicións do Teorema 4.12 non se satisfán. Probemos, en primeiro lugar, que  $f(t, u) = \lambda u$  verifica a condición  $(L)$  para todo  $M \geq \lambda$ . Así

$$\text{para todo } t \in I, \forall u, v \in [\beta(t), \alpha(t)]$$

temos que

$$\lambda u - Mu \geq \lambda v - Mv$$

se e só se

$$(\lambda - M)u \geq (\lambda - M)v$$

o que equivale a  $M \geq \lambda$ .

Por outro lado, temos que

$$T(v_0) = \left(\frac{2(p-1)}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(-v_0)^{\frac{2-p}{p}}} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{p}}}. \quad (4.17)$$

Ademais, sabemos que

$$(\phi(-v_0))' = (p-1)(-u_0)^{p-2} \geq K \text{ co cal } \left(\frac{K}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{(-v_0)^{\frac{p-2}{2}}}. \quad (4.18)$$

Usando as ecuacións (4.17) e (4.18) deducimos que

$$T(v_0) \geq \left(\frac{2(p-1)}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{K}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{p}}}.$$

Seguidamente, usando que  $T(v_0) \leq b-a$  vemos que

$$\lambda \geq K \frac{\frac{2}{p} \left(\int_0^1 \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{p}}}\right)^p}{(b-a)^p}.$$

Por último, coa axuda dalgún programa informático, pode verse que

$$\lambda \geq K \frac{\pi^2}{4(b-a)^p} \geq \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2}$$

para calquera constante  $K$  asociada ao intervalo  $[k_1, k_2]$  e á condición  $(A_2)$ .

*Observación 4.14.* O caso anterior serve de exemplo de que o Teorema 4.12 non se cumpre cando  $M \geq \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2}$ .

## 4.4. Exemplos

Deseguido mostramos dous exemplos para os cales se poden empregar os resultados probados anteriormente:.

**Exemplo 4.15.** En primeiro lugar consideremos un caso sinxelo para o que se verifiquen as hipóteses  $(A_1)$ ,  $(A_2^*)$  e  $(A_3)$  e existan unha subsolución  $\alpha$  e unha sobresolución  $\beta$  tales que  $\alpha(t) \geq \beta(t)$  para todo  $t \in I$ . Ademais comprobarase que  $f$  satisfai a condición  $(L)$  para algún  $M \in (0, K\pi^2/4(b-a)^2)$  con  $K > 0$  a constante dada en  $(A_2^*)$ . Consideremos as funcións:

$$\phi(x) = 3x \quad f(t, u) = -u \exp(t)|t|$$

Vexamos que se cumpren as hipóteses:

$(H_1)$  Compróbase trivialmente.

$(H_2^*)$  Dedúcese vendo que  $\phi^{-1}(x) = \frac{x}{3}$  é lipschitziana ( $|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y| \leq \frac{1}{3}|x - y|$ ).

$(H_3)$   $f(\cdot, u)$  é Lebesgue medible en  $I$  para cada  $u \in \mathbb{R}$  pois é continua. Ademais,  $f(t, \cdot)$  é continua en  $\mathbb{R}$  por ser produto de funcións continuas definidas nun aberto. Por último, para cada  $M > 0$  existe  $\psi_M \in L^1(I)$  tal que

$$|f(t, u)| \leq \psi_M(t) \text{ para case todo } t \in I \text{ e para todo } u \text{ con } |u| \leq M.$$

Podemos considerar  $\psi_M(t) = M|t| \exp(t)$ .

Por outro lado,  $f$  satisfai unha condición de Lipschitz unilateral xa que

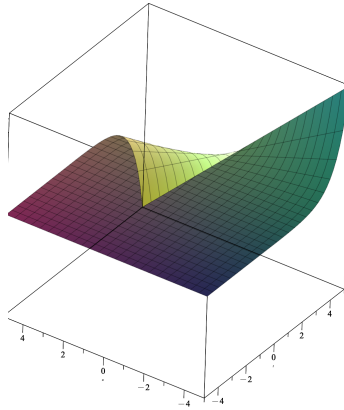
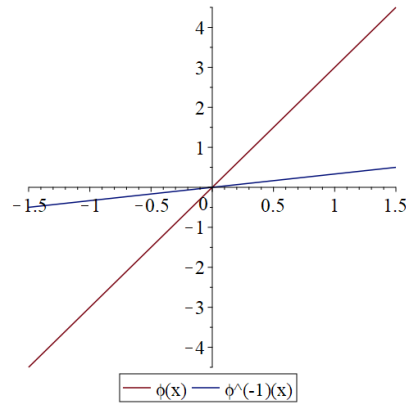
$$\begin{aligned} f(t, u) - Mu \geq f(t, v) - Mv &\iff -u \exp(t)|t| - Mu \geq -v \exp(t)|t| - Mv \\ &\iff u(|t| \exp(t) + M) \leq v(\exp(t)|t| + M) \end{aligned}$$

sempre que  $u \leq v$ ,  $u, v \in [\beta(t), \alpha(t)]$ .

