



TESIS DE DOCTORADO

DETECCIÓN, DINÁMICA Y HABITABILIDAD DE EXOPLANETAS Y EXOSATÉLITES

Carlos Vázquez Monzón

ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

AÑO 2021





DECLARACIÓN DEL AUTOR DE LA TESIS

Detección, dinámica y habitabilidad de exoplanetas y exosatélites

Carlos Vázquez Monzón

Presento mi tesis, siguiendo el procedimiento adecuado al Reglamento, y declaro que:

- 1) *La tesis abarca los resultados de la elaboración de mi trabajo.*
- 2) *En su caso, en la tesis se hace referencia a las colaboraciones que tuvo este trabajo.*
- 3) *La tesis es la versión definitiva presentada para su defensa y coincide con la versión enviada en formato electrónico.*
- 4) *Confirmando que la tesis no incurre en ningún tipo de plagio de otros autores ni de trabajos presentados por mí para la obtención de otros títulos.*

En Santiago de Compostela, 11 de febrero de 2021



AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR / TITOR DA TESE

Detección, dinámica y habitabilidad de exoplanetas y exosatélites

Profesor Dr. D. JOSÉ ÁNGEL DOCOBO DURÁNTEZ

INFORMA:

Que a presente tese, correspóndese co traballo realizado por D. CARLOS VÁZQUEZ MONZÓN , baixo a miña dirección, e autorizo a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como director desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

En Santiago de Compostela a 11 de febreiro de 2021.





OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
RAMON MARÍA ALLER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
APLICADA

**Detección, dinámica y
habitabilidad de exoplanetas y
exosatélites**

Carlos Vázquez Monzón

Santiago de Compostela, 2021



Agradecimientos

Primero que todo, quisiera agradecer al director de esta Tesis, José Ángel Docobo Duránte, por presentarme esta oportunidad de estudiar un tema tan interesante, innovador y en boga como el de los exoplanetas/exosatélites. Su constante ayuda, a través de estos cuatro años y medio, no solo en cuestiones de Astrodinámica sino en todo lo que refiere a la escritura de la Tesis, me ha permitido crecer como investigador, desarrollar aptitudes a la hora de resolver problemas y ampliar conocimientos.

Así mismo, quiero expresar mi gratitud al personal científico del Centro de Astrobiología del Instituto Aeroespacial de Torrejón de Ardoz (CAB-INTA). Aconsejado por el profesor Docobo, realicé allí una estancia de investigación en 2019, sobre todo para profundar en la parte de habitabilidad. En especial, debo recordar a José Eduardo González Pastor, del Departamento de Evolución Molecular, por su interés en guiarme por todo el CAB y presentarme los investigadores pertinentes para aprovechar al máximo mi etapa de aprendizaje allí.

No puedo olvidarme tampoco del Instituto de Matemáticas de la USC por la beca de investigación que me concedió, y dar las gracias al Servicio de Normalización Lingüística de la misma universidad, por ayudarme a corregir el Resumen en gallego.

Por último, pero no menos importante, quiero mencionar a mi familia, amigos y demás personas allegadas, las cuales siempre mantuvieron su apoyo y me motivaron a continuar. Esta Tesis va dedicada a todos vosotros.

Como apunte final, me gustaría mandar un mensaje de ánimo a todos por el duro momento que nos ha tocado vivir a causa de la pandemia. Soy consciente de que el virus ha hecho las cosas mucho difíciles para todos, pero tengo la convicción de que saldremos adelante.

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada en el Observatorio Astronómico Ramón María Aller de la USC con la financiación de los proyectos: Estudio de binarias cerradas de especial interés astrofísico y dinámico en la era GAIA, y Ayuda para Grupos con Potencial Crecimiento, concedidos respectivamente por el Ministerio de Economía y Competitividad y la Xunta de Galicia.



ABSTRACT

This Dissertation presents the work carried out by Carlos Vazquez-Monzon under the direction of Jose Angel Docobo, Full Professor in Astronomy and Director of the Ramon Maria Aller Astronomical Observatory (OARMA) of the University of Santiago de Compostela.

In the Introduction, we explained the state of the art of the exoplanets that have been discovered to date, as well as the variety of camera+telescopes that were used in said discoveries. Given that, until this time, no exomoons have been discovered, we enumerated the principal candidates and indicated the value of all of the science applied to this current and interesting field of astronomical research. At the same time, we commented on the motivation and the objectives pursued along this Doctoral Dissertation, in addition to presenting some new results, finalizing with the structure of our research.

Chapter 0 is a section we consider to be necessary. In it, we described the methods and the mathematical models used throughout this research, which have, on one hand, allowed us to carry out all of the pertinent calculations and, on the other hand, were the basis on which numerous applications are supported. Principally, these methods included optimization algorithms, the integration of differential equations systems, methods of numerical integration of multidimensional piecewise defined functions and root-finding algorithms for polynomial functions. We also used the Fast Fourier Transform (FFT).

Two optimization algorithms were applied. One is global and is called the differential evolution algorithm. The other is called Basin-hopping and its implementation includes global and local minimization as well. We combined both algorithms in order to resolve Least Squares fitting problems in Chapter 2.

Regarding the integration of different differential equations systems we encountered, we fundamentally used the TIDES numerical integrator, a specialized software for the resolution of this type of systems when the integration time is very large and the equations are complicated. It is based on the Taylor series method, which basically consists of calculating successive derivations by the so-called **automatic differentiation** (AD).

In Chapter 1, we described the principal methods of detection of exoplanets: the radial velocity method, the transit method, the gravitational microlensing,

the direct imaging, the TTV (Transit Timing Variation), and Astrometry. Above all, we focused on the first two which are those that have yielded the best results. We assigned a mathematical model to the most important detection methods that enables the calculation of the orbital elements.

In the case of exomoons, we presented some proposed possible detection methods. Once again, the radial velocity method, the transit method, and the TTV were discussed. There are others such as the TDV (Transit Duration Variation), the plasma ring torus, and the gravitational microlensing. We also mentioned a technique used to discard false positives of exomoons that is called the centroid test. With regards to the transit method, we studied the appreciable differences in the lightcurve when a double planet, an exoplanet and an exomoon, an exoplanet whose star presents an equatorial spot, or an exoplanet with rings is transiting.

At the end of Chapter 1, we presented a Table in which the suitability of each exomoon detection method is taken into account, in addition to the different detection biases that may occur regarding its mass, radius, distance to its exoplanet, etc.

In Chapter 2, we described the process used to determine if an exoplanet or a satellite has been detected. First, we explained the so-called periodograms used to determine the set of periodicities that can be extracted from a determined signal which, in many cases, corresponds to the determination of the orbital period of the detected object. Specifically, we discussed the conventional and the Lomb-Scargle periodogram. The first is used for samples in equal time intervals while the second permits the analysis of signals in any time intervals. The use of periodograms, especially the Lomb-Scargle, determines if the received signal can or cannot be attributed to an astronomical phenomena, which is fundamental when we discuss exoplanet or exomoon detection.

Once the periodogram was applied, we used the optimization algorithms discussed in Chapter 0 by Least-Squares fitting the observations to the associated mathematical models. We focused on those models that allow us to determine the greatest number of orbital elements possible.

At the end of the Chapter, we applied all the developed theory to several examples in which the measurement uncertainties allow a correct fitting to the models and are, therefore, easily detectable exoplanets. We also presented fictitious examples with exomoons where the situation is totally ideal and no

problems with the data exist that may avoid correct detection. Unfortunately, that situation does not currently occur in reality.

The examples included the detection of exoplanet, 51 Pegasus b, by means of the radial velocity, the XO-3b exoplanet using the transit method, and two examples of TTV/TDV: one fictitious where an Earth-like exomoon induces a certain TTV/TDV on a Jupiter-like exoplanet and, the other, where the TTV is induced by the exoplanet Kepler-49c on the exoplanet Kepler-49b .

Chapter 3 treats the dynamics and the stability of the orbits of exoplanets and exomoons in diverse scenarios such as binary systems, triple stellar systems, or systems with a single star and several exoplanets. We analyzed the stability conditions and the mid and long-term variation of the orbital elements. In the “one star with only one exoplanet” scenario, we analyzed the gravitational influence of the star on the exoplanet and the exomoon and the tidal forces exerted by the exoplanet on the exomoon.

When we studied a star with various exoplanets, we have analyzed the planet-planet scattering phenomenon that arises due to the gravitational influence among the planets of the system. This may cause one of the planets to be expelled, leaving the remainder of them with excited eccentricity. In that situation, we considered the possibility of the presence of an exomoon.

In the case of a double star, there are two subcases: exoplanets with type S orbits and those with type P orbits.

A triple star presents four possible subcases. The first has exoplanets with type S1/S2 orbits, that is, exoplanets that orbit one of the two components of the inner binary. The second, S3-type orbits, has exoplanets that orbit a third star; the P1 subcase with exoplanets that orbit the center of mass of the inner binary and the P2 with planets that orbit the center of mass of the three stars.

At the end of Chapter 3, we discussed the long-term perturbations that occur in systems with exoplanets and/or exomoons when their orbits are considerably inclined with respect to the rest of the existing orbits in the system.

In Chapter 4, we focused on the habitability of both exoplanets and exomoons. We began by precisely defining what we mean by habitability. Then, we discussed the habitability zone (HZ) around a single star and a multiple stellar system. Moreover, we explained how to determine said zone according to the

spectral type or by the number of stars in the case of a multiple star system. In addition, we considered how tidal forces, as well as the gravitation of the star, influence the habitability of the object. We defined the "habitable zone" of exomoons taking into account the flux from the star and the radiation reflected by the exoplanet. We emphasized **tidal heating** and its importance in the habitability, influencing the generation of a magnetic field or the tectonic activity, and how Astrodynamics plays an important role in it.

In addition, we proposed some techniques that, in a future when we have advanced technology, will allow us to thoroughly analyze if the exoplanet or exomoon is habitable. Three features are important to examine: the characterization of atmospheres, superficial oceans, and subsurface oceans.

The atmosphere characterization is the most feasible of the three because it is already possible to detect atmospheres in hot Jupiters by means of transmission spectroscopy. We explained this technique and how, in the near future, we could detect the atmospheres of Earth-like exoplanets.

The characterization of superficial oceans is a much more difficult task, and requires much more complex techniques, all related to direct imaging. We proposed the *glint* method, which is based on the specular reflection of the light of the star on the water of the exoplanet, the rotational variability of color, and polarization.

The characterization of subsurface oceans is thought to be implemented much further in the future because it is almost completely orientated towards space exploration. We proposed certain techniques that, hopefully, will be applicable in the Solar System in the near future, such as the detection of clathrates. This kind of techniques will become useful once the analysis of exoplanets and exomoons surfaces is possible.

Lastly, we proposed the mass-radius relationship to be applied to exomoons, once we can precisely constrain their mass and radius, in order to determine their composition.

Conclusions, as well as two Appendices and the associated Bibliography, conclude this research report.

RESUMEN

Esta Tesis incluye el trabajo realizado por Carlos Vázquez Monzón bajo la dirección de José Ángel Docobo Durántez, catedrático en Astronomía y Director del Observatorio Astronómico Ramón María Aller (OARMA) de la Universidad de Santiago de Compostela.

En la Introducción, damos cuenta del estado actual de las cosas, tanto en lo que refiere a los exoplanetas descubiertos hasta la fecha como a la variedad de receptores+telescopios que dieron pie a dichos descubrimientos. También, dado que, de momento, no se ha descubierto ningún exosatélite, se enumeran los principales candidatos y se pone en valor toda la ciencia aplicada a este actual e interesante campo de investigación astronómico. Se comentan así mismo la motivación y los objetivos que se persiguen con la realización de esta Tesis Doctoral, además de presentar algunos resultados novedosos, finalizando con la estructura del trabajo llevado a cabo.

Denominamos Capítulo 0, a un apartado que consideramos necesario y en el que describimos los métodos y los modelos matemáticos utilizados a lo largo de esta Tesis, los cuales nos han permitido, por una parte, llevar a cabo todos los cálculos pertinentes, y por otra ser la base en la que se sustentan numerosas aplicaciones. Principalmente, estos métodos son algoritmos de optimización, integración de sistemas de ecuaciones diferenciales, métodos de integración numérica de funciones multidimensionales definidas a trozos y algoritmos para hallar ceros de funciones polinómicas. También nos apoyaremos puntualmente en la **transformada rápida de Fourier**.

Los algoritmos de optimización que utilizados son dos: uno global, llamado algoritmo de evolución diferencial, y otro cuya implementación incluye tanto minimización global como local, llamado Basin-hopping. Combinaremos ambos algoritmos para resolver problemas de ajuste de mínimos cuadrados en el Capítulo 2.

Con respecto a la integración de los diversos sistemas de ecuaciones diferenciales que nos encontremos, echaremos mano del software informático TIDES, un software especializado en resolver este tipo de sistemas cuando el tiempo de integración es muy grande y las ecuaciones son complicadas. Se basa en el llamado método de las series de Taylor, el cual consiste en, básicamente, calcular derivadas sucesivas, a través de la llamada **diferenciación automática** (AD).

En el Capítulo 1, hablaremos de los principales métodos de detección de los exoplanetas. En el caso de los exoplanetas, los métodos de detección desarrollados en la Tesis son: el método de velocidad radial, el método de tránsitos, la microlente gravitatoria, la imagen directa, el TTV (*Transit Timing Variation*) y la astrometría. Nos centraremos, sobre todo, en los dos métodos que mejores resultados han obtenido en la búsqueda de exoplanetas: el método de tránsitos y el método de velocidad radial. A los métodos de detección más importantes le asignaremos un **modelo matemático** que permita calcular sus elementos orbitales.

En el caso de los exosatélites, dado que todavía no se ha confirmado la detección de ninguno, se expone algunos métodos propuestos para su detección futura. Los métodos propuestos son: el método de velocidad radial, el método de tránsitos, el TTV y el TDV (*Transit Duration Variation*), el toro de plasma y la microlente gravitatoria. También se menciona una técnica que sirve para descartar falsos positivos de exosatélites, el llamado test del centroide. Con respecto al método de tránsitos, estudiaremos las diferencias apreciables en la curva de luz cuando transita un planeta doble, un exoplaneta + exosatélite, un exoplaneta cuya estrella presenta una mancha ecuatorial o un exoplaneta con anillos.

Al final del Capítulo, presentamos una tabla donde se esquematiza si es posible la detección para cada método de detección propuesto para los exosatélites, además de los distintos sesgos de detección que pueden sufrir en base a su masa, radio, distancia con respecto al exoplaneta, etc.

En el Capítulo 2, describiremos el proceso por el cual se determina si un exoplaneta o exosatélite ha sido detectado. En la Sección primera, estudiaremos los llamados *periodogramas*, los cuales se utilizan para determinar el conjunto de periodicidades que se puede extraer de una determinada señal, lo que se traduce, en muchos casos, en la determinación del periodo del exoplaneta y exosatélite. Los periodogramas que trataremos son el periodograma convencional y el periodograma Lomb-Scargle. El primero se utiliza para muestras muestreadas en intervalos de tiempo iguales, mientras que el segundo permite analizar señales muestreadas en intervalos de tiempo cualesquiera. La utilización de los periodogramas, sobre todo del Lomb-Scargle, nos servirá para determinar si la señal que estamos recibiendo se puede achacar a un fenómeno Astronómico o no y es, por tanto, fundamental a la hora de hablar de la detección de exoplanetas y exosatélites.

Una vez aplicado el periodograma, utilizaremos los algoritmos de optimización descritos en el Capítulo 0 para realizar un ajuste de mínimos cuadrados de las observaciones a los modelos matemáticos que hemos asociado, en el capítulo 1, a cada método de detección. Nos centraremos, sobre todo, en aquellos modelos que nos permitan determinar el mayor número de elementos orbitales posible.

En la Sección final del Capítulo, aplicaremos toda la teoría desarrollada a unos cuantos ejemplos en los cuales las incertidumbres en las mediciones permiten un correcto ajuste a los modelos, y son por ende exoplanetas fácilmente detectables. También trataremos ejemplos ficticios con exosatélites donde la situación es totalmente ideal y no existe ningún tipo de problema en los datos que impida su correcta detección (algo que, desgraciadamente, no ocurre en la vida real). Los ejemplos son: detección del exoplaneta 51 Pegasi b por medio de la velocidad radial, el sistema planetario múltiple en torno a HD 37124 por medio de la velocidad radial, el exoplaneta XO-3b por medio del método de tránsitos, un sistema exoplaneta+exosatélite ficticio por el método de tránsitos y, finalmente, dos ejemplos de TTV/TDV: uno ficticio, donde un exosatélite tipo Tierra provoca un cierto TTV/TDV sobre un exoplaneta tipo Júpiter y, el otro, el TTV provocado por un exoplaneta, Kepler-49c, sobre otro exoplaneta, Kepler-49b.

El Capítulo 3 trata sobre la **dinámica** y la **estabilidad** de los exoplanetas/exosatélites en diversos sistemas estelares, tales como los sistemas de binarias, los sistemas estelares triples o los sistemas de una sola estrella con varios exoplanetas. Analizaremos qué órbitas son más estables y cómo varían sus elementos orbitales, tanto a medio como a largo plazo.

En el caso donde tenemos una estrella con un solo exoplaneta, analizaremos, por un lado, la influencia gravitatoria de la estrella sobre el exoplaneta y el exosatélite y, por otro lado, las fuerzas de marea que ejerce el exoplaneta sobre el exosatélite.

En el caso donde tenemos una estrella con varios exoplanetas, analizaremos el fenómeno llamado *planet-planet scattering*, el cual surge a causa de la influencia gravitatoria de los exoplanetas del sistema entre ellos mismos, y que puede hacer que alguno de ellos sea expulsado del sistema, dejando a los demás con una excentricidad excitada. Estudiaremos si es posible la presencia de un exosatélite allí.

En el caso de un sistema de binarias, trataremos dos subcasos: los exoplanetas con órbitas tipo S y tipo P.

En el caso de una estrella triple, trataremos 4 subcasos: exoplanetas con órbitas tipo S1/S2, es decir, exoplanetas que orbitan una de las dos componentes de la binaria interior; S3, exoplanetas que orbitan la tercera estrella, P1, exoplanetas que orbitan el centro de masas de la binaria interior y P2, exoplanetas que orbitan el centro de masas de las tres estrellas.

En la última Sección del Capítulo, hablaremos de las perturbaciones a largo plazo que tienen lugar en sistemas con exoplanetas y exosatélites cuando sus órbitas se encuentran considerablemente inclinadas con respecto al resto de cuerpos de dichos sistemas.

Finalmente, en el Capítulo 4 se hablará de la **habitabilidad** de exoplanetas y exosatélites. A modo de Sección introductoria, definiremos lo que entendemos por *habitabilidad*. A continuación, hablaremos de la *zona habitable* de una estrella o sistema estelar como la región alrededor de la cual un exoplaneta cumple los requisitos de habitabilidad. Explicaremos cómo calcularla según su tipo espectral o según el número de estrellas, si consideramos un sistema estelar múltiple.

Estudiaremos, además, cómo las fuerzas de marea, así como la influencia gravitatoria de la estrella, influye en la habitabilidad de un exosatélite. Definiremos una “zona habitable” para exosatélites, que tiene en cuenta, además del flujo proveniente de la estrella, la radiación reflejada por el exoplaneta. Haremos gran énfasis en el **calentamiento de marea**, describiendo su gran importancia en la habitabilidad del exosatélite, por su implicación tanto en la generación de un campo magnético como en la actividad tectónica, y cómo la Astrodinámica influye sobre él.

Finalmente, propondremos tres técnicas para que, en un futuro donde la tecnología avance lo suficiente, podamos analizar mucho más en profundidad si un exoplaneta/exosatélite es habitable, por medio de tres factores: caracterización de **atmósferas**, de **océanos superficiales** y de **océanos interiores**.

La caracterización de atmósferas es la técnica más factible de las tres, puesto que, a día de hoy, ya es posible la detección de atmósferas en exoplanetas, por medio de la llamada **espectroscopía de transmisión**. Estudiaremos es-

ta técnica y cómo, en un futuro cercano, podrá hacer posible la detección de atmósferas de exoplanetas tipo Tierra.

La caracterización de océanos superficiales es mucho más difícil, y requiere de técnicas más complejas, todas relacionadas con la imagen directa. Las técnicas que proponemos son: *Glint* basado en la reflexión especular de la luz de la estrella sobre el agua del exoplaneta, variabilidad rotacional del color y polarización.

La caracterización de océanos interiores es un objetivo mucho más lejano que los otros dos, puesto que está casi completamente orientado a la exploración espacial. Proponemos aquí ciertas técnicas aplicables en el Sistema Solar, como la detección de **clatratos** analizando la superficie de exoplanetas/exosatélites.

Por último, proponemos la relación masa-radio aplicada a exosatélites para que, en un futuro donde sea posible la determinación de ambos con precisión, podamos determinar su composición.

Todo este trabajo de investigación va acompañado de las respectivas Conclusiones, además de dos apéndices y la Bibliografía consultada.



RESUMO

Esta Tese inclúe o traballo realizado por Carlos Vázquez Monzón baixo a dirección de José Ángel Docobo Durántez, catedrático en Astronomía e director do Observatorio Astronómico Ramón María Aller (OARMA) da Universidade de Santiago de Compostela.

Na Introdución dámos conta do estado actual das cousas, tanto no que atinxe aos exoplanetas descubertos ata hoxe como á variedade de receptores+telescopios que deron pé aos ditos descubrimentos. Tamén, dado que de momento non se descubriu ningún exosatélite, enuméranse os principais candidatos e ponse en valor toda a ciencia aplicada a esta actual e interesante liña de investigación astronómica. Coméntanse así mesmo a motivación e os obxectivos que se perseguen coa realización desta tese de doutoramento, ademais de presentar algúns resultados novidosos, finalizando coa estrutura do traballo desenvolvido.

Denominamos Capítulo 0, a un apartado que consideramos necesario e no que describimos os métodos e mais os modelos matemáticos utilizados ao longo deste traballo, os cales nos permitiron, por unha banda, levar a cabo todos os cálculos pertinentes, e por outra, ser a base na que se sustentan numerosas aplicacións. Principalmente, estes métodos son algoritmos de optimización, integración de sistemas de ecuacións diferenciais, métodos de integración numérica de funcións multidimensionais definidas a cachos e algoritmos para atopar ceros de funcións polinómicas. Tamén nos apoiaremos puntualmente na transformada rápida de Fourier.

Os algoritmos de optimización utilizados son dous: un global, chamado algoritmo de evolución diferencial, e outro cuxa implementación inclúe tanto minimización global como local, chamado Basin-hopping. Combinaremos ambos os dous algoritmos para resolver problemas de axuste de mínimos cadrados no Capítulo 2.

Con respecto á integración dos diversos sistemas de ecuacións diferenciais cos que nos atopamos, utilizamos fundamentalmente o integrador numérico TIDES, un software especializado en resolver este tipo de sistemas cando o tempo de integración é moi grande e as ecuacións son complicadas. Baséase no método das series de Taylor, o cal consiste en, basicamente, calcular derivadas sucesivas, a través da chamada diferenciación automática.

No Capítulo 1, describimos os principais métodos de detección de exoplanetas: o método de velocidade radial, o de tránsitos, a microlente gravitatoria, a imaxe directa, o TTV (Transit Timing Variation) e a astrometría. Centrarémonos, sobre todo, nos dous primeiros, que foron os que mellores resultados deron. A estes métodos de detección máis importantes asignarémolles un modelo matemático que permite calcular os elementos orbitais.

No caso dos exosatélites, expóñense algúns métodos propostos para a súa posible detección. De novo o método de velocidade radial, o método de tránsitos e o TTV, pero tamén outros como o TDV (Transit Duration Variation), o touro de plasma e a microlente gravitatoria. Por outra banda, mencionamos unha técnica que serve para descartar falsos positivos de exosatélites, o denominado test do centroide. Con respecto ao método de tránsitos, estudamos as diferenzas apreciables na curva de luz cando quen transita e un planeta dobre, ou un exoplaneta + exosatélite, ou un exoplaneta cuxa estrela presenta unha mancha ecuatorial, ou un exoplaneta con aneis. Ao final do Capítulo, presentamos unha táboa onde se esquematiza a idoneidade de cada método para a detección de exosatélites, ademais dos distintos nesgos de detección que poden sufrir en base a súa masa, radio, distancia do seu exoplaneta, etc.

No Capítulo 2 describímo-lo proceso polo cal se determina se un exoplaneta ou exosatélite foi detectado. Na sección primeira, estúdanse os chamados periodogramas, os cales se utilizan para determinar o conxunto de periodicidades que se pode extraer dun determinado sinal, o que se traduce, en moitos casos, na determinación do período do exoplaneta(s) e exosatélite(s). Os periodogramas que trataremos son o convencional e mais o de Lomb-Scargle. O primeiro utilízase para mostras en intervalos de tempo iguais, mentras que o segundo permite analizar sinais en calquera intervalo de tempo. A utilización dos periodogramas, sobre todo o de Lomb-Scargle, servirá para determinar se o sinal que estamos recibindo se pode achacar a un fenómeno astronómico ou non, e é, polo tanto, fundamental á hora de falar da detección de exoplanetas e exosatélites.

Unha vez aplicado o periodograma, utilizamos os algoritmos de optimización descritos no Capítulo 0 para realizar un axuste de mínimos cadrados das observacións aos modelos matemáticos que lles asociamos. Centrarémonos, sobre todo, naqueles modelos que nos permitan determinar o meirande número de elementos orbitais posible.

Na sección final deste Capítulo aplicamos toda a teoría desenvolvida a varios exemplos nos cales as incertezas nas medicións permiten un correcto axuste aos modelos, e son polo tanto exoplanetas facilmente detectables. Tamén trataremos exemplos ficticios con exosatélites nos que a situación é totalmente ideal e non existe ningún tipo de problema nos datos que impida a súa correcta detección (algo que, desgraciadamente, non ocorre na realidade). Os exemplos son: detección do exoplaneta 51 Pegasi b por medio da velocidade radial, o sistema planetario múltiple en torno a HD 37124 por medio da velocidade radial, o exoplaneta XO-3b por medio do método de tránsitos, un sistema exoplaneta+exosatélite ficticio polo método de tránsitos e, finalmente, dous exemplos de TTV/TDV: un deles ficticio, en que un exosatélite tipo Terra provoca un certo TTV/TDV sobre un exoplaneta tipo Xúpiter e, o outro, o TTV provocado polo exoplaneta Kepler-49c sobre o exoplaneta, Kepler-49b.

O Capítulo 3 trata sobre a dinámica e a estabilidade das órbitas de exoplanetas e exosatélites en diversos escenarios, tales como sistemas binarios, sistemas estelares triplos ou sistemas cunha soa estrela e varios exoplanetas. Analizaremos as condicións de estabilidade e como varían os elementos orbitais, tanto a medio como a longo prazo.

Se temos unha estrela cun só exoplaneta, analizaremos, por un lado, a influencia gravitatoria da estrela sobre o exoplaneta e o exosatélite e, por outra banda, as forzas de marea que exerce o exoplaneta sobre o exosatélite.

Cando tratamos unha estrela con varios exoplanetas, analizamos fenómeno planet-planet scattering, o cal xorde a causa da influencia gravitatoria dos exoplanetas do sistema entre eles mesmos, e que pode facer que algún deles sexa expulsado do sistema, deixando aos demais cunha excentricidade excitada. Estudaremos se é posible a presenza dun exosatélite en tal situación. No caso de estrelas dobres, trataremos dous subcasos: os exoplanetas con órbitas tipo S, e tipo P.

No caso dunha estrela tripla, trataremos 4 subcasos: exoplanetas con órbitas tipo S1/S2, é dicir, exoplanetas que orbitan unha das dúas compoñentes da binaria interior; S3, exoplanetas que orbitan a terceira estrela, P1, exoplanetas que orbitan o centro de masas da binaria interior e P2, exoplanetas que orbitan o centro de masas das tres estrelas.

Na última sección deste Capítulo 3, analizamos as perturbacións a longo prazo que teñen lugar en sistemas con exoplanetas e exosatélites cando as súas

órbitas se atopan considerablemente inclinadas con respecto ás demais órbitas existentes no sistema, estudando as variacións que sofren os chamados ciclos de Lidov-Kozai.

Finalmente, o Capítulo 4 dedicámolo á habitabilidade tanto de exoplanetas como de exosatélites. A modo de sección introdutoria, definimos con precisión o que se entende por habitabilidade para, a continuación, falar da denominada zona habitable en torno a unha estrela ou sistema estelar. Explicaremos como determinala segundo o seu tipo espectral ou o número de estrelas, no caso dun sistema estelar múltiple.

Consideraremos, ademais, como as forzas de marea, así como a gravitación da estrela, inflúen na habitabilidade dun exosatélite. Definimos unha “zona habitable” para exosatélites, que ten en conta, ademais do fluxo proveniente da estrela, a radiación reflectida polo exoplaneta, e faremos especial énfase no quecemento de marea, describindo a súa grande importancia na habitabilidade dos exosatélites, pola súa implicación tanto na xeración dun campo magnético como na actividade tectónica, e como a astrodinámica inflúe sobre el.

Por outra banda, propoñemos técnicas para que, nun futuro, cando a tecnoloxía teña avanzado o suficiente, poidamos analizar moito máis en profundidade se un exoplaneta/exosatélite é habitable, por medio de tres factores: caracterización das súas atmosferas, dos seus océanos superficiais e dos seus océanos interiores.

A caracterización de atmosferas é a técnica máis factible das tres, xa que logo, a día de hoxe, xa é posible a detección de atmosferas en exoplanetas, por medio da espectroscopía de transmisión. Estudamos esta técnica e como, nun futuro próximo, poderá ser posible a detección de atmosferas de exoplanetas tipo Terra.

A caracterización de océanos superficiais é moito máis difícil, e require de técnicas máis complexas, todas elas relacionadas coa imaxe directa. As técnicas que propoñemos son: Glint baseado na reflexión especular da luz da estrela sobre a auga do exoplaneta, variabilidade rotacional da cor, e polarización.

A caracterización de océanos interiores é un obxectivo moito máis afastado que os outros dous, xa que logo está case que completamente orientado á exploración espacial. Propoñemos aquí certas técnicas aplicables no Sistema Solar, como a detección de clatratos, para cando sexa posible a análise da su-

perficie de exoplanetas/exosatélites.

Por último, propoñemos a relación masa-radio aplicada a exosatélites para que, no futuro, a partir dela, se poida determinar a súa composición.

Todo este traballo de investigación vai acompañado das respectivas Conclusións, ademais de dous Apéndices e a Bibliografía consultada.





Índice general

Agradecimientos	III
Abstract	v
Resumen	IX
Resumo	XV
Introducción	1
Antecedentes históricos del descubrimiento de exoplanetas y exosatélites	3
Candidatos a exosatélites	9
Motivación/Objetivos de la Tesis	14
Estructura de la Tesis	15
0. Métodos matemáticos utilizados en la Tesis	19
0.1. TIDES	19
0.2. Método de Laguerre	21
0.3. Algoritmos de optimización	22
0.3.1. Algoritmo de evolución diferencial	22
0.3.2. Algoritmo Basin-hopping	23
0.4. Integración numérica de funciones multidimensionales definidas a trozos	24
0.5. Transformada rápida de Fourier (<i>FFT</i>)	25
1. Métodos de detección de exoplanetas y exosatélites	27
1.1. Métodos de detección de exoplanetas	27
1.1.1. Velocidad radial	28
1.1.2. Tránsitos	34

1.1.3.	Micro lente gravitatoria	39
1.1.4.	Imagen directa	50
1.1.5.	TTV	54
1.1.6.	Astrometría	58
1.1.7.	Otros métodos (polarimetría, timing...)	60
1.2.	Métodos de detección de exosatélites (o <i>exomoons</i>)	63
1.2.1.	Velocidad radial	63
1.2.2.	Tránsitos	66
1.2.3.	TTV y TDV	73
1.2.4.	Test del centroide	78
1.2.5.	Toro de plasma	82
1.2.6.	Timing del púlsar	86
1.2.7.	Micro lente gravitatoria	88
1.3.	Comentarios al Capítulo 1	94
2.	Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales	95
2.1.	El periodograma	96
2.1.1.	Periodograma clásico	96
2.1.2.	Periodograma Lomb-Scargle	98
2.2.	Ajuste de datos al modelo	99
2.2.1.	Inicio del ajuste. Optimizador global	100
2.2.2.	Mejora del ajuste. Optimizador local-global.	101
2.2.3.	Estimación del error de los parámetros	102
2.3.	Detección y cálculo de elementos orbitales para varios ejemplos	103
2.3.1.	Velocidad radial	103
2.3.2.	Tránsitos	110
2.3.3.	TTV/TDV	117
2.4.	Comentarios al Capítulo 2	132
3.	Dinámica y estabilidad	133
3.1.	Sistemas de una estrella con un planeta	134
3.1.1.	Perturbación gravitatoria de la estrella sobre un satélite puntual	134
3.1.2.	Fuerzas de marea (cuerpos no puntuales)	137
3.2.	Sistemas de una estrella con dos planetas	145
3.3.	Sistemas de 2 estrellas	153
3.3.1.	Planeta con órbita tipo S	154
3.3.2.	Planeta con órbita tipo P (o <i>circumbinario</i>)	159
3.4.	Sistemas de 3 estrellas	165

Índice general

3.4.1. Planeta con órbita S1/S2	168
3.4.2. Planeta con órbita S3	173
3.4.3. Planeta con órbita P1	178
3.4.4. Planeta con órbita P2 (o <i>circumtriple</i>)	183
3.5. Sistemas de ≥ 4 estrellas	189
3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas	189
3.6.1. Caso del exoplaneta	190
3.6.2. Caso del exosatélite	196
3.7. Comentarios al Capítulo 3	219
4. Habitabilidad	221
4.1. Definición de <i>habitabilidad</i>	222
4.2. Zona habitable (HZ)	223
4.2.1. Límites de la zona habitable: límite interior (IHZ) y exterior (OHZ)	223
4.2.2. Zona habitable para estrellas de la secuencia principal	229
4.2.3. Zona habitable para sistemas estelares múltiples	230
4.3. Habitabilidad de un exosatélite	237
4.3.1. Zona habitable para exosatélites	237
4.3.2. Calentamiento de marea	238
4.3.3. Campo magnético	244
4.4. Técnicas para la búsqueda de vida en exoplanetas/exosatélites	246
4.4.1. Caracterización de océanos	246
4.4.2. Caracterización de atmósferas	252
4.4.3. Caracterización de océanos interiores	267
4.4.4. Relación masa-radio	272
4.5. Comentarios al Capítulo 4	277
Conclusiones	279
Bibliografía	283
Apéndice A. Resultados del problema de los 2 cuerpos	345
Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis	351



Introducción

El descubrimiento de planetas en torno a otras estrellas distintas del Sol (**exoplanetas**) se encuentra en continua expansión. Desde 2015 hasta hoy el número de exoplanetas se ha multiplicado por más de 2: de 2000 a casi 4500. La población de exoplanetas descubiertos es diversa: desde exoplanetas fríos como OGLE-2005-BLG-390Lb (-220°C ; [Beaulieu et al. 2006](#)) hasta calientes como KELT-9b (4050 K; [Gaudi et al. 2017](#)), o del tamaño de la Luna como Kepler-37b ([Marcy et al. 2014](#)) hasta exoplanetas dos veces más grandes que Júpiter, como HAT-P-67 b ([Zhou et al. 2017](#)). El estudio de los exoplanetas constituye, hoy en día, una pujante línea de investigación, tanto en el ámbito astrofísico como en el astrobiológico y astrodinámico.

En los primeros años (finales del siglo pasado), los instrumentos principales para el descubrimiento de exoplanetas fueron los espectrómetros HIRES ([Vogt et al. 1994](#)) y HARPS ([Pepe et al. 2000](#)), ambos capaces de medir **velocidades radiales** (Sección 1.1.1) del orden de 1 m/s, estando ubicados en los observatorios Keck (Hawái) y La Silla (Chile), respectivamente. Actualmente, receptores como ESPRESSO ([Pepe et al. 2010](#)) o CARMENES ([Quirrenbach et al. 2016](#)) llevan a cabo **espectroscopía Doppler** de gran precisión, lo que permite detectar un gran número de exoplanetas con el método de la velocidad radial. De hecho, este procedimiento ha resultado ser bastante fructífero, y que con él se han descubierto 793 exoplanetas.

A mediados de la primera década de este siglo, se llevó a cabo la misión espacial europea CoRoT (*Centre National d'Études Spatiales*) ([Rouan et al., 1998](#); [Borde et al. 2003](#); [Moutou et al. 2013](#)), la cual utilizaba una técnica por aquel entonces novedosa en el campo del descubrimiento extrasolar: el **método de tránsitos** (Sección 1.1.2). La misión finalizó en 2014 (https://corot.cnes.fr/en/COROT/GP_actualite.htm). Poco tiempo después del lanzamiento de CoRoT, surgieron los programas WASP (*Wide Angle*

Search for Planets; Pollacco et al. 2006) y HATNET¹ (*Hungarian Automated Telescope NETWORK*; Bakos et al. 2004, 2013), ambos dedicados a descubrir exoplanetas también con el método de tránsitos, estando todavía activos.

Con el lanzamiento del telescopio Kepler en 2010, se produjo un punto de inflexión en la historia del descubrimiento de exoplanetas, debido en parte a su potentísima precisión fotométrica, pudiendo llegar a detectar un cambio en el flujo estelar de la estrella de $\sim 0,0023$ milésimas de magnitud (<https://keplergo.arc.nasa.gov/CalibrationSN.shtml>), y al amplio seguimiento de 150.000 estrellas (Borucki et al. 2010). Las misiones Kepler y K2 (Howell et al. 2014) han sido enormemente exitosas, habiendo descubierto un total de 2347 exoplanetas confirmados y 2420 candidatos mediante el método de tránsitos. En 2018, estas misiones llegaron a su fin.

En ese mismo año, el telescopio *TESS* tomó el relevo de Kepler y ya ha detectado 98 planetas además de otros 2453 que están por confirmar, todo ello en poco más de dos años. Se espera que *TESS* obtenga incluso mejores resultados que Kepler, debido al seguimiento de un mayor número de estrellas (200.000; <https://solarsystem.nasa.gov/resources/890/tess-200000-stars/>), las cuales son de 10 a 100 veces más brillantes que las estudiadas por Kepler (Ricker et al. 2016).

El futuro de la exploración de exoplanetas promete grandes descubrimientos, gracias, sobre todo, al telescopio espacial **James Webb** (JWST). Destinado a convertirse en el sucesor del telescopio Hubble, se espera su activación para octubre de 2021 (https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/James_Webb_Space_Telescope_to_launch_in_October_2021). Entre muchas otras capacidades, podrá llevar a cabo espectroscopía con una precisión sin precedentes, lo que permitirá estudiar, como nunca antes, la atmósfera de los exoplanetas (véase Sección 4.4.2). Además, consta de una considerable apertura de $6,5^2$ m (por ejemplo, Clampin 2010), lo que podría permitir visualizar exoplanetas, presumiblemente, del tamaño de la Tierra, a través de su **imagen directa** (Sección 1.1.4), algo que no se ha logrado nunca antes (Soummer et al. 2010). Si esto fuera posible podríamos, en teoría, determinar si dichos exoplanetas poseen océanos o no (véase la Sección 4.4.1), lo cual haría muchísimo más fácil el estudio de su **habitabilidad**.

¹La misión HATNET en realidad se inició antes que CoRoT, en 2003, pero no fue hasta 2006 cuando descubrió el primer exoplaneta, HAT-P-1b (Bakos et al. 2007).

²Compárese con el Hubble, el cual posee una apertura de “tan solo” 2,4 m.

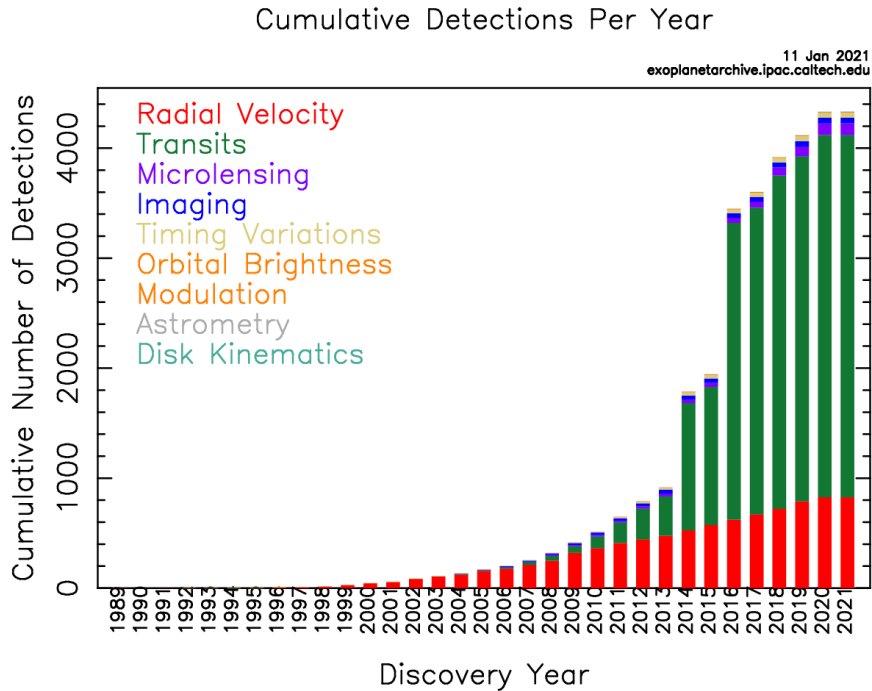


Figura 1: Número acumulativo de exoplanetas detectados por año. Cada color representa un método de detección diferente. Crédito a [NASA Exoplanet Archive](https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu).

Antecedentes históricos del descubrimiento de exoplanetas y exosatélites

A pesar de que el descubrimiento de exoplanetas tiene apenas 25 años de historia, su detección no fue casual sino que fue la culminación de varios años de observación astronómica y de la mejora en la precisión del instrumental utilizado (espectrómetros, espectrógrafos, interferómetros, fotómetros, cámaras CCD...). A continuación se describen algunos antecedentes que propiciaron el descubrimiento del primer exoplaneta, además de varios ejemplos de exoplanetas importantes.

- En 1855, Jacob estudió la órbita de la estrella binaria 70 Ophiuchi mediante cálculos astrométricos y llegó a la conclusión de que habían ciertas anomalías entre las observaciones y las posiciones esperadas, lo que hacía la presencia de un tercer cuerpo algo, según sus propias palabras, “altamente

Sección 0.0. Antecedentes históricos del descubrimiento de exoplanetas y exosatélites

probable” (Jacob 1855). Hoy en día se sabe que dichos cálculos no pasarían los test estadísticos pertinentes. La presencia de un cuerpo planetario se supone, en definitiva, descartada (Heintz 1988).

- En 1991 se creyó que existía un planeta orbitando el púlsar PSR B1829-10 (Bailes et al. 1991), pero en 1992 se descartó su existencia (Lyne & Bailes 1992).

- Al año siguiente, Wolszczan y Frail, estudiando las variaciones de las señales recibidas, descubrieron un sistema planetario alrededor del púlsar PSR B1257+12 (Wolszczan & Frail 1992). Esta se considera la primera vez que se detecta un exoplaneta de manera inequívoca.

- En el año 1995 la precisión de los espectrógrafos era tal que se podía detectar variaciones en el movimiento de las estrellas producido por la presencia de un cuerpo ligado gravitacionalmente a él (lo que produce variaciones en su velocidad radial) del orden de 15 m s^{-1} , lo que permitió a Mayor y a Queloz descubrir un planeta orbitando una estrella de la secuencia principal, 51 Peg (Mayor & Queloz 1995). Este hallazgo fue un hito en el estudio de los exoplanetas y fue reconocido con el Premio Nobel de Física en 2019.

- A partir del año 1995 el método de velocidad radial se convirtió el mejor y más fiable para detectar exoplanetas, hasta que en 1999 David Charbonneau et al. (1999) y Henry et al. (1999) hallaron una “caída de luz” estudiando la fotometría de la estrella enana de tipo G HD 209458, tras varios intentos fallidos de buscar caídas de esa naturaleza en estrellas tipo 51 Peg (Henry et al. 1997; Baliunas et al. 1997; etc.). Dicha caída de luz se produce por el tránsito del planeta entre la estrella y nuestra línea de observación, por lo que se le conoce como **método de tránsitos**. Este técnica, como ya veremos, tiene ciertas ventajas que el de la velocidad radial no posee, como por ejemplo poder calcular la inclinación de la órbita.

- El año siguiente, se descubriría el primer exoplaneta en un sistema estelar triple, 16 Cygni Bb (Cochran et al. 1997). Se cree que su gran excentricidad (0,67) es causada por la acción gravitatoria del resto de estrellas del sistema, sobre todo de 16 Cygni A (Holman et al. 1997).

- En 1999 se descubrió el primer sistema planetario múltiple en v Andromedae, por el método de tránsitos (Butler et al. 1999).

Estas dos técnicas, la de velocidad radial y la de tránsitos eran ya utilizadas

Introducción

desde un siglo atrás en el descubrimiento y posterior seguimiento de estrellas binarias, binarias espectroscópicas en el primer caso y binarias eclipsantes en el segundo. Su aplicación a la detección de exosatélites hubo de esperar el tiempo necesario para que la instrumentación correspondiente alcanzase la precisión y sensibilidad necesarias.

- Ya en este siglo, fue descubierto, por el método de velocidad radial (Santos et al. 2001), el primer exoplaneta cuya órbita cae completamente dentro de la **zona habitable** (ver Sección 4.2) de una estrella, HD 28185 b.

También en 2001 se detectó, por primera vez, la atmósfera de un exoplaneta, en torno al exoplaneta HD 209458 b (Charbonneau et al. 2002), analizando su **espectroscopía de transmisión** (Sección 4.4.2.2).

- PSR B1620-26b, el primer planeta con órbita circumbinaria, es decir, que se mueve en torno al centro de masas de una binaria y alrededor de ambas componentes, fue descubierto en 1993 (Backer et al. 1993) pero no fue confirmado hasta diez años más tarde (Sigurdsson et al. 2003). Dichos planetas se dice que tienen una órbita **tipo P**, frente a los que orbitan una sola componente de la binaria (**tipo S**) (Dvorak 1982, 1984, 1986). Los exoplanetas descubiertos con órbita tipo S son mucho más frecuentes, quizás debido a que las técnicas observacionales no favorecen especialmente la detección de órbitas tipo P (Campo 2019; Muñoz & Lai 2015) ya que de otro modo no se explica que, en teoría, ambos tipos de órbitas reúnan condiciones favorables para la formación planetaria (Alexander 2012; Vartanyan et al. 2016).

- En 2006 fue descubierto el exoplaneta con la órbita más excéntrica, HD 20782 b, con una excentricidad de 0,92, que en 2009 sería actualizada a 0,97 (Jones et al. 2006; O'Toole et al. 2009).

- Al año siguiente, fue descubierta, por el método de velocidad radial, la primera super-Tierra dentro de la zona habitable de su estrella, Gliese 581 c. Definimos las super-Tierras como exoplanetas de masa comprendida entre una y diez masas terrestres, según los modelos de Valencia et al. (2006) y Fortney (2006).

- En 2012, se detectaron dos exoplanetas, Kepler-42 b y Kepler-42 c, en órbita tipo P en torno a la binaria Kepler-42. Este no solo fue el primer sistema planetario múltiple descubierto en torno a una binaria, sino que demostró que este tipo de sistemas era posible, incluso teniendo órbitas muy cercanas, con

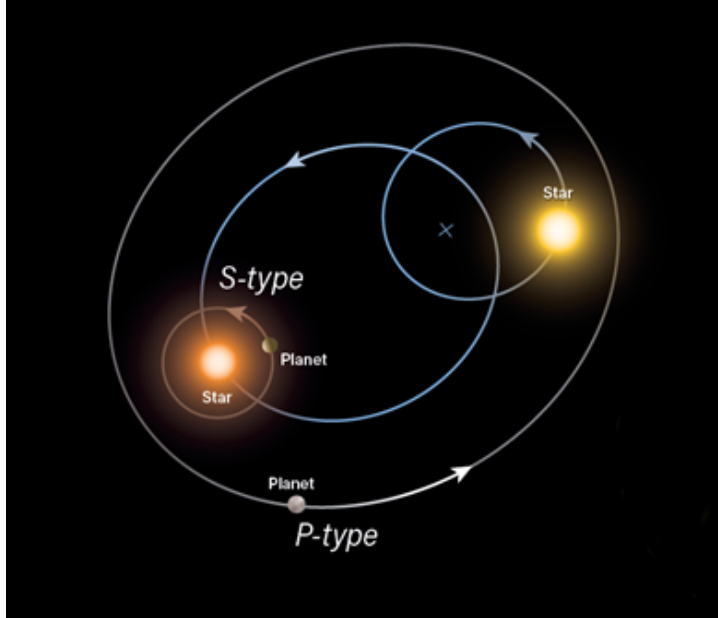


Figura 2: Ilustración de las órbitas tipo P y tipo S. Imagen adaptada de *Astronomy Magazine*. Autora: Roen Kelly.

semiejes respecto al centro de masas de la binaria de 0,3 y 0,99 u.a., respectivamente (Orosz et al. 2012b). En 2019, se descubriría un tercer exoplaneta en este sistema (Orosz et al. 2019).

- En 2016 la NASA dio cuenta de la existencia de siete planetas alrededor de la estrella TRAPPIST-1, lo que le convirtió en el sistema planetario con mayor número de planetas hasta la fecha, junto con HD 10180 (también con siete planetas confirmados) (Tuomi 2012). Esto demostró que era posible detectar sistemas planetarios con características de alguna manera similares a nuestro Sistema Solar; sin embargo, hay ciertas diferencias importantes, por ejemplo TRAPPIST-1 es una estrella roja, por tanto mucho más fría que el Sol (Gizis et al. 2000) y por ende su zona de habitabilidad es mucho más reducida, además de que todos los semiejes mayores de sus planetas se encuentran comprendidos entre 0,01 y 0,06 u.a. (Grimm et al. 2018).

- Ese mismo año, se detectó por primera vez la atmósfera de una super-Tierra, 55 Cancri e (Tsiaras et al. 2016).

Introducción

- En septiembre de 2019, se descubrieron trazas de vapor de agua en la atmósfera de la super-Tierra K2-18 b (Benneke et al. 2019; Tsiaras et al. 2019). Este fue un gran descubrimiento, no solo por ser la primera vez que se detectaba vapor de agua en una super-Tierra, sino también por ser el primer exoplaneta dentro de la zona habitable el cual se ha detectado su atmósfera.

Tras el descubrimiento de los primeros exoplanetas dentro de la zona habitable de su estrella, se empezó a pensar en la posibilidad de búsqueda de vida fuera del Sistema Solar. Sin embargo, este tipo de planetas tan próximos a la estrella son susceptibles de presentar características que pueden dificultar la presencia de vida, como puede ser el *acoplamiento de marea* que hace que el planeta siempre tenga la misma cara hacia a la estrella, lo cual provocaría temperaturas extremas en su superficie, desfavorables para la vida. Sin embargo, la presencia de **exosatélites** orbitando el planeta eliminaría dicho problema ya que, en el peor de los casos, el satélite sería dominado de marea por el planeta y no por la estrella. Esto, unido al hecho de que los satélites se encuentran en gran número alrededor de planetas gigantes, en parte por lo que nos dice la teoría de formación planetaria pero también por lo que observamos en el Sistema Solar (por ejemplo Zhu et al. 2016; Canup & Ward 2002), ha motivado a varios grupos de investigación a la búsqueda de exosatélites alrededor de los exoplanetas ya descubiertos.

Dado que ningún exosatélite ha sido confirmado todavía, primero haremos un repaso bibliográfico de todo lo que se refiere al estudio teórico de los mismos y después comentaremos los candidatos a exosatélites propuestos en la literatura.

- La primera referencia a un “exosatélite” (*exomoon*) aparece en Szabó et al. (2006), pero la primera vez que se habla en términos de “satélites de planetas extrasolares” es en Williams et al. (1997), donde se discute la supuesta habitabilidad de satélites que orbitan planetas gigantes, y en Sartoretti & Schneider (1999), donde se habla de la posibilidad de detección de un satélite alrededor de un planeta que transita la estrella huésped. En este artículo también se introduce un concepto que más tarde supondría una de las principales técnicas de detección de exosatélites: la variación del tiempo de tránsito debido al movimiento del planeta alrededor del centro de masas planeta-satélite (Sección 1.1.5; 1.2.3).

- Deeg (2002) estudió la teórica detección de planetas tipo Tierra y sus

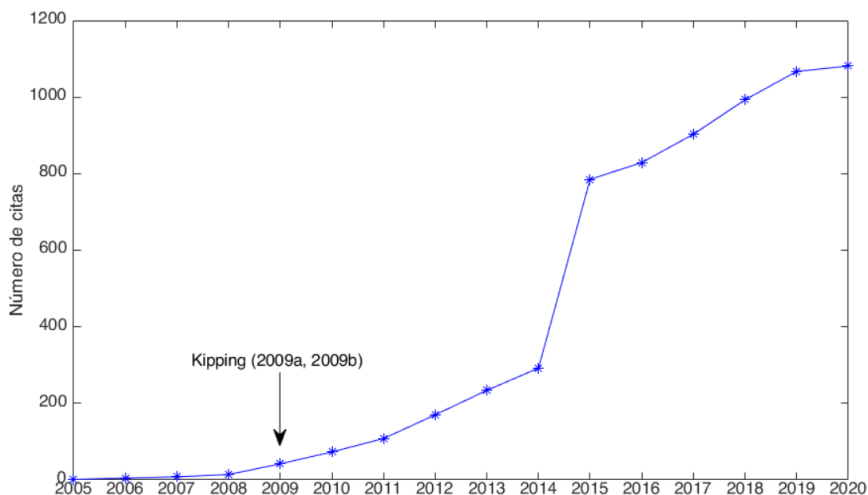


Figura 3: Número de citas de artículos con la palabra “exomoon”. Datos disponibles en app.dimensions.ai.

satélites por medio del método de tránsitos. Argumenta también que un satélite más grande que la Tierra causaría efectos fotométricos detectables.

- En [Barnes et al. \(2002\)](#) se trata por primera vez la estabilidad de las órbitas de satélites que orbitan planetas gigantes.

- En España hubo una comunicación a las VIII Jornadas de Mecánica Celeste celebradas en Rianxo (Galicia, España) en 2005, con el título: *Satellites around extrasolar planets* ([Andrade & Docobo 2006a](#)). El director de esta Tesis Doctoral, Prof. Jose Ángel Docobo, promovió así mismo distintas aportaciones con otros miembros del Observatorio Astronómico Ramón María Aller (OARMA) sobre la dinámica de exoplanetas y exosatélites, incluso en estrellas dobles ([Andrade & Docobo 2006b](#); [Andrade & Docobo 2007](#); [Campo 2011](#); [Docobo, Andrade & Campo 2012](#); [Docobo, Campo & Andrade 2012](#); [Campo & Docobo 2014](#); [Campo 2019](#)).

- En el mencionado [Szabó et al. \(2006\)](#) ya se empieza a hablar de exosatélites, y se analiza la fotometría esperada para el tránsito de un planeta-satélite tipo Júpiter-Tierra.

- En [Simon et al. \(2007\)](#) se formaliza el concepto del TTV (*Transit Timing*

Variation) baricéntrico provocado por un exosatélite (Sección 1.2.3.1), lo que permite dar una estimación de su masa y su radio. Esto tendría grandes implicaciones en el estudio de su habitabilidad (Capítulo 4).

- Kipping (2009a, 2009b) publicó dos de los trabajos más importantes e influyentes en lo que se refiere a investigación sobre los exosatélites. En ellos se generaliza el TTV para órbitas excéntricas no coplanarias, se introduce el TDV (Sección 1.2.3.2), se caracteriza la detección de exosatélites por medio del desfase TTV-TDV y se explica el cálculo de la masa, periodo y semieje del satélite.

Candidatos a exosatélites

Ahora procederemos a explicar algunos candidatos a exosatélites propuestos en la literatura, algunos ya descartados:

Kepler-90g.01

Este supuesto exosatélite orbitaría el planeta Kepler-90g, que a su vez pertenece al sistema Kepler-90 que consiste en una estrella tipo G con 8 planetas girando a su alrededor, con el octavo habiendo sido descubierto gracias a un algoritmo de *machine learning* desarrollado por Google (Shallue & Vanderburg 2017). Pues bien, Kipping et al. (2015) estudiaron la posibilidad de que alrededor del planeta Kepler-90g se encontrase un exosatélite debido a una anomalía detectada en su tránsito en el cuarto³ Q6 del telescopio Kepler.

En ese artículo se llega a la conclusión de que Kepler-90g.01 es un falso positivo por varias razones; la primera es que esa anomalía solo es estadísticamente significativa en el cuarto Q6 mientras que en los demás no lo es, y la segunda está en relación con lo que en el artículo denominan los *centroides de tránsito*, en los cuales se llega a la conclusión de que el centroide del supuesto exosatélite se encuentra demasiado deslocalizado de lo que debería de estar según los modelos teóricos (Figura 5). Más adelante explicaremos todo esto en detalle.

³Se denomina cuarto a las cuartas partes del año en las que se dividen las observaciones del telescopio Kepler. En este sentido, Q6 se referiría al segundo cuarto del segundo año desde que se empezaron las observaciones del exoplaneta.

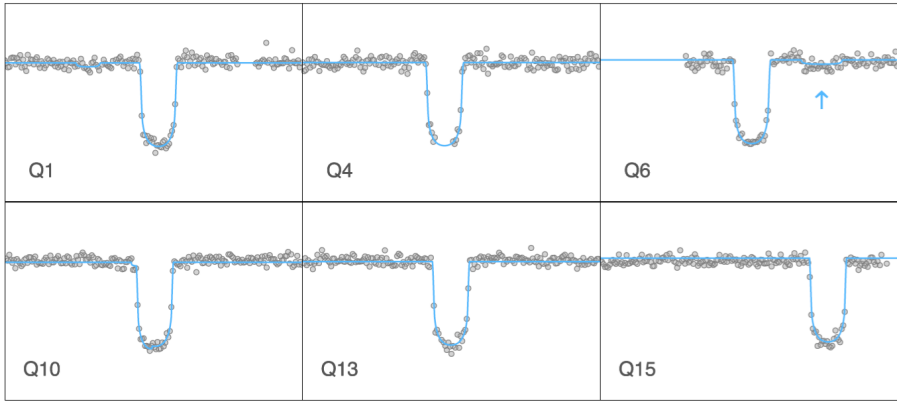


Figura 4: Seis tránsitos del planeta Kepler-90g (Kipping et al. 2015). En el cuarto Q6 se aprecia un ligero valle que podría indicar la presencia de un exosatélite.

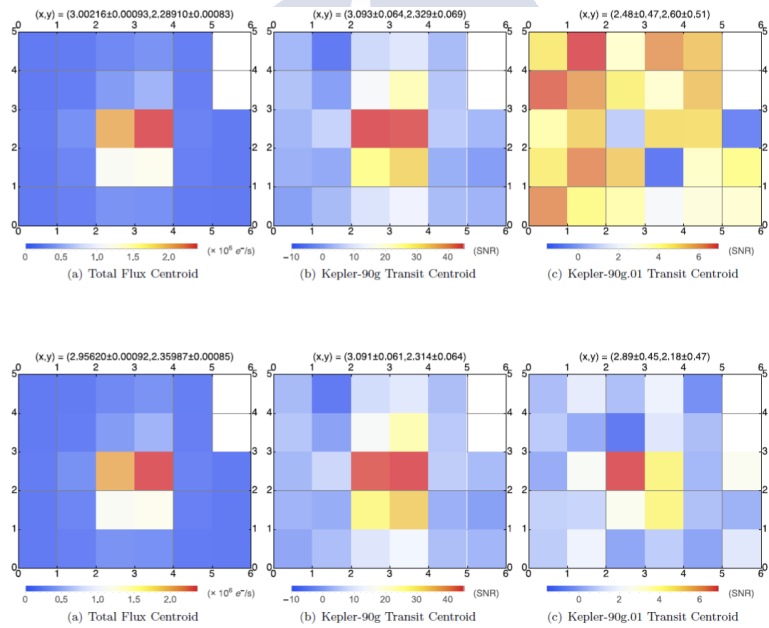


Figura 5: Se pueden apreciar las diferencias hay en el centroide con respecto a los datos originales de Kepler (arriba) y los datos sintéticos en los que se ha introducido la señal de un exosatélite (abajo) (Kipping et al. 2015).

MOA-2011-BLG-262Lb

MOA-2011-BLG-262 es un caso especial de un *planeta errante*, es decir, un planeta que vaga libre por la Galaxia sin estar ligado gravitacionalmente a ninguna estrella. Este “objeto” fue descubierto por el método de microlente gravitatoria (Sección 1.1.3) y, por tanto, solo se puede determinar el producto de la masa de la lente M_L por la paralaje de la misma π_L (véase Sección 1.1.3). Los datos se ajustan a un movimiento propio relativamente grande del sistema ($19,6 \pm 1,6$ mas yr⁻¹), por lo que la paralaje se supone grande (es decir, el sistema se considera cercano a la Tierra) y por tanto M_L tiene que ser pequeño, del orden de 3 o 4 masas de Júpiter, consistente con que la lente esté formada por un exoplaneta + exosatélite. Sin embargo, esto no es todo ya que a las observaciones también se ajusta bien una solución con un movimiento propio menor, del orden de $11,6 \pm 0,9$ mas yr⁻¹, que nos daría una masa para el “planeta” de $0,12 M_\odot$, y entonces ya estaríamos hablando no de un planeta, sino de una enana roja. Estas dos soluciones (llamadas rápida y lenta) se consideran posibles y, aun cuando la lenta es favorecida cuando se realiza un análisis estadístico de los datos, futuras observaciones serán necesarias para determinar si se trata de un planeta errante con un exosatélite o por el contrario si se trata de una enana roja + un exoplaneta, i que podemos decir que la denominación de “planeta errante” es, de momento, puramente hipotética (Bennett et al. 2014).

WASP-12b I

Científicos rusos dicen haber encontrado un exosatélite orbitando el gigante gaseoso caliente WASP-12b. Las razones que dan para ello son “cambios (explosiones) de luz repentinos”, aunque la literatura sobre este estudio es escasa (se puede consultar en <https://ria.ru/20120206/558647431.html>) y podrían haber diversas explicaciones para este fenómeno, como por ejemplo nubes de gas alrededor de la estrella o quizás una emisión de rayos cósmicos. Véase la Sección 1.2.4 donde se habla de diversos fenómenos que pueden “imitar” la presencia de un exosatélite.

J1407b I

J1407b (o también llamado 1SWASP J140747.93-394542.6b) es un exoplaneta con anillos (Rieder & Kenworthy 2016), los cuales presentan ciertas discontinuidades (Kenworthy & Mamajek 2015). Se ha estudiado la posibilidad

de que haya un exosatélite a 0,4 u.a. del planeta embebido en los anillos que explique esa discontinuidad. Algunos autores han simulado la evolución de un supuesto anillo planetario de 10000 partículas sin masa y un exosatélite emplazado a 0,4 u.a. y llegaron a la conclusión que la presencia de un exosatélite en dichas discontinuidades se contempla como improbable (Sutton 2019).

Kepler-1625b I

Este es el candidato más estudiado y el más susceptible de ser un exosatélite. Teachey et al. (2017) hicieron un estudio de 3 tránsitos del planeta Kepler-1625b, llegando a la conclusión de que las observaciones se ajustan mejor al modelo exoplaneta + exosatélite que al modelo de un solo exoplaneta. En este artículo de hecho comprueban que la señal producida no es producto de un fallo de la instrumentación, aunque son escépticos de que haya otros sucesos que puedan provocar la señal debido al reducido número de tránsitos disponibles.

En Teachey & Kipping (2018) se dan de nuevo argumentos a favor de la detección del exosatélite, por ejemplo la presencia de un TTV (Sección 1.1.5 y 1.2.3) de 77.8 minutos, consistente con la señal producida por el exosatélite. También tienen en este artículo algunas reservas, como que el exosatélite sea del tamaño de Neptuno con una inclinación realmente alta, o que todas las caídas de luz provocadas por él se produzcan siempre fuera del tránsito del exoplaneta, aunque se mantienen seguros en favorecer el modelo exoplaneta + exosatélite por delante del modelo de un solo exoplaneta, ya que este primero excede al último por un factor de Bayes⁴ de 400000.

Sin embargo, Kreidberg et al. (2019) sostienen que no existen pruebas suficientes de la existencia del exosatélite, utilizando para ello un conjunto de datos independiente del utilizado en Teachey & Kipping (2018). En un artículo posterior, Teachey et al. (2019) discuten la discrepancia entre los dos estudios, argumentando que pudo haber surgido de la distinta manipulación de los datos y sostienen que su postura sigue siendo la más plausible apoyándose, entre otras cosas, en Heller et al. (2019) donde los investigadores llevan a cabo una manipulación independiente de los datos y también son capaces de recuperar la señal del supuesto exosatélite.

⁴El *factor de Bayes* se relaciona con la función de verosimilitud, es decir, con la probabilidad de los datos observados asumiendo un modelo M . Por lo tanto, si el factor de Bayes es de 400000, eso quiere decir que los datos observados son 400000 veces más probables asumiendo el modelo exoplaneta + exosatélite que el modelo de un solo exoplaneta.

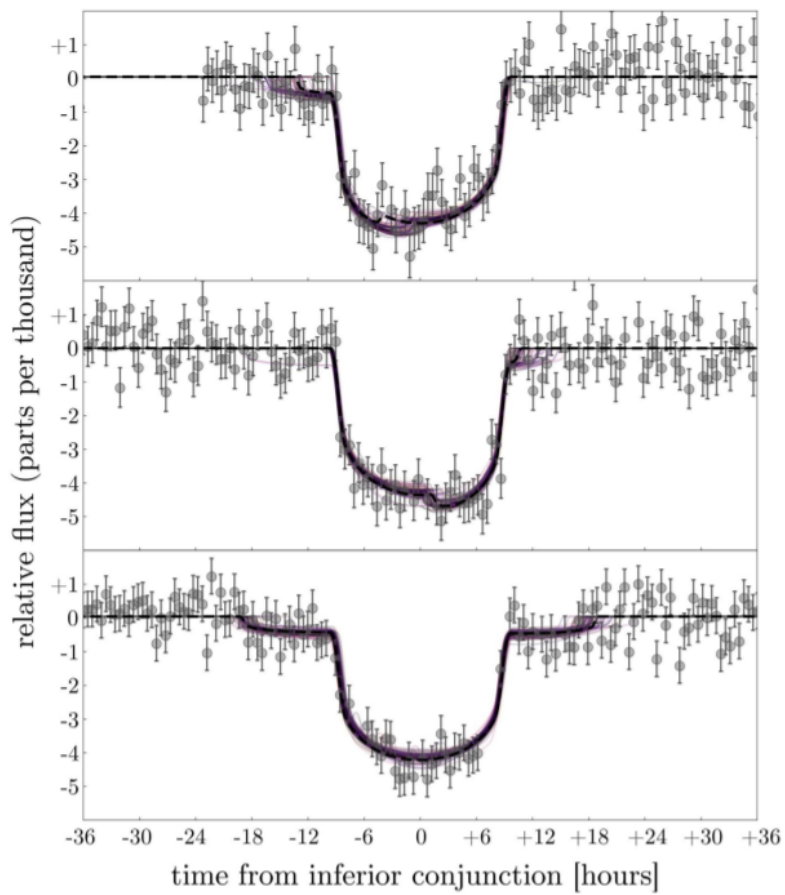


Figura 6: Gráfica de los tres tránsitos de Kepler-1625b [Teachey et al. \(2017\)](#).

KOI 268.01, KOI 303.01, KOI 1503.01, KOI 1888.01, KOI 1925.01, KOI 1980.01, KOI 2728.01

En junio de 2020, se presentaron siete candidatos a exosatélites, al encontrarse señales de TTV en torno al tránsito de KOI 268.01, KOI 303.01, KOI 1503.01, KOI 1888.01, KOI 1925.01, KOI 1980.01 y KOI 2728.01, respectivamente. Ya se ha descartado la presencia de un exosatélite orbitando KOI 1503.01 y KOI 1980.01, y en el resto el TTV se puede atribuir tanto a la presencia de un exosatélite como a la presencia de otro exoplaneta (Fox & Wiegert 2020).

Motivación/Objetivos de la Tesis

Luego de haber comentado el estado actual de la población de los exoplanetas descubiertos y de los candidatos propuestos a exosatélites, procedemos a continuación a describir los objetivos que motivaron la realización de esta Tesis:

- Diferenciación de los modelos analíticos de las señales de las curvas de luz provocadas por los sistemas exoplaneta+exosatélite, exoplaneta+anillos o exoplaneta doble, con el objetivo de diferenciar todos estos fenómenos.
- Poner en perspectiva cuáles son los métodos de detección de exosatélites que mayores resultados se espera que den en el futuro, así como los diferentes sesgos de detección que caracterizan a cada uno de ellos (radios grandes/pequeños, distancias con respecto al exoplaneta grandes/pequeñas...).
- Utilización de métodos matemáticos de optimización con el fin de aplicar una metodología general a todos los modelos matemáticas utilizados para detectar exoplanetas/exosatélites y para calcular sus elementos orbitales.
- Aplicación de la **Astrodinámica**, a través de la integración del problema de n cuerpos, con el fin de:
 - Arrojar más luz sobre las situaciones más favorables en las que se puedan encontrar exosatélites en el Universo: ¿qué configuraciones de exoplanetas y exosatélites son más estables, tanto a medio como a largo plazo? En ese sentido, nos hemos centrado en escenarios de hasta cuatro cuerpos, con estrellas, planetas y satélites.

- Estudiar la habitabilidad de los exosatélites, analizando la dependencia de sus elementos orbitales con el calentamiento de marea, el cual influye directamente sobre su campo magnético y su actividad volcánica, dos factores de gran importancia en su habitabilidad.
- Hablar de las limitaciones que nos encontramos a la hora de estudiar, observacionalmente, la habitabilidad en exoplanetas y, por supuesto, en exosatélites, y proponer algunas ideas para el futuro, como la caracterización de océanos superficiales o, apoyándonos en la información proporcionada por el Centro de Astrobiología (CAB), en los océanos interiores.
- Proponer la relación masa-radio aplicada a exosatélites para que, una vez se disponga de ella con suficiente precisión, se pueda deducir su composición.

Estructura de la Tesis

En el Capítulo 0, estableceremos el armazón matemático sobre el cual se construye toda la Tesis. Lo hacemos así no solo porque este trabajo ha sido elaborado dentro del Programa de Doctorado en Matemáticas, sino también porque los métodos matemáticos utilizados han sido fundamentales en la realización de esta Tesis Doctoral.

En el Capítulo 1, hablaremos de los principales métodos de detección de exoplanetas y exosatélites, a través de un **modelo matemático**. Dicho modelo vendrá dado por una variable independiente y varios parámetros. Como novedad teórica, estudiaremos las variaciones en la curva de luz que produce el exosatélite, además de las diferencias que se aprecian entre el modelo exoplaneta + exosatélite y otros modelos, como el de exoplaneta doble, exoplaneta con anillos o exoplaneta cuya estrella consta de una mancha ecuatorial.

En el Capítulo 2 nos centraremos en describir como para validar dicha detección, asumiendo, para cada método, los modelos descritos en el Capítulo 1. El procedimiento consistirá en *ajustar* el modelo que utilizemos a unas observaciones, a través de la determinación de sus parámetros, de manera que mejor prediga las observaciones. Esto equivale a un problema de *minimización*, en donde tendremos que escoger los parámetros que hagan mínimo el error cuadrático. Debido a que nuestros modelos suelen contar con un gran número de parámetros, hemos optado por combinar algoritmos de optimización global con algoritmos de optimización local para obtener la mejor estimación de

parámetros posible. Consideramos que esta metodología para obtener la minimización es sumamente innovadora y permite una implementación más sencilla que otros métodos estadísticos más complicados utilizados en la literatura.

En el Capítulo 3 estudiaremos la **dinámica** y **estabilidad** orbital de los exoplanetas y exosatélites, analizando bajo qué condiciones se mantienen estables y cómo varía su excentricidad/semieje a medio plazo, para sistemas de 1, 2 o 3 estrellas. Para tal fin, llevaremos a cabo la integración del problema de n cuerpos por medio de un software dedicado a resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales, TIDES, basado en el uso de las series de Taylor (véase Sección 0.1). Presentaremos resultados interesantes concernientes al semieje y a la excentricidad de los exosatélites y exoplanetas, tanto en sistemas con una sola estrella como en sistemas estelares múltiples, que nos ayudarán a responder preguntas como: *¿es probable la presencia de un exosatélite en un sistema estelar de varios planetas?*, *¿sufren más variaciones en su órbita los exosatélites o los exoplanetas?* o *¿se espera la presencia de exosatélites en sistemas con varios exoplanetas?* En la última parte del Capítulo, intentaremos investigar una cuestión inexplorada en la literatura: la modificación de los ciclos de Lidov-Kozai (LK), debido a la presencia de un cuarto cuerpo (el llamado *LK perturbado*). Esto nos ayudará a determinar la evolución a largo plazo de los exoplanetas y exosatélites cuando sus órbitas se encuentran suficientemente inclinadas con respecto al resto de cuerpos del sistema donde se encuentran.

En el Capítulo final, profundizaremos en la **habitabilidad** de los exoplanetas y exosatélites, haciendo hincapié en las técnicas de las que disponemos hoy en día, y de las que podremos disponer en el futuro. Además, analizaremos las regiones de la estrella donde es posible que un exoplaneta/exosatélite desarrolle vida, lo que se conoce **zona habitable**. Debido a la poca información con la se cuenta hoy en día, consideramos que nuestra aportación a la habitabilidad puede venir de la mano de la Astrodinámica, puesto que el semieje y la excentricidad de un exosatélite con respecto a su exoplaneta tienen influencia directa sobre su **calentamiento de marea**, el cual determina, a su vez, dos cuestiones tan fundamentales para su habitabilidad como la actividad tectónica o la presencia de un campo magnético. Así, utilizando algunos resultados del Capítulo 3, estableceremos las condiciones por las cuales un exosatélite tipo Tierra podría, teóricamente, poseer condiciones óptimas para el desarrollo de vida. Por último, proponemos la aplicación de la relación masa-radio a los exosatélites, con el fin de obtener la **composición** del exosatélite una vez se pueda conocer su masa y radio con la precisión suficiente.

Introducción

Completan esta Memoria dos Apéndices. En el Apéndice A se derivan algunas fórmulas relativas al problema de dos cuerpos utilizadas a lo largo de la Tesis, y en el Apéndice B adjuntamos la programación implementada en MATLAB, Python y MATHEMATICA.

Finalmente, se incluye una extensa Bibliografía, así como las Conclusiones de nuestro trabajo.





Capítulo 0

Métodos matemáticos utilizados en la Tesis

Antes de entrar en el grueso de la Tesis, empezaremos por explicar todos y cada uno de los métodos matemáticos que se han aplicado a lo largo de ella, así como del software implementado.

0.1. TIDES

TIDES es un software especializado en resolver sistemas de ecuaciones diferenciales muy complicados y que requieren mucho tiempo de computación. Fue desarrollado en 2011 por Alberto Abad, Roberto Bario, Fernando Blesa y Marcos Rodríguez, del Grupo de Mecánica Espacial de la Universidad de Zaragoza ([Abad et al. 2011](#), [2012](#), [2015](#)).

Este paquete informático se basa en el **método de las series de Taylor** (TSM) para resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t); p), y(t_0) = y_0, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^m, \quad (0.1)$$

siendo y_0 las condiciones iniciales, p los parámetros y t la variable independiente.

Assumiendo que f es infinitamente diferenciable, hallaríamos la solución aproximada en un instante de tiempo $t_{i+1} = t_i + h_i$, $y(t_{i+1})$, desarrollando la

serie de Taylor de $y(t)$ en torno al punto t_i y evaluándola en t_{i+1} :

$$\begin{aligned}
 y(t_0) &= y_0 \\
 y(t_{i+1}) &\approx y(t_i) + \frac{dy(t_i)}{dt} h_{i+1} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y(t_i)}{dt^2} h_{i+1}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n y(t_i)}{dt^n} h_{i+1}^n \approx \\
 &\stackrel{0.1}{\approx} y(t_i) + f(t_i, y(t_i)) h_{i+1} + \frac{1}{2!} \frac{df(t_i, y(t_i))}{dt} h_{i+1}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} f(t_i, y(t_i))}{dt^{n-1}} h_{i+1}^n.
 \end{aligned} \tag{0.2}$$

Así, el programa se dedicará a calcular las $n - 1$ sucesivas derivadas de f para resolver el problema del valor inicial. Para ello, TIDES consta de dos peculiaridades que lo diferencian del resto de paquetes encargados de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. La primera es la implementación de la llamada **diferenciación automática** (AD), que permite calcular muy eficientemente las derivadas sucesivas, y la segunda es que el paso es *variable*, lo que lo hace más robusto sin necesidad de contar con una gran cantidad de puntos de integración. Esto puede servirnos de utilidad puesto que, en muchos casos, tendremos que integrar sistemas de ecuaciones diferenciales a lo largo de millones o incluso decenas de millones de años, con lo que la cantidad de puntos de integración serán igualmente grande y ello aumentará considerablemente el tiempo de computación. El paso variable permite, por tanto, una cantidad menor de puntos de integración posible sin por ello perder la precisión.

TIDES consta, principalmente, de MathTIDES, un paquete de Matemática que escribe el sistema de ecuaciones diferenciales, las condiciones iniciales y los parámetros en código C (ó Fortran, según convengamos), y la librería LibTIDES, la cual unida y compilada junto al código C (Fortran) generado por MathTIDES permite la integración del sistema de ecuaciones.

Además, TIDES incluye las librerías GMP y MPFR, que permiten una integración de doble y múltiple precisión, respectivamente.

Otras funciones interesantes de TIDES son:

- Búsqueda de ceros de una determinada función de la solución del problema de valor inicial que nosotros elijamos.
- Búsqueda de extremos, tanto mínimos como máximos, de una determinada función de la solución del problema de valor inicial que nosotros

elijamos.

- Integración de las derivadas parciales de las variables ó parámetros del problema de valor inicial que elijamos.

Un aspecto fundamental que separa TIDES de otros métodos numéricos es su enorme precisión, lo que le confiere una gran estabilidad que hace que las soluciones no difieran significativamente cuando, por ejemplo, utilicemos distintos pasos de integración. Esto es útil en problemas cuya sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales sea máxima, puesto que un método poco preciso podría desencadenar en una integración completamente errónea.

0.2. Método de Laguerre

Utilizaremos el método de Laguerre para encontrar raíces de polinomios cuando el grado es grande. Nos será útil en la Sección 1.1.3. El algoritmo consiste en:

- Elegir un valor inicial x_0 .
- $k \in \{0, 1, \dots, n\}$
 - Si x_k es menor que una cierta cantidad pequeña, **stop**.
 - $G = \frac{P'(x_k)}{P(x_k)}$
 - $H = G^2 - \frac{P''(x_k)}{P(x_k)}$
 - $D1 = G + \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}$
 - $D2 = G - \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}$
 - Asignar D a $D1$ ó a $D2$, dependiendo qué cantidad sea mayor en valor absoluto.
 - $a = n/D$
 - $x_{k+1} = x_k - a$
 - Si x_{k+1} es menor que una cierta cantidad pequeña, **stop**.

0.3. Algoritmos de optimización

En el Capítulo 2 utilizaremos dos algoritmos de optimización para hacer ajustes de mínimos cuadrados: el algoritmo de **evolución diferencial** cuya optimización es global, y el algoritmo **Basin-hopping**, que combina optimización local con optimización global.

0.3.1. Algoritmo de evolución diferencial

Este método de minimización es *estocástico*, es decir, involucra métodos probabilísticos, y no métodos de gradiente. Esto nos resulta conveniente ya que trabajaremos con funciones que involucran un gran número de variables sobre las cuales aplicaremos el algoritmo, por lo que calcular el gradiente se vuelve una tarea tediosa y, en la mayoría de los casos, ineficaz, puesto que en innumerables ocasiones nos encontraremos con puntos singulares que hacen el método inviable.

Suponemos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que queremos minimizar.

Se elige el máximo número de generaciones, $MAXG$, el número de la población, NP , el parámetro de hibridación, $CR \in [0, 1]$, y el llamado *peso diferencial*, F .

Se describe a continuación el algoritmo:

- Elegir un valor inicial al azar $x_{i,0}$, correspondiente a la generación 0, para cada miembro i de la población.
- $G \in \{0, 1, \dots, MAXG\}$
- $i \in \{1, \dots, NP\}$
- Elegimos 3 índices de la población distintos de i : r_1, r_2 y r_3 , y distintos entre sí.
- Elegimos un índice al azar R entre 1 y n .
- Creamos un nuevo valor $y_{i,G+1}$ a partir de $x_{i,G}$, tal que así:
- $j \in \{1, \dots, n\}$
- Elegimos un $r_j \sim U(0, 1)$

- Si $r_j < CR$ ó $j = R$:
 - $y_{i,j,G+1} = x_{r_3,j,G} + F(x_{r_1,j,G} - x_{r_2,j,G})$
- Si no se cumple esta condición:
 - $y_{i,j,G+1} = x_{i,j,G}$
- Si $f(y_{i,G+1}) < f(x_{i,G})$:
 - $x_{i,G+1} = y_{i,G+1}$
- Si no se cumple esta condición:
 - $x_{i,G+1} = x_{i,G}$

El criterio de terminación se alcanza cuando, evidentemente, G es igual al número máximo de generaciones $MAXG$.

Debido a cómo hemos construido y_i , x_i se denomina el vector de base, mientras que a y_i se le llama el vector *mutado*. Dicha mutación tiene lugar debido al parámetro F .

Para más información sobre las distintas versiones de este algoritmo y las posibles estrategias a seguir, véase [Mezura-Montes et al. \(2013\)](#).

0.3.2. Algoritmo Basin-hopping

Este método se basa en la búsqueda de un mínimo local, y al mismo tiempo añade variaciones aleatorias a ese mínimo de manera que se obtiene nuevos mínimos locales cuyo evaluación en f es menor, para así obtener una sucesión de mínimos locales cuyo valor se aproxima al mínimo global. Dicha sucesión se termina cuando se cumple un determinado criterio de terminación; en nuestro caso, cuando el algoritmo alcance un determinado número de iteraciones n .

Procedemos a describir el algoritmo.

- Elegir un valor inicial x_0 .
- Elegir un número máximo de iteraciones n .
- $k = 0$
- Mientras k sea distinto de n :

- Aplicar un algoritmo de optimización local¹ al punto x_k .
- Al mínimo local calculado le llamamos y_k .
- Aplicamos una variación aleatoria a y_k .
- Llamamos a ese nuevo punto x_{k+1} .
- Aplicamos un algoritmo de optimización local al punto x_{k+1} .
- Al mínimo local calculado le llamamos y_{k+1} .
- Si $f(y_{k+1}) < f(y_k)$ entonces
 - $k = k + 1$

El criterio de terminación se alcanza cuando $k = n$.

Véase [Olson et al. \(2012\)](#) para más información sobre este algoritmo.

0.4. Integración numérica de funciones multidimensionales definidas a trozos

Utilizaremos el método de **cuadratura de Clenshaw–Curtis** para calcular la integral de funciones multidimensionales definidas a trozos, por ejemplo la función definida por la ecuación (1.59). Para ello, nos basaremos en la función `NIntegrate` de `MATHEMATICA`. La implementación está incluida en el programa `spots.nb` en el Apéndice B.

El método de cuadratura de Clenshaw–Curtis se basa en aproximar la integral por medio de la combinación lineal de unos pesos ω_i y de la función evaluada en unos nodos x_i , tal que:

$$\int_1^{-1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n/2} \omega_i (f(x_i) + f(-x_i)), \quad (0.3)$$

donde n es un número entero par de nuestra elección, y:

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \quad \forall i \in \{1, \dots, n/2\} \quad (0.4)$$

¹El algoritmo de optimización local que nosotros utilizaremos será el Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno, cuyo método se basa en el método de gradiente.

y

$$\omega_i = D^T d, \quad (0.5)$$

siendo

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/(1 - (2 \cdot 1)^2) \\ 2/(1 - (2 \cdot 2)^2) \\ \vdots \\ 2/(1 - (2 \cdot k)^2) \\ 1/(1 - N^2) \end{pmatrix}, k \in \{1, \dots, N/2 - 1\} \quad (0.6)$$

y D una matriz con entradas

$$D_{ji} = \frac{2}{n} \cos\left(\frac{\pi ij}{n/2}\right) \times \begin{cases} 1/2 & \text{si } j = 0 \text{ ó } j = n/2, j \in \{0, \dots, N/2\} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (0.7)$$

Ahora, es necesario resaltar el hecho de que el método Clenshaw-Curtis forma parte de la **familias anidadas** (*nested families*), de manera que los nodos en el problema unidimensional son subconjuntos del conjunto de nodos del problema multidimensional, por lo tanto el problema de integrar sobre una región $[-1, 1]^N$, donde N es su dimensión, se puede construir a partir del problema unidimensional en $[-1, 1]$ con un número reducido de nodos (véase, por ejemplo, [Waldvogel 2006](#); [Smolyak 1963](#)).

0.5. Transformada rápida de Fourier (*FFT*)

La transformada rápida de Fourier es el método que utiliza el periodograma clásico con el fin de descomponer una señal equiespacialmente muestreada en una serie de armónicos, correspondiéndose el armónico dominante con el *período* de la señal (véase la Sección [2.1.1](#)).

La FFT se calcula como

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^N f_n e^{-2\pi i kn/N}, \quad (0.8)$$

Sección 0.5. Transformada rápida de Fourier (FFT)

donde f_k son los distintos puntos de la señal para el instante de tiempo $t_k = k\Delta t$, con $k = 0, 1, \dots, N$, Δt el intervalo de tiempo entre las observaciones y N el tamaño de la muestra.

En nuestros cálculos, utilizaremos la función `fft()` de `MATLAB` para calcular la transformada rápida de Fourier, por ejemplo en el programa [TTV/TDV.m](#) del Apéndice B.



Capítulo 1

Métodos de detección de exoplanetas y exosatélites

Este Capítulo está dedicado a exponer los principales métodos de detección de exoplanetas y exosatélites, haciendo hincapié en los modelos matemáticos a utilizar para después en el siguiente Capítulo describir el procedimiento de detección en el cual ajustamos los datos de observación a los modelos descritos.

1.1. Métodos de detección de exoplanetas

Además de los métodos de **velocidad radial** y **tránsitos**, que han sido responsables del descubrimiento del 96% del total de los exoplanetas (Figura 1), existen también otras técnicas que merecen igualmente ser expuestas. Dichos métodos no proporcionan tanta información sobre la órbita ni son tan fructíferos en cuanto a resultados se refiere, pero tienen otras ventajas tales como la posibilidad de detectar exoplanetas de baja masa o de arbitraria inclinación, lo cual no siempre es posible debido al *sesgo* de detección¹ que existe con respecto al método de velocidad radial y el método de tránsitos, respectivamente. Esto es importante ya que, cuanto mayor variedad de características orbitales y físicas tengamos de la población de exoplanetas, mayor información habrá de todos los tipos de configuraciones posibles de los mismos dentro de

¹*Detection bias*. Se refiere a la capacidad restrictiva intrínseca de cada método de detección que puede darnos una visión sesgada de cómo son los exoplanetas en el Universo. Por ejemplo, por el método de tránsitos sólo podemos detectar sistemas planetarios para los que nuestra línea de observación está contenida en su plano orbital ($i \approx 90^\circ$).

la Galaxia, y en casos menos probables, fuera de ella, como los planetas descubiertos por medio del **timing del púlsar** (Sección 1.1.7).

Seguidamente pasamos a describir los distintos métodos de detección de exoplanetas.

1.1.1. Velocidad radial

El método de velocidad radial se basa en el efecto Doppler-Fizeau aplicado al movimiento de la estrella en torno al centro de masas del sistema estrella + planeta, de modo análogo a cómo se descubren las binarias espectroscópicas de línea simple.

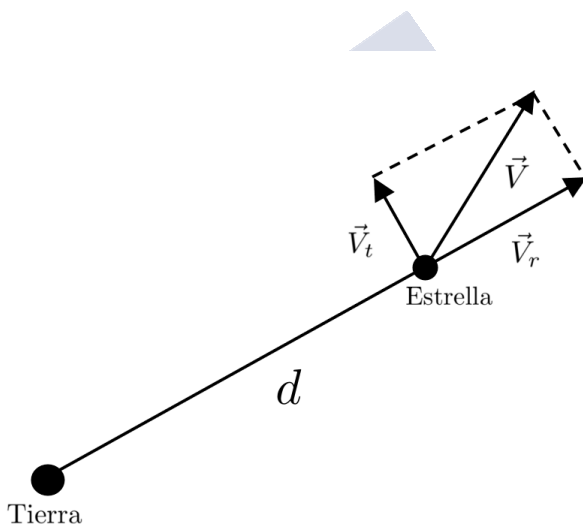


Figura 1.1: Ilustración de la velocidad transversal \vec{V}_t y de la velocidad radial \vec{V}_r .

Tal y como se muestra en la Figura 1.1, descomponemos el vector velocidad, \vec{V} , en una componente radial (\vec{V}_r) y en una componente transversal (\vec{V}_t), por lo que

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_t = V_r \vec{u}_r + V_t \vec{u}_t, \quad (1.1)$$

siendo u_r y u_t vectores unitarios y perpendiculares entre sí.

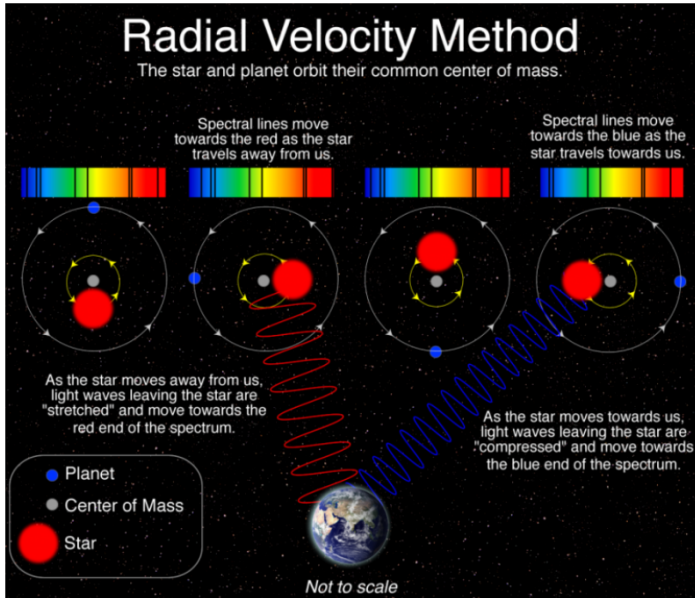


Figura 1.2: Ilustración del método de velocidad radial. Crédito: Observatorio de Las Cumbres.

Por convenio, se considera que $V_r > 0$ cuando la estrella se aleja y $V_r < 0$ cuando se acerca.

Ahora bien, V_r es la suma de: V_0 , que será la velocidad radial del centro de masas del sistema con respecto a nosotros², y \dot{z} , que será la velocidad radial del exoplaneta con respecto al centro de masas del sistema estrella + planeta, C :

$$V_r = V_0 + \dot{z} \quad (1.2)$$

Consideremos ahora la órbita que describe la estrella con respecto a C . Utilizando la regla del pentágono de Neper y aplicándola al triángulo esférico

²Debido a que la mayoría de telescopios dedicados a la medición de la velocidad radial, tales como HIRES ó HARPS, son instrumentos de tierra, sus observaciones estarán sujetas tanto al movimiento de la Tierra con respecto al Sol como al movimiento del Sistema Solar con respecto a la estrella, por lo que a la hora de obtener unos datos que reflejen la verdadera velocidad radial de dicha estrella debemos aplicar ciertas correcciones que tengan en cuenta estos efectos. Para más información véase, por ejemplo, [Wright & Eastman \(2014\)](#).

rectángulo de la Figura 1.4, se obtiene³

$$\sin \beta = \sin i \sin(\omega + f). \quad (1.3)$$

Además,

$$z = r \sin \beta, \quad (1.4)$$

con lo que

$$z = r \sin i \sin(\omega + f) \quad (1.5)$$

Derivando z con respecto al tiempo, resulta

$$\dot{z} = \sin i \left[\dot{r} \sin(\omega + f) + r \dot{f} \cos(\omega + f) \right], \quad (1.6)$$

y de ahí

$$\dot{z} = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1-e^2}} (\cos(\omega + f) + e \cos \omega), \quad (1.7)$$

ya que en el problema de dos cuerpos se tiene (Apéndice A):

$$\dot{r} = \frac{2ce}{a_1(1-e^2)} \sin f, \quad 2c = r^2 \dot{f}, \quad c = na_1^2 \sqrt{1-e^2}. \quad (1.8)$$

Llamaremos a_1 al semieje de la órbita de la estrella con respecto a C. El factor $\frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1-e^2}}$ de (1.7) es conocido como la **semiamplitud** de la señal de la velocidad radial y se denota por K .

Se suele poner K en función del semieje a_2 del planeta, no de a_1 , por lo que teniendo en cuenta la tercera Ley de Kepler y la relación que hay entre a_1 y a_2 :

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_*)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \quad (1.9)$$

Así, la fórmula que nos da la velocidad radial para un exoplaneta quedaría, utilizando (1.2) y (1.7):

$$V_r = V_0 + K(\cos(\omega + f) + e \cos \omega). \quad (1.10)$$

³ ω es el argumento del periastró de la órbita de la estrella con respecto al centro de masas.

Los parámetros orbitales involucrados en la fórmula de la velocidad radial son P , T , e , a , i y ω (ya que la anomalía verdadera f se relaciona con T a través de la anomalía excéntrica E). Así las cosas, el conjunto de parámetros que se escoge para estimar a partir de las observaciones son $\gamma := V_0$, K , P , T , e y ω . Una vez conocidos K , P y e podremos calcular $M_p \sin i$ (lo que se llama *masa mínima*) pero a no ser que apliquemos otro método no podremos tener ni la inclinación ni la masa del planeta por separado.

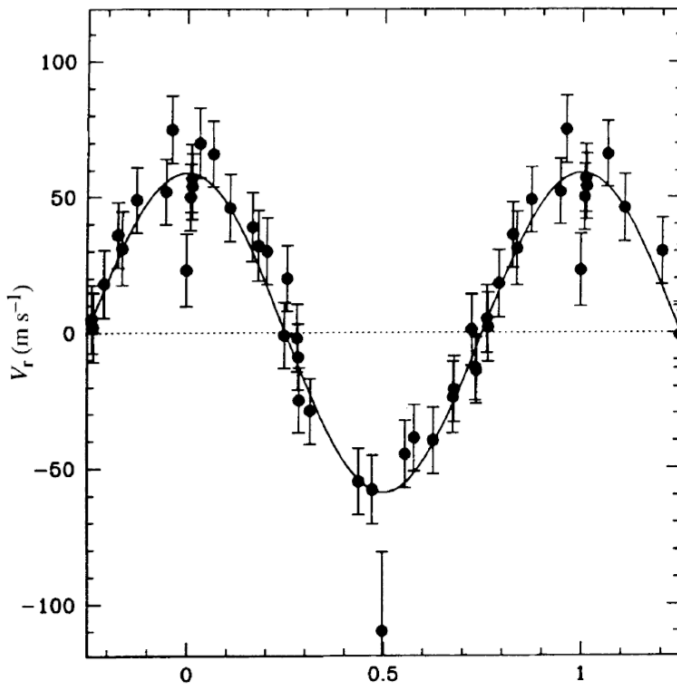


Figura 1.3: Gráfica de la señal producida por 51Pegb sobre su estrella huésped (Mayor & Queloz 1995). Como podemos apreciar, para el caso de un sólo planeta la señal tiene aproximadamente una forma sinusoidal lo cual cabe esperar por (1.10).

Formulación para varios exoplanetas

De momento, solo hemos tratado el caso en el que en el sistema hay un único planeta. Sin embargo, de los 4410 exoplanetas descubiertos, 722 ($\approx 16,4\%$) son sistemas planetarios múltiples (The Extrasolar Planets Encyclopaedia),

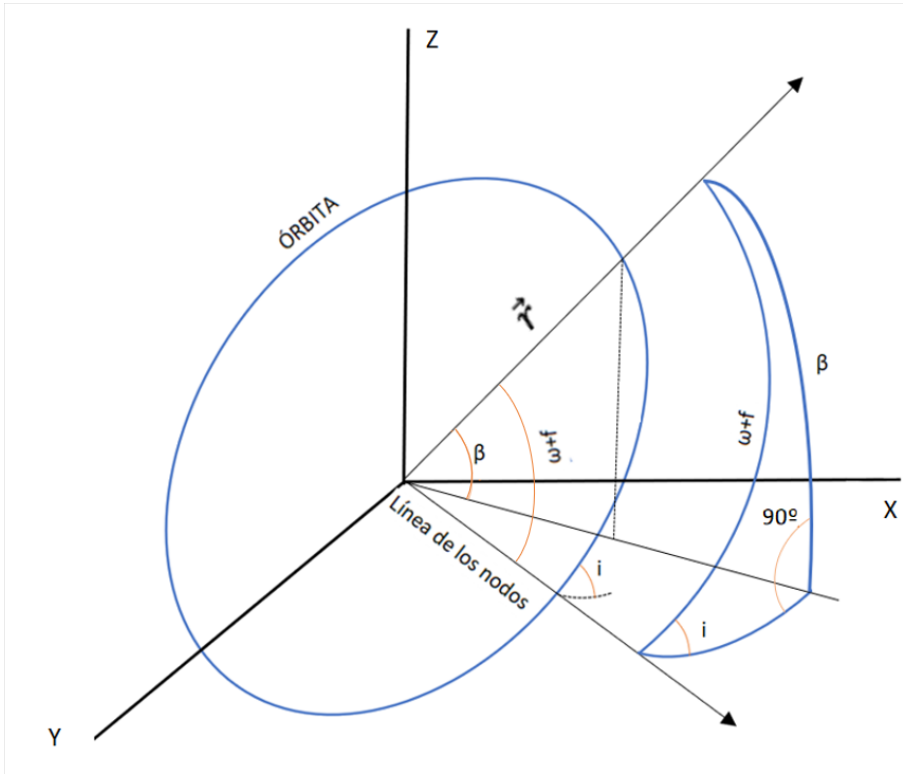


Figura 1.4: Visualización de los elementos orbitales.

por lo que parece conveniente considerar la señal producida por la velocidad radial provocada por la influencia gravitatoria de varios planetas sobre una estrella.

Para ello necesitamos distinguir entre 2 casos: el caso kepleriano y el caso newtoniano (Wright & Howard 2009). En el caso kepleriano se considera que el sistema planetario se encuentra suficientemente “disperso” como para poder despreciar la influencia gravitatoria de cada uno de los planetas sobre los demás. En tal caso la señal se puede resolver como la suma de las señales de cada uno de los planetas:

$$V_r = \gamma + \sum_{j=1}^n (K_j [\cos(\omega_j + f_j) + e_j \cos(\omega_j)]), \quad (1.11)$$

siendo n el número de planetas del sistema, y cada subíndice j se refiere al elemento orbital del planeta j .

Para el caso newtoniano, es necesario implementar un modelo dinámico basado en el problema de n cuerpos que tenga en cuenta las interacciones mutuas de los planetas. La metodología consiste, entonces, en tratar el problema como kepleriano para identificar los posibles planetas que existan en el sistema (Sección 2.3.1.2) y proporcionar una aproximación que luego inyectaremos como condición inicial en el problema de n cuerpos correspondiente (Wright & Howard 2009).

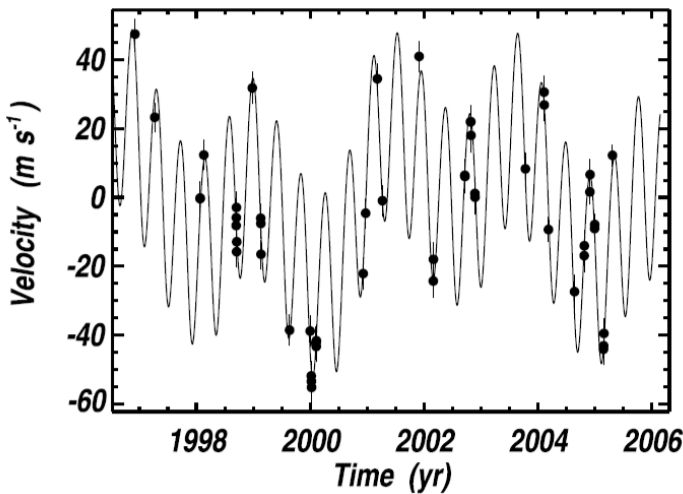


Figura 1.5: Gráfica de la velocidad radial inducida por HD 37124, una estrella que alberga 3 planetas (Vogt et al. 2005).

En conclusión, este método nos proporciona cierta información sobre uno o varios exoplanetas pero dicha información es limitada en ciertos parámetros, como pueden ser la inclinación o la masa del planeta.

1.1.2. Tránsitos

Fue en [Struve \(1952\)](#) la primera vez que se menciona el principio del método de tránsitos para el descubrimiento de exoplanetas (es decir, los pasos del planeta por delante del disco de la estrella). Más tarde [Rosenblatt \(1971\)](#) ya habla en términos de “tránsitos” y de la posibilidad de ser detectados mediante fotometría. Desde entonces, se ha llamado de esta forma.

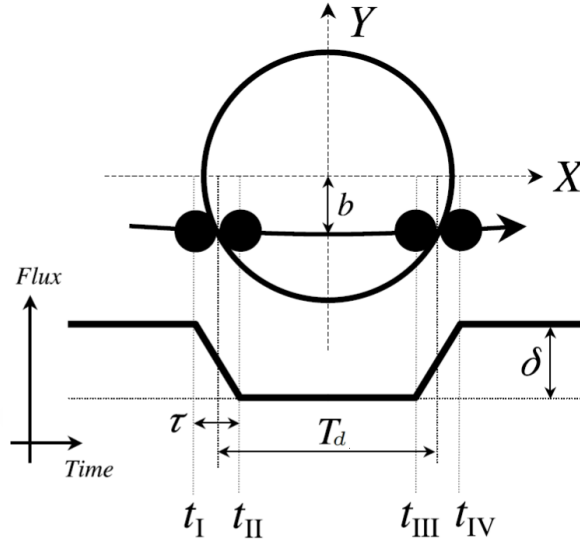


Figura 1.6: Ilustración de un tránsito ([Winn 2010](#)). Nótese que se muestra τ como $\tau := \tau_{ing} = \tau_{egr}$ ya que, al considerar órbitas circulares, estos tiempos son iguales. T_0 en este caso sería la intersección de la curva de luz con el eje Y.

Este método se basa en la caída de luz que apreciamos cuando un cuerpo se interpone entre una estrella y nuestra línea de visión, lo que provoca que el disco de luz de la estrella se oscurezca mínimamente debido al tránsito del planeta por delante del disco estelar. La gráfica que nos muestra la evolución del flujo de luz en función del tiempo se llama **curva de luz**.

Como podemos apreciar en la Figura 1.6 hay varios parámetros que caracterizan la curva de luz. Siguiendo el criterio de [Winn \(2010\)](#) definimos los cuatro *puntos de contacto*: t_I , t_{II} , t_{III} y t_{IV} ; la *duración total*, T_d , como

$T_d = t_{IV} - t_I$; la *duración de ingreso*, τ_{ing} , como $\tau_{ing} = t_{II} - t_I$; la *duración de salida*, τ_{egr} , como $\tau_{egr} = t_{IV} - t_{III}$; δ , la *profundidad de tránsito*; y b , el *parámetro de impacto*, definido como $b = (a_p/R_*) \cos i$, siendo a_p el semieje orbital del planeta y R_* el radio de la estrella. Añadiremos también el parámetro T_0 llamado *tiempo de tránsito medio*, que se define como el instante de tiempo donde se produce exactamente la mitad del tránsito, como referencia de tiempo con respecto al cual medir la curva de luz.

Por cuestiones puramente geométricas, existe la siguiente relación entre el flujo y los radios del planeta y la estrella:

$$\delta = \Delta F = \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2 \quad (1.12)$$

siendo ΔF la caída total de luz.

Se producirá el tránsito de un exoplaneta si $a_p \cos i \leq R_p/R_*$, siendo i la inclinación de la órbita, y R_p el radio del planeta. Esto nos indica que sólo serán detectables los planetas cuya órbita tenga una inclinación alta, lo que limita la detección de exoplanetas por medio de este método a las órbitas cuyo plano está contenido en nuestra línea de observación. Por otro lado, este método también nos permite calcular la inclinación y el semieje de la órbita, y en consecuencia el radio y la masa del planeta (si conocemos previamente los respectivos valores de la estrella).

Expresión analítica para el tránsito de un exoplaneta

Daremos ahora una expresión analítica que permita calcular la curva de luz para un exoplaneta en función del tiempo.

Si tenemos en cuenta la noción geométrica de eclipses entre dos círculos y asumimos que la fuente de luz es uniforme, el flujo es (Mandel & Agol 2002):

$$F^e(p, z) = 1 - \lambda(p, z), \quad (1.13)$$

siendo

$$\lambda(p, z) = \begin{cases} 0 & 1 + p < z \\ \frac{1}{\pi} \left[p^2 k_0 + k_1 - \sqrt{\frac{4z^2 - (1 + z^2 - p^2)^2}{4}} \right] & 1 - p < z \leq 1 + p \\ p^2 & z \leq 1 - p \end{cases} \quad (1.14)$$

p se define como el cociente entre el radio del planeta y el radio de la estrella, y z como la distancia proyectada sobre el plano perpendicular al observador entre los centros del planeta y de la estrella.

Para órbitas circulares, se obtiene la siguiente relación entre z y el tiempo:

$$z = \frac{a_p}{R_*} \left(\left[\sin \left(\frac{2\pi}{P} (t - T_0) \right) \right]^2 + \left[\cos i \cos \left(\frac{2\pi}{P} (t - T_0) \right) \right]^2 \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

Si consideramos un caso más realista en el que la luz de las estrellas no es uniforme sino que se va atenuando conforme se aleja del centro, tenemos lo que se conoce como **oscurecimiento del borde** (*limb darkening*).

En dicho caso, al no ser la fuente de luz uniforme debemos aplicar una pequeña corrección a (1.13):

$$F(p, z) = \left[\int_0^1 dr 2r I(r) \right]^{-1} \int_0^1 dr I(r) \frac{d[F^e(p/r, z/r)r^2]}{dr}, \quad (1.16)$$

con $I(r) = 1 - \sum_{n=1}^4 c_n (1 - \mu^{n/2})$ que es la ley no lineal de oscurecimiento del borde (Claret 2000; Mandel & Agol 2002), siendo $\mu = \sqrt{1 - r^2}$, $0 \leq r \leq 1$ y c_n los coeficientes que caracterizan dicho oscurecimiento. Estos coeficientes varían según el tipo espectral de la estrella y son los que mejor se ajustan a los modelos estelares y observacionales (Mandel & Agol 2002; Sing 2010).

Aproximación para pequeños planetas

Como la expresión (1.16) puede ser complicada de manejar, computacionalmente hablando, se suele aproximar la curva de luz para planetas en los cuales $p \lesssim 0,1$ (Mandel & Agol 2002):

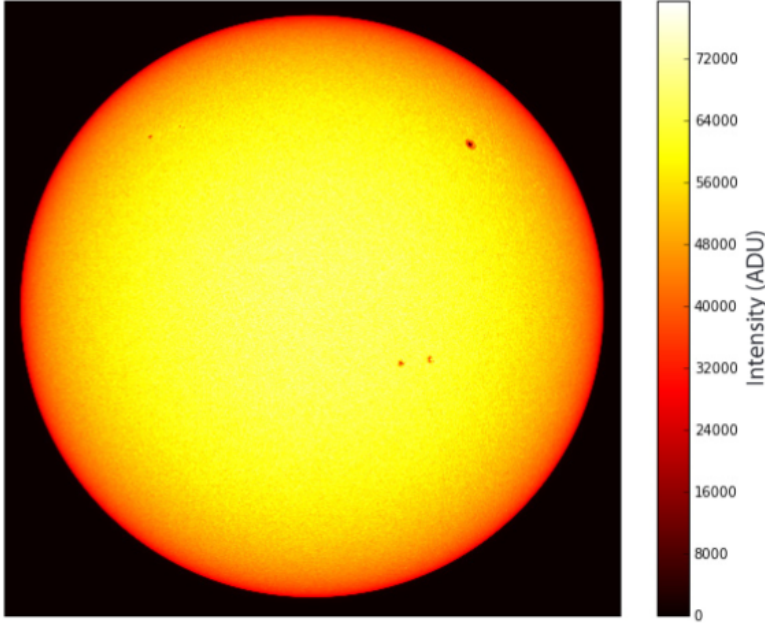


Figura 1.7: Imagen de la fotosfera solar tomada por SDO/HMI (*Solar Dynamics Observatory y Helioseismic and Magnetic Imager*, respectivamente). Se aprecia cómo la intensidad disminuye a medida que nos acercamos al borde. Crédito a [Moon et al. \(2017\)](#).

$$F(p, z) = \begin{cases} 1 & 1 + p < z \\ 1 - \frac{I^*(z)}{4\Omega\pi} \left[p^2 \cos^{-1}\left(\frac{z-1}{p}\right) - (z-1)\sqrt{p^2 - (z-1)^2} \right] & 1 - p < z \leq 1 + p \\ 1 - p^2 \frac{I_*(z)}{4\Omega} & z \leq 1 - p \end{cases} \quad (1.17)$$

con $I^*(z) = (4zp)^{-1} \int_{z-p}^{z+p} I(r) 2r dr$ y $I_*(z) = (1-a)^{-1} \int_{z-p}^1 I(r) 2r dr$, siendo $\Omega = \sum_{n=0}^4 c_n (n+4)^{-1}$, $c_0 = 1 - c_1 - c_2 - c_3 - c_4$ y $a = (z-p)^2$.

En cuanto a $I(r)$ asumimos un **modelo cuadrático**:

$$I(r) = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \mu)^2 \quad (1.18)$$

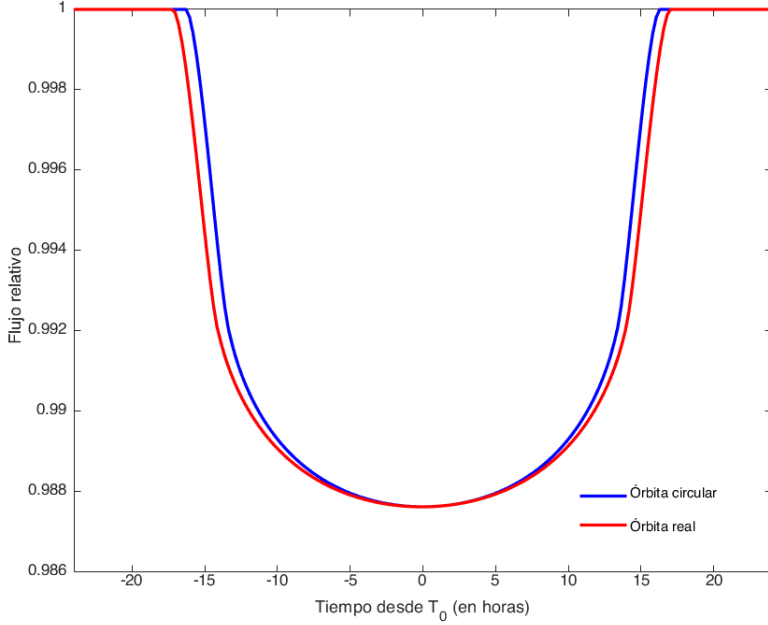


Figura 1.8: Simulación del tránsito de Júpiter por delante del Sol. En el grafo azul hemos asumido una órbita circular, mientras que en el rojo hemos utilizado el modelo del Apéndice A de [Kipping \(2008\)](#) para una órbita excéntrica, a la cual asignamos la excentricidad de Júpiter. Se ha fijado en ambos casos la inclinación a 90° para asegurar que se produzca tránsitos; de hecho en el caso de Júpiter ($a \sim 5$ u.a.) el tránsito no se produce si $i < 89,9^\circ$.

$$\text{con } c_1 = c_3 = 0, c_2 = u_1 + 2u_2, c_4 = -u_2.$$

El valor de los coeficientes c_i dependerá del tipo espectral de la estrella que consideremos. Para una como el Sol (tipo espectral G2V) los coeficientes cuadráticos correspondientes son $u_1 \simeq 0,4412$ y $u_2 \simeq 0,2312$ ([Sing 2010](#)).

Hemos simulado un tránsito Júpiter-Sol para ver las diferencias entre una órbita circular y una excéntrica. Se puede apreciar en la Figura 1.8 que, para el caso excéntrico, el tiempo de ingreso se atrasa y el de salida se adelanta; es decir, el planeta transita un poco más tiempo. Estas diferencias no son muy grandes, pero también es porque la excentricidad de la órbita de Júpiter es muy pequeña (0,0484). Cabe esperar que estas diferencias se acentúen conforme la

excentricidad sea mayor. De todas maneras, se suele utilizar como modelo el circular debido que es más fácil calcular los parámetros y porque normalmente los planetas que transitan a su estrella siguen una órbita casi circular debido a las fuerzas de marea, las cuales aumentan dramáticamente cuanto más pequeña es la distancia a su estrella (Goldreich & Soter 1966; Sección 3.1.2).

1.1.3. Microlente gravitatoria

Este método consiste en el aumento momentáneo del tamaño aparente de una estrella de fondo (*fuelle*) por la presencia de un cuerpo masivo (presumiblemente otra estrella con o sin planeta) situado entre la fuente y el observador, el cual actúa como *lente* (de ahí el nombre). Este aumento se produce por la curvatura que sufre la luz procedente de la estrella debido a la influencia de un cuerpo masivo, tal y como ya predijo Einstein. Desde 2004 han sido descubiertos 105 planetas mediante este método, entre ellos 4 sistemas múltiples (NASA Exoplanet Archive).

Estos sucesos son bastante esporádicos e impredecibles, aunque Bramich (2018) fue capaz de predecirlos en algunos casos, pero cuando suceden se puede detectar un gran pico de luz en la fotometría de la fuente, a veces con un aumento de más del 10% (Udalski et al. 2005).

1.1.3.1. Caso de una sola lente (una estrella)

Se define el **radio de Einstein** como

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}(D_L^{-1} - D_S^{-1})}, \quad (1.19)$$

siendo M la masa de la lente (si más de un cuerpo constituye la lente, será la suma total de todos los cuerpos), c la velocidad de la luz, D_L la distancia entre la lente y el observador y D_S la distancia entre la fuente y el observador.

La ecuación de lente⁴ para el caso de una sola lente es (Ecuación (3.6) de Bartelmann & Schneider 2001):

$$\beta = \theta - \hat{\alpha} \quad (1.20)$$

Siendo $\hat{\alpha}$ en ángulo de desvío de los rayos de luz provenientes de la fuente (Figura 1.9). Este ángulo fue calculado⁵ en Einstein (1911) como consecuencia

⁴En todo momento asumiremos que la fuente es un punto de luz.

⁵La fórmula fue debidamente corregida en Einstein (1915c).

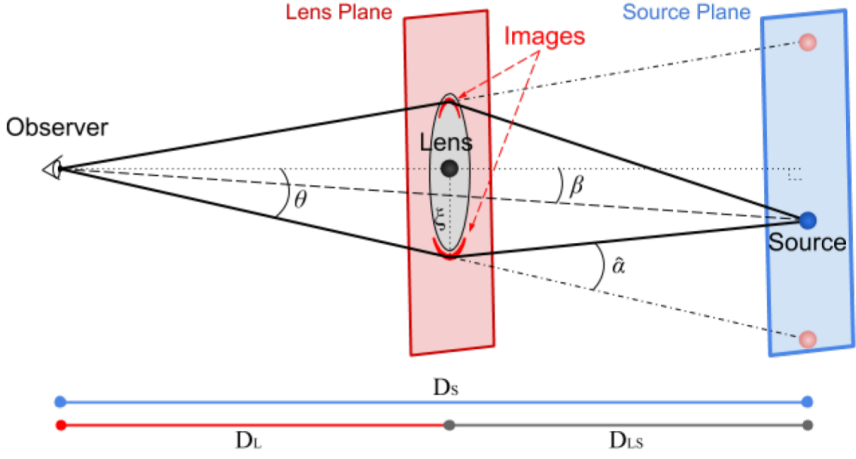


Figura 1.9: Esquema del método de microlente gravitatoria para el caso de una sola lente (Tsapras 2018). β denota la posición angular de la fuente, θ es la posición de una de las imágenes y $\hat{\alpha}$ es el ángulo de desvío que produce la lente sobre el rayo de luz proveniente de la fuente.

directa del principio de equivalencia (Einstein 1907: 461), y es:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2(D_L^{-1} - D_S^{-1})\theta} \quad (1.21)$$

con lo cual se tiene

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (1.22)$$

Haciendo ahora el cambio $u = \beta/\theta_E$, $y = \theta/\theta_E$:

$$u = y - \frac{1}{y} \quad (1.23)$$

Como nos interesa calcular la posición angular de la lente en función de la posición angular de la fuente, necesitamos resolver la ecuación cuadrática que nos permita calcular los valores de x en función de y . Las soluciones de dicha ecuación son:

$$y = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4}}{2} \quad (1.24)$$

Cada una de estas dos soluciones representa la **imagen** de la lente (véase la Figura 1.9 donde se aprecian dos imágenes).

Definimos el **aumento óptico** A como el cociente entre el producto del brillo por el ángulo sólido de la lente y el producto del brillo por el ángulo sólido de la fuente, lo que resulta, debido a la conservación del brillo de la fuente (por ejemplo, Ecuación 7 de Gaudi 2010):

$$A = \left| \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta} \right| \quad (1.25)$$

Sustituyendo en (1.25) y teniendo en cuenta las dos soluciones de (1.24):

$$A_1 = \frac{\theta_1}{2\beta} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta + 4\theta_E^2}} + 1 \right), \quad A_2 = \frac{\theta_2}{2\beta} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta + 4\theta_E^2}} - 1 \right). \quad (1.26)$$

Cambiando ahora a las variables u e y obtenemos:

$$A_1 = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} + \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} - \frac{1}{2} \quad (1.27)$$

Por lo tanto, el aumento óptico total será la suma del aumento óptico de las dos imágenes:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}} \quad (1.28)$$

Seguidamente, necesitamos calcular u , que sería la posición angular en radios de Einstein, para caracterizar completamente la curva de luz del aumento óptico en función del tiempo. Para ello u depende, en el caso de una sola lente, de 3 parámetros: u_0 (la separación mínima lente-fuente), t_0 (un tiempo de referencia que indica cuándo se produce mayor aumento óptico) y t_E , que es el tiempo que tarda la fuente en cruzar el radio de Einstein (ya que la fuente se mueve con respecto a la lente con un movimiento propio μ_{rel}). Podemos expresar $t_E = \theta_E / \mu_{rel}$.

La relación que hay entre u y estos 3 parámetros es:

$$u = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_E} \right)^2} \quad (1.29)$$

Una vez que conocemos u_0 , t_E y t_0 podremos calcular el aumento óptico A para cualquier instante t .

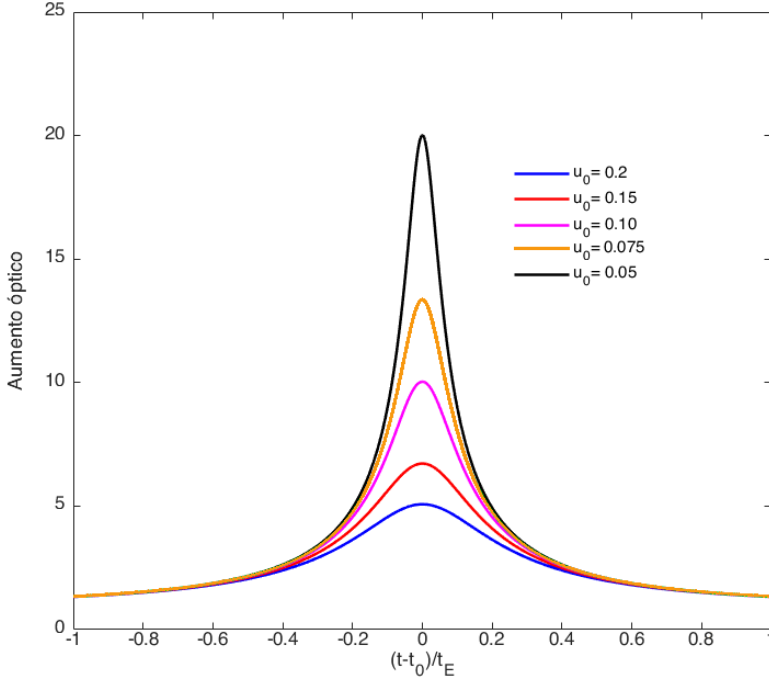


Figura 1.10: Variación del aumento óptico A con respecto al tiempo, teniendo en cuenta una sola lente provocada por una fuente puntual, para distintos valores de u_0 , utilizando (1.28) y (1.29).

1.1.3.2. Caso de lente binaria (estrella + planeta)

Nuestro objetivo será detectar anomalías en el aumento óptico producidas por la presencia de otra lente, el planeta. Por lo tanto debemos considerar en este caso la **ecuación de lente binaria**.

Ecuación de lente binaria

Siguiendo la notación que aparece en la Figura 1.11, la ecuación que relaciona η con ξ es (Tsapras 2018):

$$\vec{\eta} = \xi \frac{D_S}{D_L} - D_{LS} \hat{\alpha}, \quad (1.30)$$

cumpliéndose la relación

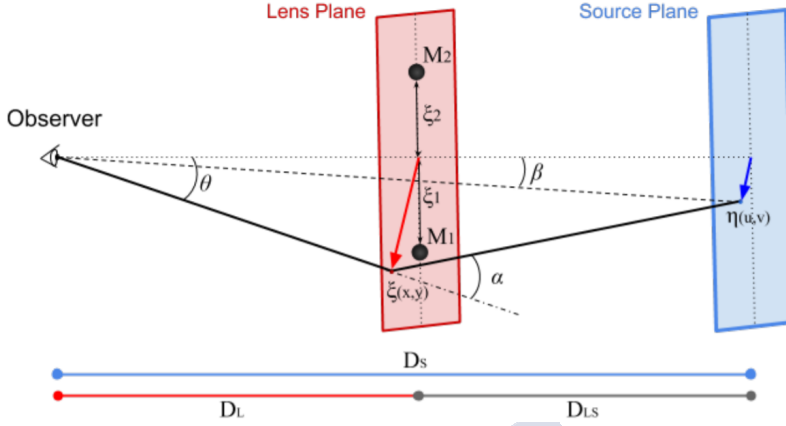


Figura 1.11: Esquema del método de microlente gravitatoria para el caso de una lente binaria (Tsapras 2018). Los vectores $\vec{\xi}_{1,2}$ indicando la posición de planeta y estrella proyectados sobre el plano perpendicular a la línea del observador. η marca la posición del rayo de luz que sale del plano de la fuente, β el tamaño angular de la fuente y α el ángulo de desvío del rayo de luz causado por la influencia gravitatoria de la estrella-planeta. $\vec{\xi}$ marca el vector apuntando al punto donde se produce el desvío y θ indica el tamaño angular de la lente.

$$\hat{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \left(M_1 \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_1}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_1|^2} + M_2 \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_2}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_2|^2} \right) \quad (1.31)$$

siendo G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz.

Si ahora llamamos $r_E = \theta_E D_L$ ⁶, $\vec{z} = \vec{\xi}/r_E$, $\vec{w} = (D_L/D_S) \cdot \vec{\eta}/r_E$, $\epsilon_1 = M_1/(M_1 + M_2)$ y $\epsilon_2 = M_2/(M_1 + M_2)$ (Schneider & Weiss 1986), llegamos a

$$\vec{w} = \vec{z} - \epsilon_1 \frac{\vec{z} - \vec{z}_1}{|\vec{z} - \vec{z}_1|^2} - \epsilon_2 \frac{\vec{z} - \vec{z}_2}{|\vec{z} - \vec{z}_2|^2} \quad (1.32)$$

Que en notación compleja (Witt 1990) queda en la forma:

$$w = z - \frac{\epsilon_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{\epsilon_2}{\bar{z} - \bar{z}_2} \quad (1.33)$$

⁶ r_E se denota como radio de Einstein *lineal* y θ_E radio de Einstein *angular* (Perryman 2018: 121).

Como $\epsilon_1 = 1/(1+q)$ y $\epsilon_2 = q/(1+q)$, siendo $q = M_2/M_1$ y considerando M_2 como origen del plano de referencia con M_1 encontrándose en el eje X a una separación s , podemos reescribir (1.33) como

$$w = z - \frac{1}{1+q} \left(\frac{1}{\bar{z}-s} - \frac{q}{\bar{z}} \right) \quad (1.34)$$

Esta expresión nos da la manera de calcular el lugar de la fuente, dada la separación s , el cociente de las masas q y el lugar de la lente. De nuevo, nos interesa la lente en función de la fuente, por lo que es conveniente invertir esta ecuación para tener una expresión donde poder calcular z a partir de w . El problema radica en que (1.34) no es algebraicamente invertible cuando tenemos más de una lente (Han 2008; Han & Han 2002) así que lo que se busca es un método numérico que permita resolverla, como por ejemplo el método de Laguerre (Press et al. 1992).

Una vez que hemos calculado los valores de z tenemos que comprobar que efectivamente cumplen (1.33) y, si en efecto lo hacen, diremos que corresponden a las imágenes de las lentes generadas. Cabe decir que, aunque hay dos cuerpos que actúan como lente, las imágenes generadas pueden ser tres o cinco (Gaudi 2010).

Conocidos los valores de z , pasamos a calcular el aumento óptico para cada imagen z_i , tal que

$$A_i = \left[\frac{1}{\left| 1 - \left| \frac{\epsilon_1}{(z-z_1)^2} + \frac{\epsilon_2}{(z-z_2)^2} \right|^2 \right|} \right]_{z=z_i} \quad (1.35)$$

El aumento óptico total será, por tanto, la suma de todas las imágenes

$$A = \sum_i A_i \quad (1.36)$$

Hemos confeccionado un programa en MATLAB donde se implementa todo este proceso. Se encuentra en el Apéndice B con el nombre de [roots.m](#).

Podríamos pensar: ¿Qué pasa si el denominador en (1.35) es nulo para algún z ? Pues que los z donde eso sucede forman parte de lo que se llama las curvas críticas, que al pasar al plano de la fuente por medio de la ecuación de lente dan lugar a las llamadas curvas *cáusticas* en las que el aumento óptico

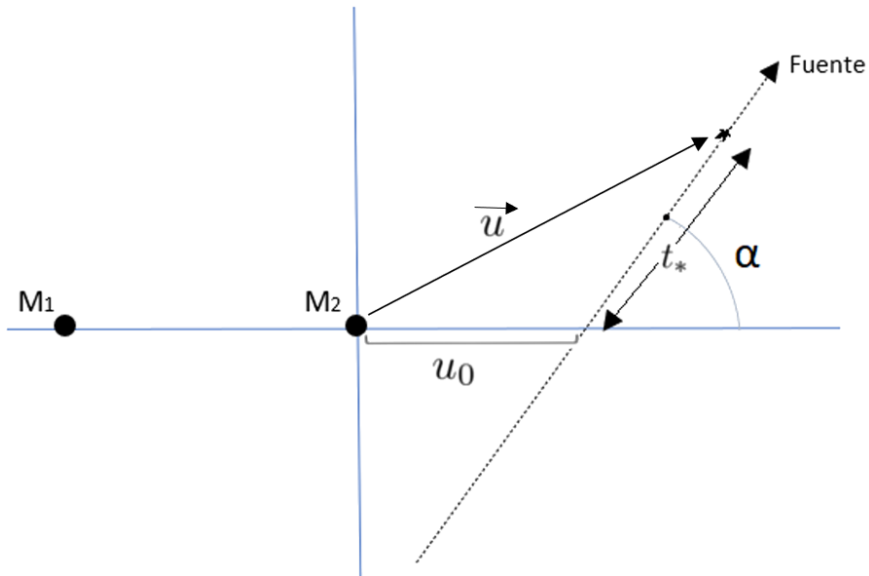


Figura 1.12: Bosquejo de la lente binaria. t_* denota el factor $(t - t_0)/t_E$. Siguiendo la geometría ilustrada en la figura, el vector de la fuente u se calcula como $(u_0 + t_* \cos \alpha, t_* \sin \alpha)$.

es infinito (Figura 1.15).

Si queremos esta vez relacionar el tiempo con el aumento óptico, necesitamos introducir 3 parámetros⁷ más (además de t_0 , t_E y u_0): α , el ángulo que forma la trayectoria de la fuente con la línea que une las lentes, el cociente q de la masa de las dos lentes ($q = M_2/M_1$) y s , la separación entre los dos cuerpos de la lente en el plano asociado a ella (en radios de Einstein). Véase la Figura 1.12 para ver cómo se relaciona u con t_0 , t_E , u_0 y α .

Teniendo en cuenta dichos parámetros, lo único que podemos calcular (asumiendo que sigue una órbita circular) es la masa de las dos componentes y el semieje. Para ello es necesario que la fuente haya cruzado la zona cáustica, porque necesitamos haber calculado ρ (Albrow et al. 1999b), además de haber

⁷Si rompemos la asunción de que la fuente es un punto de luz, tenemos que tener cuidado cuando la trayectoria cruce la zona cáustica porque tendremos que introducir un nuevo parámetro, $\rho = \rho_*/\theta_E$, que es el radio normalizado de la fuente y que provoca desviaciones en la curva de luz por el llamado *efecto de fuente finita* (véase por ejemplo Dominik 2009).

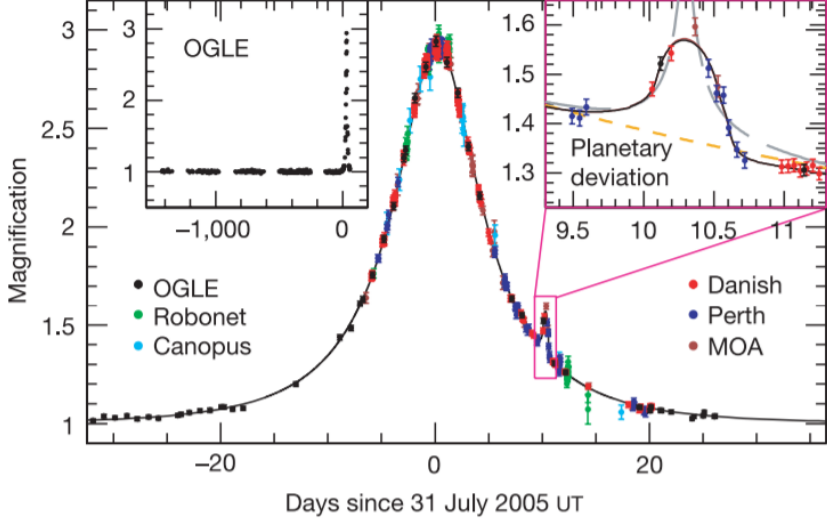


Figura 1.13: Gráfica tiempo vs aumento óptico producido por una lente binaria de la fuente OGLE-2005-BLG-390. Se puede ver arriba a la derecha cómo un pico menor aparece debido a la lente del planeta, algo que no ocurriría si detectamos una sola lente. Imagen de [Beaulieu et al. \(2006\)](#).

medido la paralaje relativa de la fuente con respecto a la lente.

Primero, calculamos el radio de Einstein por medio de la relación

$$\theta_E = \rho_*/\rho, \quad (1.37)$$

donde ρ_* se puede calcular a partir de la estrella de fondo ([Kervella & Fouqué 2008](#)).

Ahora, si incluimos en nuestro modelo los efectos de la paralaje en el plano de la lente obtendremos como nuevo parámetro $\pi_E = \pi_{\text{rel}}/\theta_E$, siendo π_{rel} la paralaje relativa de la fuente con respecto a la lente ($\pi_{\text{rel}} = D_L^{-1} - D_S^{-1}$). Gracias a este parámetro podremos calcular la suma de las masas, ya que

$$\pi_E = \frac{\pi_{\text{rel}}}{\theta_E} = \frac{\theta_E}{\frac{4G}{c^2}(M_1 + M_2)}, \quad (1.38)$$

y de aquí

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\theta_E}{\frac{4G}{c^2} \pi_E}, \quad (1.39)$$

que, junto a $q = M_2/M_1$, nos da las masas M_1 y M_2 . Como s ya nos da la separación en radios de Einstein, simplemente tenemos que multiplicar s por θ_E para obtener el semieje en u.a.

Existen muy contadas excepciones donde se puede calcular el resto de parámetros orbitales, lo que se llama el efecto *xallarap* causado por una fuente doble (Shin et al. 2011). Un evento de estas características es incluso menos probable (Griest & Hu 1992), además de que sólo se ha detectado un sistema planetario de este tipo (Gaudi et al. 2008) por lo que no trataremos este caso. Para más información véase Skowron (2011).

A la hora de extraer información acerca de los elementos orbitales con este método nos encontramos con otro problema: no podemos combinarlo ni con el método de tránsitos ni con el de velocidades radiales (salvo casos tremendamente especiales). Esto sucede porque la microlente gravitatoria no suele interferir con los métodos anteriores debido a que los periodos detectados son mucho más grandes que los hallados por el método de velocidad radial en la mayoría de los casos, y mucho mayores que todos los hallados por el método de tránsitos⁸. El problema se acentúa si tenemos en cuenta que la mayoría de planetas descubiertos con microlente gravitatoria son gigantes gaseosos con baja masa ($0,3 M_J$) y semieje grande, características que no se corresponden con casi ningún planeta descubierto por el método de velocidad radial (Bennett et al. 2014).

En resumen, la microlente gravitatoria proporciona cierta información sobre la masa y el semieje del exoplaneta pero se debe tener en cuenta las limitaciones que conlleva. Algo ventajoso de este método con respecto a los anteriores es que no es tan sensible a la distancia con respecto al observador como lo pueden ser la velocidad radial o el método de tránsitos, lo que hace que su señal no requiera de demasiada precisión para ser detectada, incluso cuando la estrella se encuentra a una distancia enorme de nosotros.

Los inconvenientes por otro lado también se deben de tener en cuenta. Como ya hemos dicho, la detección de exoplanetas por medio de microlente gravitatoria recae mucho en la suerte porque para que se produzcan estos

⁸https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots/exo_massperiod.png

fenómenos la estrella, el planeta y el observador tienen que estar perfectamente alineados; por ello son bastante infrecuentes: se estima hay 10^{-8} posibilidades entre 1 de detectar una microlente planetaria alrededor de una estrella (Tsapras 2018). Hay que tener en cuenta también que estos eventos son irrepetibles, por lo que no se observan con ninguna recurrencia y eso dificulta el análisis de los datos.

Así mismo, hay que tener en cuenta todas las dificultades inherentes a los distintos efectos que pueden influir en la fotometría de una lente binaria, que pueden ser el efecto de fuente finita, la paralaje producida por el movimiento orbital de la Tierra, etc. Todos estos efectos pueden causar lo que se llaman *degeneraciones*, es decir, curvas de luz cuyos parámetros se ajustan bien tanto a un modelo como a otro. De todos modos, se han descubierto varias maneras de romper algunas de estas degeneraciones (Gould & Han 2000; Albrow et al. 1999b; Cassan 2008).

Cuando hablemos de los exosatélites veremos que también proporciona ciertas opciones para su detección en un futuro.

Ejemplo de lente binaria

En este ejemplo calcularemos el aumento óptico a partir de unos ciertos parámetros.

Suponemos que $q = 0,0095$ ($M_p = 10M_J$), $s = 1,5$ radios de Einstein, $u_0 = 0,02$ radios de Einstein y el ángulo $\alpha = 0,2$ radianes. Hacemos variar t_* desde -3 a $+3$.

Primero, para aplicar el método de Laguerre necesitamos expresar (1.34) en forma polinómica. Para ello, nos basaremos en la expresión dada en nexsci.caltech.edu/workshop/2017/1LightCurveCalculation_VBozza.pdf:

$$w - z + \frac{1}{1+q} \left(\frac{1}{\bar{z} - s} - \frac{q}{\bar{z}} \right) = 0 \implies \sum_{i=0}^5 c_i z^i = 0, \quad (1.40)$$

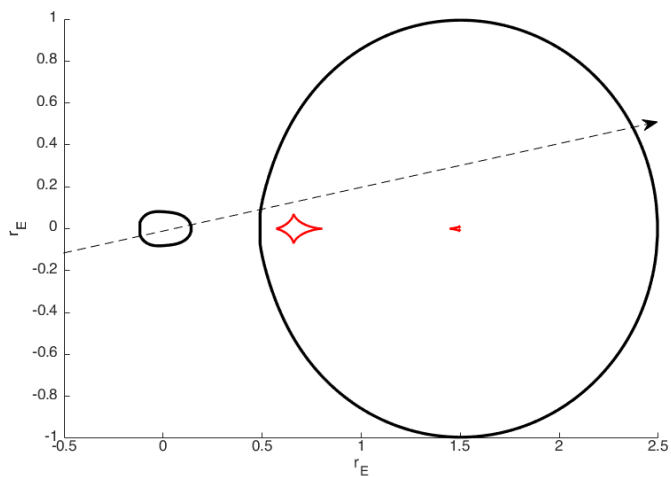


Figura 1.14: Ejemplo de lente binaria. En negro, la curva crítica para el ejemplo que estamos considerando. En rojo, la curva cáustica. Las unidades están en r_E . La flecha discontinua marca la trayectoria de la fuente.

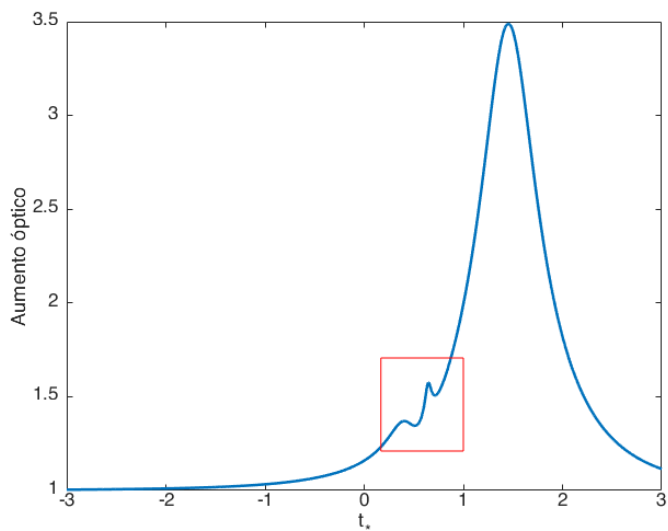


Figura 1.15: Gráfica tiempo t_* vs aumento óptico producido por una lente binaria con los parámetros indicados arriba. En el rectángulo rojo aparece el pico producido por el exoplaneta.

con

$$\begin{aligned}
 c_0 &= s^2 w m_2^2, \\
 c_1 &= -s m_2 (2w + s(-1 + sw - 2w\bar{w} + m_2)), \\
 c_2 &= w - s^3 w \bar{w} + s(-1 + m_2 - 2w\bar{w}(1 + m_2)) + s^2(\bar{w} - 2\bar{w}m_2 + w(1 + \bar{w}^2 + m_2)), \\
 c_3 &= s^3 \bar{w} + 2w\bar{w} + s^2(1 + 2w\bar{w} - \bar{w}^2 + m_2) - s(w + 2w\bar{w}^2 - 2\bar{w}m_2), \\
 c_4 &= \bar{w}(-1 + 2s\bar{w} + w\bar{w}) - s(-1 + 2s\bar{w} + w\bar{w} + m_2),
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

y

$$c_5 = (s - \bar{w})\bar{w},$$

siendo $m_1 = 1/(1 + q)$ y $m_2 = q/(1 + q)$.

Según la Figura 1.12, u se calcula como

$$\vec{u} = (u_0 + t_* \cos \alpha, t_* \sin \alpha) \equiv (u_0 + t_* \cos \alpha) + it_* \sin \alpha. \tag{1.42}$$

Una vez calculado u para un instante t_* , aplicamos el método de Laguerre al polinomio (1.40). Después tenemos que comprobar que cumplen (1.33). Las que verifiquen dicha igualdad, diremos que corresponden a las imágenes z_i asociadas a u . Finalmente, calculamos el aumento óptico A según (1.28) (Figura 1.15).

1.1.4. Imagen directa

Lo ideal cuando se habla de detección de exoplanetas o exosatélites sería poder verlos directamente, es decir, sin valerse de métodos indirectos sino simplemente resolviendo la luz de las dos o tres componentes (estrella y planeta o planeta + satélite) para visualizarlas en el telescopio. Por desgracia, eso es realmente difícil en el caso de un exoplaneta y más aún si hablamos de un exosatélite, por lo que no es un método a tener demasiado en cuenta. No obstante, en el caso de exoplanetas, aunque difícil es posible y de hecho algunos han sido descubiertos por medio de este método: unos 143 ([The Extrasolar Planets Encyclopaedia](#)).

Las dificultades de este método parten de dos cuestiones importantes: una de ellas es la potentísima resolución necesaria de los telescopios para conseguir distinguir la separación angular de las dos componentes. Algunas técnicas se han implementado para resolver este problema; por ejemplo, para bloquear la fuente de luz de la estrella y hacer la del exoplaneta más visible se utilizan los

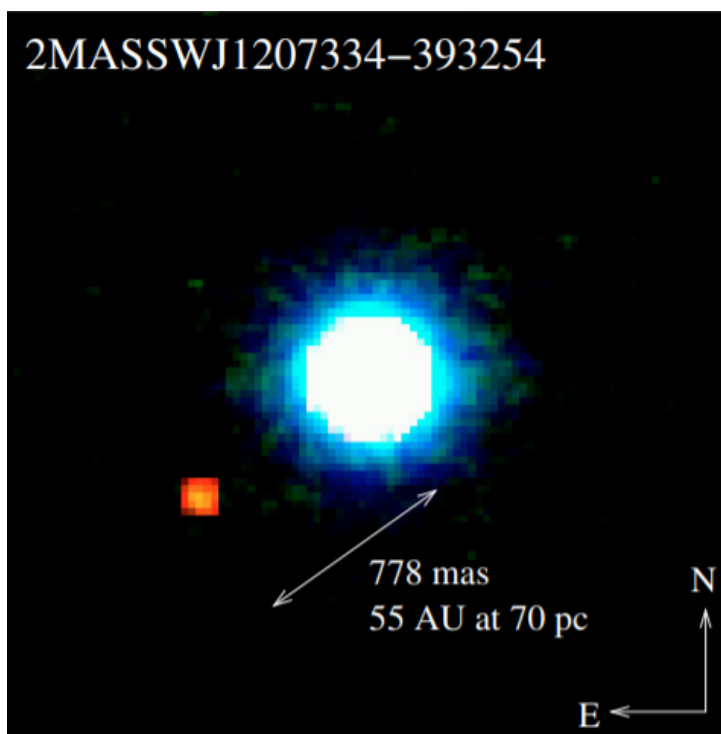


Figura 1.16: Imagen directa de la estrella 2M1207 junto a su planeta 2M1207b. Crédito a [Chauvin et al. \(2004\)](#).

llamados **coronógrafos**.

El otro problema es la grandísima diferencia de flujo que existe entre el planeta y la estrella. La radiación que captamos del exoplaneta proviene tanto de la luz que refleja de la propia estrella como del calor que despide. La luz reflejada por el planeta, por desgracia, suele ser muy pequeña en comparación con la que emite la estrella.

¿Y cómo sabemos la relación que hay entre el flujo de luz reflejado por el exoplaneta y el flujo de la estrella? Según [Cabrera & Schneider \(2007\)](#), que utilizan la teoría fotométrica planetaria desarrollada por [Lester, McCall & Tatum \(1979\)](#), tenemos que:

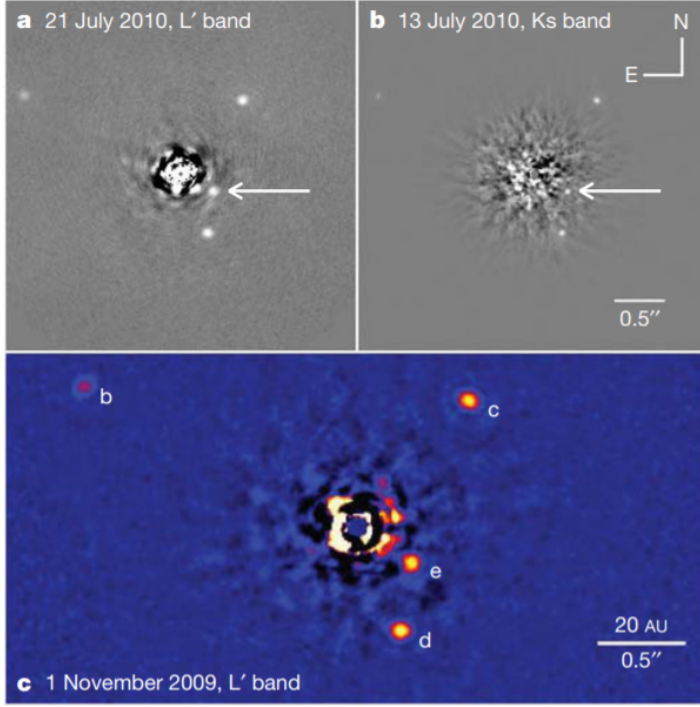


Figura 1.17: Tres imágenes de 4 planetas orbitando HR 8799. A la Figuras a y b le fue aplicada una máscara coronográfica. La flecha indica el descubrimiento de HR 8799e (Marois et al. 2010).

$$\frac{F_p}{F_*} = A \left(\frac{R_p}{a_p} \right)^2 \Psi(\alpha), \quad (1.43)$$

siendo A el **albedo** del planeta, R_p su radio, a_p su semieje y $\Psi(\alpha)$ lo que se llama *ley de fase*, que tiene en cuenta el ángulo de incidencia de los rayos de luz provenientes de la estrella.

Si suponemos el caso del exoplaneta 2M1207b, cuyo radio es $1,5 R_J$ y cuyo semieje orbital es aproximadamente 50 u.a. (Chauvin et al. 2004, 2005), tenemos:

$$\frac{F_p}{F_*} = 2,05543276 \cdot 10^{-10} A \cdot \Psi(\alpha). \quad (1.44)$$

En este caso, supondría aproximadamente dos diezmilmillonésimas partes la luminosidad de la estrella. Como vemos, es una cantidad de luz casi imperceptible.

Debido a esto, no interesa (fotométricamente hablando) “captar” la luz que se refleja de la estrella. ¿Y respecto al calor que despidе? Ahí ya podemos ser más optimistas, ya que el contraste de flujo total entre el planeta y la estrella puede variar de 10^{-10} en la banda visible a 10^{-5} en la banda infrarroja (Perryman 2018), por lo que parece evidente que nos interesa sobre todo medir la radiación respecto a esta banda⁹. Este hecho sugiere que los exoplanetas sensibles a este método son muy calientes, y en efecto todos los descubiertos hasta ahora (excepto dos) su temperatura superficial se encuentra entre los 2000 y 10000 K (NASA Exoplanet Archive).

Este método proporciona información sobre el semieje de la órbita si conocemos la paralaje σ'' y la combinamos con la separación angular, a'' :

$$a_p = a'' / \sigma'' \quad (1.45)$$

También podemos obtener la masa y el radio del planeta. El procedimiento es el siguiente: primero, necesitamos tener una estimación de la edad de la estrella. Para ello se pueden usar determinados procedimientos: analizar la absorción de litio (Soderblom et al. 2014; Carlos et al. 2016), estudiar la *girocronología* (Barnes 2003, 2007) o la actividad de la cromosfera (Soderblom et al. 1991; Mamajek & Hillenbrand 2008). Segundo, asumimos que la edad de la estrella es la misma que la del planeta. En cuanto tengamos la luminosidad (la cual obtenemos por medio de imagen directa) y la edad, se pueden utilizar modelos de enfriamiento para estimar la **masa** y la **temperatura** del planeta, atendiendo a modelos evolutivos de formación planetaria (Baraffe et al. 2002, 2003). Finalmente, utilizando la temperatura y la luminosidad se puede calcular el **radio** por medio de la **ley de Stefan-Boltzmann** aplicada a un cuerpo negro:

$$L = 4\pi\sigma R_p^2 T^4 \quad (1.46)$$

con σ la constante de Boltzmann ($5,670374 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$).

⁹También en Perryman (2018) la luz reflejada muestra, en cambio, una dominancia de la radiación visible sobre la infrarroja.

Cabe mencionar que varios problemas pueden surgir al derivar estos parámetros; por ejemplo, los modelos evolutivos de enfriamiento son fuertemente dependientes de las condiciones iniciales (Marley et al. 2007; Fortney et al. 2008) y por ende que las incertidumbres en los parámetros pueden ser muy grandes. Otro problema es que la precisión con la que cuentan los instrumentos de observación aún es bastante cuestionable a nivel de la imagen directa de un exoplaneta, por lo que existen grandes errores de medida que hacen que la estimación de los parámetros sea dudosa, en el mejor de los casos. Un ejemplo de ello es la estimación de la masa de GJ 504b como $4,0_{-1,0}^{+4,5}$ masas de Júpiter (M_J) y la edad del sistema 160_{-60}^{+350} , 160_{-60}^{+70} o 330 ± 180 Myr, según el modelo utilizado (Kuzuhara et al. 2013). Como vemos, son estimaciones bastante cuestionables.

En definitiva, este método no ofrece demasiada información sobre la órbita del exoplaneta más allá de la separación angular entre las dos componentes (excepto si lo combinamos con otros métodos lo cual no siempre es posible). Sólo es aplicable a casos especiales y, aunque puede ser útil a modo ilustrativo, no proporciona muchas más posibilidades de conocer sus características orbitales lo cual limita severamente la capacidad de estudiar su estabilidad y habitabilidad (que serán los objetivos de los Capítulos 3 y 4 respectivamente), por lo que no nos será demasiado útil en el desarrollo del presente trabajo.

1.1.5. TTV

TTV (*Timing Transit Variation*) se refiere a las variaciones que se producen en el tiempo de tránsito¹⁰ de un exoplaneta producidos por la influencia de un cuerpo externo (en este caso consideraremos uno o varios planetas y en la siguiente Sección un satélite). Gracias a esta variación se puede determinar un sistema planetario múltiple a partir de un planeta ya descubierto. De hecho, este método es generalmente utilizado para el descubrimiento de planetas múltiples: 10 planetas dentro de sistemas planetarios múltiples han sido detectados ([The Extrasolar Planets Encyclopaedia](#)).

El “tiempo de tránsito” se toma como el tiempo de tránsito medio T_0 que definíamos en la [Sección 1.1.2](#), pero debemos mencionar que este término es

¹⁰No debe confundirse *tiempo de tránsito*, que se refiere al instante de referencia en el que se dice que se *produce* el tránsito, el cual se corresponde con el instante T_0 (Véase la [Sección 1.1.2](#)), con *duración del tránsito*, que se refiere al tiempo transcurrido durante un tránsito completo.

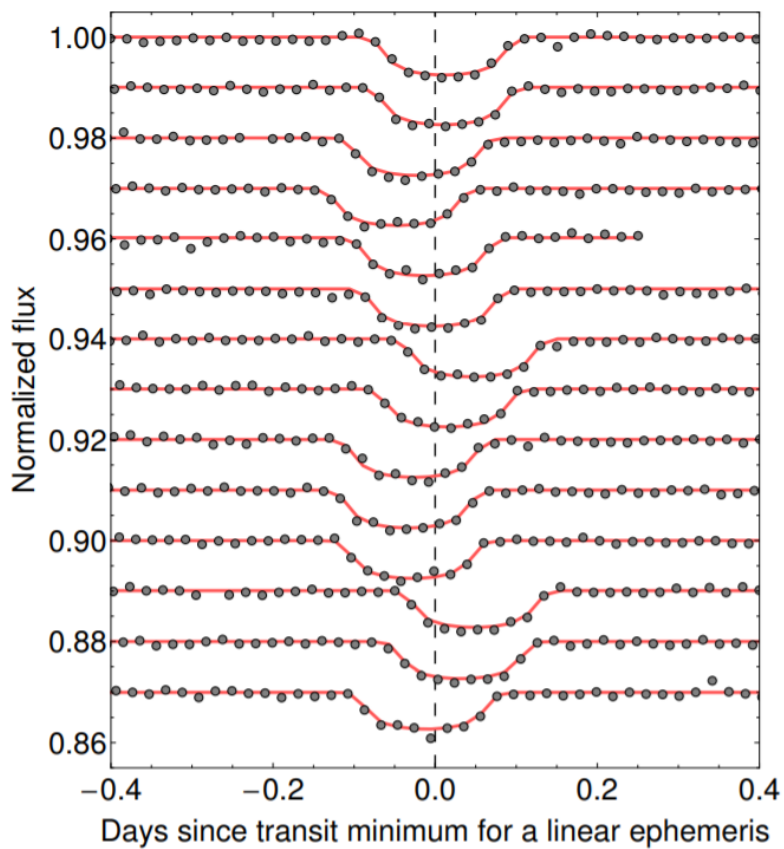


Figura 1.18: Gráfica ilustrando cómo el tránsito se adelanta y se atrasa por la influencia de un cuerpo externo (Nesvorný et al. 2012)

correcto sólo si consideramos órbitas circulares; para el caso donde existan excentricidades la curva de luz será asimétrica y por tanto el término correcto a considerar será lo que se conoce como *tránsito mínimo*, que corresponde al instante donde los centros de los discos del planeta y estrella se encuentran a una distancia mínima (Kipping 2011b).

Determinar que el TTV detectado es causado debido a la presencia de otro exoplaneta no es una tarea sencilla: existen otros fenómenos que pueden causar dicha señal, como puede ser el **efecto Applegate**, que produce variaciones en el tiempo de tránsito debido a la actividad magnética de la estrella (Applegate 1992), la precesión del periastro (Heyl & Gladman 2007), o simplemente la presencia de otros cuerpos que no son planetas, como estrellas de baja luminosidad, enanas marrones o exosatélites del planeta.

Dar una formulación analítica general para el TTV causado por un planeta es, de igual manera, una tarea complicada (Masuda 2014; Nesvorný & Morbidelli 2008; Lithwick et al. 2012). Lo que se hace en Agol et al. (2005), por ejemplo, es dar una formulación para el TTV dependiendo de la configuración dinámica de los dos exoplanetas; el que transita y el que perturba su tránsito.

Para asegurar la detección, siempre asumiremos que el planeta que transita tiene una inclinación de 90° .

1.1.5.1. Órbitas coplanarias, $e_1 = 0$, $e_2 \neq 0$, $a_2 \gg a_1$

Para órbitas coplanarias, en las cuales un planeta exterior con órbita excéntrica perturba la órbita circular de un planeta interior con radio orbital mucho menor que el semieje del planeta exterior (Agol et al. 2005), existe la expresión:

$$\Delta TTV = \frac{M_2}{2\pi(M_* + M_1)}(1 - e_2^2)^{-3/2}(f_2 - M_2 + e_2 \sin(f_2)), \quad (1.47)$$

refiriéndose los subíndices 1 y 2 a los planetas interior y exterior, respectivamente.

Para el caso no coplanario, véase la ecuación (46) de Borkovitz et al. (2003).

1.1.5.2. Órbitas coplanarias, en resonancia orbital de primera orden

Además de considerar los casos donde se tiene en cuenta que la perturbación gravitatoria del cuerpo exterior sobre el interior es significativa pero todavía pequeña, debemos también contemplar el caso en que dos planetas se encuentren en **resonancia orbital**, es decir, que el cociente de sus periodos sea un número entero¹¹. Un ejemplo de resonancia orbital son los satélites galileanos de Júpiter o los exoplanetas del sistema TRAPPIST-1 (Luger et al. 2017).

En este caso, la amplitud de la señal del TTV es (Agol et al. 2005):

$$\text{máx } \Delta TTV = \frac{P_2}{4,5j} \frac{m_2}{m_2 + m_1}. \quad (1.48)$$

Por lo que, si conseguimos determinar el periodo del planeta exterior y la masa del planeta interior, podremos calcular la masa del planeta exterior y, con ello, su semieje.

¿Y cómo determinar el periodo del planeta exterior? Depende del escenario que nos encontremos. Si ambos planetas transitan (lo cual no es demasiado improbable debido a que los sistemas planetarios suelen estar bastante próximos a la coplanaridad) podemos determinar el periodo utilizando la señal de varios tránsitos. Una vez tenemos P_2 y P_1 podremos saber si se encuentran en resonancia orbital y, de ser el caso, también sabremos j .

Si la excentricidad de ambos planetas es grande, entonces también podría darse la posibilidad de que aparezcan resonancias de un orden superior, tales como 1:3, 2:5, 3:6... (Pan & Sari 2004). No consideraremos ese caso, puesto que a lo largo de este trabajo trataremos con excentricidades pequeñas.

1.1.5.3. Órbitas coplanarias, planetas cercanos a la resonancia orbital de primera orden

Un modelo más realista es el que considera a los planetas cercanos a la resonancia orbital; es decir, que el cociente de sus periodos es cercano pero no igual a $j/j - 1$. En este escenario se define Δ como (Lithwick et al. 2012):

¹¹Resonancia de primera orden significa que tiene la forma $j : j + 1$, para algún j ($1 : 2$, $2 : 3$, $4 : 5$, etc.).

$$\Delta = \frac{P_2}{P_1} \frac{j-1}{j} - 1. \quad (1.49)$$

Obviamente para un sistema planetario de estas características Δ es cercano a 0.

Lithwick et al. (2012) descubrieron que la señal del TTV provocado por el planeta exterior en el tránsito del planeta interior es una sinusoidal, de la forma

$$TTV = A_{\text{ttv}} \sin(\lambda^j + \phi_{\text{ttv}}), \quad (1.50)$$

siendo A_{ttv} la amplitud de la señal, ϕ_{ttv} la fase y λ^j es la longitud de las conjunciones del planeta interior y exterior, que se define como

$$\lambda^j \equiv j\lambda_2 - (j-1)\lambda_1 = j\frac{2\pi}{P_1}(t_1 - T_{01}) - (j-1)\frac{2\pi}{P_2}(t_2 - T_{02}), \quad (1.51)$$

siendo T_{01} y T_{02} los tiempos de tránsito de referencia para el planeta interior y para el planeta exterior, respectivamente. Como ambos son conocidos, λ^j también lo es, a no ser que los periodos del planeta sean desconocidos. En cuyo caso, nuestro modelo contaría con 4 parámetros: P_1 , P_2 , A_{ttv} y ϕ_{ttv} . En caso contrario, sólo tendremos 2 parámetros: A_{ttv} y ϕ_{ttv} .

Dado que esta expresión involucra tiempos de tránsito tanto para el planeta interior como el planeta exterior, este modelo requiere que ambos planetas transiten.

La información que podamos obtener sobre los parámetros orbitales y físicos del exoplaneta “exterior” será ciertamente limitada, y a no ser que dicho planeta transite de por sí o que cause una señal detectable en la velocidad radial de la estrella necesitaremos utilizar modelos más generales para obtener mayor información sobre su órbita y su masa. Un método general basado en la teoría de perturbaciones para la determinación de todos los elementos orbitales es el llamado **método de inversión rápida** (Nesvorný & Beaugé 2010).

1.1.6. Astrometría

La astrometría aplicada a la búsqueda de exoplanetas consiste en detectar variaciones sinusoidales en el movimiento propio de una estrella, causados por la posible presencia de otro cuerpo. Como en el caso del método de tránsitos (**binarias eclipsantes**) y del de velocidades radiales (**binarias**

espectroscópicas), esta técnica es heredada del estudio de las estrellas dobles (**binarias astrométricas**). No obstante, en el caso de los exoplanetas es muchísimo más difícil su detección debido a la poca influencia gravitatoria sobre su estrella. De hecho, sólo se han detectado hasta el momento 14 y lógicamente son planetas gigantes ([The Extrasolar Planets Encyclopaedia](#)). Sin embargo, se espera que la sonda *GAIA* consiga encontrar mayor número de exoplanetas por medio de interferometría de alta precisión ([Perryman et al. 2014](#)).

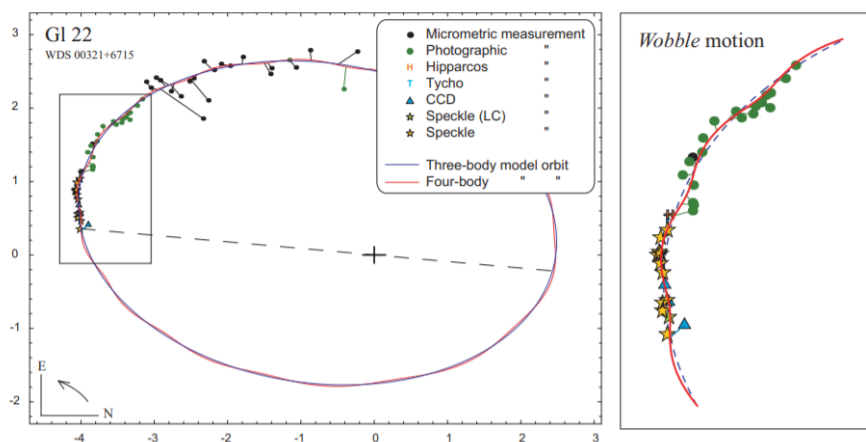


Figura 1.19: A la izquierda, la órbita aparente de la estrella Gliese B con respecto al centro de masas de Gliese Aa-Ab. A la derecha, el zoom de la zona marcada por el rectángulo. Observamos que Gliese B no sigue una órbita exactamente elíptica sino que se aprecia un cierto “bamboleo” causado, presumiblemente, por un cuerpo planetario, Gliese 22 Bb. Crédito a [Docobo et al. \(2008\)](#).

Los cálculos astrométricos (en el caso de ser detectables) sí se pueden combinar con otros métodos, sobre todo con la velocidad radial ([Perryman 2018: 88](#)), con el propósito de calcular los parámetros que con esta segunda técnica no podemos calcular como la inclinación o la ángulo del nodo ascendente, cuya determinación no es posible ni con el método de tránsitos ni con la velocidad radial.

Con reservas a un futuro relativamente cercano, podemos decir con bastante seguridad que la astrometría es una técnica de la que no se esperan demasiados descubrimientos, puesto que requiere de una precisión sin precedentes y la que disponemos en este momento no ha dado muchos resultados realmente

fructíferos.

1.1.7. Otros métodos (polarimetría, timing...)

En esta Sección mencionaremos otros métodos que fueron implementados para el descubrimiento de exoplanetas pero que son apenas utilizados, o bien por las dificultades que presentan o bien porque no son capaces de identificar el objeto como planeta.

- **Polarimetría.** Rayleigh descubrió en 1871 que la dispersión de los fotones de la luz que se produce en la atmósfera terrestre hace que la luz se *polarice*, es decir, que su función de onda obtenga una cierta orientación (Strutt 1871). Este hecho permite diferenciar si la fuente de luz que nos llega de una estrella se encuentra con una orientación aleatoria o si por el contrario se encuentra polarizada, lo que nos estaría diciendo que orbitando esa estrella se encuentra un planeta.

Sólo se ha confirmado la existencia de un exoplaneta por este método, HD 189733 b (Berdyugina et al. 2007), aunque cabe decir que ya había sido anteriormente descubierto por el método de tránsitos (Bouchy et al. 2005), lo cual parece razonable ya que para que se detecte la atmósfera se requiere que el planeta se encuentre cerca de la estrella y eso aumenta las posibilidades del tránsito si consideramos la **probabilidad de detección del tránsito** para órbitas circulares (Borucki & Summers 1984):

$$P_{det} \sim \frac{R_*}{a} \quad (1.52)$$

Vemos que cuanto menor sea a , es decir, cuanto más cerca de la estrella, más posibilidades tendremos de ver al planeta transitarla.

Las limitaciones que presenta este método son muy parecidas en cierto modo a las que teníamos en el caso de la imagen directa, puesto que necesitamos medir parte de la luz reflejada o, en este caso, *dispersada* por el planeta con respecto a la luz de la estrella. Eso implica que la señal del primero se encontrará enmascarada dentro de la señal del segundo, puesto que la intensidad de la luz dispersada del planeta es ínfima comparada con la de la estrella (más aún teniendo en cuenta que esta vez ya no es la superficie del planeta, sino que solo es su atmósfera). Para más detalles acerca del uso de la polarimetría en la

detección de exoplanetas, se recomienda [Kolokolova \(2015\)](#).

- **Timing del púlsar.** Ya hemos comentado que el primer exoplaneta confirmado se descubrió alrededor de un púlsar, el llamado PSR B1257+12, a través de variaciones en el periodo de rotación del púlsar debidas a su movimiento orbital producido por la influencia gravitatoria del planeta ([Wolszczan & Frail 1992](#)). Eso hace pensar que alrededor de los púlsares existan grandes posibilidades de detección de exoplanetas.

El periodo de rotación de un púlsar se caracteriza por ciertos pulsos electromagnéticos que somos capaces de medir con precisión. Éstos siguen un periodo extremadamente regular —especialmente aquellos de muy corto periodo ([Matsakis et al. 1997](#))— que se conoce como TOA (*Time of Arrival*). Debido a la acción ejercida sobre la estrella de neutrones (presumiblemente causado por un planeta pero puede haber otras causas como una estrella u otro púlsar), percibimos variaciones en el periodo detectado del púlsar siguiendo el ya mencionado **desplazamiento Doppler** ([Seager et al. 2010](#): 180):

$$P = P_0 \left(1 + \frac{V_r}{c} \right), \quad (1.53)$$

siendo c la velocidad de la luz, P_0 el periodo “verdadero”, P el periodo detectado y V_r la velocidad radial descrita en la ecuación (1.10).

Ya que la velocidad radial está involucrada en este método, nos enfrentamos a un problema similar: no podemos calcular ni la inclinación de la órbita planetaria ni la masa del planeta por separado. Aún así, [Konacki & Wolszczan \(2003\)](#) consiguieron estimar la masa y la inclinación a partir de un modelo más realista que tuviera en cuenta las mutuas perturbaciones de los planetas alrededor de PSR B1257+12.

Una gran ventaja del *timing* es que permite la detección de planetas pequeños si el púlsar es de periodo corto (ya que con semejante precisión se puede medir hasta la más mínima perturbación). De hecho, si los planetas del sistema Solar se encontrasen girando alrededor de un púlsar de corto periodo como PSR 1937+21, todos, excepto Neptuno, serían fácilmente detectables por un observador extrasolar ([Thorsett & Phillips 1992](#)). Eso hace que el método no sea particularmente sensible a la masa del sistema, como puede ser el caso de la velocidad radial, ni tampoco que sea sensible a la distancia que se encuentra de nosotros, como en el método de la imagen directa.

Entonces, ¿cuál es el gran problema? Pues básicamente la escasa detección de púlsares. Para que el pulso de un púlsar sea detectable, se necesita que su eje de emisión de ondas de radio se encuentre perfectamente apuntando a la Tierra y eso, aunque posible, no suele ocurrir con demasiada frecuencia: sólo 45 planetas han sido detectados por el método de timing del púlsar ([The Extrasolar Planets Encyclopaedia](#)). Algunos investigadores sostienen que la escasa detección de planetas alrededor de púlsares no es por causa del instrumental, sino por mera formación planetaria. De hecho, [Miller & Hamilton \(2001\)](#) mantienen la hipótesis de que los púlsares de muy corto periodo vieron su rotación acelerada en el pasado debido a la acreción de materia de otra estrella, y dicha acreción podría causar emisiones de rayos X tan fuertes que vaporizarían cualquier planeta que se encontrase orbitándolo. Para más detalles sobre la formación planetaria en torno a púlsares véase [Phillips & Torsett \(1994\)](#).

Volveremos a este método cuando lo apliquemos a exosatélites ya que, como ya hemos comprobado, ofrece ciertos recursos también para el caso de cuerpos tan pequeños y poco masivos como son los exosatélites.

- **Timing de estrellas variables.** De un modo análogo al anterior, existen algunas estrellas variables pulsantes que exhiben una cierta periodicidad en su cambio de luminosidad y se puede detectar fotométricamente la presencia de un exoplaneta por medio del análisis de la variación en el periodo de dicho pulso. Esta vez, las pulsaciones no son tan regulares y, al ser una estrella variable, existen muchos más factores que pueden enmascarar la señal de dicha periodicidad. En general no es recomendable fijarse en las estrellas variables para la búsqueda de exoplanetas por lo difícil que resulta el estudio de su señal, aunque se han hecho estudios substrayendo el efecto de la variabilidad intrínseca de la estrella en la señal producida por un exoplaneta ([Sowicka et al. 2017](#)).

Este método permite medir la velocidad radial sin estudiar la espectroscopía, sino simplemente registrando fotométricamente los cambios en el timing de los distintos periodos de las pulsaciones ([Shibahashi & Kurtz 2012](#)).

- Existen otros métodos experimentales como emisión de ondas de radio provenientes de la magnetosfera planetaria ([Lazio et al. 2009](#)), imagen del tránsito ([Belle et al. 2012](#)), *beaming* relativista ([Loeb & Gaudi 2003](#); etc.), cinemática del disco protoplanetario ([Pinte et al. 2019](#)), modulaciones de brillo orbital (por ejemplo [Charpinet 2011](#)), *machine learning* aplicado a redes neuronales ([Shallue & Vanderburg 2018](#)), etc.

1.2. Métodos de detección de exosatélites (o *exomoons*)

Dado que la detección de ningún exosatélite ha sido confirmada aún, debemos considerar todos los métodos posibles que nos ayuden a aceptar o incluso a rechazar candidatos a exosatélites.

Salvo que se diga lo contrario, asumiremos siempre que la órbita del satélite es coplanaria a la del planeta y circular. Aunque esto sea en apariencia bastante restrictivo, inclinaciones mutuas altas y excentricidades grandes provocan que la región de satélites en órbita estable disminuya, con lo que la probabilidad de detección de los mismos se ve también reducida ([Donnison 2010](#)).

1.2.1. Velocidad radial

En esta Sección estudiaremos el efecto que produce un exosatélite sobre la velocidad radial de una estrella. Para ello, integraremos el problema de tres cuerpos para estudiar cómo varía la componente z de la estrella, lo que nos dará su velocidad radial. Asumimos que el exoplaneta tiene la masa de Júpiter ($M_p = 1 M_J = 9,548 \cdot 10^{-4} M_\odot$), y que el semieje de su órbita con respecto a la estrella, la cual consideramos de tipo solar ($M_* = 1 M_\odot$), es de 1 u.a. El exosatélite tiene la masa de la Tierra ($M_m = 3 \cdot 10^{-6} M_\odot$) y el semieje de su órbita con respecto al exoplaneta es 0,01 u.a.

Para comparar las diferencias de la señal de la velocidad radial con o sin exosatélite, también integraremos el problema de dos cuerpos para calcular la velocidad radial que causa solamente el exoplaneta sobre la estrella.

Asumimos que las órbitas son coplanarias y que la dirección de observación está contenida en dicho plano, es decir, $i_1 = i_2 = 90^\circ$. Fijamos los valores iniciales de las longitudes del nodo ascendente, las excentricidades, los argumentos del periastro y las épocas de paso por el periastro a 0.

Integraremos numéricamente el problema de dos y tres cuerpos con el paquete TIDES implementado en *Mathematica* (Sección 0.1).

En la Figura 1.20 se aprecia claramente las diferencias entre un caso y otro, donde el caso con exosatélite se va desfasando, *muy poco a poco*, con respecto a la señal sin satélite. Vemos que nuestros resultados coinciden en gran medida

Sección 1.2. Métodos de detección de exosatélites (o exomoons)

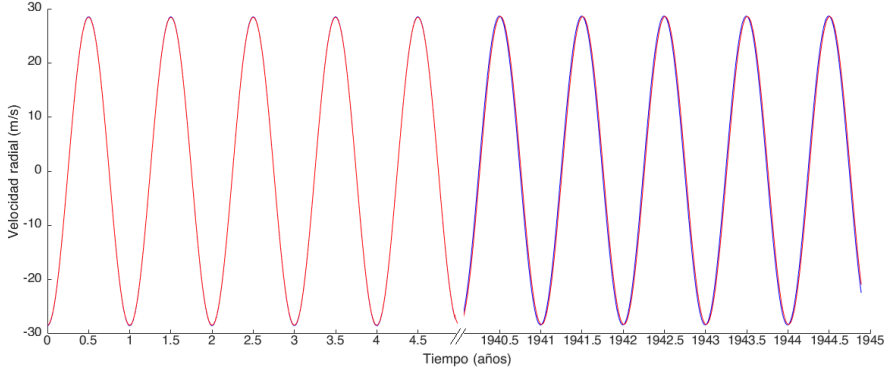


Figura 1.20: En rojo, la señal de la velocidad radial sin el exosatélite y en azul, la señal con el exosatélite. Se muestra ambas señales al cabo de 1940 años con el propósito de demostrar cuán minúsculo es el desfase entre ellas.

con el análisis dinámico de [Campo \(2019\)](#) con la diferencia de que él compara las diferencias entre exoplaneta + exosatélite y exoplaneta doble. También aparecen desfases entre un modelo y otro, aunque en el caso del exosatélite con respecto al modelo sin satélite el desfase es mucho más lento (Figura 1.20).

El problema reside en que, en principio, no podemos distinguir una señal de otra puesto que las dos tienen, aparentemente, la misma forma sinusoidal y en ninguna se aprecian variaciones notables sobre dicha forma. Sin embargo, esto no es cierto. En realidad, la señal de velocidad radial de una estrella causada por un par de cuerpos orbitando su centro de masas es la suma de *tres* sinusoidales: la señal de velocidad del centro de masas, y dos señales *residuales* causadas por cada uno de los cuerpos. Sin embargo, si las señales residuales son lo suficientemente pequeñas, pueden no ser detectables, haciendo que la señal del centro de masas sea la única detectable y por lo tanto se constituya una sola sinusoidal, *imitando* la señal de un solo cuerpo ([Morais & Correia 2008](#)).

La amplitud de las señales residuales, K_1 y K_2 , son ([Morais & Correia 2008](#)):

$$|K_1| = \frac{15}{2} \delta n_m \sin i \text{ y } |K_2| = \frac{3}{2} \delta n_m \sin i, \quad (1.54)$$

siendo n_b el movimiento medio de la órbita del exosatélite con respecto al

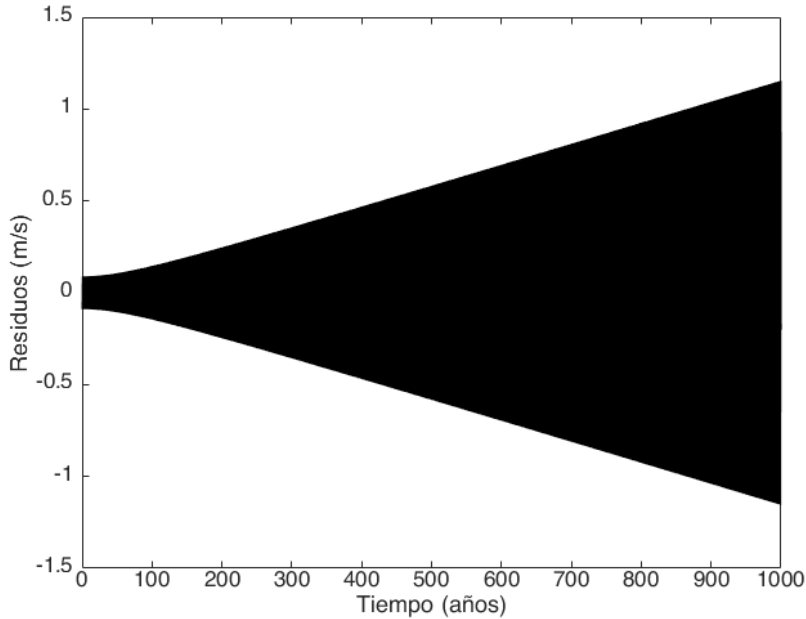


Figura 1.21: Residuos entre el modelo sin satélite y el modelo con satélite.

exoplaneta, i la inclinación de la órbita del centro de masas del exoplaneta + exosatélite con respecto a la estrella, y

$$\delta = \frac{M_1}{8(M_p + M_m)} \left(\frac{a_m}{a} \right)^4 a_m, \quad (1.55)$$

con a_m el semieje de la órbita del exosatélite con respecto al exoplaneta, a el semieje de la órbita del centro de masas del sistema exoplaneta+exosatélite con respecto a la estrella, y

$$M_1 = \frac{M_p M_m}{M_p + M_m}. \quad (1.56)$$

Así, para el ejemplo que hemos elegido arriba:

$$|K_1| = 2,6983 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}, \quad |K_2| = 5,3965 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}. \quad (1.57)$$

Como vemos, las amplitudes de las señales residuales son prácticamente imperceptibles. Así, concluimos que no se puede distinguir la señal que causa un exosatélite en la velocidad radial de la estrella de la señal que causa el centro de masas exoplaneta+exosatélite. Por lo tanto, a no ser que en un futuro lejano podamos afinar la precisión de los espectrógrafos hasta millonésimas de metros por segundo, no es posible detectar un exosatélite por medio de la velocidad radial.

1.2.2. Tránsitos

Dado que la espectroscopía no ofrece resultados demasiado alentadores, cabe preguntarnos ahora si pasa lo mismo con la fotometría: ¿cómo y cuándo afectará la presencia de un exosatélite a la curva de luz provocada por el tránsito de un exoplaneta?

Para responder a esta pregunta, hemos hecho una simulación de la caída de luz que provoca el conjunto exoplaneta + exosatélite sobre una estrella como el Sol (asumiendo órbitas circulares). El procedimiento es similar al de la [Sección 1.1.2](#) excepto por dos diferencias notables; la primera es que esta vez existen dos discos eclipsantes, el del planeta y el del satélite, y la segunda es que necesitamos incluir en este modelo los eclipses del satélite sobre el planeta y viceversa. Hemos utilizado el algoritmo LUNA ([Kipping 2011a](#)) que trata cada caso en función de la separación satélite-estrella, planeta-estrella y planeta-satélite.

Hemos hecho varios ejemplos para ver cómo afecta el exosatélite a la curva de luz. La [Figura 1.22](#) muestra uno de ellos, donde la estrella tiene el mismo radio y masa que el Sol y el planeta se elige con el radio y la masa de Júpiter, con un periodo de 80 días. El satélite tiene el radio y la masa de la Tierra y se encuentra a $0,27R_H = 0,0067$ u.a. del planeta¹², siendo R_H el radio de Hill¹³. Las órbitas las hemos tomado coplanarias, estando la dirección del observador contenida en tal plano. En este ejemplo se observa un 0,01 % de disminución de flujo causado por el exosatélite. Este porcentaje es potencialmente detectable por Kepler ([Vanderburg & Johnson 2014](#)), por lo que hubiese sido posible

¹²En nuestras simulaciones trataremos con semiejes pequeños, más que nada para reducir al mínimo el tiempo de computación y porque el método de tránsitos favorece, en la práctica, semiejes pequeños (Ecuación (1.52)).

¹³El **radio de Hill** se define como la distancia máxima en la cual la órbita de un satélite orbitando un planeta es estable. Se define, para órbitas circulares, como $R_H = r_p(M_p/3M_*)^{1/3}$, siendo M_p y M_* las masas del planeta y de la estrella, respectivamente (ver [Sección 3.2.1.1](#)).

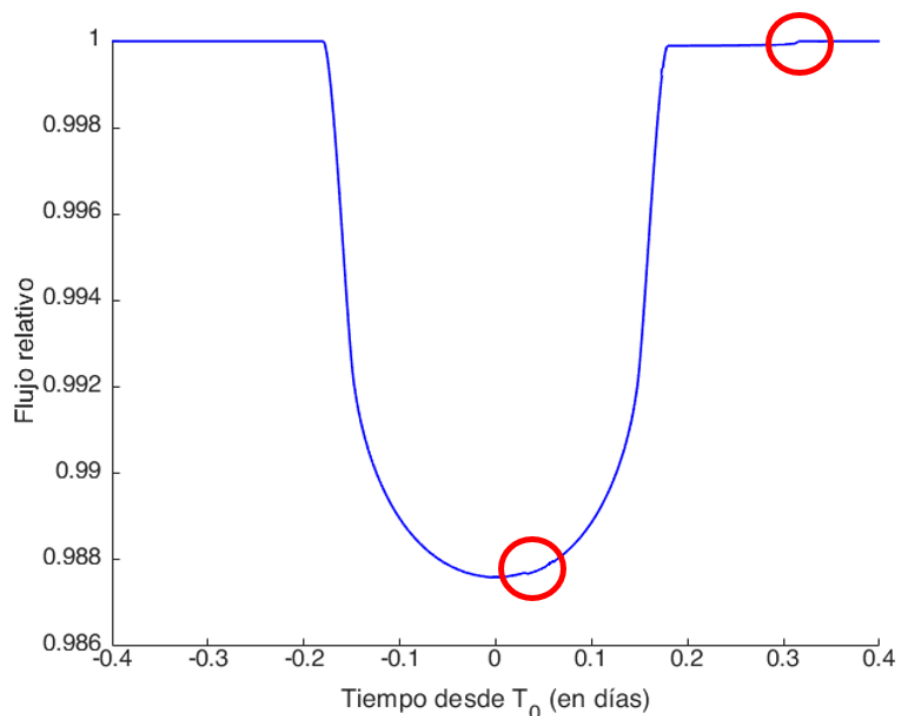


Figura 1.22: Curva de luz de una estrella eclipsada por un planeta + satélite. Los círculos rojos muestran la acción del exosatélite.

detectar fotométricamente el satélite en un escenario como este.

Para estudiar la influencia producida por el satélite en la curva de luz, en la Figura 1.22 también hemos marcado las variaciones del flujo causadas por el satélite del ejemplo anterior. Hemos observado que dichas señales aumentan con el radio del satélite (como es obvio por pura geometría) y siempre se encuentran asimétricamente fuera y dentro del tránsito; es decir, aparecen *a los sumo* dos veces en torno del tránsito del planeta (véase [Tusnski & Valio 2011](#); [Teachey et al. 2017](#) donde se hacen varias simulaciones con exosatélites). En la Figura 1.23 hemos fijado el periodo del planeta en 100 días y el semieje del satélite en $0,3R_H$, donde se puede ver cómo vuelven a aparecer dos marcas, esta vez en lados opuestos.

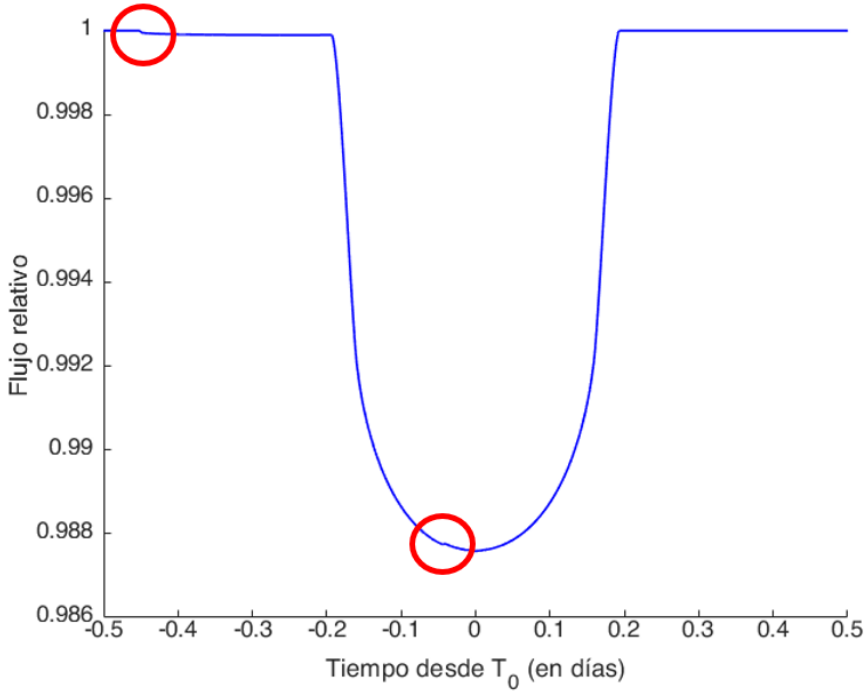


Figura 1.23: Curva de luz análoga a la de la Figura 1.22, solo que hemos cambiado el periodo del planeta a 100 días. Ahora la separación del satélite con respecto al planeta es $1/3 R_H = 0,0086$ u.a..

Ahora que se ha visto cómo es la forma de la curva de luz creada por la presencia de un sistema exoplaneta-exosatélite, es conveniente estudiar la curva de luz de otros fenómenos para descartarlos como posibles candidatos a exosatélites.

1.2.2.1. Planeta con anillos

Como veremos, los anillos no provocan grandes modificaciones en la forma de la curva de luz, sino que aumentan la profundidad y la duración del tránsito de manera importante, cosa que, como ya hemos comprobado, no ocurre para nada en el caso de los exosatélites.