Por outra banda, como subsolucion  $\alpha$  e sobresolución  $\beta$  podemos tomar  $\alpha(t) = 1$  e  $\beta(t) = -1$  debido a que:

$$0 \geq -\exp(t)|t| \quad \text{e} \quad 0 \leq \exp(t)|t|.$$

Ademais  $\alpha \geq \beta$  tal e como queríamos.

Figura 4.3: Gráfica de  $f(t, u)$ Figura 4.4: Gráfica de  $\phi(x)$ 

Nas figuras 4.3 e 4.4 vemos unha representación de  $f(t, u)$ ,  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$ .

**Exemplo 4.16.** Consideremos agora un caso no que as funcións  $\phi(x)$  e  $f(t, u)$  verifiquen as hipóteses  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  e  $(A_3)$ . Ademais, suporemos que existen unha subsolución  $\alpha$  e unha sobresolución  $\beta$  do problema (4.2) tales que  $\alpha(t) \geq \beta(t)$  para todo  $t \in I$ . Por último, necesitaremos que  $f$  satisfaga a condición  $(L)$  para algún  $M \in (0, K\pi^2/4(b-a)^2)$  con  $K > 0$  a constante dada en  $(H_2)$ .

Podemos tomar:

$$\phi(x) = x^{\frac{1}{5}} \quad \text{e} \quad f(t, u) = -t^2 \tanh u.$$

Vexamos, a continuación, que se cumpren as hipóteses:

- $(H_1)$  É trivial ver que  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é un homeomorfismo crecente (pois  $\phi'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$  e  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  xa que para  $y \in \mathbb{R}$  arbitrario podemos tomar  $x^5$ ). Ademais,  $\phi(0) = 0$ .
- $(H_2)$  Para probar esta condición basta ver que  $\phi^{-1}$  é lipschitziana para todo intervalo compacto  $[k_1, k_2]$ . Como  $\phi^{-1}$  é diferenciable chega con atopar  $K \geq 0$  tal que  $|(\phi^{-1})'(y)| \leq K$  para todo  $y$  contido nun intervalo compacto  $[k'_1, k'_2]$ . Temos que  $|(\phi^{-1})'(y)| = 5y^4 \leq 5 \max\{|k_1|, |k_2|\}$  co cal queda probada a hipótese.
- $(H_3)$   $f(\cdot, u)$  é Lebesgue medible en  $I$  para cada  $u \in \mathbb{R}$  pois é continua. Ademais,  $f(t, \cdot)$  é continua en  $\mathbb{R}$  e, para cada  $M > 0$  existe  $\psi_M \in L^1(I)$  tal que

$$|f(t, u)| \leq \psi_M(t) \quad \text{para case todo } t \in I \text{ e para todo } u \text{ con } |u| \leq M.$$

É suficiente con tomar  $\psi_M = t^2$ .

Por outro lado probaremos a condición  $(L)$ . Así

$$\begin{aligned} &\text{para todo } t \in I, \forall u, v \in [\beta(t), \alpha(t)] \quad u \leq v \implies \tanh u \leq \tanh v \\ \implies &-\tanh u \geq -\tanh v \implies -t^2 \tanh u - Mu \geq -t^2 \tanh v - Mv. \end{aligned}$$

Finalmente como subsolución  $\alpha(t)$  e sobresolución  $\beta(t)$  podemos tomar  $\alpha(t) = 1$  e  $\beta(t) = -1$  debido a que

$$0 \geq -t^2 \tanh 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq -t^2 \tanh(-1)$$

tendo que  $\alpha(t) \geq \beta(t)$  para todo  $t \in I$  tal e como queríamos.