Para hallar la curva de luz de un planeta con anillos, nos hemos basado en el cálculo de [Ohta \(2008\)](#) donde se hace una integración numérica por trozos

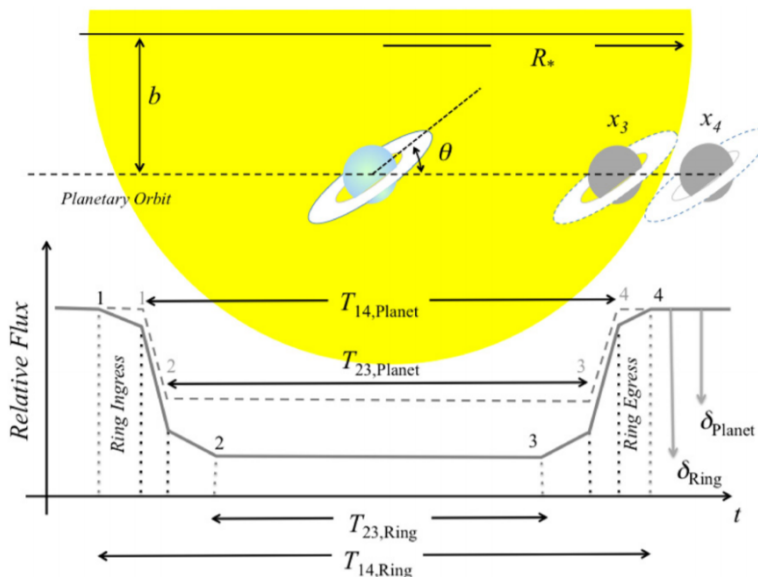


Figura 1.24: Esquema del tránsito de un planeta con anillos (Zuluaga et al. 2015). θ es el ángulo de los anillos con respecto al plano ecuatorial y b el parámetro de impacto.

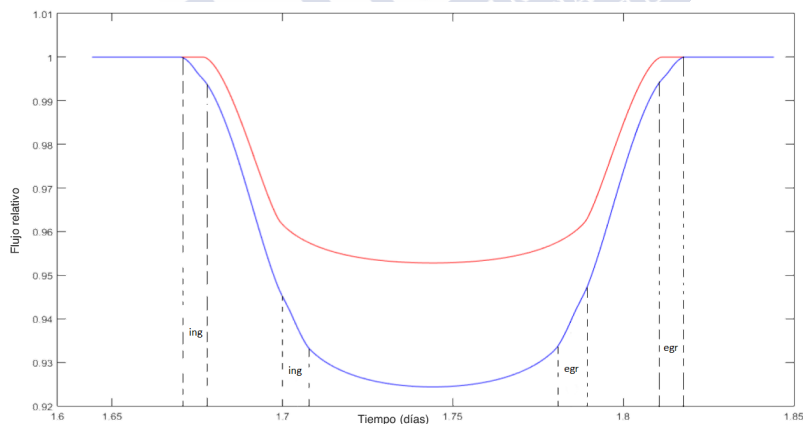


Figura 1.25: En rojo, el planeta sin anillos. En azul, el planeta con anillos. Las líneas punteadas verticales indican la acción de los anillos sobre la forma de la curva de luz convencional; eso es, en los instantes donde los anillos entran en el disco de la estrella (*ing*) y salen (*egr*). Claramente, los anillos hacen que la duración y la profundidad del tránsito aumente (como se puede ver también en la Figura 1.24).

de la intensidad total de la estrella y de la intensidad recibida a causa del tránsito de un planeta con anillos. Como ejemplo hemos tomado una estrella como el radio del Sol y con masa $M_* = 0,4 M_\odot$, como planeta Júpiter y como anillos hemos tomado el radio interior $1,5 R_\oplus$ y como radio exterior $2 R_\oplus$. La profundidad óptica¹⁴ de los anillos se toma $\tau = 1$ (completamente opacos) y los ángulos con respecto al radio ecuatorial y polar del planeta son de 45° .

La figura 1.25 muestra cómo la presencia de anillos provoca cambios muy diferentes a los causados por un exosatélite.

1.2.2.2. Planeta transitando una estrella con manchas tipo solar

Para este caso nos basaremos en parte en el anterior; integraremos numéricamente la región de la estrella, primero sin ser eclipsada y después siendo eclipsada, con la diferencia de que ahora la intensidad de la estrella será menor en la zona de la mancha puesto que en esas zonas la estrella es más fría (Zioutas et al. 2010). Así, el flujo relativo F se calcula como

$$F = \frac{\iint I(x, y) dx dy}{\iint I_s(x, y) dx dy} \quad (1.58)$$

siendo

$$I_s(x, y) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > 1 \\ 0,6I_* & (x - X')^2 + (y - Y')^2 \leq R'^2 \\ I_* & (x - X')^2 + (y - Y')^2 > R'^2 \end{cases} \quad (1.59)$$

y

$$I(x, y) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > 1 \\ 0,6I_* & (x - X')^2 + (y - Y')^2 \leq R'^2 \\ I_* & (x - X')^2 + (y - Y')^2 > R'^2 \\ 0 & (x - X_p)^2 + (y - Y_p)^2 \leq R_p^2, \end{cases} \quad (1.60)$$

con I_* siendo la cantidad calculada por (1.18), X' y Y' las coordenadas del centro de la mancha, R' el radio de la mancha, R_p el radio del planeta y X_p e

¹⁴Se define *profundidad óptica* como el logaritmo natural del cociente entre el flujo de radiación que recibe un material y el flujo de radiación que emite (Kitchin 1987). Por lo tanto, si ese coeficiente es 1 para los anillos del planeta es que reflejan el 100% de la radiación que reciben, es decir, son totalmente opacos.

Y_p las coordenadas del vector que une el centro del planeta con el centro de la estrella. El factor 0,6 aparece porque consideramos que en la mancha solar la intensidad es un 60% de la de la estrella.

Intuitivamente, si un planeta transita una mancha solar se apreciará un ligero aumento en el flujo de luz debido a que, ya que la zona es más fría, el planeta dejará de cubrir una parte de la estrella más caliente que la mancha solar y por tanto la luminosidad crecerá.

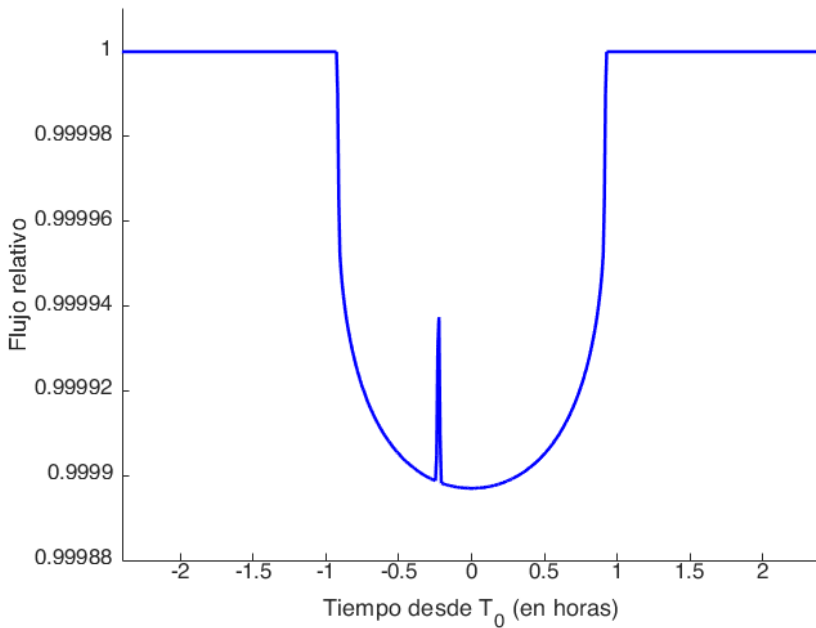


Figura 1.26: Curva de luz para el planeta transitando una estrella con una mancha ecuatorial. La perturbación es muy pronunciada sobre el eje Y y casi imperceptible sobre el eje X.

Para la simulación supondremos que la estrella (el Sol) tiene una mancha ecuatorial de tamaño igual al de la Tierra. El centro de la mancha está $0,5R_{\odot}$ a la derecha del centro solar. El radio y la masa del planeta se toman análogos a los de la Tierra, el periodo a la estrella 1 día (lo cogemos muy corto para disminuir el tiempo de computación), siendo su inclinación orbital de 90° para

asegurar el tránsito (Figura 1.26).

La implementación la hemos hecho en MATHEMATICA y puede verse en el Apéndice B con el nombre de `spots.nb`.

En la Figura 1.26 se aprecia la acción provocada por la mancha solar en el tránsito del planeta. Aunque en principio se podría confundir con el tránsito que produce un exosatélite cuando el planeta se encuentra dentro del disco estelar, este aumento de brillo se encuentra mucho más pronunciada a lo largo del eje Y y no se alarga tanto sobre el eje X, algo que no ocurriría en el caso del exosatélite. Este hecho hace que ambas curvas de luz sean fácilmente distinguibles.

1.2.2.3. Planeta doble

Para estudiar la diferencia entre la señal producida por un planeta + satélite y la producida por un planeta doble, simplemente tenemos que fijar los parámetros de la masa y el radio típicos para un sistema de estas características.

Técnicamente, la condición de “planeta doble” requiere que el centro de masas de los dos cuerpos caiga fuera de la componente mayor¹⁵, con lo que, por ejemplo, el sistema Plutón-Charón cumpliría tal condición. Sin embargo, en nuestra aplicación del concepto de “planeta doble” tomaremos una noción un poco más extrema, en el sentido de que masa y radio de las dos componentes sean lo suficientemente similares como para que notemos dicha configuración en la curva de luz. Con ese criterio hemos comprobado que, si tomamos como el planeta mayor uno con la masa y el radio de Júpiter, se notan diferencias significativas cuando el planeta menor tiene un radio $> 40\%$ el del planeta mayor, y una masa $> 20\%$. En tales condiciones, la influencia sobre el cuerpo mayor se torna muy notable y *siempre del mismo lado*, por lo que la curva de luz diferirá considerablemente de la provocada por un sistema exoplaneta + exosatélite.

En la figura 1.27 hemos fijado la distancia planeta-planeta en unos $0,3R_H$, la masa y el radio del cuerpo principal similares a los de Júpiter, en tanto que al cuerpo secundario le hemos asignado una masa de $0,2M_J$, siendo el radio la mitad de pequeño. Las diferencias con respecto a la señal provocada por un

¹⁵<https://www.space.com/2741-planets-12-controversial-definition.html>

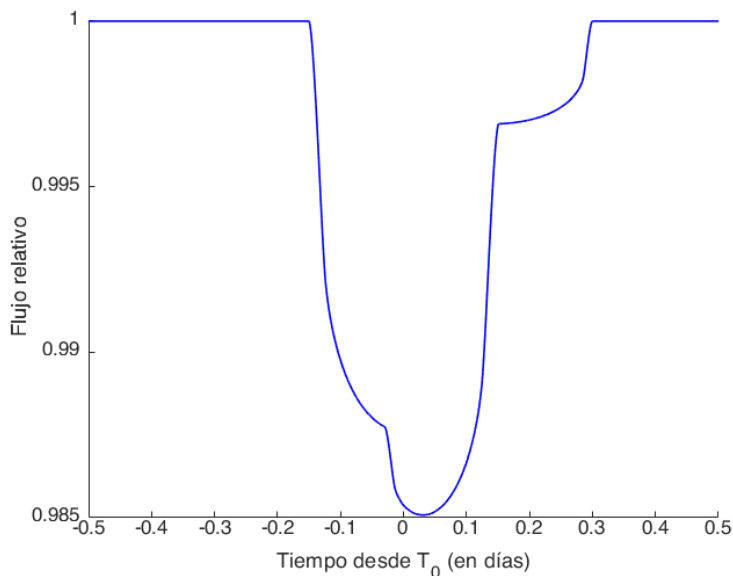


Figura 1.27: Curva de luz de un planeta doble gigante.

exoplaneta + exosatélite son claras.

Definitivamente, el método de tránsitos ofrece, en teoría, herramientas potentes para la detección de un exosatélite. Se estima que el telescopio Kepler (Kipping et al. 2014) podría haber llegado a detectar exosatélites del tamaño de Marte aunque tristemente no se pudo confirmar ninguno durante los años en los que estuvo activo. El siguiente proyecto de la NASA, *TESS*, que se encuentra haciendo observaciones de estrellas más cercanas (<https://www.nasa.gov/content/about-tess>), podría obtener un mejor seguimiento fotométrico de un supuesto sistema planeta+satélite y tener más acierto en lo que se refiere a la detección de exosatélites.

1.2.3. TTV y TDV

Son estos los métodos más importantes en lo que se refiere a la detección de exosatélites, no tanto por su capacidad de detección sino por la información que pueden proporcionar.

1.2.3.1. TTV

La primera vez que se habla del *Timing Transit Variation* (TTV) aplicado a exosatélites es en [Sartoretti & Schneider \(1999\)](#) donde se da una expresión analítica de la variación de la amplitud de la señal del TTV para órbitas circulares, coplanarias y con la dirección de la visual situada en el plano orbital, mediante

$$\delta t \sim 2a_s M_s M_p^{-1} \cdot P_p (2\pi a_p)^{-1}, \quad (1.61)$$

siendo a_s , M_s el semieje orbital y la masa del satélite y a_p , M_p y P_p el semieje, la masa y el periodo del planeta, respectivamente.

Para órbitas excéntricas la fórmula es ([Kipping 2009a](#)):

$$\delta_{TTV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a_p^{1/2} a_s M_s (M_s + M_p)^{-1} \zeta_T(e_s, \omega_s)}{\sqrt{G(M_* + M_p + M_s)} \Upsilon(e_p, \omega_P)} \quad (1.62)$$

donde

$$\zeta_T = \frac{(1 - e_s^2)^{1/4}}{e_s} \sqrt{e_s^2 + \cos(2\omega_s)(2(1 - e_s^2)^{3/2} - 2 + 3e_s^2)} \quad (1.63)$$

$$\Upsilon = \cos \left(\arctan \left(\frac{-e_p \cos \omega_P}{1 + e_p \sin \omega_P} \right) \right) \sqrt{\frac{2(1 + e_p \sin \omega_P)}{1 - e_p^2} - 1} \quad (1.64)$$

e_p , ω_p son la excentricidad y argumento del periastro de la órbita del planeta y e_s , ω_s son los valores correspondientes para los mismos elementos de la órbita del satélite.

La señal del TTV en función del tiempo para una órbita excéntrica y no coplanaria es, aproximadamente ([Kipping 2011b](#); [Kipping et al. 2012](#)):

$$TTV(f_S) = \left(\frac{a_s \sqrt{1 - e_p^2} (1 - e_s^2) M_s P_p}{2\pi a_p M_p (1 + e_p \sin \omega_p)} \right) \Lambda_{TTV}, \quad (1.65)$$

siendo

$$\Lambda_{TTV} = \frac{\cos \omega_s \cos(f_s + \omega_s) - \sin i_s \sin \omega_s \sin(f_s + \omega_s)}{1 + e_s \cos f_s} \quad (1.66)$$

Por ejemplo, para un planeta tipo Júpiter, con un periodo orbital de 100 días alrededor de una estrella como el Sol y con un satélite como la Tierra a unos $0,3R_H$ del planeta, la amplitud es de $\delta_{TTV} = 50,361$ s. La cadencia¹⁶ de *TESS* es de unos 2 minutos¹⁷, y la del ya inactivo Kepler de unos 58.9s (Murphy 2012), con lo que el TTV se encuentra por debajo del tiempo/dato para los dos telescopios y por ende la detección sería inapreciable. No obstante, hay que decir que una estrella como el Sol no entra dentro del tipo de estrellas objetivo de los telescopios Kepler ni *TESS*, sino que se centran más en estrellas enanas tipo K ó M (<https://www.nasa.gov/kepler/overview/abouttargetstars>; Stassun et al. 2018), es decir, enanas menos masivas con lo que el TTV aumenta por la expresión (1.65). Con el planeta pasa algo totalmente análogo, el radio se busca grande para que la profundidad del tránsito sea favorable pero la detección favorece los planetas tipo Saturno por delante de los tipo Júpiter (Figura 7.3 de Kipping 2011b), con lo que el TTV de nuevo se torna mayor.

TTV baricéntrico y TTV fotocéntrico

Conforme la definición que hemos dado de TTV, éste se corresponde con el llamado **TTV baricéntrico**, o TTV_b , porque en el fondo lo que hacemos para calcularlo es medir la diferencia de la separación mínima planeta-estrella con la separación mínima estrella-baricentro (planeta + satélite) –en la Sección 1.1.5 ya se generalizó el concepto de T_0 a la separación mínima–, con lo que

$$TTV_b = t(\dot{S}_b = 0) - t(\dot{S}_p = 0) \quad (1.67)$$

El problema del TTV_b es que, *a priori*, no podemos saber si la señal que estamos detectando proviene de un exosatélite o no. Ya hemos visto en la Sección 1.1.5 el caso en el que el TTV es provocado por un planeta; pues bien, además de un satélite u otro planeta, existen otros factores que pueden causar un cambio en el tiempo de tránsito, como pueden ser manchas solares (P. Ioannidis et al. 2016), efectos debido al movimiento de la Tierra (Scharf 2007), troyanos (Haghighipour et al. 2013), efectos dinámicos a muy largo plazo debido a una gran excentricidad (Kipping 2008), etc. Otro problema añadido es que no podemos calcular el periodo del planeta (Kipping 2009a; Sartoretti &

¹⁶La cadencia se define como el tiempo que transcurre entre cada observación.

¹⁷<https://tess.mit.edu/observations/>

(Schneider 1999) con lo que no podremos determinar tampoco ni la masa ni el semieje por separado, al menos utilizando exclusivamente los TTV. Estos dos problemas motivaron la búsqueda de otro mecanismo relacionado con la variación de tránsitos que pudiera arrojar luz a la caracterización de la señal como exosatélite y al posterior cálculo de la masa y el semieje, y ese es el **TDV**.

Se define ahora una nueva versión del TTV que se conoce como **TTV fotométrico** (TTV_p), en el cual tomamos como referencia ya no el baricentro, sino el **fotocentro** del sistema planeta-satélite (Lewis 2011; Simon et al. 2007; Szabó et al. 2006):

$$\tau = \frac{\sum_i t_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i}, \quad (1.68)$$

donde m_i son las variaciones de magnitud aparente de la estrella en los t_i tiempos durante el tránsito.

El TTV_p tiene como ventaja principal el ofrecer herramientas para calcular la **masa** y el **radio** del exosatélite (Simon et al. 2007), lo cual ayudaría enormemente al estudio de su habitabilidad (Capítulo 4). El problema fundamental es que el TTV_p es uno de esos fenómenos (cuya aparición a lo largo de esta Tesis será escasa) los cuales *no son señales* que podamos detectar, es decir, sólo podemos modelizar teóricamente la variación de τ con respecto al tiempo (Lewis 2011).

1.2.3.2. TDV

El TDV (*Timing Duration Variation*) mide la variación que existe en la duración del tránsito de un exoplaneta (lo que denotábamos T_d en la Sección 1.1.2). Fue introducido por primera vez en Pál & Kocsis (2008) para hablar de la precesión relativista en las órbitas de los exoplanetas.

En el caso del TDV, la amplitud de la señal es (Kipping 2009a):

$$\delta_{TDV} = \sqrt{\frac{a_p}{a_s}} \frac{M_s}{\sqrt{(M_p + M_s)(M_p + M_s + M_*)}} \frac{\overline{T_d}}{\sqrt{2}} \zeta_D(e_s, \omega_s), \quad (1.69)$$

donde

$$\zeta_D(e_s, \omega_s) = \sqrt{\frac{1 + e_s^2 - e_s^2 \cos(2\omega_s)}{1 - e_s^2}}, \quad (1.70)$$

y $\overline{T_d}$ es el valor esperado de T_d .

La señal de TDV en función del tiempo para una órbita excéntrica y no coplanaria es (Kipping 2011b; Kipping et al. 2012):

$$TDV = T_b \left(\frac{a_s M_s P_p}{a_p M_p P_s} \right) \left(\frac{\sqrt{1 - e_p^2}}{\sqrt{1 - e_s^2} (1 + e_p \sin \omega_p)} \right) \Lambda_{TDV}, \quad (1.71)$$

con

$$\Lambda_{TDV} = \cos \omega_s (e_s \sin \omega_s + \sin(f_s + \omega_s)) + \sin i_s \sin \omega_s (e_s \cos \omega_s + \cos(f_s + \omega_s)), \quad (1.72)$$

siendo f_s la anomalía verdadera y T_b la duración del tránsito del baricentro.

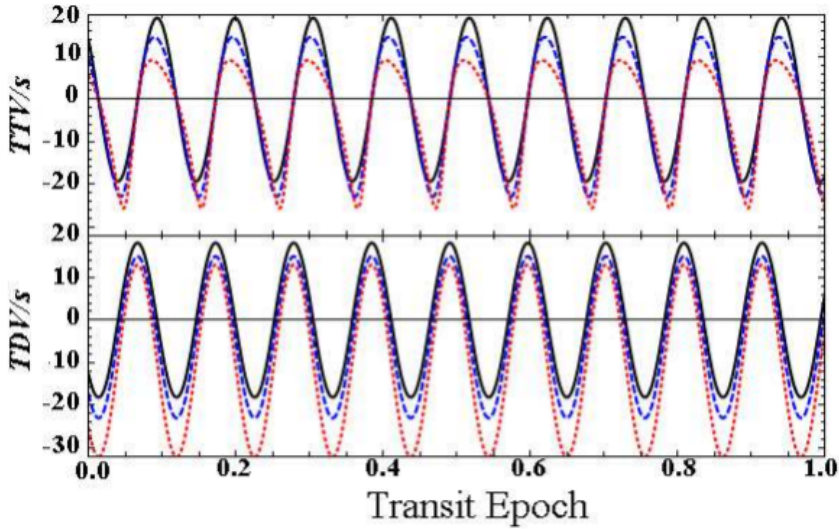


Figura 1.28: Diferencia de fase entre el TTV y el TDV causado por un exosatélite inyectado en la órbita de GJ436b (Kipping 2009a), para varias excentricidades. Vemos claramente el desfase entre las dos señales.

Es evidente que

$$\delta_{TDV} \propto M_s a_s^{-1/2} \quad (1.73)$$

por lo que usando δ_{TDV} y δ_{TTV} , podremos calcular M_s y a_s .

Si $e_S \rightarrow 0$, dividiendo (1.69) y (1.62):

$$\eta = \frac{\delta_{TDV}}{\delta_{TTV}} \simeq \frac{2\pi\bar{T}_d}{P_S}, \quad (1.74)$$

expresión a partir de la cual puede obtenerse el periodo orbital del exosatélite, P_S .

Por último, podemos caracterizar el TTV y el TDV de un exosatélite por el siguiente hecho: presentan una diferencia de fase¹⁸ de $\pi/2$ (Figura 1.28). Sólo los exosatélites cumplen esa condición (Kipping 2011b).

1.2.4. Test del centroide

El *centroide* de una señal discreta se define como el lugar del espectro donde se concentra la mayor parte de ella. Es como una especie de “centro de masas” pero aplicado a señales.

Se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Centroide} = \frac{\sum_{n=1}^N f(n)x(n)}{\sum_{n=1}^N f(n)} \quad (1.75)$$

siendo $f(n)$ las distintas frecuencias para cada instante n . Los $x(n)$ se corresponden con los distintos pesos asignados a cada n .

Nótese que los pesos se van a definir como la *potencia* de la señal para las distintas frecuencias.

Es necesario remarcar que la señal que analizaremos no será el tiempo vs flujo, sino que se utilizará lo que se llama **flujo de píxel** (Figura 1.30). Como esta será una señal bidimensional (cada una de las coordenadas del plano) el centroide se calculará componente a componente:

¹⁸Para órbitas en movimiento retrógrado esta diferencia de fase no se da (Kipping 2011b) por lo que, salvo que se diga lo contrario, siempre se considerará movimiento directo.

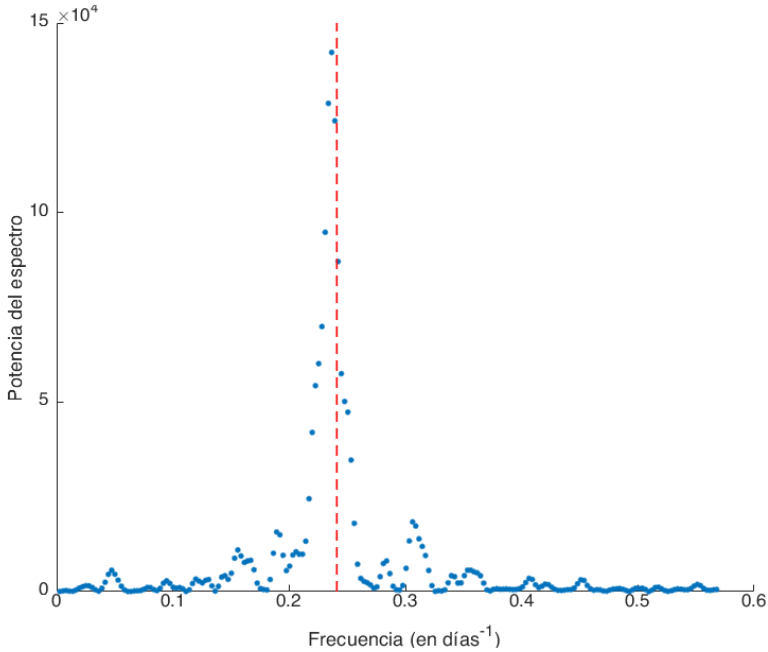


Figura 1.29: Ejemplo del centroide de una señal. Los puntos azules representan la señal. La línea discontinua roja marca la frecuencia del centroide. Como es lógico aparece cercano al pico de mayor amplitud, así como el centro de masas Sol-Tierra cae muy cerca del centro del Sol.

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^N x_i f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (1.76)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^N y_i f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (1.77)$$

siendo x_i e y_i las abscisas y las ordenadas para el centro de cada píxel, respectivamente.

Tenemos que decir que el test del centroide no es un método de detección en sí, sino que se utiliza para rechazar señales en las que parece que hay un exosatélite/exoplaneta pero en realidad son otro fenómeno, lo que se llama *falso positivo*.

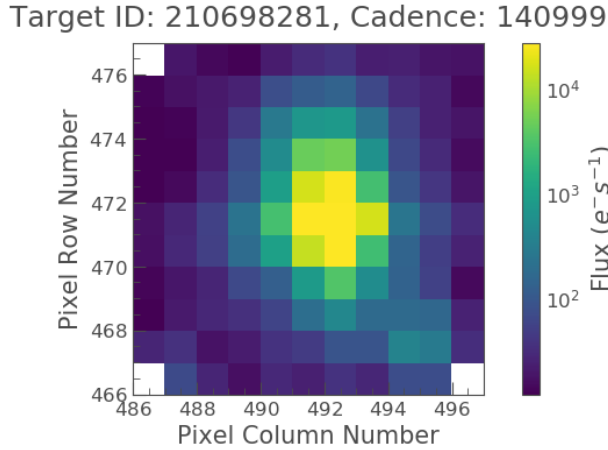


Figura 1.30: Flujo de píxel para la estrella V827 Tau promediado sobre el tiempo. Vemos cómo el flujo es mayor en torno a la zona donde se localiza el disco de la estrella. El centroide asociado a este flujo es (492,08, 471,51). Figura obtenida con el paquete `Lightkurve` de Python (Cardoso et al. 2018).

Los primeros análisis de este tipo se aplicaron a tránsitos de exoplanetas en 2010, cuando el telescopio Kepler empezaba a mostrar resultados de los primeros descubiertos por él (Batalha et al. 2010). En dicho artículo, se utiliza el test del centroide para distinguir la señal de un exoplaneta en la que hay a mayores una estrella eclipsante de fondo (véase también Bryson et al. 2013 y Günther et al. 2017). A veces se da el caso de detectar un tránsito pero no de la estrella objetivo, sino de la estrella de fondo (Cabrera et al. 2017).

¿Y en qué consiste el test del centroide? Pues en estudiar la correlación entre la variación que se produce del centroide y la disminución del flujo, ambos producidos por el tránsito. Por ejemplo, si queremos diagnosticar la presencia de una estrella de fondo, podemos ver qué pasa cuando se produce el tránsito del planeta sobre la estrella objetivo. Si el centroide se desplaza mucho, quiere decir que existe un objeto que emite luz y que hace que el centroide se desplace mucho cara a la dirección donde se encuentra la estrella de fondo. Si la variación del centroide no es tan pronunciada y no se desvía a ninguna dirección concreta (oscilando con respecto al punto de equilibrio), no tenemos indicios para pensar que existe una emisión de fondo. Un ejemplo de ello lo vemos en la Figura 1.31.

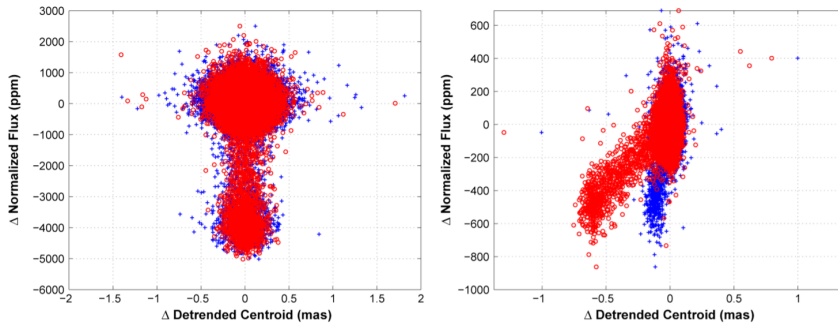


Figura 1.31: Variación del centroide vs disminución del flujo para KOI-221 (izquierda) y KOI-109 (derecha). Los círculos rojos corresponden a y_C y las cruces azules a x_C . Los puntos donde la disminución de flujo está cerca de 0 se corresponden a los puntos fuera del tránsito. En KOI-221 se aprecia una oscilación de los centroides muy poco correlacionada con la variación de flujo (no se aprecia una estrella de fondo). En cambio, en KOI-109 se puede apreciar como los y_C se desvían cara a la izquierda conforme el flujo desciende (planeta en tránsito), lo que indica que el centroide se desvía hacia una dirección concreta en correlación al tránsito y eso implica la presencia de una estrella de fondo (Bryson et al. 2013).

Sin embargo, el hecho de que no tengamos indicios para pensar que existe una fuente de luz ubicada en una dirección concreta no significa que no existan otras causas que puedan ofuscar nuestra señal. Para ello, Kipping et al. (2015) definen lo que se llaman los *centroides de tránsito* con el propósito de caracterizar con mayor precisión si la señal proviene de un tránsito. El centroide de tránsito se define de manera análoga a la del centroide convencional, sólo que esta vez los pesos los tomamos como el S/N ¹⁹ de la profundidad de tránsito en cada píxel:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (\delta_i / \sigma_i)}{\sum_{i=1}^N (\delta_i / \sigma_i)} \quad (1.78)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (\delta_i / \sigma_i)}{\sum_{i=1}^N (\delta_i / \sigma_i)} \quad (1.79)$$

δ_i es la profundidad de tránsito en cada píxel i , promediada en el tiempo de tránsito (del exoplaneta o del exosatélite) y σ_i el error en cada píxel. Describamos ahora el procedimiento para encontrar el supuesto falso positivo:

¹⁹ *Signal-to-Noise Ratio*. Cociente entre la potencia de la señal y la potencia del ruido.

Sección 1.2. Métodos de detección de exosatélites (o exomoons)

1. Una vez que tenemos la curva de luz del exoplaneta-exosatélite, identificamos los tránsitos de cada uno.

2. Calculamos el centroide de tránsito del exoplaneta y exosatélite promediándolos sobre el tiempo de tránsito de cada uno.

3. Debido a que las caídas de luz causan ruido de los fotones (es decir, bajo S/N), mayor flujo implica mayor S/N, con lo que si en verdad se ha producido un tránsito, el centroide de flujo se encontraría cerca del flujo de tránsito. Si, por el contrario, el centroide de tránsito se encuentra alejado del centroide convencional, se dice que está *deslocalizado*. En teoría, no se espera que un exosatélite deslocalice el centroide de tránsito (Figura 5).

En resumen, si vemos que en nuestro fotómetro se aprecia una caída de luz pero esa caída de luz deslocaliza el centroide de tránsito, difícilmente podremos atribuirlo a un exosatélite. Esto puede ayudarnos a descartar señales donde veamos pequeños “valles” en la curva de luz que puedan apuntar a la detección de un exosatélite. Aunque también aplicable a planetas, creemos que el test del centroide puede ayudarnos (por lo menos hasta que no dispongamos de mejor instrumentación) con señales tan imperceptibles y ruidosas como son las causadas por los exosatélites.

En la [Introducción](#) mencionábamos el candidato a exosatélite Kepler-90g.01 y cómo el centroide de tránsito de Kepler-90g se encontraba inmensamente deslocalizado, lo cual descartaba prácticamente su detección. [Kipping et al. \(2015\)](#) atribuyen (hipotéticamente) la caída de luz en el fotómetro a un rayo cósmico. Bien podría ser el caso, quizás pudo pasar que dicha emisión, debido a su aporte energético, deslocalizase el centroide pero que a su vez bloquease parte de la luz proveniente del disco de la estrella haciendo que, en cómputo general, detectáramos una caída de luz. Para mayor información sobre los cambios de flujo provocadas por los rayos cósmicos, se recomienda [Christiansen et al. \(2013\)](#).

1.2.5. Toro de plasma

Este método consiste en la detección del toro de plasma que se forma, en ciertas condiciones, alrededor de un planeta debido a la acción del exosatélite. Esto de modo análogo sucede en el Sistema Solar con Ío, el cual, debido a su gran actividad volcánica ([McEwen et al. 1998a, 1998b](#)) despidió iones en forma de plasma que interaccionan con la magnetosfera de Júpiter, creándose un toro

en torno al ecuador magnético del planeta. Dicha interacción es detectada en forma de ondas de radio (Hess et al. 2008).

Este fenómeno también ocurre, de manera análoga, en exoplanetas y estrellas: debido a la interacción de la magnetosfera del exoplaneta con los iones de plasma provenientes de la estrella, aparece una fuente de ondas de radio, tal y como pasa, en mucha menor medida, con el Sol y la Tierra, lo que causa las auroras boreales. La primera vez que se detectó dicha señal fuera del Sistema Solar fue en diciembre de 2020, en el sistema planetario τ Bootis (Turner et al. 2020).

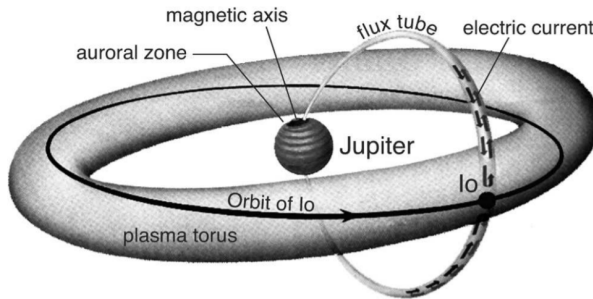


Figura 1.32: Bosquejo del toro de plasma Ío-Júpiter (Saur et al. 2004).

Noyola et al. (2014) estudiaron este fenómeno, tratando el caso donde existe un sólo exosatélite el cual genera todo ese plasma y Noyola et al. (2016) el caso donde existe otro exosatélite a mayores que comparte dicho plasma. Nosotros nos basaremos en el primer caso.

Expresión analítica de la señal

Definimos la **densidad de flujo de incidencia** S como la cantidad de radiación electromagnética recibida por el observador por unidad de superficie para un ancho de banda determinado.

Con esta definición, la potencia de la señal P se relaciona con el flujo de incidencia S tal que $S = P/\Delta f\Omega d^2$, donde Δf es el ancho de banda, Ω el ángulo sólido con el que la fuente emite ondas de radio y d la distancia a la que se encuentra la fuente (en años luz), por lo que cuanto mayor sea S , más detectable será la señal. S sigue la siguiente ecuación:

$$S = \frac{2\pi\beta_s R_s^2 B_s^2 V_0}{\mu_0 f_C \Omega d^2} \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_s + \mu_0^{-1} (B_s/V_0)^2}}, \quad (1.80)$$

donde β_s es el **parámetro de eficiencia** del satélite, el cual los autores asumen $\sim 1\%$ (igual al de Júpiter-Ío), R_s es el radio del satélite, B_s es el campo magnético del planeta en la que se encuentra el satélite, V_0 es la velocidad del plasma con respecto al satélite, calculándose como $V_0 = \omega r - \sqrt{GM_p/r}$, con ω la velocidad angular del planeta, G la constante de gravitación universal, y r la distancia planeta-satélite; μ_0 es la **permeabilidad**²⁰ del vacío (aproximadamente $1,256637 \cdot 10^{-6}$ henrios/m; Davis 2017), y ρ_s es la densidad del plasma. Esta cantidad solo se puede aproximar (si no hay información a priori del satélite) por lo que sabemos de la composición de la ionosfera en los cuerpos del Sistema Solar. Si su atmósfera es como la de Marte, Venus o incluso la Tierra, su ionosfera constará de iones de oxígeno (O^+ , O_2^+ ...) y si por el contrario es como la de Ío tendrá iones provenientes del azufre (S^+ , SO^+). Los autores dan una densidad de plasma mayor al primero que al segundo.

De la ecuación (1.80) podemos concluir algunos hechos:

- Cuanto mayor sea el campo magnético B_s , mayor será la posibilidad de detección. Esto hace que este método sea sensible a planetas gigantes de corto periodo de rotación (Durand-Manterola 2009).

- Cuanto mayor sea R_s , mayor es S , lo que favorece a los satélites grandes (lo cual es más interesante para nuestra investigación a efectos de habitabilidad, como luego veremos).

- Ya que d^2 es inversamente proporcional a S , este método es especialmente sensible a la distancia con respecto al observador, por lo que favorece a los exosatélites cercanos.

- Ningún parámetro depende de la estrella, por lo que este método es independiente de las propiedades de la misma.

²⁰Se dice *permeabilidad magnética* a la resistencia que tiene un material a formar un campo magnético.

Posibilidades de detección

Supongamos que tenemos un telescopio con una sensibilidad de 5 a 50 microJanskys²¹ ($\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$) para una frecuencia de 49 MHz (tal y como consideran en [Noyola et al. \(2014\)](#)).

Para un planeta como Júpiter que tenga un exosatélite con una ionosfera parecida a la Tierra ($\rho_s = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ kg m}^{-3}$), a una distancia de nosotros de 20 años luz ($d = 20$), $\Omega \sim 0,2$ estereorradianes, a una distancia mutua $r_S \approx 0,0028$ u.a. (la de Ío con respecto a Júpiter) con masa, periodo de rotación y velocidad angular las de Júpiter tenemos que el radio detectable es:

Para $S = 50 \mu\text{Jy}$ y $f_C = 49 \text{ MHz}$, $R_s \approx 0,6R_\oplus$

Para $S = 5 \mu\text{Jy}$ y $f_C = 49 \text{ MHz}$, $R_s \approx 0,2R_\oplus$

Esto implica que, para un satélite en ciertas condiciones y teniendo un radiotelescopio lo suficientemente potente, podríamos detectar un satélite de 0,2 radios terrestres, ¡más pequeño que la Luna y que Ío!

No obstante, hay ciertas cuestiones a tener en cuenta antes de ser demasiado optimistas.

- Hablar de una sensibilidad de $5 \mu\text{Jy}$ o incluso de $50 \mu\text{Jy}$ a una frecuencia de 49 MHz es hablar de una precisión que se escapa al más potente de los radiotelescopios. Hoy en día, a una frecuencia de 1 GHz, los más precisos solo pueden llegar a detectar un flujo $S \sim 1 \mu\text{Jy}$ (<https://www.cv.nrao.edu/~sransom/web/Ch1.html>), con lo que usando los datos indicados nos daría un radio mínimo detectable de $R_s \approx 6,25R_\oplus$. Un exosatélite de tales dimensiones sería incluso mayor que Neptuno, por lo que consideramos poco razonable considerarlo un exosatélite.

- Hemos asumido una distancia al planeta de 20 años luz, y esa es una distancia pequeña en comparación a otras posibles a las que se pueda detectar el planeta. De hecho, la mayoría de exoplanetas conocidos se encuentran a una distancia de entre 100 y 1000 parsecs ([NASA Exoplanet Archive](#)). Haciendo los cálculos pero ahora con una distancia de 100 parsecs (326 años luz), los radios de mínima detección son $3R_\oplus$ para el exosatélite y $9,78R_\oplus$ para el exoplaneta.

²¹1 Jansky = $10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$, 1 microJansky = 10^{-6} Jansky.

Como vemos, con este método podríamos hipotéticamente detectar exosatélites con un radio razonablemente grande alrededor de gigantes gaseosos con un potente campo magnético. Los problemas ya los hemos mencionado en parte: la señal se disipa rápidamente con la distancia, el satélite no puede ser relativamente pequeño y tiene que a su vez albergar una ionosfera. Cabe esperar que, en un futuro próximo, la sensibilidad de los radiotelescopios aumente tanto que pueda ser posible detectar exosatélites incluso aunque los parámetros mencionados sean desfavorables. La misión *SKA* está prevista para 2027 y promete grandes avances en la precisión de los radiotelescopios (<https://www.skatelescope.org/>).

1.2.6. Timing del púlsar

Hemos visto en la Sección 1.1.7 cuán precisos eran los púlsares de periodo corto y cuán sensibles eran a la presencia de un objeto que hiciese variar su TOA. Con este pronóstico parece lógico pensar que nos puede ser de gran utilidad estudiar estas variaciones en el *timing* cuando se encuentra un planeta albergando un satélite.

La variación del TOA para un sólo planeta en órbita circular viene dado por (Lewis et al. 2008):

$$t_N - t_0 = (T_N - T_0) + \Delta T_{corr} + TOA_p(M, M_p, r_p, i, \phi_b(0)), \quad (1.81)$$

donde t_N y t_0 son los instantes verdaderos donde se producen los pulsos N e inicial, T_N y T_0 los instantes donde se detectan los pulsos N e inicial, ΔT_{corr} es el factor de corrección que tiene en cuenta el sistema de referencia en el que el observador se encuentra, y TOA_p es la variación del TOA causado por un planeta. M y M_p son las masas del púlsar y del planeta, $\phi_b(0)$ representa la posición angular inicial del planeta con respecto al baricentro, r_p denota la distancia planeta-púlsar e i la inclinación.

Pues bien, para el caso donde hay a mayores un satélite orbitando el planeta, lo que se hace en Lewis et al. (2008) es añadirle otro factor de perturbación, TOA_p , que tiene en cuenta las variaciones en el timing del púlsar producidas por la influencia del sistema planeta-satélite:

$$t_N - t_0 = (T_N - T_0) + \Delta T_{corr} + TOA_p(M, M_p + M_s, r_p, i, \phi_b(0)) + TOA_{pm}(M, M_p, M_s, r_p, r_m, i, \phi_b(0), \phi_p(0)) \quad (1.82)$$

Nótese que aparece la variable $\phi_p(0)$, que representa la posición angular inicial del planeta con respecto al centro de masas planeta-satélite, además de r_m y M_s (la distancia planeta-satélite y la masa del satélite, respectivamente). Los autores obtienen:

$$TOA_{pm} = -\sin i \frac{M_p M_s}{(M + M_p)^2} \frac{r_p}{c} \left(\frac{r_m}{r_p} \right)^5 \left[\frac{3}{32} \cos(\phi_b - 2\phi_p) + \frac{15}{32} \cos(3\phi_b - 2\phi_p) \right], \quad (1.83)$$

con lo que, si queremos averiguar si la señal es detectable, miramos si su amplitud (que es donde alcanza su máximo) es mayor que el error de detección del instrumental que dispongamos. Como el máximo se alcanza cuando los cosenos sean 1, tenemos:

$$\text{máx} TOA_{pm} = \frac{9 \sin i}{16} \frac{M_p M_s}{(M + M_p)^2} \frac{r_p}{c} \left(\frac{r_m}{r_p} \right)^5 \quad (1.84)$$

La ecuación anterior nos indica varias cosas:

1. El factor (r_m/r_p) está elevado a 5 por lo que la amplitud de la señal aumenta enormemente cuando r_m/r_p es grande. Lo que se busca con este método, por tanto, son satélites lo más separados posible del planeta.
2. También interesan satélites lo más masivos posible. Al mismo tiempo, el método favorece planetas y púlsares de baja masa.
3. Para maximizar el efecto se necesitarían órbitas cuya inclinación estuviera muy cerca de 90° , aunque como la detección de púlsares es tan escasa e impredecible, no hay mucho que esperar de ese parámetro.

Hagamos ahora un ejemplo para ver si es posible la detección alrededor del púlsar más estable: PSR J0437-4715. Este púlsar se considera más preciso que un reloj atómico (Hartnett & Luiten 2010) con un error en el timing de 199 nanosegundos y masa $1,76 M_\odot$ (Verbiest et al. 2008).

Consideraremos la masa del planeta similar a la de Júpiter ($M_p = M_J$), con un satélite con la masa máxima de las super-Tierras ($\sim 10 M_\oplus$), a una distancia del púlsar similar a la de Júpiter del Sol (5,2 u.a.) y a una distancia planeta-satélite $0,4 R_H$. Tomemos la inclinación, $i = 90^\circ$. Usando (1.84) llegamos a que $\text{máx} TOA_{pm} = 655,4153$ nanosegundos, que sobrepasan con creces

los 199 ns del error del timing, por lo que este satélite sería detectable.

El problema, de nuevo, surge por la escasez de púlsares detectados. En el mejor de los casos tendríamos que detectar un púlsar de periodo ultracorto como PSR J0437-4715, que albergase un planeta masivo como Júpiter y que este a su vez tuviera un satélite masivo (por ejemplo, $10M_{\oplus}$) a una gran distancia ($\approx 0,12$ u.a.). Dicha distancia parece poco realista a efectos de lo que se encuentra en el Sistema Solar, además de que [Domingos et al. \(2006\)](#) da la estabilidad para la órbita de un satélite con órbita circular un semieje máximo de $0,48 R_H$ del planeta, con lo que si encontrásemos un satélite digamos a la mitad de esa distancia la amplitud de la señal caería a 56 ns, algo que ya no sería detectable. Además ya hemos visto en la [Sección 1.1.7](#) que los púlsares no eran, probablemente, demasiado proclives a albergar planetas, lo que hace la presencia de satélites igualmente poco plausible en este sentido.

Podemos decir, por tanto, que la detección de exosatélites por medio del timing de los púlsares se torna en una meta incluso más improbable que la que teníamos con los exoplanetas. Ésta vez ya no solo por lo escasos que son, sino que además necesitamos que los planetas y satélites tengan características físicas y orbitales bastante especiales y, en lo que se refiere a la separación planeta-satélite, extremas.

1.2.7. Microlente gravitatoria

Hemos hablado en la [Introducción](#) de cómo se analizó la posibilidad de haber detectado un exosatélite en torno al planeta errante MOA-2011-BLG-262. Pues bien, debido a que el método de microlente gravitatoria puede detectar masas tan pequeñas como pocas veces la masa de la Luna ([Bennett & Rhie 1996](#)) parece razonable aplicar este método a la búsqueda de exosatélites, en torno a planetas errantes o a sistemas jerarquizados estrella + planeta + satélite.

1.2.7.1. Caso planeta errante + exosatélite

En este caso, como sólo existen 2 cuerpos que actúan como lente, simplemente tenemos que considerar la **ecuación de lente binaria**, por lo que sería totalmente análogo a lo considerado en la [Sección 1.1.3.2](#).

1.2.7.2. Caso triple lente (estrella + planeta + satélite)

Consideramos ahora que la lente consiste en estrella + planeta + satélite. Como tenemos 3 lentes, la curva de luz resultante será la suma de las curvas de luz de las tres por separado. Esto, aunque en apariencia sencillo, lleva a grandes complicaciones a la hora de resolver las lentes por separado y puede dar lugar a degeneraciones (Song et al. 2014) que pueden propagarse en una mala estimación de los parámetros.

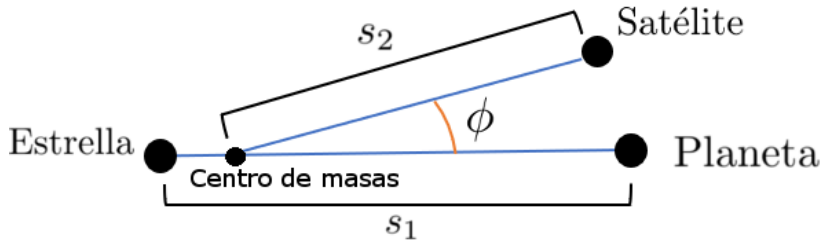


Figura 1.33: Ilustración de los parámetros s_1 , s_2 y ϕ . La localización del centro de masas está exagerada para una mejor visualización.

Ecuación de la triple lente

La ecuación de la triple lente es análoga a la de la lente binaria con la diferencia de que ahora hay otro sumando en el segundo miembro de (1.33). De este modo, el cálculo de z será incluso más complicado, teniendo que aplicar el método de Laguerre a un polinomio complejo de grado 10 (Gaudi et al. 1998). El aumento óptico se calcula igualmente con (1.35) y (1.36).

Los parámetros para una triple lente son parecidos a los que aparecían en el caso de la lente binaria, solo que aquí en vez de s necesitaremos s_1 y s_2 , que son las separaciones planeta-estrella y planeta-satélite, respectivamente; además tendremos que definir el ángulo ϕ que forma la línea que une el satélite y el centro de masas planeta-estrella con la línea que une al planeta y a la estrella (Figura 1.33). Los demás parámetros son los mismos que considerábamos para la lente binaria.

En la Figura 1.34, Han (2008) pone un ejemplo de una lente triple con los siguientes parámetros: $D_L = 6$ kpc, $D_S = 8$ kpc, $M_* = 0,3M_\odot$, $M_p = 10M_\oplus$, $M_s = 1M_\oplus$ y $\phi = 60^\circ$. La Figura 1.35 muestra las respectivas gráficas del

tiempo vs aumento óptico para cada caso de la Figura 1.34. De ambas figuras se pueden desprender varios hechos:

1. Los picos máximos de aumento óptico producidos por planeta y satélite aparecen cuando la fuente atraviesa sus sendas curvas cáusticas (tal y como sucedía en la lente binaria).

2. La señal del satélite aparece enmascarada en la del planeta cuando su curva cáustica se encuentra embebida dentro de la del planeta. Conforme d_s aumenta, esta curva se va diferenciando, hasta que se puede distinguir un tercer pico. Eso indica que el método favorece a satélites con una separación grande con respecto a su planeta.

3. La presencia del exosatélite puede, en algunos casos, exacerbar la señal del planeta, aunque la del mismo no sea detectable, sobre todo para d_p bajos y d_s altos.

Podemos decir, en definitiva, que el método de microlente gravitatoria ofrece grandes posibilidades debido a su sensibilidad a la masa y su alcance a enormes distancias, por la que la precisión del instrumental hoy en día es suficiente como para obtener resultados. Además, el hecho de que la distancia al observador no imponga restricciones sobre la detección permite buscar exoplanetas en regiones de la Galaxia con una gran abundancia de estrellas, tales como el bulbo galáctico, o incluso fuera de ella, como en las Nubes de Magallanes. El telescopio OGLE (*Optical Gravitational Lensing Experiment*) se encarga de buscar planetas y posibles exosatélites en dichas regiones de la Galaxia con el método de microlente gravitatoria y el de tránsitos (por ejemplo Udalski 2003).

Hay también inconvenientes a tener en cuenta. Además de la ya mencionada esporadicidad de los eventos de microlente gravitatoria, existen degeneraciones también cuando consideramos el caso de triple lente. Por ejemplo, para el objeto OGLE-2015-BLG-1459L los modelos no pueden decidir si consiste en una fuente con tres lentes (1S3L), una lente y tres fuentes (3S1L) o dos fuentes y dos lentes (2S2L). De todas maneras se pudo resolver dicha degenerancia utilizando los efectos del color, optando por el modelo 3S1L (Hwang et al. 2018), así que no somos demasiado optimistas si decimos que el método de microlente gravitatoria sea probablemente el primero en descubrir un exosatélite en un futuro próximo.

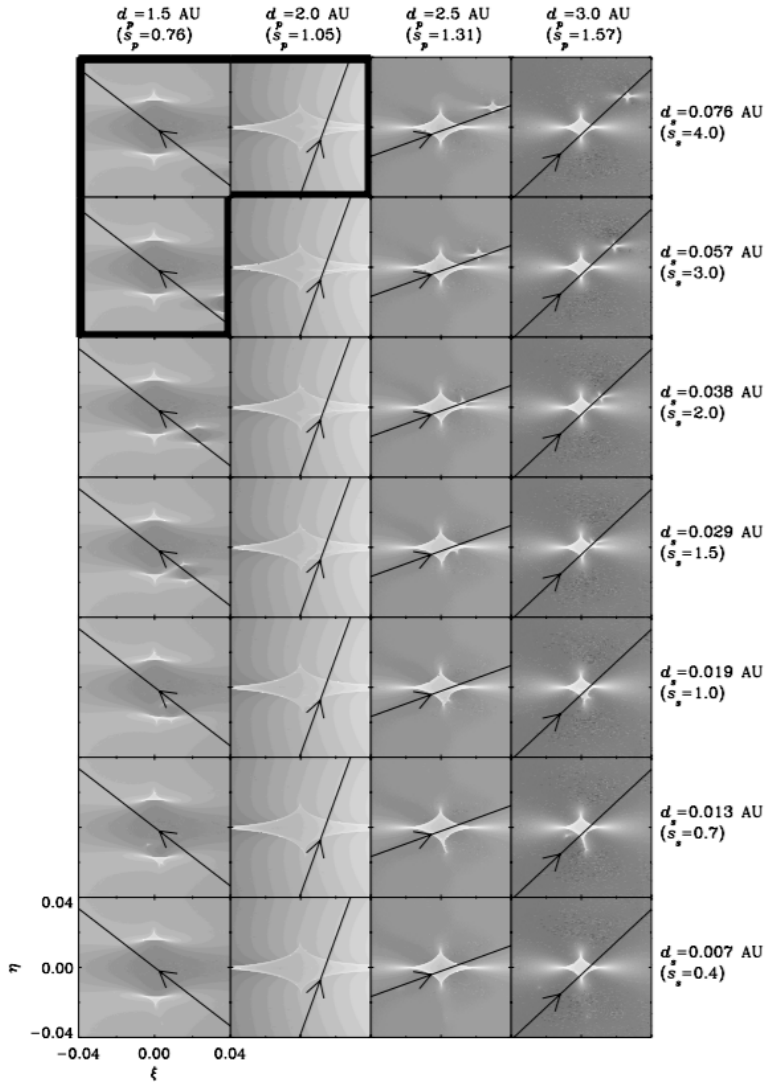


Figura 1.34: Varios ejemplos de lente triple. Para cada columna, d_p denota la separación estrella-planeta en u.a. mientras que S_p la expresa en radios de Einstein. Para cada fila, d_s es la separación estrella-planeta en u.a. mientras que S_s la expresa en radios de Einstein. ξ y μ son las coordenadas del plano de la lente. El origen es el centro de la curva cáustica. Cuanto más clara es la zona de la gráfica, mayor es el aumento óptico en tales puntos. La recta negra con flecha representa la trayectoria de la fuente. Las gráficas “encajonadas” representan configuraciones prohibidas para el satélite. Crédito para Han (2008).

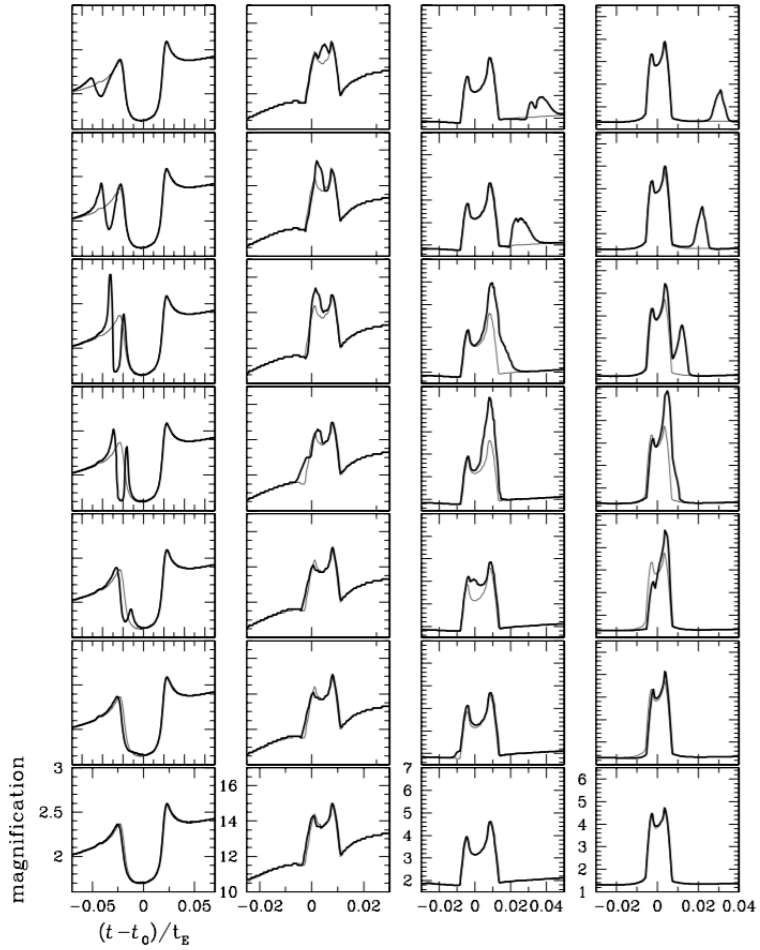


Figura 1.35: Tiempo vs aumento óptico para los casos de la Figura 1.34. La línea gris representa el sistema sin exosatélite, y la línea negra muestra el sistema completo.

	Velocidad radial	Tránsitos	TTV/TDV	Toro de plasma	Timing	Micro lente
¿Es posible la detección hoy en día?	No	Quizás, aunque se necesitan más datos de los que disponemos para confirmarlo al 100 %	Sí, aunque sólo en casos especiales podemos atribuirlos a la presencia de un exosatélite	Sí, aunque a día de hoy sólo es posible si el exosatélite tiene inmensas dimensiones	Sí, pero muy poco probable	Sí
Masa del satélite	Favorece satélites masivos	Favorece satélites masivos	Favorece satélites masivos	No depende directamente de la masa	Favorece satélites masivos	Favorece satélites muy masivos
Radio del satélite	No depende directamente del radio	Favorece radios grandes	No depende directamente del radio	Favorece radios grandes	No depende directamente del radio	No depende directamente del radio
Distancia al planeta	Favorece satélites cercanos al planeta	Favorece satélites cercanos al planeta	Favorece satélites lejanos	No favorece ni separaciones grandes ni pequeñas en particular	Favorece separaciones muy grandes del planeta	Favorece separaciones grandes
Distancia de la estrella al observador	Estrellas cercanas, nunca fuera de la Vía Láctea	Estrellas de la Vía Láctea con una magnitud hasta $K_p^b = 21$	Estrellas de la Vía Láctea con una magnitud de hasta $K_p = 21$	Favorece estrellas muy cercanas	La distancia puede ser incluso extragaláctica	La distancia puede ser incluso extragaláctica

Tabla 1.1: Tabla indicando algunas características de interés para los métodos de detección de exosatélites

^aEn la micro lente gravitatoria, nos referimos a la estrella de la fuente.

^bSe define K_p como $K_p = 0,2g + 0,8r$ cuando $(g - r) \leq 0,8$ y $K_p = 0,1g + 0,9r$ cuando $(g - r) > 0,8$, con $g = 0,54B + 0,46V - 0,07$ y $r = -0,44B + 1,44V + 0,12$, siendo B la magnitud en la banda azul y V la magnitud en el espectro visible (Smith et al. 2002).

1.3. Comentarios al Capítulo 1

Con la tecnología actual ha quedado de manifiesto la capacidad de descubrir exoplanetas por medio de varios métodos de detección. Los métodos fundamentales que se presentan en esta Tesis son: el de la velocidad radial, el método de tránsitos, la microlente gravitatoria, la imagen directa, el TTV y la astrometría. La velocidad radial y el método de tránsitos se consideran los más importantes, no sólo por permitir el descubrimiento de un gran número de exoplanetas, 4046 (el 91,7% del total), sino por proporcionar la mayor cantidad de información sobre sus parámetros físicos y orbitales. De hecho, combinando ambos podemos calcular la masa y el radio del exoplaneta, además de todos sus elementos orbitales, exceptuando el ángulo del nodo ascendente, el cual sólo se puede determinar a partir de la astrometría (Sección 1.1.6).

Los exosatélites, sin embargo, todavía no han sido descubiertos. Por ello, en este Capítulo hemos presentado algunos métodos propuestos para su posible detección con el objetivo de que, en un futuro próximo, seamos capaces de confirmar (o descartar) su existencia (Sección 1.2). Estos métodos son: la velocidad radial, el de tránsitos, el TTV/TDV, el test del centroide, el toro de plasma, el timing del púlsar y la microlente gravitatoria. Nos hemos centrado, sobre todo, en el método de tránsitos, ya que no sólo ofrece grandes posibilidades de detección, sino que nos proporciona información sobre el semieje y la inclinación de la órbita del exosatélite, además de su radio. Con respecto a este método, hemos comparado las diferencias que se aprecian en la curva de luz cuando el cuerpo que transita es un exoplaneta + exosatélite, un exoplaneta con anillos o un exoplaneta cuya estrella consta de una mancha central.

Hemos advertido que, como ocurría con los exoplanetas, los métodos de detección de exosatélites favorecen configuraciones dinámicas y físicas con características propias, lo que produce un sesgo en su descubrimiento. Con el fin de estudiar cada uno de estos métodos y sus limitaciones, hemos creado una Tabla (Tabla 1.1) donde se visualizan las características definitorias de cada uno de ellos, las cuales son: posibilidades (a día de hoy) de detección, masa del satélite, radio del satélite, distancia al planeta y distancia de la estrella al observador.

Capítulo 2

Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

La caracterización del modelo de una señal y el proceso de gestión de las observaciones de dicha señal son dos cuestiones que, aunque complementarias, requieren algoritmos y estrategias completamente diferentes. En este Capítulo detallaremos paso a paso las etapas del procedimiento de captación de una determinada señal para los modelos de detección del Capítulo 1, haciendo hincapié particularmente en los de velocidad radial y tránsitos porque son los que mayor información nos proporcionan acerca de las órbitas, debido al gran número de parámetros orbitales y físicos involucrados.

En primer lugar, asumiremos que a través de nuestro instrumental recogemos determinadas señales en función del tiempo. Obviamente las mediciones siempre están sujetas a distinto tipo de ruido, no sólo instrumental sino también físico, lo que requiere que la señal sea pre-procesada para reducir en la medida de lo posible todos los efectos que puedan distorsionarla, de manera que la detección no se vea comprometida. Todos estos mecanismos de pre-procesamiento serán obviados en el transcurso de esta Tesis, ya que no son el objetivo de la misma, por lo que siempre asumiremos que la calidad de nues-

tras observaciones es óptima. Léase por ejemplo [Fanelli et al. \(2011\)](#) para una mejor comprensión de todas las técnicas de pre-procesamiento llevadas a cabo en el telescopio Kepler.

Sea cual sea la naturaleza de la señal o de nuestro instrumental, por obvias limitaciones físicas las observaciones siempre son **discretas** a lo largo del tiempo y, salvo algunos casos donde la señal es esporádica e irrepetible como por ejemplo el caso de la microlente gravitatoria ([Sección 1.1.3](#); [1.2.7](#)), **periódicas**. Determinar el **periodo** de dicha señal va a ser imprescindible, puesto que los demás parámetros de nuestros modelos van a estar fuertemente correlacionados con él; por lo que cuanto mayor sea la precisión en el cálculo del periodo, más acertadamente podremos obtener el resto de parámetros. La herramienta para determinar el periodo de una señal son los llamados **periodogramas**.

2.1. El periodograma

El periodograma consiste en la determinación (o, mejor dicho, la *estimación*) para una señal concreta de su *densidad espectral*, es decir, de la potencia o poder de la señal para el rango de frecuencias en el que está definida. Estimar la densidad espectral será, por tanto, crucial para deducir las posibles periodicidades presentes en nuestra señal ya que corresponderán a las frecuencias cuya potencia espectral sea mayor (véase [Figura 2.1](#)).

Existen dos tipos de periodogramas: el convencional que es el que usa transformadas de Fourier aplicadas a series de tiempo discretas (**FFT**) y el periodograma **Lomb-Scargle** que es el que utilizaremos en todos nuestros ejemplos.

2.1.1. Periodograma clásico

También llamado *periodograma Schuster* ([Schuster 1898](#)). Se basa en la transformada rápida de Fourier (FFT) para la descomposición de la señal en todos los armónicos calculados para cada frecuencia en el rango de frecuencias de la señal. Sólo se puede aplicar a muestras equiespaciadas.

En estos términos, el periodograma clásico se calcula en función de la frecuencia f de la siguiente manera:

$$P_S(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N f_n e^{-2\pi i f t_n} \right|^2. \quad (2.1)$$

Algo interesante con respecto a este periodograma es que es capaz de estimar la *amplitud* de la señal, algo que nos será muy útil en la [Sección 2.3.3.1](#), tal que así:

$$\delta = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N f_n e^{-2\pi i f t_n} \right|. \quad (2.2)$$

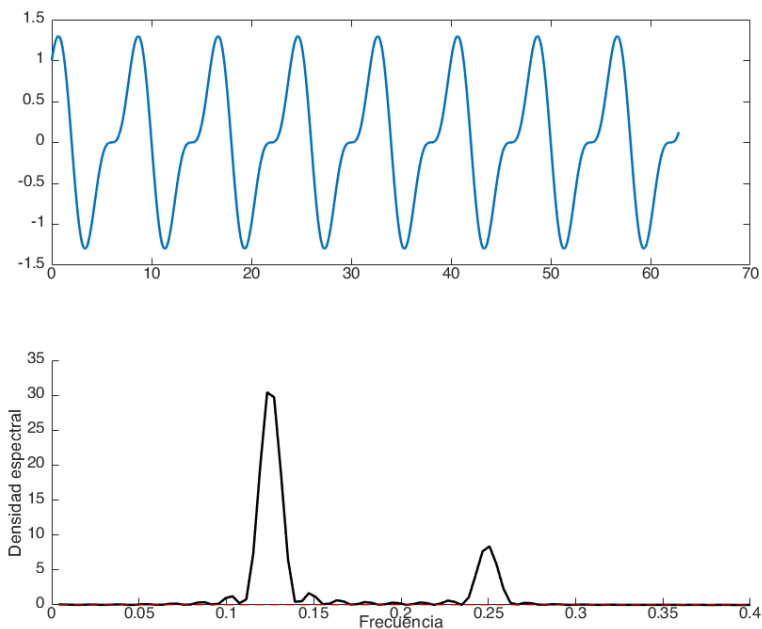


Figura 2.1: Grafo de la función $f(t) = \cos(\pi/4t) + 0,5 \sin(\pi/2t)$ (arriba). Periodograma Lomb-Scargle para la función $f(t)$ (abajo). Nótese como aparecen dos pico prominente en torno a las frecuencias $f_1 = 0,123$ y $f_2 = 0,2507$, que corresponde a los tiempo $1/f_1 = 8,1074$ y $1/f_2 = 3,98$, lo que indica que la señal tiene dos periodicidades causadas por la suma de las dos componentes sinusoidales.

2.1.2. Periodograma Lomb-Scargle

Para una muestra no uniforme el periodograma clásico no nos sirve y tenemos que echar mano de otro tipo de periodograma: el llamado Lomb-Scargle. Éste es el más utilizado (si no el único) por ser el que mayor flexibilidad proporciona a las observaciones; concretamente, en la mayoría de los casos, las observaciones (desde la Tierra) sólo se pueden hacer de noche, con lo que en muchos casos es imposible tener mediciones uniformes todo el tiempo. Fue desarrollado por [Lomb \(1976\)](#) y [Scargle \(1982\)](#), de ahí el nombre.

El periodograma Lomb-Scargle se calcula como

$$P_{LS}(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sum_n f_n \cos[2\pi f(t_n - \tau)])^2}{\sum_n \cos^2[2\pi f(t_n - \tau)]} + \frac{(\sum_n f_n \sin[2\pi f(t_n - \tau)])^2}{\sum_n \sin^2[2\pi f(t_n - \tau)]} \right], \quad (2.3)$$

con

$$\tau = \frac{1}{4\pi f} \arctan \left(\frac{\sum_n \sin(4\pi f t_n)}{\sum_n \cos(4\pi f t_n)} \right). \quad (2.4)$$

Hemos utilizando la función `plomb()` de `MATLAB` para implementar el periodograma Lomb-Scargle sobre la señal que preferimos. Un ejemplo se puede ver en el Apéndice B con el nombre de [lombscargle.m](#).

La situación ideal de la Figura 2.1, sin embargo, no se presenta en la vida real. Las observaciones siempre se registran con cierto “ruido”, bien sea porque la precisión del instrumental no es perfecta, o por la turbulencia atmosférica, o por el *jitter*¹, etc. El periodograma puede ayudarnos en ese sentido, indicándonos cuál es el pico más prominente de todos los demás provocados por el ruido. En el caso de que no podamos detectar ningún pico por encima de otro con un cierto nivel de confianza (lo que se llama FAP, *False Alarm Probability*), no podremos asegurar la naturaleza periódica de la señal y por ende no podremos atribuirla a ningún modelo determinista presentado en el [Capítulo 1](#). En ese caso descartaremos la señal como *detectable*.

Por el contrario, si hemos encontrado picos por encima del FAP, podremos dar una estimación del periodo y proceder al ajuste de las observaciones a un determinado modelo, según el método de detección que elijamos.

¹Se denomina *jitter* al ruido inducido en una determinada señal a causa de distintos fenómenos en la superficie de la estrella, tales como fáculas, manchas, playas, etc.

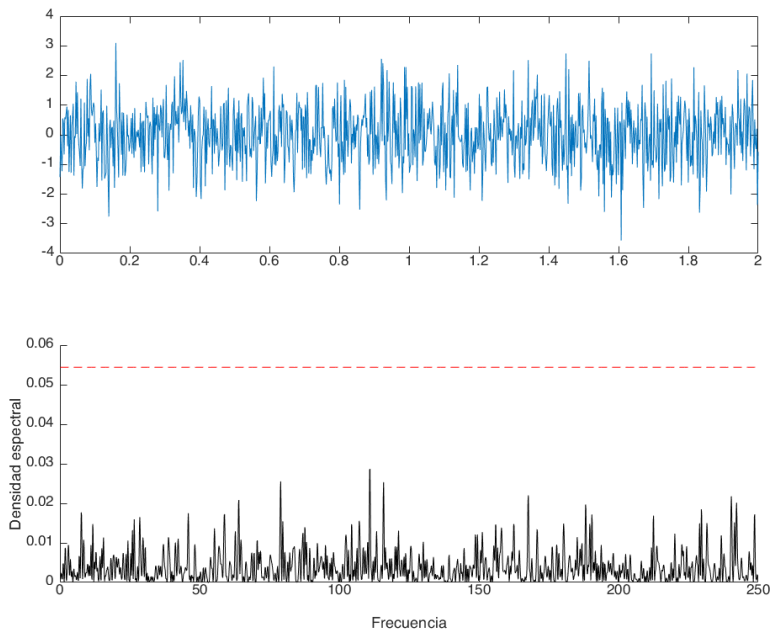


Figura 2.2: Caso análogo al de la figura 2.1 con la diferencia que la función no es determinista, sino que consta de números aleatorios normalmente distribuidos para cada valor del tiempo. Al ser la señal puramente estocástica no se aprecia ningún pico dominante, además que ninguno se acerca ni de lejos a la recta FAP (línea punteada roja), la cual hemos fijado a 99.9 %.

2.2. Ajuste de datos al modelo

Supongamos que hemos hallado una periodicidad en el periodograma de nuestra señal, es decir, hemos establecido que la señal sigue una cierta naturaleza periódica y determinista (es decir, no se trata de ruido estocásticamente distribuido). ¿Cómo podemos saber que hemos detectado un exoplaneta/exosatélite? Pues bien, el siguiente paso es comprobar que las observaciones se ajustan adecuadamente a un modelo. Para ello utilizaremos el ampliamente conocido **método de mínimos cuadrados**, es decir, tenemos que minimizar χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i(t_i) - y(p; t_i)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (2.5)$$

siendo y_i las observaciones para cada instante de tiempo t_i , $y(p; t_i)$ el modelo con parámetros p evaluado en t_i y σ_i los errores de medición para cada observación y_i .

Definimos

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu}, \quad (2.6)$$

siendo $\nu = N - m$ el número de grados de libertad, es decir, el número de observaciones menos el número de parámetros del modelo. Diremos que hemos obtenido un *excelente* ajuste cuando

$$\chi_\nu^2 \lesssim 1,1, \quad (2.7)$$

y, por lo tanto, afirmaremos que la presencia de un exoplaneta/exosatélite es compatible con las observaciones. Sin embargo, hay que hacer una distinción entre encontrar un buen ajuste con el hecho de haber *detectado* un exoplaneta/exosatélite. Por ejemplo, ya hemos hablado del “supuesto” exosatélite Kepler-1625b y cómo sus observaciones se ajustan al modelo planeta+satélite. Aunque este hallazgo ponga de manifiesto las grandes esperanzas puestas en haber encontrado el primer exosatélite existe aún cierta disputa científica sobre la evidencia de ese supuesto descubrimiento. Concluimos, por tanto, que la única manera de detectar un exoplaneta/exosatélite es el minucioso y repetido análisis de distintas observaciones a lo largo del tiempo, para así encontrar buenos ajustes a los modelos y poder comprobar reiteradamente la validación de los mismos.

Ahora que hemos establecido el criterio por el cual decimos hay un buen ajuste explicaremos cómo ajustar los parámetros del modelo a las observaciones.

2.2.1. Inicio del ajuste. Optimizador global

Minimizar la expresión (2.5) equivale a minimizar una función de coste que depende del tiempo y de un espacio de parámetros p . Existen numerosos métodos de optimización (local y global), pero optamos por elegir como tanteo inicial un método global por la sencilla razón de que no dependen de las

condiciones iniciales, las cuales no tenemos por qué tener.

Existen numerosos optimizadores globales aplicados a la Astronomía en la literatura, como el *recocido simulado* (Metropolis et al. 1953; Kirkpatrick et al. 1983; Černý 1985; Ingber 1993) o una versión más sofisticada llamada *recocido simulado adaptativo* (Ingber 2000). Estos métodos se basan en el método del gradiente, por lo que si aumentamos mucho el espacio de parámetros, ello hace que el número de puntos singulares aumente y eso causa problemas de convergencia. Para resolver este problema optamos por otro tipo de optimizadores, los llamados *algoritmos evolutivos*, que se aplican a modelos poblacionales en diversas áreas como en Genética o Biología (Eiben & Smith 2003; Al-Salami 2009; &c). Dichos algoritmos se basan en el cálculo estocástico y no involucran cálculo de gradiente por lo que son muy flexibles a la hora de trabajar con grandes espacios de parámetros.

Los dos algoritmos evolutivos más importantes son el **algoritmo genético** y la **evolución diferencial**. Nosotros utilizaremos este último.

Evolución diferencial

Este algoritmo se basa en la inicialización y la evolución de una determinada población por medio de la mutación, hibridación y selección hasta que se cumple un criterio de terminación (Lin et al. 2011; Balkaya 2013).

Los optimizadores globales no requieren condiciones iniciales, simplemente se necesita para su implementación un intervalo de acotación que contenga cada parámetro (por ejemplo, para la excentricidad el intervalo sería $[0, 0,999]$). La ausencia de una condición inicial hace que la solución que hallemos no sea demasiado precisa lo que puede conllevar a una estimación cuestionable de los parámetros. La estrategia a seguir será ejecutar el algoritmo de evolución diferencial varias veces y obtener luego mejores soluciones con un optimizador local. Para ello, utilizaremos como condiciones iniciales las soluciones proporcionadas por el optimizador global. La solución cuyo χ^2_ν sea menor nos dará los parámetros del modelo.

2.2.2. Mejora del ajuste. Optimizador local-global.

Debido a que tratamos modelos donde existe abundancia de mínimos locales, aun cuando pensemos que estamos cerca del mínimo global puede que nos encontremos en la cuenca de atracción de un mínimo local. Para resolver

```

Begin
  G=0
  Create a random initial population  $\vec{x}_{i,G} \forall i, i = 1, \dots, NP$ 
  Evaluate  $f(\vec{x}_{i,G}) \forall i, i = 1, \dots, NP$ 
  For G=1 to MAX_GEN Do
    For i=1 to NP Do
      Select randomly  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ 
       $j_{rand} = \text{randint}(1, D)$ 
      For j=1 to n Do
        If ( $\text{rand}_j[0, 1] < CR$  or  $j = j_{rand}$ ) Then
           $u_{i,j,G+1} = x_{r_3,j,G} + F(x_{r_1,j,G} - x_{r_2,j,G})$ 
        Else
           $u_{i,j,G+1} = x_{i,j,G}$ 
        End If
      End For
      If ( $f(\vec{u}_{i,G+1}) \leq f(\vec{x}_{i,G})$ ) Then
         $\vec{x}_{i,G+1} = \vec{u}_{i,G+1}$ 
      Else
         $\vec{x}_{i,G+1} = \vec{x}_{i,G}$ 
      End If
    End For
    G = G + 1
  End For
End

```

Figura 2.3: Pseudocódigo para la evolución diferencial (Mezura-Montes & Palomeque-Ortiz 2009) utilizando la estrategia de mutación 1 de Balkaya (2013).

ese problema utilizaremos el algoritmo **Basin-hopping** (Wales & Doye 1997), que implementa un algoritmo de minimización local primero y aplica una perturbación aleatoria después para encontrar un mínimo global en la vecindad del mínimo local. Utilizaremos de nuevo como condiciones iniciales la solución hallada por el algoritmo de evolución diferencial.

2.2.3. Estimación del error de los parámetros

Para estimar el error de los parámetros que ajustemos, necesitamos calcular su matriz de covarianzas asociada, la cual nos dará la varianza de cada uno de ellos y, por tanto, la desviación estándar, lo cual corresponde a lo que llamamos error.

Con objeto de calcular esta matriz, calcularemos la inversa de la hessiana de la función objetivo evaluada en dichos parámetros (en nuestro caso es χ^2). En este sentido, para la determinación de la hessiana, hemos llegado a la conclusión de que lo mejor es importar el paquete Autograd (integrado de serie en Python) de la siguiente manera:

```
from autograd import hessian
```

Con la función *hessian* podremos calcular la hessiana para una función objetivo y un conjunto de parámetros. Una vez que tenemos la hessiana, la invertiremos, calcularemos la raíz cuadrada de cada uno de los elementos de la diagonal y así obtendremos el error de los parámetros.

2.3. Detección y cálculo de elementos orbitales para varios ejemplos

Para comprobar nuestra metodología, utilizaremos los modelos del [Capítulo 1](#) que nos faciliten extraer información sobre los parámetros orbitales y físicos de los exoplanetas y exosatélites y que además permitan su detección hoy en día; esos son, velocidad radial, tránsitos, TDV/TTV aplicados a exosatélites y TTV aplicados a exoplanetas.

2.3.1. Velocidad radial

Para el método de velocidad radial, testaremos el caso de un sólo exoplaneta y el de varios exoplanetas. No trataremos el caso de exoplaneta + exosatélite puesto que no es posible la detección, y probablemente no lo sea hasta un futuro muy lejano.

2.3.1.1. Un solo planeta. 51 Pegasi b.

Para una estrella con un sólo planeta consideraremos el caso del primer planeta descubierto, 51 Pegasi b (también llamado Dimidio). Este planeta fue descubierto en 1995 por [Mayor & Queloz \(1995\)](#) y fue más tarde revisitado por [Marcy et al. \(1997\)](#), donde analizaron los datos recogidos por el Observatorio Lick. Dichas mediciones tienen un error de $\sim 5 \text{ m s}^{-1}$.

Primero procederemos al cálculo del periodograma para las observaciones de la Tabla 1 de [Marcy et al. \(1997\)](#). Han sido eliminados los datos correspondientes a los tiempos que van de los 91.6137 a los 326.896 (JD - 2450000) ya que se encuentran muy espaciados en el tiempo y podrían dar lugar a una mala estimación (además que en el periodograma inducen una señal no deseada). Un fragmento de esta Tabla se puede ver en la Tabla 2.1.

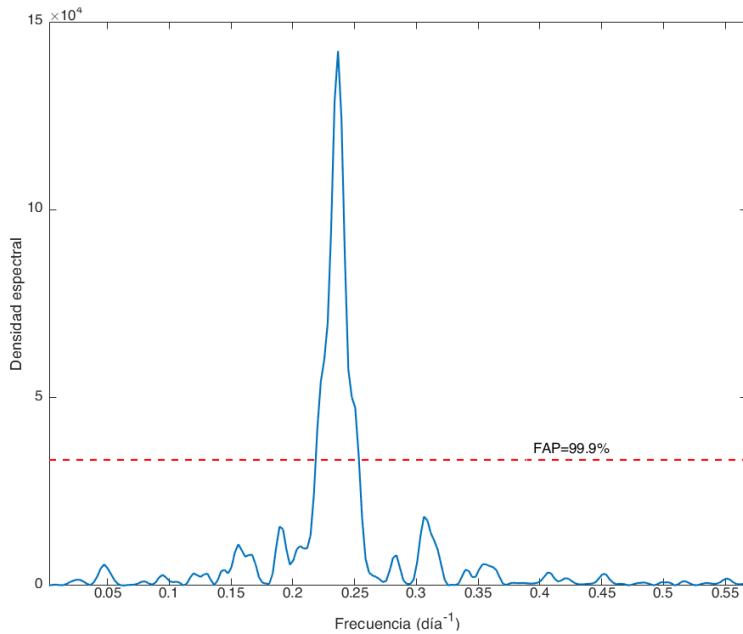


Figura 2.4: Periodograma para el planeta 51 Pegasi b, conforme a las observaciones de la Tabla 1 de [Marcy et al. \(1997\)](#). Vemos un gran pico en torno a la frecuencia 0,2366, con lo que nos da un periodo de ~ 4.2269 días.

El periodo inicial que usamos es el calculado por el periodograma de la Figura 2.4: 4,2269 días. Para el resto de elementos orbitales usamos el algoritmo de evolución diferencial implementado por el módulo `Optimize` de Python; lo ejecutamos 100 veces para obtener un χ^2 lo más pequeño posible, para después utilizarlos como condiciones iniciales en el algoritmo Basin-hopping también implementado por el módulo `Optimize`. Nos quedamos con los parámetros que

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

hagan χ^2 mínimo.

El programa implementado en Python se encuentra en el Apéndice B con el nombre [RVsingle.py](#).

El modelo utilizado es el que describe la Ecuación (1.10), por lo que los parámetros son γ , K , P , T , e , y ω .

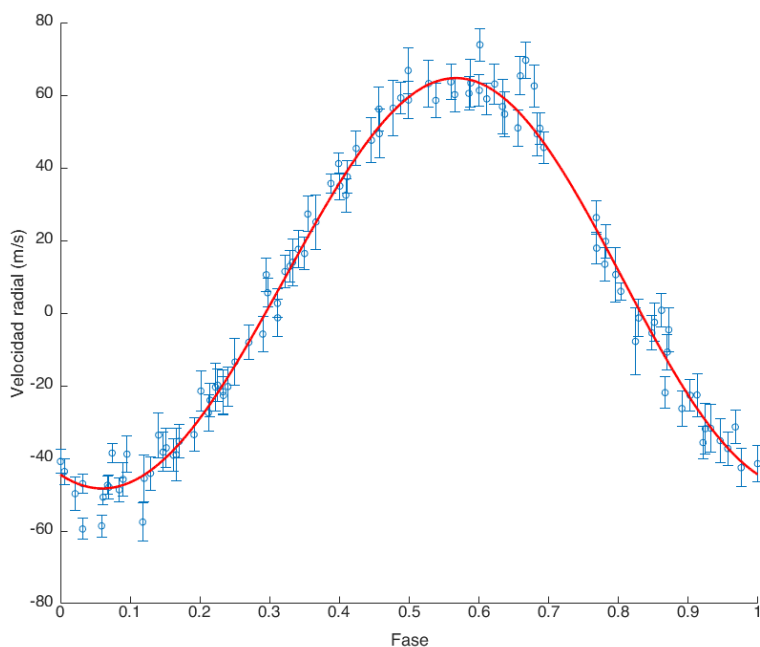


Figura 2.5: En azul, las observaciones de la velocidad radial del exoplaneta 51 Pegasi b, siguiendo la Tabla 1 de [Marcy et al. \(1997\)](#). En rojo, la curva de velocidad radial que mejor se ajusta a las observaciones. Las barras verticales indican el error en cada medición.

La solución final es: $\gamma = 7,4668 \pm 0,4555$ m/s, $e = 0,0170 \pm 0,0119$, $K = 56,49 \pm 0,65$ m/s, $T_c = 60,5275 \pm 1,2331$ días, $\omega = 0,6933 \pm 0,6462$ radianes y $P = 4,231 \pm 0,063$ días, con $\chi^2_\nu = 1,04$ (lo que indica un muy buen ajuste). Nótese que la excentricidad tiene el error parecido a su estimación,

DOPPLER MEASUREMENTS FOR 51 PEG

JD - 2,450,000	Velocity (m s ⁻¹)	Error (m s ⁻¹)
2.67365	-40.87	3.3
2.80873	-46.96	3.6
2.95979	-47.39	4.5
3.62695	-19.85	2.9
3.73265	-13.47	2.6
3.90077	-5.782	3.0
4.60753	49.41	2.2
4.78429	58.66	2.5
4.90699	63.20	3.2
5.60503	45.60	2.7
5.92544	17.88	3.3
11.6443	-45.50	4.7
11.8378	-38.98	4.9
12.6355	27.27	5.2
12.8664	32.45	6.5

Tabla 2.1: Fragmento de la Tabla 1 de [Marcy et al. \(1997\)](#).

con lo que creemos que es consistente con una órbita circular. De igual manera ocurre con el argumento del periastro ω que, en órbitas circulares, suele tener una alta incertidumbre, lo que motiva a veces a darlo como indefinido (tal y como lo hacen [Mayor & Queloz 1995](#) y [Marcy et al. 1997](#)).

Ahora que tenemos los parámetros calculados, podemos calcular la masa (mínima) del planeta con (1.9). Para ello tenemos que conocer previamente la masa de la estrella 51 Peg, la cual es $1,12 M_{\odot}$ ([Fuhrmann et al. 1997](#)). Haciendo los cálculos llegamos a que $M_p \sin i \approx 0,48 M_J$, con lo que $M_p \geq 0,48 M_J$.

2.3.1.2. Varios planetas. HD 37124.

En este caso simplemente utilizamos la formulación del caso kepleriano de la velocidad radial para varios planetas (Ecuación 1.11) con una leve modificación; debido a las perturbaciones gravitatorias de largo periodo que suele presentarse en los casos newtoniano y kepleriano, se introduce una corrección lineal o *trend* que hace que la señal de la velocidad radial adquiera una cierta pendiente², con lo que el modelo real que utilizaremos será el siguiente:

$$V_r = \gamma + \sum_{j=1}^n (K_j [\cos(\omega_j + f_j) + e_j \cos(\omega_j)]) + d(t - t_0), \quad (2.8)$$

siendo d la pendiente del supuesto *trend* y t_0 una época de referencia (coeremos como t_0 el primer dato de las observaciones).

Para nuestro ejemplo tomaremos el caso del objeto HD 37124, que es una estrella que alberga 3 exoplanetas (Vogt et al. 2005), con lo que nuestro espacio de parámetros tendrá tamaño 17. Consistirán en γ , d y los 5 que corresponden a cada planeta y que se definen análogamente al caso anterior: K_j , P_j , T_j , e_j , y ω_j .

A la hora de obtener el ajuste primero debemos tener una acotación relativamente certera del periodo para cada uno de los tres planetas. Para ello, debemos seguir el siguiente procedimiento (descrito por ejemplo en Fischer et al. 2007):

1. Iniciamos el ajuste de manera totalmente análoga a la del caso de un sólo exoplaneta: utilizamos el periodograma para obtener una estimación de uno de los periodos (eligiendo el pico mayor) y después calculamos la estimación del resto de los elementos orbitales combinando los optimizadores globales con los locales tal y como hicimos en la sección anterior. Los resultados no tienen por qué ser precisos, y con toda seguridad no lo serán ya que estamos asumiendo que solo existe una periodicidad cuando en realidad existen tres.

2. Una vez que hayamos calculado la curva de velocidad radial correspondiente a dichos elementos orbitales, restamos dicha curva a la señal original.

²Esta corrección lineal es conveniente usarla siempre que estudiamos la señal de velocidad radial de múltiples planetas, para tener en cuenta otros posibles cuerpos más lejanos que no causen picos significativos en el periodograma (Wright & Howard 2009).

3. Repetimos el proceso aplicándolo a la curva obtenida hasta que no podamos identificar más picos significativos en el periodograma; es decir, hasta que no haya picos por encima de la línea de FAP (Véase Figura 2.6).

4. Una vez que tengamos identificados todos los picos posibles, habremos logrado acotar todos los posibles periodos. Pues bien, introduciendo dichas acotaciones junto al modelo descrito en (2.8) en nuestro algoritmo de evolución diferencial obtendremos todos los elementos orbitales de todos los exoplanetas, junto con γ y d . De nuevo, utilizaremos el método Basin-hopping para afinar el ajuste.

5. Debido a que en este caso el espacio de parámetros es bastante grande, su estimación puede ser poco estable, con lo que ejecutaremos los algoritmos pertinentes varias veces con el objetivo de encontrar el χ^2_ν más cercano a 1 posible.

Para los datos de la velocidad radial escogeremos la Tabla 1 de [Wright et al. \(2011\)](#).

A los errores debemos de añadirle el *jitter* de la siguiente manera:

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_i^2 + jitter^2} \quad (2.9)$$

siendo σ_i los errores en cada observación. Normalmente el *jitter* es una cantidad a priori desconocida y que debemos estimar a la vez que todos los demás parámetros, pero por simplicidad aquí asumiremos que es igual a 4,0, tal y como fue estimado en [Wright et al. \(2011\)](#).

El programa implementado en Python se encuentra en el Apéndice B con el nombre [RVmultiple.py](#).

Los elementos orbitales obtenidos son: $\gamma = 2,78388$ m/s, $K_1 = 28,9353$ m/s, $P_1 = 154,378$ días, $T_1 = 13495,1674$, $e_1 = 0$, $K_2 = 14,72$ m/s, $P_2 = 889,912$ días, $T_2 = 10614,37$, $e_2 = 0$, $K_3 = 12,11$ m/s, $P_3 = 1832,873$ días, $T_3 = 6784,66$, $e_3 = 0,1328$, $\omega_3 = 0,1$ radianes y $d = 0,00225^3$.

Con estos datos, $\chi^2_\nu = 1,02$, lo que es un muy buen ajuste.

³Como la órbita del primer y segundo planeta es circular, sus épocas de paso se miden desde el nodo ascendente.

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

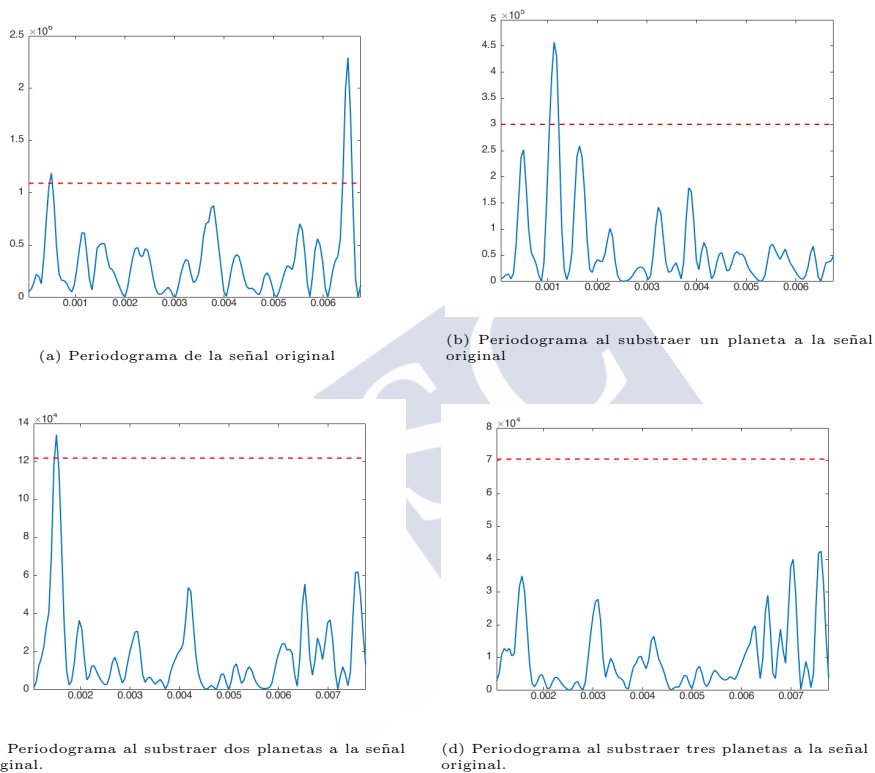


Figura 2.6: Periodogramas para cada conjunto de datos. Nótese que, cuando hemos substraído de la señal los tres planetas (gráfica inferior derecha), ningún pico sobrepasa la línea de FAP (la cual hemos fijado a 99.9%), por lo que asumimos que no existen más planetas.

Al ser circulares las dos primeras órbitas, ω_1 y ω_2 se encuentran indefinidos. Estos datos concuerdan con los calculados en la literatura, donde se dice que todas las órbitas son susceptibles de ser circulares ya que su error es muy parecido a su estimación (Tabla 2 de Wright et al. 2011).

Utilizando que la masa de la estrella es $0,81 M_\odot$ (Bonfanti et al. 2015), calculamos la masa mínima para los 3 planetas utilizando K_i y e_i , obteniendo $M_1 \gtrsim 0,6633M_J$, $M_2 \gtrsim 0,6050M_J$ y $M_3 \gtrsim 0,6277M_J$.

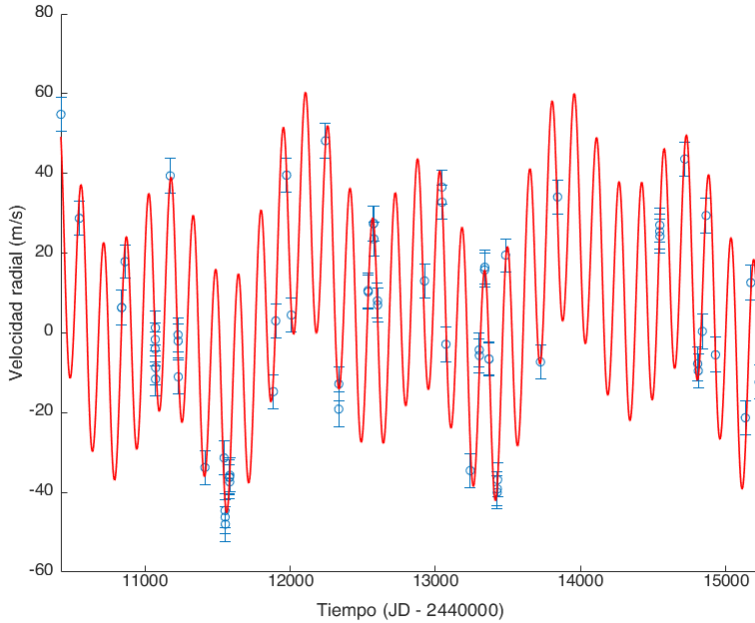


Figura 2.7: En azul, las observaciones de la Tabla 1 de Wright et al. (2011) con sus respectivos errores. En rojo, la curva de velocidad radial que mejor se ajusta a las observaciones.

2.3.2. Tránsitos

Para el método de tránsitos trataremos como ejemplo el caso de un sólo exoplaneta y el caso de un exoplaneta + exosatélite⁴.

⁴Algún lector podrá pensar: ¿cómo tratar el método de tránsitos para varios exoplanetas? La respuesta es sencilla: o bien están ligados gravitacionalmente y hablamos de un planeta

Asumiremos órbitas en movimiento directo, coplanarias y circulares.

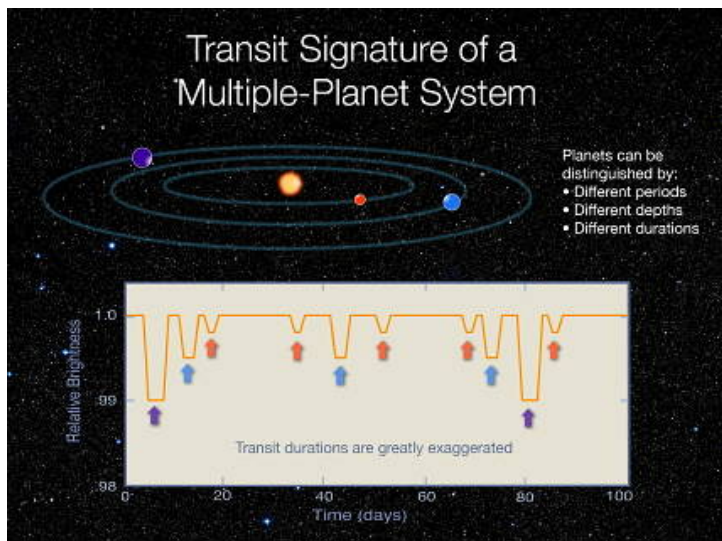


Figura 2.8: Curva de luz para varios exoplanetas. Aun cuando la figura muestra duraciones de tránsito muy exageradas por motivos de visualización, la probabilidad de que aparezcan curvas de luz combinadas es muy pequeña. Crédito a *NASA Ames Research Center*.

2.3.2.1. Un planeta. XO-3b.

La estrella XO-3 es una estrella de tipo F5V con un radio de $1,37R_{\odot}$ y una temperatura efectiva de 6429 K (Winn et al. 2008). Para calcular los coeficientes cuadráticos del *limb darkening*, utilizamos los correspondientes a la temperatura de 6500 K en la Tabla 1 de Sing (2010): $u_1 = 0,3423$ y $u_2 = 0,2939$.

Para los datos de observación de la fotometría relativa de XO-3, podemos ir a la versión on-line de Winn et al. (2008) o también podemos buscarla en el

doble (cuyo modelo es totalmente análogo al de planeta + satélite) u orbitan libremente la estrella, y en ese caso como la duración del tránsito es mucho más pequeña que el periodo para cualquier exoplaneta, es muy poco probable que sus señales interactúen entre sí. En todo caso, si se diera la casualidad de que dos o más señales se combinaran, esperaríamos al siguiente periodo (véase Figura 2.8).

catálogo VizieR (Ochsenbein et al. 2000).

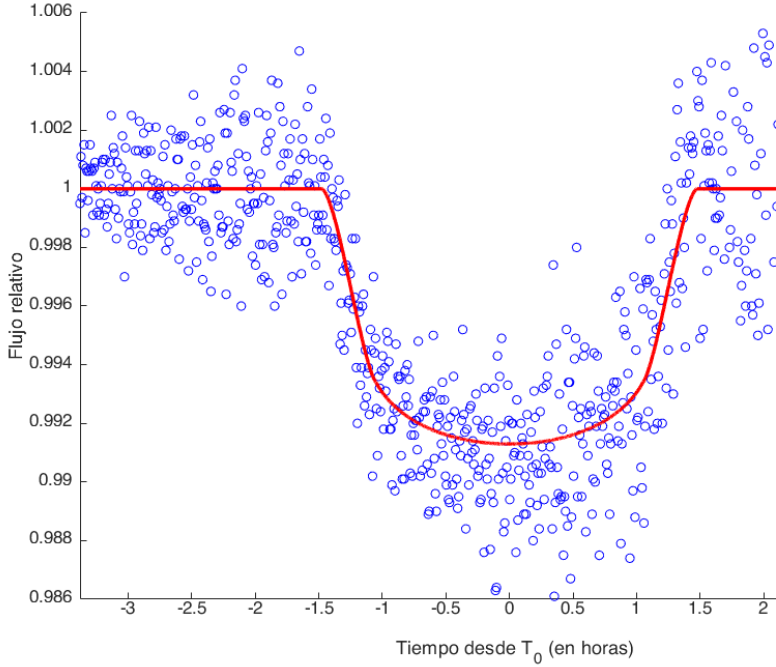


Figura 2.9: En azul, las observaciones de la fotometría relativa de XO-3. En rojo, la curva de luz que mejor se ajusta a las observaciones.

Antes que nada tenemos que disponer del periodo del exoplaneta. Una opción sería lo que hicimos hasta ahora: utilizar el periodograma aplicándolo a un periodo entero. Dicha opción no es del todo recomendable puesto que, en nuestras simulaciones, dar una estimación incluso bastante acertada del periodo da unos resultados alejados de la realidad (además de que en el optimizador global el periodo converge a uno no deseado), por lo que hemos llegado a la conclusión de que dejar el parámetro del periodo libre no puede ser una opción y debemos fijarlo previamente. Para ello podemos establecer la estimación proveniente del periodograma como un parámetro fijo o también podemos calcularlo a partir de combinar los tránsitos con la velocidad radial, algo que casi siempre puede hacerse debido a la proximidad de los planetas que transitan la

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

estrella (Ecuación (1.52)). Nosotros por simplicidad hemos optado por definir como periodo el mencionado en Winn et al. (2008): 3,19 días⁵.

Una vez tenemos determinado el periodo, ya podemos ajustar las observaciones a nuestro modelo, el cual viene establecido por la expresión (1.17). Los parámetros a ajustar serán el semieje mayor a_p , el parámetro de impacto $b = a_p \cos i_p / R_*$, el tiempo de tránsito medio T_0 y p , el cociente entre los radio del planeta y de la estrella, siendo i_p la inclinación de la órbita del planeta.

El programa implementado en Python se encuentra en el Apéndice B con el nombre `transitsingle.py`.

Después de aplicar el algoritmo de evolución diferencial y el de Basin-hopping, los elementos calculados son:

$a_p = 0,0464000 \pm 0,0000065$ u.a., $b = 0,6658 \pm 0,0090$, $T_0 = 0,7652 \pm 0,0005$ días $p = 0,0921 \pm 0,0010$.

Utilizando p y R_* calculamos el radio del planeta R_p :

$$R_p = p \cdot R_* = 1,26 R_J,$$

y con lo valores de b , a_p y R_* obtenemos la inclinación i_p :

$$i_p = \arccos(b/(a/R_*)) = 84^\circ,73$$

Podemos calcular a mayores la duración total de tránsito, T_d , utilizando la ecuación (3) de Seager & Mallén-Ornelas (2003):

$$T_d = \frac{P}{\pi} \arcsin \left(\frac{R_*}{a} \left[\frac{\left(1 + \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i_p\right)^2}{1 - \cos^2 i_p} \right]^{1/2} \right). \quad (2.10)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores anteriormente obtenidos, resulta $T_d = 2,93$ horas. En efecto, $T_d \ll P$.

⁵En dicho artículo, lo que se hace es un ajuste lineal de un conjunto de varios tránsitos medios, lo cual permite un estimación muy sencilla del periodo de la curva de luz.

2.3.2.2. Planeta + satélite

Ya se ha comentado a lo largo de este trabajo que la detección de un exosatélite es un proceso tremendamente complicado y que requiere de un meticuloso estudio previo de los datos, por lo que dar aquí una metodología “objetiva” de cómo validar la detección de un exosatélite se torna, hoy en día, en una tarea casi imposible, más allá de la validación para una muestra concreta (como es el caso de los 3 tránsitos de Kepler 1625-b abordados en [Teachey et al. 2017](#)). Para solventar este problema simularemos un tránsito exoplaneta + exosatélite, introduciendo un satélite en uno de los ejemplos ficticios que hemos tratado para el caso de un sólo exoplaneta. Con ello, nos ahorraremos problemas de procesamiento de datos y dispondremos de todas las observaciones que sean necesarias.

Para la estrella, consideraremos una tipo solar (tipo espectral G2V), por tanto los coeficientes del *limb darkening* correspondientes (asumiendo un modelo no lineal de 4 parámetros) son $c_1 = 0,6060$, $c_2 = -0,3196$, $c_3 = 0,9569$ y $c_4 = -0,4745$ ([Sing 2010](#)). Para el planeta asumiremos uno tipo Júpiter, a una distancia de 0,25 u.a. de la estrella. El satélite escogido tiene de radio dos veces⁶ el de la Tierra y está a $0,3 R_H$ del planeta. Consideramos órbitas coplanarias y circulares, en las cuales está contenida la línea de observación.

El modelo elegido es el implementado por el algoritmo LUNA ([Sección 1.2.2](#); [Kipping 2011a](#)). Ya que hemos elegido órbitas coplanarias, los parámetros del modelo son a_p (el semieje del planeta), $p = R_p/R_*$, a_s (el semieje del satélite) y $s = R_p/R_*$, siendo R_p y R_s los radios del planeta y del satélite, respectivamente.

El programa implementado en Python se encuentra en el Apéndice B con el nombre [transitmoon.py](#).

A la hora de elegir el vector de errores y el número de observaciones, hemos probado varios casos en los que hemos variado ambos, desde un error/número de observaciones pequeño hasta un error/número de observaciones grande, con el objetivo de testar la correlación que hay entre el error/número de observaciones y la calidad del ajuste correspondiente ([Tabla 2.2](#) y [2.3](#)). A modo ilustrativo, supondremos que los errores siguen una distribución normal con media 0 y desviación estándar 0,0002, siendo el número de observaciones $N =$

⁶Escogemos dicho radio con el fin de facilitar la detección del exosatélite y su visualización en la curva de luz ([Figura 2.10](#)).

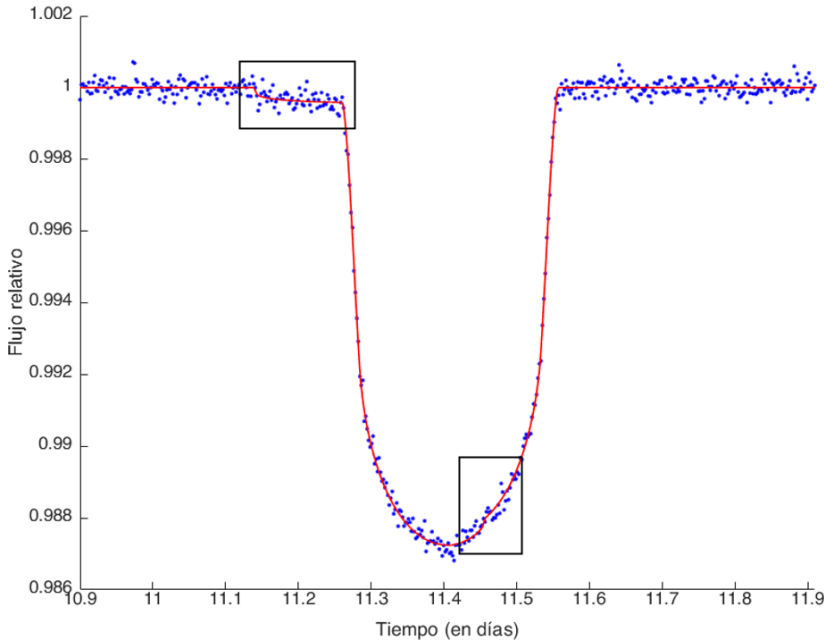


Figura 2.10: En azul, las observaciones. En rojo, la curva de luz correspondiente al modelo exoplaneta + exosatélite que mejor se ajusta a las observaciones (los errores siguen una distribución $\mathcal{N}(0, 0.0002)$). Se han marcado con rectángulos negros los lugares de la curva de luz donde se aprecia la presencia del exosatélite.

500 (Figura 2.10). Siguiendo el procedimiento de detección análogo al utilizado para el tránsito de un solo planeta, llegamos a que $\hat{a}_p = 0,25004 \pm 0,00003$ u.a.⁷, $\hat{p} = 0,100490000 \pm 0,00000822$, $\hat{a}_s = 0,0051000 \pm 0,0000013$ u.a. y $\hat{s} = 0,018300000 \pm 0,000041744$. Como $\chi^2_\nu = 0,99785$, el ajuste es muy bueno.

Comparando los resultados de las tablas 2.2 y 2.3, podemos distinguir diferencias de comportamiento entre el ajuste de los parámetros y la calidad de ajuste. En cuanto al error, vemos que el χ^2_ν se mantiene prácticamente inalterable conforme vamos aumentando el error, mientras que los parámetros estimados divergen cada vez más de los reales (sobre todo los concernientes al exosatélite). Por otro lado, si hacemos lo mismo con el número de observaciones, obtenemos curiosamente lo contrario: los parámetros estimados se

⁷El sombrero indica las estimaciones de los parámetros.

Sección 2.3. Detección y cálculo de elementos orbitales para varios ejemplos

	a_p	p	a_s	s	χ_ν^2
$\mathcal{N}(0,0002)$	53,767	0,10049	1,107	0,01835	0,998
$\mathcal{N}(0,0005)$	53,775	0,10048	1,087	0,01841	0,999
$\mathcal{N}(0,001)$	53,734	0,10038	1,072	0,01856	1,002
$\mathcal{N}(0,005)$	53,892	0,10040	1,053	0,01832	1,003
$\mathcal{N}(0,01)$	54,028	0,09928	0,703	0,0227	1
Parámetros reales	53,758	0,1005	1,1076	0,0184	-

Tabla 2.2: Parámetros estimados y χ_ν^2 correspondientes a cada distribución de errores.

	a_p	p	a_s	s	χ_ν^2
$N = 500$ (cad. = 2,91 min)	53,767	0,10049	1,1073	0,0183	0,998
$N = 400$ (cad. = 3,64 min)	53,756	0,1005	1,1079	0,0184	0,997
$N = 300$ (cad. = 4,85 min)	53,756	0,1005	1,1079	0,01845	0,997
$N = 200$ (cad. = 7,27 min)	53,721	0,10049	1,1036	0,01835	1,012
$N = 100$ (cad. = 14,54 min)	53,723	0,1004	1,097	0,0184	0,973
$N = 50$ (cad. = 29,1 min)	53,766	0,1005	1,1466	0,01897	1,007
$N = 25$ (cad. = 58,17 min)	53,744	0,1004	1,1071	0,01766	1,122
Parámetros reales	53,758	0,1005	1,1076	0,0184	-

Tabla 2.3: Parámetros estimados y χ_ν^2 correspondientes a cada número de observaciones N . La abreviatura “cad.” hace referencia a cadencia.

mantienen, aun cuando el número de observaciones es muy pobre, muy cerca de los reales; mientras que la calidad del ajuste se aleja del criterio elegido para la validación de la detección de un exosatélite (Ecuación (2.7)). Este hecho podría hacer pensar, ingenuamente, que es preferible tener muestras con muy pocas observaciones antes que tener un error grande en las muestras puesto que la calidad de ajuste se mantiene cerca de 1 en el primer caso (a diferencia del segundo). Sin embargo, tenemos que tener en cuenta algo primordial: cuando los datos se encuentran muy dispersos (error grande) o la muestra es poco numerosa (N bajos), no podemos *a priori* descartar el modelo de un sólo exoplaneta para optar por el de exoplaneta + exosatélite, sino que debemos comparar la calidad del ajuste para ambos modelos (no importa cuán bueno sea el ajuste al modelo exoplaneta + exosatélite si el ajuste al modelo de un sólo exoplaneta es mejor). Por tanto, es preciso comparar también la diferencia de χ_ν^2 en los dos modelos cuando existe un error grande y cuando N es pequeño.

Para el primer caso, hemos optado por la última fila de la Tabla 2.2. Cuando

el error sigue una distribución normal $\mathcal{N}(0, 0,01)$ ya vimos que $\chi_\nu^2 \approx 1$. Pues bien, si el mismo conjunto de observaciones lo ajustamos para el modelo de un exoplaneta, obtenemos $\chi_\nu^2 = 1,45$. Obviamente existe diferencia de un modelo a otro, pero no es demasiado notable. Para el segundo caso, hemos optado igualmente por la última fila de la Tabla 2.3. Cuando $N = 25$, ya se vio que $\chi_\nu^2 \approx 1,1$. Para el modelo de un solo exoplaneta, hemos obtenido $\chi_\nu^2 = 7,23$. Claramente cuando N es pequeño se puede descartar rápidamente el modelo de un solo exoplaneta por delante del de exoplaneta+exosatélite. Eso nos indica que es preferible tener una muestra poco numerosa antes que una con un error grande.

2.3.3. TTV/TDV

2.3.3.1. TTV y TDV causado por un satélite

Simularemos los TTV y los TDV producidos por un satélite tipo Tierra, a unos $0,3 R_H$ de un planeta tipo Júpiter que a su vez sigue una órbita alrededor de una estrella tipo solar con un periodo de 10 días. Para ello, utilizaremos las Ecuaciones (1.65) y (1.71) evaluadas en instantes de tiempo separados por un tiempo igual al periodo del planeta (un instante por cada tránsito).

Para encontrar el periodo de la señal, lo que podríamos pensar es aplicar el periodograma Lomb-Scargle para identificar los picos que identifiquen periodicidades fuertes. El problema es que, como la señal está muestreada una vez cada periodo del planeta, las únicas periodicidades que podemos calcular unívocamente son las que cuya frecuencia no sobrepase la mitad de la frecuencia de muestreo, lo que se llama **frecuencia Nyquist** (véase por ejemplo Tan 2013: 19). Si en nuestro periodograma existe una periodicidad cuya frecuencia sobrepasa la frecuencia Nyquist aparecerán **alias**, es decir, réplicas del pico original que son, a priori, indistinguibles del mismo (véase la Figura 2.12, donde aparecen 2 picos). Esto hará imposible la estimación del periodo del satélite por medio de los periodogramas. Debido a que la frecuencia de la señal del satélite es, aproximadamente, nueve veces la del planeta (Kipping 2011b), la muestra es *poco numerosa*, ya que la frecuencia de la señal se encuentra muy por encima de la frecuencia Nyquist. Por lo tanto necesitamos otra manera de calcular P_s .

La estrategia a seguir será, entonces, calcular las amplitudes δ_{TTV} y δ_{TDV} . Utilizaremos la transformada rápida de Fourier (Ecuación (0.8)) para deter-

Sección 2.3. Detección y cálculo de elementos orbitales para varios ejemplos

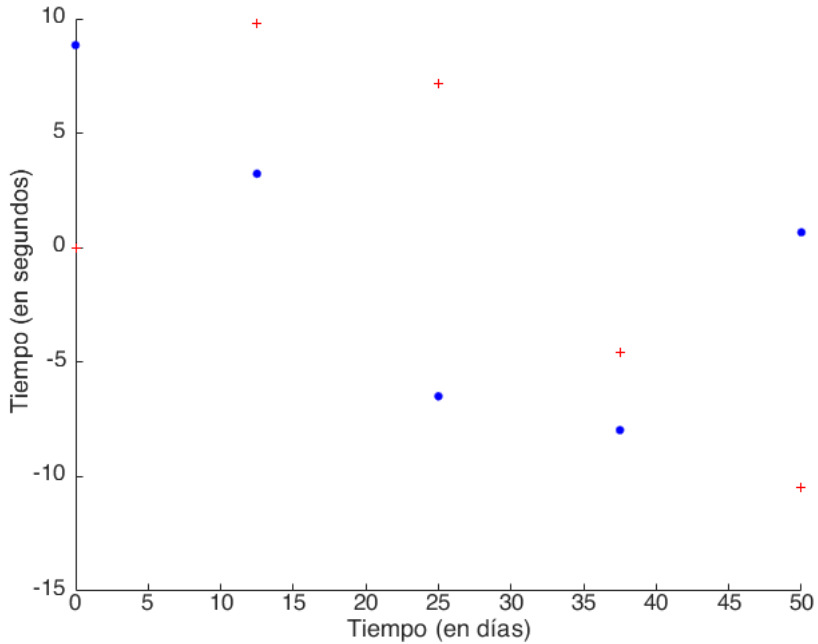


Figura 2.11: Las cruces rojas indican el TDV en función del tiempo. Los círculos azules, el TTV. El tiempo abarca 5 tránsitos (50 días). Nótese que la cantidad de puntos es uno por cada tránsito, es decir, 5 para el TTV y 5 para el TDV. El TTV y el TDV están en segundos.

minar la amplitud de cada una de las señales⁸ (puntos rojos y azules de la Figura 2.11).

Para comprobar si nuestra estimación es correcta, calculamos

$$\Delta_{TTV} = \frac{a_s M_s P_p}{2\pi a_p M_p} = 8,8497 \text{ s} \quad (2.11)$$

y

$$\Delta_{TDV} = T_0 \left(\frac{a_s M_s P_p}{a_p M_p P_s} \right) = 10,5249 \text{ s}, \quad (2.12)$$

⁸Se puede aplicar la transformada rápida de Fourier porque los puntos están equiespaciados (un punto por cada periodo).

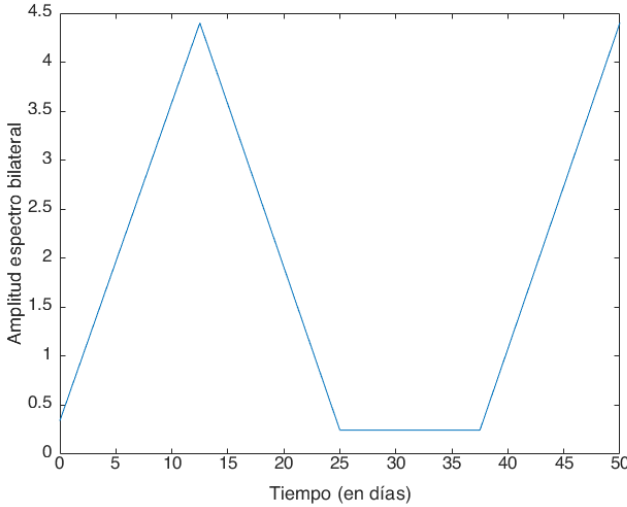


Figura 2.12: Amplitud del espectro bilateral para la señal del TTV. Se aprecian dos picos en torno al punto 4,40. Como el espectro bilateral es calculado con la transformada rápida de Fourier, la amplitud del mismo es simétrico con respecto al punto medio de las frecuencias del muestreo, por lo que la energía del espectro está repartida a la mitad en cada lado del espectro. Para recuperar la amplitud verdadera de la señal, simplemente tenemos que multiplicar por 2. Por lo tanto la amplitud es $\hat{\Delta}_{TTV} \approx 8,80$ s.

donde T_0 (el tiempo de tránsito de referencia) es obtenido con la ecuación (3) de Seager & Mallén-Ornelas (2003). La estimación puede considerarse bastante buena⁹.

Para estimar el periodo, por (1.74):

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{\delta}_{TDV}}{\hat{\delta}_{TTV}} = \frac{\hat{\Delta}_{TDV}}{\hat{\Delta}_{TTV}} = 1,195 \quad (2.13)$$

$$\hat{\eta} = \frac{2\pi T_b}{\hat{P}_s} \quad (2.14)$$

⁹Nótese que hacemos la diferencia entre Δ , que hace referencia a la amplitud usual, y la δ , que denota la amplitud en **media cuadrática**. Se cumple, tanto para la señal de TTV como para la de TDV, $\Delta_{ptp} = 2\sqrt{2}\delta$ (Kipping 2009a), siendo Δ_{ptp} la amplitud del máximo al mínimo de la señal (*peak-to-peak*), por lo que como $\Delta_{ptp} = 2\Delta$, $\Delta = \sqrt{2}\delta$.

Sección 2.3. Detección y cálculo de elementos orbitales para varios ejemplos

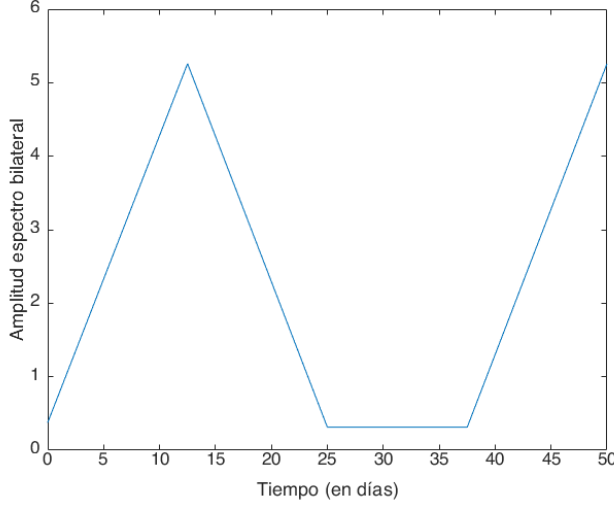


Figura 2.13: Amplitud del espectro bilateral para la señal del TDV. Actuando de forma análoga a la figura 2.12, obtenemos que la amplitud es de $\hat{\Delta}_{TDV} \approx 10,518$ s.

Despejando \hat{P}_s :

$$\hat{P}_s = \frac{2\pi T_b}{\hat{\eta}} = 0,9431 \text{ días.} \quad (2.15)$$

Por la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que el semieje verdadero era $a_s = 0,3R_H = 0,0909$ u.a. y que la masa verdadera del exoplaneta y el exosatélite son la de Júpiter y la Tierra, respectivamente, llegamos a que el periodo verdadero del satélite es $P_s = 0,9476$ días, por lo que la estimación es, de nuevo, bastante buena.

Ahora sólo nos queda calcular la masa M_s y el semieje a_s . Para ello necesitamos los productos $M_s a_s$ y $M_s a_s^{-1/2}$, los cuales se calculan a partir de $\hat{\delta}_{TTV}$ y $\hat{\delta}_{TDV}$ mediante (1.62) y (1.69), respectivamente. De esta manera, podemos calcular a_s :

$$\hat{a}_s = \left(\frac{M_s a_s}{M_s a_s^{-1/2}} \right)^{2/3} = 0,001855 \text{ u.a.} \quad (2.16)$$

Teniendo en cuenta que $a_s = 0,00186$ u.a., la estimación es excelente.

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

Despejando M_s del conocido $M_s a_s$, deducimos $\hat{M}_s = 3,0027 \cdot 10^{-6} M_\odot$, frente a $3 \cdot 10^{-6} M_\odot$ que es la masa verdadera del satélite ($1 M_\oplus$), con lo que de nuevo el ajuste es muy bueno.

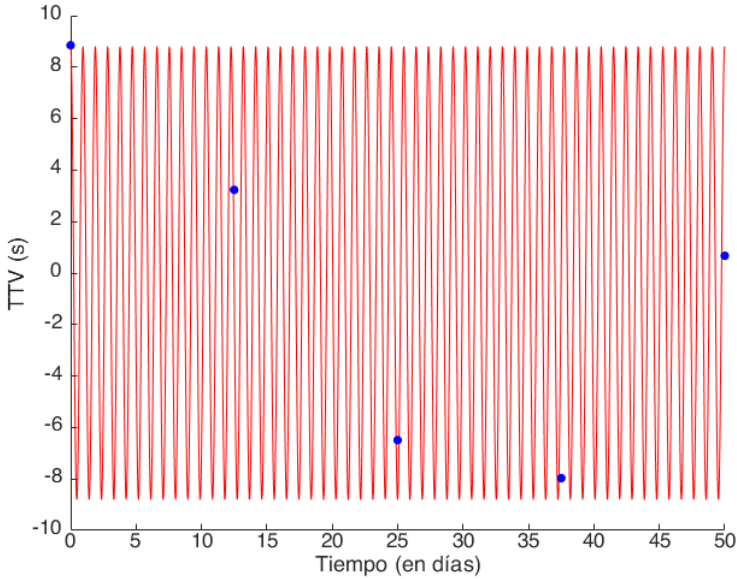


Figura 2.14: En azul, los datos de observación que disponemos del TTV. En rojo, la curva de TTV ajustada para el periodo P_s y la amplitud Δ_{TTV} .

Una vez tenemos la curva de TTV y TDV para cualquier instante de tiempo, podemos averiguar si las señales detectadas provienen de la presencia de un exosatélite, y no de otros fenómenos. Lo que tenemos que hacer es comprobar que la diferencia de fase entre las curvas es $\pi/2$. Para ello, hemos calculado los instantes de tiempo para los cuales alcanzan su amplitud máxima, para luego transformarlos a la anomalía verdadera y hacer el valor absoluto de la diferencia. Utilizaremos como referencia el segundo máximo para ambas señales.

El valor t_1 correspondiente al segundo máximo local de la señal TTV es: $t_1 = 0,943$ (Figura 2.14).

El valor t_2 correspondiente al segundo máximo local de la señal TDV es:

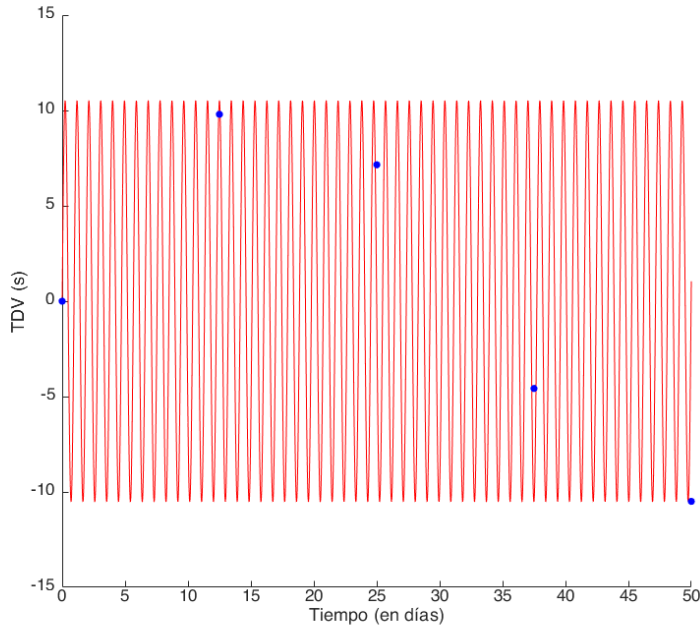


Figura 2.15: En azul, los datos de observación que disponemos del TDV. En rojo, la curva de TDV ajustada para el período \hat{P}_s y la amplitud $\hat{\Delta}_{TDV}$.

$t_2 = 1,179$ (Figura 2.15).

Por lo tanto $|t_1 - t_2| = 0,236$.

Como consideramos órbitas circulares, $\Delta f_S = \Delta M$, siendo M la anomalía media y f_S la anomalía verdadera, entonces

$$\Delta f_S = \Delta M = \frac{2\pi}{P_s} |t_1 - t_2| = 1,572 \approx \pi/2$$

Queda demostrado que la diferencia de fase es, aproximadamente, $\pi/2$.

Hemos confeccionado un programa en MATLAB donde se implementan todos estos cálculos, llamado [TTV/TDV.m](#) (Apéndice B).

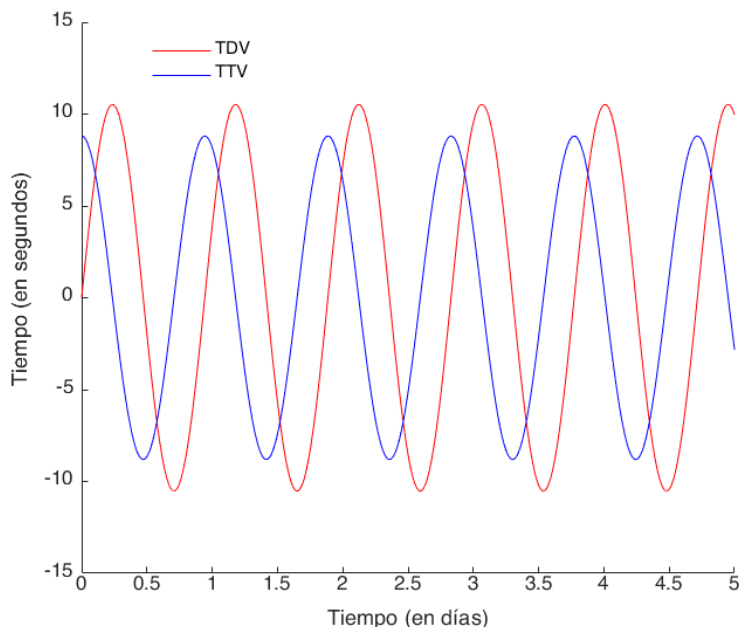


Figura 2.16: La diferencia de fase entre la curva TDV y la curva TTV es bien clara.

Hemos visto, pues, el procedimiento a seguir para calcular los elementos orbitales de un satélite a partir de la variación del tiempo de tránsito de un determinado exoplaneta. Sin embargo, en la práctica este procedimiento es más complicado por tres razones; la primera es que, para cada dato de observación, debemos ajustar los parámetros del exoplaneta a las observaciones de su fotometría (tal y como hicimos en la [Sección 2.3.2.1](#)), lo que induce a cada dato un error que hará que el ajuste del TTV/TDV sea incluso menos certero a la hora de estimar su periodo. La segunda es que, si sucede que la órbita del satélite tiene una excentricidad significativa, el factor Υ de (1.64) no será igual a 1 y por lo tanto no podremos despejar P_s al hacer el cociente $\delta_{TTV}/\delta_{TDV}$. Este hecho es importante también a la hora de determinar la naturaleza del TTV/TDV, puesto que cuando la excentricidad del satélite es distinta a 0, o no hay coplanaridad, o incluso si está en movimiento retrógrado, la diferencia de fase divergirá significativamente de $\pi/2$ y no podremos asegurar la presencia de un exosatélite.

2.3.3.2. TTV causado por la influencia gravitatoria de un exoplaneta sobre el otro. Caso de Kepler-49b y Kepler-49c.

Para este ejemplo, nos basaremos en el sistema planetario de Kepler-49, cuyos dos planetas Kepler-49b y Kepler-49c siguen una configuración cercana a la resonancia orbital 3:2, puesto que sus periodos son 7,204 y 10,913 días, respectivamente ($10,913/7,204 = 1,515 \approx 3/2$) (Xie 2013). Por ello, utilizaremos el modelo descrito¹⁰ en la Sección 1.1.5.3.

Para obtener las observaciones del TTV para cada uno de los planetas, tenemos que calcular los tiempos de tránsito que se observan para cada tránsito (O) y restarle los tiempos de tránsito que se esperan si el exoplaneta no viera su órbita perturbada (C). Para ello, puede verse la Tabla 1 de la versión online de Xie (2013) (<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0067-0049/208/2/22/meta#apjs484341t1>), donde se muestra el tiempo de tránsito observado (O) para cada número de tránsito y el error proveniente de la estimación de T_0 , a partir del ajuste de los parámetros para cada tránsito concreto (tal y como lo hemos hecho en la Sección 2.3.2.1). Una esquematización de la tabla puede verse en la Tabla 2.4.

El tiempo de tránsito esperado (C) se calcula suponiendo una efeméride que varía en función del tiempo siguiendo un modelo lineal:

$$C = T_0 + P \times N,$$

donde N es el número de tránsito, P es el periodo del planeta y T_0 es el tiempo de tránsito de referencia (el cual puede tomarse igual al tiempo de tránsito correspondiente al número de tránsito 0).

En nuestro ejemplo, el T_0 correspondiente al planeta interior Kepler-49b es $T_{01} = 103,2909$ y el correspondiente al planeta exterior Kepler-49c es $T_{02} = 103,2909$ (Tabla 2.4)¹¹.

Calcularemos la señal del TTV como:

$$TTV = O - C \tag{2.17}$$

¹⁰Muchos sistemas múltiples exoplanetarios descubiertos siguen una configuración cercana a la resonancia orbital (ver, por ejemplo, Popova & Shevchenko 2014), es por ello que este caso sea de sumo interés.

¹¹Nótese que en la Tabla no aparece el número de tránsito 0 asociado a Kepler-49c. Lo que se hace, pues, es restarle un periodo al tiempo de tránsito correspondiente a $N = 1$.

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

Una vez que tenemos las señales del TTV para cada uno de los planetas, podemos proceder al ajuste para determinar si la influencia de cada uno de los planetas es detectable sobre el tránsito del otro.

KOI	248.02	-3	70.1063309	0.0061210
KOI	248.02	-2	81.0205460	0.0052046
KOI	248.02	-1	91.9436340	0.0044533
KOI	248.02	1	113.7384949	0.0051828
KOI	248.02	3	135.5790710	0.0122518
KOI	248.02	5	157.4186249	0.0044179
KOI	248.02	9	201.0613556	0.0084305
KOI	248.02	10	211.9971466	0.0036972
KOI	248.01	-5	67.2759552	0.0041031
KOI	248.01	-2	88.8962936	0.0045494
KOI	248.01	0	103.2908554	0.0069442
KOI	248.01	1	110.4947510	0.0040341
KOI	248.01	2	117.7048950	0.0034475
KOI	248.01	4	132.1078949	0.0060075
KOI	248.01	5	139.3214417	0.0035956
KOI	248.01	7	153.7122498	0.0041184
KOI	248.01	8	160.9157104	0.0045453
KOI	248.01	10	175.3152008	0.0066228

Tabla 2.4: Tiempo de tránsito asociado (O) al objeto KOI 248.02 (Kepler-49c) y KOI 248.01 (Kepler-49b) (cuarta columna). La tercera columna indica el número de tránsito y la quinta columna indica el error. Extracto obtenido de la Tabla 1 de la versión on-line de Xie (2013).

Kepler ID	$j:j-1$	P (d)	P' (days)	Δ	$ V $ (d)	ϕ_{tiv}	$ V' $ (d)	ϕ'_{tiv}	χ^2_{dof}	χ^2_{dof}
18c/d	2:1	7.642	14.86	-0.028	0.0037($\pm 7\%$)	$-4:3 \pm 4^\circ$	0.0028($\pm 10\%$)	$169^\circ \pm 5^\circ$	0.95	0.71
24b/c	3:2	8.146	12.33	0.0094	0.028($\pm 20\%$)	$-3:9 \pm 12^\circ$	0.026($\pm 20\%$)	$180^\circ \pm 16^\circ$	1.95	1.28
25b/c	2:1	6.239	12.72	0.0195	0.0026($\pm 20\%$)	$5:7 \pm 12^\circ$	0.00072($\pm 30\%$)	$200^\circ \pm 22^\circ$	1.19	1.60
23b/c	3:2	7.107	10.74	0.0077	0.031($\pm 40\%$)	$-68^\circ \pm 18^\circ$	0.013($\pm 30\%$)	$120^\circ \pm 17^\circ$	1.88	0.93
28b/c	3:2	5.912	8.986	0.013	0.0082($\pm 20\%$)	$-50^\circ \pm 14^\circ$	0.0086($\pm 30\%$)	$130^\circ \pm 16^\circ$	0.87	3.43
32b/c	3:2	5.901	8.752	-0.011	0.0062($\pm 30\%$)	$45^\circ \pm 15^\circ$	0.0077($\pm 30\%$)	$228^\circ \pm 19^\circ$	1.33	2.60

Tabla 2.5: TTV complejo asociado a varios sistemas planetarios cercanos a la resonancia orbital (Tabla 1 de Lithwick et al. 2012).

Siguiendo el procedimiento de ajuste análogo a la sección anterior (combinando el algoritmo de evolución diferencial y el Basin-hopping) obtenemos, para Kepler-49b, un ajuste con $\chi^2_\nu = 2,041$ y, para Kepler-49c, un ajuste de $\chi^2_\nu = 2,258$. Aunque hay que decir que estos ajustes no son perfectos, creemos son razonablemente aceptables; por una parte porque el error es bastante

grande en comparación al TTV, y también porque hemos advertido que, con este tipo de datos, el χ^2 suele ser bastante grande (véase la Tabla 2.5, donde el χ^2 varía desde 0,71 hasta 3,43 para varios exoplanetas).

Utilizando el modelo sinusoidal descrito en (1.50), obtenemos que:

$$A_{ttv}^1 = 0,0072 \pm 0,0004 \text{ días y } \phi_{ttv}^1 = 0,26927 \pm 0,05244 \text{ radianes}$$

y

$$A_{ttv}^2 = 0,0117 \pm 0,0007 \text{ días y } \phi_{ttv}^2 = -3,0318 \pm 0,0592 \text{ radianes,}$$

correspondiéndose los superíndices 1 y 2 con el planeta interior y el planeta exterior, respectivamente.

Ahora que tenemos la amplitud y la fase para la señal de cada planeta, lo propio es que pudiésemos calcular los elementos orbitales y físicos asociados a ellos¹². Sin embargo, esto no es posible, puesto que la determinación de los parámetros del modelo no permite determinar unívocamente la masa y la excentricidad de los planetas (Lithwick et al. 2012). Aún así, impondremos algunas asunciones sobre nuestro modelo para obtener una aproximación de dichos elementos.

Definimos el **TTV complejo** como (Lithwick et al. (2012)):

$$V_{1,2} = A_{ttv}^{1,2} e^{i\phi_{ttv}^{1,2}} \quad (2.18)$$

refiriéndose los superíndices 1 y 2 a los planetas interior y exterior, respectivamente.

Así mismo, se define la excentricidad compleja z como

$$z = e \exp(i\omega) \quad (2.19)$$

siendo e la excentricidad y ω el argumento del periastro.

Lo que hacemos a continuación es descomponer la excentricidad compleja en dos componentes, la *forzada* y la *libre*:

¹²Debido a la acción del planeta exterior, la excentricidad y el argumento del periastro del planeta interior no se mantendrán estacionarios, sino que variarán con respecto al tiempo. Asumiremos, no obstante, que el periodo de ambos planetas se mantiene constante.

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

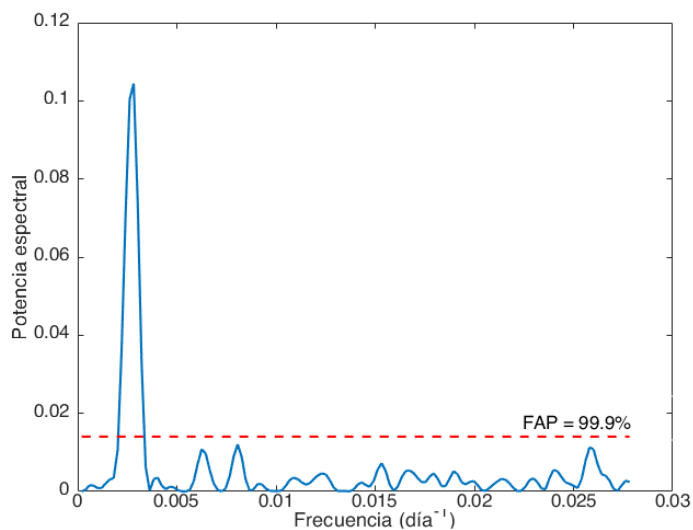
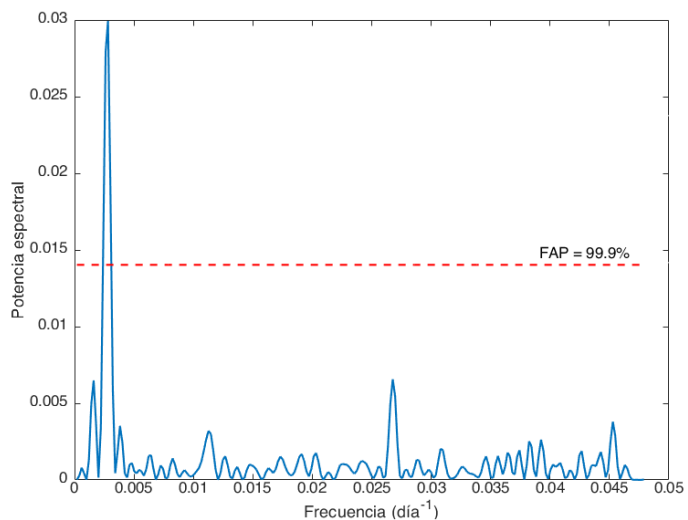


Figura 2.17: Periodogramas aplicados a la señal del TTV para Kepler-49b (arriba) y Kepler-49c (abajo). Se puede apreciar un gran pico en ambos periodogramas, confirmando la naturaleza periódica y no espuria de las señales.

$$z^{1,2} = z_{\text{libre}}^{1,2} + z_{\text{forz}}^{1,2} \quad (2.20)$$

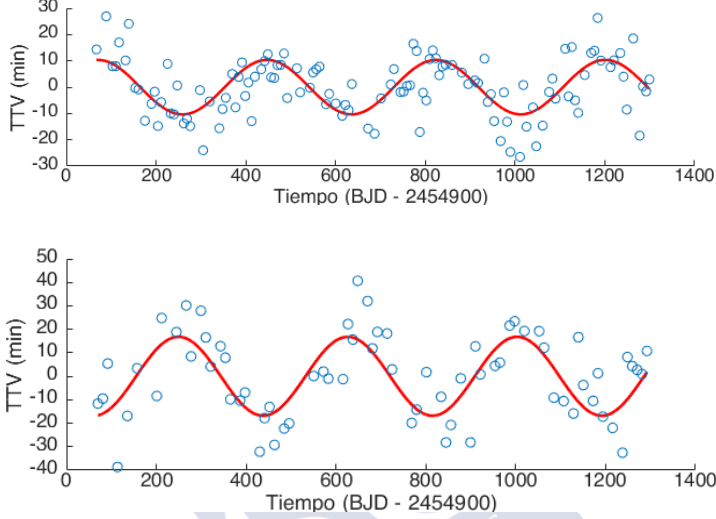


Figura 2.18: Sinusoidal que mejor se ajusta a las observaciones del TTV de Kepler-49b (arriba) y Kepler-49c (abajo).

z_{forz} es el factor de la excentricidad causado por la proximidad a la resonancia orbital y z_{libre} es el factor de la excentricidad que no depende de la resonancia en sí y por ello es constante en el tiempo, excepto a largo plazo donde aparecen variaciones seculares. Nosotros sólo consideraremos, por tanto, las variaciones periódicas a corto-medio plazo.

El factor $z_{\text{forz}}^{1,2}$ es calculable de la siguiente manera:

$$z_{\text{forz}}^1 = -\frac{1}{j\Delta} \mu_2 f(P_1/P_2)^{1/3} \exp(i\lambda^j) \quad (2.21)$$

y

$$z_{\text{forz}}^2 = -\frac{1}{j\Delta} \mu_1 g \exp(i\lambda^j), \quad (2.22)$$

siendo $\mu_2 = M_{p_2}/M_*$ y $\mu_1 = M_{p_1}/M_*$, con M_{p_1} y M_{p_2} la masa del planeta interior y exterior, respectivamente, y f y g son funciones de Δ . Para la resonancia 3 : 2, $f = -2,025 + 6,2\Delta$ y $g = 2,484 - 5,99\Delta$ (Tabla 2.6).

Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales

Se define

$$Z_{\text{libre}} \equiv fz_{\text{libre}}^1 + gz_{\text{libre}}^2 \quad (2.23)$$

El TTV complejo se relaciona con Z_{libre} mediante las fórmulas

$$V_1 = P_1 \frac{\mu_2}{\pi j^{2/3} (j-1)^{1/3} \Delta} \left(-f - \frac{3}{2} \frac{\bar{Z}_{\text{libre}}}{\Delta} \right) \quad (2.24)$$

y

$$V_2 = P_2 \frac{\mu_1}{\pi j \Delta} \left(-g + \frac{3}{2} \frac{\bar{Z}_{\text{libre}}}{\Delta} \right). \quad (2.25)$$

Por lo tanto, si conocemos z_{libre} conoceremos Z_{libre} , con Z_{libre} calcularemos μ_1 y μ_2 (sustituyendo en (2.24) y en (2.25)) y, finalmente, obtenemos z calculando $z_{\text{forz}}^{1,2}$ mediante (2.21) y (2.22). Así, conoceríamos la excentricidad, el argumento del periastro y las masas M_{p_1} y M_{p_2} . El problema es que no podemos determinar z_{libre} y de ahí que no podamos conocer, a priori, la masa y la excentricidad.

2:1	3:2	4:3	5:4
-1.190 + 2.20Δ	-2.025 + 6.21Δ	-2.840 + 12.20Δ	-3.650 + 20.15Δ
0.4284-3.69Δ	2.484-5.99Δ	3.283-11.9Δ	4.084-19.86Δ

Tabla 2.6: Valores de f (primera fila) y valores de g (segunda fila) en función de Δ . Tabla adaptada de la Tabla 3 de [Lithwick et al. \(2012\)](#).

Entonces, ¿cómo podemos proceder para resolver este problema? Lo que se hace, por ejemplo, en [Lithwick et al. \(2012\)](#), es aproximar μ_1 y μ_2 asumiendo que $|Z_{\text{libre}}| \sim 0$. Para ello, es necesario que ϕ_{ttv}^1 sea próximo a 0° y que ϕ_{ttv}^2 sea próximo a 180° , ya que si sustituimos $Z_{\text{libre}} = 0$ en las ecuaciones (2.24) y (2.25), $V_1 > 0$ y $V_2 < 0$, puesto que para un sistema cercano a la resonancia, Δ va a ser cercano a 0 y, por lo tanto, $f < 0$ y $g > 0$.

Como hemos visto arriba, $\phi_{\text{ttv}}^1 = 15^\circ$ y $\phi_{\text{ttv}}^2 = 186,3^\circ$, así que todo parece indicar que $|Z_{\text{libre}}|$ va a ser bastante próximo a 0, por lo tanto asumir que es cero nos dará una aproximación de las masas (lo que se llaman **masas nominales**) no demasiado lejana de las reales.

Las masas nominales son, teniendo en cuenta que $M_* = 0,55M_\odot$ (Stephen et al. 2012):

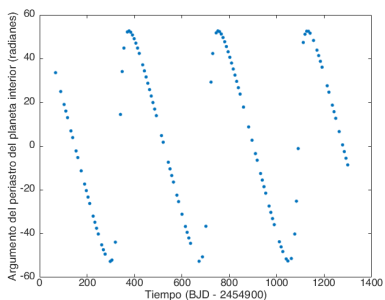
$$m_{nom}^1 = 7,3483 M_\oplus, m_{nom}^2 = 7,3938 M_\oplus.$$

Finalmente, para calcular la excentricidad y el argumento del periastro tenemos que estimar de alguna manera z_{libre} . Para ello, es conveniente hacer un estudio estadístico de la distribución probabilística de las excentricidades libres. Se llega a que, debido a que la mayoría de planetas que se trata en el artículo tienen desplazamientos de fase $\lesssim 10^\circ$ (con respecto a 0° para el planeta interior y con respecto a 180° para el exterior, respectivamente), las excentricidades libres son pequeñas, del orden de $0 \lesssim z_{libre} \lesssim 0,006$ (Lithwick et al. 2012). Teniendo en cuenta que en nuestro ejemplo $\phi_{ttv}^1 = 15^\circ$ y $\phi_{ttv}^2 = 186^\circ$, consideramos que es plausible estadísticamente que la excentricidad libre se encuentre en dicho intervalo. Si consideramos que $z_{libre} = 0,003$ (el punto medio), obtenemos $\bar{e}_1 = 0,0037$, $\bar{e}_2 = 0,004$ ¹³. Los argumentos del periastro para el planeta interior y para el planeta exterior están representados en función del tiempo en las gráficas (a) y (b) de la Figura 2.19.

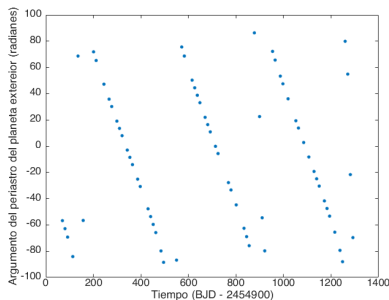
Hemos confeccionado un programa en MATLAB donde se implementan todos estos cálculos, llamado [TTVPlanet.m](#) (Apéndice B).

¹³La barra indica que hemos promediado la excentricidad a lo largo del tiempo.

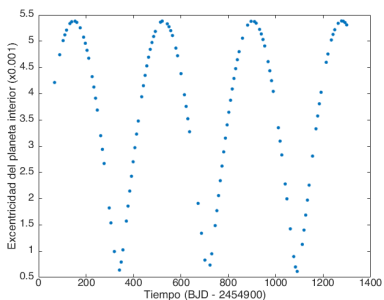
Capítulo 2. Procedimiento de detección de exoplanetas/exosatélites y cálculo de elementos orbitales



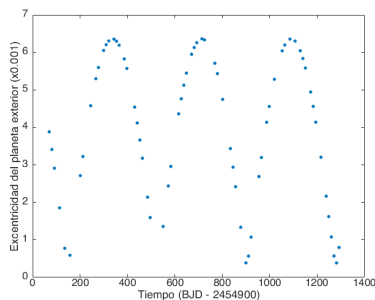
(a) Variación del argumento del periastro del planeta interior.



(b) Variación del argumento del periastro del planeta exterior.



(c) Variación de la excentricidad del planeta interior.



(d) Variación de la excentricidad del planeta exterior.

Figura 2.19: Variación de ω y e para el planeta interior (primera columna) y para el planeta exterior (segunda columna).

2.4. Comentarios al Capítulo 2

En este Capítulo hemos descrito el procedimiento mediante el cual se valida el descubrimiento de un exoplaneta (o, en su día, un exosatélite) para varios métodos de detección, tales como el método de tránsitos, la velocidad radial o el TTV/TDV. Para ello, nos apoyamos en el uso de periodogramas, gracias a los cuales se puede establecer la naturaleza estocástica o periódica de la señal, así como en ciertos algoritmos de optimización, los cuales permiten un ajuste de los datos observados a los modelos matemáticos intrínsecos a cada método de detección. Todo ello, a su vez, se traduce en la determinación de ciertos elementos orbitales, tanto del exoplaneta como del posible exosatélite.

Cabe remarcar que, en todos los ejemplos tratados, se presentan observaciones *ideales*, es decir, no ofrecen ningún tipo de ambigüedad más allá del error instrumental, lo cual permite modelar la incertidumbre de cada observación según la distribución normal. Más allá del error instrumental, también hemos considerado algunos efectos dinámicos a tener en cuenta, como por ejemplo el *trend* asociado a la velocidad radial en un sistema planetario múltiple (Sección 2.3.1.2), aunque este efecto es conocido y no suele presentar problemas en los datos. Sin embargo, la realidad suele ser mucho más compleja que los casos ideales tratados en este Capítulo, ya que, de lo contrario, podríamos confirmar la existencia de, por ejemplo, el exosatélite en torno a Kepler-90 (véase la [Introducción](#)), simplemente siguiendo la metodología descrita en la Sección 2.3.2. Como ya se ha comentado en la introducción de este Capítulo, nuestro objetivo es el estudio del procedimiento de detección de exoplanetas y exosatélites teniendo en cuenta que la calidad de nuestras observaciones se encuentra en el mejor estado posible. La única forma de que, en un futuro cercano, podamos detectar un exosatélite, es contar con instrumentación cuya precisión permita la suficiente calidad de datos para que la validación de los mismos nos ayude a confirmar o descartar su descubrimiento de manera fiable.

Capítulo 3

Dinámica y estabilidad

La población de estrellas en la Vía Láctea y, presumiblemente en otras galaxias, es heterogénea y diversa. Se estima que más de un tercio de las estrellas de nuestra Galaxia se encuentran formando sistemas binarios o múltiples (Lada 2006). Por ello, es razonable pensar que los exoplanetas, al igual que los exosatélites, sean frecuentes no solo en estrellas aisladas, sino en estrellas dobles y múltiples.

En este Capítulo, simularemos las órbitas de un exoplaneta y un exosatélite en varios escenarios: una estrella (Sección 3.1; 3.2), una binaria (Sección 3.3) y una sistema estelar triple (Sección 3.4), estudiando bajo qué condiciones se mantienen estables a medio y corto plazo, analizando la evolución de sus elementos orbitales. Diremos que un sistema es estable cuando es *Lagrange* estable, es decir, cuando la órbita de un cuerpo secundario con respecto a un cuerpo primario se mantiene “encerrada” y no se escapa¹ (Poincaré 1899).

La integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales se hará utilizando el paquete TIDES (Sección 0.1), y el tiempo de integración utilizado será 500.000 años. Véase el programa implementado en MATHEMATICA con el nombre TIDES.nb en el Apéndice B.

Salvo que se indique lo contrario, siempre trataremos con órbitas coplanarias, con épocas de paso por el periastro, inclinaciones, ángulos del nodo

¹Formalmente, una órbita se dice Lagrange estable cuando se encuentra **acotada**, en el sentido de que tanto su excentricidad como su semieje mayor carecen de perturbaciones seculares.

ascendente y argumentos del periastro iguales a 0.

3.1. Sistemas de una estrella con un planeta

En esta Sección, primero trataremos el caso de masas puntuales y después analizaremos las fuerzas de marea que surgen al tratar los cuerpos como esferas perfectas.

3.1.1. Perturbación gravitatoria de la estrella sobre un satélite puntual

Comenzaremos estudiando la estabilidad de un satélite que orbita alrededor de un planeta, el cual pertenece a un sistema de una sola estrella, asumiendo que todos los cuerpos son masas puntuales.

Esfera de Hill

En la [Sección 1.2.2](#) ya introdujimos el concepto del radio de Hill para definir el radio de la esfera máxima en la cual un satélite se mantiene en órbita estable alrededor del planeta (también llamada **esfera de Hill**). Si bien esta definición no es errónea, puesto que es necesario que un satélite se encuentre dentro de la esfera de Hill para que su órbita se mantenga estable, no es condición suficiente ya que el hecho de que un satélite caiga dentro de la esfera de Hill del planeta no asegura su estabilidad ([Gurfil & Seidemann 2016](#): 13). Por ello, [Domingos et al. \(2006\)](#) definen el semieje mayor crítico para satélites como

$$a_E = 0,4895(1 - 1,0305e_P - 0,2738e_S) \quad (3.1)$$

para satélites en movimiento directo, y

$$a_E = 0,9309(1 - 1,0764e_P - 0,9812e_S) \quad (3.2)$$

para satélites en movimiento retrógrado, siendo e_P y e_S las excentricidades del planeta y del satélite, respectivamente. Ambos semiejes están en radios de Hill². Nótese que el límite de estabilidad aumenta considerablemente cuando hablamos de órbitas en movimiento retrógrado (cuando las excentricidades son pequeñas), hecho que aparecerá frecuentemente también en el resto de casos

²El radio de Hill para órbitas excéntricas es $R_H = a_p(1 - e_p)(M_p/3M_*)^{1/3}$, siendo a_p el semieje de la órbita del planeta con respecto a la estrella, e_p su excentricidad, y M_p y M_* las masas del planeta y de la estrella, respectivamente.

que tratemos.

Cabe puntualizar, sin embargo, que estos límites todavía no son los verdaderos, ya que también deberíamos tener en cuenta otros fenómenos, como la presión de radiación (por ejemplo, Levin 1968). Pese a lo que pueda parecer, en muchos casos (generalmente en cuerpos con muy poca masa como los satélites artificiales) dichos fenómenos juegan un papel importante y no son para nada despreciables; por ejemplo, las naves del programa Viking a Marte hubieran sido desviadas de su órbita si no se hubiera previsto dicho efecto (Hecht 2002).

Una vez tengamos asegurada la estabilidad de la órbita del satélite, ¿cuál será la dinámica de su órbita? Es decir, ¿cómo variarán los elementos orbitales debido a la perturbación gravitatoria de la estrella?³ Para responder a esta pregunta, analizaremos las variaciones (tanto seculares como periódicas) de la órbita de un satélite tipo Tierra que orbita un planeta tipo Júpiter que, a su vez, orbita una estrella tipo solar. Para ello, utilizaremos TIDES para resolver el problema de tres cuerpos asociado. Una vez tengamos las posiciones y velocidades para cada instante de tiempo, utilizaremos el método de Laplace (1780) para calcular los elementos orbitales correspondientes. Supondremos que la excentricidad inicial del planeta es $e_p = 0,1$ y la del satélite, $e_s = 0,05$. El periodo del planeta con respecto a la estrella será de un año y el semieje del satélite con respecto al planeta será de $0,3 R_H$. El resto de elementos orbitales (la época de paso por el periastro, la inclinación, el ángulo del nodo ascendente y el argumento del periastro) serán fijados a 0 tanto para el planeta como para el satélite.

Con estos elementos orbitales, el radio de Hill del planeta será

$$R_H = a_p(1 - e_p)(M_p/3M_*)^{1/3} = 0,062 \text{ u.a.}$$

Puede apreciarse en la Figura 3.1 cómo la excentricidad varía entre 0,05 y casi 0, fluctuando más que el semieje mayor, el cual lo hace entre 0,0185 u.a. y 0,0179 u.a.

³En https://www.researchgate.net/publication/340815525_Integracion_de_las_ecuaciones_del_movimiento_kepleriano_perturbado_usando_el_paquete_TIDES se estudian las variaciones seculares de la Luna por influencia del Sol, las cuales provocan que el nodo ascendente, Ω , se retrase unos 20° /año y por ende que los eclipses solares se adelanten anualmente.

Sección 3.1. Sistemas de una estrella con un planeta

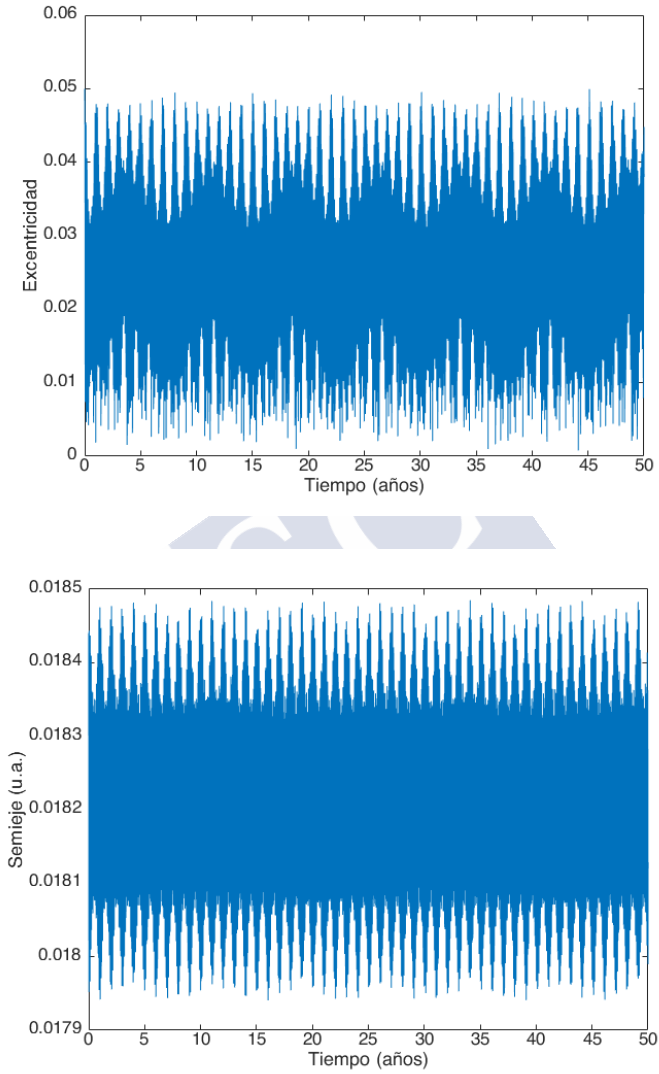


Figura 3.1: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje mayor para un satélite tipo Tierra orbitando un planeta tipo Júpiter. La excentricidad inicial es $e_s = 0,05$, mientras que el valor inicial del semieje es $a_s = 0,3R_H = 0,0184$ u.a.

3.1.2. Fuerzas de marea (cuerpos no puntuales)

Si asumimos ahora que los cuerpos tienen forma esférica deformable, tendremos que considerar, como otro posible agente perturbador de la órbita del exoplaneta o exosatélite, las **fuerzas de marea (FM)**. En esta Sección veremos cómo las FM afectan la órbita tanto del satélite como del planeta.

Uno de los principales impulsores de la teoría de las FM es George Howard Darwin, hijo del famoso biólogo Charles Darwin. Describió, entre muchas otras cosas, la dinámica de la órbita de la Luna desde su creación a partir de la eyección al espacio de material procedente de la Tierra, cómo fue progresivamente alejándose de ella a causa de las FM ejercidas sobre su superficie y cómo este proceso fue, al mismo tiempo, aumentando el periodo de rotación de la Tierra (Darwin 1879a, 1879b, 1879c, 1880, etc.).

Las FM surgen debido a que el potencial gravitatorio no es uniforme en toda la esfera, puesto que será más intenso en los puntos más cercanos al cuerpo primario y menos intenso en los puntos más lejanos, lo que causa una *deformación*⁴ en el cuerpo (Figura 3.2).

Es lógico pensar que, si las FM son suficientemente intensas, el cuerpo podría ser destruido. Como éstas aumentan cuanto más cerca esté el cuerpo secundario del cuerpo primario (Ecuación (3.8)), debemos imponer un límite interior de la órbita a partir del cual las FM son, en la superficie del cuerpo, mayores que la fuerza de gravedad. Dicho límite es el conocido **límite de Roche**.

La fórmula del límite de Roche para cuerpos rígidos (es decir, cuerpos que no admiten deformación) en órbita circular y coplanaria es (Roche 1849):

$$d_{\text{rig}} = R_A \left(2 \frac{\rho_A}{\rho_B} \right)^{1/3}, \quad (3.3)$$

siendo R_A el radio del cuerpo primario, y ρ_A y ρ_B la densidad del cuerpo primario y secundario, respectivamente.

La fórmula del límite de Roche para cuerpos fluidos (cuya deformación es permanente) en órbita circular y coplanaria es (Roche 1849):

⁴Dicha deformación producirá fricción en el interior del cuerpo, lo que a su vez generará calor. Eso es lo que se llama *calentamiento de marea* (Sección 4.3.2).

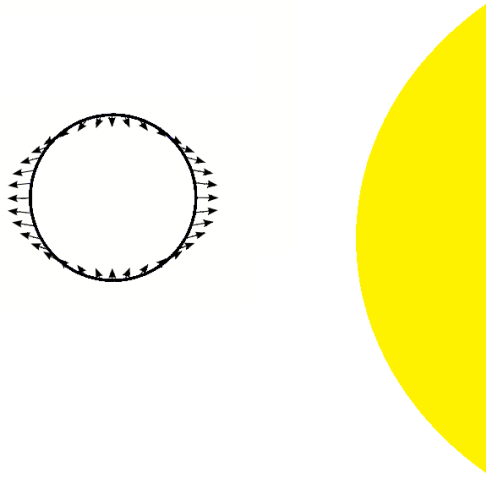


Figura 3.2: Deformación del cuerpo secundario debido a las FM. Dicha deformación induce un achatamiento ecuatorial en el cuerpo.

$$d_{\text{fluid}} = 2,44R_A \left(\frac{\rho_A}{\rho_B} \right)^{1/3} \quad (3.4)$$

Debido a que ni los planetas ni los satélites son cuerpos fluidos, ni tampoco son totalmente rígidos, sino elásticos, se cumplirá que $d_{\text{rig}} < d < d_{\text{fluid}}$.

Consideremos dos ejemplos: en el primero, el cuerpo primario es el Sol y el secundario un planeta tipo Júpiter, y en el segundo el cuerpo primario es un planeta tipo Júpiter y el secundario es un satélite tipo Tierra.

Para el primer ejemplo, teniendo en cuenta el modelo rígido del límite de Roche (Ecuación (3.3)) y que $\rho_{\odot} = 1,41 \text{ g/cm}^3$ y $\rho_J = 1,33 \text{ g/cm}^3$, el límite de Roche del cuerpo primario (Sol) es $d = 0,006 \text{ u.a.}$

Para el segundo ejemplo, teniendo en cuenta el modelo rígido y que $\rho_{\oplus} = 5,51 \text{ g/cm}^3$, el límite de Roche del cuerpo primario (Júpiter) es $d = 0,0004 \text{ u.a.}$

Formulación de las FM

Si tenemos en cuenta que el módulo de las FM, F_T , que sufre el cuerpo secundario resultan de restar la fuerza gravitatoria ejercida sobre el centro de la esfera a la fuerza ejercida sobre un punto de la superficie del cuerpo secundario a una distancia r' de su centro, tendremos:

$$F_T = \frac{GMm}{(r-r')^2} - \frac{GMm}{r^2}, \quad (3.5)$$

siendo M la masa del cuerpo primario, m la masa del cuerpo secundario y r la distancia entre los centros de masa de los dos cuerpos.

Como

$$\frac{GMm}{(r-r')^2} - \frac{GMm}{r^2} = GMm \frac{r^2 - (r-r')^2}{r^2(r-r')^2}, \quad (3.6)$$

desarrollando, llegamos a

$$F_T = GMm \frac{2rr' - r'^2}{r^4 - 2r^3r' + r'^2r^2}. \quad (3.7)$$

pero, como $r' \ll r$, finalmente se obtiene la expresión aproximada:

$$F_T = GMm \frac{2rr' - r'^2}{r^4 - 2r^3r' + r'^2r^2} \approx GMm \frac{2rr'}{r^4} = GMm \frac{2r'}{r^3}. \quad (3.8)$$

El **par de torsión** (*torque*) que ejerce el cuerpo secundario sobre el cuerpo primario debido a las FM depende de la rotación del cuerpo primario y del movimiento medio⁵ del cuerpo secundario. Para órbitas circulares, el par de torsión que ejerce el satélite sobre el planeta viene dado por (Murray & Dermont 1999; Barnes & O'Brien 2002):

$$\tau_{p-m} = -\frac{3}{2} \frac{k_{2p} GM_m^2 R_p^5}{Q_p a_m^6} \text{sgn}(\Omega_p - n_m), \quad (3.9)$$

siendo Ω_p la frecuencia de la rotación del planeta, n_m el movimiento medio del satélite, M_m la masa del satélite, a_m el semieje de la órbita del satélite

⁵Se define el *movimiento medio* n como $n = \frac{2\pi}{P}$, siendo P el periodo.

con respecto al planeta, R_p el radio del planeta, k_{2p} el número de Love⁶ del planeta, y Q_p el factor de disipación⁷ del planeta. La función sgn (*sign*) será 1 cuando $\Omega_p > n_m$ y -1 cuando $\Omega_p < n_m$.

Entonces, el satélite verá influenciado su movimiento medio según la siguiente fórmula (por ejemplo, Peale 1988):

$$\frac{dn_m}{dt} = \frac{3\tau_{p-m}n_m^{4/3}}{M_m(GM_p)^{2/3}}. \quad (3.10)$$

De manera totalmente análoga, las FM ejercidas por el planeta sobre la estrella causarán una variación en el movimiento medio del planeta. No tendremos en cuenta las FM del satélite sobre la estrella, ni viceversa.

Migración y circularización orbital

Para analizar cómo se traduce la perturbación producida en el cuerpo secundario a causa de las FM en la variación de sus elementos orbitales (suponiendo que es coplanaria pero no necesariamente circular), debemos distinguir el caso $\Omega_s \ll n_p$ del caso $\Omega_p \gg n_m$.

- Para el primer caso (es decir, cuerpo primario rotando lentamente), las ecuaciones⁸ que gobiernan el semieje y la excentricidad de la órbita son (Goździewski et al. 2010):

$$\begin{cases} \dot{a}_p = -\frac{2}{3}n_p a_p^{-4} [(2 + 46e_p^2)\delta_s + 7e_p^2\delta_p] \\ \dot{e}_p = -\frac{1}{3}n_p e_p a_p^{-5} (18\delta_s + 7\delta_p), \end{cases} \quad (3.11)$$

siendo δ_p y δ_s las contribuciones de las FM del planeta y de la estrella, respectivamente. Dichas expresiones se calculan de la siguiente manera (Goździewski et al. 2010):

⁶Este número depende de la rigidez intrínseca del cuerpo, es decir, de la resistencia a la deformación producida por las FM (Love 1909).

⁷Este parámetro indica la eficiencia de la disipación del calor en el interior del cuerpo producido por las deformaciones de marea. También es intrínseco a cada cuerpo y, a priori, desconocido.

⁸Utilizaremos los subíndices “p” para el cuerpo secundario (planeta) y el subíndice “s” para el primario (estrella), ya que generalmente se atribuye este caso a los sistemas estrella-planeta donde el planeta es un **Júpiter caliente**.

$$\delta_p = \frac{9}{2} \frac{k_{2p}}{Q_p} \frac{M_*}{M_p} R_p^5; \quad \delta_s = \frac{9}{4} \frac{k_{2*}}{Q_*} \frac{M_p}{M_*} R_*^5, \quad (3.12)$$

siendo k_{2*} y Q_* el número de Love y la función de disipación asociados a la estrella, respectivamente.

- Para el segundo caso (es decir, cuerpo primario rotando rápidamente), las ecuaciones⁹ son (Yoder & Peale 1981; Ferraz-Mello et al. 2008):

$$\begin{cases} \dot{n}_m = -\frac{9n_m^2 k_{2p} M_m R_p^5}{2M_p a_m^5 Q_p} \left(1 + \frac{51}{4} e_m^2 - 7e_m^2 D\right) \\ \dot{e}_m = \frac{3n_m e_m k_{2p} M_m R_p^5}{2M_p a_m^5 Q_p} \left(\frac{19}{4} - 7D\right), \end{cases} \quad (3.13)$$

con

$$D = \frac{k_{2m}/Q_m}{k_{2p}/Q_p} \left(\frac{M_p}{M_m}\right)^2 \left(\frac{R_m}{R_p}\right)^5, \quad (3.14)$$

siendo k_{2m} y Q_m el número de Love y el factor de disipación asociados al satélite, respectivamente.

Utilizando la tercera ley de Kepler y la relación $\dot{a}_m = -2a_m/(3n_m)\dot{n}_m$, podemos poner \dot{n}_m en términos de \dot{a}_m , y el sistema (3.13) quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{a}_m = \frac{3n_m k_{2p} M_m R_p^5}{M_p a_m^4 Q_p} \left(1 + \frac{51}{4} e_m^2 - 7e_m^2 D\right) \\ \dot{e}_m = \frac{3n_m e_m k_{2p} M_m R_p^5}{2M_p a_m^5 Q_p} \left(\frac{19}{4} - 7D\right), \end{cases} \quad (3.15)$$

De (3.11) se desprende un hecho trivial: a_p y e_p son funciones monótonas decrecientes (véase también la Figura 3.3), ya que el número de Love y el factor de disipación, Q , siempre son positivos. Esto quiere decir que, en el caso en el que tengamos un cuerpo secundario orbitando al primario con un movimiento medio *mayor* que la frecuencia de rotación del primario, se producirá

⁹En este caso, utilizaremos los subíndices “m” para el cuerpo secundario (satélite) y el subíndice “p” para el primario (planeta), ya que generalmente se atribuye este caso a los sistemas planeta-satélite.

migración orbital del cuerpo secundario hacia el primario (además de una aceleración de la rotación del primario). Está claro que si dicha migración se mantiene durante una cantidad considerable de tiempo, podría causar que el cuerpo secundario atravesase el límite de Roche y mismo colisionasen. Esto podría explicar la falta de satélites de Venus y Mercurio, puesto que estos planetas, además de tener una esfera de Hill bastante reducida, cuentan con un periodo de rotación grande (Counselman 1973; Ward & Reid 1973; Burns 1973). Además, como $\dot{e}_p < 0$, la órbita tiende a hacerse menos excéntrica (lo que se llama **circularización orbital**).

Por otra parte, si consideramos (3.15), obtenemos $\dot{e}_m < 0$ y $\dot{a}_m > 0$ (véase Figura 3.4). Eso quiere decir que, si el movimiento medio del cuerpo secundario es *menor* que la frecuencia de rotación del primario, tal y como sucede en la mayoría los sistemas planeta-satélite del Sistema Solar, se produce igualmente circularización orbital pero esta vez la migración tiene lugar *hacia el exterior*, es decir, el cuerpo secundario se aleja con el tiempo. Eso es lo que ocurre, por ejemplo, con la Luna, cuyo semieje con respecto a la Tierra crece del orden de 3 cm/año (por ejemplo, Kartunnen 2016: 137).

En la Figura 3.3 se simula la evolución del semieje y de la excentricidad a causa de las FM de un planeta tipo Júpiter que orbita una estrella tipo solar a una distancia de 0,04 u.a. Hemos usado que $k_{2p}/Q_p = 1,102 \cdot 10^{-5}$ para el planeta Júpiter (Lainey et al. 2009) y $k_{2*}/Q_* = 10^{-8}$ para el Sol (Carone & Pätzold 2007)¹⁰. De igual manera, en la Figura 3.4 se muestra la evolución del semieje y de la excentricidad a causa de las FM de un satélite tipo Tierra que orbita un planeta tipo Júpiter a una distancia de 0,005 u.a. Se toma $k_{2m}/Q_m = 0,0011$ para la Tierra (Ray et al. 2001; Lerch et al. 1991; Lemoine et al. 1998). Ténganse en cuenta que, tanto para el primer como para el segundo ejemplo, hemos tomado un semieje mayor inicial que sea superior al límite de Roche correspondiente a cada caso, los cuales hemos visto más arriba que son $d = 0,006$ u.a. y $d = 0,0004$ u.a., respectivamente.

Hemos estimado que, para el ejemplo del satélite-planeta, el satélite se aleja del orden de unos 15 cm/año (aproximando la evolución del semieje por un modelo lineal). Por lo tanto, teniendo en cuenta solamente las FM, tendrían que pasar 5650 millones de años para que el satélite rebasase el radio de Hill. Asumiendo movimiento directo, el satélite se mantendría en órbita estable, aproximadamente, 2800 millones de años (Ecuación (3.2)).

¹⁰En el artículo, $2 \cdot 10^7 < Q_*/k_{2*} < 1,5 \cdot 10^9$, así que hemos supuesto que $Q_*/k_{2*} = 10^8$.

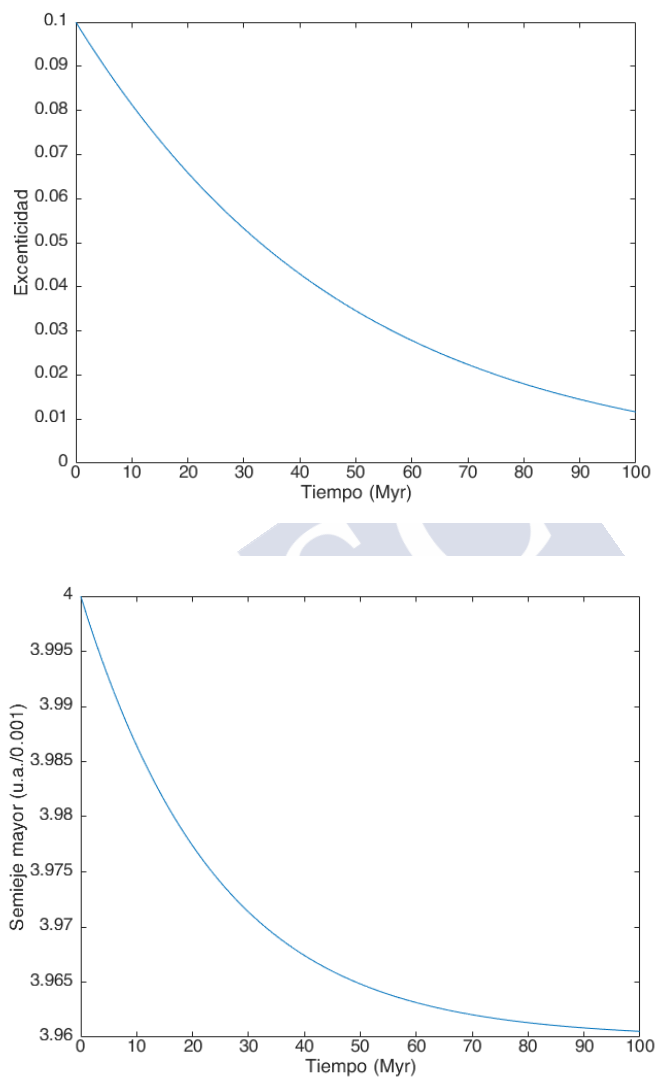


Figura 3.3: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje mayor de un planeta tipo Júpiter orbitando una estrella tipo solar, con una excentricidad inicial de 0,1 y un semieje mayor inicial de 0,04 u.a.

Sección 3.1. Sistemas de una estrella con un planeta

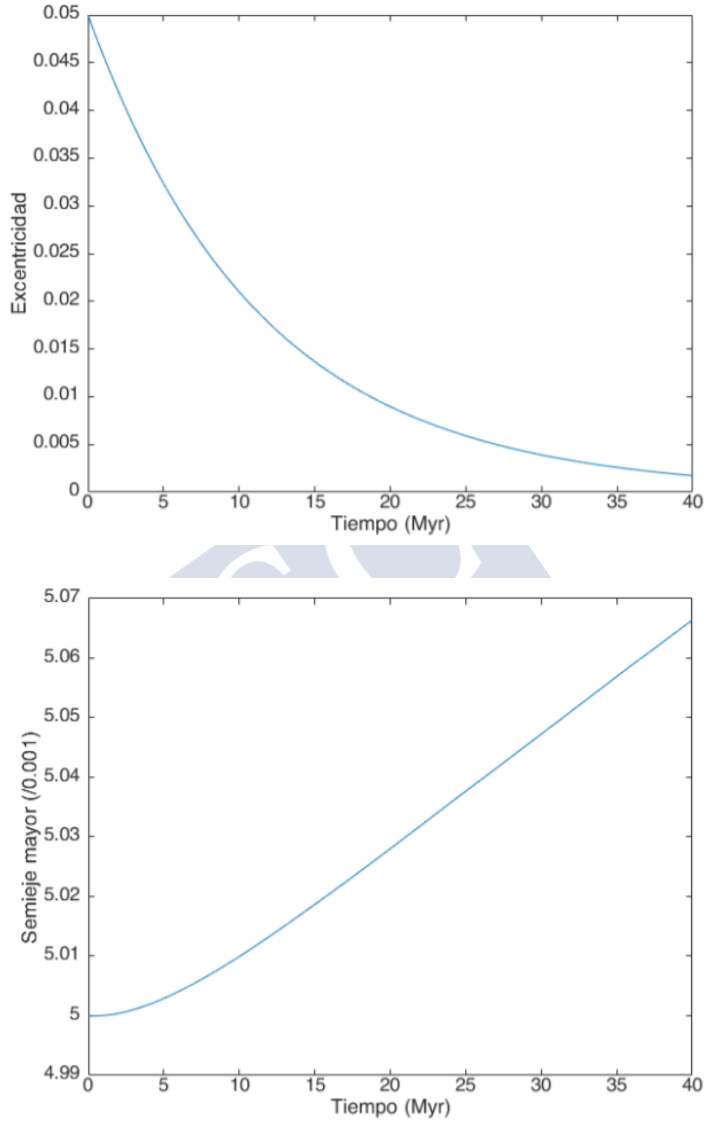


Figura 3.4: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje mayor de un satélite tipo Tierra orbitando un planeta tipo Júpiter, con una excentricidad inicial de 0,05 y un semieje mayor inicial de $a_m = 0,005$ u.a.

En teoría, la evolución orbital de un satélite, atendiendo únicamente a las FM del planeta, puede dar lugar a tres escenarios (Barnes & O'Brien 2002):

1) $\Omega_p \ll n_m$. El satélite migra hacia el planeta, hasta el punto que acaba colisionando con él.

2) $\Omega_p \gg n_m$. El satélite se va progresivamente alejando del planeta hasta que rebasa su esfera de Hill o hasta que acaba en movimiento sincrono ($\Omega_p = n_m$).

3) Empieza como el segundo caso ($\Omega_p \gg n_m$), alejándose progresivamente, hasta que la rotación del planeta se ralentiza lo suficiente (debido a las FM del satélite) como para que n_m acabe rebasando a Ω_p , lo que conduciría al satélite de nuevo hacia el planeta.

En definitiva, hemos visto cómo las FM influyen drásticamente en la dinámica del planeta y del satélite y cómo afectan su estabilidad orbital a muy largo plazo.

3.2. Sistemas de una estrella con dos planetas

En esta Sección, estudiaremos la estabilidad y la dinámica de la órbita de un satélite que orbita alrededor de un planeta, y que ve su órbita perturbada debido a la presencia de otro planeta que también orbita la estrella. Diversos autores tratan la estabilidad de un sistema planetario de 3 o más planetas (Chambers et al. 1996; Marzari & Weidenschilling 2002; Marzari 2014, etc.), pero nosotros aquí sólo estudiaremos la influencia que tiene un planeta exterior sobre un planeta interior y sobre el satélite que alberga este último.

La separación mínima en la cual dos planetas se mantienen en órbita *Hill*¹¹ estable alrededor de una estrella, siguiendo ambos una órbita inicial circular, viene dada por la fórmula (Gladman 1993):

$$\Delta = 2,4(M_1 + M_2)^{1/3}, \quad (3.16)$$

¹¹Se define un sistema planetario como **Hill estable** cuando el orden de los planetas se conserva, es decir, sus órbitas no se cruzan. Por lo tanto, ser Hill estable no implica ser Lagrange estable, ya que el planeta exterior se podría escapar y la Hill estabilidad seguiría cumpliéndose (Mason 2018: 188)

siendo $M_1 = m_1/m_3$ y $M_2 = m_2/m_3$, con m_3 la masa de la estrella. Así, la órbita del planeta exterior será Hill estable si $a_2 \gtrsim a_1(1 + \Delta)$. Se toma el semieje del planeta interior como $a_1 = 1$ u.a.

Asumiremos como planeta interior Júpiter y como planeta exterior Saturno, por lo que $\Delta \simeq 0,258$. Entonces, la órbita del planeta exterior será Hill estable si $a_2 \gtrsim 1,258$ u.a. Puesto que la Hill estabilidad no implica la Lagrange estabilidad, hemos tomado un valor mayor que 1,258 para ver si el planeta exterior no se escapa. En efecto, para $a_2 = 1,3$ u.a., el planeta exterior se mantiene Lagrange estable (Figura 3.6).

En las Figuras 3.5 y 3.6 se aprecia la evolución del semieje de la órbita y la excentricidad del planeta interior y exterior, respectivamente. Las variaciones son bastante leves, siendo la más pronunciada la de la excentricidad para el planeta exterior, la cual varía de 0 hasta casi 0,08.

Bajo estas circunstancias, ¿a qué distancia tendrá que estar un satélite tipo Tierra del planeta interior para que su órbita sea estable? Hemos deducido que, cuando el semieje del satélite es $\lesssim 0,05(a_2 - a_1) = 0,0149$ u.a. y la excentricidad es de 0,05, el satélite se mantiene en órbita estable a lo largo de 500.000 años, por lo que asumiremos que lo es a corto-medio plazo. En la Figura 3.7 se muestra la evolución de su semieje y su excentricidad, donde se aprecia que la excentricidad oscila entre 0 y 0,055, estando la mayor parte del tiempo por debajo de 0,05 (la excentricidad inicial). Luego, en lugar de excitar, parece que el planeta exterior contribuye en parte a la relajación de la excentricidad del satélite.

Nótese que, bajo la asunción de órbitas inicialmente circulares, los planetas se mantienen dentro de excentricidades relativamente bajas, recordando a excentricidades propias de planetas del Sistema Solar. Sin embargo, si analizamos los planetas extrasolares detectados, nos encontramos un escenario completamente distinto: la mediana de las excentricidades es de 0,25 (Marcy et al. 2005), llegando en algunos casos a excentricidades tan extremas como 0,9, como es el caso de HD 20782b (O'Toole et al. 2009). Limbach & Turner (2015) analizan la población de sistemas exoplanetarios múltiples detectados y llegan a la conclusión de que las excentricidades de los sistemas con 5 ó 6 exoplanetas están todas por debajo de 0,2, lo que indica que las excentricidades de los planetas del Sistema Solar son consistentes con lo que nos encontramos

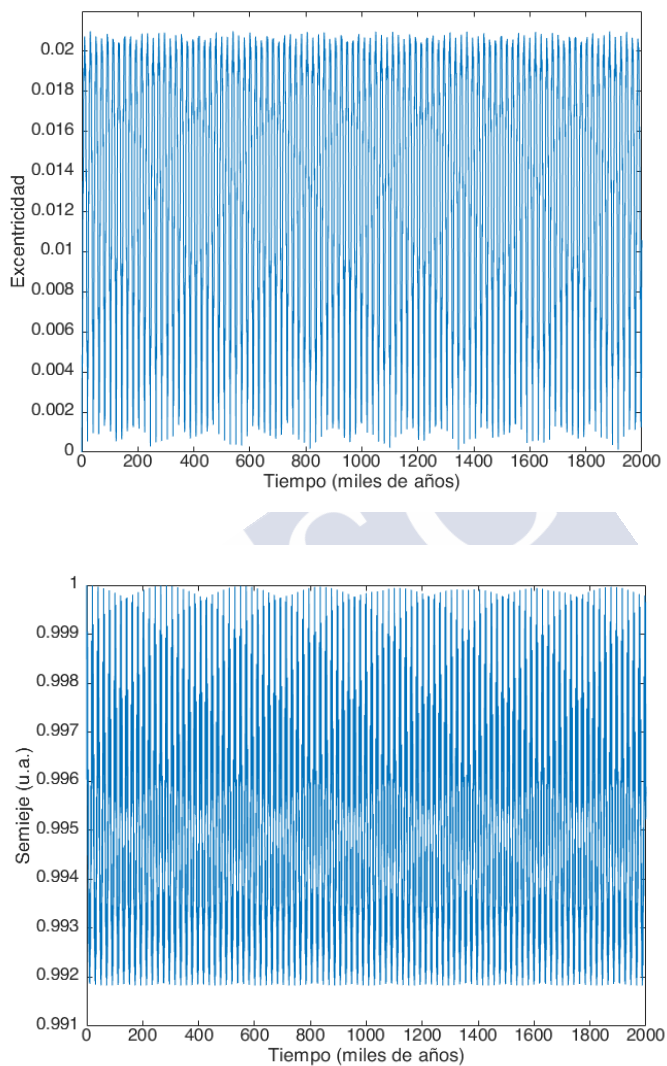


Figura 3.5: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje mayor del planeta interior, con una excentricidad inicial 0 y un semieje mayor inicial de 1 u.a.