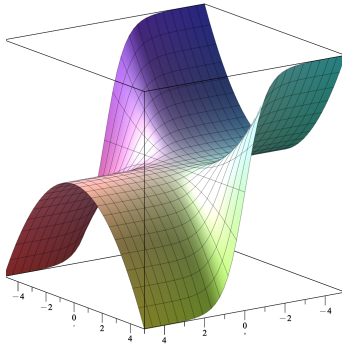


Figura 4.5: Gráfica de  $f(t, u)$

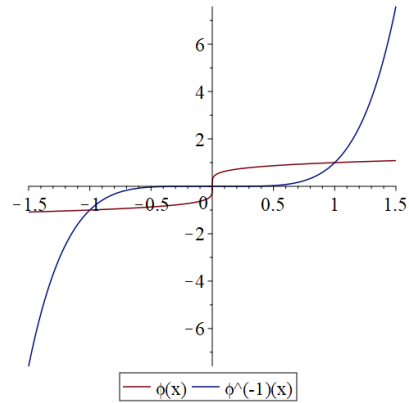


Figura 4.6: Gráfica de  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$

Nas figuras 4.5 e 4.6 vemos unha representación de  $f(t, u)$ ,  $\phi(x)$  e  $\phi^{-1}(x)$ .

## Apéndice A

# Relación entre $\nabla \cdot \mathbf{u}$ e $tr(\mathbf{D})$

**Definición A.1.** Un vector  $\mathbf{a}$  que se transforma como un vector xeométrico é chamado un vector indiferente:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{a}.$$

**Definición A.2.** Un tensor  $A$  é indiferente se se transforma ante un cambio de marco como:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{t}).$$

O requerimento de que as ecuacións constitutivas permanezan invariantes ante un cambio de marco impón unha serie de restricións.

En primeiro lugar considérese o tensor  $\sigma$ . Empregarase  $*$  para indicar os vectores e os tensores no novo sistema de referencia. Tense que:

$$dt = \sigma \cdot dS, \tag{A.1}$$

$$dt^* = \sigma^* \cdot dS^*.$$

Sabendo que o vector de área  $dS$  é indiferente porque é un vector xeométrico e postulando que o vector de estrés tamén é indiferente, tense:

$$ds^* = \mathbf{Q} \cdot dS,$$

$$dt^* = \mathbf{Q} \cdot dt. \tag{A.2}$$

Combinando as ecuacións (A.1)-(A.2) chégase a:

$$\mathbf{Q} \cdot \sigma \cdot dS = \sigma^* \cdot \mathbf{Q} \cdot dS$$

e, sabendo que se cumpre para calquera diferencial de área  $dS$  chégase a que:

$$\mathbf{Q} \cdot \sigma \cdot \mathbf{Q}^{-1} = \sigma^* = \mathbf{Q} \cdot \sigma \cdot \mathbf{Q}^T,$$

co cal se consegue ver que  $\sigma$  é un tensor indiferente.

En xeral considerarase que a definición dun tensor non depende do sistema de referencia. Tense que:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{b}^* &= \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{a}^*.\end{aligned}$$

onde ambas ecuacións definen  $\mathbf{A}$  como un operador lineal que asigna ao vector  $\mathbf{a}$  o vector  $\mathbf{b}$ . Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  son indiferentes, entón  $\mathbf{A}$  tamén é indiferente.

Obviamente, a identidade  $\mathbf{I}$  e calquera tensor isotrópico é indiferente.

Tendo o anterior en conta, é fácil comprobar que tanto o tensor  $\tau$  como o tensor de desviación  $\tau'$  son indiferentes:

$$\begin{aligned}\tau'^* &= \mathbf{Q} \cdot \tau' \cdot \mathbf{Q}^T, \\ \tau^* &= \mathbf{Q} \cdot \tau \cdot \mathbf{Q}^T.\end{aligned}$$

Considérese agora os tensores cinemáticos como o gradiente da velocidade  $\nabla \mathbf{u}$  e o tensor de estiramento  $\mathbf{D}$ . Da definición do gradiente de velocidade, séguese que:

$$\nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{u}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \mathbf{u}^* \cdot d\mathbf{X}^* = d\mathbf{u}^*.$$

Como  $d\mathbf{X}$  é un vector xeométrico, tense que é indiferente:

$$d\mathbf{X}^* = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{X}.$$

Pode verse que a regra de transformación de  $d\mathbf{u}$  vén dada por:

$$d\mathbf{u}^* = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{u} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{X}. \quad (\text{A.4})$$

Combinando as ecuacións anteriores (A.3)-(A.4) dedúcese:

$$\nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{X} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{X},$$

o cal é válido para calquera  $d\mathbf{X}$ . Así:

$$\nabla \mathbf{u}^* = \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

A ecuación anterior proba que o gradiente de velocidade non é indiferente. A transformación do vector de estiramento  $\mathbf{D}$  obtense da definición:

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{T*}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2}\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T.$$

O último termo da ecuación anterior é cero por ser a derivada temporal do tensor unidade. Por iso:

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

onde se ve que  $\mathbf{D}$  é indiferente.