Sección 3.2. Sistemas de una estrella con dos planetas

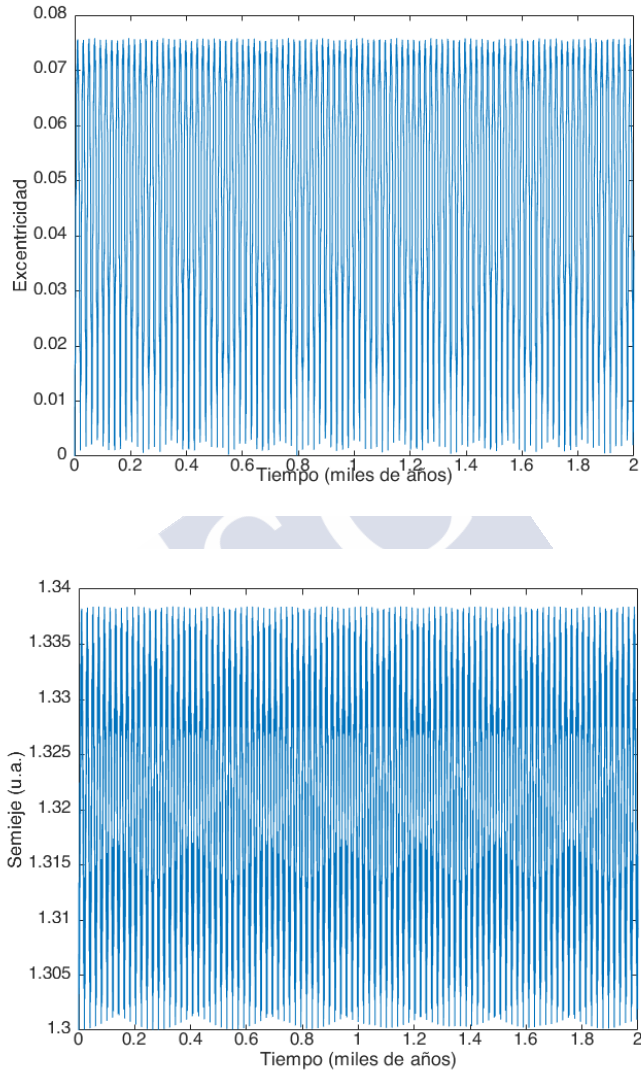


Figura 3.6: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje mayor del planeta exterior, con una excentricidad inicial 0 y un semieje mayor inicial de 1,3 u.a.

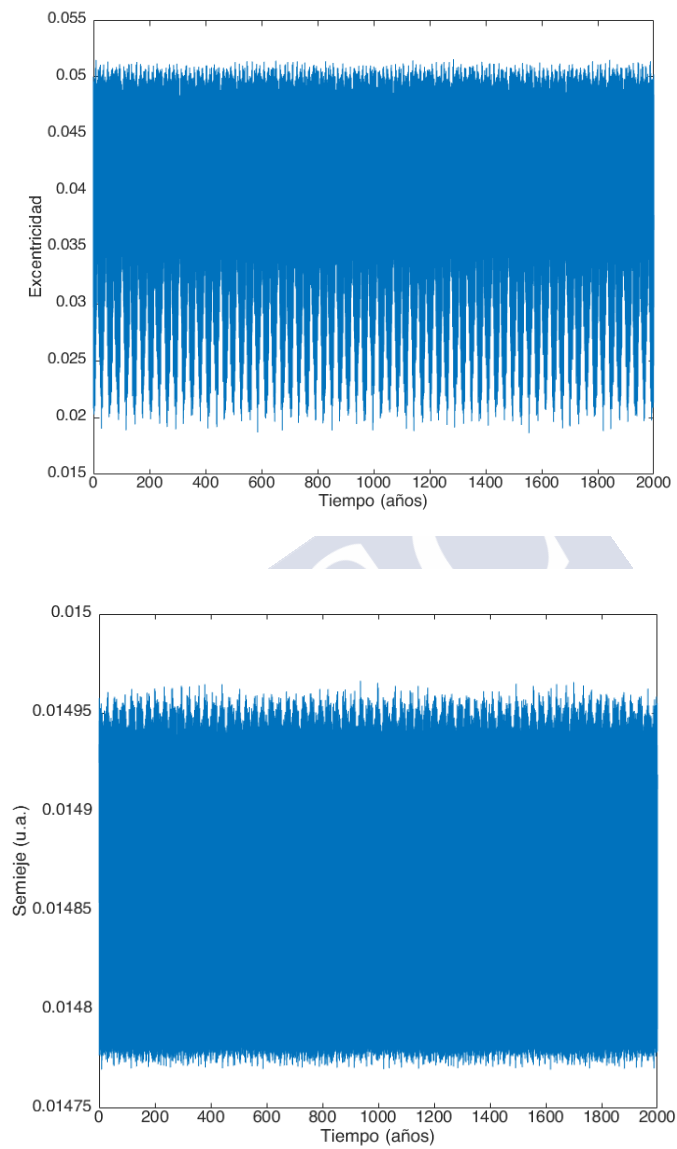


Figura 3.7: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje mayor del satélite, con una excentricidad inicial de 0,05 y un semieje mayor inicial de 0,0149 u.a.

en la población de sistemas exoplanetarios múltiples detectados¹².

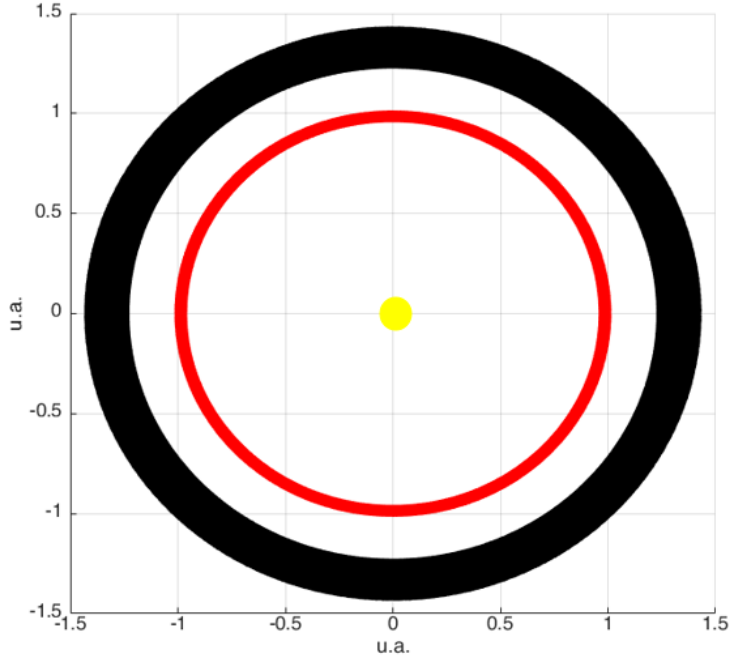


Figura 3.8: Órbita¹³ del planeta interior tipo Júpiter (rojo) y del planeta exterior tipo Saturno (negro) para un semieje con respecto a la estrella de 1 u.a. y 1,3 u.a., respectivamente. Ambos planetas tienen excentricidad inicial 0. El origen representa la estrella. El tiempo transcurrido es de 30.000 años.

Entonces, ¿cuál es la causa de que tantos exoplanetas tengan una excentricidad alta? Se cree que tiene que ver con el proceso de evolución que siguieron desde la desaparición del disco protoplanetario: al principio de su formación, los exoplanetas debieron de tener una excentricidad pequeña, de hasta 0,1, debido a la interacción con el disco protoplanetario (Lissauer 1993, 1995). Sin embargo, cuando el disco se disipa y la población de planetesimales disminuye, las fuertes interacciones entre los planetas debido a su proximidad puede dar lugar a inestabilidades en sus órbitas hasta el punto de eyectar uno o va-

¹²Además, los mismos autores descartan que exista ningún tipo de sesgo que favorezca la detección de exoplanetas con excentricidad baja.

¹³De aquí en adelante, en las Figuras entenderemos por “órbita” la *zona de evolución de la órbita* del cuerpo en cuestión.

rios cuerpos fuera del sistema (Lin & Ida 1997; Ford & Chiang 2007; Levison & Morbidelli 2007), haciendo que el resto de planetas permanezcan con la excentricidad considerablemente excitada. Este proceso se suele referir en la literatura como *planet-planet scattering*, y es el que mejor explica la distribución de excentricidades y de periodos de la población de planetas extrasolares descubiertos (Ford et al. 2003; Ford & Rasio 2008). Ya ha sido estudiado, por ejemplo, en ν Andromedae (Ford et al. 2005).

Hemos simulado el *planet-planet scattering* entre dos planetas, el interior de tipo Júpiter y el exterior, tipo Saturno, que entran en inestabilidad orbital debido a que la separación inicial es de 1,22 u.a., con lo que es menor que el límite establecido en la Ecuación (3.16). Apreciamos cómo la excentricidad del planeta interior sigue una evolución caótica hasta que el otro planeta es expulsado del sistema (Figura 3.9). En la Figura 3.10 se demuestra que, efectivamente, el planeta exterior se escapa.

Diversos autores han tratado el *planet-planet scattering* cuando el sistema tiene 3 o más planetas (Lin & Ida 1997; Levison et al. 1998; Papaloizou & Terquem 2001; Adams & Laughlin 2003; Moorhead & Adams 2005; Goldreich et al. 2004; Ford & Chiang 2007; Juric & Tremaine 2008). Las inestabilidades orbitales que pueden surgir en estos sistemas son todavía más acentuadas, por lo que los planetas supervivientes podrían acabar en órbitas muy excéntricas, más aún si dichos planetas tienen masas similares (Ford & Rasio 2008; Carrera et al. 2016).

¿Por qué es interesante este fenómeno? Porque nos puede servir para estudiar la existencia de exosatélites. Si ciertos exosatélites no suelen sobrevivir al *planet-planet scattering* que tiene lugar en etapas tempranas de los sistemas planetarios, eso quiere decir que los exoplanetas cuya excentricidad sea moderada, es decir, que han sufrido *planet-planet scattering* en el pasado, no deberían de poder albergar ningún exosatélite (salvo capturas posteriores a la desaparición del disco protoplanetario), lo que a su vez podría ayudar a explicar por qué todavía no se ha detectado ninguno.

Para ello, hemos simulado la órbita de un satélite orbitando el planeta interior del ejemplo anterior, cuyo planeta exterior acababa escapando del sistema (Figura 3.10). En efecto, variando su semieje desde el límite de Roche del planeta interior hasta la mitad de la separación inicial entre los planetas, no hemos encontrado ningún valor en el cual el satélite se mantenga en órbita estable por más de 200 años. Esto concuerda con la literatura, la cual asegura

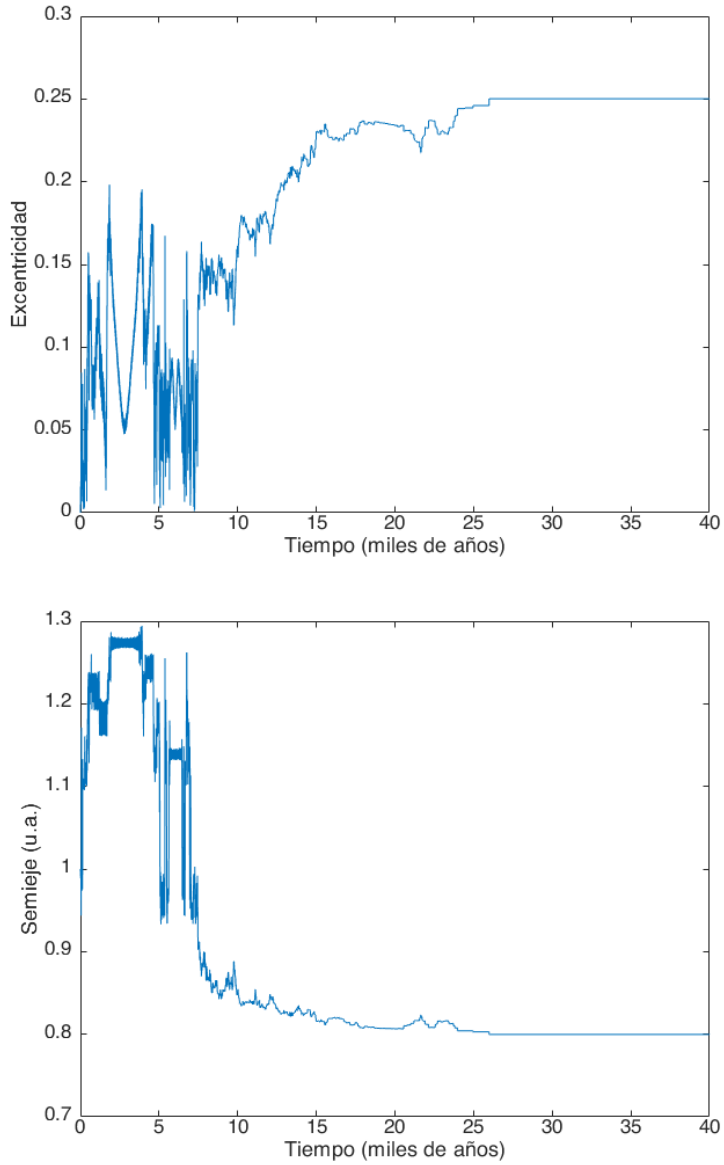


Figura 3.9: Evolución de la excentricidad (arriba) y el semieje del planeta interior, para una separación inicial de 1,22 u.a. y excentricidad inicial 0. Se aprecia que, en el momento que el planeta exterior es expulsado (debido al *planet-planet scattering*), los valores de la excentricidad y el semieje del planeta interior se estabilizan.

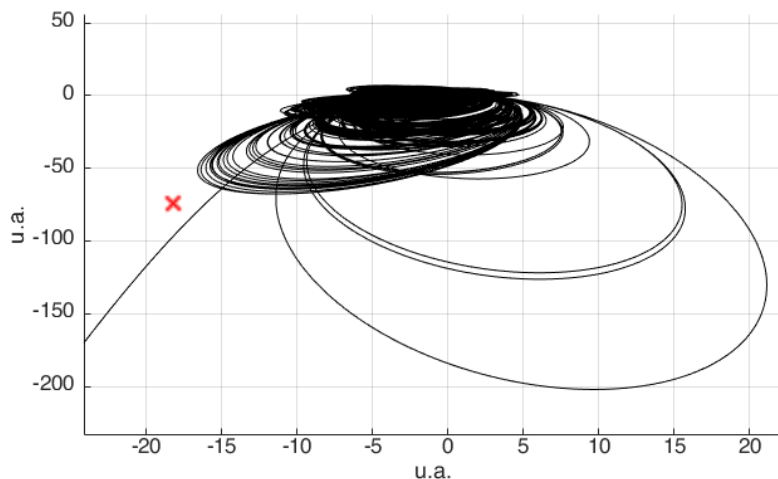


Figura 3.10: Trayectoria que sigue el planeta exterior para el ejemplo de la Figura 3.9. El tiempo transcurrido es de 26.300 años, y el planeta es expulsado del sistema pasados 26.000 años (marca roja).

que el *planet-planet scattering* es un proceso bastante destructivo y que no propicia la existencia de exosatélites (Gong et al. 2013; Hong et al. 2018).

Concluimos, por ello, dos cosas: la primera, la existencia de satélites en sistemas planetarios de dos o más planetas es posible, siempre y cuando sus órbitas sean lo suficientemente estables y no se haya producido *planet-planet scattering*; y la segunda, que es improbable la presencia de exosatélites orbitando exoplanetas en sistemas planetarios múltiples (o mismo de un solo planeta) cuyas órbitas con respecto a la estrella tengan excentricidad alta.

3.3. Sistemas de 2 estrellas

En esta Sección analizamos la estabilidad orbital y la dinámica de exoplanetas/exosatélites en sistemas binarios. Para ello, tenemos que analizar por separado los dos casos posibles¹⁴ de exoplanetas: los que siguen una órbita

¹⁴Existe un tercer caso posible: el de las órbitas tipo L, en las cuales el planeta se mueve en la misma órbita que la masa secundaria pero situado en los puntos de Lagrange L4 ó L5 de la binaria (Dvorak 1984, 1986). No consideraremos este caso, puesto que asumiremos

tipo S y los que siguen una órbita tipo P (Figura 2).

En todas las simulaciones de esta Sección, consideraremos como masas de la binaria $m_1 = 1,1 M_\odot$ y $m_2 = 0,9 M_\odot$, es decir, masas muy próximas a la solar. Inicialmente, la separación entre ambas será de $a_b = 10$ u.a. y la excentricidad de la órbita de la binaria, $e_b = 0,3$.

3.3.1. Planeta con órbita tipo S

Éste es el tipo de planetas que con más frecuencia se descubre en los sistemas binarios, un total de 74 (un catálogo de exoplanetas en sistemas de estrellas binarias y múltiples puede verse en <https://www.univie.ac.at/adg/schwarz/multiple.html>; para una introducción véase Schwarz et al. 2016).

La fórmula que determina si la órbita S de un planeta se mantiene en órbita estable viene dada por (Holman & Wiegert 1999):

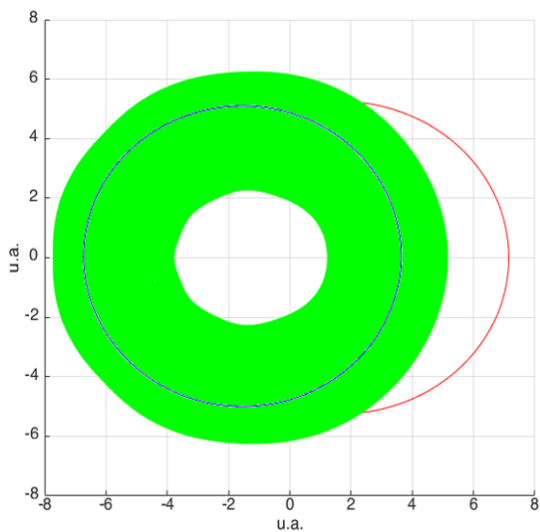
$$a_{crit} \approx [(0,464 \pm 0,006) + (-0,380 \pm 0,010)M_2 + (-0,631 \pm 0,034)e_b + (0,586 \pm 0,061)M_2e_b + (0,150 \pm 0,041)e_b^2 + (-0,198 \pm 0,074)M_2e_b^2]a_b, \quad (3.17)$$

siendo $M_2 = m_2/(m_1 + m_2)$, con m_1 la masa de la estrella en torno a la cual orbita el planeta y m_2 la masa de la otra estrella. Es decir, si $a_p \lesssim a_{crit}$, la órbita planetaria será estable, siendo a_p el semieje de la órbita del planeta con respecto a la componente de la binaria a la cual esté orbitando.

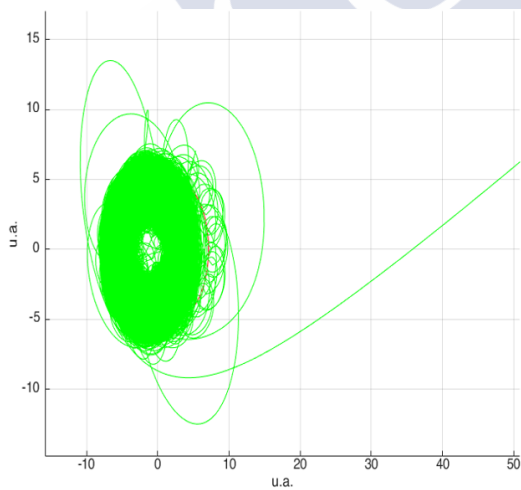
Una consecuencia directa de esta fórmula es que cuanto más excéntrica sea la órbita de la binaria, más pequeña será la región de estabilidad del planeta. Esto es fácil de comprobar, ya que si aumentamos e_b , lo que está en el paréntesis de (3.17) disminuirá.

Sustituyendo en (3.17) los valores antes mencionados de m_1 , m_2 , a_b y e_b , resulta $a_{crit} = 0,188a_b = 1,88$ u.a. Sin embargo, este límite es aproximado y no tiene por qué coincidir exactamente con la realidad, puesto que las cantidades de la expresión (3.17) tienen incertidumbres que pueden hacer diferir del verdadero límite de estabilidad desde un 4% hasta un 11% (Holman &

que las dos estrellas tienen masas similares y por tanto no habrá una masa secundaria; de hecho, un planeta de estas características sólo es posible cuando el cociente de las masas de las estrellas es de menos de 1/25 (Steves et al. 2010).

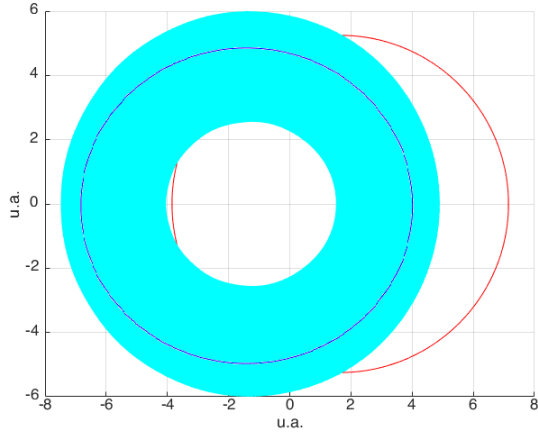


(a) El planeta se mantiene en órbita estable

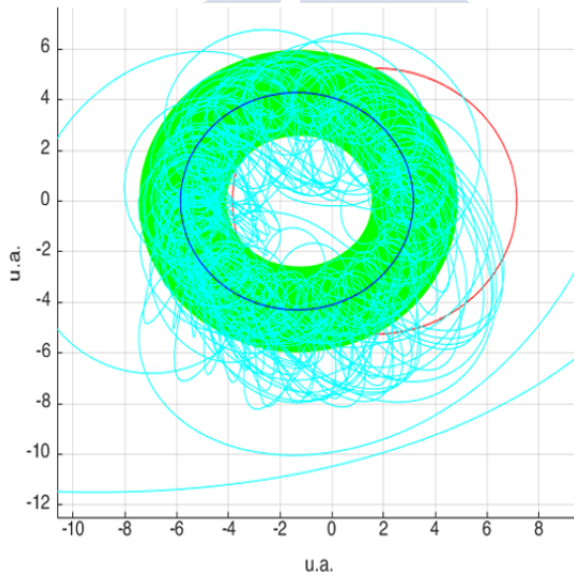


(b) El planeta se escapa

Figura 3.11: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En verde, la órbita del planeta. El semieje inicial del planeta es $a_p = 0,20a_b$ (arriba) y $a_p = 0,21a_b$. En ambos casos la excentricidad inicial del planeta es 0. El origen representa el centro de masas del sistema. El tiempo transcurrido es de 50.000 años.



(a) El satélite se mantiene en órbita estable



(b) El satélite se escapa

Figura 3.12: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En cian, la órbita del satélite. El semieje inicial del satélite es $a_m = 0,02a_p = 0,034$ u.a. (arriba) y $a_m = 0,03a_p = 0,051$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria. El tiempo transcurrido es de 2000 años.

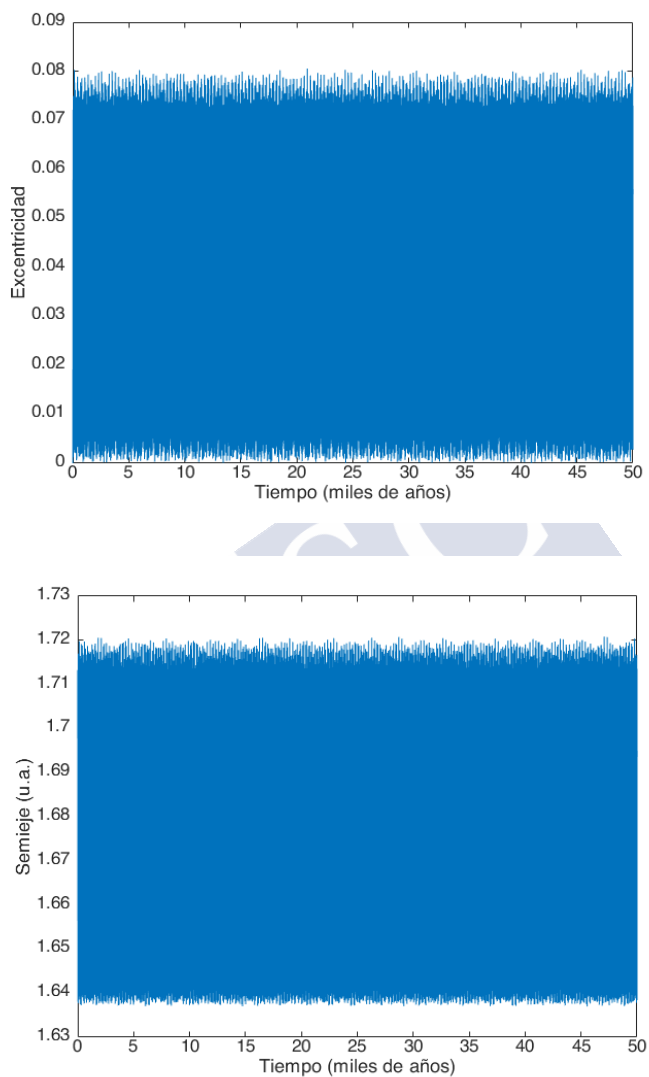


Figura 3.13: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un planeta con excentricidad inicial $e_p = 0$ y semieje inicial con respecto a la estrella m_1 de $a_m = 0,17a_b = 1,7$ u.a.

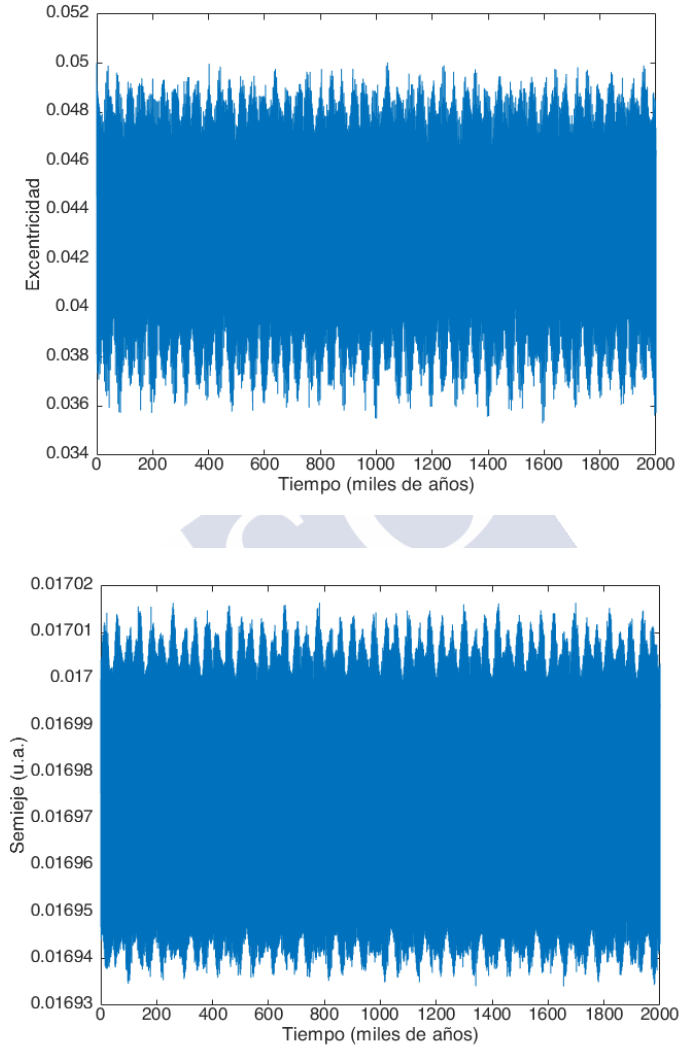


Figura 3.14: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un satélite con excentricidad inicial $e_m = 0,05$ y semieje inicial con respecto al planeta de $a_m = 0,01a_p = 0,017$ u.a.

Wiegert 1999). Por ello, debemos testar cuál es el semieje a_p a partir del cual el planeta se escapa.

Para llevar a cabo dichas simulaciones, hemos integrado las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos (es decir, suponiendo despreciable la masa planetaria frente a las estelares), usando TIDES con un tiempo de integración de 500.000 años. En la Figura 3.11 comprobamos que el planeta se escapa cuando $a_p = 0,21a_b = 2,1$ u.a. y que se mantiene en órbita estable cuando $a_p = 2$ u.a.

Asumiremos, por tanto, que $a_p = 1,7$ u.a. para asegurar la estabilidad de la órbita planetaria. A continuación, necesitamos determinar cuál será el límite de estabilidad para la órbita de un satélite alrededor de dicho planeta. Para ello, hemos testado también con TIDES la evolución de un satélite de excentricidad inicial $e_m = 0,05$ para un conjunto de semiejes iniciales a_m . Hemos advertido que el satélite se mantiene en órbita estable cuando $a_m \lesssim 0,02a_p = 0,034$ u.a. (Figura 3.12).

Por último, estudiamos la evolución de la excentricidad y del semieje de la órbita de un satélite cuya excentricidad inicial es de $e_m = 0,05$ y cuyo semieje inicial es $a_m = 0,01a_p = 0,017$ u.a. (Figura 3.14).

Comparando las Figuras 3.13 y 3.14 vemos que existen diferencias notables: mientras que en el caso del planeta el semieje fluctúa sustancialmente (del orden de $\sim 4,7\%$ con respecto al semieje inicial), en el caso del satélite dicha fluctuación no llega ni al $0,4\%$. De igual manera, la excentricidad de la órbita planetaria se excita hasta casi $0,08$, mientras que la del satélite no llega a rebasar la excentricidad inicial, lo cual indica que el planeta es mucho más susceptible de sufrir cambios en su órbita que el satélite. Estudiaremos las implicaciones que esto tiene sobre la habitabilidad en el Capítulo 4.

3.3.2. Planeta con órbita tipo P (o *circumbinario*)

Este tipo de planetas han sido descubiertos en mucha menor cantidad que los de órbita S, 24 en total (<https://www.univie.ac.at/adg/schwarz/multiple.html>); entre ellos 13 detectados por Kepler (Welsh et al. 2012; Orosz et al. 2012a,b; Kostov et al. 2013, 2014a,b; Welsh et al. 2015; Kostov et al. 2016; Orosz et al. 2019; Socia et al. 2020, etc.) y uno detectado por TESS (Kostov et al. 2020). La causa de ello se atribuye al sesgo de detección (véase la Introducción).

Para órbitas P, el criterio de estabilidad viene dado por (Holman & Wiegert 1999):

$$a_{crit} = [(1,60 \pm 0,04) + (5,10 \pm 0,05)e_b + (-2,22 \pm 0,11)e_b^2 + (4,12 \pm 0,09)M_2 + (-4,27 \pm 0,17)e_b M_2 + (-5,09 \pm 0,11)M_2^2 + (4,61 \pm 0,36)e_b^2 M_2^2] a_b. \quad (3.18)$$

Este es un límite inferior, por tanto el planeta se mantendrá estable si $a_p \gtrsim a_{crit}$.

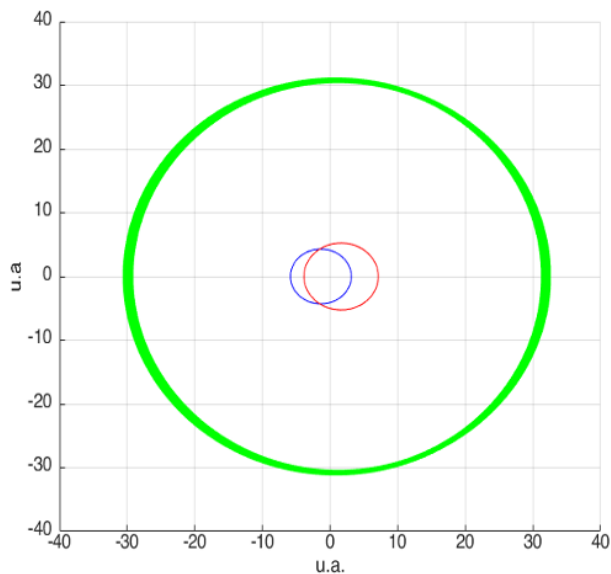
Por tanto, si sustituimos por los parámetros de la binaria, tendríamos que $a_{crit} = 3,26a_b = 32,6$ u.a. Esta fórmula, tal y como pasaba en el caso del planeta con órbita tipo S, no es exacta y por ello utilizamos TIDES para testar el verdadero límite de estabilidad. Llegamos, en este caso, a que el planeta se mantiene en órbita estable si $a_p \gtrsim 3,1a_b = 31$ u.a. (Figura 3.15), por lo que el límite dado por la ecuación (3.18) está bastante cerca del límite real.

Supondremos que $a_p = 3,5a_b = 35$ u.a. para asegurar la estabilidad del planeta. En la Figura 3.17 se aprecia la evolución de la excentricidad y del semieje para un planeta en órbita inicialmente circular y semieje inicial $a_p = 3,5a_b = 35$ u.a.

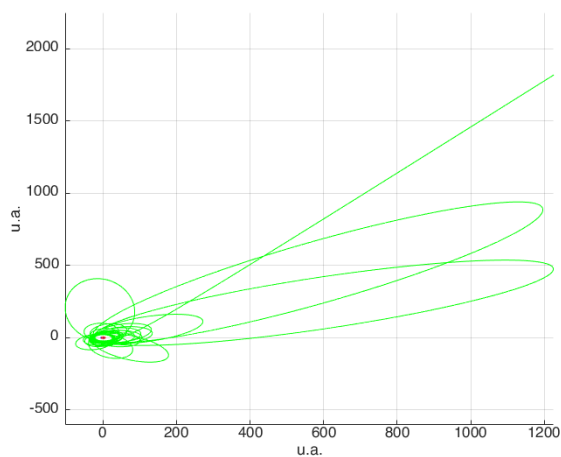
Ahora, testaremos la región de estabilidad para un satélite que orbite el planeta. Hemos llegado a que, para una excentricidad inicial de 0,05, el satélite se mantiene en órbita estable si $a_m \lesssim 0,02a_p = 0,7$ u.a. (Figura 3.16). Nótese que la región de estabilidad de un satélite que orbita un planeta tipo P es mucho más grande que la de uno que orbita un planeta con órbita tipo S, donde vimos que el límite de estabilidad para el satélite era de 0,034 u.a.

Asumiremos que $a_m = 0,01a_p = 0,35$ u.a. para asegurar la estabilidad del satélite. En la Figura 3.18 se muestra la evolución de la excentricidad y del semieje de la órbita del satélite, siendo la excentricidad inicial 0,05 y el semieje inicial $a_m = 0,01a_p = 0,35$ u.a.

Al igual que hicimos con el planeta en órbita S, comparamos las Figuras 3.17 y 3.18 y llegamos a que:

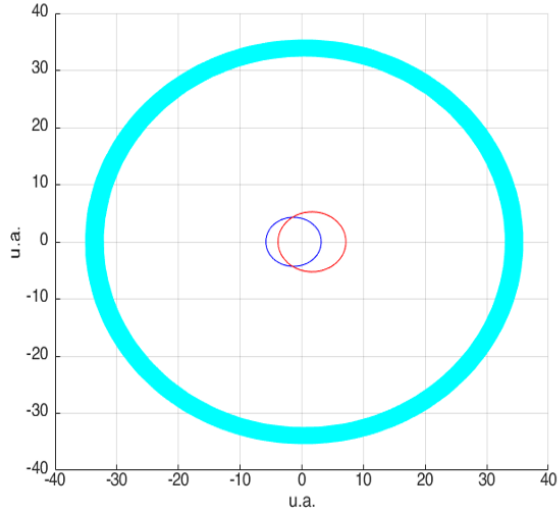


(a) El planeta se mantiene en órbita estable

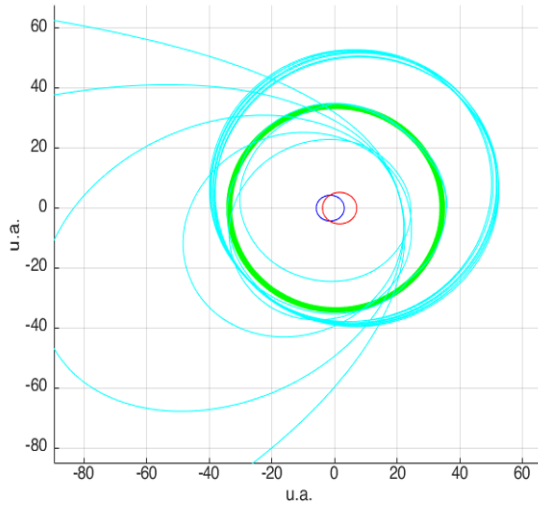


(b) El planeta se escapa

Figura 3.15: En azul, la órbita de la estrella con masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella con masa m_2 . En verde, la órbita del planeta con semieje inicial $a_p = 3,1a_b$ (arriba) y $a_p = 3,2a_b$. La excentricidad inicial, en ambos casos, es 0. El origen es el centro de masas de la binaria. El tiempo transcurrido es de 50.000 años.



(a) El satélite se mantiene en órbita estable



(b) El satélite se escapa

Figura 3.16: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En verde, la órbita del planeta. En cian, la órbita del satélite. El semieje inicial del satélite es $a_m = 0,02a_p = 0,7$ u.a. (arriba) y $a_m = 0,03a_p = 1,05$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria. El tiempo transcurrido es de 5000 años.

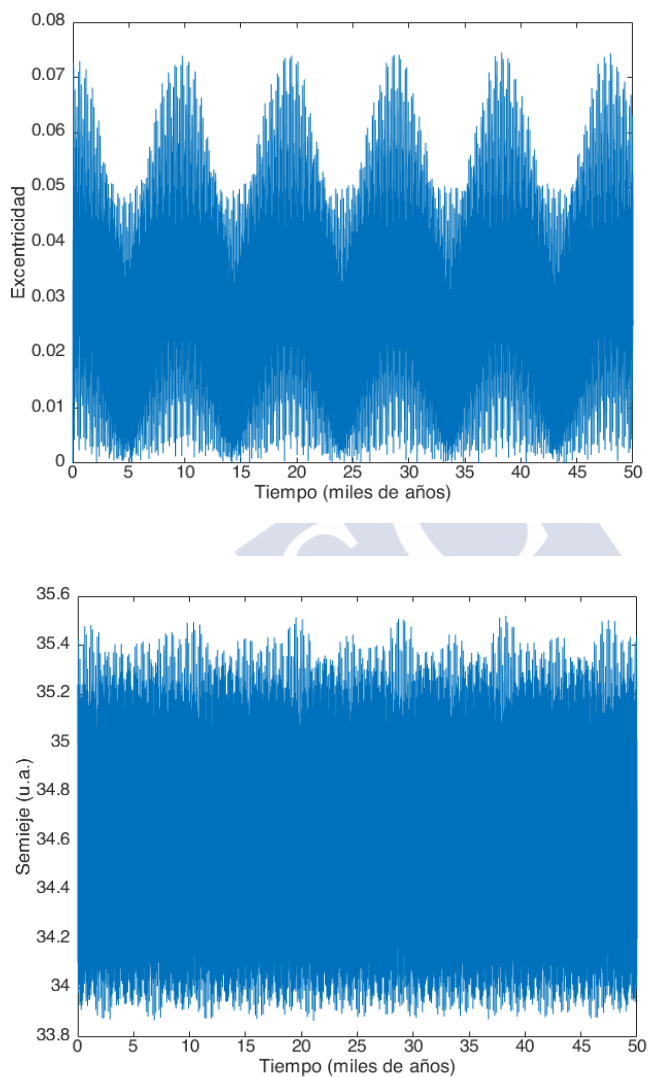


Figura 3.17: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un planeta con excentricidad inicial $e_p = 0$ y semieje inicial con respecto a la estrella m_1 de $a_m = 3,5a_b = 35$ u.a.

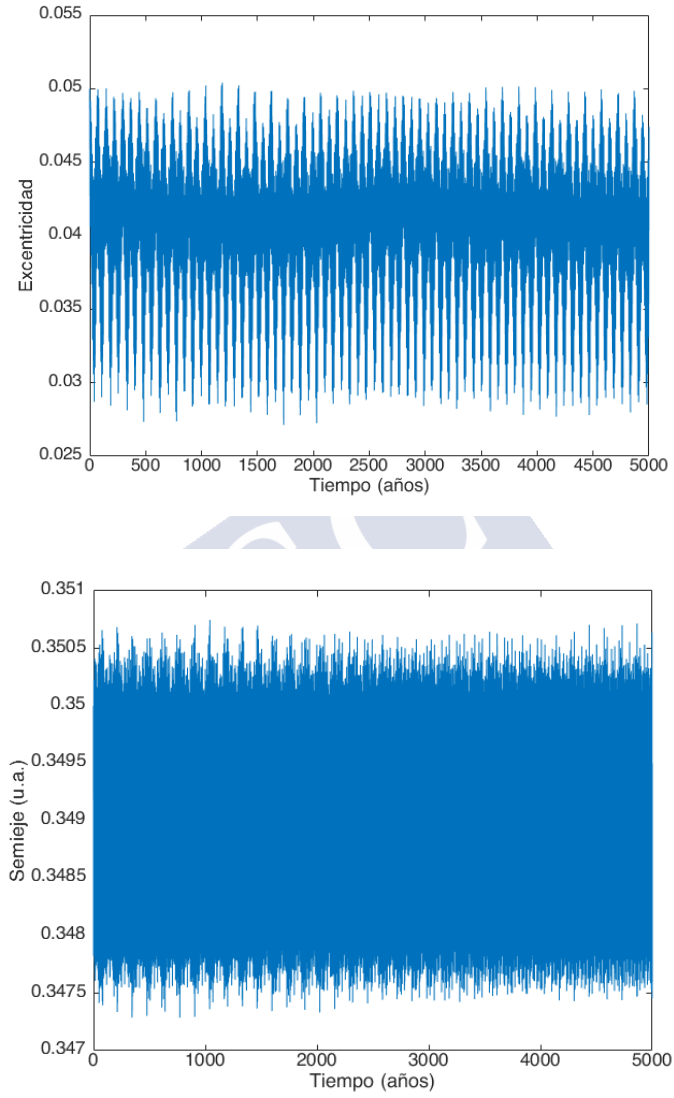


Figura 3.18: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un satélite con excentricidad inicial $e_m = 0,05$ y semieje inicial con respecto al planeta de $a_m = 0,01a_p = 0,35$ u.a.

1 - El semieje sufre mayores alteraciones en el caso del planeta (del orden de hasta 2,85 % el valor inicial) que en el caso del satélite (0,71 %).

2 - La excentricidad se excita levemente en el caso del planeta (hasta rebasar 0,07), mientras que en el caso del satélite nunca llega al valor inicial.

Obtenemos, pues, resultados bastante análogos a los de la Sección anterior: tanto para un planeta en órbita tipo S como para uno en órbita tipo P, el satélite sufre menos alteraciones en su órbita que el planeta.

3.4. Sistemas de 3 estrellas

Existen diversas configuraciones en las cuales un sistema estelar triple se mantiene en órbita estable, tanto teóricas (Szebehely 1977) como observadas, tales como los sistemas trapecio tratados por Tokovinin (1997). La estabilidad de planetas en dichos sistemas todavía no es clara (Verrier & Evans 2007). Sin embargo, la gran mayoría de sistemas triples siguen una configuración *jerarquizada* en la cual una de las estrellas se encuentra mucho más lejos que el par restante; por ejemplo, 1 Geminorum (Lane et al. 2014), ζ Aquarii (Franz 1958) o 16 Cygni (Hauser et al. 1999). Nosotros asumiremos, en todos los casos, dicha configuración: un par de estrellas (binaria interior) orbita su centro de masas, y al mismo tiempo, la tercera estrella se mueve en torno al centro de masas de las otras componentes, mucho más alejada. Pese a lo que pueda parecer, la presencia de exoplanetas en un sistema triple jerarquizado no sólo es posible sino probable, de hecho 37 ya han sido descubiertos (https://www.univie.ac.at/adg/schwarz/bincat_multi.html).

Denotaremos la excentricidad y el semieje de la binaria interior como e_{in} y a_{in} , y la excentricidad y el semieje de la tercera estrella con respecto al centro de masas de la binaria interior como e_{out} y a_{out} , respectivamente.

El criterio de estabilidad de un sistema estelar triple que usaremos será el dado por Mardling & Aarseth (2001):

$$a_{crit} = 2,8 \left[\left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2} \right) \frac{1 + e_{out}}{(1 - e_{out})^{1/2}} \right]^{2/5} a_{in}, \quad (3.19)$$

de manera que si $a_{out} \gtrsim a_{crit}$, la tercera estrella se mantendrá estable en torno al centro de masas de la binaria.

Para todos los ejemplos de esta Sección asumiremos, de manera análoga a la Sección anterior, que $m_1 = 1,1M_\odot$, $m_2 = 0,9M_\odot$, $a_{in} = 10$ u.a. y $e_{in} = 0,3$. También impondremos que m_3 , es decir, la masa de la tercera estrella, es igual al $1M_\odot$ y la excentricidad de la órbita exterior $e_{out} = 0,2$.

Con estos valores, $a_{crit} = 3,70 a_{in} = 37$ u.a. Sin embargo, al igual que pasaba en la Sección anterior, este tipo de criterios no son exactos y debemos calcular el límite verdadero. Utilizando TIDES con un tiempo de integración de 500.000 años, hemos llegado a que el sistema será estable si $a_{out} \gtrsim 4 a_{in} = 40$ u.a. (Figura 3.20).

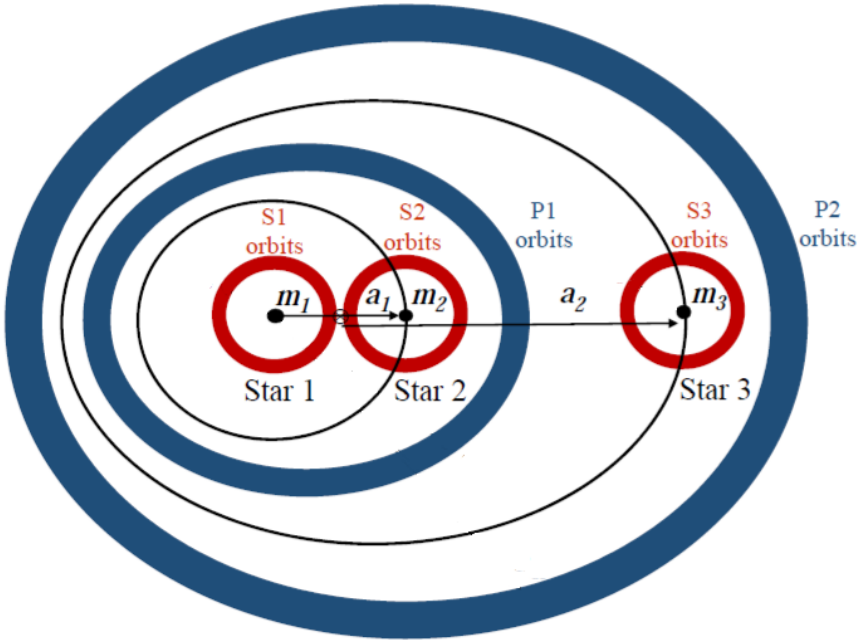
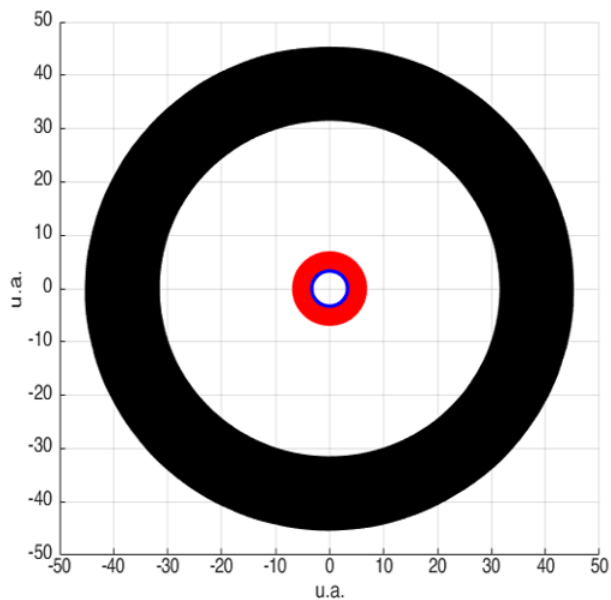
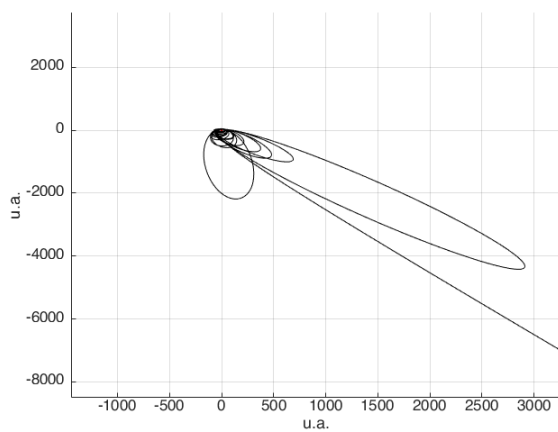


Figura 3.19: Tipos de órbitas que pueden ser estables para un planeta orbitando un sistema estelar triple. Figura adaptada de [Busetti et al. \(2018\)](#).

Para asegurar la estabilidad del sistema triple, consideraremos en todas nuestras simulaciones que $a_{out} = 6 a_{in} = 60$ u.a.



(a) La estrella exterior se mantiene en órbita estable



(b) La estrella exterior se escapa

Figura 3.20: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. El semieje inicial de esta última es $a_{out} = 4 a_{in} = 40$ u.a. (arriba) y $a_{out} = 3,9 a_{in} = 39$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.

Ahora que hemos establecido un sistema estelar triple estable a corto plazo, necesitamos determinar bajo qué condiciones un planeta en este sistema se mantendrá en órbita estable. Por lo tanto cabe preguntarse, ¿cuáles son las configuraciones bajo las cuales puede orbitar un planeta en un sistema triple?

Según Buseti et al. (2018), hay cuatro posibilidades:

- *Órbitas tipo S1/S2*. El planeta orbita una de las componentes de la binaria.
- *Órbitas tipo S3*. El planeta orbita la estrella exterior.
- *Órbitas tipo P1*. El planeta orbita el centro de masas de la binaria interior, siendo perturbado por la estrella exterior.
- *Órbitas tipo P2*. El planeta orbita el centro de masas del sistema triple.

A continuación analizamos cada caso por separado.

3.4.1. Planeta con órbita S1/S2

Los planetas con este tipo de órbitas no son demasiado frecuentes: de 37 exoplanetas descubiertos en sistemas triples (https://www.univie.ac.at/adg/schwarz/bincat_multi.html), 4 tienen órbitas tipo S1/S2 (Busetti 2018).

Primero, testaremos el límite de estabilidad de un planeta que orbita la estrella de masa m_1 . Dicho planeta admitiremos que tiene excentricidad inicial 0 y masa la de Júpiter, aunque, en las ecuaciones, consideramos el caso de cuatro cuerpos restringido, por lo que a efectos dinámicos su masa sería despreciable frente a la de las estrellas. Hemos llegado a que el planeta se mantiene en órbita estable si $a_p \lesssim 0,19 a_{in} = 1,9$ u.a. (Figura 3.21). Si lo comparamos con el límite de estabilidad que obteníamos cuando el planeta estaba en órbita S en el caso de la binaria (Sección 3.3.1), vemos que la región de estabilidad ha sido ligeramente reducida a causa de la presencia de la estrella exterior (de 2 u.a. a 1,9 u.a.). Por ello, como en la Sección anterior, asumiremos que el semieje inicial del planeta es de $a_p = 0,17 a_{in} = 1,7$ u.a. para asegurar su estabilidad.

Podría parecer, en principio, que la presencia de una tercera estrella no produce demasiadas alteraciones en la dinámica de un planeta en órbita tipo S1. Sin embargo, esto no es así. Puede ser que la región de estabilidad no

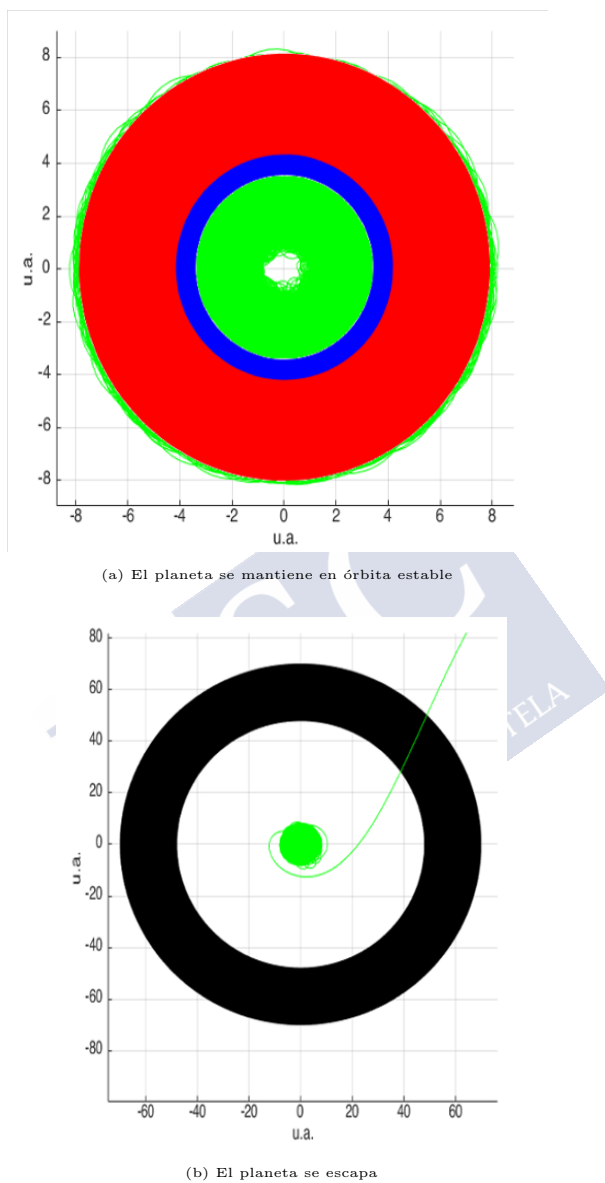
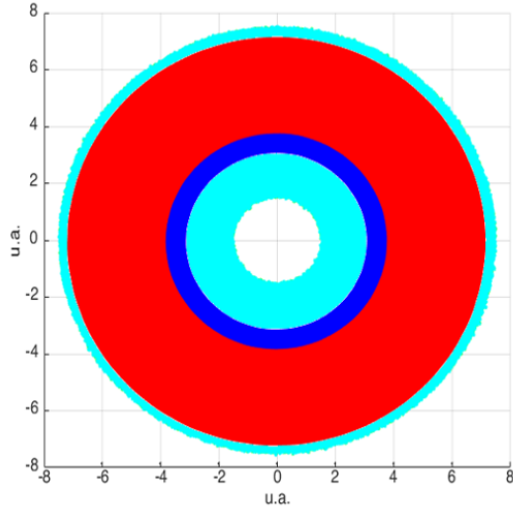
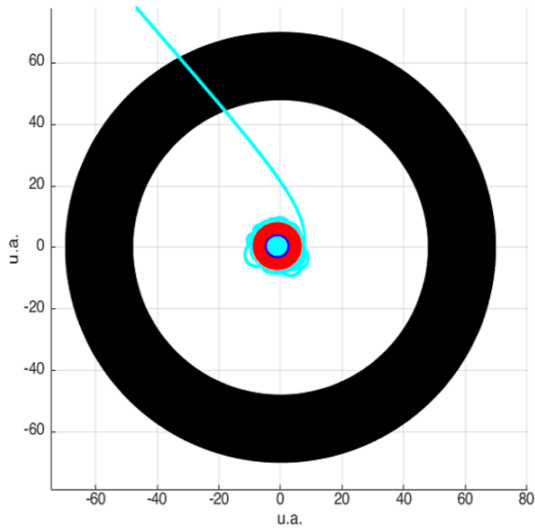


Figura 3.21: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En verde, la órbita del planeta. El semieje inicial del planeta es $a_p = 0,19 a_{in} = 1,9$ u.a. (arriba) y $a_p = 0,2 a_{in} = 2$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.



(a) El satélite se mantiene en órbita estable



(b) El satélite se escapa

Figura 3.22: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En cian, la órbita del satélite. El semieje inicial del satélite es $a_m = 0,01a_p = 0,017$ u.a. (arriba) y $a_m = 0,02a_p = 0,034$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 50.000 años

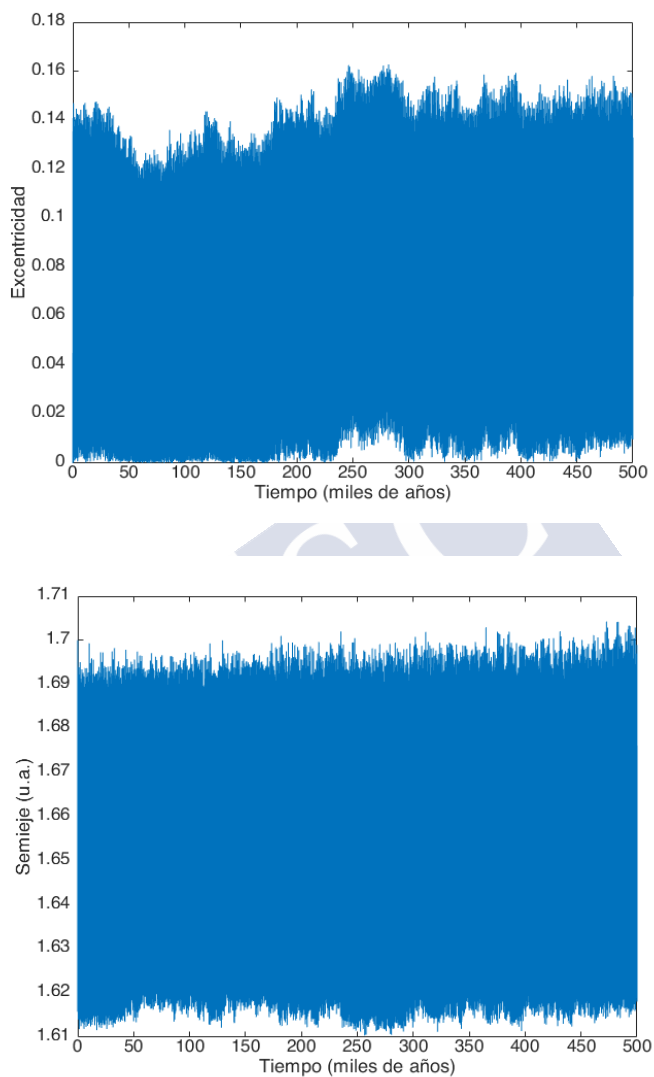


Figura 3.23: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un planeta con excentricidad inicial $e_p = 0$ y semieje inicial con respecto a la estrella m_1 de $a_p = 0,17$ $a_{in} = 1,7$ u.a.

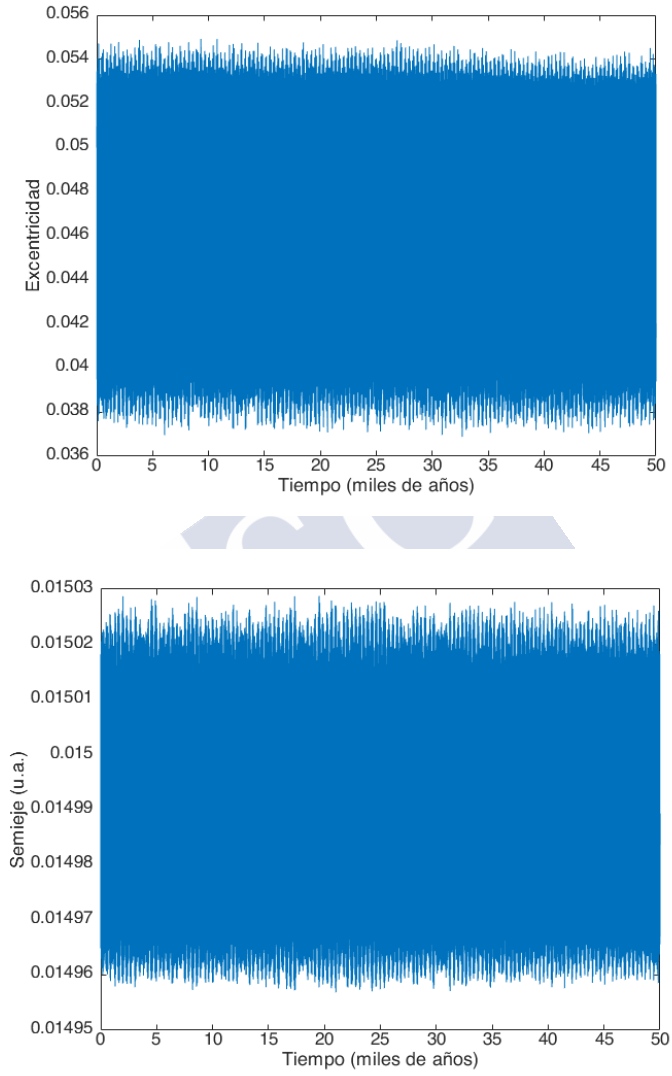


Figura 3.24: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un satélite con excentricidad inicial $e_m = 0,05$ y semieje inicial con respecto al planeta de $a_m = 0,015$ u.a.

se vea demasiado comprometida, pero la dinámica del planeta puede sufrir grandes alteraciones. Véase la Figura 3.23, donde se estudia la evolución de la excentricidad y del semieje del planeta. Se aprecian diferencias importantes en el semieje, que llega a diferir del valor inicial un 5,29% (frente al 4,7% del caso de la órbita tipo S) y sobre todo en la excentricidad, que se excita hasta valores cercanos a 0,16.

Estudiemos ahora la estabilidad de un satélite tipo Tierra que orbite dicho planeta. Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, hemos llegado a que el satélite se mantiene en órbita estable si $a_m \lesssim 0,01a_p = 0,017$ u.a. (Figura 3.22). Por lo tanto, si asumimos una excentricidad inicial $e_m = 0,05$ y un semieje inicial $a_m = 0,015$ u.a., la evolución de su semieje y su excentricidad será la descrita en la Figura 3.24.

De nuevo, se aprecian mayores variaciones en el semieje y en la excentricidad de la órbita del satélite que en el caso de la estrella binaria, pero, tal y como pasaba en ese caso, las perturbaciones en la órbita planetaria son de mayor intensidad que aquellas observadas en la órbita del satélite.

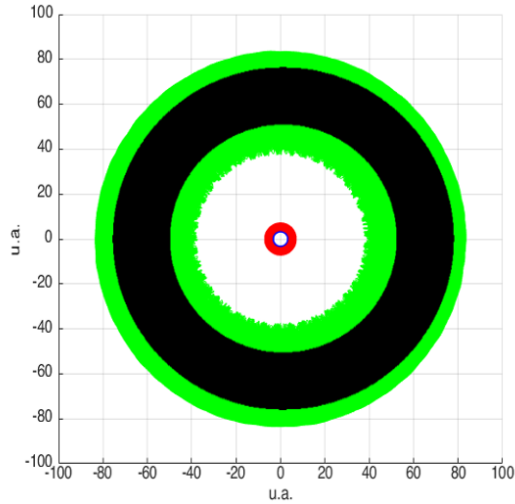
3.4.2. Planeta con órbita S3

Los exoplanetas con órbitas tipo S3 son los predominantes entre los descubiertos en sistemas triples: 30 hasta la fecha (Busetti 2018; Hjorth et al. 2019).

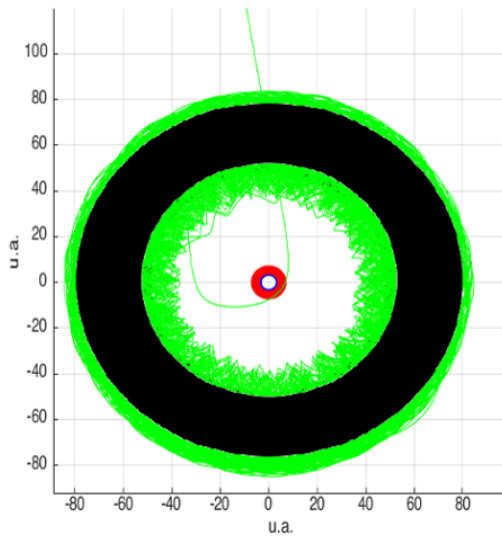
Para estudiar su estabilidad, debemos proceder como en la Sección anterior. Hemos determinado que, para un planeta con órbita tipo S3, se mantendrá en órbita estable a lo largo de 500.000 años si $a_p \lesssim 0,2 a_{out} = 12$ u.a. (Figura 3.25), por lo que elegimos $a_p = 0,1 a_{in} = 6$ u.a. para asegurar su estabilidad. En la Figura 3.27 se muestra la evolución del semieje y su excentricidad con respecto a la tercera estrella.

A continuación testamos la estabilidad para un satélite que orbite dicho planeta. Hemos llegado a que se mantiene en órbita estable si $a_m \lesssim 0,02a_p = 0,12$ u.a., con lo que elegimos $a_m = 0,01a_p = 0,06$ u.a. para asegurar su estabilidad. En la Figura 3.28 se muestra la evolución de su excentricidad y semieje.

Nótese que la región de estabilidad del planeta y del satélite es mucho mayor que en el caso de la órbita de tipo S1/S2 ($\lesssim 12$ u.a. y $\lesssim 0,12$ u.a. frente a $\lesssim 1,9$ u.a. y $\lesssim 0,017$ u.a., respectivamente). Podemos deducir, por tanto, que para un sistema triple donde las estrellas son similares y de tipo solar, las

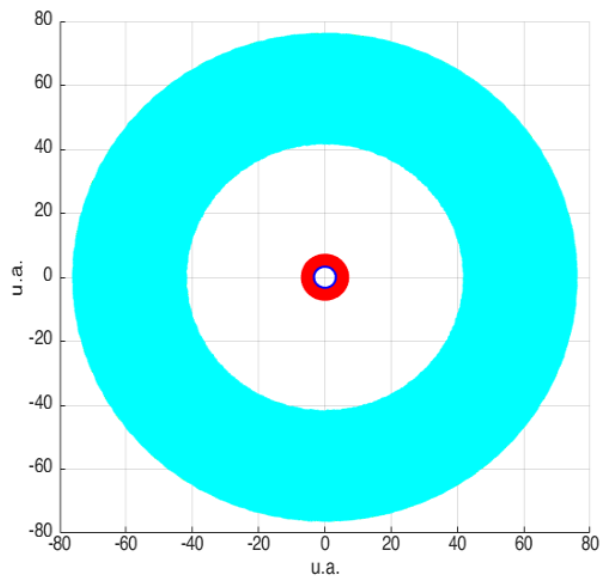


(a) El planeta se mantiene en órbita estable

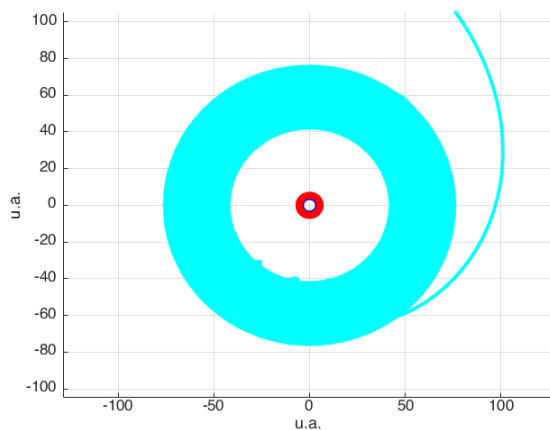


(b) El planeta se escapa

Figura 3.25: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En verde, la órbita del planeta. El semieje inicial del planeta es $a_p = 0,20 a_{out} = 12$ u.a. (arriba) y $a_p = 0,21 a_{out} = 12,6$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.



(a) El satélite se mantiene en órbita estable



(b) El satélite se escapa

Figura 3.26: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En cian, la órbita del satélite. El semieje inicial del satélite es $a_m = 0,02a_p = 0,12$ u.a. (arriba) y $a_m = 0,03a_p = 0,18$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 50.000 años.

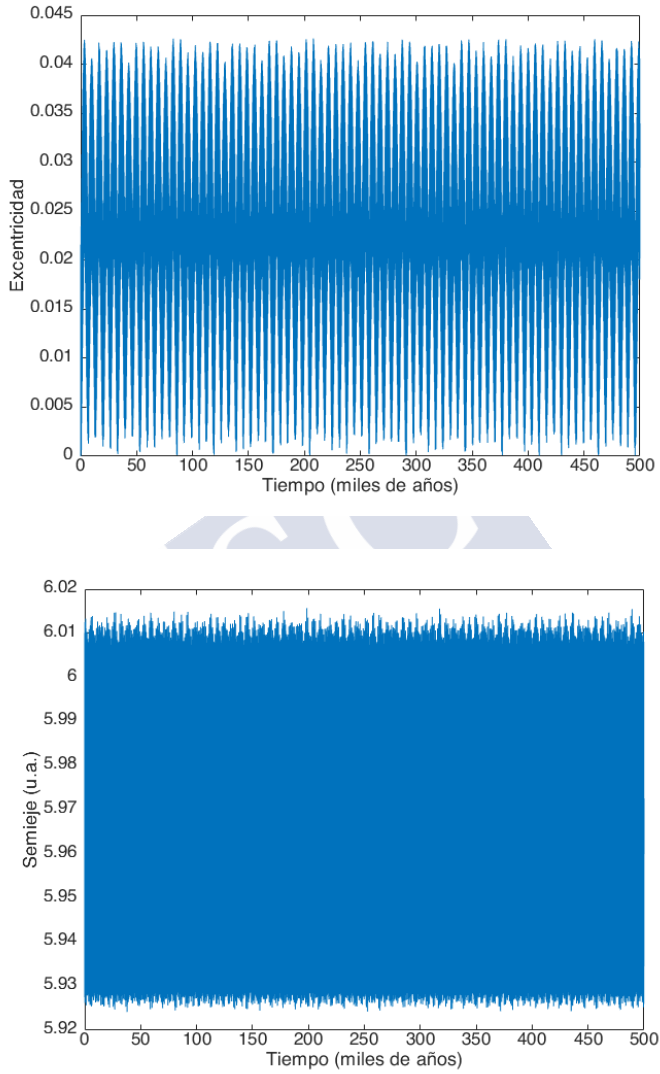


Figura 3.27: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un planeta con excentricidad inicial $e_p = 0$ y semieje inicial con respecto a la estrella m_3 de $a_p = 0,10$ $a_{out} = 6$ u.a.

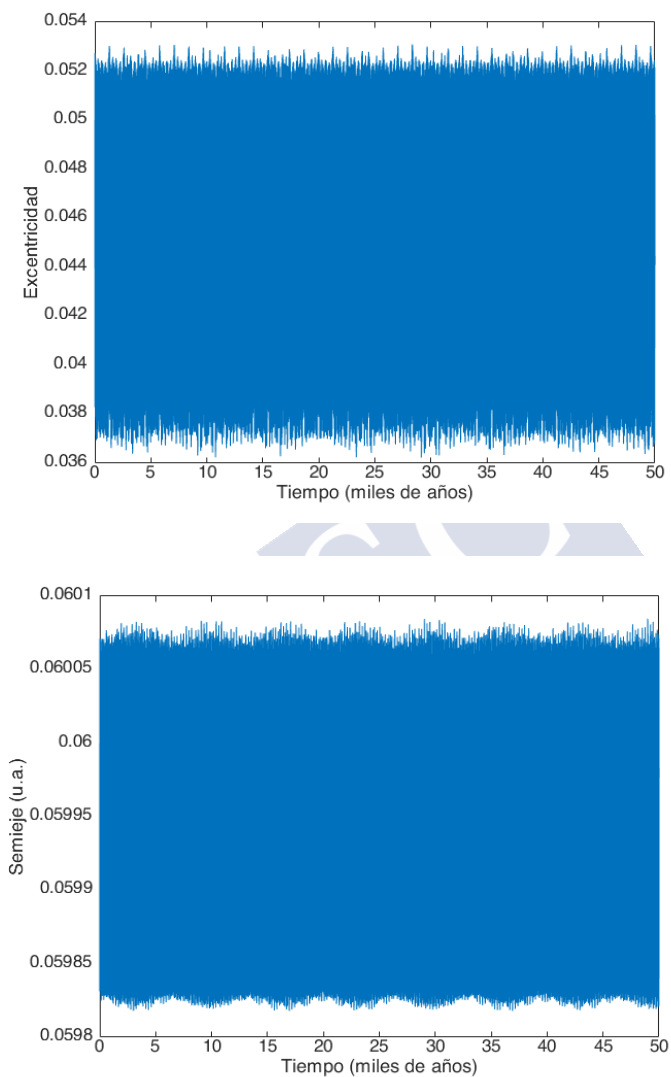


Figura 3.28: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un satélite con excentricidad inicial $e_m = 0,05$ y semieje inicial con respecto al planeta de $a_m = 0,01a_p = 0,06$ u.a.

órbitas tipo S3 ofrecen mayores posibilidades de albergar planetas que las de tipo S1/S2.

Además, al contrario de lo que ocurría en los casos anteriores, la órbita del planeta es *más estable* que la de su satélite: su semieje varía hasta el 2,5 % del valor inicial, mientras que el del planeta lo hace solo hasta el 1,1 % del valor inicial (Figuras 3.27 y 3.28).

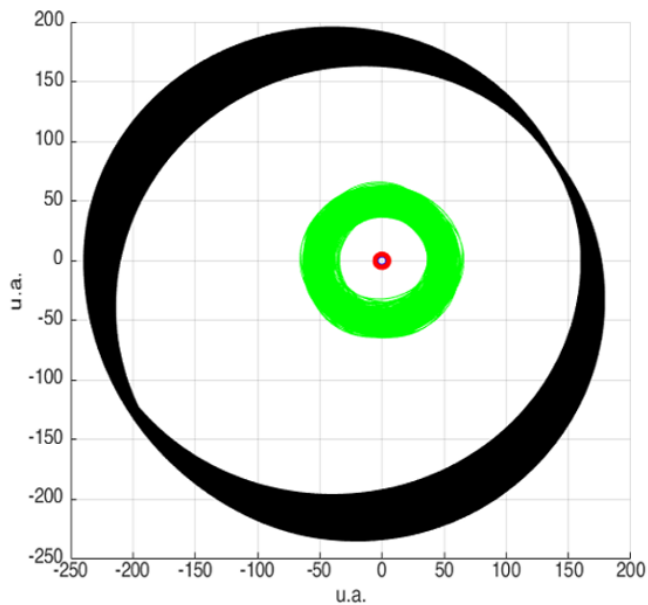
3.4.3. Planeta con órbita P1

Hasta el momento sólo se ha descubierto un planeta que tenga órbita tipo P1: HW Vir (AB) b (Busetti 2018; Lee et al. 2009; Horner et al. 2012). Hemos advertido que, en este tipo de órbitas, no siempre es posible la existencia de planetas. De hecho, para la disposición de las estrellas que hemos elegido ($a_{in} = 10$ u.a. y $a_{out} = 60$ u.a.), no hemos encontrado ninguna órbita para la cual un planeta tipo Júpiter con órbita P1 se mantenga estable por más de 1000 años, por lo que deducimos que un planeta de estas características sólo será estable cuando la estrella exterior se encuentre muy alejada. Por ello, hemos supuesto, **solo en este caso**, que el semieje de la estrella exterior sea $a_{out} = 20 a_{in} = 200$ u.a.

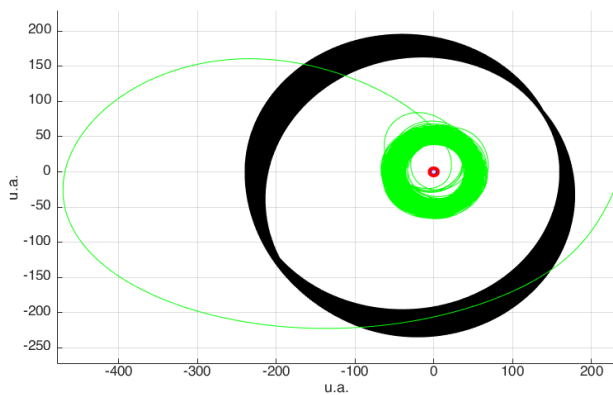
En cuanto a la estabilidad, existe una diferencia importante con respecto a los demás casos. Debemos establecer tanto un límite superior (debido a la influencia de la tercera estrella) como un límite inferior (debido a la influencia de la binaria). Hemos estimado, por ello, que un planeta con excentricidad inicial 0 se mantiene en órbita estable cuando el semieje inicial a_p cumple que $a_p \lesssim 0,28 a_{out} = 56$ u.a. (Figura 3.29) y $a_p \gtrsim 0,18 a_{out} = 36$ u.a. (Figura 3.30), por lo que la región de estabilidad sería $36 \lesssim a_p \lesssim 54$ u.a. Elegimos $a_p = 0,23 a_{out} = 46$ u.a. para asegurar su estabilidad.

En cuanto al satélite, hemos llegado a que se mantiene en órbita estable cuando $a_m \lesssim 0,02 a_p = 0,92$ u.a. (Figura 3.31). Se muestra la evolución de la excentricidad y del semieje de su órbita en la Figura 3.32. Los valores iniciales han sido 0,05 para la excentricidad y $a_m = 0,01 a_p = 0,46$ u.a. para el semieje.

Sucede algo curioso en el caso de la órbita del planeta. Pese a mantenerse estable, sufre de tales perturbaciones a causa de la influencia de la estrella exterior que su órbita puede llegar, por momentos, a tornarse hiperbólica (véase la Figura 3.33, donde la excentricidad sobrepasa periódicamente el valor 1). Sin embargo, pese a los drásticos cambios en la órbita del planeta, en el satélite

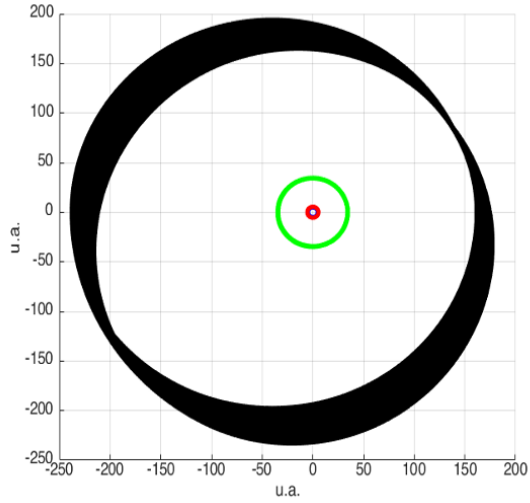


(a) El planeta se mantiene en órbita estable

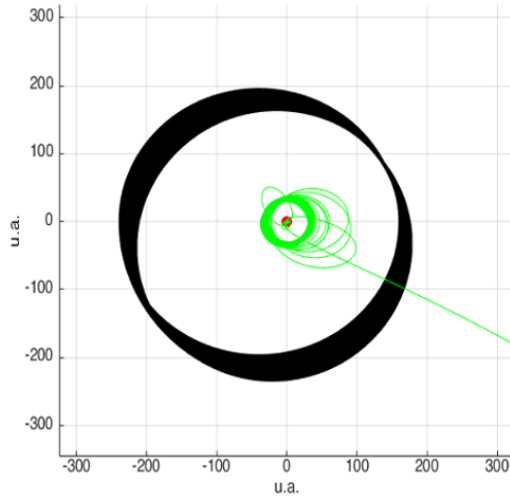


(b) El planeta se escapa

Figura 3.29: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En verde, la órbita del planeta. El semieje inicial del planeta es $a_p = 0,28 a_{out} = 56$ u.a. (arriba) y $a_p = 0,29 a_{out} = 58$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.

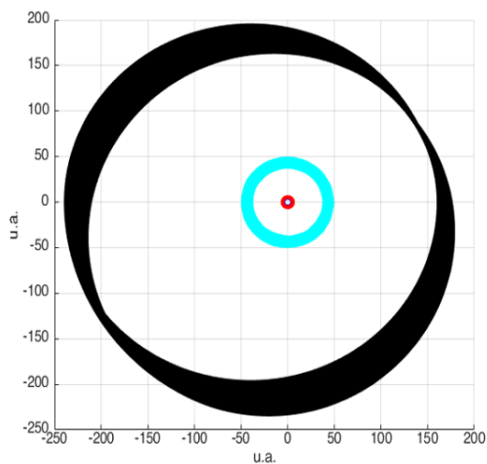


(a) El planeta se mantiene en órbita estable

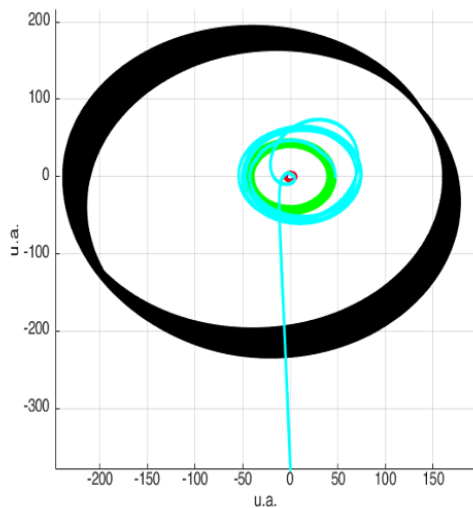


(b) El planeta se escapa

Figura 3.30: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En verde, la órbita del planeta. El semieje inicial del planeta es $a_p = 0,18 a_{out} = 36$ u.a. (arriba) y $a_p = 0,17 a_{out} = 34$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.



(a) El satélite se mantiene en órbita estable



(b) El satélite se escapa

Figura 3.31: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En verde, la órbita del planeta. En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En cian, la órbita del satélite. El semieje inicial del satélite es $a_m = 0,02a_p = 0,92$ u.a. (arriba) y $a_m = 0,03a_p = 1,38$ u.a. El origen es el centro de masas de la binaria interior. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.

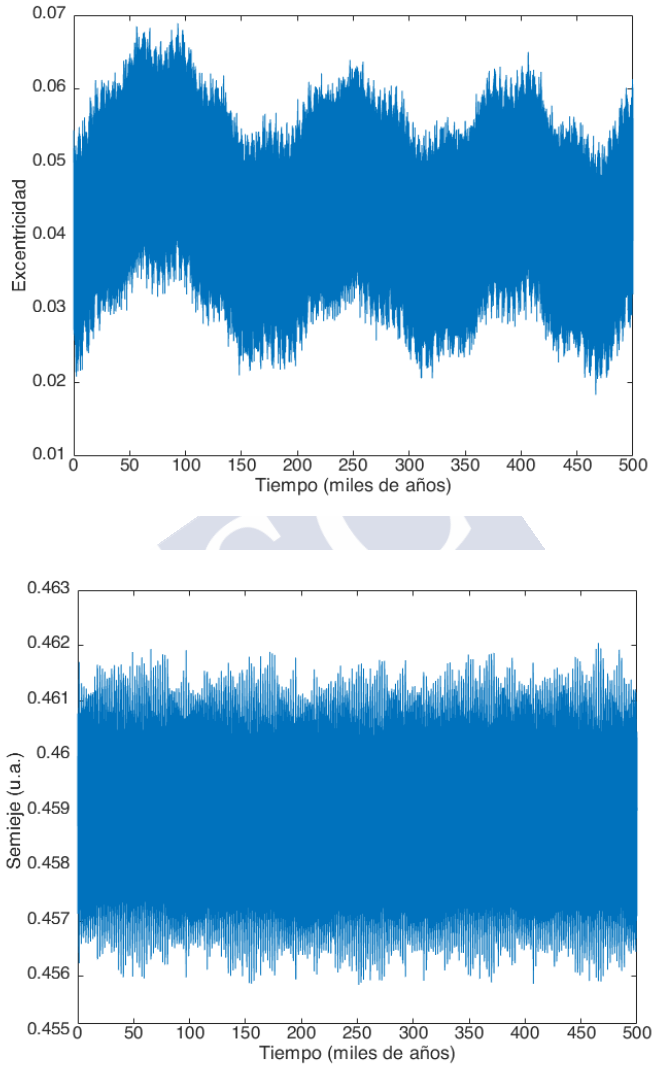


Figura 3.32: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un satélite con excentricidad inicial $\epsilon_m = 0,05$ y semieje inicial con respecto al planeta de $a_m = 0,01a_p = 0,46$ u.a.

tanto la excentricidad orbital como el semieje sufren muchas menos variaciones (véase Figura 3.32). Llegamos a que, de nuevo, el satélite se mantiene en una órbita mucho más estable que el planeta.

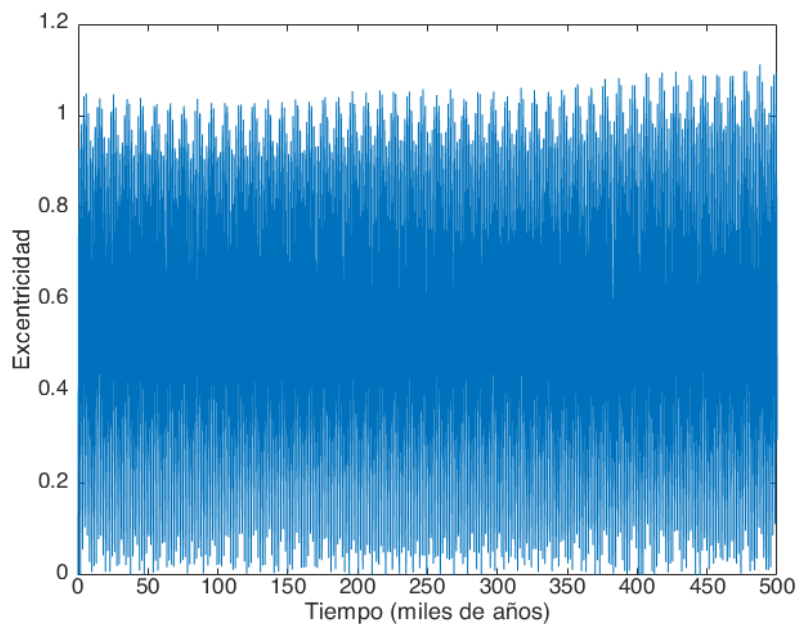
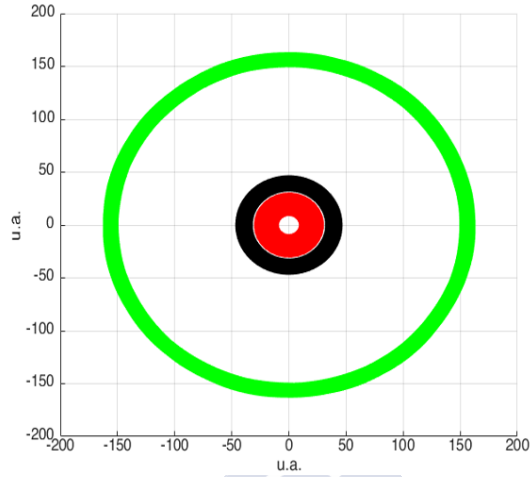


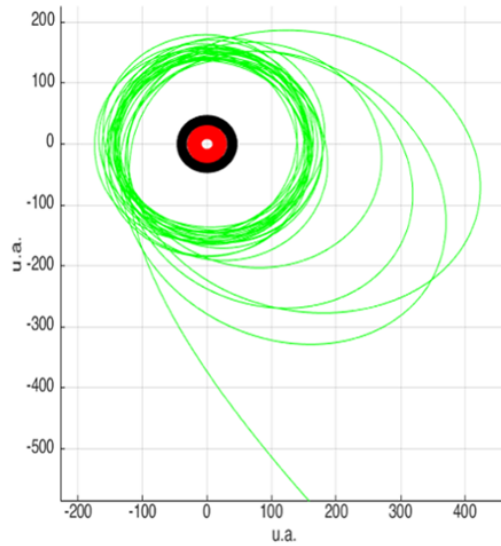
Figura 3.33: Evolución de la excentricidad para un planeta con excentricidad inicial 0 y semieje inicial $a_p = 0,23$ $a_{out} = 46$ u.a.

3.4.4. Planeta con órbita P2 (o *circumtriple*)

Ningún planeta en órbita P2 ha sido detectado aún (Busetti 2018), lo que puede deberse, quizás, a las dificultades que presenta un planeta que está muy alejado de su(s) estrella(s) para ser detectado ya que, como parece lógico, este tipo de órbitas solamente son estables cuando su semieje con respecto al centro de masas de las tres estrellas es mucho mayor que el semieje de la estrella exterior.



(a) El planeta se mantiene en órbita estable



(b) El planeta se escapa

Figura 3.34: En azul, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita de la estrella de masa m_2 . En negro, la órbita de la estrella exterior. En verde, la órbita del planeta. El semieje inicial del planeta es $a_p = 2,6$ $a_{out} = 156$ u.a. (arriba) y $a_p = 2,7$ $a_{out} = 162$ u.a. El origen es el centro de masas de las tres estrellas. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.

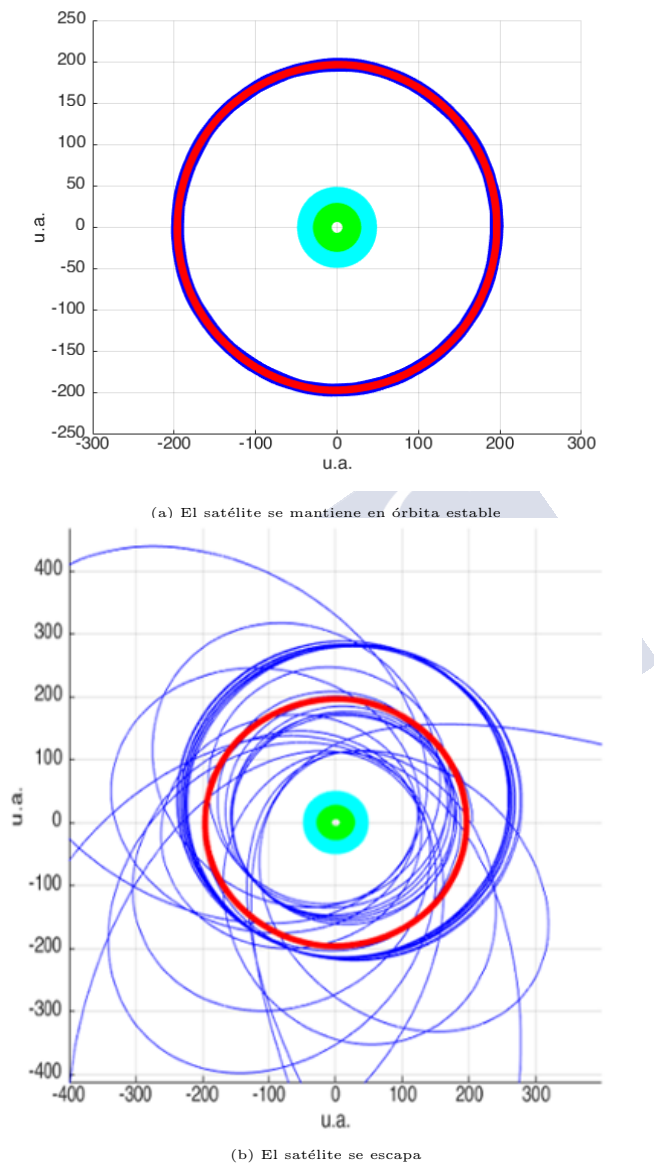


Figura 3.35: En verde, la órbita de la estrella de masa m_1 . En rojo, la órbita del planeta. En negro, la órbita de la estrella de masa m_2 . En azul claro, la órbita de la estrella exterior. En azul oscuro, la órbita del satélite. El semieje inicial del satélite es $a_m = 4$ u.a. (arriba) y $a_m = 3$ u.a. El origen es el centro de masas de las tres estrellas. El tiempo transcurrido es de 500.000 años.

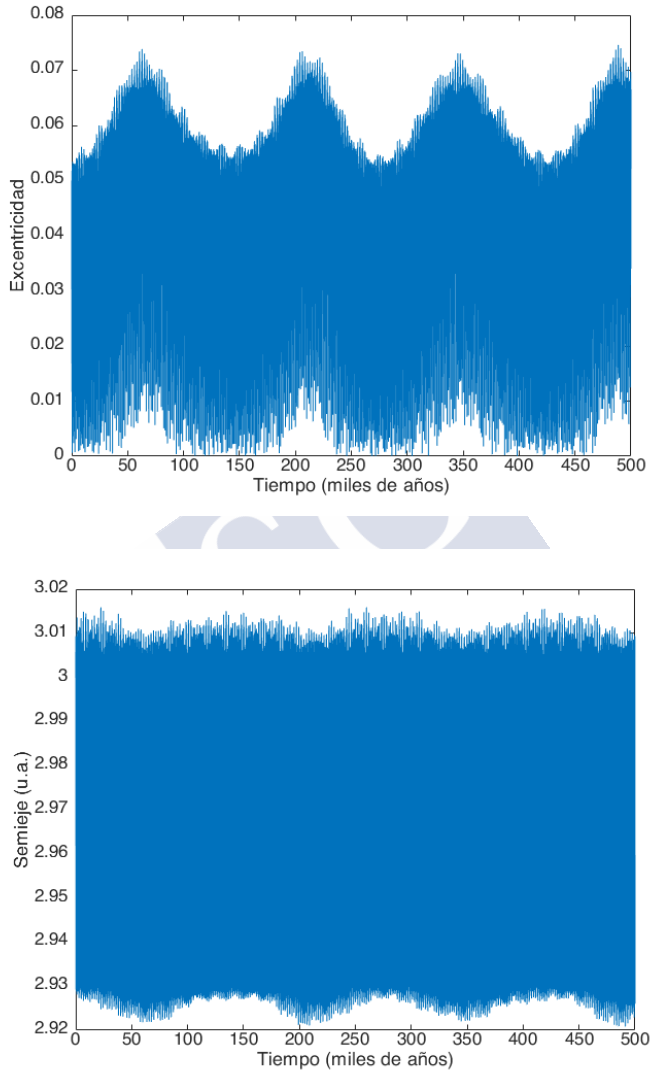


Figura 3.36: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un satélite con excentricidad inicial $e_m = 0,05$ y semieje inicial con respecto al planeta de $a_m = 3$ u.a.

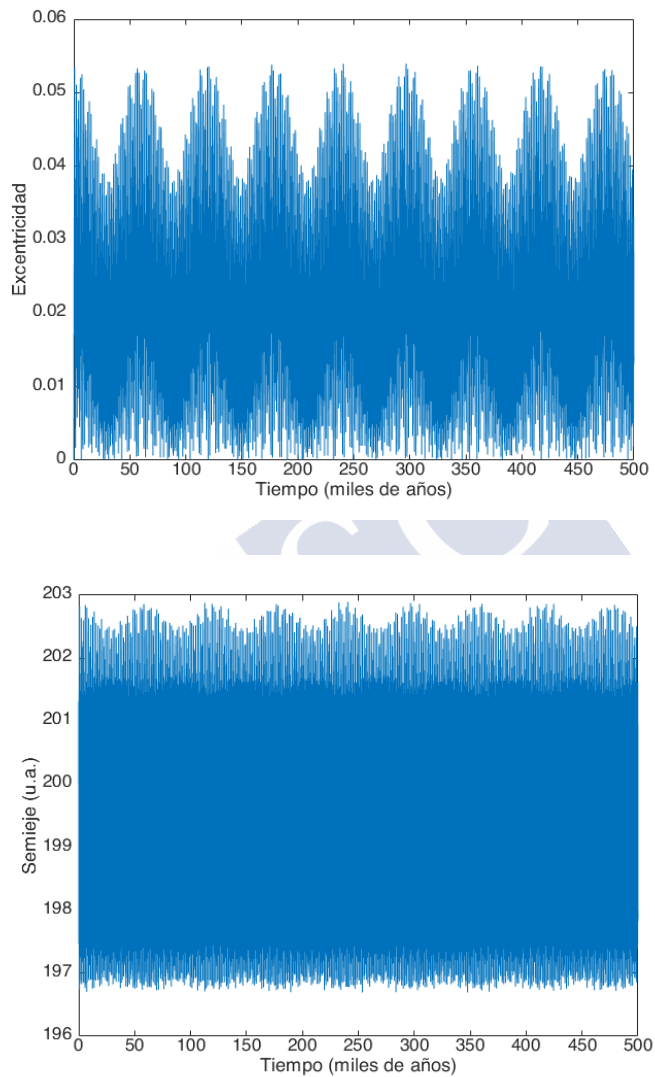


Figura 3.37: Evolución de la excentricidad (arriba) y del semieje de la órbita de un planeta con excentricidad inicial $e_m = 0$ y semieje inicial de 200 u.a.

Procedemos como es habitual: primero testamos la región de estabilidad del planeta; la cual es, para un planeta con excentricidad inicial 0, de $a_p \gtrsim 2,7$ $a_{out} = 162$ u.a. (Figura 3.34). Después, elegimos como semieje inicial $a_p = 200$ u.a. para asegurarnos la estabilidad del planeta (véase la Figura 3.37 donde se muestra la evolución de la excentricidad y del semieje para un planeta con el mencionado semieje inicial).

A continuación, testamos la estabilidad de un satélite que orbite el planeta anterior. Concluimos que se mantiene en órbita estable si $a_m \lesssim 4$ u.a. (Figura 3.35), por lo que elegimos el semieje inicial $a_m = 3$ u.a. para, como en situaciones anteriores, asegurar su estabilidad. En la Figura 3.37 se muestra la evolución de la excentricidad y del semieje para dicho satélite.

Comparando Figuras 3.36 y 3.37, concluimos que un planeta con órbita tipo P2 es sumamente estable, de hecho sufre menos alteraciones en su órbita que el satélite: hasta el 2,7% del valor inicial del semieje para el satélite frente al 1,5% del planeta, y la excentricidad del satélite oscila entre 0 y 0,07 mientras que la del planeta lo hace entre 0 y 0,05.

Tras haber estudiado cada tipo de órbita posible de un exoplaneta perteneciente a un sistema triple, hemos repetido el proceso, pero cambiando la masa de la tercera estrella a $0,2 M_\odot$ (tipo enana roja) para analizar la dinámica y estabilidad de los exoplanetas y exosatélites cuando ésta tiene menor masa, pero el mismo semieje con respecto al centro de masas de la binaria: 60 u.a. En cuanto a las regiones de estabilidad, no apreciamos enormes diferencias ni en las órbitas S1/S2 ni en las órbitas P2, pero sí en las órbitas tipo P1, en las cuales la región de estabilidad aumenta notablemente cuando disminuimos la masa de la tercera estrella, de $36 \lesssim a_p \lesssim 54$ u.a. (Sección 3.4.3) a $32 \lesssim a_p \lesssim 81$ u.a., y también en las órbitas tipo S3, donde la región de estabilidad del planeta se reduce de $a_p \lesssim 12$ u.a. (Figura 3.25) a $\lesssim 7$ u.a.

En la dinámica, por otra parte, también encontramos diferencias. En los exoplanetas con órbita tipo S1/S2, por ejemplo, se aprecian variaciones en la excentricidad mucho menores, debido a la menor masa de la tercera estrella. En los planetas con órbitas tipo S3 es donde se encuentran las mayores diferencias: la influencia gravitatoria de la binaria hace que la excentricidad del planeta llegue a 0,1, a diferencia del caso tratado en esta Sección, donde la excentricidad del planeta nunca sobrepasaba 0,045 (Figura 3.27), y la órbita del exosatélite es, en definitiva, más estable que la del exoplaneta. De hecho,

cuando la tercera estrella tiene baja masa, la órbita del exosatélite siempre es más estable que la del exoplaneta, salvo para planetas en órbitas tipo P2.

3.5. Sistemas de ≥ 4 estrellas

Los sistemas con más de tres estrellas son mucho menos abundantes (del orden de 4% del total de la población estelar) (Tokovinin 2014b), de hecho los únicos exoplanetas descubiertos en dichos sistemas lo han sido en las estrellas cuádruples 30 Ari (Kane et al. 2015) y Kepler-64 (Schwamb et al. 2013). Por ello, no trataremos este caso, pero sí escenarios de cuatro cuerpos con órbitas no coplanarias.

3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

En esta Sección, no mantendremos la asunción que habíamos hecho desde el principio de que todas las órbitas eran coplanarias y estudiaremos la evolución a largo plazo de la excentricidad y la inclinación de exoplanetas y exosatélites cuyas órbitas se encuentran considerablemente inclinadas con respecto a los demás cuerpos.

Las perturbaciones a largo plazo en sistemas de tres cuerpos con elevadas inclinaciones mutuas son desde hace años conocidos, gracias a los trabajos de Lidov (1961) y Kozai (1962), de ahí que se llame a este fenómeno los **ciclos de Lidov-Kozai** (a partir de ahora nos referiremos a ellos como ciclos LK por simplicidad). En particular, Kozai (1962) observó cómo algunos cuerpos del cinturón de asteroides cuya órbita se encontraba inclinada contaban con una excentricidad considerable debido a la acción de Júpiter, por ejemplo (1373) Cincinnati, cuya excentricidad e inclinación oscilan entre 0,25 y 0,6 y entre 25° y 42°, respectivamente. En los satélites irregulares de Urano también se ha notado este efecto, puesto que ninguno de ellos, excepto uno, cuenta con una inclinación mayor que 50° y menor que 150° (Shevchenko 2016), lo cual coincide en gran medida con el rango de oscilaciones donde los ciclos LK son máximos: entre 40 y 140 grados (Kozai 1962).

En general, cuando la órbita de la binaria interior se encuentra suficientemente inclinada con respecto a la órbita de la binaria exterior, los ciclos LK pueden hacer que, a largo plazo, excentricidades inicialmente bajas se tornen

en cercanas a 1 (Lidov 1961; Naoz et al. 2013; Takeda & Rasio 2005; Docobo et al. 2021; etc.). Primero, examinaremos las diferencias que existen entre los ciclos LK que experimenta un exoplaneta y un exosatélite, y después estudiaremos el comportamiento de estos ciclos cuando existe a mayores un cuarto cuerpo, lo que denominaremos como LK *perturbado*.

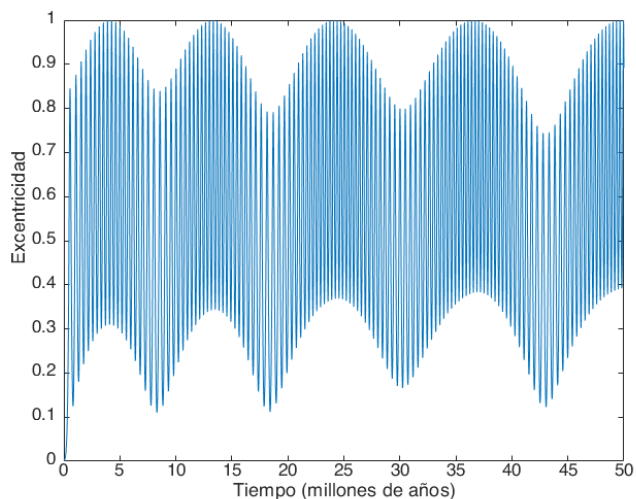
La Figura 3.38 muestra la evolución de la excentricidad y la inclinación que sufre un exoplaneta tipo Júpiter que orbita una estrella tipo solar, donde a su vez una enana marrón (cuya masa asumiremos es $40 M_J$) se mueve en torno al centro de masas de ambos. Vemos cómo la excentricidad, que inicialmente era 0, se torna cercana a 1 en apenas 5 Myr, mientras que la inclinación oscila entre 40 y 140 grados, lo que produce cambios de orientación en la órbita del exoplaneta.

La Figura 3.39 muestra, por otro lado, la evolución de la excentricidad y la inclinación que sufre la órbita de un exosatélite que orbita alrededor de un exoplaneta tipo Júpiter, cuyo centro de masas se mueve, a su vez, alrededor de una enana marrón. En este caso, vemos que, si bien la excentricidad alcanza valores próximos a 0,8, éstos son menores que en el caso de la Figura 3.38 y, además, la inclinación sufre cambios mucho menores, tomando valores comprendidos entre 35 y 65 grados. Así, observamos que los ciclos LK asociados a un exoplaneta perturban mucho más su órbita que la de un exosatélite, sobre todo en lo que concierne a su inclinación.

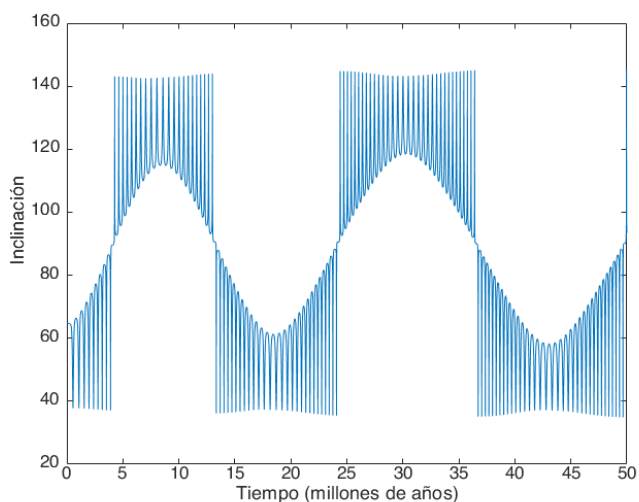
A continuación, analizaremos lo que ocurre cuando añadimos un cuarto cuerpo en las dos configuraciones de arriba. En un sistema de cuatro cuerpos, dos tipos de configuraciones son posibles: configuración de cuatro cuerpos totalmente jerarquizados y la llamada *configuración 2 + 2*, en la cual los cuerpos se organizan en dos pares de binarias, los cuales orbitan alrededor de su centro de masas.

3.6.1. Caso del exoplaneta

Asumiremos, para los primeros tres cuerpos, los mismos elementos orbitales que en el ejemplo de la Figura 3.38, y expondremos varios ejemplos dependiendo de la masa, excentricidad e inclinación del cuarto cuerpo.



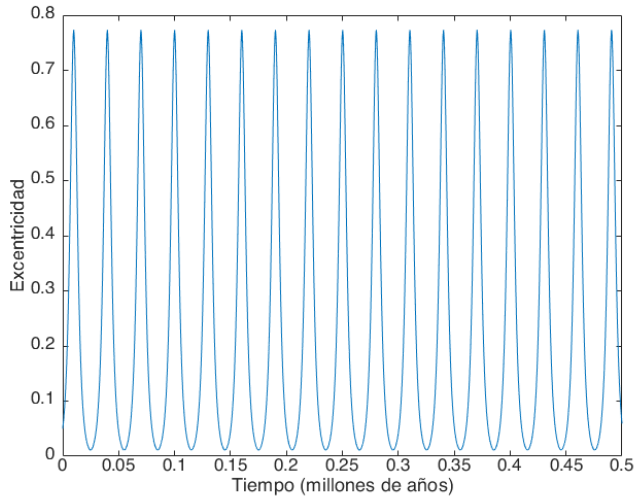
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



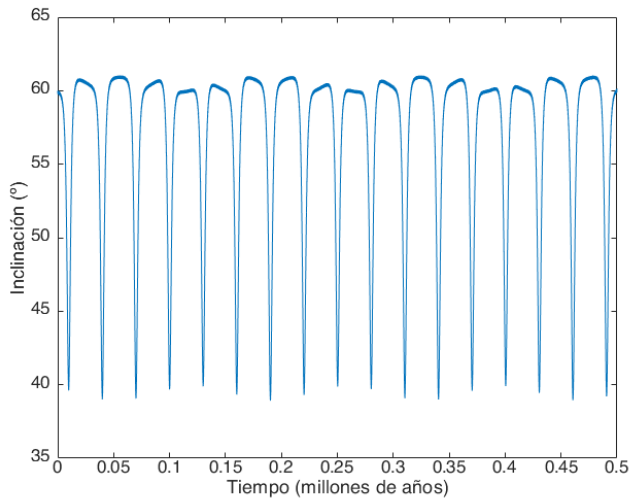
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.38: Inclinación inicial de la órbita del planeta: $64,7^\circ$. Inclinación inicial de la órbita del tercer cuerpo: $0,3^\circ$. Semieje inicial del planeta: 6 u.a. Semieje inicial del tercer cuerpo: 100 u.a. Excentricidad inicial del planeta: 0,001. Excentricidad inicial del tercer cuerpo: 0,6. Argumento del periastro inicial del planeta: 45° . Argumento del periastro inicial del tercer cuerpo: 0° . Ángulo del nodo ascendente inicial del planeta: 240° . Ángulo del nodo ascendente inicial del tercer cuerpo: 60° . La época de paso por el periastro inicial es, en ambos casos, igual a 0.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas



(a) Excentricidad de la órbita del exosatélite



(b) Inclinación de la órbita del exosatélite

Figura 3.39: Inclinación inicial del exosatélite: 60° . Excentricidad inicial del exosatélite: $0,05^\circ$. Semieje inicial del exosatélite: 0,1 u.a. Semieje inicial del exosatélite: 10 u.a. Excentricidad inicial de la binaria exterior: 0. Argumento del periastron inicial del exosatélite: 45° . Argumento del periastron inicial de la binaria exterior: 0° . Ángulo del nodo ascendente inicial del exosatélite: 240° . Ángulo del nodo ascendente inicial de la binaria exterior: 60° . La época de paso por el periastron inicial es, en ambos casos, igual a 0

3.6.1.1. El problema de cuatro cuerpos totalmente jerarquizado

Primero, esquematizaremos cada sistema por medio de la descomposición en subsistemas dependiendo de la jerarquía de cada uno de ellos, siguiendo la metodología desarrollada en [Abad \(1984\)](#) y en [Abad & Docobo \(1987\)](#). Esto nos ayudará a visualizar cada configuración (por ejemplo, la Figura 3.40). También asociaremos cada caso tratado a un cierto caso mencionado en [Campo & Docobo \(2014\)](#) y [Campo \(2019\)](#), donde se tratan todas y cada una de las configuraciones de cuatro cuerpos donde uno de ellos es un exoplaneta ó un exosatélite (véase, por ejemplo, la Figura 3.41).

Observamos varios hechos:

1. Cuando fijamos la inclinación inicial de la órbita del cuarto cuerpo (con respecto al plano invariable) a $0,5^\circ$, y hacemos variar la excentricidad (Figuras 3.44, 3.45 y 3.46), todavía se mantiene el mecanismo LK que apreciábamos en el problema de tres cuerpos: la inclinación sufre variaciones tales que, al sobrepasar los 90° , la órbita cambia de orientación y se vuelve retrógrada, oscilando entre 90 y 140 grados hasta que la inclinación baja de los 90 grados, y así sucesivamente. La diferencia es que, con la presencia de un cuarto cuerpo, los periodos en los cuales la órbita cambia de orientación pueden volverse más largos o más cortos (como en el caso de la Figuras 3.45 ó 3.46) o incluso no producirse durante mucho tiempo, como en el caso de la Figura 3.44, donde la inclinación no sufre cambios drásticos por más de 18 Myr. La excentricidad, como pasaba cuando tratábamos en el problema de tres cuerpos, sufre grandes oscilaciones, estando durante largos periodos de tiempo cerca de 1 y, análogamente a lo que pasaba con la inclinación, la presencia de un cuarto cuerpo puede alargar o acortar dichos periodos.

2. Cuando la inclinación inicial de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable es de 20° (Figura 3.47), sigue oscilaciones parecidas a las del caso anterior durante los primeros millones de años, con la diferencia que son ligeramente mayores, llegando hasta casi a los 180 grados, pero a partir de los 10 Myr estos cambios de orientación se hacen caóticos, produciéndose en periodos de tiempo menores que 1 Myr. Con respecto a la excentricidad, pasa lo mismo: al principio sigue oscilaciones propias al mecanismo LK que describíamos en el ejemplo del problema de tres cuerpos jerarquizado, pero a partir de los 10 Myr, las variaciones en la excentricidad se tornan mucho más extremas y rápidas, oscilando entre casi 0 y $0,9999$ en un cortísimo periodo de tiempo.

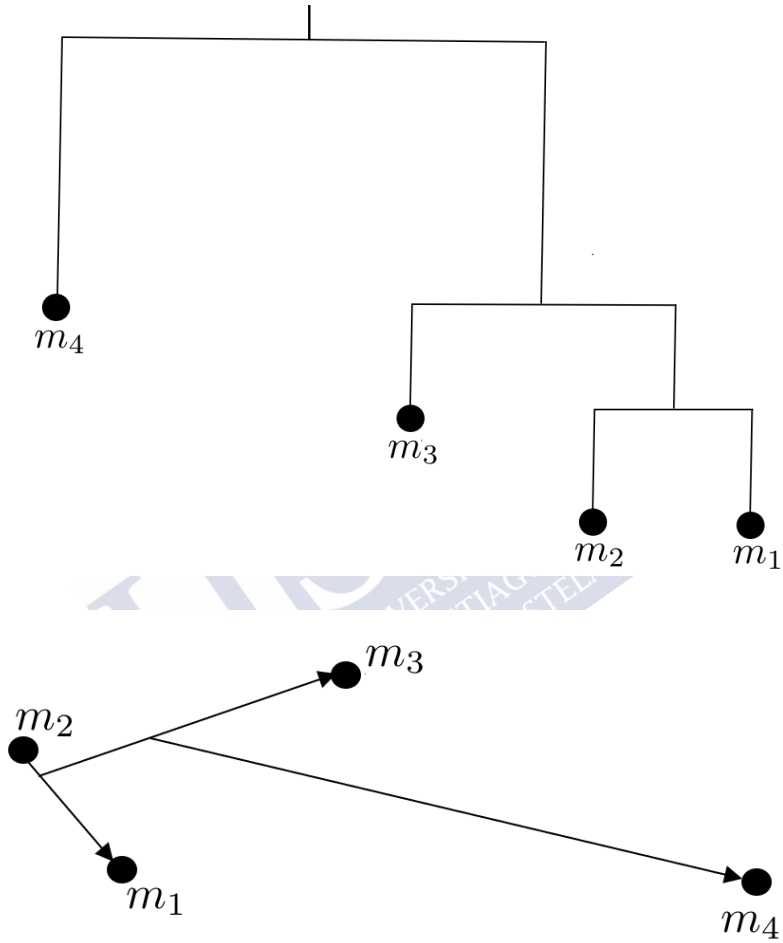


Figura 3.40: Esquema de la configuración de 4 cuerpos totalmente jerarquizados.

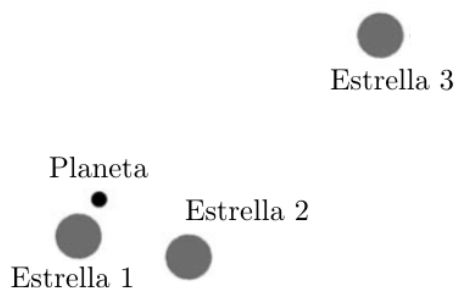


Figura 3.41: Sistema triple jerarquizado con un planeta orbitando una componente de la binaria interior. Se corresponde al caso 12 de [Campo & Docobo \(2014\)](#).

3. Si la inclinación de la órbita del cuarto cuerpo es mayor de 25° , hemos comprobado que la órbita del planeta se vuelve inestable, por lo que concluimos que, con la configuración que estamos tratando, la inclinación de la órbita del cuarto cuerpo no puede ser muy grande.

4. Si la masa del cuarto cuerpo es de $0,2 M_\odot$, la órbita del planeta se vuelve inestable cuando su inclinación inicial es de $0,5^\circ$. Sin embargo, si se encuentra ligeramente inclinada (entre, aproximadamente, 20 y 30 grados) la órbita del planeta se vuelve estable. Cuando la inclinación inicial de la órbita del planeta con respecto al plano invariable es de 20° (Figura 3.48), ésta se torna caótica casi desde el principio habiendo cambios de orientación, mientras que la excentricidad todavía conserva las oscilaciones propias del mecanismo LK hasta casi los 15 Myr. Sin embargo, la excentricidad sufre cambios mucho menos extremos que cuando el cuarto cuerpo tenía una masa menor ($40 M_J$). Esto también ocurre cuando la inclinación inicial es de 30° (Figura 3.49), de hecho la excentricidad a partir de los 15 Myr se torna menos extrema, nunca sobrepasando 0,9.

Observamos que:

- Si la masa del cuarto cuerpo es de $1 M_J$ (es decir, masa planetaria), su semieje orbital con respecto al tercer cuerpo de 1 u.a., y su inclinación orbital con respecto al plano invariable de $0,5^\circ$, observamos como la excentricidad y la inclinación siguen oscilaciones propias al mecanismo LK, con la diferencia

de que los cambios de orientación se producen mucho menos frecuentemente, ocurriendo el primero en 16 Myr (Figura 3.50). Lo mismo ocurre si la órbita se inclina levemente con respecto al plano invariable, unos 20° (Figura 3.51), aunque el segundo cambio de orientación sucede un poco antes, tras 13 Myr.

3.6.1.2. Configuración 2 + 2

En este caso, que se corresponde con la Figura 3.42, asumiremos que la inclinación inicial de la órbita del exoplaneta es de 70° . Además trataremos dos subcasos: uno donde el cuarto cuerpo tiene masa estelar (Figura 3.43a), y otro donde tiene masa planetaria (Figura 3.43b).

- Si la masa del cuarto cuerpo es de $40 M_J$, sucede algo curioso: el mecanismo LK que apreciábamos en los casos anteriores parece *anularse* parcialmente, de manera que ni se aprecian cambios de orientación en la órbita ni periodos de tiempo donde la excentricidad se acerca a 1. Esto ocurre independientemente del semieje y de la inclinación de la órbita del cuarto cuerpo, de hecho en la Figura 3.53 el semieje de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al tercero es de 3 u.a. y la inclinación es de $0,5^\circ$ mientras que en la Figura 3.54 estos parámetros son 6 u.a. y 40° , respectivamente, y en ambos casos ocurre lo mismo. Esto implica que la presencia de un cuarto cuerpo con masa similar al tercer cuerpo *estabiliza* ligeramente la inclinación del planeta.

3.6.2. Caso del exosatélite

Asumiremos, para los primeros tres cuerpos, los mismos elementos orbitales que en el ejemplo de la Figura 3.39, y expondremos varios ejemplos dependiendo de la masa, excentricidad e inclinación de la órbita del cuarto cuerpo.

3.6.2.1. Problema de cuatro cuerpos totalmente jerarquizado

Cuando la inclinación inicial de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable es $0,5^\circ$, es decir, cercana a cero (Figuras 3.57, 3.58 y 3.59) no se aprecian cambios significativos, ni en la excentricidad ni en la inclinación, es decir, los ciclos LK que se apreciaban en el problema de tres cuerpos se mantienen prácticamente inalterados.

Si la inclinación inicial con respecto al cuarto cuerpo es, por el contrario, ligeramente mayor que cero; por ejemplo, como en la Figura 3.60, los ciclos LK sufren cambios drásticos. Hay periodos donde la excentricidad alcanza valores

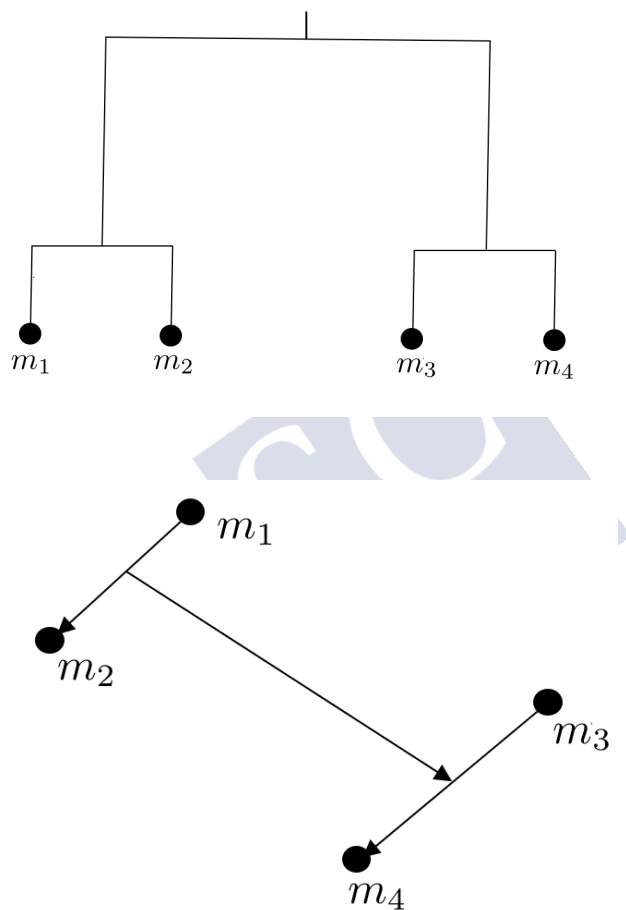


Figura 3.42: Esquema de la configuración $2 + 2$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

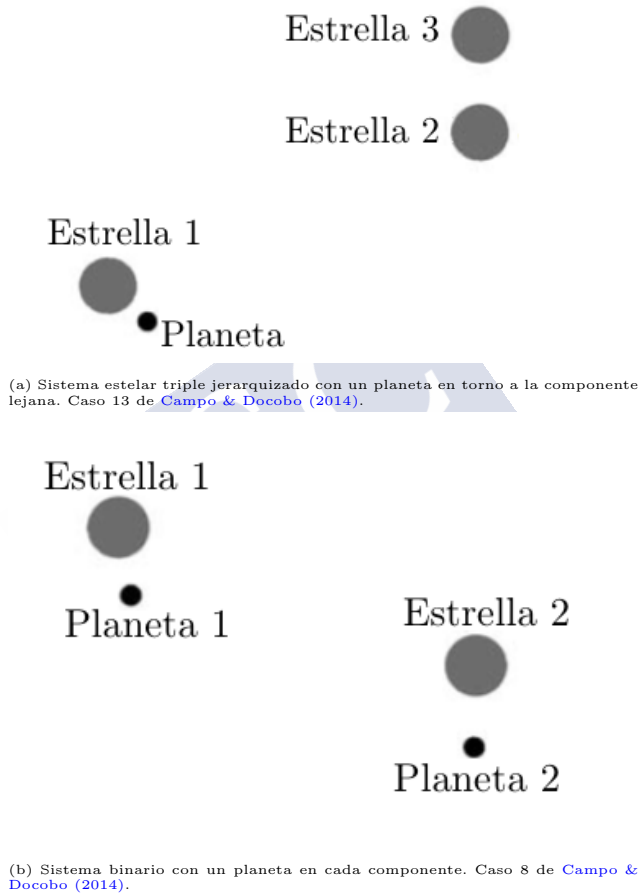
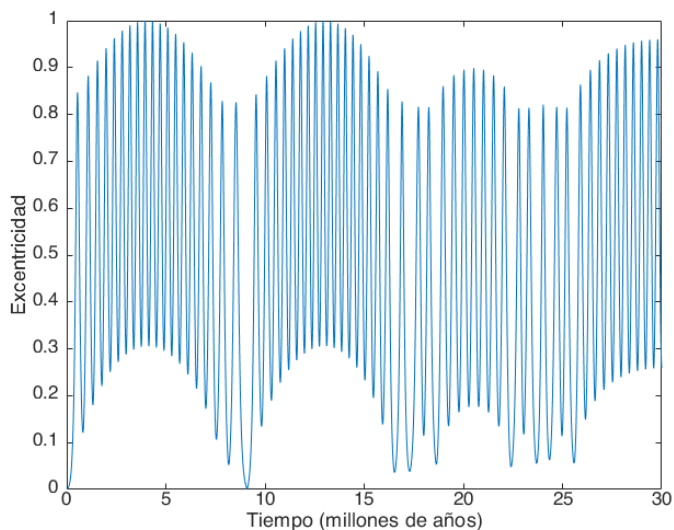
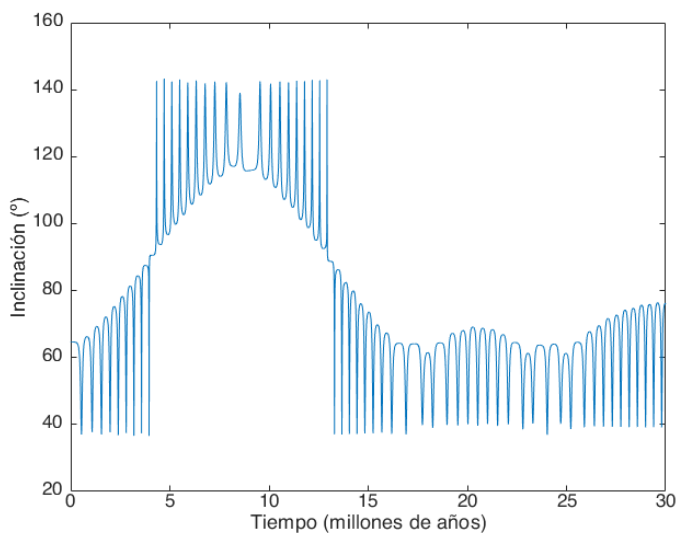


Figura 3.43



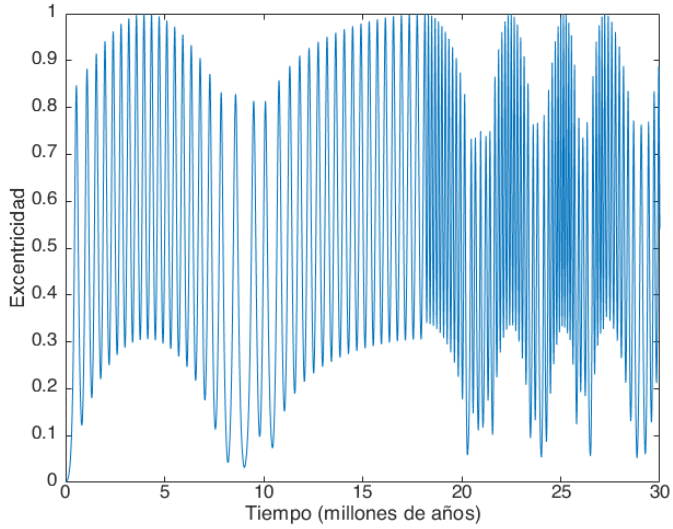
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



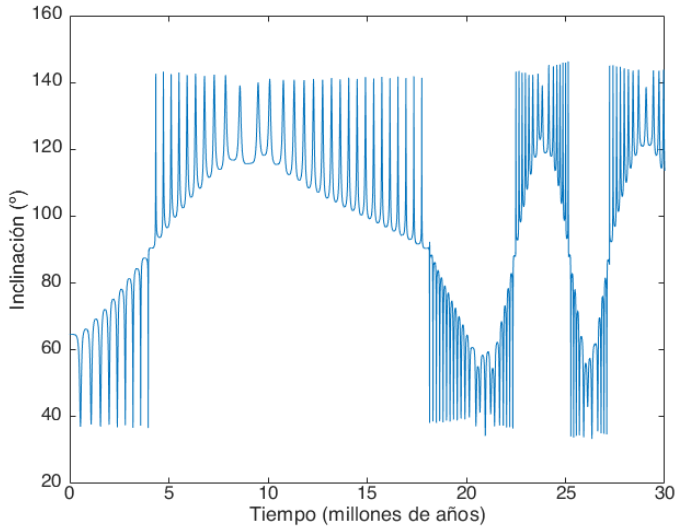
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.44: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 2500 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

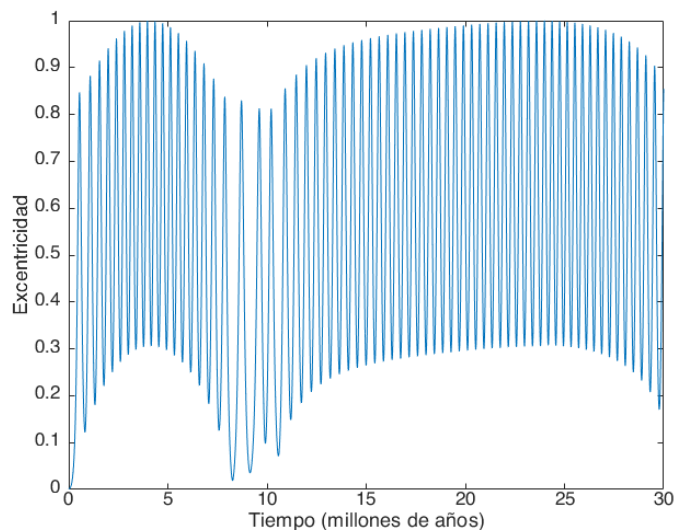


(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta

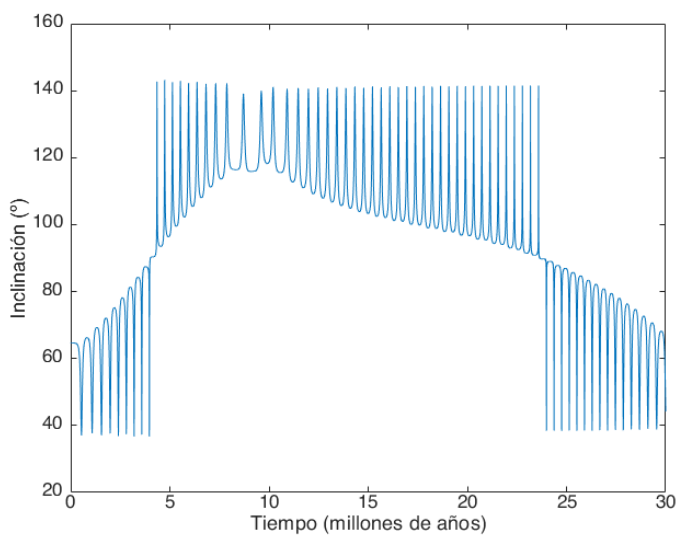


(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.45: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,2. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 2500 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.



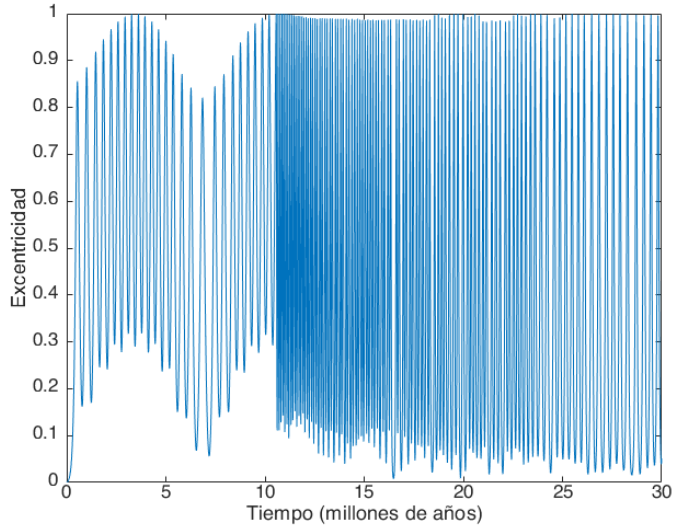
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



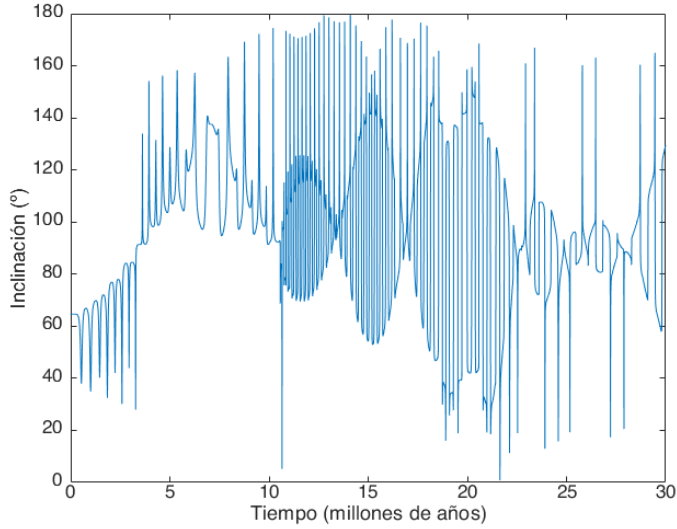
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.46: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,3. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 2500 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

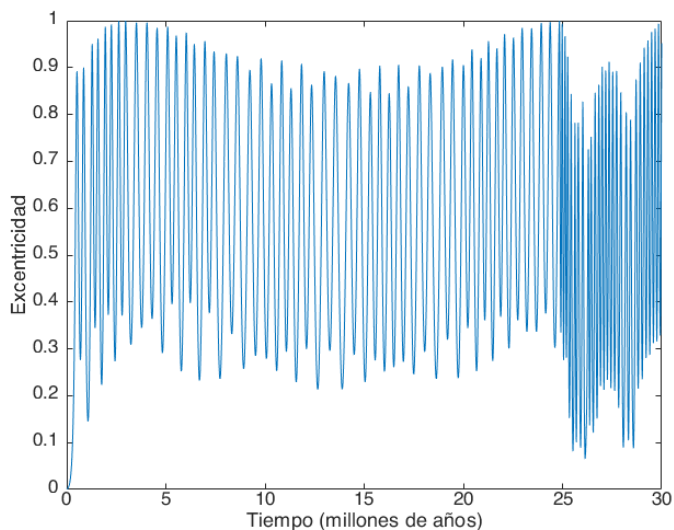


(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta

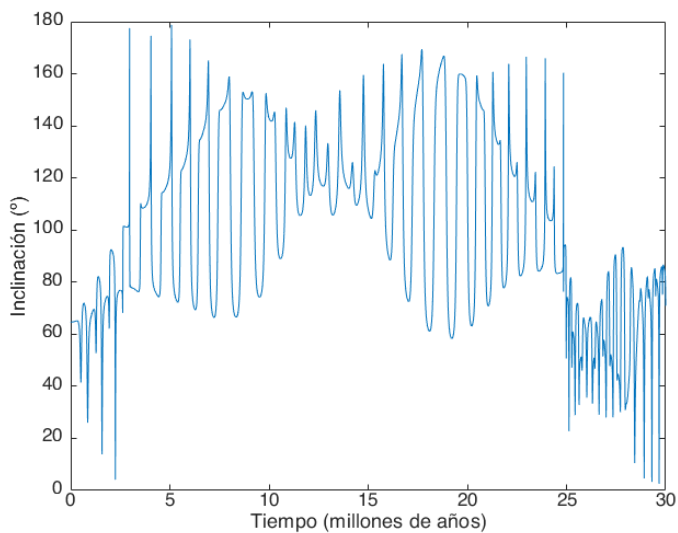


(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.47: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,2. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 20° . Semieje con respecto al centro de masas: 2500 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.



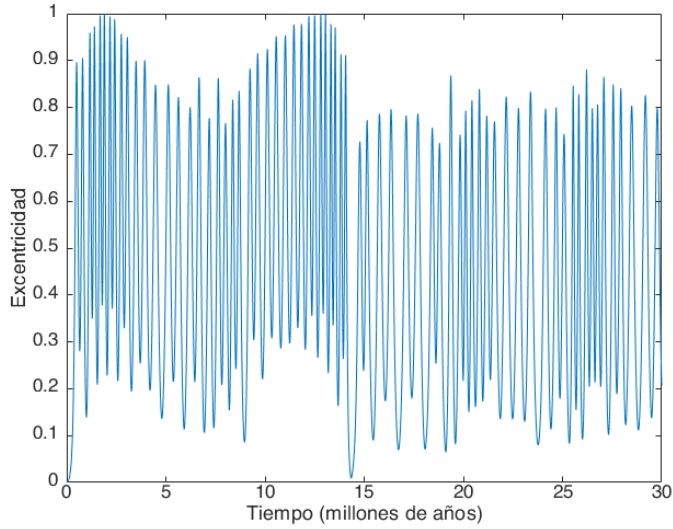
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



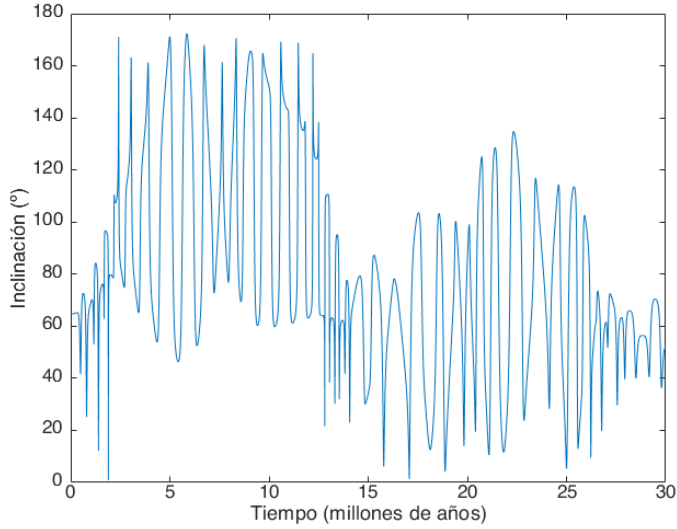
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.48: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,2. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 20° . Semieje con respecto al centro de masas: 2500 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $0,2 M_\odot$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

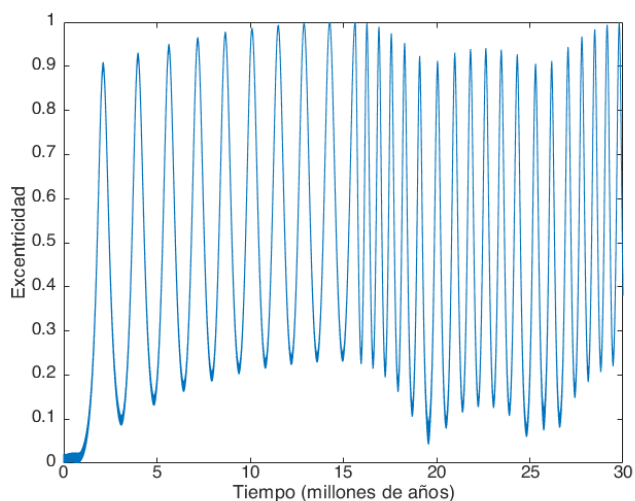


(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta

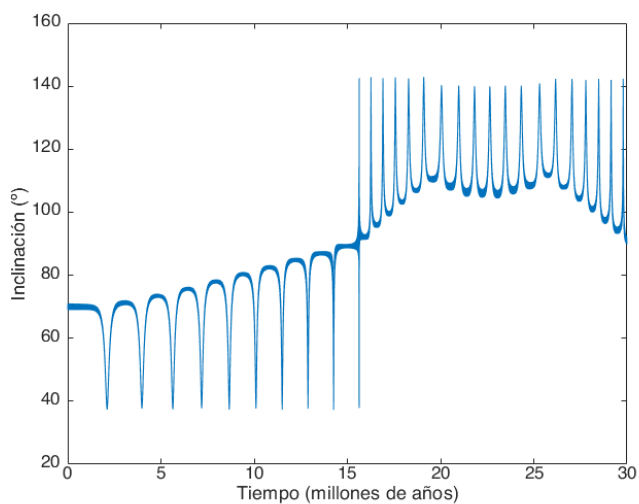


(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.49: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,2. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 30° . Semieje con respecto al centro de masas: 2500 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $0,2 M_\odot$.



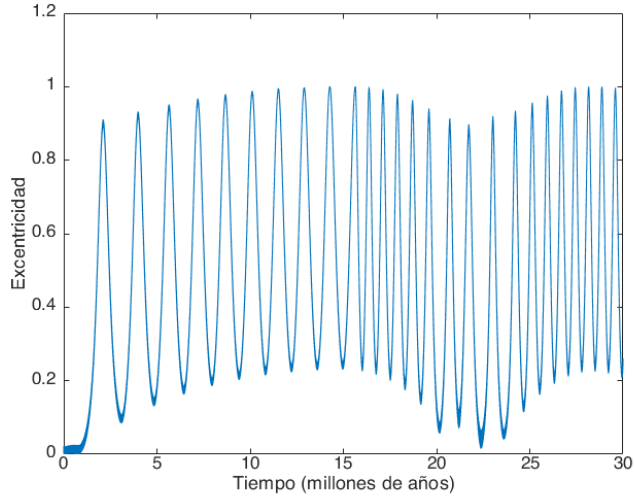
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



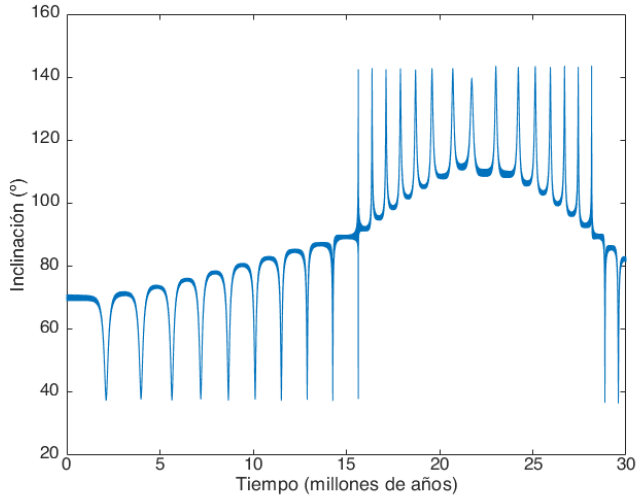
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.50: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto y tercer cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 150 u.a. $\Omega = 30^\circ$, $\omega = 0^\circ$. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Masa del cuarto cuerpo: $1 M_J$. Inclinación de la órbita del exoplaneta: 70° .

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

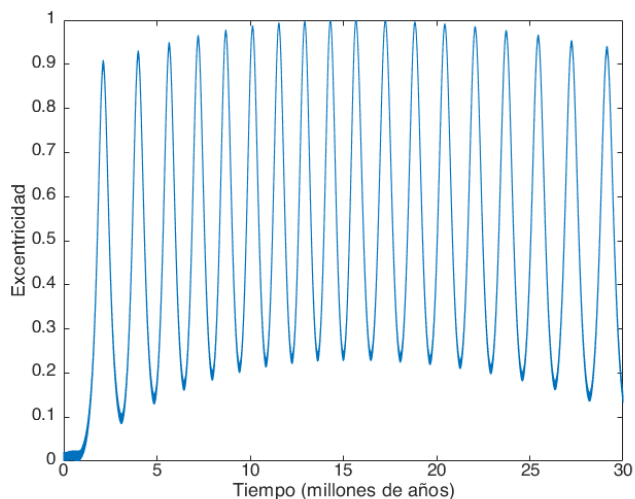


(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta

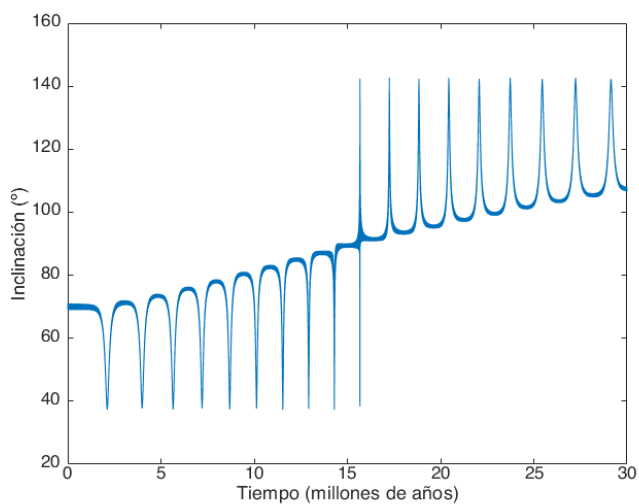


(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.51: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,1. Inclinación del cuarto y tercer cuerpo: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 150 u.a. $\Omega = 30^\circ$, $\omega = 0^\circ$. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 20° . Masa del cuarto cuerpo: $1 M_J$. Inclinación de la órbita del exoplaneta: 70° .



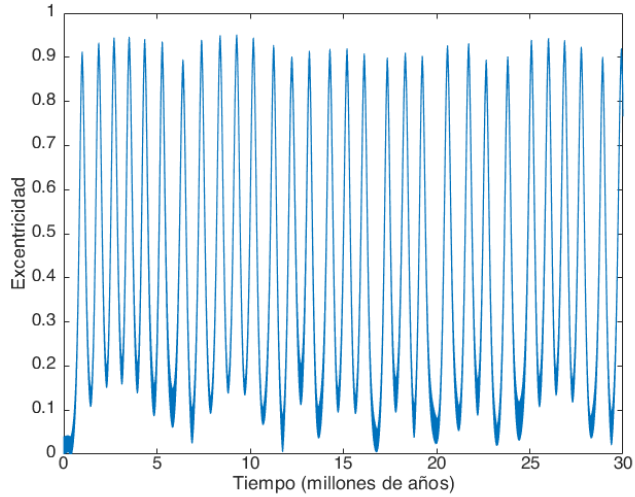
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



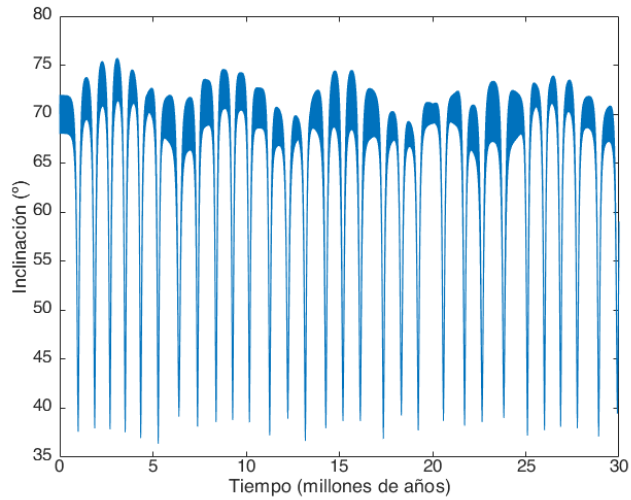
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.52: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,1. Inclinación del cuarto y tercer cuerpo: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 150 u.a. Semieje del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 1 u.a. $\Omega = 30^\circ$, $\omega = 0^\circ$. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 40° . Masa del cuarto cuerpo: $1 M_J$. Inclinación de la órbita del exoplaneta: 70° .

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

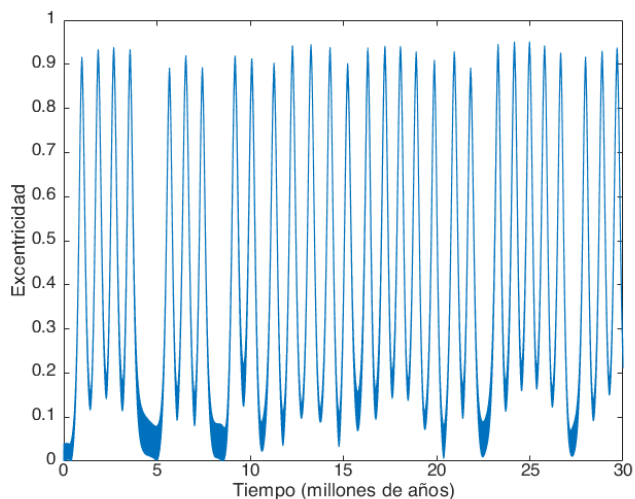


(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta

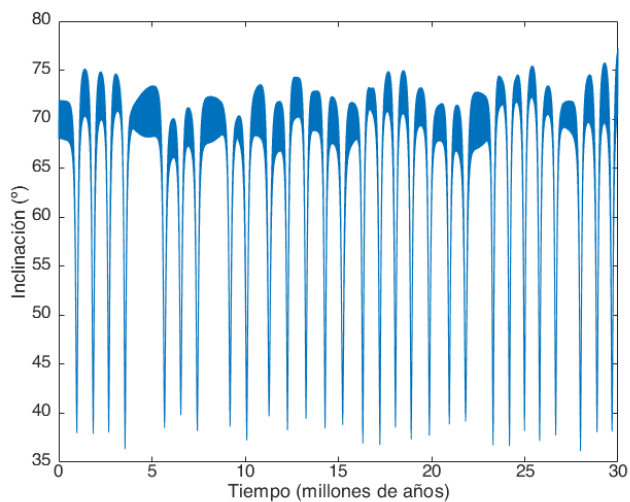


(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.53: Excentricidad de la órbita del cuarto cuerpo: 0,1. Inclinación del cuarto y tercer cuerpo: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 150 u.a. $\Omega = 30^\circ$, $\omega = 0^\circ$. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al tercero: $0,5^\circ$. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$. Inclinación de la órbita del exoplaneta: 70° .



(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.54: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación del cuarto y tercer cuerpo: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 150 u.a. Semieje del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 6 u.a. $\Omega = 30^\circ$, $\omega = 0^\circ$. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 40° . Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$. Inclinación de la órbita del exoplaneta: 70° .

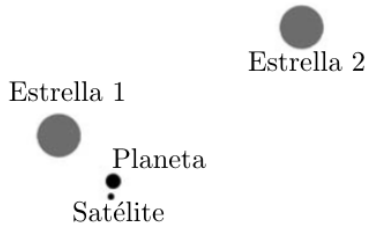


Figura 3.55: Estrella binaria con un planeta + satélite orbitando una componente de la binaria. Caso 7 de [Campo & Docobo \(2014\)](#).

cercanos a uno, y otros periodos más cortos donde la excentricidad alcance valores intermedios, 0,6, con pequeñísimas variaciones. La inclinación, por otro lado, sufre grandes oscilaciones, de 10 a 100 grados. Hemos comprobado que, si la inclinación inicial de la órbita del exosatélite es mayor que 10° , la órbita del exosatélite se torna inestable.

3.6.2.2. Configuración 2 + 2

Al igual que pasaba en el caso anterior, no se encuentran diferencias notables con respecto a los ciclos LK del problema de tres cuerpos cuando la órbita del cuarto cuerpo tiene inclinación cercana a cero (Figuras 3.61 y 3.62). Sin embargo, cuando inclinamos ligeramente esta órbita, notamos cómo la excentricidad llega a tomar valores cercanos a 1, además de grandes oscilaciones en la inclinación (Figuras 3.63 y 3.64).

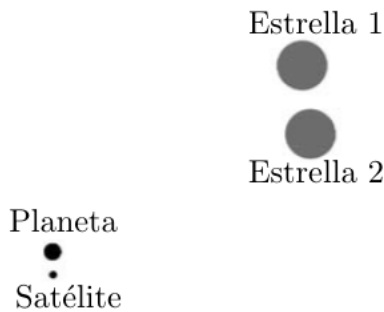


Figura 3.56: Estrella binaria con un planeta + satélite en órbita lejana orbitando el centro de masas de la binaria. Caso 10 de [Campo & Docobo \(2014\)](#).

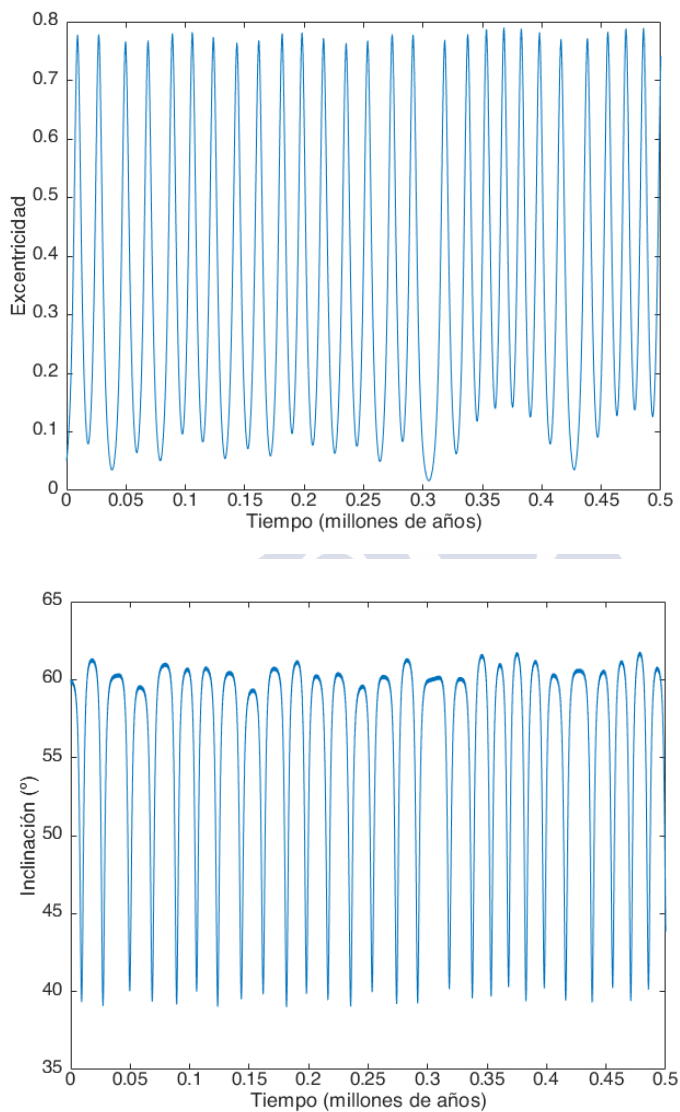


Figura 3.57: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 80 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $0,2 M_\odot$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

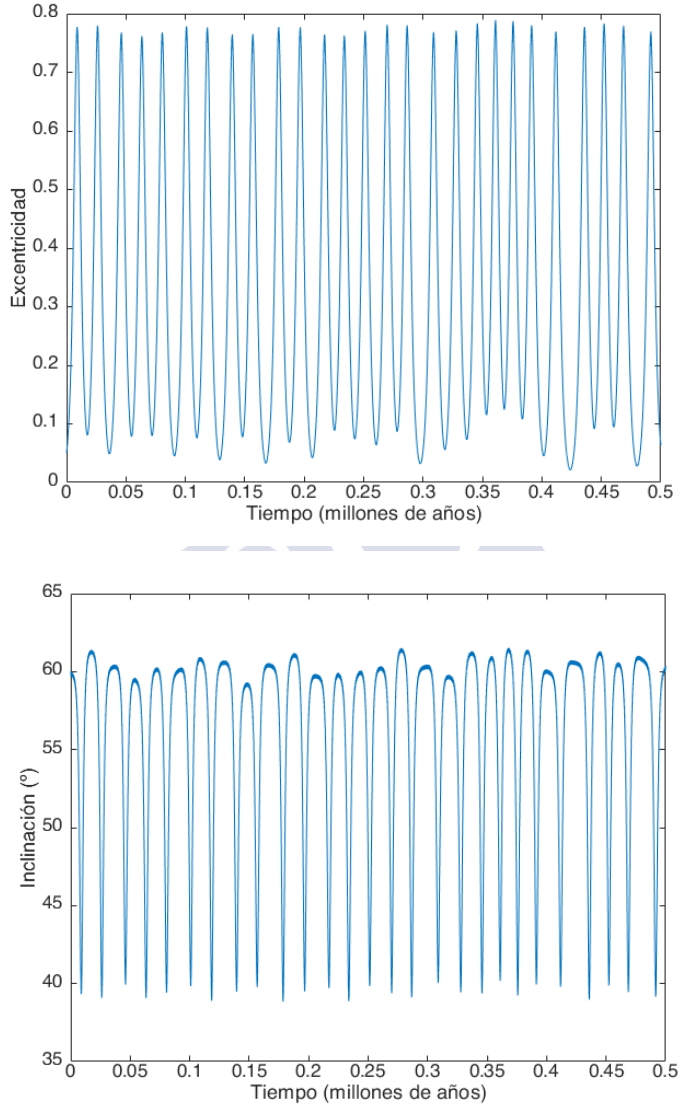


Figura 3.58: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,2. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 80 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $0,2 M_\odot$.

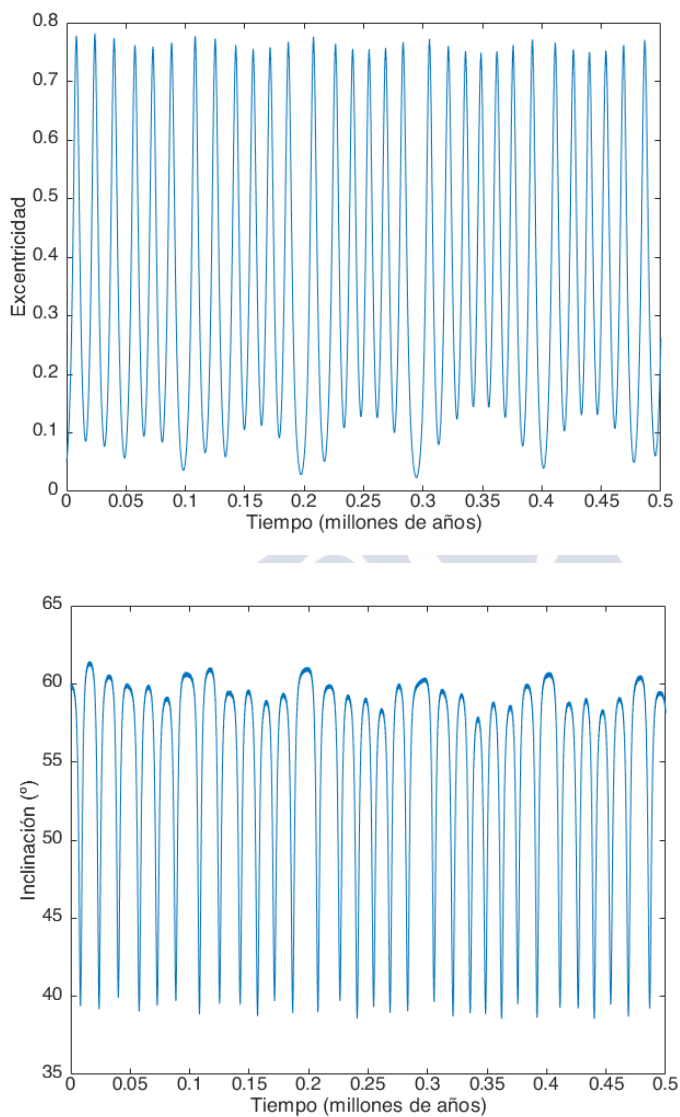


Figura 3.59: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,3. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas: 80 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $0,2 M_\odot$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

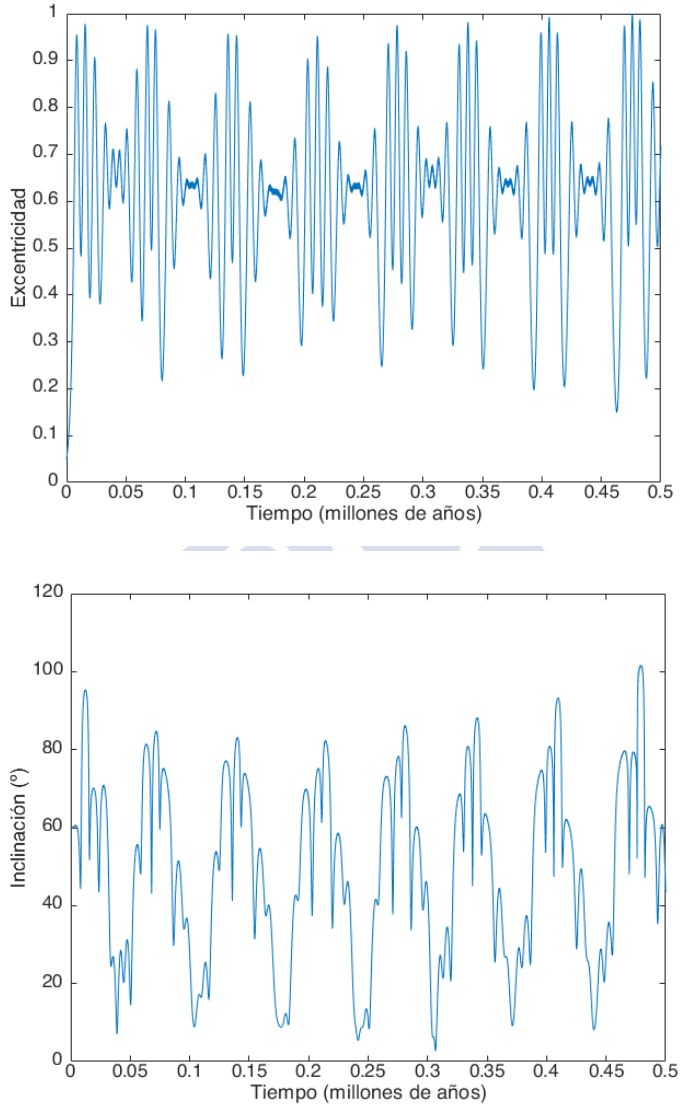
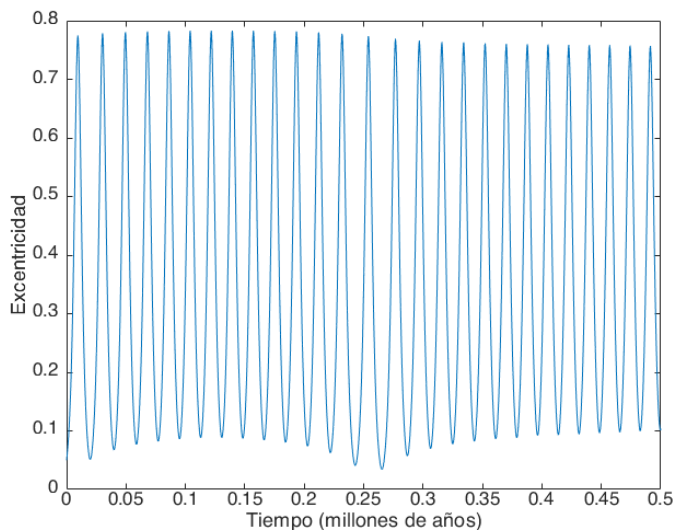
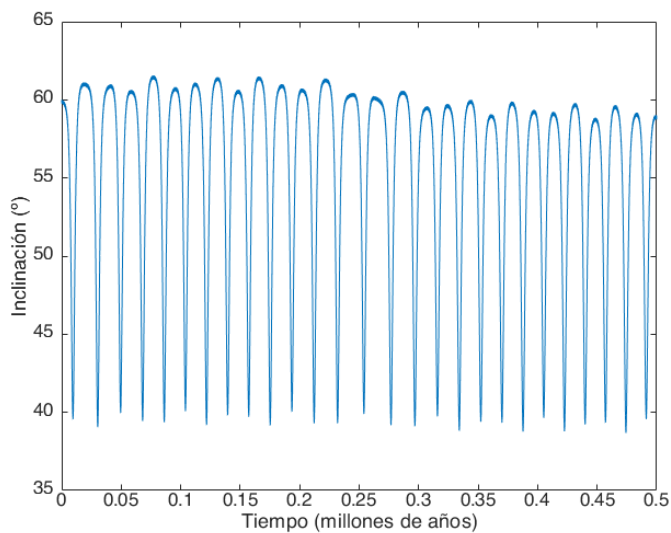


Figura 3.60: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 10° . Semieje con respecto al centro de masas: 80 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $0,2 M_\odot$.



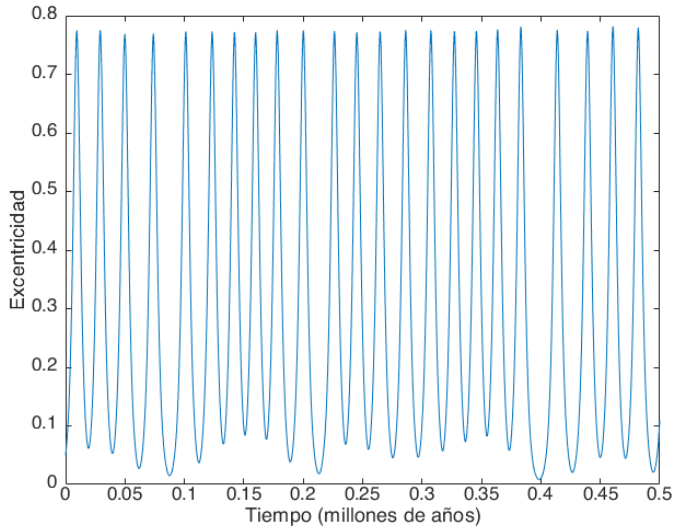
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



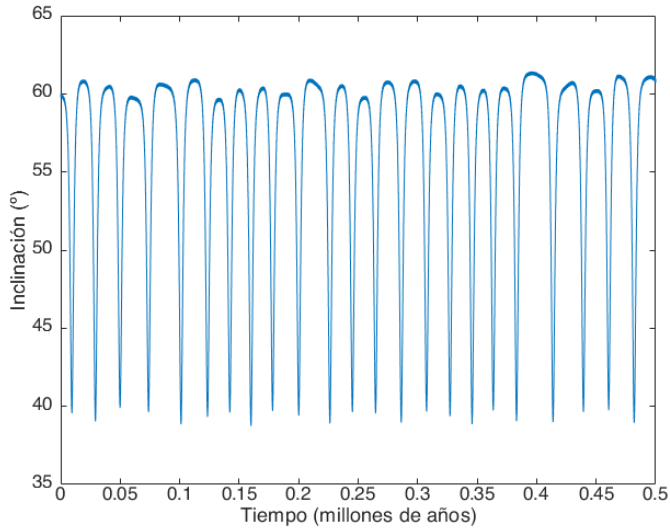
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.61: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas del tercer y cuarto cuerpo: 3 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas

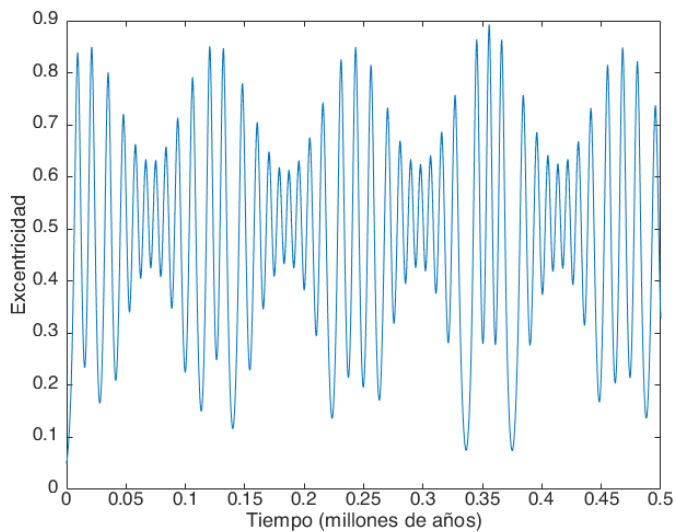


(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta

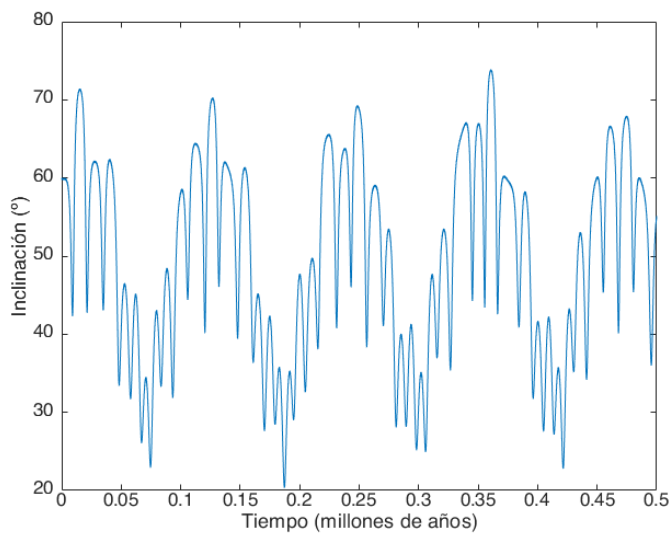


(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.62: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,3. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: $0,5^\circ$. Semieje con respecto al centro de masas del tercer y cuarto cuerpo: 3 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.



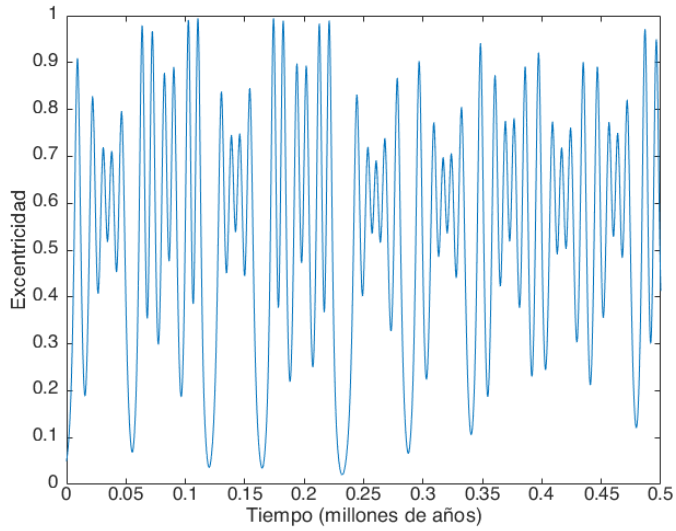
(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



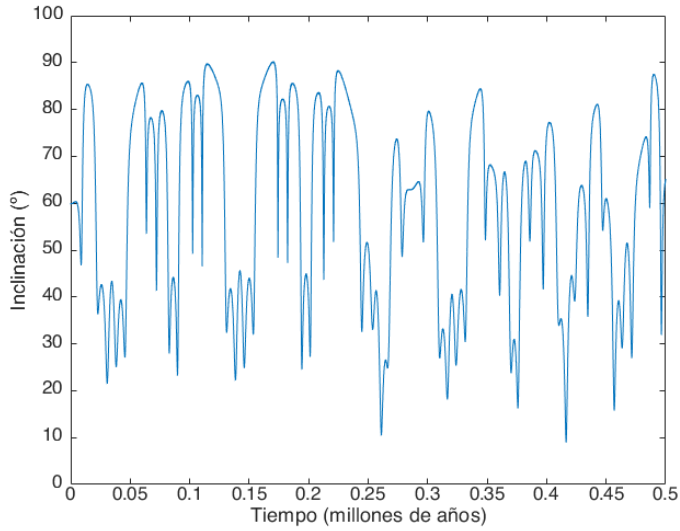
(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.63: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 10° . Semieje con respecto al centro de masas del tercer y cuarto cuerpo: 3 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.

Sección 3.6. Perturbaciones a largo plazo en órbitas inclinadas



(a) Excentricidad de la órbita del exoplaneta



(b) Inclinación de la órbita del exoplaneta

Figura 3.64: Excentricidad del cuarto cuerpo con respecto al tercero: 0,1. Inclinación de la órbita del cuarto cuerpo con respecto al plano invariable: 30° . Semieje con respecto al centro de masas del tercer y cuarto cuerpo: 3 u.a. Masa del cuarto cuerpo: $40 M_J$.

3.7. Comentarios al Capítulo 3

De lo estudiado en este Capítulo podemos concluir que:

1 - En sistemas de una sola estrella, no se espera la presencia de exosatélites en torno a exoplanetas con órbitas de excentricidad alta.

2 - Las fuerzas de marea pueden afectar tanto a exoplanetas como a exosatélites, y dependiendo de su movimiento medio y del periodo de rotación del cuerpo alrededor del cual orbitan (estrellas y exoplanetas, respectivamente), pudiendo disminuir o aumentar el semieje de sus órbitas. Debido a los largos periodos de tiempo necesarios para que se aprecien cambios relevantes, la presencia de otro cuerpo puede compensar este efecto de marea, haciendo oscilar tanto al semieje como a la excentricidad.

3 - En sistemas binarios (dos estrellas), el factor que más influye sobre la estabilidad de la órbita de los exoplanetas, aparte del semieje, es la excentricidad de la binaria. Además, los exosatélites sufren menos alteraciones en sus órbitas que los exoplanetas.

4 - En sistemas de tres estrellas, cuanto mayor sea la masa de la estrella lejana, mayores serán las perturbaciones en las órbitas de los exoplanetas cuando estas son de tipo S1/S2 ó P1. Sí, por el contrario, dicha masa es pequeña, las perturbaciones serán mayores en las órbitas tipo S3.

5 - Las órbitas S3 cuentan con una región de estabilidad mayor que las de tipo S1/S2.

6 - La masa de la tercera estrella influye enormemente en la estabilidad de los planetas con órbitas tipo P1. De hecho, cuando ésta es igual a la del Sol, este tipo de órbitas sólo son posibles cuando la tercera estrella se encuentra muy alejada de la binaria interior. Además, incluso cuando las órbitas de estos planetas son “estables”, pueden sufrir cambios extremos en su órbita. Por otro lado, los exosatélites de los exoplanetas con órbita tipo P1 tienen una órbita mucho más estable y con cambios mucho menos pronunciados en su excentricidad y semieje.

7 - El exosatélite, *por lo general*, sufre menos alteraciones en su órbita que el exoplaneta.



Capítulo 4

Habitabilidad

El objetivo de todo descubrimiento exoplanetario es, en última instancia, llegar a conocer la naturaleza de los mundos que existen más allá del Sistema Solar. Aquí, en la Tierra, contamos con el sistema más químicamente diverso de todo el Universo conocido: miles de especies de plantas y animales, muchas de ellas con una gran complejidad celular y con un diverso sistema de especialización, y millones de moléculas orgánicas, es decir, moléculas que constan de carbono (C), oxígeno (O), hidrógeno (H), nitrógeno (N), fósforo (P) o azufre (S), se combinan para dar lugar al amplio abanico de biodiversidad que tenemos en nuestro planeta. La *biosfera*, o sea, el sistema formado por el conjunto de organismos vivos de la Tierra, actúa de manera bidireccional sobre su litosfera y su atmósfera, influenciándose recíprocamente. Por ejemplo, las cianobacterias suplieron de oxígeno la atmósfera de la Tierra hace 2,4-2,1 Gyr, incrementando la concentración de O₂ atmosférico hasta un 0,1-10 % la concentración actual ([Hamilton et al. 2016](#)). Para la existencia de vida, además, es crucial la existencia de una *hidrosfera*, o sea, un sistema de grandes masas de agua líquida superficial (océanos, ríos, etc.), que permita llevar a cabo todas las reacciones químicas necesarias para su sostenibilidad. La **Astrobiología** es la ciencia que se encarga de estudiar la vida en el Universo, ya sea en planetas, satélites o mismo asteroides o cometas, y engloba disciplinas tanto de Biología como de Física, Química, Geología, Matemáticas y Astronomía.

Podemos asegurar, por tanto, que un exoplaneta que cuente con la presencia de vida es interesante desde el punto de vista de todas estas ciencias mencionadas, puesto que un planeta que permita el desarrollo de vida necesitará, como veremos a lo largo de este Capítulo, características orbitales

especiales.

La exploración espacial es el método más fiable y más completo que existe para la búsqueda de vida extraterrestre. En el Sistema Solar, la exploración no tripulada ha demostrado gran eficacia en la búsqueda de vida en los cuerpos del Sistema Solar, tanto en los planetas rocosos (Mercurio, Venus y Marte) como en los satélites de los gigantes gaseosos (Europa, Ganímedes, Calisto, Titán...) o en los planetas enanos (Plutón). La tecnología con la que contamos hoy en día para la detección de vida en exoplanetas y exosatélites se encuentra, por otro lado, en fases muy tempranas de desarrollo, y las inmensas distancias entre las estrellas hacen imposible la exploración espacial fuera del Sistema Solar. Debido a ello, abordaremos, entre otras cosas, las técnicas propuestas para la caracterización de atmósferas y océanos de exoplanetas y exosatélites (Sección 4.4), con el objetivo de estudiar su habitabilidad.

4.1. Definición de *habitabilidad*

Entendemos *habitabilidad* como la capacidad que tiene un exoplaneta o exosatélite de sostener vida, y ésta se asocia con la presencia de agua líquida en su superficie. La importancia del agua líquida es crucial ya que es un disolvente, es decir, un catalizador de reacciones químicas en el cual todos los procesos bioquímicos conocidos tienen lugar. Se cree que pueden existir otros disolventes en donde dichos procesos sean viables, tales como el amoníaco líquido, el metano, el etano, el formaldehído o incluso el ácido sulfúrico (Benner et al. 2004; Schulze-Makuch & Irwin 2006), pero como sólo tenemos evidencias de la vida en la Tierra, asumiremos que el agua en su fase líquida es el ingrediente indispensable para la presencia de vida¹.

Para estudiar la presencia de agua líquida en un exoplaneta/exosatélite, hay varios factores a tener en cuenta, tales como las características **físicas** (temperatura, masa, radio, campo magnético, etc.) o **dinámicas** (periodo orbital, periodo de rotación, excentricidad, fuerzas de marea, etc.) del estrella,

¹Existen otros requerimientos para la existencia de vida, como son los elementos químicos que componen las macromoléculas presentes en los organismos vivos (C, H, O, N, P, S), una fuente de energía suficiente como para permitir la formación de moléculas orgánicas a partir de otras inorgánicas u otros factores físico-químicos como el pH (véase Hoehler 2007); sin embargo, todos estos requerimientos se cumplen con frecuencia en los planetas y satélites de nuestro Sistema Solar, mientras que la presencia de agua líquida superficial no ha sido aún confirmada salvo en nuestro planeta, por lo tanto éste es un factor sumamente *limitante* y, por ello, definitorio de la habitabilidad. (Meadows & Barnes 2018)

planeta y satélite, pero también **temporales**, puesto que la habitabilidad puede ser **puntual** en el tiempo; como el caso de Marte, el cual se sabe desde hace tiempo que perdió toda su agua superficial en el pasado, o **continuada**, como el caso de la Tierra (Cockell et al. 2016).

A continuación introduciremos el concepto de **zona habitable** como una cierta restricción sobre la órbita de un planeta con respecto a su estrella, la cual permite al planeta mantener agua líquida en su superficie.

4.2. Zona habitable (HZ)

Varios autores han tratado de establecer, a lo largo de los años, un criterio por el cual definir el concepto de *zona habitable* (Huang 1959a,b, 1960; Dole 1964; Hart 1979; Kasting et al. 1993; Kasting 1996; Kasting 1997; Franck et al. 2000; González 2005; Kasting 2008; Lammer et al. 2009a; Dobos et al. 2013; Kopparapu et al. 2013a,b). Huang (1959a) fue el primero de ellos, definiéndola como la región del espacio en torno a la estrella en la cual el flujo de energía recibido por el planeta no es ni muy grande ni muy pequeño. Más tarde Dole (1964) concretaría la zona habitable como la región en la que un planeta tiene al menos un 10% de la superficie con una temperatura media entre 0 y 30°, de manera que nunca baja de -10° ni nunca sube de 40°. Otros autores, posteriormente, optaron por definir la zona habitable como la región en la cual un planeta tipo Tierra es capaz de mantener agua líquida en su superficie (por ejemplo, Rasool & DeBergh 1970; Hart 1978, 1979). Debido a que esta definición es la que más se ajusta al criterio de habitabilidad que hemos establecido (véase la Sección anterior), asumimos que éste es el criterio más acertado para hablar de la zona habitable.

A día de hoy, 60 exoplanetas han sido descubiertos en la zona habitable (<http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog>).

4.2.1. Límites de la zona habitable: límite interior (IHZ) y exterior (OHZ)

La forma de determinar la zona habitable es por medio del cálculo de los límites interior (IHZ) y exterior (OHZ) de la región en la cual está definida. Asumiremos que la estrella es de tipo solar, y en la Sección siguiente generalizaremos este procedimiento para cualquier estrella de la secuencia principal.

La manera de calcular estos límites tiene que ver con el cálculo del *flujo efectivo de la estrella incidente en el planeta*, $S_{eff\odot}$. Se define como el cociente entre el flujo infrarrojo total emitido (F_{IR}) y el flujo total absorbido por el planeta (F_{SOL}). Ambos son medidos en la parte superior de la atmósfera (por ejemplo, [Kopparapu et al. 2014](#)):

$$S_{eff\odot} = \frac{F_{IR}}{F_{SOL}}. \quad (4.1)$$

Así mismo, el albedo planetario² A_p se obtiene mediante la siguiente fórmula ([Kasting et al. 1993](#)):

$$A_p = 1 - \frac{4F_{SOL}}{S_0}, \quad (4.2)$$

siendo S_0 el flujo constante recibido en la Tierra: 1360 W m^{-2} .

Se cumple que

$$S_{eff\odot} = \frac{S}{S_0}, \quad (4.3)$$

con S el flujo solar incidente en el planeta. Por tanto, el $S_{eff\odot}$ de la Tierra es 1. El $S_{eff\odot}$ se interpreta como el flujo solar necesario para mantener una cierta temperatura superficial en un planeta (Figura 4.1), por lo que se buscan ciertos modelos que expliquen cómo varía $S_{eff\odot}$ en función de los valores de temperatura y presión, tanto superficiales como atmosféricos. Diversos modelos han sido propuestos en la literatura ([Yang et al. 2013](#); [Wordsworth et al. 2010, 2013](#); [Kopparapu et al. 2013b](#); [Kasting et al. 1993](#); [Kasting 1988](#), etc.). Nosotros utilizaremos el modelo unidimensional radiativo-convectivo libre de nubes utilizado en [Kopparapu et al. \(2013b\)](#), el cual se basa a su vez en [Kasting \(1988\)](#) para el IHZ y en [Kasting \(1991\)](#) para el OHZ³.

Ahora, una vez escogido el modelo para calcular $S_{eff\odot}$, necesitamos determinar los criterios por los cuales delimitaremos el IHZ y el OHZ.

²Nótese que, debido a que F_S se mide en la parte superior de la atmósfera, se toma como referencia la atmósfera, no la superficie de la Tierra. Esto, aunque puede parecer a primera vista contraintuitivo, es bastante razonable ya que la mayor parte del albedo planetario (88 %) se debe a la acción de la atmósfera. De hecho, la atmósfera reduce la contribución de la superficie al albedo planetario por un factor de aproximadamente 3 ([Donohue & Battisti 2011](#)).

³El modelo completo de un planeta con nubes puede verse en [Selsis et al. \(2007\)](#); [Colaprete & Toon \(2003\)](#) ó [Zsom et al. \(2012\)](#).

Para el IHZ, tenemos tres criterios:

- **Invernadero húmedo** (*Moist greenhouse*). Con este criterio, el IHZ se toma cuando la evaporación del agua del planeta es lo suficientemente grande como para que la concentración del vapor de agua de la estratosfera se vuelve tal que se supera el *coldtrapping*⁴ del agua, lo que hace que, por fotodisociación, el hidrógeno se escape al espacio (es decir, se produzca pérdida de agua). Este es el criterio más conservador, puesto que asume que la zona de habitabilidad se sobrepasa justo cuando se produce una pérdida gradual de agua en el planeta.

- **Invernadero “desbocado”** (*Runaway greenhouse*). Aquí, el IHZ se toma cuando se produce una evaporación *total* de los océanos.

- **Venus reciente**. Este criterio es empírico y se basa en que Venus pudo haber mantenido agua en su superficie hace, al menos, 1 Gyr (Solomon & Head 1991). Hoy en día, debido al aumento de la luminosidad del Sol en un 8%, Venus es incapaz de mantener agua líquida en su superficie (Baraffe et al. 1998; Bahcall et al. 2001). Sin embargo, resulta importante recalcar la existencia de este límite puesto que puede que existan exoplanetas que estén en condiciones parecidas a las del Venus reciente. Es el límite interior más optimista.

Por otro lado, para el OHZ tenemos otros dos:

- **Invernadero máximo** (*Maximum greenhouse*). Este límite se toma como la máxima distancia en la cual el efecto invernadero producido por la concentración de CO₂ en la atmósfera es suficientemente fuerte como para mantener una temperatura superficial de 0°.

- **Marte reciente**. Este límite se basa, análogamente al Venus reciente, en la posibilidad de que Marte pudo albergar agua líquida superficial en el pasado (Pollack et al. 1987; Bibring et al. 2006). Corresponde al límite exterior más optimista.

⁴Se llama *coldtrapping* al proceso mediante el cual el vapor de agua de la atmósfera queda atrapado en las capas bajas debido a su condensación en forma de nubes, por lo que no se produce pérdida de agua puesto que la fotodisociación del H₂O tiene lugar en las capas altas, como la estratosfera (https://evolutionnews.org/2014/05/the_cold_trap_h/). Cuando la concentración del vapor de agua es abundante, este proceso no es capaz de sostenerlo en las capas bajas, y se produce la pérdida de agua.

El cálculo de ambos IHZ y OHZ se hace asumiendo que el planeta consta de una atmósfera compuesta por nitrógeno (N_2), vapor de agua (H_2O) y dióxido de carbono (CO_2). La presión parcial⁵ del nitrógeno se fija a 1 bar.

El *moist greenhouse* se alcanza cuando la temperatura superficial es de 340 K, es decir, $S_{eff\odot} = 1,02$ (Figura 4.1). Se toma esta temperatura ya que es el valor donde la concentración de agua en la atmósfera aumenta drásticamente, de 0,02 cuando la temperatura es de 320 K a 0,1 cuando llega a los 340 K (Figura 4.2). Para el *runaway greenhouse*, se toma el valor de la curva cuando se torna constante ($S_{eff\odot} = 1,06$), puesto que dicha estabilización tiene lugar al haberse evaporado todo el agua superficial.

Ahora que tenemos los $S_{eff\odot}$ calculados, podemos obtener el IHZ mediante la relación (por ejemplo, [Kasting et al. 1993](#)):

$$d = \frac{1}{\sqrt{S_{eff\odot}}} \text{u.a.}, \quad (4.4)$$

Para el *moist greenhouse*, IHZ = 0,99 u.a.

Para el *runaway greenhouse*, IHZ = 0,97 u.a.

Por otro lado, el *maximum greenhouse* corresponde a la distancia máxima en la cual la concentración de CO_2 permite mantener una temperatura superficial de 0° , por lo que tendremos que encontrar el valor máximo de d (Ecuación (4.4)), o lo que es lo mismo, el valor mínimo de $S_{eff\odot}$ cuando fijamos la temperatura superficial a 0° . Según la Figura 4.3, el mínimo se alcanza, aproximadamente, cuando $S_{eff\odot} = 0,34$, por lo que el OHZ será, por (4.4), igual a $d = 1,71$ u.a.

Así, para un planeta tipo Tierra que orbita una estrella tipo solar, si asumimos límites conservadores (*moist greenhouse* y *maximum greenhouse*), obtendremos como límite inferior de la zona habitable 0,99 u.a. y, como límite exterior, 1,71 u.a.

En cuanto al Marte y Venus reciente, sus estimaciones son mucho más directas. Para el caso del Marte reciente, si tenemos en cuenta de que existen

⁵Se define *presión parcial* para un cierto compuesto químico como la presión de dicho compuesto si él solo ocupase el volumen de toda la mezcla, la cual es, en este caso, la atmósfera.