Finalmente, pode deducirse que:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \nabla \mathbf{u} = \text{tr} \left[ \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] = \text{tr} \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T) = \text{tr} \mathbf{D}^*$$

# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I.A., Romer, R.H.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (1988)
- [2] Acevedo Frías, B.: *Integrales impropias*. Facultad de Administración (1994)
- [3] Acheson, D.J.: *Elementary fluid dynamics* (1991)
- [4] Al-Gwaiz, M.A.: Sturm-Liouville theory and its applications, vol. 264. Springer (2008)
- [5] Alejandro Aguilar, M.A.: *Teoremas de Schauder y Borsuk para puntos fijos y aplicaciones* (2019)
- [6] Astarita, G., Marrucci, G.: *Principles of non-Newtonian fluid mechanics* (1974)
- [7] Barnes, H.A., Hutton, J.F., Walters, K.: An introduction to rheology, vol. 3. Elsevier (1989)
- [8] Bartle, R.G.: *Introducción al análisis matemático*. Ed. Limusa, Noriega Editores (2010)
- [9] Bartle, R.G.: The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sons (2014)
- [10] Beauzamy, B.: Introduction to Banach spaces and their geometry. Elsevier (2011)
- [11] Cabada, A., Habets, P., Pouso, R.L.: *Optimal existence conditions for  $\varphi$ -Laplacian equations with upper and lower solutions in the reversed order*. Journal of Differential Equations **166**(2), 385–401 (2000)
- [12] Cabada, A., Pouso, R.L.: *Existence results for the problem  $(\varphi(u))' = f(t, u, u)$  with nonlinear boundary conditions*. Nonlinear Anal **35**(2), 221–231 (1999)
- [13] Currie, I.G.: Fundamental mechanics of fluids. CRC press (2016)
- [14] Drábek, P., Manásevich, R.: *On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with  $p$ -Laplacian* (1999)
- [15] Díez, J., Gratton, R., Gratton, J.: *Ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos* (2023). URL <https://users.exa.unicen.edu.ar/catedras/mcontin/files/capitulos/4Dinamica.pdf>. Accedido el 3 de marzo de 2023
- [16] Freiling, G., Yurko, V.A.: Inverse Sturm-Liouville problems and their applications. NOVA Science Publishers Huntington (2001)

- [17] Gao, W., Wang, J.: *On a nonlinear second order periodic boundary value problem with Carathéodory functions*. In: *Annales Polonici Mathematici*, vol. 62, pp. 283–291 (1995)
- [18] Gimeno Ortiz, S.: *Caracterización mediante reología oscilatoria del comportamiento de fluidos dilatantes*. B.s. thesis (2018)
- [19] Hurtado-Cruz, E.: *Equicontinuidad* (2018)
- [20] Ibarrola, E.L.: *Introducción a los fluidos no newtonianos*. Cátedra de Mecánica de los Fluidos-UNCOR (2009)
- [21] Ivorra Castillo, V.: *Análisis Matemático: Un enfoque de constructividad*. Universitat de València (2010). URL <https://www.uv.es/ivorra/Libros/An.pdf>
- [22] Kolmogorov, A., Fomin, S.: *Introductory Real Analysis*. Courier Corporation (1975)
- [23] Mitrinovic, D.S., Pecaric, J., Fink, A.M.: *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, vol. 53. Springer Science & Business Media (1991)
- [24] Nagle, R.K., Saff, E.B., Snider, A.D.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación (2000)
- [25] Pouso, R.L.: *Estudio de Algunos Problemas de Frontera no Lineales Unidimensionales*. Ph.D. thesis, Universidade de Santiago de Compostela (1996)
- [26] Pouso, R.L.: *Problemas de frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias discontinuas*. Ph.D. thesis, Universidade de Santiago de Compostela (1999)
- [27] Zheng, Q.S.: *Theory of representations for tensor functions—a unified invariant approach to constitutive equations* (1994)