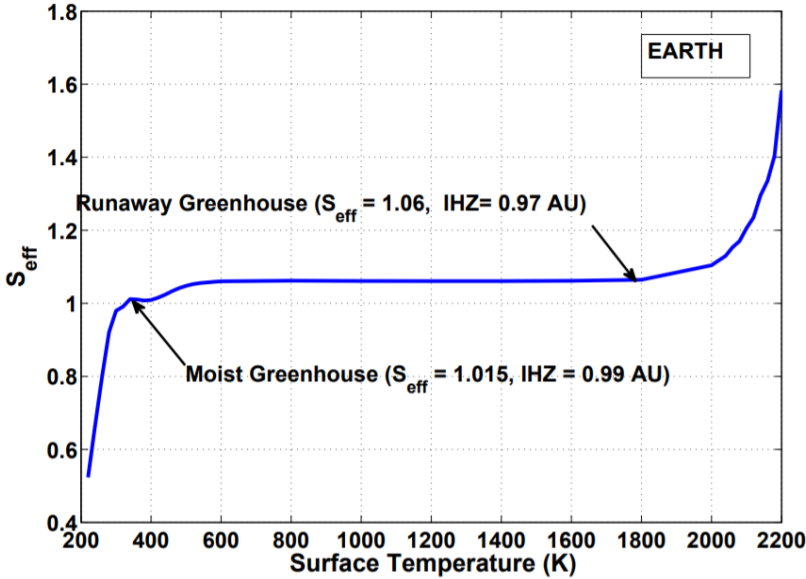


Figura 4.1: Gráfica de $S_{eff\odot}$ en función de la temperatura superficial (Kopparapu et al. 2013b). Esta gráfica indica el $S_{eff\odot}$ necesario para sostener una cierta temperatura superficial.

evidencias que apuntan a que pudo tener agua hace 3,8 Gyr (por ejemplo, Pham & Karatekin 2016), su $S_{eff\odot}$ en aquella época debería ser tal que permitiese el agua líquida en su superficie.

¿Y cómo calculamos el $S_{eff\odot}$ de Marte de hace 3,8 Gyr? Si denotamos d como la distancia media de Marte al Sol y asumimos que estaba a la misma distancia d que hoy en día, podemos igualar d al semieje de su órbita, el cual es $a = 1,52$ u.a. Entonces, por (4.4), $S_{eff\odot} = 0,43$. Sin embargo, este no es el valor verdadero del flujo efectivo solar en el Marte de hace 3,8 Gyr, puesto que en ese entonces la luminosidad del Sol era diferente, del orden de un 75 % la de hoy en día (Gough 1981; Bahcall et al. 2001). Por ello, tenemos que multiplicar el flujo incidente S por 0,75 y, por (4.3), también el $S_{eff\odot}$. Por lo tanto, el $S_{eff\odot}$ de Marte hace 3,8 Gyr era igual a $0,43 \times 0,75 \approx 0,32$.

Utilizando (4.4) de nuevo, hallamos el OHZ para el Marte reciente:

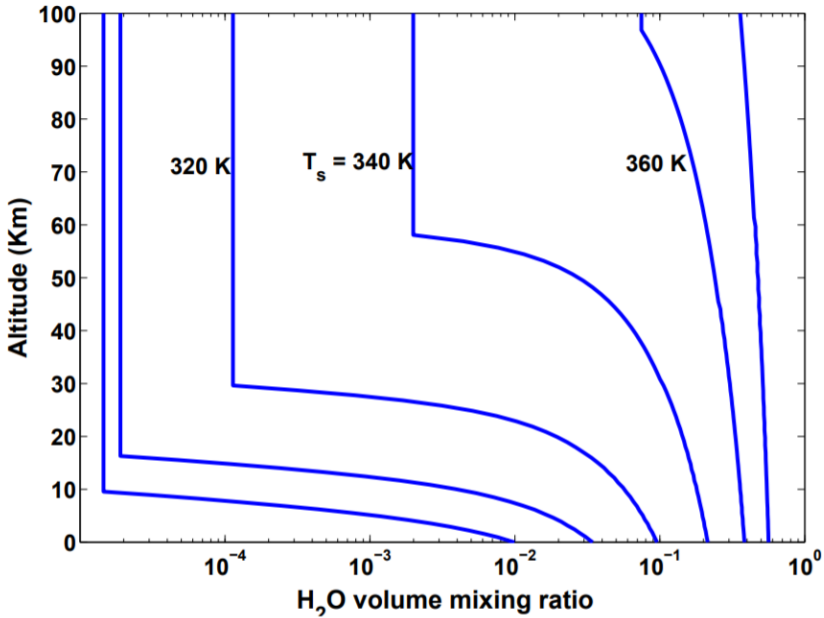


Figura 4.2: Gráfica de la abundancia del vapor de agua en la atmósfera frente a la altitud, para cada valor de la temperatura superficial T_s (Kopparapu et al. 2013b).

$$\text{OHZ} = \frac{1}{\sqrt{0,32}} \approx 1,76 \text{ u.a.} \quad (4.5)$$

Para el Venus reciente se procede de manera totalmente análoga. Asumimos que Venus perdió su agua superficial hace mucho menos tiempo (1 Gyr), siendo por aquel entonces la luminosidad del Sol del orden de 92 % la actual (Baraffe et al. 1998; Bahcall et al. 2001), y que su distancia al Sol es (de nuevo, asumiendo órbitas circulares), igual a 0,72 u.a. Obtenemos así $\text{IHZ} = 0,75 \text{ u.a.}$

De esta forma, los límites “optimistas” de la zona habitable de una estrella tipo solar son 0,75 u.a. y 1,76 u.a.

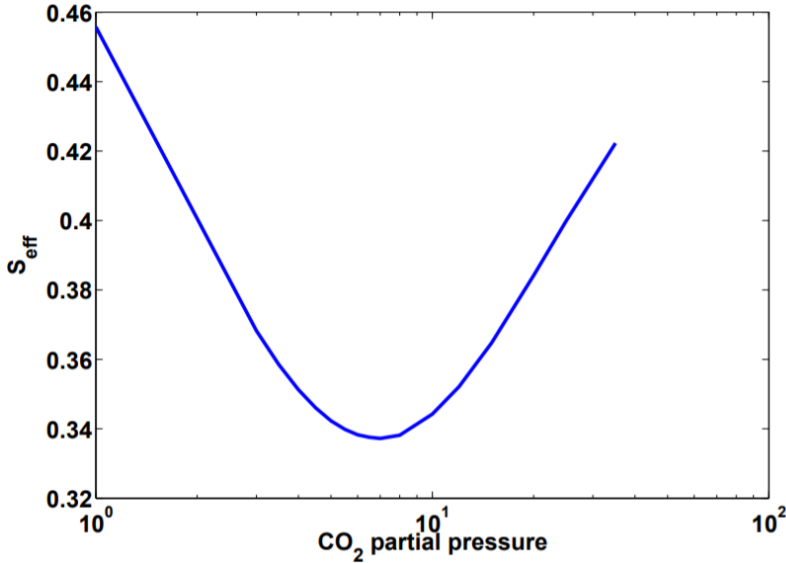


Figura 4.3: Gráfica de $S_{eff\odot}$ en función de la presión atmosférica parcial del CO_2 (Kopparapu et al. 2013b).

4.2.2. Zona habitable para estrellas de la secuencia principal

Ahora que hemos estimado la zona habitable para estrellas tipo solar, es relativamente sencillo calcularla para estrellas de otros tipos espectrales, como K, F ó M. El procedimiento se basa en el cálculo de S_{eff} para cada caso, el cual viene dado mediante la fórmula (por ejemplo, Kasting et al. 1993):

$$S_{eff} = S_{eff\odot} + aT_* + bT_*^2 + cT_*^3 + dT_*^4, \quad (4.6)$$

con $T_* = T_{eff} - 5780$ K, siendo T_{eff} la temperatura efectiva de la estrella, y a, b, c, d ciertos coeficientes que varían dependiendo del tipo espectral de la estrella y del criterio elegido (*moist greenhouse*, *runaway greenhouse*, etc.). En la Tabla 4.1 se especifica el valor de cada uno de estos coeficientes.

Por ejemplo, para una estrella M4, cuya temperatura efectiva es del orden de unos 3100 K de media, S_{eff} sería igual a 0,8578 para el *moist greenhouse*, y 0,2341 para el *runaway greenhouse*.

Para calcular el IHZ y el OHZ asociados a estos S_{eff} , no podemos utilizar (4.4) ya que la estrella no es tipo solar. En su lugar usaremos la siguiente:

$$d = \sqrt{\frac{L/L_{\odot}}{S_{eff}}}, \quad (4.7)$$

	Recent Venus	Runaway Greenhouse	Moist Greenhouse	Maximum Greenhouse	Early Mars
$S_{eff\odot}$	1.7763	1.0385	1.0146	0.3507	0.3207
a	1.4335×10^{-4}	1.2456×10^{-4}	8.1884×10^{-5}	5.9578×10^{-5}	5.4471×10^{-5}
b	3.3954×10^{-9}	1.4612×10^{-8}	1.9394×10^{-9}	1.6707×10^{-9}	1.5275×10^{-9}
c	-7.6364×10^{-12}	-7.6345×10^{-12}	-4.3618×10^{-12}	-3.0058×10^{-12}	-2.1709×10^{-12}
d	-1.1950×10^{-15}	-1.7511×10^{-15}	-6.8260×10^{-16}	-5.1925×10^{-16}	-3.8282×10^{-16}

Tabla 4.1: Flujo solar efectivo y coeficientes para cada criterio de habitabilidad. Imagen adaptada de Kopparapu et al. (2013a).

siendo L y L_{\odot} la luminosidad de la estrella y la luminosidad solar, respectivamente. Para ello, tomando la luminosidad de una estrella tipo M4, con $T_{eff} = 3100$ K, como $L = 0,0055L_{\odot}$ (Kaltenegger & Traub 2009), obtenemos que $IHZ = 0,08$ u.a. y $OHZ = 0,1533$ u.a. Como vemos, la zona habitable de una estrella tipo M es mucho más estrecha y mucho más cercana a ella.

4.2.3. Zona habitable para sistemas estelares múltiples

El cálculo de la HZ para estrellas múltiples puede llevarse a cabo como una extensión del caso para una sola estrella. Parecería intuitivo, en principio, sumar cada una de las componentes del flujo efectivo de cada una de las estrellas en el planeta, para así calcular el flujo total efectivo en un dicho planeta y, por ende, determinar S_{eff} . Sin embargo, esto no es así, básicamente porque la atmósfera de un planeta reacciona de forma diferente dependiendo del tipo espectral de la estrella desde la cual provenga la radiación incidente (Müller & Haghighipour 2013; Kaltenegger & Haghighipour 2013). Con lo cual, no podemos simplemente sumar el S_{eff} de cada una de las estrellas del sistema sin antes tener en cuenta su tipo espectral.

Así, el flujo efectivo total S_{eff} en un planeta que se encuentra en un sistema múltiple viene dado por (Müller & Haghighipour 2013):

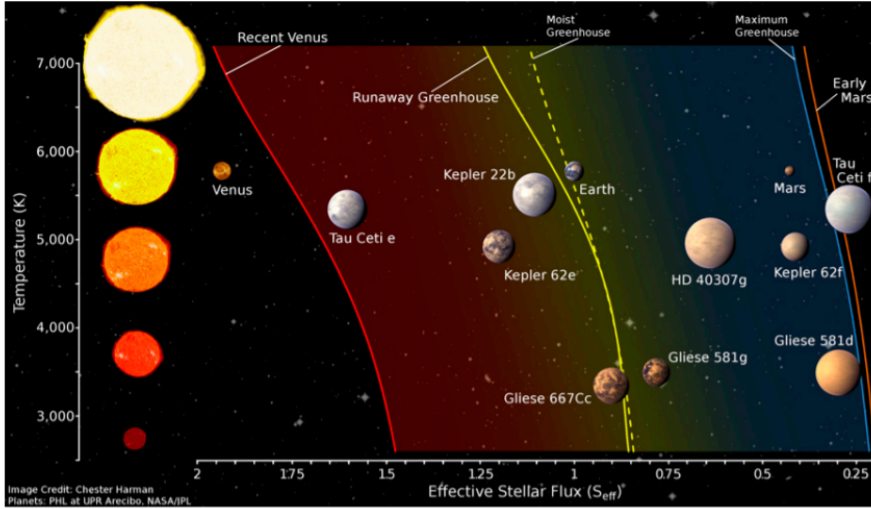


Figura 4.4: Zona habitable para estrellas cuyo tipo espectral varía desde M7 hasta F0. Crédito a [Kasting et al. \(2014\)](#); NASA/JPL.

$$S_{eff} = \sum_{i=1}^N W_i \frac{L_i/L_{\odot}}{r_i^2}, \quad (4.8)$$

siendo N el número de estrellas en el sistema, W_i los llamados *pesos espectrales*, L_i la luminosidad de la estrella i y r_i la distancia del planeta a la estrella i .

Para ilustrar el cálculo de la HZ, utilizaremos los casos de $N = 2$ (estrella binaria) y $N = 3$ (sistema estelar triple). Con objeto de simplificar los cálculos y ser coherentes con los casos tratados en el Capítulo 3, asumiremos también que todas las estrellas involucradas son de tipo solar, por lo que no necesitaremos incluir pesos, es decir, $W_i = 1, \forall i$.

4.2.3.1. Estrella doble

Si hacemos $N = 2$, (4.8) quedaría de la siguiente manera:

$$S_{eff} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}. \quad (4.9)$$

El cálculo de la HZ se basa, en esencia, en lo mismo que veíamos en el caso de una sola estrella: determinar tanto IHZ como OHZ. Si asumimos límites conservadores (*moist greenhouse y maximum greenhouse*), ya hemos visto que el flujo efectivo era 1,015 y 0,343, respectivamente. Ahora, si queremos calcular la HZ en este sistema múltiple, el flujo efectivo tanto en el IHZ tanto como en el OHZ del planeta tiene que ser *el mismo* que obteníamos para el caso de una sola estrella, por lo que tiene que cumplirse que

$$S_{eff} = S_{eff\odot}, \quad (4.10)$$

por lo que, para el IHZ:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = 1,015, \quad (4.11)$$

y para el OHZ:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = 0,343. \quad (4.12)$$

Si asumimos la zona habitable del planeta con respecto a la estrella primaria, hay que calcular r_1 en (4.11) y (4.12) para obtener el IHZ y el OHZ, respectivamente. Para ello tenemos que escribir r_2 en función de r_1 .

Según la Figura 4.5, y considerando órbitas coplanarias, podemos relacionar r_1 con r_2 mediante el teorema del coseno:

$$r_2^2 = r_1^2 + r_{Bin}^2 - 2r_1r_{Bin} \cos(f_2 - (f_1 + \omega_1)), \quad (4.13)$$

siendo ω_1 el ángulo formado por los ejes de ambas elipses. Entonces, sustituyendo en (4.11) y en (4.12) y teniendo en cuenta que

$$r_{Bin} = \frac{a_{Bin}(1 - e_{Bin}^2)}{1 + e_{Bin} \cos(f_2)}, \quad (4.14)$$

tendremos que calcular r_1 en cada una de las ecuaciones para averiguar el IHZ y el OHZ. Nótese que, por (4.13), estas ecuaciones dependen tanto de la anomalía f_1 como de la anomalía f_2 . La forma de resolver las ecuaciones es fijar un valor para la anomalía f_2 , es decir, fijar las posiciones de las estrellas y resolver las ecuaciones haciendo variar $\omega_1 + f_1$ de 0 a 2π , resolviendo las ecuaciones tantas veces como puntos elegidos dentro del intervalo $(0, 2\pi)$. En el Apéndice B se implementa este cálculo con un programa en MATLAB llamado [HZ.m](#)

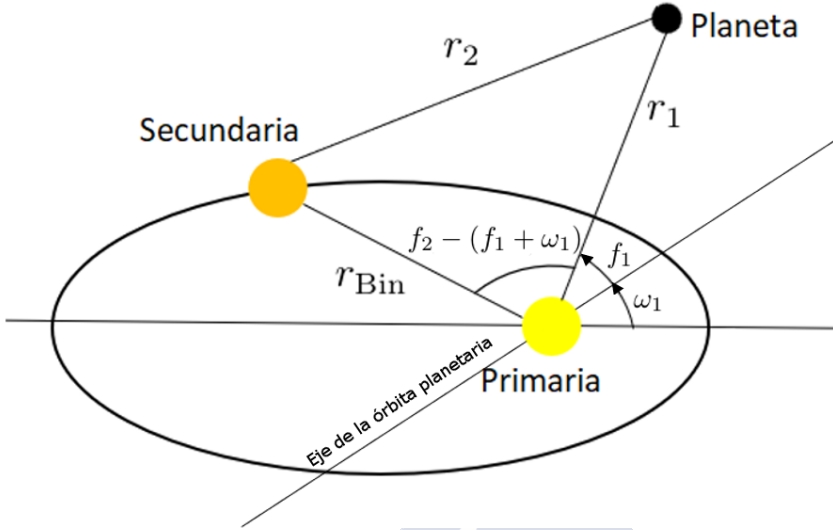


Figura 4.5: Esquema de la configuración de una estrella binaria con un planeta hipotético. f_2 es la anomalía verdadera de la estrella secundaria con respecto a la primaria, y f_1 es anomalía verdadera del planeta con respecto a la estrella primaria. Nótese que este esquema no depende si el planeta está en órbita tipo P ó tipo S, aunque para una mejor visualización hemos puesto el planeta lejos de ambas estrellas.

Por ejemplo, siguiendo las asunciones del Capítulo 3, suponemos que $a_{Bin} = 10$ u.a. En la Figura 4.6 vemos la zona habitable de la estrella primaria para $e_{Bin} = 0,3$ y para $e_{Bin} = 0,5$, habiendo fijado en ambos casos la anomalía f_2 a 0° . Se aprecia, además, cómo la excentricidad de la binaria influye en la zona habitable, haciendo que la zona habitable se extienda hacia la estrella secundaria, tal y como corroboran varios autores (Eggl et al., 2012, 2013b; Kaltenecker & Haghighipour 2013a; Cuntz 2015; Wang & Cuntz 2017, 2019).

En la Figura 4.6 observamos, además, cómo la zona habitable no sobrepasa nunca las 2 u.a. Esto descarta totalmente la existencia de planetas con órbita tipo P habitables, puesto que hemos visto en la Sección 3.3.1 que la órbita de estos planetas era estable si su semieje con respecto al centro de masas de la binaria era $\gtrsim 3,2a_{Bin} = 32$ u.a., y por lo tanto, su distancia con respecto a la estrella primaria no puede ser menor que 32 u.a.

Para que un planeta en órbita P caiga dentro de la zona habitable de la binaria necesitamos, por tanto, una zona habitable *circumbinaria*. Para ello,

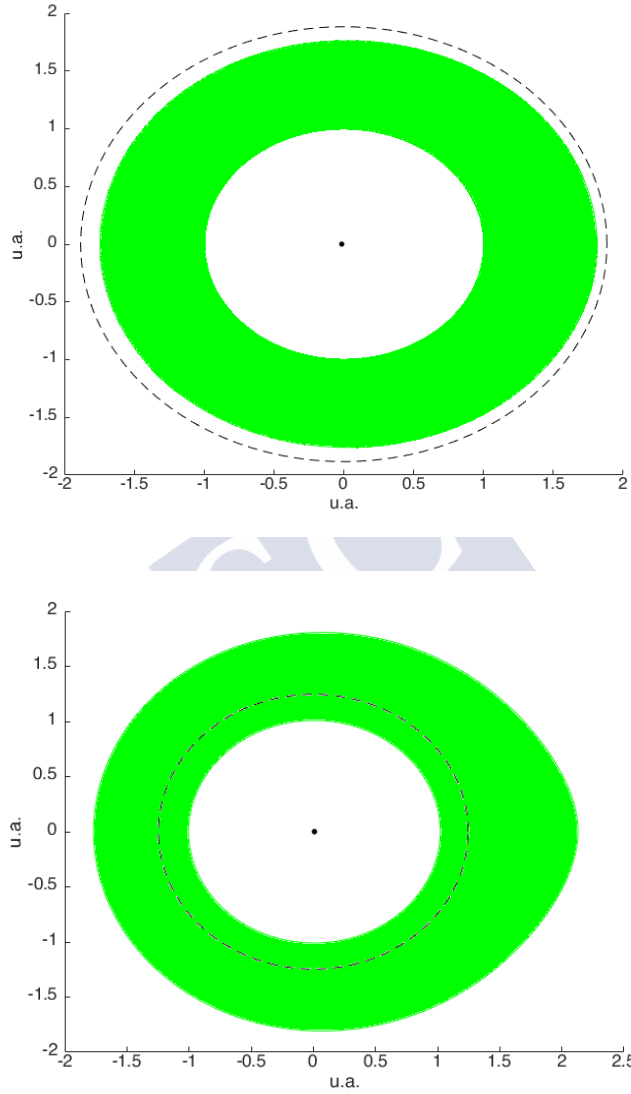


Figura 4.6: Zona habitable para la estrella primaria de una binaria con semieje $a_{\text{Bin}} = 10$ u.a. y excentricidad $e_{\text{bin}} = 0,3$ (arriba) y $e_{\text{Bin}} = 0,5$. La anomalía verdadera de la binaria se ha fijado a 0° . El origen representa la estrella primaria. Vemos como, para una mayor excentricidad, la zona derecha de la zona habitable se extiende más hacia la estrella secundaria, la cual se encuentra hacia la derecha (al ser la anomalía 0). La línea punteada representa la región de estabilidad.

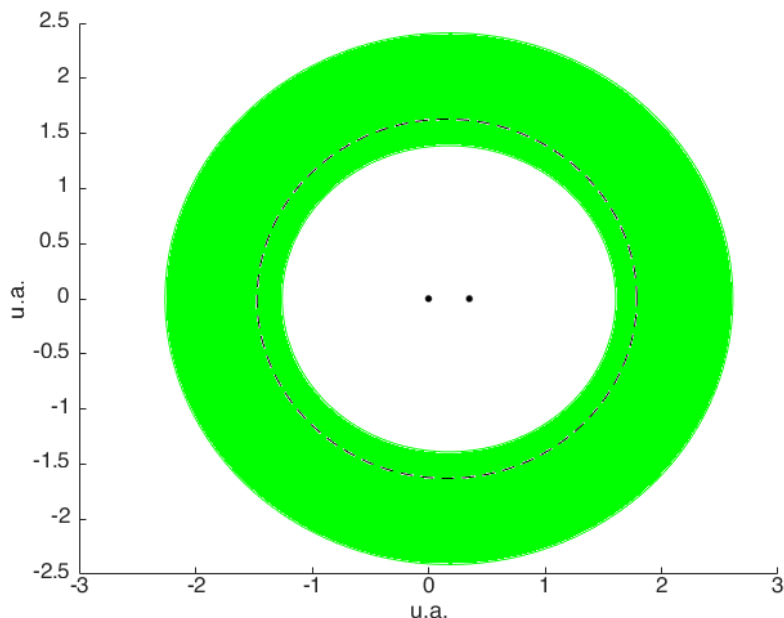


Figura 4.7: Zona habitable con respecto a la estrella primaria de una binaria con $a_{\text{Bin}} = 0,5$ u.a. y $e_{\text{Bin}} = 0,3$, siendo la curva discontinua la región de estabilidad. El origen representa la posición de la estrella primaria. Hemos fijado la anomalía verdadera de la secundaria a 0° .

necesitamos que el semieje de la binaria sea mucho menor. Por ejemplo, si $a_{\text{Bin}} = 0,5$ u.a. y $e_{\text{Bin}} = 0,3$, la zona habitable de la estrella primaria se extiende alrededor de la binaria (Figura 4.7).

4.2.3.2. Estrella triple

El cálculo de la HZ para una sistema estelar triple es análogo al de la estrella doble, con la diferencia que tendremos un sumando más en el segundo miembro de (4.9), aunque la ecuación no presenta grandes dificultades si la resolvemos numéricamente. Por eso, aquí simplemente haremos uso de la página web <http://astro.twam.info/hz/> que permite el cálculo de la HZ para las posiciones iniciales y para cualquier número de estrellas (Müller & Haghhighipour 2014), simplemente introduciendo las coordenadas de las posiciones iniciales de las estrellas.

Asumiremos órbitas coplanarias y que el argumento del periastro, la ángulo del nodo ascendente y la época de paso para cada una de las estrellas es 0.

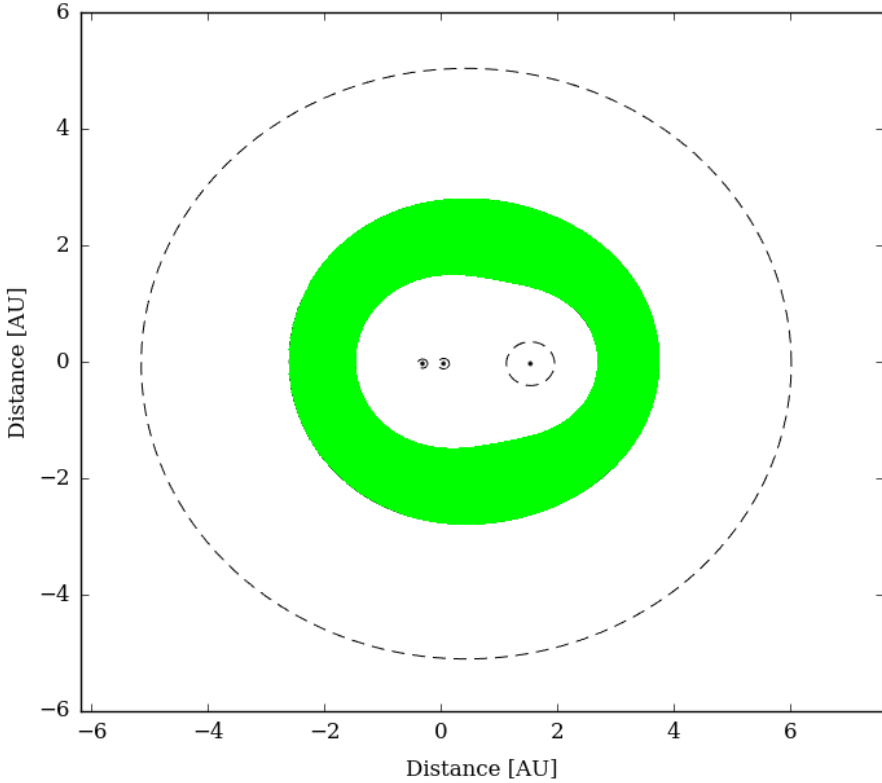


Figura 4.8: Zona habitable para un sistema estelar triple. Las líneas punteadas hacen referencia a la región de estabilidad, dependiendo si el planeta tiene órbita tipo S1, S2, S3 ó P2. Las órbitas P1 están descartadas, puesto que hemos visto en la Sección 3.4.3 que no existían órbitas P1 cuando $a_{out} = 6 a_{in}$, por lo que tampoco las habrá si $a_{out} = 4 a_{in}$.

Por ejemplo, suponemos que $a_{in} = 0,5$ u.a., $e_{in} = 0,3$, $a_{out} = 4 a_{in} = 2$ u.a. y $e_{out} = 0,2$. Según el Apéndice A, obtenemos $(x_1, y_1) = (0,1575, 0)$, $(x_2, y_2) = (-0,1925, 0)$ y $(x_3, y_3) = (1,600, 0)$. La Figura 4.8 muestra el HZ circumtriple de la estrella triple, para los límites *moist greenhouse* y *maximum greenhouse*.

De nuevo, si el semieje de la binaria es lo suficientemente grande, tendremos zonas habitables independientes para cada una de las estrellas, totalmente análogas al caso de la Figura 4.6.

4.3. Habitabilidad de un exosatélite

El estudio de la habitabilidad en los exosatélites es bastante reciente, pero ya hay algunas publicaciones al respecto (Reynolds et al. 1987; Williams et al. 1997; Kaltenegger 2000; Scharf 2006; Porter & Grundy 2011; Heller & Barnes 2012; Heller 2012; Zollinger et al. 2017; Forgan & Yotov 2014). Como ya hemos comentado en la [Introducción](#), los exosatélites proporcionan nuevas opciones de habitabilidad en el Universo, no solo porque son, con toda seguridad, mucho más frecuentes que los exoplanetas (por ejemplo, [Jheeta 2013](#)), sino porque propician condiciones generalmente más favorables para la formación de vida. De hecho, si consideramos un exosatélite tipo Tierra alrededor de un exoplaneta tipo Júpiter, el satélite sufriría, en pocos millones de años, acoplamiento de marea con respecto al planeta, no a la estrella (Porter & Grundy 2011; Sasaki et al. 2012); lo que ayudaría a que el calor recibido en la superficie del satélite se encontrase más uniformemente distribuido, a diferencia de un exoplaneta que se encontrase acoplado de marea a su estrella (Joshi 1997; Kite et al. 2011).

En el estudio de la habitabilidad de un exosatélite ya no sólo tendremos que considerar el flujo de radiación proveniente de la estrella, sino que habrá que considerar otros factores que pueden contribuir al aumento de flujo incidente en un exosatélite, más allá del flujo estelar. Los factores principales son: la luz de la estrella reflejada en el planeta, la emisión de energía térmica proveniente del planeta, y el **calentamiento de marea**. De todos estos factores, la energía térmica suele ser la más pequeña de las tres, y por ello no la trataremos (Heller & Barnes 2013).

Empezaremos definiendo una especie de “zona habitable” para exosatélites, en la cual no solo tendremos en cuenta el flujo proveniente de la estrella, sino también la radiación estelar *reflejada* en el exoplaneta.

4.3.1. Zona habitable para exosatélites

Análogamente a la zona habitable para un exoplaneta, se puede definir, por ejemplo, la zona habitable para un exosatélite tipo Tierra que esté orbitando un exoplaneta tipo Júpiter. Obviamente, si consideramos simplemente el flujo

estelar, el cálculo de su HZ es totalmente análogo al obtenido en la Sección 4.2.1. Sin embargo, al considerar a mayores el flujo proveniente de la luz de la estrella reflejada en el exoplaneta tipo Júpiter, tendremos que aplicar una ligera corrección. Simplemente habrá que modificar la luminosidad de la estrella que aparece en el numerador de (4.7) de la siguiente manera (Heller & Barnes 2013):

$$\frac{L_m}{L_*} = 1 + \frac{\alpha_p R_p^2}{8a_m^2}, \quad (4.15)$$

siendo α_p el albedo de Bond⁶, R_p el radio del planeta y a_m el semieje de la órbita del satélite con respecto al planeta. Se asume que el satélite se encuentra acoplado de marea al planeta.

Por ejemplo, para un planeta tipo Júpiter, $\alpha_p = 0,34$ (Hanel et al. 1981) y $R_p = 0,000466$ u.a. Por lo tanto, si suponemos que $a_m = 0,005$ u.a., la expresión (4.15) nos da $L_m = 1,0004L_\odot$. Ahora, si sustituimos el numerador de (4.7) por la corrección en la luminosidad del numerador y asumiendo límites *moist greenhouse* ($S_{\text{eff}} = 1,015$) y *maximum greenhouse* ($S_{\text{eff}} = 0,343$), obtenemos IHZ = 0,99 u.a. y OHZ = 1,71 u.a. Dichos límites coinciden con aquellos de la zona habitable de un planeta tipo Tierra, por lo que se ha probado que, para un exosatélite tipo Tierra y semieje $a_m = 0,005$ u.a. y un exoplaneta con el radio y albedo el de Júpiter, la contribución al flujo recibido en el exosatélite de la radiación estelar reflejada en el exoplaneta es despreciable.

A continuación, hablaremos del **calentamiento de marea** como un factor de gran importancia en la habitabilidad de los exosatélites.

4.3.2. Calentamiento de marea

De investigaciones anteriores, se sabe que el calentamiento de marea proporciona una fuente de energía importante en el interior de los satélites⁷ (Reynolds et al. 1987; Williams et al. 1997; Scharf 2006, 2008; Cassidy et al. 2009; Heller 2012). Un ejemplo de ello son los satélites de Júpiter Ío y Europa; los

⁶El albedo de Bond, al contrario del albedo *geométrico*, no tiene en cuenta la posición de la fuente de luz con respecto al observador, sino que tiene en cuenta *toda* la radiación electromagnética reflejada en el exosatélite.

⁷El calentamiento de marea causado por la estrella en los exoplanetas suele ser menos importante, excepto en el caso de estrellas enanas tipo M con exoplanetas en órbita excéntrica (Barnes et al. 2008; Zollinger et al. 2017). Como nosotros tratamos fundamentalmente con estrellas tipo solar, no lo hemos considerado.

cuales, pese a tener tamaño y composición similares, sufren fenómenos geológicos totalmente diferentes, debido a que el primero se encuentra mucho más cercano a Júpiter y, consecuentemente, las fuerzas de marea son mucho mayores. Dichas fuerzas inducen, como ya vimos en la Sección 3.1.2, una deformación en el satélite que, a su vez, produce fricción en las capas interiores del satélite y, por tanto, calor. Esta fuente de calor es importante ya que es la mayoritaria en el interior de los satélites y planetas (Jackson et al. 2008a, 2008b), seguida del calor radiogénico generado por la desintegración de isótopos radiactivos (Hussman & Spohn 2002) y del calor primigenio proveniente de la formación del satélite (Turcotte 2002; Taylor 2016: 118).

Nos interesa cuantificar la cantidad del calor del interior del satélite por su influencia en la presencia de agua superficial y en la tectónica de placas. En lo que se refiere a la atmósfera, se requiere una gran cantidad de calentamiento de marea para provocar la evaporación de océanos, del orden de unos 300 W/m^2 (Heller 2012). En cambio, para que haya una tectónica de placas lo suficientemente turbulenta como para que induzca una actividad volcánica que haga el satélite inhabitable, se requiere un calentamiento de marea de solo 2 W/m^2 , es decir, el hallado en Io (McEwen et al. 2004). Así, podemos establecer nuevos límites por los cuales el satélite pueda conservar su actividad tectónica sin que la actividad volcánica pueda impedir la formación de agua.

El límite inferior viene dado por el flujo mínimo bajo el cual la actividad tectónica cesa, $0,04 \text{ W/m}^2$ (Williams et al. 1997; Barnes et al. 2009). Es importante para un exoplaneta habitable que haya cierto nivel de actividad tectónica que permita la activación del ciclo del carbonato-silicato⁸.

El límite superior viene dado por el flujo de calor inducido por el calentamiento de marea en Ío, 2 W/m^2 .

Así, si el calentamiento de marea se encuentra entre $0,04$ y 2 W/m^2 , diremos que es favorable para la presencia de agua líquida superficial. Incluso si un exosatélite se encontrase completamente helado, se podría producir suficiente calor como para prevenir que un supuesto océano interior se congelase, haciendo posible la presencia de vida allí. Un ejemplo de ello es Europa, el cual recibe un calentamiento de marea de $0,01 - 0,1 \text{ W/m}^2$ y éste permite la presencia de un océano interior (Tobie et al. 2003).

⁸El ciclo del carbonato-silicato es esencial en la habitabilidad del exosatélite, puesto que regula la presencia de CO_2 en la atmósfera, relajando las fluctuaciones en la temperatura que se pudiesen producir debido al efecto invernadero (Forgan & Dobos 2016).

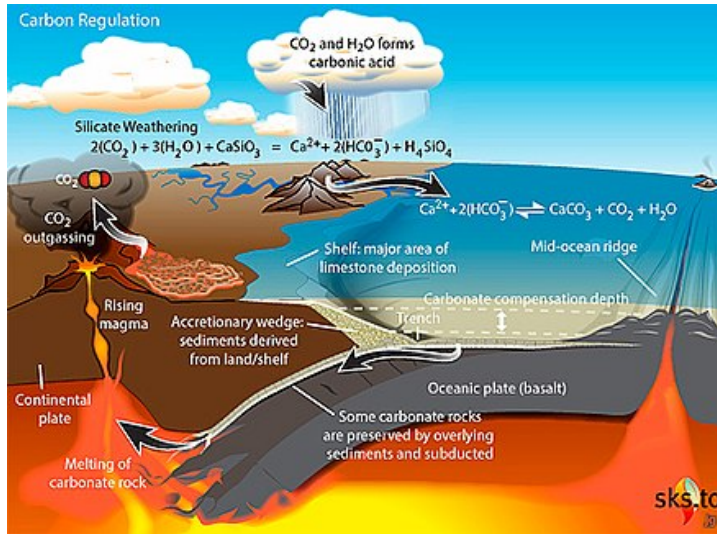


Figura 4.9: Ciclo del carbonato-silicato. Crédito a <https://skepticalscience.com/print.php?n=1959>.

La fórmula que relaciona el calentamiento de marea con los parámetros orbitales y físicos del satélite es la siguiente (por ejemplo, Jackson et al. 2008b):

$$h = \frac{63}{16\pi} \frac{(GM_p)^{3/2} M_p R_m^3}{Q'_m} a_m^{-15/2} e_m^2, \quad (4.16)$$

siendo R_m el radio del satélite, M_p la masa del planeta y $Q'_m = 3Q_m/(2k_{2m})$, con Q_m y k_{2m} la función de disipación y el número de Love del satélite, respectivamente.

Por ejemplo, para un exosatélite de semieje orbital $a_m = 0,007$ u.a. y excentricidad $e_m = 0,05$ u.a., obtendríamos $h = 1,1$ W/m², con lo que se espera una actividad volcánica moderada, pero dentro de los límites establecidos. Sin embargo, ya hemos visto que la órbita de un exosatélite no puede considerarse kepleriana, sino que está sujeta a perturbaciones debido a la presencia de la estrella y a fuerzas de marea (Sección 3.1). Si sólo tenemos en cuenta estas últimas, la órbita del satélite irá progresivamente circularizándose y alejándose del planeta (estaríamos en el caso de las ecuaciones (3.15)), lo que hará que h disminuya según (4.16). El problema es que las perturbaciones de la estrella

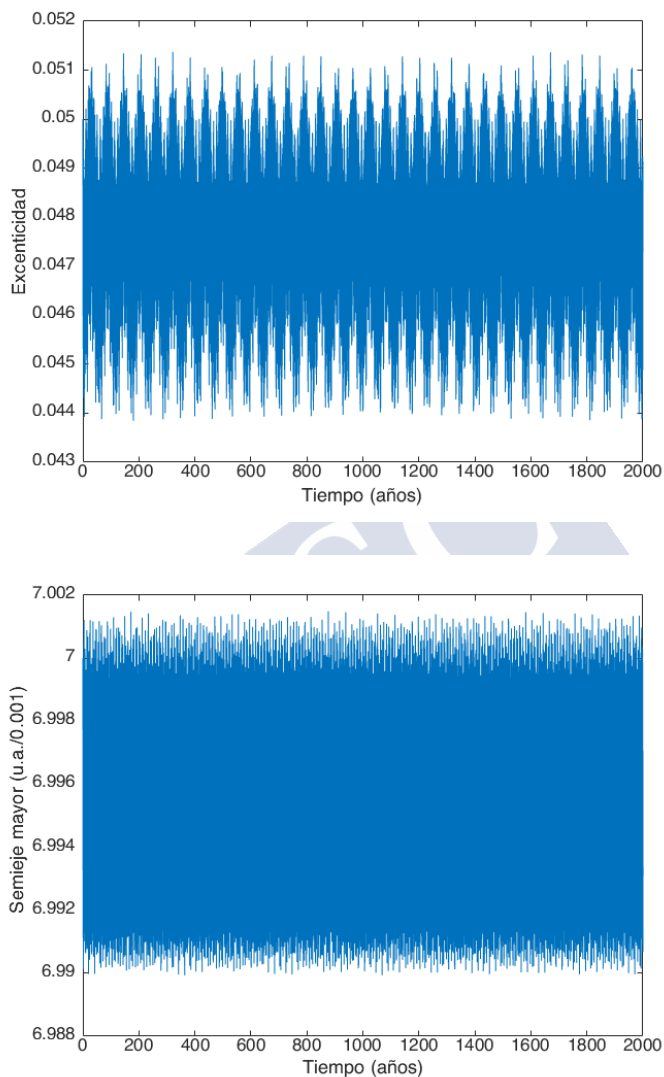


Figura 4.10: Variación de la excentricidad (arriba) y el semieje de la órbita de un satélite cuya excentricidad inicial es $e_m = 0,05$ y semieje inicial de la órbita con respecto al planeta es $a_m = 0,007$ u.a., asumiendo únicamente la perturbación gravitatoria de la estrella sobre el satélite. El semieje inicial de la órbita planetaria es 1 u.a. y la excentricidad inicial 0.

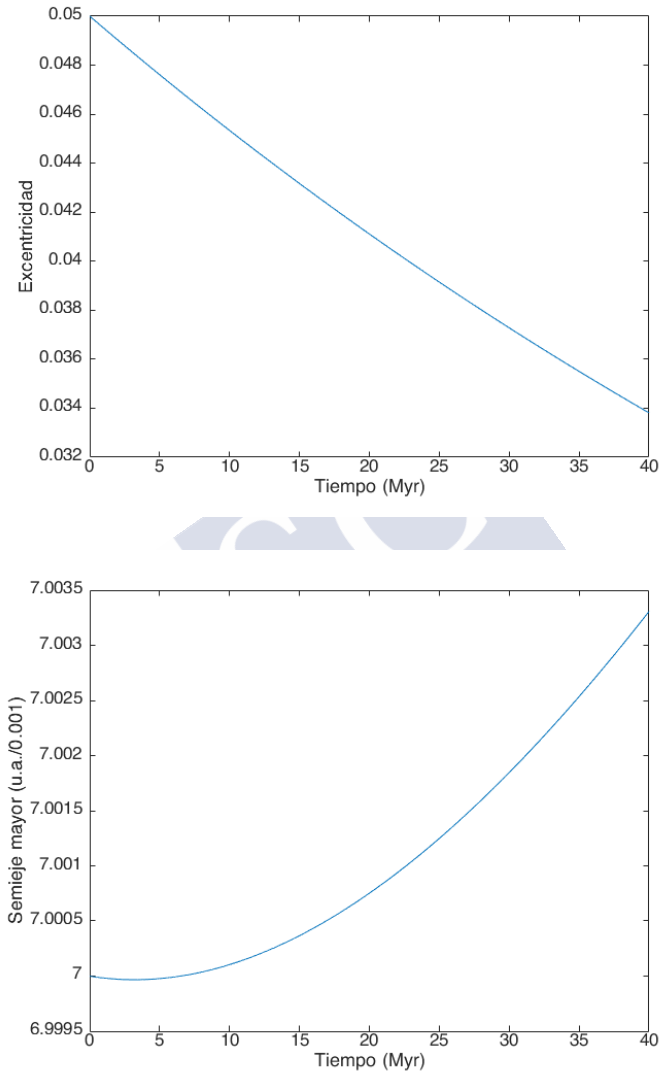


Figura 4.11: Variación de la excentricidad (arriba) y el semieje de la órbita de un satélite cuya excentricidad inicial es $e_m = 0,05$ y semieje inicial de la órbita con respecto al planeta es $a_m = 0,007$ u.a., asumiendo únicamente las fuerzas de marea del planeta sobre el satélite.

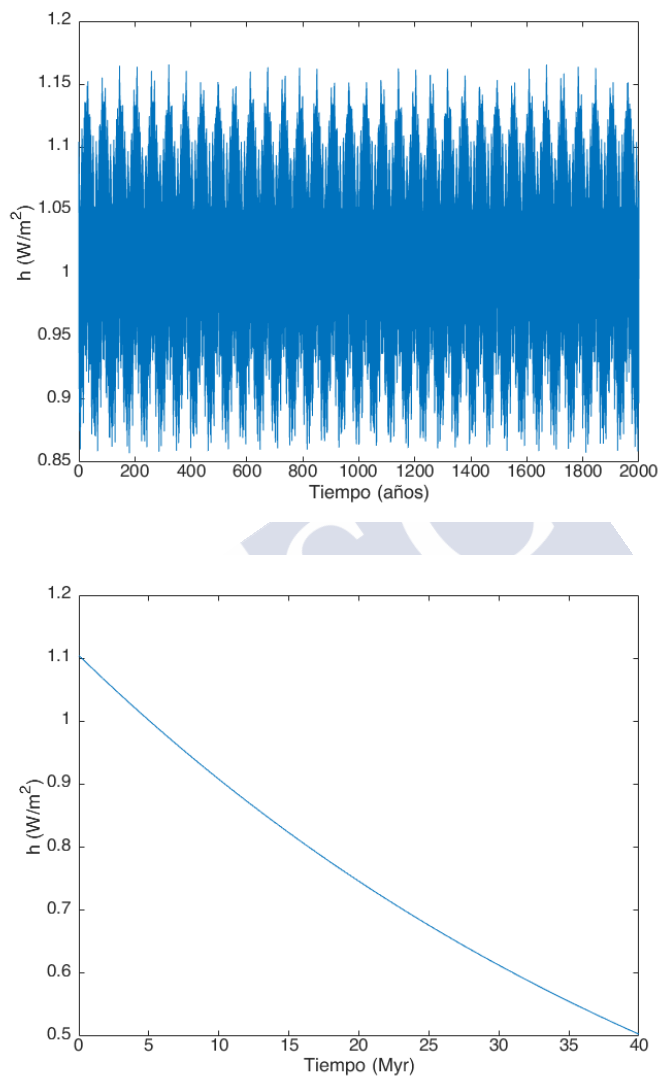


Figura 4.12: Calentamiento de marea para un satélite con los parámetros iniciales elegidos en las Figuras 4.10 y 4.11, asumiendo como *únicos* agentes perturbadores la acción gravitatoria de la estrella sobre el satélite (arriba) y las fuerzas de marea del planeta sobre el satélite.

no dejarán que la excentricidad disminuya ni que el semieje aumente, debido a que las variaciones periódicas de la excentricidad y del semieje son mucho más pronunciadas en el tiempo (compárense las Figuras 4.10 y 4.11), es por ello que la presencia de la estrella evita que h disminuya y hace que el calentamiento de marea oscile (Figura 4.12). Este mecanismo es el que hace, por ejemplo, que el calentamiento de marea de Io y Europa no se fuera perdiendo desde los primeros años de su formación; puesto que, si bien la perturbación de la estrella es pequeña, se cree que es debido a la perturbación del satélite Ganímedes (Peale et al. 1979; Yoder & Peale 1981), el cual no permite que las órbitas de Io y Europa se circularicen y, por tanto, no se produzca la pérdida de calentamiento de marea⁹.

No hemos tenido en cuenta el calentamiento de marea causado por la estrella sobre el satélite, pero si considerásemos estrellas enanas tipo M, entonces sí que se vuelve un factor importante a tener en cuenta. La razón de ello es que la zona habitable de las estrellas tipo M es muy cercana a la estrella (Figura 4.4), y por ende el calentamiento de marea causado por la estrella sobre el satélite es mucho mayor. De hecho, para estrellas con masa menor de $0,2M_{\odot}$, **no es posible la habitabilidad de exosatélites** (Heller 2012; Zöllinger et al. 2017).

4.3.3. Campo magnético

Para la habitabilidad de los exoplanetas, es indispensable la presencia de un campo magnético que los proteja de las partículas de alta energía que pueden causar la desaparición de sus atmósferas, tales como las causadas por el viento estelar, los rayos cósmicos o, si la estrella es de tipo M y el planeta se encuentra a una distancia pequeña de ella, eyecciones de masa coronaria (Heller & Zuluaga 2013, Lammer et al. 2010; Grießmeier et al. 2005, 2009; Zuluaga et al. 2013). Para los exosatélites en torno a planetas gigantes, la presencia de una magnetosfera planetaria puede ayudarlos a protegerse de esta radiación (Heller & Zuluaga 2013). Sin embargo, esto presenta un problema añadido: si están suficientemente cerca del planeta (de 5 a $20 R_p$), se verán afectados por su cinturón de radiación, el cual se forma debido a las partículas energéticas del viento estelar que quedan atrapadas en torno a la magnetosfera del planeta (Hand et al. 2007; Heller & Zuluaga 2013). Es por ello preferible que el exosatélite cuente también de un campo magnético propio que le proteja de

⁹Si no fuera por la presencia de Ganímedes, hoy en día las órbitas de Io y Europa serían casi circulares, puesto que su tiempo de circularización es mucho menor que la edad del Sistema Solar (Murray & Dermott 1999: 173)

dichas partículas.

Las condiciones necesarias para que un exosatélite tenga magnetosfera son, principalmente, tener un núcleo semifluido que permita la conductividad eléctrica (como el de la Tierra, que consta de un núcleo interno sólido y un núcleo externo líquido), y la existencia de *convección* en el interior del exosatélite, es decir, el flujo de los materiales más calientes hacia las capas superiores, de manera que se produzca un enfriamiento gradual del núcleo (por ejemplo, Spohn 2010: 317). Dicho enfriamiento tiene que existir para que se produzca una dinamo que induzca el campo magnético (Stevenson 1983), y la tectónica de placas propicia dicho enfriamiento (Stevenson 2003; Olson & Christensen 2006). Además, la presencia de agua superficial ayuda a la existencia de tectónica de placas (Regenauer-Lieb et al. 2001; Solomatov 2003, 2004).

En el Sistema Solar, los únicos planetas rocosos que tienen un campo magnético propio son la Tierra y Mercurio. Marte tiene parte de su corteza magnetizada, lo que puede indicar que ha tenido un campo magnético en el pasado (Acuña et al. 1998), y Venus no tiene campo magnético, siendo la causa más aceptada la falta de convección en su núcleo¹⁰, quizás debido a la ausencia de tectónica de placas (Stevenson 2003; Nimmo 2002). En cambio, el único satélite que tiene un campo magnético propio es Ganímedes¹¹. Esto plantea la cuestión de la magnetosfera en Europa: dado que los dos tienen composiciones similares (Sohl et al. 2002), ambos deberían presentar campo magnético. Sin embargo, ningún campo magnético ha sido detectado en Europa (Breuer et al. 2010; Kivelson et al. 1999). En la literatura, este hecho se explica –parcialmente– de la misma manera en la que se explica la ausencia de campo magnético en Io: se cree que el calentamiento de marea en el manto de Io y Europa bloquea el flujo de calor proveniente del núcleo, lo que impide su enfriamiento y, en consecuencia, la generación de un campo magnético (Wienbruch & Spohn 1995).

Según lo que observamos en el Sistema Solar podemos, por tanto, con-

¹⁰Algunas fuentes atribuyen la falta de campo magnético de Venus a la lenta rotación, pero se ha comprobado que, incluso con la rotación de Venus (243 días), todavía es posible producir una dinamo magnética (Luhmann & Rusell 1997; Stevenson 2003; Olson & Christensen 2006).

¹¹Tanto Ganímedes como el resto de satélites galileanos que no presentan un campo magnético *propio*, sí que presentan un campo magnético *inducido* al encontrarse dentro de la magnetosfera de Júpiter (Breuer et al. 2010; Kerr 2010).

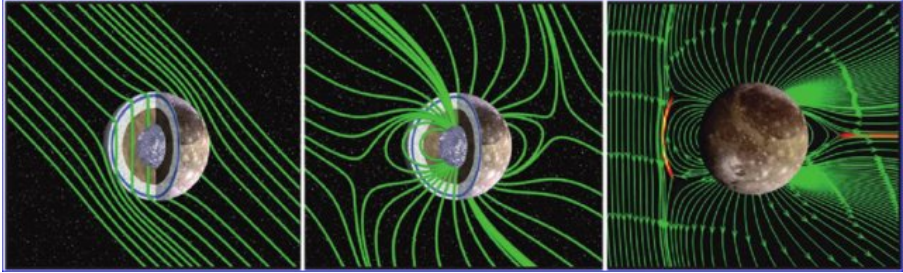


Figura 4.13: Campo magnético *inducido* por Júpiter (izquierda), *propio* (centro) y el *resultante* de ambos (derecha) de Ganimedes (Grasset et al. 2013b).

cluir que el calentamiento de marea puede impedir la formación de campos magnéticos en exosatélites, y por ello dificultar su habitabilidad. Esta dificultad se exagera si tenemos en cuenta que el calentamiento de marea producido en exosatélites tipo Tierra va a ser mucho más grande que en los satélites galileanos, ya que este aumenta cuanto más grande sea el radio de satélite (Ecuación (4.16)). Por otra parte, la presencia de agua y de tectónica de placas va a ser esencial para la generación de campos magnéticos en exosatélites.

4.4. Técnicas para la búsqueda de vida en exoplanetas/exosatélites

En la práctica, estudiar la habitabilidad de un exoplaneta/exosatélite va mucho más allá de intentar detectar agua en su superficie. Por eso, además de la caracterización de océanos superficiales (Sección 4.4.1), estudiaremos las técnicas que se utilizan para estudiar las atmósferas (Sección 4.4.2) y los supuestos océanos interiores (Sección 4.4.3) de un exoplaneta/exosatélite para, en un futuro, poder encontrar indicios de vida analizando dichos ambientes. También utilizaremos la **composición** de los exoplanetas/exosatélites (Sección 4.4.4) como potencial herramienta para averiguar si es posible la vida en ellos.

4.4.1. Caracterización de océanos

Existen tres técnicas propuestas para la detección de océanos en exoplanetas, todas relacionadas con la *imagen directa* del exoplaneta (Cowan et al.

2012):

- *Glint* basado en la reflexión especular de la luz de la estrella sobre el agua del exoplaneta (Williams & Gaidos 2008; Robinson et al. 2010). Se ha comprobado que, en la Tierra, la luz reflejada del Sol sobre sus océanos causa una región muy iluminada sobre ellos llamada *glint* (Figura 4.14), lo que hace que el albedo aparente¹² aumente. Las superficies líquidas provocan dicho efecto ya que suelen ser extremadamente lisas y ello aumenta la reflectividad (véase, por ejemplo, <https://www.physicsclassroom.com/class/refln/Lesson-1/Specular-vs-Diffuse-Reflection>). El *glint* es máximo cuando el planeta se encuentra en *fase creciente* (o *menquante*), es decir, cuando su disco se encuentra parcialmente iluminado por la estrella (por ejemplo, Cowan et al. 2012). Por lo tanto, si se llegase a detectar el aumento de brillo de la luz reflejada por el exoplaneta, podría indicar la presencia de océanos en ese planeta.

Este método, sin embargo, presenta varios problemas:

1. Como ya hemos visto en la Sección 1.1.4, la luz que refleja el exoplaneta es muchísimo menor que la luz emitida por la estrella, con lo que es muy difícil detectarla, salvo en el caso de los planetas calientes, en los cuales descartamos, obviamente, la presencia de océanos. Se estima que, para la detección del *glint*, se requiere un S/N de 5-10 (Robinson et al. 2010). Teniendo en cuenta que ningún exoplaneta tipo Tierra ha sido todavía descubierto mediante imagen directa, esto supone un reto de gran calibre. Si consideramos exosatélites, el reto es mucho mayor.

2. Este método no distingue la presencia de agua de otros líquidos¹³ que puedan estar presentes en dichos océanos (Lustig-Yaeger et al. 2018). De hecho, los océanos de hidrocarburos de Titán fueron descubiertos con este método (Stephan et al. 2010).

3. La presencia de nubes o de una atmósfera no transparente a la radiación estelar como la de la Tierra podría imitar o mismo enmascarar el *glint* causado

¹²El *albedo aparente* se interpreta como la reflectividad de un planeta en la dirección del observador para un instante dado (Seager 2010: 40). Este tipo de albedo dependerá, por tanto, de la parte del disco planetario iluminado por la estrella, es decir, de la *fase* del planeta (*fase creciente*, *llena*, *nueva*, etc.).

¹³Aún así, un océano superficial en un planeta situado en la zona habitable estará, probablemente, compuesto por agua, basándonos en la abundancia de agua en el Sistema Solar y en el disco protoplanetario de estrellas jóvenes (Eisner 2007; Williams & Gaidos 2008).



Figura 4.14: *Glint* en el disco terrestre, delimitado por las tres líneas negras. Imagen adaptada de Williams & Gaidos (2008)

por los océanos. Se propone, para ello, medir el *glint* en el infrarrojo cercano (780 - 2500 μm), donde su señal es más fuerte (Robinson et al. 2010). Esto requiere, sin embargo, tener un conocimiento previo de las nubes presentes en la atmósfera del supuesto exoplaneta (Cowan et al. 2012).

4. El exoplaneta puede, incluso sin océanos, incrementar su albedo aparente de forma natural durante la fase creciente, debido al aumento del hielo en las regiones del planeta donde llega menos flujo; por ejemplo, en un planeta con una inclinación del eje de rotación moderada como la Tierra ($\approx 23^\circ$), los polos (Cowan et al. 2012).

Así pues, este método se encuentra con demasiadas dificultades a día de

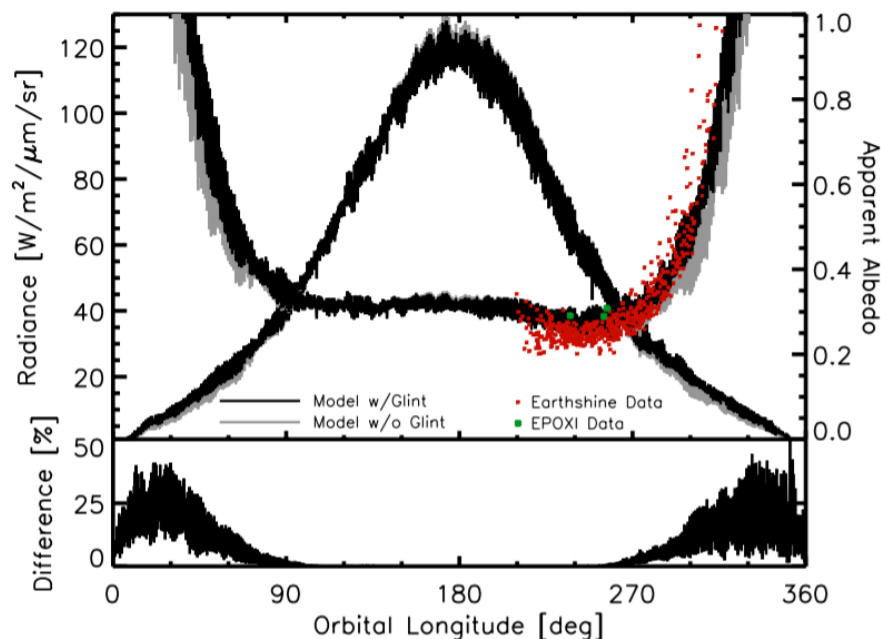


Figura 4.15: En la ventana superior, se muestra una simulación del brillo (gráfica cóncava) y del albedo aparente (gráfica convexa) de un exoplaneta tipo Tierra en función de la longitud orbital, en la cual 180° correspondería a la fase *llena* y 0° y 360° correspondería a la fase *nueva*. Los puntos rojos y verdes indican ciertas observaciones del albedo aparente de la Tierra. En la ventana inferior, se muestra la diferencia de brillo entre el modelo con glint y sin glint, demostrando, como ya se indicó arriba, que la diferencia es máxima en torno a las fases *creciente* (30°) y *menguante* (330°). Las mediciones están hechas en la banda visible (Robinson et al. 2010). Se supone una inclinación orbital $i = 90^\circ$.

hoy como para ayudarnos a descubrir océanos en exoplanetas, y más aun si hablamos de exosatélites. Se espera que el telescopio James Webb, el cual opera sobre la banda infrarroja (Gardner et al. 2006), pueda proporcionar observaciones con gran S/N y alta cadencia que nos permita la sensibilidad necesaria como para obtener una imagen directa de gran resolución, de manera que estudiar la luz reflejada de un exoplaneta permita medir el albedo aparente en función de la fase orbital de un exoplaneta tipo Tierra situado en la HZ y, con ello, descubrir el *glint* (Robinson et al. 2010).

- *Polarización* (Zugger et al. 2010, 2011). Al igual que la reflexión especular, las superficies extremadamente lisas como las de los océanos polarizan la

luz mucho más que las superficies rugosas (por ejemplo, [Katz & Spetner 1960](#)), con lo que si lográsemos detectar luz polarizada proveniente del exoplaneta, podría tratarse de un océano. La atmósfera, por desgracia, también podría causar este efecto (Sección 1.1.7), con lo que la presencia de una atmósfera podría enmascarar la detección de un océano. De hecho, en [Zugger et al. \(2010\)](#) se llega a la conclusión de que, para un exoplaneta con una atmósfera como la de la Tierra, la polarización de los océanos es indetectable.

- *Variabilidad rotacional del color* ([Ford et al. 2001](#); [Cowan et al. 2009](#); [Kawahara & Fujii 2010, 2011](#); [Cowan et al. 2011](#)). Analizando la intensidad de las longitudes de onda en la luz reflejada del planeta (lo que se llama espectro de *reflexión*), podemos averiguar la naturaleza de la superficie del exoplaneta gracias a la variación del color predominante en el espectro a medida que el planeta rota. Los océanos suelen tender a reflejar mayor radiación azul, mientras que las porciones de tierra tienden más a la radiación roja ([McLinden et al. 1997](#); [Tinetti et al. 2006](#); Figura 4.16). Así, podremos distinguir, dependiendo del color, vegetación, desiertos, hielo o mismo océanos ([Cowan et al. 2011](#); [Fujii et al. 2010](#); [Arnold et al. 2002](#)). Esta técnica nos puede ayudar, además, a determinar el periodo de rotación del exoplaneta ([Pallé et al. 2008](#)), así como la oblicuidad¹⁴ de su órbita ([Cowan et al. 2009](#); [Oakley & Cash 2009](#); [Kawahara & Fujii 2010](#)).

Por ejemplo, podemos estudiar las diferencias que hay entre el espectro promediado en un día terrestre de un exoplaneta tipo Tierra y un exoplaneta totalmente helado. Mientras que el primero exhibe gran variabilidad en todas las longitudes de onda, el segundo lo hace mucho más en las longitudes de onda cortas que en las longitudes de onda largas ([Cowan et al. 2011](#)). Esto podría ayudarnos a distinguir un planeta con océanos como la Tierra de un planeta completamente helado.

Existen dos fenómenos adicionales a tener en cuenta en el espectro:

1. *Nubes*. Debido a la alta reflectividad de las nubes en casi todo el espectro (Figura 4.16), su presencia presenta problemas a la hora de distinguir océanos o superficies de tierra. Gracias a las variaciones rotacionales en el albedo aparente podemos, en algunos casos, predecir la presencia de nubes o incluso *eliminarlas* de nuestro espectro ([Cowan et al. 2009](#)).

¹⁴Ángulo que forma el ecuador del exoplaneta con su plano orbital.

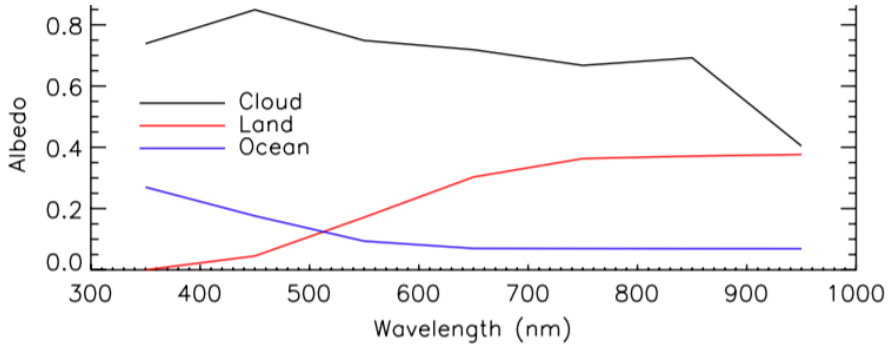


Figura 4.16: Albedo en función de la función de onda para nubes, océanos y tierra. La tierra refleja, predominantemente, radiación roja y los océanos, radiación azul. Las nubes, por otro lado, son altamente reflectantes en casi todo el espectro, lo que le confiere un color gris. Imagen adaptada de Cowan et al. (2009).

2. *Atmósfera.* Debido a la acción de la atmósfera, nuestro espectro siempre indicará una alta reflectividad de la radiación azul. El motivo de ello es la llamada *dispersión Rayleigh*, la cual hace que veamos el cielo azul. Lo bueno es que la dispersión Rayleigh es invariable a la rotación del exoplaneta, con lo que no afecta significativamente la variabilidad de los colores predominantes en el espectro promediado a lo largo de 24 h (un día terrestre). Este hecho se confirma en Cowan et al. (2011), donde se modelizan los colores predominantes en el espectro promediado de un exoplaneta tipo Tierra cuyo periodo de rotación es de 24 h, con y sin dispersión Rayleigh, y se llega a la conclusión de que dichos colores son prácticamente los mismos en ambos modelos: rojizos (tierra) con un ligero aumento en la reflectividad de los colores azules (océanos).

Para ser capaces de distinguir entre las variaciones rotacionales de la radiación roja y azul del espectro de la luz reflejada por un planeta, necesitamos, de nuevo, una sensibilidad lo suficientemente potente como para que el ruido no ofusque las observaciones, de manera que $S/N \gtrsim 20 - 30$ (Robinson 2017). Para ello, se ha estimado que es necesario un error máximo del 2% en la fotometría del exoplaneta, algo que está fuera del alcance de los actuales coronógrafos (Cowan et al. 2009). Sin embargo, los mismos autores consideran la posibilidad de que, en un futuro cercano, el telescopio ATLAST (*Advanced Technology Large-Aperture Space Telescope*), el cual cuenta con una apertura de 16 m y un coronógrafo, sea capaz de alcanzar la sensibilidad requerida. De hecho, se cree que será posible estudiar, con este telescopio, la superficie de un

exoplaneta tipo Tierra situado en la HZ de una estrella con una distancia a la Tierra de hasta 45 pc (Postman et al. 2009).

En definitiva, las tres técnicas que hemos estudiado para la búsqueda de océanos en exoplanetas se encuentran en fases demasiado tempranas de implementación como para poder proporcionar resultados fructíferos. Es necesario, para ello, mucha mayor precisión instrumental de la que disponemos hoy en día. La búsqueda de océanos en exosatélites la suponemos, por tanto, totalmente descartada, al menos hasta que se logren resultados en exoplanetas.

A continuación, describiremos el proceso de caracterización de atmósferas como un procedimiento más viable en el estudio de la habitabilidad en exoplanetas y exosatélites.

4.4.2. Caracterización de atmósferas

La caracterización de atmósferas en exoplanetas es esencial para el estudio de su habitabilidad, puesto que nos proporcionan información sobre si en ese exoplaneta se presentan los componentes gaseosos esenciales para la vida, como el vapor de agua (H_2O), el oxígeno (O_2) o el ozono (O_3).

Se han propuesto tres técnicas para la caracterización de atmósferas en planetas potencialmente habitables: espectroscopía de tránsito primario, espectroscopía de tránsito secundario e imagen directa (Robinson 2017).

Observar el espectro de la luz estelar reflejada en los exoplanetas es una tarea increíblemente difícil, pero no lo es tanto el espectro de *absorción*, en el cual la atmósfera de un planeta que está transitando la estrella absorbe parte de la radiación proveniente de la estrella, de ahí que se llame espectro de *absorción* o *transmisión*.

4.4.2.1. Imagen directa para la caracterización de atmósferas

En la Sección anterior ya hemos visto cómo se podría, hipotéticamente, estudiar la superficie de un exoplaneta utilizando la imagen directa. Para la atmósfera, es un procedimiento similar. Si logramos captar la luz que se refleja del planeta, veremos unos “valles” que indicarán que la radiación para ciertas longitudes de onda ha sido *absorbida*. Estas líneas nos pueden servir para identificar la presencia de un determinado elemento químico, el cual puede estar

presente tanto en la atmósfera como en la superficie del planeta. De hecho, no es nada fácil distinguir entre la composición de la superficie del planeta y su atmósfera (Zugger 2010). Por ejemplo, en la Figura 4.17 podemos apreciar cómo, para un planeta tipo Tierra, nuestro espectro de reflexión¹⁵ muestra varios “picos” de absorción, los cuales se corresponden al vapor de agua (H₂O). Si se llegase a detectar este tipo de espectro proveniente de un exoplaneta tipo Tierra no podríamos, en principio, saber si se trata de vapor de agua de la atmósfera o a grandes masas de agua líquida. Para ello, tendríamos que echar mano de las variaciones rotacionales del espectro, tal y como procedíamos en la Sección anterior (siempre y cuando pudiésemos contar con la precisión necesaria).

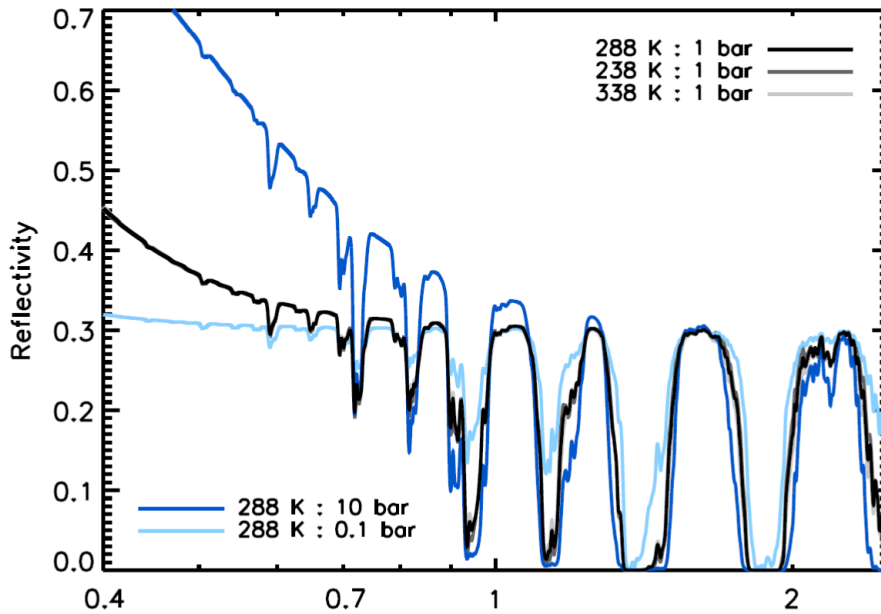


Figura 4.17: Espectro de reflexión teórico de un planeta tipo Tierra, para ciertos valores de presión y temperatura superficiales. El vapor de agua (H₂O) es el gas responsable de las líneas de absorción. Se supone una atmósfera sin nubes (Robinson 2017).

Debido a que este método se basa en la imagen directa del exoplaneta, nos

¹⁵El espectro de reflexión, técnicamente, proviene de dos factores: el flujo térmico del planeta y la luz reflejada del planeta. Como el exoplaneta considerado es de tipo Tierra, su flujo térmico es despreciable.

encontramos con el mismo problema que en la Sección anterior: a día de hoy, no contamos con la precisión suficiente para detectar planetas tipo Tierra, y mucho menos sus atmósferas. Los únicos exoplanetas en los que se ha podido estudiar sus respectivas atmósferas mediante imagen directa son Júpiter calientes, tales como los cuatro planetas de HR 8799 (Skemer et al. 2012), 51 Eri b (Macintosh et al 2015) o β Pic b (Bonnetfoy et al 2014; Chilcote et al 2015), véase Biller & Bonnetfoy (2018) para una revisión completa.

Debido a las dificultades que presenta la imagen directa, nos basaremos en la *espectroscopía de tránsitos* para una mejor detección de atmósferas planetarias.

4.4.2.2. Espectroscopía de tránsito

Utilizando el método de tránsitos (Sección 1.1.2), existe una manera más eficiente de estudiar las atmósferas de los exoplanetas. Cuando se produce un tránsito de un planeta con una atmósfera lo suficientemente “gruesa”, la luz proveniente del disco estelar la atraviesa y, con ello, ciertas longitudes de onda son absorbidas. Recogiendo el espectro de dicha luz, se obtiene la llamada espectroscopía de *tránsito primario*, o **espectroscopía de transmisión**.

Observaciones en el espectro de transmisión han sido bien observadas en el pasado, tanto en estrellas binarias (Eaton 1993) como en el Sistema Solar (Smith & Hunten 1990). La primera atmósfera de un exoplaneta fue descubierto en el Júpiter caliente HD 209458b, en el cual se observaron líneas de absorción correspondientes al elemento sodio (Na) (Charbonneau et al. 2002). Esto no es casualidad, ya que los modelos predicen, asumiendo la ausencia de nubes, que las líneas de absorción predominantes en la banda visible del espectro de transmisión de los Júpiter calientes pertenecen al sodio y al potasio (Seager & Sasselov 2000; Fortney 2005; Seager et al. 2000).

Por otra parte, existe la espectroscopía de *tránsito secundario*, la cual se basa en estudiar la diferencia entre el espectro combinado del planeta y la estrella justo antes de que el planeta se oculte por detrás de la estrella (tránsito secundario u *ocultación*), y el espectro de la estrella cuando el planeta ya se ha ocultado (Madhusudhan 2019). Con ello, obtenemos el espectro de *emisión* del planeta.

Para un planeta tipo Tierra, obviamente, el espectro de emisión va a ser muy pequeño debido a la nimia contribución del flujo térmico de la Tierra en

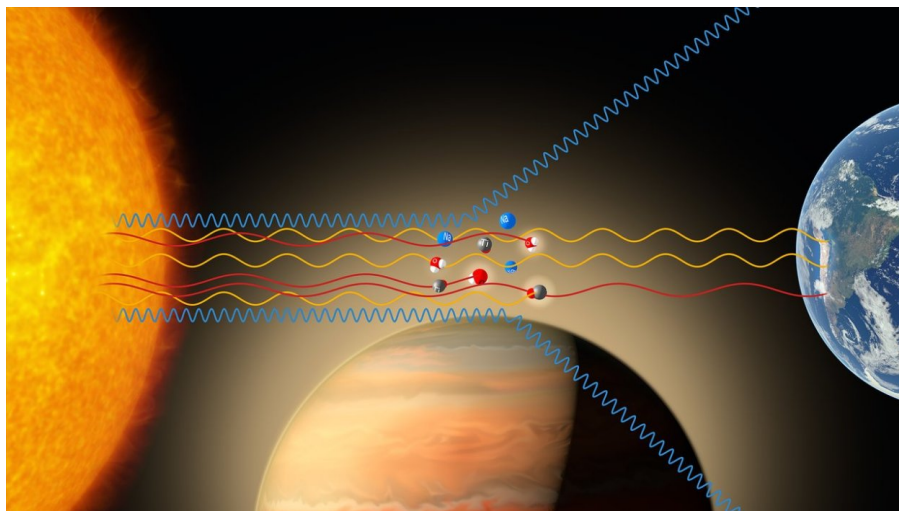


Figura 4.18: Ilustración que muestra el proceso en el que se basa la espectroscopía de transmisión. Crédito a ESO/M. Kornmesser. La luz de la estrella atraviesa la atmósfera del exoplaneta en el momento del tránsito, interaccionando con los componentes químicos de la misma. Si parte de la luz es absorbida por un cierto elemento, podemos identificarlo en nuestro espectro.

comparación al flujo de la radiación reflejada, la cual, como ya se ha dicho arriba, todavía no es posible detectar. Por ello, estudiaremos con mayor detenimiento el espectro de transmisión de un exoplaneta en el momento de su tránsito que el espectro de emisión.

Espectroscopía de transmisión

Como ya hemos apuntado, este tipo de espectroscopía se produce cuando el exoplaneta pasa por delante de la estrella (eclipse primario). Al analizar la fotometría de la estrella, apreciábamos como aparecía un valle debido al oscurecimiento del disco estelar, lo que se llama curva de luz (Sección 1.1.7). Para ello, considerábamos el flujo total en todas las longitudes de onda o flujo *bolométrico*, puesto que el disco del exoplaneta es totalmente opaco en todas las longitudes de onda¹⁶. Sin embargo, para un exoplaneta con una cierta

¹⁶Los gigantes gaseosos no son cuerpos sólidos, por lo que definir su “disco planetario” no es algo tan trivial como cuando consideramos planetas sólidos. Sin embargo, si el gigante gaseoso transita, es mucho más fácil definir su superficie, simplemente como la circunferencia de radio el hallado al estudiar la caída del flujo bolométrico en la fotometría de la estrella (Ecuación (1.12)).

Sección 4.4. Técnicas para la búsqueda de vida en exoplanetas/exosatélites

atmósfera, esto no es totalmente cierto, debido a que habrá parte de la luz que atraviese la atmósfera y, dependiendo de la longitud de onda considerada, se producirá mayor o menor absorción de la luz, con lo que el flujo será distinto. Esto implica que, en un exoplaneta con atmósfera, *su curva de luz depende de la longitud de onda*.

Passband (nm)	Transit radius ratio
550–600	$0.156\,903 \pm 0.000\,095$
600–650	$0.156\,744 \pm 0.000\,065$
650–700	$0.156\,552 \pm 0.000\,057$
700–750	$0.156\,388 \pm 0.000\,059$
750–800	$0.156\,501 \pm 0.000\,064$
800–850	$0.156\,210 \pm 0.000\,073$
850–900	$0.156\,147 \pm 0.000\,081$
900–950	$0.156\,120 \pm 0.000\,092$
950–1000	$0.156\,097 \pm 0.000\,125$
1000–1050	$0.155\,716 \pm 0.000\,218$

Tabla 4.2: Radio aparente de HD 189733b, para cada banda de longitudes de onda (Pont et al. 2008).

En la Figura 4.19 se puede apreciar cómo varía la curva de luz en función de la longitud de onda¹⁷, para el super-Tierra GJ 1214b. Cada longitud de onda tendrá, por tanto, una profundidad de tránsito asociado, es decir, un “radio” asociado (por la Ecuación 1.12). Dicho radio nos da la distancia desde el centro del planeta en la cual la atmósfera planetaria se vuelve opaca para una determinada longitud de onda. Así, el espectro de transmisión de un exoplaneta puede recuperarse a partir de la variación del radio del planeta en función de la longitud de onda, siendo el radio *verdadero* del planeta el asociado a la profundidad de tránsito de la curva de luz del flujo bolométrico. La variación de la profundidad del tránsito es normalmente muy pequeña, del orden de una milésima parte (Pont et al. 2008). En definitiva, el espectro de transmisión se obtendrá a partir del cociente del radio aparente y el radio de

¹⁷Los tránsitos se pueden estudiar en un gran rango de longitudes de onda, desde la banda ultravioleta hasta el infrarrojo lejano (Sing 2018; Vidal-Madjar et al. 2003; Richardson et al. 2006). Sin embargo, en la práctica, se suelen medir desde la banda visible (~ 300 nm) hasta el infrarrojo cercano ($\sim 2,5 \mu m$).

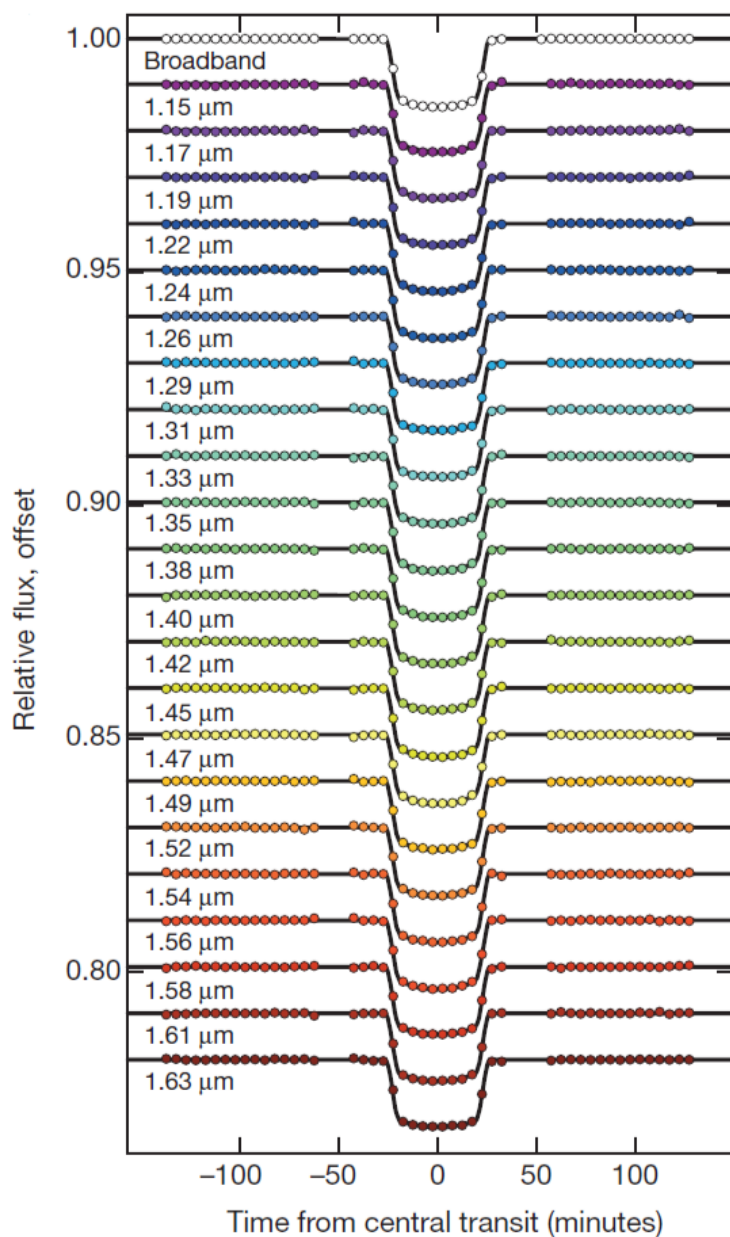


Figura 4.19: Curvas de luz para cada longitud de onda de la super-Tierra GJ 1214b. La curva de luz negra indica la curva de luz conjunta de la banda 1,15 - 1,63 μm (Kreidberg et al. 2014).

la estrella, para cada longitud de onda, tal y como muestra la Tabla 4.2.

Además del cociente del radio aparente y el radio de la estrella, el espectro de transmisión también se puede expresar como la *altitud relativa* de la atmósfera en función de la longitud de onda. La altitud relativa se define como la diferencia ente el radio aparente del planeta y el radio donde se encuentra su superficie, es decir, el radio verdadero.

Así mismo, también se define la **altura de escala atmosférica** H como

$$H = \frac{\sigma T}{mg}, \quad (4.17)$$

siendo σ la constante de Boltzmann, T la temperatura superficial del planeta, m la masa molecular media de las partículas de la atmósfera y g la gravedad superficial del exoplaneta. H se interpreta como la altitud en la cual la presión atmosférica disminuye por un factor de e (refiriéndose e al número de Euler). La ecuación anterior indica que, cuanto mayor m (atmósfera más pesada), H será mayor, por lo que la presión disminuirá mucho más despacio con la altitud. Además, cuanto más gravedad tenga el planeta, menor será H , puesto que la atmósfera se encontrará mucho más concentrada en torno a las capas inferiores que en las capas superiores. Por último, cuanto más caliente esté el exoplaneta, mayor será H puesto que más extendida estará su atmósfera.

Los Júpiter calientes, pese a poseer mayor gravedad superficial que los exoplanetas tipo Tierra, cuentan con un H mayor (Miller-Ricci et al. 2008). Ahora, cuanto mayor sea H , mayor será la señal de las líneas de absorción de su espectro de transmisión (Ecuación (6) de Sing 2018). Es por eso que la mayoría de las atmósferas en exoplanetas son detectadas en Júpiter calientes, siendo mucho más difícil hacerlo en exoplanetas similares a la Tierra.

Se puede estimar la altura de escala atmosférica de un Júpiter caliente incluso sin conocer su espectro de transmisión, si tenemos en cuenta que la gravedad superficial es conocida. Por ejemplo, a partir del método de tránsitos y de velocidad radial, la masa molecular media de su atmósfera corresponde a una atmósfera cuya composición es la típica de los gigantes gaseosos, dominada por una mezcla de hidrógeno y helio, y la temperatura superficial puede ser aproximada por la *temperatura del equilibrio*¹⁸, T_{eq} , asumiendo albedo cero y

¹⁸ T_{eq} denota la temperatura teórica superficial de un planeta teniendo en cuenta solamente

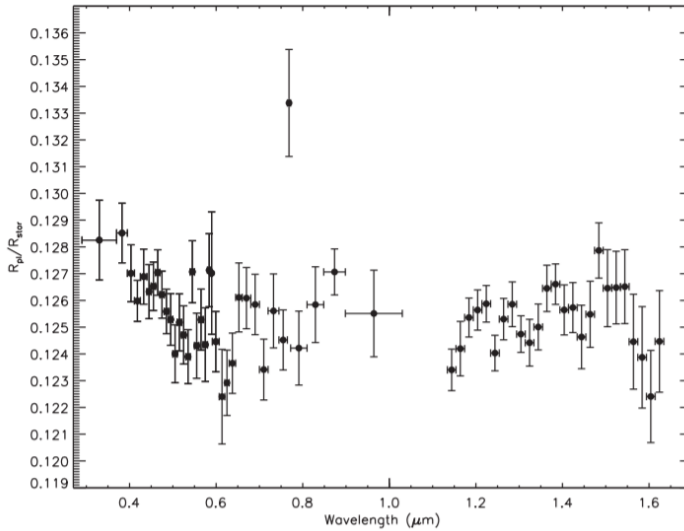


Figura 4.20: Espectro de transmisión del planeta WASP-31b. Las barras horizontales representan el ancho de banda en cada una de las mediciones, y las barras verticales representan el error en el cálculo del radio aparente, a partir de la curva de luz asociada a cada banda (Sing et al. 2015).

una completa redistribución del calor en el exoplaneta (Cowan & Agol 2011):

$$T_{\text{eq}} = (1/4)^{1/4} T_{\text{eff}} \sqrt{\frac{R_*}{a_p}}, \quad (4.18)$$

siendo T_{eff} la temperatura efectiva de la estrella, a_p el semieje de la órbita del exoplaneta con respecto a la estrella y R_* el radio de la estrella.

Espectro de transmisión de los Júpiter calientes

Teóricamente, un gigante gaseoso cuenta con un espectro en que destacan las siguientes características:

- Líneas de absorción de metales alcalinos como Na ó K.
- Líneas de absorción en la banda infrarroja correspondientes a metano (CH_4 ; 1,4 – 1,7 – 2,2 μm), vapor de agua (H_2O ; 1 – 2,6 μm), o monóxido de carbono (CO ; 2,3 – 4,7 μm), y la radiación de su estrella.

de carbono (CO; 1,2 – 1,6 – 2,3 μm), siendo predominante el metano a bajas temperaturas y el monóxido de carbono a altas temperaturas (Hubbard et al. 2001). También se han observado líneas de absorción correspondientes al dióxido de carbono (Swain et al. 2009; Madhusudhan and Seager 2009).

- En gigantes gaseosos extremadamente calientes, se detectaron así mismo líneas de absorción correspondientes al óxido de titanio (TiO) y al óxido de vanadio (VO) (Fortney et al. 2008; Hubeny et al. 2003). Recientemente, se han descubierto líneas de absorción correspondientes al *hierro* en WASP-76b, lo que podría indicar lluvias de hierro al condensarse (Ehrenreich et al. 2020).

- *Dispersión Rayleigh*. Debido a la dispersión que sufren los rayos de luz que atraviesan la atmósfera del exoplaneta, la radiación “azul” suele ser fuertemente absorbida, lo que provoca fuertes líneas en el espectro del azul visible. Conforme la longitud de onda se va haciendo mayor, este efecto disminuye muy rápidamente, con lo que sólo es notable cuando la longitud de onda es corta (por ejemplo, Lecavelier des Etangs 2008). Esto confiere al espectro una cierta pendiente (véase Figura 4.21). En los planetas gigantes, la dispersión Rayleigh es generalmente causada por el H_2 , que es el gas predominante, pero también se puede producir dispersión Rayleigh en una atmósfera en la que existan *aerosoles* como las llamadas “neblinas” (*hazes*)¹⁹.

Espectro de transmisión de los exoplanetas tipo Tierra

Estudiar el espectro de transmisión de un exoplaneta tipo Tierra es, como ya hemos comentado arriba, mucho más difícil que el espectro de transmisión de un Júpiter caliente. De hecho, el exoplaneta más parecido a la Tierra en el cual se ha detectado una atmósfera es GJ 1132b, cuya masa y radio son $1,6M_{\oplus}$ y $1,2R_{\oplus}$, respectivamente (Berta-Thompson et al. 2015). Desgraciadamente, no se encontraron líneas de absorción en su espectro de transmisión, con lo que estudiar su atmósfera se hace prácticamente imposible (Diamond-Lowe et al. 2018).

¹⁹Se llaman *aerosoles* a las partículas sólidas o líquidas suspendidas en un medio gaseoso; en este caso, la atmósfera. Los aerosoles se dividen en nubes y neblinas. El criterio por el cual diferenciaremos *nubes* de *neblinas* es el utilizado en Sing et al. (2016), donde las nubes se definen como una fuente de opacidad gris, la cual se produce en todas las longitudes de onda (ver Sección anterior), mientras que las neblinas se definen como una fuente de opacidad que se comporta igual que la dispersión Rayleigh, actuando primordialmente sobre las longitudes de onda cortas (véase Figura 4.21).

Si utilizamos como modelo de referencia el espectro de transmisión de la Tierra, deducimos que se pueden presentar, en el espectro de transmisión de un exoplaneta tipo Tierra, alguno de los siguientes fenómenos:

- Ausencia de líneas de absorción de metales alcalinos (Na, K, etc.).
- Ausencia de líneas de absorción del nitrógeno molecular (N_2), pese a ser, presumiblemente, el gas predominante en la atmósfera de los exoplanetas similares a la Tierra (Ehrenreich et al. 2006b). En cambio, las líneas de absorción del óxido de nitrógeno (N_2O) suelen aparecer en la banda infrarroja (por ejemplo, Kaltenegger et al. 2010), aunque en concentraciones iguales a las de la atmósfera terrestre actual, estas líneas pueden no ser detectables (Rugheimer et al. 2013).
- Líneas de absorción del metano (CH_4), del vapor de agua o del dióxido de carbono (CO_2) (Kaltenegger et al. 2010).
- Líneas de absorción del oxígeno (O_2) o incluso del ozono (O_3) (Kaltenegger et al. 2010). Dichos compuestos, si son detectables, podrían indicar la presencia de vida, puesto que se pueden haber producido mediante procesos bióticos, lo que se llama *biomarcadores*²⁰. Otro tipo de biomarcadores potencialmente detectables en el espectro son el cloruro de metilo (CH_3Cl) y el ya mencionado óxido de nitrógeno (Schwieterman et al. 2018), aunque la presencia de ambos es más favorable en sistemas extrasolares con estrellas con bajos niveles de radiación ultravioleta, como las tipo M (Seager et al. 2013; Segura et al. 2005). En la Sección siguiente profundizaremos en el estudio de los biomarcadores.

- Al igual que en los Júpiter calientes, se espera que exista dispersión Rayleigh, inducida tanto por los gases atmosféricos predominantes como por ae-

²⁰El O_2 y O_3 , por sí solos, no tienen por qué tener un origen biótico, sin embargo, si encontramos en nuestro espectro fuertes líneas de absorción de estos elementos y de otros gases fuertemente reactivos con el oxígeno, como el metano, significaría que existe una fuente biótica la cual repone dicha cantidad de oxígeno (Rugheimer et al. 2013). En Kaltenegger (2010), por ejemplo, se hace la distinción entre biomarcadores y bioindicadores, donde el primero hace referencia a las especies que apuntan a una fuente biótica (CH_4+O_3 , CH_4+O_2), mientras que el segundo indica ciertos componentes químicos con un posible origen biótico pero que también se pueden producir por fenómenos físicos (oxígeno, ozono, metano...). Nosotros utilizaremos la definición de biomarcadores utilizada en Schwieterman et al. (2018), la cual engloba todos las especies químicas cuya presencia pueda indicar origen biológico, e incluiremos los bioindicadores en la definición de biomarcadores.

Sección 4.4. Técnicas para la búsqueda de vida en exoplanetas/exosatélites

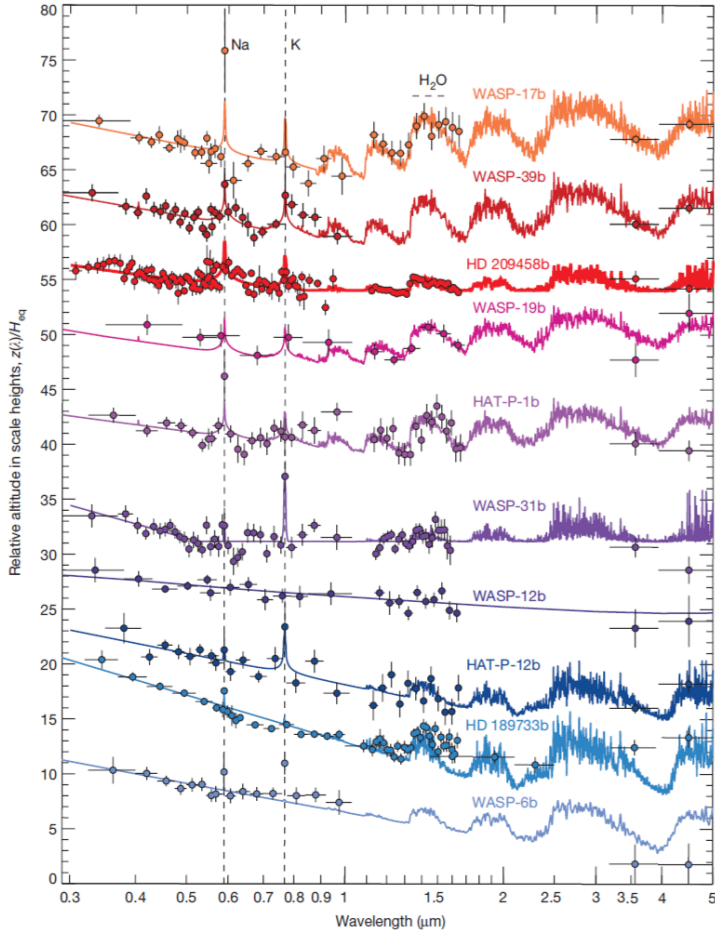


Figura 4.21: Espectro de transmisión para varios Júpiter calientes. Se indican las líneas de absorción del sodio, del potasio y del vapor de agua. Se puede apreciar como, en la banda del azul visible, todos los exoplanetas presentan una “pendiente” ($0,3 - 0,6 \mu\text{m}$, aproximadamente), la cual se atribuye a la dispersión Rayleigh. No obstante, hay algunos como WASP-6b o HD 189733b cuya pendiente se prolonga más allá incluso del espectro visible, lo que puede indicar presencia de neblinas. De igual modo, se puede apreciar como los picos del sodio de WASP-6b, WASP-12b y HD 189733b son débiles o casi inexistentes, lo que puede indicar la presencia de nubes, causando extinción en dichos exoplanetas. Los espectros están ordenados de mayor radiación roja (espectros superiores) a mayor radiación azul (espectros inferiores), dependiendo si las altitudes relativas son mayores en el espectro azul o en el espectro rojo. Crédito a [Sing et al. \(2016\)](#).

rosos, ya que se cree que las neblinas son frecuentes en la atmósfera de los exoplanetas tipo Tierra (Robinson 2017).

En todo caso, el estudio de la espectroscopía de transmisión de los exoplanetas tipo Tierra está todavía en desarrollo y sus atmósferas pueden ser muy diversas. Futuras observaciones serán necesarias para detectar atmósferas de exoplanetas tipo Tierra en la HZ de estrellas como el Sol, en las cuales el tránsito es muy poco probable.

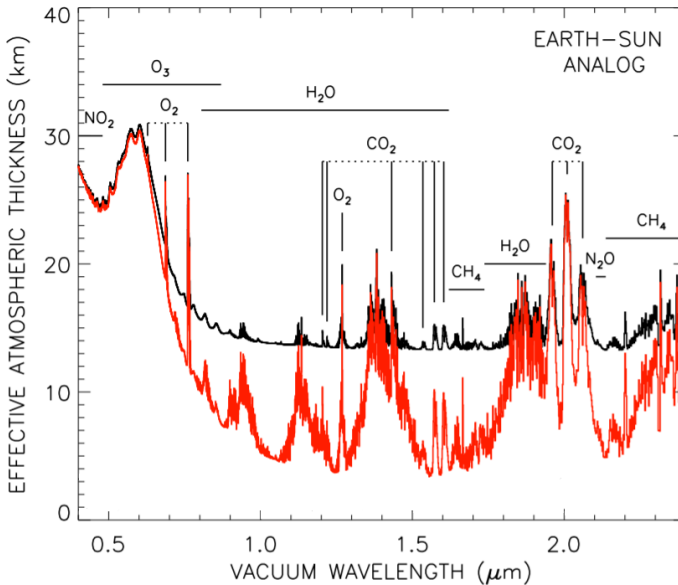


Figura 4.22: Espectro de transmisión teórico de un planeta tipo Tierra sin nubes transitando una estrella tipo solar, con (línea negra) y sin (línea roja) refracción. Imagen adaptada de [Bétrémieux & Kaltenegger \(2014\)](#).

A continuación, es necesario considerar cómo afecta la presencia de aerosoles a las líneas de absorción del espectro de transmisión. Como hemos visto más arriba, los aerosoles son una importante fuente de opacidad, por lo que puede debilitar las líneas de absorción de nuestro espectro y, por consiguiente, dificultarnos la detección de elementos químicos favorables para la vida (Fortney 2005; Kreidberg et al. 2014; Knutson et al. 2014; Robinson et al. 2014). Este fenómeno se conoce como *extinción*, y limita significativamente la

sensibilidad de la espectroscopía de tránsito (Figura 4.21). Débiles líneas de absorción debido a aerosoles podrían, por tanto, confundirse con poca abundancia del elemento en cuestión. De hecho, se predice que los Júpiter calientes deben tener grandes cantidades de vapor de agua en su atmósfera, con lo que la detección de débiles líneas de absorción del H₂O en dichos exoplanetas debe asociarse a la presencia de aerosoles (Sing et al. 2016).

Otro fenómeno a considerar en nuestro espectro es la *refracción*, debido al cual los rayos que atraviesan regiones más densas de la atmósfera pueden ser suficientemente desviados como para escapar fuera del disco estelar (Bétrémieux & Kaltenegger 2014; Figura 4.18). Dicha desviación provoca, al igual que los aerosoles, una relajación de los picos de absorción (Figura 4.22).

4.4.2.3. Caracterización de atmósferas de exosatélites

Debido a las dificultades que presenta la detección de exosatélites por medio de la curva de luz (Sección 1.2.2), analizar el espectro de transmisión de un supuesto exosatélite tipo Tierra, o mismo una super-Tierra, se encuentra, a día de hoy, con demasiados problemas como para ser viable. Primero tendríamos que analizar la curva de luz cuando el supuesto exosatélite transita la estrella. Aún asumiendo que, ciertamente, se trata de un exosatélite, lo cual aún no se puede confirmar al 100% (Véase la Tabla 1.1 o la [Introducción](#)), nuestro fotómetro tendría que contar con la sensibilidad suficiente para apreciar diferencias notables en la curva de luz de las distintas longitudes de onda. Incluso si todo este escenario hipotético fuera posible, necesitaríamos todavía mayor sensibilidad para detectar las débiles líneas de absorción provocadas por la presencia de aerosoles que, con toda seguridad, se presentarían en el exosatélite. Concluimos, por tanto, que hasta que no se lleguen a resultados satisfactorios en lo que se refiere a la detección de un exosatélite, no es posible el tratamiento de su espectroscopía de transmisión y, por tanto, la investigación de su atmósfera²¹.

En Kipping et al. (2009) se tiene en cuenta la posibilidad de estudiar la espectroscopía de transmisión de un supuesto exosatélite con masa $0,2M_{\oplus}$ que se encontrase en un sistema que constase de un exoplaneta y de una estrella tipo M2V a 10 pc del observador. Se llega a la conclusión que, si dicho exosatélite fuese detectable, su magnitud aparente sería 5,5 en la banda infrarroja, por lo que tendría el mismo brillo que HD 189733, y su atmósfera podría ser

²¹No tenemos en cuenta ni el espectro de emisión ni de reflexión del exosatélite, ya que esos serían incluso más difíciles de estudiar.

detectada gracias al telescopio James Webb después de contar con los datos de 30 tránsitos. Así pues, se esperan resultados prometedores en lo que refiere al futuro descubrimiento de atmósferas en exoplanetas y exosatélites.

4.4.2.4. Biomarcadores

En esta Sección profundizaremos en los distintos biomarcadores que se pueden presentar en el espectro de transmisión de un exoplaneta tipo Tierra. Para ello, usaremos como referencia los biomarcadores presentes en la atmósfera de nuestro planeta (Seager 2013; Des Marais et al. 2002):

- O₂ y O₃ (ozono). El oxígeno molecular presente en grandes cantidades indica actividad fotosintética en la Tierra. El ozono se forma a partir del oxígeno, gracias a la energía proveniente de la radiación solar (Chapman 1930).

- Metano (CH₄). Ciertos organismos metanógenos obtienen energía mediante la producción de metano (Haqq-Misra et al. 2008; Seager & Deming 2010), por lo que la presencia de éste en la atmósfera de un exoplaneta tipo Tierra podría indicar la presencia de vida²². Ya hemos apuntado, no obstante, que el metano se puede producir abióticamente, siendo una de sus posibles fuentes abióticas en la Tierra el vulcanismo (por ejemplo, Schindler & Kasting 2000).

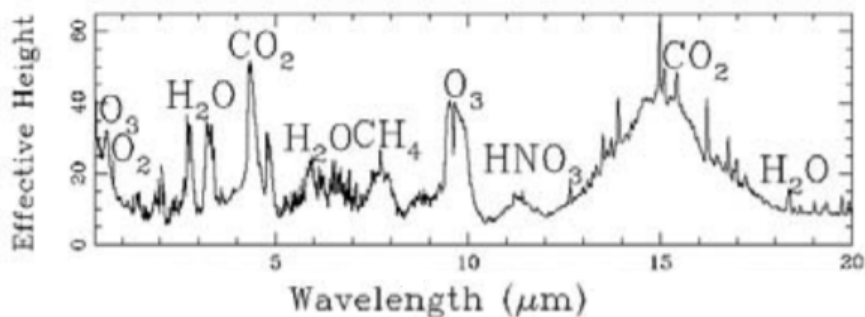


Figura 4.23: Espectro de transmisión de la Tierra (Kaltenegger & Traub 1999). Los elementos químicos O₂, O₃, CO₂, CH₄ y H₂O son detectados en el espectro.

²²Dicha concentración de metano podría ser mucho mayor en un exoplaneta joven, al igual que sucedió en la Tierra en su momento (Haqq-Misra et al. 2008; Seager & Deming 2010).

Sección 4.4. Técnicas para la búsqueda de vida en exoplanetas/exosatélites

- El óxido de nitrógeno (N_2O), el cual proviene de la acción bacteriana y, en menor medida, de la actividad del hombre (Rugheimer et al. 2013). No es detectable en el espectro de transmisión de la Tierra (Figura 4.23), debido a la baja abundancia del componente en la atmósfera, lo que provoca que las líneas de absorción sean indetectables.

- Cloruro de metilo (CH_3Cl). Las principales fuentes de este componente químico en la atmósfera de la Tierra son predominantemente bióticas: organismos marinos, quema de biomasa, o reacciones de la luz solar con la espuma del mar (Segura et al. 2005). Su concentración en la atmósfera es muy pequeña, por lo que tampoco aparece en el espectro de transmisión de la Tierra.

- Amoníaco (NH_3). El amoníaco en la Tierra tiene, mayoritariamente, origen biológico (Claudi & Alei 2019). Su concentración en la atmósfera es, por otro lado, muy pequeña, ya que se cree que su tiempo de vida es muy corto debido a la radiación UV (Kaltenegger et al. 2010).

- Trazas de diversos gases que involucran el azufre, como el dimetilsulfuro ($(\text{CH}_2)_3\text{S}$), el dimetilsulfóxido ($(\text{CH}_3)_2\text{SO}_2$) o el metanotiol (CH_4S) (Claudi & Alei 2019). Obviamente tampoco aparecen en el espectro de transmisión de la Tierra.

- Se ha discutido la posibilidad de la *fosfina* (PH_3) como un posible biomarcador, puesto que varias fuentes apuntan a que la presencia de este gas en planetas rocosos tiene origen únicamente biótico (Pasek et al. 2014; Bains et al. 2019). Sin embargo, debido al reciente descubrimiento de este gas en las capas interiores de la atmósfera de Venus, se planteó un debate sobre si la fosfina es realmente un indicador de vida, lo que confirmaría la presencia de vida en Venus, o si en realidad puede tener otros orígenes (por ejemplo, Sousa-Silva et al. 2020). De todas maneras, no se conocen organismos capaces de producir *directamente* fosfina, y podría ser que la producción de este compuesto en Venus se llevase a cabo mediante reacciones químicas todavía desconocidas (Greaves et al. 2020). Por ello, la clasificación de la fosfina como biomarcador está, a día de hoy, puesta en duda.

Además, resulta interesante estudiar si la polución antropogénica, la cual es indicativa no solo de vida, sino de vida inteligente, puede ser detectable en el espectro de transmisión de un cierto exoplaneta. Si fuera posible, podríamos concluir, con cierta seguridad, que dicho exoplaneta es habitable y que alberga vida. En la literatura, no obstante, se descarta esa posibilidad, basándose en

la baja abundancia de gases CFC como el clorofluorometano en la atmósfera de la Tierra (Des Marais et al. 2002; Selsis et al. 2002, Kaltenecker et al. 2010; Kaltenecker 2017; etc.). En Lin et al. (2014), desarrollando la idea presentada en Owen (1980), se investiga la detección de líneas de absorción de los CFCs, centrándose en los tipos de CFCs más fáciles de detectar: los **fluorocarbonos** (CF_4) y los **triclorofluorometanos** (CCl_3F) (Claudi & Alei 2019), y llegan a la conclusión de que las principales líneas de absorción del CF_4 y del CCl_3F podrían ser detectadas en un futuro con el telescopio James Webb, siempre y cuando la estrella fuera una enana blanca y que la concentración de CFCs en la atmósfera de dicho exoplaneta fuese 10 veces mayor que en la de la Tierra.

No hemos incluido como biomarcadores ni el CO_2 ni el H_2O , puesto que se encuentran con abundancia tanto en exoplanetas aptos para la vida como en Júpiter calientes, pero no por ello debemos olvidar la importancia que ambos tienen para la vida, sobre todo el segundo.

4.4.3. Caracterización de océanos interiores

Existen cuerpos en el Sistema Solar que, pese a estar fuera de la zona habitable y por ende no contar con agua superficial, presentan ciertos océanos en su interior, debido a que el hielo de sus mantos se calienta a causa del calentamiento de marea y, en menor medida, del calor radiogénico y del calor proveniente de la formación del cuerpo (véase Sección 4.3.2). Dichos cuerpos incluyen: los satélites galileanos excepto Ío (Spohn & Schubert 2003), Tritón (Masters et al. 2014; Gaeman et al. 2012), Plutón (Robuchon & Nimmo 2011), Encélado (por ejemplo, Thomas et al. 2016) o Ceres²³ (McCord & Sotin 2005), aunque, en este último, su mayor fuente de calor interno es el calor radiogénico, puesto que no existen cuerpos lo suficientemente masivos su vecindad como para que sus fuerzas de marea influyan en el calor de su interior. De igual manera, asumimos que los exoplanetas que se encuentren más allá de la línea de hielo de su estrella han de contar con una gran cantidad de hielo en su interior. Además, puede suceder que un exoplaneta que se hubiera formado más allá de la línea de hielo de la estrella hubiera migrado hacia ella, encontrándose, hoy en día, *dentro* de ella. Un ejemplo de ello lo tenemos en TRAPPIST-1

²³Todos estos cuerpos se sitúan por detrás de la *línea de hielo* del Sol: 2,7 u.a. Se denomina así a la distancia a partir de la cual el hielo presente en el Sistema Solar primigenio no era volátil y se podían formar cuerpos con una gran cantidad de éste (Lecar et al. 2006). Es por ello que Ceres, Europa o Ganimedes presentan enormes capas de hielo presurizado en su interior. Curiosamente, el semieje de la órbita de Ceres se encuentra muy cerca de la línea de hielo: 2,77 u.a.

(Unterborn et al. 2018).

Ahora bien, si un exoplaneta tiene capas de hielo en su interior, ¿de qué dependerá que exista una fuente de calor lo suficientemente potente para derretir ese hielo y que se forme un océano? Si asumimos que el exoplaneta está lo suficientemente lejos como para que el calentamiento de marea de la estrella sea despreciable, las principales fuentes de calor serán el calor radiogénico y el calor primordial proveniente de la formación del exoplaneta, tal y como sucede en Ceres.

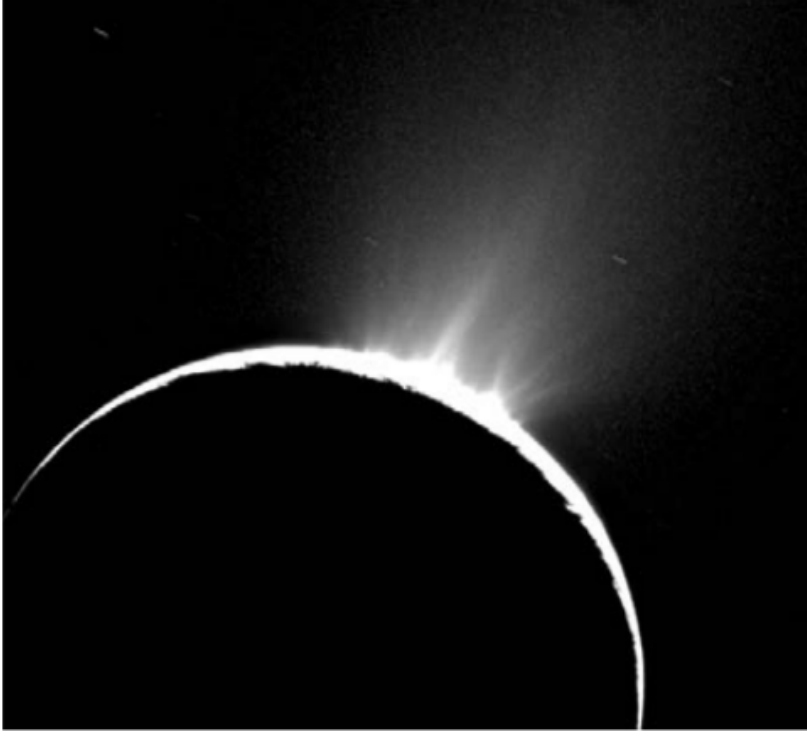


Figura 4.24: Géiseres compuestos de cristales de hielo saliendo en erupción de la superficie de Encélado. Crédito a NASA/JPL/Space Science Institute.

El calor radiogénico depende de un factor fundamental: la **cantidad roca-hielo del exoplaneta**. En este sentido, los modelos predicen que el mejor escenario posible para que el exoplaneta tenga un océano interior es que cuen-

te con una cantidad *equilibrada* de roca (silicatos) y hielo, de manera que si cuenta con una gran cantidad de silicatos y una pequeña cantidad de hielo o viceversa, es poco probable que se forme un océano interior (véase el estudio sobre el supuesto océano interior en el exoplaneta OGLE 2005-BLG-390Lb de Ehrenreich et al. 2006a, 2008).

Con respecto al calor primigenio, los exoplanetas/exosatélites viejos son desfavorables para la presencia de un océano interior, ya que una mayor edad implica un menor calor residual proveniente de su formación. El calor radiogénico es, de igual manera, menor en los exoplanetas/exosatélites viejos, debido a un mayor decaimiento de los isótopos radioactivos presentes en los silicatos del exoplaneta/exosatélite.

Es necesario recordar que la presencia de un océano interior en un exoplaneta/exosatélite **no entra en la definición de habitabilidad** que hemos establecido en la Sección 4.1, puesto que este escenario es bastante frecuente, incluso en nuestro Sistema Solar, y no tiene en cuenta todos los factores favorables para la vida que existen en un exoplaneta/exosatélite donde el agua superficial se mantiene estable. Aún así, el hecho de detectar un océano interior proporciona un escenario donde potencialmente se podría desarrollar vida, por lo que sería conveniente poder analizar dichos océanos interiores para investigar si, efectivamente, existen indicios de vida allí. En el Sistema Solar, llevar a cabo tal empresa es posible mediante varias técnicas, entre ellas la exploración espacial. Por ejemplo, en relación con los satélites galileanos, se han diseñado varias misiones, como Cassini (Porco et al. 2003; 2006; etc.), Galileo (Zimmer et al. 2000; Sohl et al. 2002; etc.) o Voyager (Smith et al. 1979a, 1979b; Squires et al. 1983; etc.). Para 2022 se espera el lanzamiento de la misión JUICE (*JU*pter *I*Cy moon *E*xplorer), la cual tendrá como objetivo llevar a cabo un detallado análisis de Ganímedes, así como estudiar los océanos interiores de Europa y Calisto (Grasset et al. 2013a; Dougherty et al. 2011).

En el Centro de Astrobiología del CSIC en Torrejón de Ardoz (Madrid, España), en el que hemos realizado una estancia de investigación en 2019, se investiga la presencia de clatratos²⁴ en los océanos de Europa, en particular los clatratos en los cuales una red de moléculas H₂O atrapan un gas, presumiblemente CO₂ o metano (Prieto-Ballesteros & Muñoz-Iglesias 2014; Muñoz-Iglesias et al. 2012; Prieto-Ballesteros et al. 2005, 2011; Méndez et

²⁴Se llama clatratos a ciertos compuestos químicos en los que una red formada por una cierta molécula, como el H₂O, atrapa otra molécula en su interior, adoptando una estructura cristalina (Figura 4.25).

al. 2017; Jiménez et al. 2012; Muñoz-Iglesias et al. 2011a, 2011b; etc.). Estos compuestos tienen un papel importante en los ciclos bioquímicos de elementos importantes para la vida, ya que pueden restringir la captación de los gases como el metano o el CO_2 ; o, si los clatratos se rompen, incluso *liberarlos*, al soltar la sustancia encerrada. Además, pueden regular el pH de la solución acuosa del océano interior o mismo generar energía en forma de calor (Prieto-Ballesteros & Muñoz-Iglesias 2014; Méndez et al. 2017). Ciertamente, los clatratos juegan un papel de gran importancia en la habitabilidad de un océano interior.

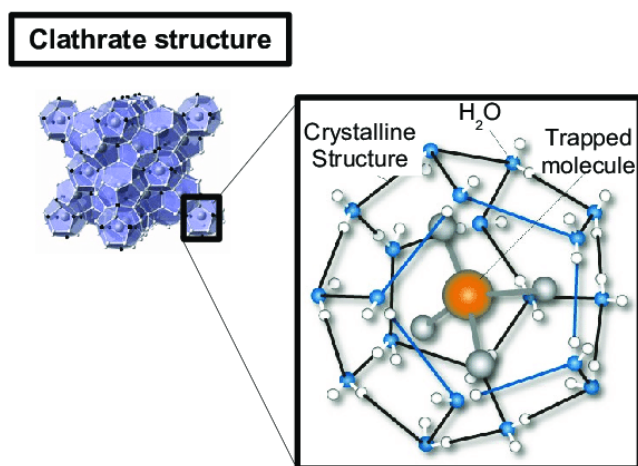


Figura 4.25: Estructura de un clatrato de H_2O (Marboeuf et al. 2011).

El estudio de clatratos en el satélite Europa fue originalmente llevado a cabo por la sonda Galileo. No se detectaron clatratos en su superficie, porque son sumamente inestables debido a la baja presión superficial, pero sí que se encontraron diversos *hidratos*²⁵ de ciertos elementos químicos, como el sulfato de magnesio (MgSO_4 ; Muñoz-Iglesias et al. 2011b, 2012; Dalton et al. 2005). Además, se ha podido constatar la existencia de CO_2 y SO_2 en la superficie de este satélite joviano (McCord et al. 1998), lo que podría indicar grandes reservas de CO_2 en forma de clatratos en su interior (Crawford and Stevenson 1988).

²⁵Los hidratos se diferencian de los clatratos en que, pese a constar de dos compuestos químicos, siendo uno de ellos el H_2O , no presentan ningún tipo de estructura cristalina y, por tanto, un componente no atrapa al otro.

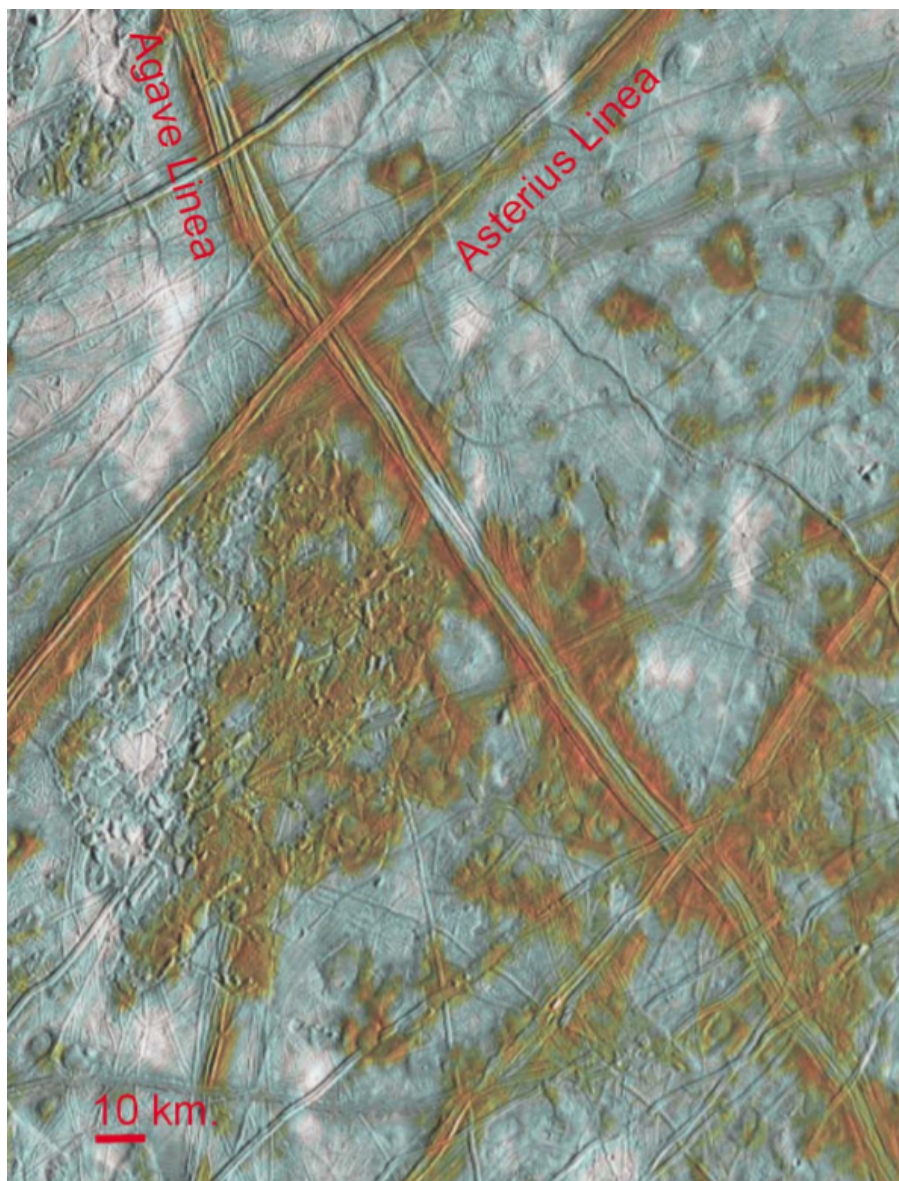


Figura 4.26: *Chaos Conamara*, una región de la superficie del satélite joviano Europa con un terreno extremadamente escarpado y agrietado. Su presencia podría revelar la existencia de clatratos en su interior. Crédito a *NASA/JPL/University of Arizona*.

Se ha demostrado que, en la Tierra, la desestabilización de los clatratos y la posterior liberación de los gases que encierran ha causado grandes accidentes geológicos (véase [Kargel & Lunine 1998](#)), además de perpetrar, debido a la masiva cantidad de metano expulsado, la extinción en masa del Paleoceno, hace unos 66-56 Myr (por ejemplo, [Dickens 2003](#); [Thomas et al. 2002](#)). De igual manera, se piensa que las zonas de la superficie de Europa cuyo terreno se encuentra especialmente agrietado (lo que se conoce como *caos*) se pudieron haber formado debido a la destrucción de clatratos en capas cercanas a la superficie ([Figura 4.26](#); [Spaun et al. 1998a, 1998b](#); [Greenberg et al. 1999](#)).

Aún con todo, todavía no se ha demostrado la existencia de clatratos, ni en el interior de Europa ni en el interior de ningún planeta o satélite, excepto en la Tierra ([Oancea et al. 2012](#)). Si los clatratos son lo suficientemente abundantes en el interior de Europa, podrían ser detectados por medio de métodos sísmicos ([Lee et al. 2003](#)). Futuras misiones serán necesarias para llevar a cabo dichas mediciones sísmicas.

Así pues, estudiar los océanos interiores de cuerpos, incluso del Sistema Solar, es sumamente complicado. Resulta razonable pensar que, a la hora de investigar acerca de los océanos interiores de exoplanetas o exosatélites, las dificultades sean mucho mayores, no solo porque la tecnología para la exploración espacial extrasolar todavía es insuficiente, sino porque para estudiar el interior de un exoplaneta/exosatélite se requieren técnicas observacionales que, a gran distancia pueden no ser posibles de aplicar. Por ejemplo, la existencia de géiseres en Encélado ([Figura 4.24](#)) revela la presencia de un océano interior ([Anderson et al. 1998](#), [Porco et al. 2006](#)), pero la observación de dichos géiseres en un exoplaneta o exosatélite sería prácticamente imposible debido a la potencia insuficiente de los telescopios actuales ([Schulze-Makuch et al. 2011](#)).

Lo que podemos hacer, no obstante, es utilizar modelos teóricos para predecir la composición interna del exoplaneta/exosatélite y, así, averiguar si cuenta con grandes cantidades de H_2O . A continuación, estudiaremos la **relación masa-radio**, la cual nos ayudará a conocer su composición, siempre y cuando tengamos una estimación lo más precisa posible de la masa y el radio del exoplaneta/exosatélite,

4.4.4. Relación masa-radio

La relación que existe entre la masa y el radio de exoplanetas y exosatélites es una herramienta muy potente para determinar su **composición** y, en con-

secuencia, estudiar su habitabilidad. Existen muchas investigaciones acerca de la relación masa-radio en los exoplanetas, dependiendo del modelo estructural elegido (Fortney et al. 2007; Seager et al. 2007; Sotin et al. 2007; Valencia et al. 2007; Adams et al. 2008; Grasset et al. 2009; Mordasini et al. 2012; Swift et al. 2011; Batygin & Stevenson 2013; Zeng & Sasselov 2013; Lopez & Fortney 2014; Weiss & Marcy 2014; Zeng et al. 2016; etc.).

La relación masa-radio se deriva, en todos los casos, de la integración de las ecuaciones que relacionan el radio, $R(M)$, la densidad $\rho(M)$, la presión $P(M)$ y la temperatura $T(M)$ de un cuerpo esférico en equilibrio hidrostático²⁶ (por ejemplo, Zeng & Sasselov 2013):

$$\frac{dR(M)}{dM} = \frac{1}{4\pi R(M)^2 \rho(M)}, \quad (4.19)$$

$$\frac{dP(M)}{dM} = -\frac{GM}{4\pi R(M)^4} \quad (4.20)$$

y

$$\rho = f(T, P), \quad (4.21)$$

siendo G la constante de gravitación universal y f una función de la temperatura y la presión, la cual depende de la composición del exoplaneta/exosatélite. Esta última ecuación se llama la **ecuación de estado** para un determinado material.

Se calcula $P(M)$ y $R(M)$ sustituyendo (4.21) en (4.19). Con $R(M)$, por tanto, obtenemos el radio en función de la masa. La temperatura, como ya ha sido comentado en la literatura (Valencia et al. 2006, 2007; Fortney et al. 2007; Sotin et al. 2007; etc.), no es importante a la hora de derivar la relación masa-radio.

Nótese que la integración de las ecuaciones dependerá tanto de la composición del planeta como de las condiciones iniciales de contorno, es decir, de los valores de presión y radio en el centro del cuerpo y en la superficie. Evidentemente, el radio en el centro del cuerpo será 0 y, en la superficie, será el radio del exoplaneta/exosatélite. El valor de la presión en la superficie, por el contrario, dependerá del modelo elegido, y el valor de la presión en el centro del cuerpo, de la ecuación de estado que consideremos. Con estas condiciones,

²⁶Con esta definición incluimos tanto exoplanetas como exosatélites esféricos.

podremos integrar (4.19) y (4.20), para así expresar el radio en función de la masa.

Las composiciones tratadas en Zeng & Sasselov (2013) son:

1. 100 % hierro.

2. 50 % hierro y 50 % MgSiO_3 (roca). Este tipo de planetas poseen un núcleo ferroso y un manto rocoso, teniendo el núcleo la mitad de la masa total del planeta. Se toma la perovskita (MgSiO_3) para identificar la cantidad de roca que hay en un exoplaneta porque es el silicato predominante en el manto de la Tierra (por ejemplo, Tschauner et al. 2014).

3. 100 % roca.

4. 50 % H_2O (hielo) y 50 % roca. Estos planetas tienen una corteza helada o líquida, dependiendo si el exoplaneta se encuentra en la HZ de la estrella, un manto superior de hielo y un manto inferior de roca. El hielo del manto y de la corteza conforman el 50 % de la masa total del exoplaneta. Se llama *planeta océano*²⁷ a un planeta cuyo H_2O constituye más de un 25 % de la masa total del exoplaneta (Seager et al. 2007).

5. 75 % hielo y 25 % roca. La corteza y el manto formados por H_2O conforman el 75 % de la masa total del exoplaneta. El resto del manto está formado por roca.

6. 100 % hielo.

No tenemos en cuenta exoplanetas gaseosos o que tengan una gran envoltura gaseosa, como los exoplanetas tipo Neptuno.

La Figura 4.28 muestra las curvas masa-radio para todos los tipos de exoplanetas que hemos tratado arriba, según el modelo de Zeng & Sasselov (2013). La Tierra y Venus se hallan entre las curvas de los planetas 100 % rocosos y de los planetas con un 50 % de hierro, lo cual nos indica que ambos poseen un núcleo de hierro importante. Nótese que las curvas *no se intersecan*, por lo que, si pudiésemos calcular con suficiente precisión la masa y el radio del

²⁷Se supone que un planeta océano también consta de un núcleo ferroso (ver Figura 4.27), pero aquí consideraremos que su masa es despreciable en todos los casos.

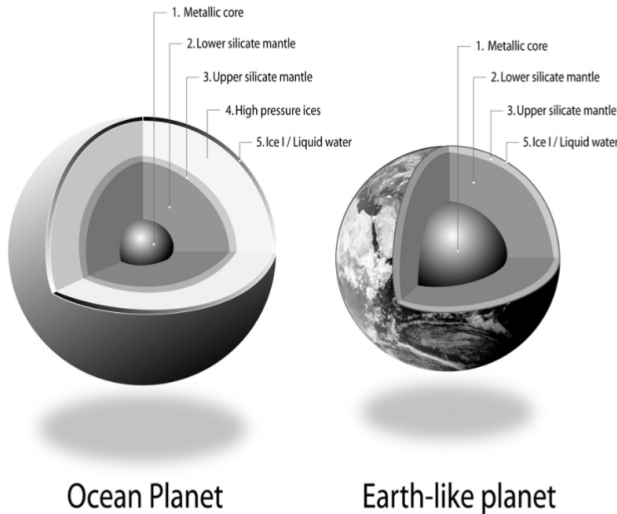


Figura 4.27: Composición interna de un planeta océano y de un planeta tipo Tierra (Sotin et al. 2007).

exoplaneta/exosatélite, eso nos daría inequívocamente su composición. En la práctica, por desgracia, no contamos con la precisión suficiente, con lo que tenemos un error considerable en el radio y, puesto que las curvas son muy sensibles a él, exoplanetas como Kepler-11b o Kepler-20c no pueden ser asignados a una única composición. De igual manera, no podemos asignar una única composición a la super-Tierra GJ 1214, la cual parece poseer un radio superior a lo que predicen las curvas de masa-radio para los exoplanetas sólidos. Eso puede indicar, quizás, que este exoplaneta cuenta con una gran envoltura de hidrógeno-helio que hace que su radio sea mayor, aun sin ser un exoplaneta gaseoso de por sí (tal y como corroboran Miller-Ricci & Fortney 2010). Este hecho concuerda con la literatura, donde se estima que, si un exoplaneta tiene masa menor que $15M_{\oplus}$, debe ser sólido (Wuchterl et al. 2000).

Si lográsemos detectar un exosatélite y calcular con suficiente precisión su masa y radio, podríamos, por tanto, estudiar su composición y analizar cuán parecido es a la Tierra, si puede albergar un océano, etc. A día de hoy, los métodos de detectar exosatélites propuestos (Sección 1.2) podrían, en teoría, determinar su radio (Sección 1.2.2; 2.3.2.2) y su masa (Sección 1.2.3; 2.3.3.1).

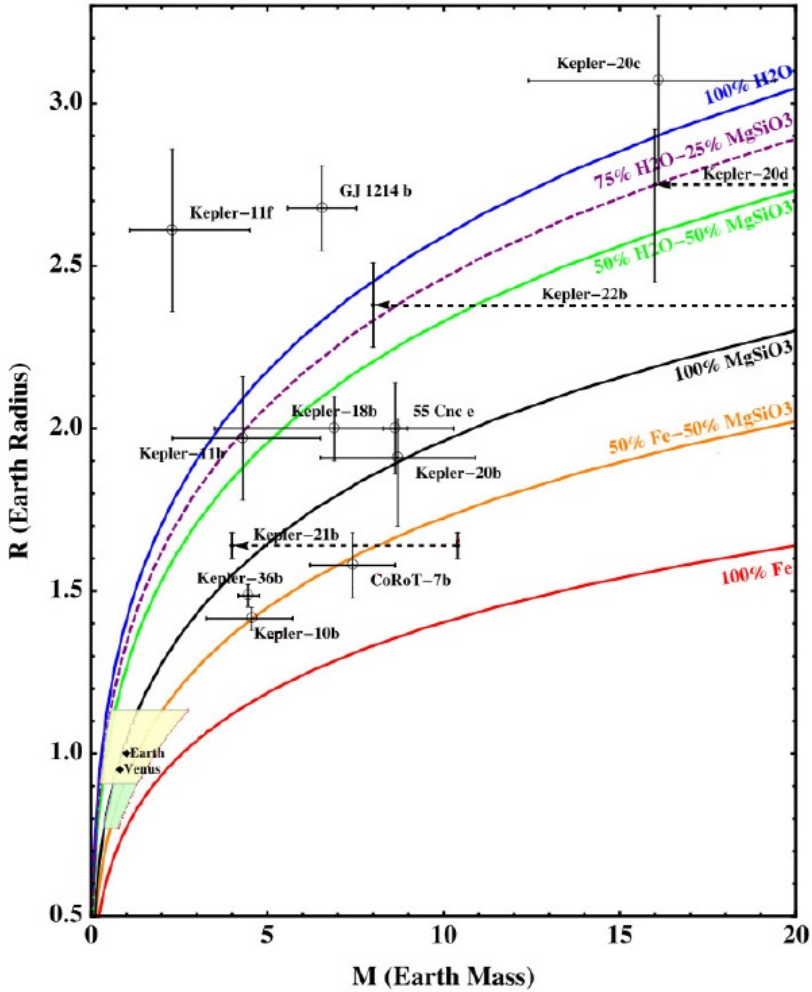


Figura 4.28: Curvas masa-radio para cada composición de un exoplaneta sólido. También aparecen como ejemplos algunos exoplanetas (círculos negros), cuyas barras horizontales indican el error en la masa y barras verticales indican el error en el radio. Estos exoplanetas son Kepler-10b (Batalha et al. 2011), Kepler-11b,f (Lissauer et al. 2011), Kepler-18b (Cochran et al. 2011), Kepler-36b (Carter et al. 2012) y Kepler-20b,c,d (III et al. 2012). Las flechas horizontales de los exoplanetas Kepler-22b, Kepler-21b y Kepler-20b indican el límite inferior y superior de la masa. Por ejemplo, para Kepler-21b, estos son 4 y 10,4 M_{\oplus} , respectivamente (Howell et al. 2012). Imagen adaptada de Zeng & Sasselov (2013).

Aguardemos a que las técnicas de observación sean capaces, en un futuro, de proporcionarnos la información necesaria para verificar todos los resultados teóricos aportados hasta la fecha.

4.5. Comentarios al Capítulo 4

En este Capítulo ha quedado de manifiesto que estudiar la habitabilidad de los exoplanetas es, hoy en día, una tarea realmente complicada, y más aún si hablamos de exosatélites, cuya existencia, aunque la suponemos, ni siquiera hemos podido confirmar. La mejor herramienta con la que contamos actualmente es la **espectroscopía de transmisión**, la cual permite el estudio de las atmósferas de exoplanetas. Sin embargo, el instrumental todavía no cuenta con la precisión suficiente, por lo que sólo es posible el estudio de atmósferas de exoplanetas muy calientes, donde la vida está totalmente descartada. Se espera que el telescopio James Webb, en los próximos años, logre estudiar las atmósferas de exoplanetas tipo Tierra. Otras técnicas, como la caracterización de **océanos** sobre la superficie de exoplanetas/exosatélites tipo Tierra son impracticables hoy en día, aunque hay ciertos proyectos de cara al futuro (como el telescopio ATLAST, previsto para 2039) y, si la tecnología evoluciona lo suficiente, quizás algún día podamos llegar a estudiar incluso los **océanos interiores** de exoplanetas y exosatélites.

Aun con estas dificultades, lo que podemos hacer es analizar los factores astrodinámicos que condicionan la habitabilidad de un exosatélite, tales como las fuerzas de marea que ejerce el exoplaneta sobre él o las perturbaciones gravitatorias provocadas por otros cuerpos presentes en el sistema planetario, como la propia estrella. Dichos factores pueden, en algunos casos, *facilitar* su habitabilidad.

Conforme los métodos de detección de exoplanetas/exosatélites se hagan más precisos, podremos calcular con mayor exactitud tanto su masa como su radio, y ello nos ayudará, al mismo tiempo, a determinar su composición, gracias a la relación masa-radio.



Conclusiones

El estudio de los exoplanetas y exosatélites es, a día de hoy, un campo en desarrollo. Miles de exoplanetas se han descubierto y cientos se siguen descubriendo cada año, gracias a misiones espaciales como Kepler, CoRoT o TESS, y a receptores como ESPRESSO, HATNET o CARMENES, acoplados a telescopios en tierra. Los exosatélites, por otro lado, siguen sin ser confirmados al 100 %, aunque se han propuesto ciertos candidatos, como los mencionados en la [Introducción](#) de este trabajo.

Así, las Conclusiones finales que podemos sacar de esta Tesis son las siguientes:

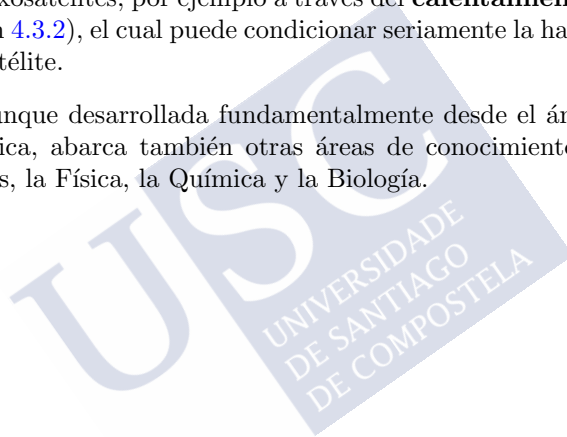
1. Todas las técnicas que se han propuesto para el descubrimiento de un exosatélite en un futuro, puede que inmediato, presentan ciertos inconvenientes (ver Tabla 1.1). Respecto al método de tránsitos, hemos hecho un análisis exhaustivo de la curva de luz teórica que se le presume a un sistema exoplaneta + exosatélite, para con ello distinguirlo de otros casos, como exoplaneta con anillos, o exoplaneta cuya estrella cuenta con una mancha solar. En efecto, todos estos fenómenos son, *a priori*, discernibles entre sí.
2. El procedimiento para detectar exoplanetas y exosatélites ([Capítulo 2](#)) consiste en el ajuste de mínimos cuadrados de un modelo a las observaciones obtenidas. En vez de utilizar cálculos estadísticos excesivamente complicados, hemos implementado algoritmos de optimización globales (por ejemplo, el método de evolución diferencial) que, combinados con algoritmos de optimización cuasi-local (como el Basin-hopping) permiten, por un lado, un excelente ajuste incluso cuando el modelo elegido cuenta con muchos parámetros y, por otro lado, una enorme flexibilidad a la hora de su implementación, la cual no depende del modelo. A la

hora de aplicar dichos algoritmos al caso del exosatélite, hemos determinado que es preferible tener una muestra *poco numerosa* a una con más observaciones pero con errores grandes. Así, una mayor precisión fotométrica, tengamos pocas observaciones o no, siempre favorecerá la futura detección de un exosatélite.

3. Es importante tener en cuenta las **fuerzas de marea** a la hora de analizar la órbita de un exosatélite con respecto a su exoplaneta, ya que estas provocan que la excentricidad se reduzca y que su semieje disminuya o aumente, dependiendo de la rotación del exoplaneta (Sección 3.1.2). La perturbación gravitatoria de la estrella puede compensar este efecto, haciendo que ambos elementos orbitales tengan una evolución periódica.
4. Tal y como hemos probado, en los sistemas de una sola estrella con varios exoplanetas, la interacción que se produce entre ellos (*planet-planet scattering*) suele incrementar la excentricidad de sus órbitas, disminuir levemente su semieje o incluso, hacer que alguno de ellos sea expulsado (véase la Sección 3.2). En este escenario, los exosatélites no suelen sobrevivir. Es por ello que, si la excentricidad de un exoplaneta es grande, es muy probable que no albergue ningún exosatélite, a no ser que lo(s) haya capturado *a posteriori*. Además, existe la posibilidad de que los exoplanetas supervivientes tengan un semieje menor, lo que facilitaría su detección.
5. Hemos realizado un exhaustivo estudio de la estabilidad de las órbitas de exoplanetas/exosatélites en distintos escenarios de sistemas estelares múltiples. Una vez establecida la región de estabilidad, y asumiendo que el exoplaneta/exosatélite se encuentra en ella, investigamos su dinámica, en concreto la evolución tanto de la excentricidad como del semieje de sus órbitas. Tanto en sistemas de estrellas binarias como en sistemas triples, observamos cómo, en general, los exosatélites cuentan con variaciones menores en su excentricidad y semieje orbitales que las que se aprecia en la órbita del exoplaneta (ver Secciones 3.3 y 3.4).
6. Las perturbaciones a largo plazo que tienen lugar en los sistemas con exoplanetas y exosatélites cuyas órbitas se encuentran considerablemente inclinadas entre sí causan grandes oscilaciones en su excentricidad e inclinación. Estas oscilaciones se ven exacerbadas con la presencia de un cuarto cuerpo, sobre todo cuando su órbita se encuentra igualmente muy inclinada con respecto a las anteriores.

Conclusiones

7. De entre todas la herramienta matemáticas utilizadas a lo largo de este estudio fue, sin duda, el integrador numérico TIDES el más utilizado, puesto que es el que mejores resultados ha proporcionado en lo que se refiere a la integración de las ecuaciones del problema de n cuerpos. Achacamos dicho éxito al método en el que se basa, el cual consiste en el cálculo de derivadas sucesivas a través de lo que se conoce como **diferenciación automática** (ver Sección 0.1).
8. Estudiar la habitabilidad de los exoplanetas/exosatélites es una tarea extraordinariamente complicada, puesto que la tecnología necesaria se encuentra muy por delante de lo que disponemos hoy en día. Aún así, proponemos ciertas técnicas para aplicar en un futuro (Sección 4.4), y analizamos cómo la Astrodinámica influye en la habitabilidad de los exoplanetas y exosatélites, por ejemplo a través del **calentamiento de marea** (Sección 4.3.2), el cual puede condicionar seriamente la habitabilidad de un exosatélite.
9. La Tesis, aunque desarrollada fundamentalmente desde el ámbito de la Astrodinámica, abarca también otras áreas de conocimiento como las Matemáticas, la Física, la Química y la Biología.





Bibliografía

Abad, A., Barrio, R., Blesa, F., and Rodríguez, M. (2011). TIDES tutorial: Integrating ODEs by using the Taylor Series Method. *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, 36:1–116.

Abad, A., Barrio, R., Blesa, F., and Rodríguez, M. (2012). Algorithm 924: TIDES, a Taylor series integrator for differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 39(1):1–28.

Abad, A., Barrio, R., Marco-Buzunariz, M., and Rodríguez, M. (2015). Automatic implementation of the numerical Taylor series method: a Mathematica and Sage approach. *Applied Mathematics and Computation*, 268:227–245.

Abad, A. and Docobo, J. A. (1987). The application of hierarchical relative coordinates to the analysis of the movement of subsystems of many-body problems. *Celestial mechanics*, 41(1-4):333–342.

Abad, A., Docobo, J. A., and Elipe, A. (2018). *Curso de astronomía (2ª edición)*. Colección de Textos Docentes, nº 84. Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Abad, A. J. and Ribera, J. (1984). Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano. II (2)-3 (Zaragoza, Spain: Universidad de Zaragoza), 1.

Acuña, M. H., Connerney, J. E. P., Wasilewski, P., Lin, R. P., Anderson, K. A., Carlson, C. W., McFadden, J., Curtis, D. W., Mitchell, D., Reme, H., Mazelle, C., Sauvaud, J. A., d’Uston, C., Cros, A., Medale, J. L., Bauer, S. J., Cloutier, P., Mayhew, M., Winterhalter, D., and Ness, N. F. (1998). Magnetic field and plasma observations at Mars: Initial results of the Mars Global Surveyor mission. *Science*, 279(5357):1676–1680.

- Adams, E., Seager, S., and Elkins-Tanton, L. (2008). Ocean planet or thick atmosphere: on the mass-radius relationship for solid exoplanets with massive atmospheres. *The Astrophysical Journal*, 673(2):1160.
- Adams, F. C. and Laughlin, G. (2003). Migration and dynamical relaxation in crowded systems of giant planets. *Icarus*, 163(2):290–306.
- Agol, E., Steffen, J., Sari, R., and Clarkson, W. (2005). On detecting terrestrial planets with timing of giant planet transits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 359(2):567–579.
- Al-Salami, N. M. (2009). Evolutionary algorithm definition. *American J. of Engineering and Applied Sciences*, 2(4):789–795.
- Albrow, M. D., Beaulieu, J.-P., Caldwell, J. A. R., DePoy, D. L., Dominik, M., Gaudi, B. S., Gould, A., Greenhill, J., Hill, K., Kane, S., Martin, R., Menzies, J., Naber, R. M., Pogge, R. W., Pollard, K. R., Sackett, P. D., Sahu, K. C., Vermaak, P., Watson, R., Williams, A., and Collaboration, T. P. (1999). A complete set of solutions for caustic crossing binary microlensing events. *The Astrophysical Journal*, 522(2):1022.
- Alexander, R. (2012). The dispersal of protoplanetary disks around binary stars. *The Astrophysical Journal Letters*, 757(2):L29.
- Anderson, J., Schubert, G., Jacobson, R., Lau, E., Moore, W., and Sjogren, W. (1998). Europa's differentiated internal structure: Inferences from four Galileo encounters. *Science*, 281(5385):2019–2022.
- Andrade, M. and Docobo, J. (2007). An approach to the dynamics of extrasolar planets with satellites. *Monogr. Highlights of Spanish astrophysics IV*, 367.
- Applegate, J. H. (1992). A mechanism for orbital period modulation in close binaries. *The Astrophysical Journal*, 385:621–629.
- Arney, G. N., Meadows, V. S., Domagal-Goldman, S. D., Deming, D., Robinson, T. D., Tovar, G., Wolf, E. T., and Schwieterman, E. (2017). Pale Orange Dots: The Impact of Organic Haze on the Habitability and Detectability of Earthlike Exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 836(1):49.
- Arnold, L., Gillet, S., Lardièrè, O., Riaud, P., and Schneider, J. (2002). A test for the search for life on extrasolar planets-Looking for the terrestrial vegetation signature in the Earthshine spectrum. *Astronomy & Astrophysics*, 392(1):231–237.

- Backer, D. C., Foster, R., and Sallmen, S. (1993). A second companion of the millisecond pulsar 1620–26. *Nature*, 365(6449):817–819.
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M., and Basu, S. (2001). Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties. *The Astrophysical Journal*, 555(2):990.
- Bailes, M., Lyne, A., and Shemar, S. (1991). A planet orbiting the neutron star PSR1829–10. *Nature*, 352(6333):311–313.
- Bains, W., Petkowski, J. J., Sousa-Silva, C., and Seager, S. (2019). New environmental model for thermodynamic ecology of biological phosphine production. *Science of The Total Environment*, 658:521–536.
- Bakos, G., Noyes, R., Kovács, G., Stanek, K., Sasselov, D., and Domsa, I. (2004). Wide-Field Millimagnitude Photometry with the HAT: A Tool for Extrasolar Planet Detection. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 116(817):266.
- Bakos, G. Á., Csubry, Z., Penev, K., Bayliss, D., Jordán, A., Afonso, C., Hartman, J. D., Henning, T., Kovács, G., Noyes, R. W., Béky, B., Suc, V., Csák, B., Rabus, M., Lázár, J., Papp, I., Sári, P., Conroy, P., Zhou, G., Sackett, P. D., Schmidt, B., Mancini, L., Sasselov, D. D., and Ueltzhoeffer, K. (2013). HATSouth: a global network of fully automated identical wide-field telescopes. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(924):154.
- Bakos, G. A., Noyes, R. W., Kovacs, G., Latham, D. W., Sasselov, D. D., Torres, G., Fischer, D. A., Stefanik, R. P., Sato, B., Johnson, J. A., Pal, A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Esquerdo, G. A., Stanek, K. Z., Lazar, J., Papp, I., Sari, P., and Sipőcz, B. (2007). HAT-P-1b: A large-radius, low-density exoplanet transiting one member of a stellar binary. *The Astrophysical Journal*, 656(1):552.
- Baliunas, S. L., Henry, G. W., Donahue, R. A., Fekel, F. C., and Soon, W. H. (1997). Properties of sun-like stars with planets: $\rho 1$ Cancri, τ Bootis, and v Andromedae. *The Astrophysical Journal Letters*, 474(2):L119.
- Balkaya, Ç. (2013). An implementation of differential evolution algorithm for inversion of geoelectrical data. *Journal of Applied Geophysics*, 98:160–175.
- Baraffe, I., Chabrier, G., Allard, F., and Hauschildt, P. (1998). Evolutionary models for solar metallicity low-mass stars: mass-magnitude relationships and color-magnitude diagrams. *arXiv preprint astro-ph/9805009*.

- Baraffe, I., Chabrier, G., Allard, F., and Hauschildt, P. (2002). Evolutionary models for low-mass stars and brown dwarfs: Uncertainties and limits at very young ages. *Astronomy & Astrophysics*, 382(2):563–572.
- Baraffe, I., Chabrier, G., Barman, T. S., Allard, F., and Hauschildt, P. (2003). Evolutionary models for cool brown dwarfs and extrasolar giant planets. The case of HD 209458. *Astronomy & Astrophysics*, 402(2):701–712.
- Barnes, J. W. and O’Brien, D. (2002). Stability of satellites around close-in extrasolar giant planets. *The Astrophysical Journal*, 575(2):1087.
- Barnes, R. and Greenberg, R. (2006). Stability limits in extrasolar planetary systems. *The Astrophysical Journal Letters*, 647(2):L163.
- Barnes, R., Jackson, B., Greenberg, R., and Raymond, S. N. (2009). Tidal limits to planetary habitability. *The Astrophysical Journal Letters*, 700(1):L30.
- Barnes, R., Raymond, S. N., Jackson, B., and Greenberg, R. (2008). Tides and the evolution of planetary habitability. *Astrobiology*, 8(3):557–568.
- Barnes, S. A. (2003). On the rotational evolution of solar-and late-type stars, its magnetic origins, and the possibility of stellar gyrochronology. *The Astrophysical Journal*, 586(1):464.
- Barnes, S. A. (2007). Ages for illustrative field stars using gyrochronology: viability, limitations, and errors. *The Astrophysical Journal*, 669(2):1167.
- Bartelmann, M. and Schneider, P. (2001). Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340(4-5):291–472.
- Batalha, N. M., Borucki, W. J., Bryson, S. T., Buchhave, L. A., Caldwell, D. A., Christensen-Dalsgaard, J., Ciardi, D., Dunham, E. W., Fressin, F., Gautier, T. N., Gilliland, R. L., Haas, M. R., Howell, S. B., Jenkins, J. M., Kjeldsen, H., Koch, D. G., Latham, D. W., Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Rowe, J. F., Sasselov, D. D., Seager, S., Steffen, J. H., Torres, G., Basri, G. S., Brown, T. M., Charbonneau, D., Christiansen, J., Clarke, B., Cochran, W. D., Dupree, A., Fabrycky, D. C., Fischer, D., Ford, E. B., Fortney, J., Girouard, F. R., Holman, M. J., Johnson, J., Isaacson, H., Klaus, T. C., Machalek, P., Moorehead, A. V., Morehead, R. C., Ragozzine, D., Tenenbaum, P., Twicken, J., Quinn, S., VanCleve, J., Walkowicz, L. M., Welsh, W. F., Devore, E., and Gould, A. (2011). Kepler’s first rocky planet: Kepler-10b. *The Astrophysical Journal*, 729(1):27.

Batalha, N. M., Rowe, J. F., Gilliland, R. L., Jenkins, J. J., Caldwell, D., Borucki, W. J., Koch, D. G., Lissauer, J. J., Dunham, E. W., Gautier, T. N., Howell, S. B., Latham, D. W., Marcy, G. W., and Prsa, A. (2010). Pre-spectroscopic false-positive elimination of kepler planet candidates. *The Astrophysical Journal Letters*, 713(2):L103.

Batygin, K. and Stevenson, D. J. (2013). Mass-radius relationships for very low mass gaseous planets. *The Astrophysical Journal Letters*, 769(1):L9.

Beaulieu, J. P., Bennett, D. P., Fouqué, P., Williams, A., Dominik, M., Jørgensen, U. G., Kubas, D., Cassan, A., Coutures, C., Greenhill, J., Hill, K., Menzies, J., Sackett, P. D., Albrow, M., Brilliant, S., Caldwell, J. A. R., Calitz, J. J., Cook, K. H., Corrales, E., Desort, M., Dieters, S., Dominis, D., Donatowicz, J., Hoffman, M., Kane, S., Marquette, J. B., Martin, R., Meintjes, P., Pollard, K., Sahu, K., Vinter, C., Wambsganss, J., Woller, K., Horne, K., Steele, I., Bramich, D. M., Burgdorf, M., Snodgrass, C., Bode, M., Udalski, A., Szymański, M. K., Kubiak, M., Więckowski, T., Pietrzyński, G., Soszyński, I., Szewczyk, O., Wyrzykowski, Ł., Paczyński, B., Abe, F., Bond, I. A., Britton, T. R., Gilmore, A. C., Hearnshaw, J. B., Itow, Y., Kamiya, K., Kilmartin, P. M., Korpela, A. V., Masuda, K., Matsubara, Y., Motomura, M., Muraki, Y., Nakamura, S., Okada, C., Ohnishi, K., Rattenbury, N. J., Sako, T., Sato, S., Sasaki, M., Sekiguchi, T., Sullivan, D. J., Tristram, P. J., Yock, P. C. M., and Yoshioka, T. (2006). Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing. *Nature*, 439(7075):437–440.

Benneke, B., Wong, I., Piaulet, C., Knutson, H. A., Lothringer, J., Morley, C. V., Crossfield, I. J. M., Gao, P., Greene, T. P., Dressing, C., Dragomir, D., Howard, A. W., McCullough, P. R., Kempton, E. M.-R., Fortney, J. J., and Fraine, J. (2019). Water vapor and clouds on the habitable-zone sub-Neptune exoplanet K2-18b. *The Astrophysical Journal Letters*, 887(1):L14.

Benner, S. A., Ricardo, A., and Carrigan, M. A. (2004). Is there a common chemical model for life in the universe? *Current opinion in chemical biology*, 8(6):672–689.

Bennett, D. P., Batista, V., Bond, I. A., Bennett, C. S., Suzuki, D., Beaulieu, J.-P., Udalski, A., Donatowicz, J., Bozza, V., Abe, F., Botzler, C. S., Freeman, M., Fukunaga, D., Fukui, A., Itow, Y., Koshimoto, N., Ling, C. H., Masuda, K., Matsubara, Y., Muraki, Y., Namba, S., Ohnishi, K., Rattenbury, N. J., Saito, T., Sullivan, D. J., Sumi, T., Sweatman, W. L., Tristram, P. J., Tsurumi, N., Wada, K., Yock, P. C. M., Albrow, M. D., Bachelet, E.,

- Brillant, S., Caldwell, J. A. R., Cassan, A., Cole, A. A., Corrales, E., Coutures, C., Dieters, S., Prester, D. D., Fouqué, P., Greenhill, J., Horne, K., Koo, J.-R., Kubas, D., Marquette, J.-B., Martin, R., Menzies, J. W., Sahu, K. C., Wambsganss, J., Williams, A., Zub, M., Choi, J. Y., DePoy, D. L., Dong, S., Gaudi, B. S., Gould, A., Han, C., Henderson, C. B., McGregor, D., Lee, C.-U., Pogge, R. W., Shin, I.-G., Yee, J. C., Szymański, M. K., Skowron, J., Poleski, R., Kozłowski, S., Wyrzykowski, Ł., Kubiak, M., Pietrukowicz, P., Pietrzyński, G., Soszyński, I., Ulaczyk, K., Tsapras, Y., Street, R. A., Dominik, M., Bramich, D. M., Browne, P., Hundertmark, M., Kains, N., Snodgrass, C., Steele, I. A., Dekany, I., Gonzalez, O. A., Heyrovský, D., Kandori, R., Kerins, E., Lucas, P. W., Minniti, D., Nagayama, T., Rejkuba, M., Robin, A. C., and Saito, R. (2014). MOA-2011-BLG-262lb: A SUB-EARTH-MASS MOON ORBITING a GAS GIANT PRIMARY OR a HIGH VELOCITY PLANETARY SYSTEM IN THE GALACTIC BULGE. *The Astrophysical Journal*, 785(2):155.
- Bennett, D. P. and Rhie, S. H. (1996). Detecting earth-mass planets with gravitational microlensing. *The Astrophysical Journal*, 472(2):660.
- Berdyugina, S., Berdyugin, A., Fluri, D., and Pirola, V. (2007). First detection of polarized scattered light from an exoplanetary atmosphere. *The Astrophysical Journal Letters*, 673(1):L83.
- Berta-Thompson, Z. K., Irwin, J., Charbonneau, D., Newton, E. R., Dittmann, J. A., Astudillo-Defru, N., Bonfils, X., Gillon, M., Jehin, E., Stark, A. A., Stalder, B., Bouchy, F., Delfosse, X., Forveille, T., Lovis, C., Mayor, M., Neves, V., Pepe, F., Santos, N. C., Udry, S., and Wünsche, A. (2015). A rocky planet transiting a nearby low-mass star. *Nature*, 527(7577):204–207.
- Bétrémieux, Y. and Kaltenegger, L. (2014). Impact of atmospheric refraction: how deeply can we probe exo-earth’s atmospheres during primary eclipse observations? *The Astrophysical Journal*, 791(1):7.
- Bibring, J.-P., Langevin, Y., Mustard, J. F., Poulet, F., Arvidson, R., Gendrin, A., Gondet, B., Mangold, N., Pinet, P., Forget, F., Berthé, M., Bibring, J.-P., Gendrin, A., Gomez, C., Gondet, B., Jouglet, D., Poulet, F., Soufflot, A., Vincendon, M., Combes, M., Drossart, P., Encrenaz, T., Fouchet, T., Merchiorri, R., Belluci, G., Altieri, F., Formisano, V., Capaccioni, F., Cerroni, P., Coradini, A., Fonti, S., Korablev, O., Kottsov, V., Ignatiev, N., Moroz, V., Titov, D., Zasova, L., Loiseau, D., Mangold, N., Pinet, P., Douté, S., Schmitt, B., Sotin, C., Hauber, E., Hoffmann, H., Jaumann, R., Keller, U., Arvidson, R., Mustard, J. F., Duxbury, T., Forget, F., and Neukum, G. (2006). Global

mineralogical and aqueous Mars history derived from OMEGA/Mars Express data. *Science*, 312(5772):400–404.

Billier, B. A. and Bonnefoy, M. (2018). Exoplanet Atmosphere Measurements from Direct Imaging. *arXiv preprint arXiv:1807.05136*.

Bonfanti, A., Ortolani, S., Piotto, G., and Nascimbeni, V. (2015). Revising the ages of planet-hosting stars. *Astronomy & Astrophysics*, 575:A18.

Bonnefoy, M., Marleau, G.-D., Galicher, R., Beust, H., Lagrange, A.-M., Baudino, J.-L., Chauvin, G., Borgniet, S., Meunier, N., Rameau, J., Boccaletti, A., Cumming, A., Helling, C., Homeier, D., Allard, F., and Delorme, P. (2014). Physical and orbital properties of β Pictoris b. *Astronomy & Astrophysics*, 567:L9.

Bordé, P., Rouan, D., and Léger, A. (2003). Exoplanet detection capability of the corot space mission. *Astronomy & Astrophysics*, 405(3):1137–1144.

Borkovits, T., Érdi, B., Forgács-Dajka, E., and Kovács, T. (2003). On the detectability of long period perturbations in close hierarchical triple stellar systems. *Astronomy & Astrophysics*, 398(3):1091–1102.

Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., Batalha, N., Brown, T., Caldwell, D., Caldwell, J., Christensen-Dalsgaard, J., Cochran, W. D., DeVore, E., Dunham, E. W., Dupree, A. K., Gautier, T. N., Geary, J. C., Gilliland, R., Gould, A., Howell, S. B., Jenkins, J. M., Kondo, Y., Latham, D. W., Marcy, G. W., Meibom, S., Kjeldsen, H., Lissauer, J. J., Monet, D. G., Morrison, D., Sasselov, D., Tarter, J., Boss, A., Brownlee, D., Owen, T., Buzasi, D., Charbonneau, D., Doyle, L., Fortney, J., Ford, E. B., Holman, M. J., Seager, S., Steffen, J. H., Welsh, W. F., Rowe, J., Anderson, H., Buchhave, L., Ciardi, D., Walkowicz, L., Sherry, W., Horch, E., Isaacson, H., Everett, M. E., Fischer, D., Torres, G., Johnson, J. A., Endl, M., MacQueen, P., Bryson, S. T., Dotson, J., Haas, M., Kolodziejczak, J., Van Cleve, J., Chandrasekaran, H., Twicken, J. D., Quintana, E. V., Clarke, B. D., Allen, C., Li, J., Wu, H., Tenenbaum, P., Verner, E., Bruhweiler, F., Barnes, J., and Prsa, A. (2010). Kepler planet-detection mission: introduction and first results. *Science*, 327(5968):977–980.

Borucki, W. J. and Summers, A. L. (1984). The photometric method of detecting other planetary systems. *Icarus*, 58(1):121–134.

Bouchy, F., Udry, S., Mayor, M., Moutou, C., Pont, F., Iribarne, N., Da Silva, R., Ilovaisky, S., Queloz, D., Santos, N., Ségransan, D., and Zucker, S. (2005).

- ELODIE metallicity-biased search for transiting hot jupiters-II. a very hot jupiter transiting the bright k star HD 189733. *Astronomy & Astrophysics*, 444(1):L15–L19.
- Bramich, D. and Nielsen, M. B. (2018). An almanac of predicted microlensing events for the 21st century. *Astronomy & Astrophysics*.
- Breuer, D., Labrosse, S., and Spohn, T. (2010). Thermal evolution and magnetic field generation in terrestrial planets and satellites. *Space Science Reviews*, 152(1-4):449–500.
- Bryson, S. T., Jenkins, J. M., Gilliland, R. L., Twicken, J. D., Clarke, B., Rowe, J., Caldwell, D., Batalha, N., Mullally, F., Haas, M. R., and Tenenbaum, P. (2013). Identification of background false positives from Kepler data. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(930):889.
- Burns, J. A. (1973). Where are the satellites of the inner planets? *Nature Physical Science*, 242(115):23–25.
- Busetti, F., Beust, H., and Harley, C. (2018). Stability of planets in triple star systems. *Astronomy & Astrophysics*, 619:A91.
- Busetti, F. R. (2018). *Stability of planets in triple star systems*. PhD thesis, Johannesburg, SA: University of the Witwatersrand.
- Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Brown, T. M., Contos, A. R., Korzennik, S. G., Nisenson, P., and Noyes, R. W. (1999). Evidence for Multiple Companions to ν Andromedae. *The Astrophysical Journal*, 526(2):916–927.
- Cabrera, J. and Schneider, J. (2007). Detecting companions to extrasolar planets using mutual events. *Astronomy & Astrophysics*, 464(3):1133–1138.
- Cabrera, J., Barros, S. C. C., Armstrong, D., Hidalgo, D., Santos, N. C., Almenara, J. M., Alonso, R., Deleuil, M., Demangeon, O., Díaz, R. F., Lendl, M., Pfaff, J., Rauer, H., Santerne, A., Serrano, L. M., and Zucker, S. (2017). Disproving the validated planets K2-78b, K2-82b, and K2-92b-The importance of independently confirming planetary candidates. *Astronomy & Astrophysics*, 606:A75.
- Campo, P. (2011). Dinámica de exoplanetas y exosatélites. Master’s thesis, University of Santiago de Compostela.
- Campo, P. P. (2019). *Dynamics of exoplanets and exosatellites in binaries*. PhD thesis, Universidade de Santiago de Compostela.

- Campo, P. P. and Docobo, J. A. (2014). Analytical study of a four-body configuration in exoplanet scenarios. *Astronomy Letters*, 40(11):737–748.
- Canup, R. M. and Ward, W. R. (2002). Formation of the galilean satellites: Conditions of accretion. *The Astronomical Journal*, 124(6):3404.
- Cardoso, J. V. d. M., Hedges, C., Gully-Santiago, M., Saunders, N., Cody, A. M., Barclay, T., Hall, O., Sagar, S., Turtelboom, E., Zhang, J., Tzani-dakis, A., Mighell, K., Coughlin, J., Bell, K., Berta-Thompson, Z., Williams, P., Dotson, J., and Barentsen, G. (2018). Lightkurve: Kepler and TESS time series analysis in Python. Astrophysics Source Code Library.
- Carlos, M., Nissen, P. E., and Meléndez, J. (2016). Correlation between lithium abundances and ages of solar twin stars. *Astronomy & Astrophysics*, 587:A100.
- Carone, L. and Pätzold, M. (2007). Constraints on the tidal dissipation factor of a main sequence star: The case of OGLE-TR-56b. *Planetary and Space Science*, 55(5):643–650.
- Carrera, D., Davies, M. B., and Johansen, A. (2016). Survival of habitable planets in unstable planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 463(3):3226–3238.
- Carter, J. A., Agol, E., Chaplin, W. J., Basu, S., Bedding, T. R., Buchhave, L. A., Christensen-Dalsgaard, J., Deck, K. M., Elsworth, Y., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Fortney, J. J., Hale, S. J., Handberg, R., Hekker, S., Holman, M. J., Huber, D., Karoff, C., Kawaler, S. D., Kjeldsen, H., Lissauer, J. J., Lopez, E. D., Lund, M. N., Lundkvist, M., Metcalfe, T. S., Miglio, A., Rogers, L. A., Stello, D., Borucki, W. J., Bryson, S., Christiansen, J. L., Cochran, W. D., Geary, J. C., Gilliland, R. L., Haas, M. R., Hall, J., Howard, A. W., Jenkins, J. M., Klaus, T., Koch, D. G., Latham, D. W., MacQueen, P. J., Sasselov, D., Steffen, J. H., Twicken, J. D., and Winn, J. N. (2012). Kepler-36: A pair of planets with neighboring orbits and dissimilar densities. *Science*, 337(6094):556–559.
- Cassan, A. (2008). An alternative parameterisation for binary-lens caustic-crossing events. *Astronomy & Astrophysics*, 491(2):587–595.
- Cassidy, T. A., Mendez, R., Arras, P., Johnson, R. E., and Skrutskie, M. F. (2009). Massive satellites of close-in gas giant exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 704(2):1341.

- Černý, V. (1985). Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of optimization theory and applications*, 45(1):41–51.
- Chambers, J., Wetherill, G., and Boss, A. (1996). The stability of multi-planet systems. *Icarus*, 119(2):261–268.
- Chapman, S. (1930). A theory of upperatmospheric ozone. *Mem. Roy. Meteor.*, 3:103–125.
- Charbonneau, D., Brown, T. M., Latham, D. W., and Mayor, M. (1999). Detection of planetary transits across a sun-like star. *The Astrophysical Journal Letters*, 529(1):L45.
- Charbonneau, D., Brown, T. M., Noyes, R. W., and Gilliland, R. L. (2002). Detection of an extrasolar planet atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 568(1):377.
- Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., Green, E. M., Grootel, V. V., Randall, S. K., Silvotti, R., Baran, A. S., Østensen, R., Kawaler, S. D., and Telting, J. H. (2011). A compact system of small planets around a former red-giant star. *Nature*, 480:496–499.
- Chauvin, G., Lagrange, A.-M., Dumas, C., Zuckerman, B., Mouillet, D., Song, I., Beuzit, J.-L., and Lowrance, P. (2004). A giant planet candidate near a young brown dwarf-direct VLT/NACO observations using IR wavefront sensing. *Astronomy & Astrophysics*, 425(2):L29–L32.
- Chauvin, G., Lagrange, A.-M., Lacombe, F., Dumas, C., Mouillet, D., Zuckerman, B., Gendron, E., Song, I., Beuzit, J.-L., Lowrance, P., and Fusco, T. (2005). Astrometric and spectroscopic confirmation of a brown dwarf companion to GSC 08047-00232-VLT/NACO deep imaging and spectroscopic observations. *Astronomy & Astrophysics*, 430(3):1027–1033.
- Chilcote, J., Barman, T., Fitzgerald, M. P., Graham, J. R., Larkin, J. E., Macintosh, B., Bauman, B., Burrows, A. S., Cardwell, A., Rosa, R. J. D., Dillon, D., Doyon, R., Dunn, J., Erikson, D., Gavel, D., Goodsell, S. J., Hartung, M., Hibon, P., Ingraham, P., Kalas, P., Konopacky, Q., Maire, J., Marchis, F., Marley, M. S., Marois, C., Millar-Blanchaer, M., Morzinski, K., Norton, A., Oppenheimer, R., Palmer, D., Patience, J., Perrin, M., Poyneer, L., Pueyo, L., Rantakyro, F. T., Sadakuni, N., Saddlemyer, L., Savransky, D., Serio, A., Sivaramakrishnan, A., Song, I., Soummer, R., Thomas, S., Wallace,

Bibliografía

J. K., Wiktorowicz, S., and Wolff, S. (2014). The first H-band spectrum of the giant planet β Pictoris b. *The Astrophysical Journal Letters*, 798(1):L3.

Christiansen, J. L., Clarke, B. D., Burke, C. J., Jenkins, J. M., Barclay, T. S., Ford, E. B., Haas, M. R., Sabale, A., Seader, S., Smith, J. C., Tenenbaum, P., Twicken, J. D., Uddin, A. K., and Thompson, S. E. (2013). Measuring transit signal recovery in the Kepler pipeline. I. Individual events. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 207(2):35.

Clampin, M. (2010). The James Webb Space Telescope and its capabilities for exoplanet science. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 6(S276):335–342.

Claret, A. (2000). A new non-linear limb-darkening law for lte stellar atmosphere models. calculations for $-5.0 \leq \log[m/h] \leq +1$, $2000 \text{ k} \leq t_{eff} \leq 50000 \text{ k}$ at several surface gravities. *Astronomy and Astrophysics*, 363:1081–1190.

Claudi, R. and Alei, E. (2019). Biosignatures Search in Habitable Planets. *Galaxies*, 7(4):82.

Cochran, W. D., Fabrycky, D. C., Torres, G., Fressin, F., Désert, J.-M., Ragozzine, D., Sasselov, D., Fortney, J. J., Rowe, J. F., Brugamyer, E. J., Bryson, S. T., Carter, J. A., Ciardi, D. R., Howell, S. B., Steffen, J. H., Borucki, W. J., Koch, D. G., Winn, J. N., Welsh, W. F., Uddin, K., Tenenbaum, P., Still, M., Seager, S., Quinn, S. N., Mullally, F., Miller, N., Marcy, G. W., MacQueen, P. J., Lucas, P., Lissauer, J. J., Latham, D. W., Knutson, H., Kinemuchi, K., Johnson, J. A., Jenkins, J. M., Isaacson, H., Howard, A., Horch, E., Holman, M. J., Henze, C. E., Haas, M. R., Gilliland, R. L., III, T. N. G., Ford, E. B., Fischer, D. A., Everett, M., Endl, M., Demory, B.-O., Deming, D., Charbonneau, D., Caldwell, D., Buchhave, L., Brown, T. M., and Batalha, N. (2011). Kepler-18b, c, and d: A system of three planets confirmed by transit timing variations, light curve validation, warm-Spitzer photometry, and radial velocity measurements. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 197(1):7.

Cochran, W. D., Hatzes, A. P., Butler, R. P., and Marcy, G. W. (1997). The discovery of a planetary companion to 16 Cygni B. *The Astrophysical Journal*, 483(1):457.

Cockell, C., Bush, T., Bryce, C., Direito, S., Fox-Powell, M., Harrison, J., Lammer, H., Landenmark, H., Martín-Torres, F. J., Nicholson, N., Noack,

- L., O'Malley-James, J., Payler, S., Rushby, A., Samuels, T., Schwendner, P., Wadsworth, J., and Zorzano, M.-P. (2016). Habitability: a review. *Astrobiology*, 16(1):89–117.
- Colaprete, A. and Toon, O. B. (2003). Carbon dioxide clouds in an early dense Martian atmosphere. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 108(E4).
- Counselman III, C. C. (1973). Outcomes of tidal evolution. *The Astrophysical Journal*, 180:307–316.
- Cowan, N. B., Abbot, D. S., and Voigt, A. (2012). A false positive for ocean glint on exoplanets: the latitude-albedo effect. *The Astrophysical Journal Letters*, 752(1):L3.
- Cowan, N. B. and Agol, E. (2011). The statistics of albedo and heat recirculation on hot exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 729(1):54.
- Cowan, N. B., Agol, E., Meadows, V. S., Robinson, T., Livengood, T. A., Deming, D., Lisse, C. M., A'Hearn, M. F., Wellnitz, D. D., Seager, S., and and, D. C. (2009). Alien maps of an ocean-bearing world. *The Astrophysical Journal*, 700(2):915.
- Cowan, N. B., Robinson, T., Agol, E., Meadows, V. S., Shields, A. L., Livengood, T. A., Deming, D., A'Hearn, M. F., Wellnitz, D. D., Charbonneau, D., Lisse, C. M., and Seager, S. (2011). Rotational variability of Earth's polar regions: implications for detecting snowball planets. *The Astrophysical Journal*, 731(1):76.
- Crawford, G. D. and Stevenson, D. J. (1988). Gas-driven water volcanism and the resurfacing of Europa. *Icarus*, 73(1):66–79.
- Cuntz, M. (2015). S-type and P-type habitability in stellar binary systems: a comprehensive approach. II. Elliptical orbits. *The Astrophysical Journal*, 798(2):101.
- Dalton, J., Prieto-Ballesteros, O., Kargel, J., Jamieson, C., Jolivet, J., and Quinn, R. (2005). Spectral comparison of heavily hydrated salts with disrupted terrains on Europa. *Icarus*, 177(2):472–490.
- Darwin, G. H. (1879a). I. on the bodily tides of viscous and semi-elastic spheroids, and on the ocean tides upon a yielding nucleus. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pages 1–35.

- Darwin, G. H. (1879b). VIII. The determination of the secular effects of tidal friction by a graphical method. *Proceedings of the Royal Society of London*, 29(196-199):168–181.
- Darwin, G. H. (1879c). XIII. On the precession of a viscous spheroid, and on the remote history of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pages 447–538.
- Darwin, G. H. (1880). XX. On the secular changes in the elements of the orbit of a satellite revolving about a tidally distorted planet. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pages 713–891.
- Davis, R. S. (2017). Determining the value of the fine-structure constant from a current balance: Getting acquainted with some upcoming changes to the SI. *American Journal of Physics*, 85(5):364–368.
- de Laplace, P. S. (1780). Mémoire sur la détermination des orbites des comètes.
- Deeg, H. J. (2002). Detection of terrestrial planets and moons with the photometric transit method. In *Earth-like Planets and Moons*, volume 514, pages 237–243.
- Des Etangs, A. L., Pont, F., Vidal-Madjar, A., and Sing, D. (2008). Rayleigh scattering in the transit spectrum of HD 189733b. *Astronomy & Astrophysics*, 481(2):L83–L86.
- Des Marais, D. J., Harwit, M. O., Jucks, K. W., Kasting, J. F., Lin, D. N., Lunine, J. I., Schneider, J., Seager, S., Traub, W. A., and Wolf, N. J. (2002). Remote sensing of planetary properties and biosignatures on extrasolar terrestrial planets. *Astrobiology*, 2(2):153–181.
- Diamond-Lowe, H., Berta-Thompson, Z., Charbonneau, D., and Kempton, E. M.-R. (2018). Ground-based optical transmission spectroscopy of the small, rocky exoplanet GJ 1132b. *The Astronomical Journal*, 156(2):42.
- Dickens, G. R. (2003). A methane trigger for rapid warming? *Science*, 299(5609):1017.
- Dobos, V., Orgoványi, J., and Nagy, I. (2013). Empirical formulae of temperature and luminosity as functions of mass for calculating the habitable zone. *Astronomische Nachrichten*, 334(9):1004–1007.

- Docobo, J. A. and Andrade, M. (2006a). A methodology for the description of multiple stellar systems with spectroscopic subcomponents. *The Astrophysical Journal*, 652(1):681.
- Docobo, J. A. and Andrade, M. (2006b). Satellites around extrasolar planets. *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, pages 95–102.
- Docobo, J. A., Andrade, M., and Campo, P. (2012a). Guests in double stars. In *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1452, pages 18–29.
- Docobo, J. A., Campo, P., and Andrade, M. (2012b). When will we be able to detect exosatellites? In *Orbital Couples: Pas de Deux in the Solar System and the Milky Way*, pages 77–80. Observatoire de Paris.
- Docobo, J. A., Piccotti, L., Abad, A., and Campo, P. P. (2021). A Study about the Secular Evolution of the Hierarchical Three-body Problem Using the Numerical Integrator TIDES. *The Astronomical Journal*, 161(1):43.
- Docobo, J. A., Tamazian, V. S., Balega, Y. Y., Andrade, M., Schertl, D., Weigelt, G., Campo, P., and Palacios, M. (2008). A methodology for studying physical and dynamical properties of multiple stars. application to the system of red dwarfs gl 22. *A&A*, 478(1):187–191.
- Dole, S. H. (1964). Habitable planets for man, New York, Blaisdell Pub. Co.[1964].
- Domingos, R., Winter, O., and Yokoyama, T. (2006). Stable satellites around extrasolar giant planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 373(3):1227–1234.
- Dominik, M. (2009). Parameter degeneracies and (un) predictability of gravitational microlensing events. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393(3):816–821.
- Donnison, J. (2010). The Hill stability of inclined small mass binary systems in three-body systems with special application to triple star systems, extrasolar planetary systems and Binary Kuiper Belt systems. *Planetary and Space Science*, 58(10):1169–1179.
- Donohoe, A. and Battisti, D. S. (2011). Atmospheric and surface contributions to planetary albedo. *Journal of Climate*, 24(16):4402–4418.

Dougherty, M. K., Grasset, O., Bunce, E., Coustenis, A., Titov, D. V., Erd, C., Blanc, M., Coates, A. J., Coradini, A., Drossart, P., Fletcher, L., Hussmann, H., Jaumann, R., Krupp, N., Prieto-Ballesteros, O., Tortora, P., Tosi, F., van Hoolst, T., and Lebreton, J. P. (2011). JUICE (JUperiter ICy moon Explorer): a European-led mission to the Jupiter system. *epsc*, 2011:1343.

Durand-Manterola, H. J. (2009). Dipolar magnetic moment of the bodies of the solar system and the Hot Jupiters. *Planetary and Space Science*, 57(12):1405–1411.

Dvorak, R. (1982). Planetary orbits in double star systems. *Oesterreichische Akademie Wissenschaften Mathematisch naturwissenschaftliche Klasse Sitzungsberichte Abteilung*, 191:423–437.

Dvorak, R. (1984). Numerical experiments on planetary orbits in double stars. In *The Stability of Planetary Systems*, pages 369–378. Springer.

Dvorak, R. (1986). Critical orbits in the elliptic restricted three-body problem. *Astronomy and Astrophysics*, 167:379–386.

Eaton, J. A. (1993). On the chromospheric structure of Zeta Aurigae. *The Astrophysical Journal*, 404:305–315.

Eggl, S., Pilat-Lohinger, E., Funk, B., Georgakarakos, N., and Haghighipour, N. (2013). Circumstellar habitable zones of binary-star systems in the solar neighbourhood. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 428(4):3104–3113.

Eggl, S., Pilat-Lohinger, E., Georgakarakos, N., Gyergyovits, M., and Funk, B. (2012). An analytic method to determine habitable zones for s-type planetary orbits in binary star systems. *The Astrophysical Journal*, 752(1):74.

Ehrenreich, D., Des Etangs, A. L., Beaulieu, J.-P., and Grasset, O. (2006a). On the possible properties of small and cold extrasolar planets: Is OGLE 2005-BLG-390Lb entirely frozen? *The Astrophysical Journal*, 651(1):535.

Ehrenreich, D., Lecavalier Des Etangs, A., Beaulieu, J.-P., and Grasset, O. (2008). Liquid Water on Frozen Extrasolar Planets? *ASPSC*, 398:537.

Ehrenreich, D., Lovis, C., Allart, R., Zapatero Osorio, M. R., Pepe, F., Cristiani, S., Rebolo, R., Santos, N. C., Borsa, F., Demangeon, O., Dumusque, X., González Hernández, J. I., Casasayas-Barris, N., Ségransan, D., Sousa, S., Abreu, M., Adibekyan, V., Afolter, M., Allende Prieto, C., Alibert, Y.,

- Aliverti, M., Alves, D., Amate, M., Avila, G., Baldini, V., Bandy, T., Benz, W., Bianco, A., Bolmont, m., Bouchy, F., Bourrier, V., Broeg, C., Cabral, A., Calderone, G., Pallé, E., Cegla, H., Cirami, R., Coelho, J. M. P., Conconi, P., Coretti, I., Cumani, C., Cupani, G., Dekker, H., Delabre, B., Deiries, S., D'Odorico, V., Di Marcantonio, P., Figueira, P., Fragoso, A., Genolet, L., Genoni, M., Génova Santos, R., Hara, N., Hughes, I., Iwert, O., Kerber, F., Knudstrup, J., Landoni, M., Lavie, B., Lizon, J.-L., Lendl, M., Lo Curto, G., Maire, C., Manescau, A., Martins, C., Mégevand, D., Mehner, A., Micela, G., Modigliani, A., Molaro, P., Monteiro, M., Monteiro, M., Moschetti, M., Müller, E., Nunes, N., Oggioni, L., Oliveira, A., Pariani, G., Pasquini, L., Poretti, E., Rasilla, J. L., Redaelli, E., Riva, M., Santana Tschudi, S., Santin, P., Santos, P., Segovia Milla, A., Seidel, J. V., Sosnowska, D., Sozzetti, A., Spanò, P., Suárez Mascareño, A., Taberner, H., Tenegi, F., Udry, S., Zanutta, A., and Zerbi, F. (2020). Nightside condensation of iron in an ultrahot giant exoplanet. *Nature*, 580(7805):597–601.
- Ehrenreich, D., Tinetti, G., Des Etangs, A. L., Vidal-Madjar, A., and Selsis, F. (2006b). The transmission spectrum of Earth-size transiting planets. *Astronomy & Astrophysics*, 448(1):379–393.
- Eiben, A. E. and Smith, J. E. (2003). *Introduction to evolutionary computing*, volume 53. Springer.
- Einstein, A. (1907). Über das relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen folgerungen. *Jahrbuch der Rdioaktivitat*, 4:411–462.
- Einstein, A. (1911). Über den einfluß der schwerkraft auf die ausbreitung des lichtes. *Annalen der Physik*, 340(10):898–908.
- Einstein, A. (1915). *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Gedruckt in der Reichsdruckerei.
- Eisner, J. A. (2007). Water vapour and hydrogen in the terrestrial-planet-forming region of a protoplanetary disk. *Nature*, 447(7144):562–564.
- Fanelli, M., Jenkins, J., Bryson, S., Quintana, E., Twicken, J., Wu, H., Tenenbaum, P., Allen, C., Caldwell, D., Chandrasekaran, H., et al. (2011). Kepler Data Processing Handbook. *NASA Ames Research Center, Moffett Field*.
- Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., and Hussmann, H. (2008). Tidal friction in close-in satellites and exoplanets: The darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101(1-2):171–201.

Bibliografía

- Fischer, D. A., Vogt, S. S., Marcy, G. W., Butler, R. P., Sato, B., Henry, G. W., Robinson, S., Laughlin, G., Ida, S., Toyota, E., Omiya, M., Driscoll, P., Takeda, G., Wright, J. T., and Johnson, J. A. (2007). Five intermediate-period planets from the N2K sample. *The Astrophysical Journal*, 669(2):1336.
- Ford, E., Rasio, F., and Yu, K. (2003). *Scientific Frontiers in Research on Extrasolar Planets (ASP Conf. Ser. 294)*. PhD thesis, ed. D. Deming & S. Seager (San Francisco, CA: ASP), 181.
- Ford, E. B. and Chiang, E. I. (2007). The formation of ice giants in a packed oligarchy: Instability and aftermath. *The Astrophysical Journal*, 661(1):602.
- Ford, E. B., Lystad, V., and Rasio, F. A. (2005). Planet–planet scattering in the epsilon Andromedae system. *Nature*, 434(7035):873–876.
- Ford, E. B. and Rasio, F. A. (2008). Origins of eccentric extrasolar planets: Testing the planet-planet scattering model. *The Astrophysical Journal*, 686(1):621.
- Ford, E. B., Seager, S., and Turner, E. L. (2001). Characterization of extrasolar terrestrial planets from diurnal photometric variability. *Nature*, 412(6850):885–887.
- Forgan, D. and Dobos, V. (2016). Exomoon climate models with the carbonate-silicate cycle and viscoelastic tidal heating. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(2):1233–1241.
- Forgan, D. and Yotov, V. (2014). The effect of planetary illumination on climate modelling of Earth-like exomoons. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(4):3513–3523.
- Fortney, J. J. (2005). The effect of condensates on the characterization of transiting planet atmospheres with transmission spectroscopy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(2):649–653.
- Fortney, J. J., Marley, M. S., and Barnes, J. W. (2006). Planetary radii across five orders of magnitude in mass and stellar insolation: application to transits. *The Astrophysical Journal*, 659(2):1661.
- Fortney, J. J., Marley, M. S., Saumon, D., and Lodders, K. (2008). Synthetic spectra and colors of young giant planet atmospheres: Effects of initial conditions and atmospheric metallicity. *The Astrophysical Journal*, 683(2):1104.

- Fox, C. and Wiegert, P. (2020). Exomoon Candidates from Transit Timing Variations: Six Kepler systems with TTVs explainable by photometrically unseen exomoons. *arXiv preprint arXiv:2006.12997*.
- Franck, S., Von Bloh, W., Bounama, C., Steffen, M., Schönberner, D., and Schellnhuber, H.-J. (2000). Determination of habitable zones in extrasolar planetary systems: Where are Gaia's sisters? *Journal of Geophysical Research: Planets*, 105(E1):1651–1658.
- Franz, O. (1958). The triple system ζ Aquarii. *The Astronomical Journal*, 63:329–337.
- Fuhrmann, K., Pfeiffer, M. J., and Bernkopf, J. (1997). Solar-type stars with planetary companions: 51 Pegasi and 47 Ursae Majoris. *Astronomy and Astrophysics*, 326:1081–1089.
- Fujii, Y., Kawahara, H., Suto, Y., Taruya, A., Fukuda, S., Nakajima, T., and Turner, E. L. (2010). Colors of a second Earth: estimating the fractional areas of ocean, land, and vegetation of Earth-like exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 715(2):866.
- Gaeman, J., Hier-Majumder, S., and Roberts, J. H. (2012). Sustainability of a subsurface ocean within Triton's interior. *Icarus*, 220(2):339–347.
- Gardner, J. P., Mather, J. C., Clampin, M., Doyon, R., Greenhouse, M. A., Hammel, H. B., Hutchings, J. B., Jakobsen, P., Lilly, S. J., Long, K. S., Lunine, J. I., McCaughrean, M. J., Mountain, M., Nella, J., Rieke, G. H., Rieke, M. J., Rix, H.-W., Smith, E. P., Sonneborn, G., Stiavelli, M., Stockman, H. S., Windhorst, R. A., and Wright, G. S. (2006). The James Webb Space Telescope. *Space Science Reviews*, 123(4):485–606.
- Gaudi, B. S. (2010). Exoplanetary microlensing. *arXiv preprint arXiv:1002.0332*.
- Gaudi, B. S., Bennett, D. P., Udalski, A., Gould, A., Christie, G. W., Maoz, D., Dong, S., McCormick, J., Szymański, M. K., Tristram, P. J., Nikolaev, S., Paczyński, B., Kubiak, M., Pietrzyński, G., Soszyński, I., Szewczyk, O., Ulaczyk, K., Wyrzykowski, Ł., DePoy, D. L., Han, C., Kaspi, S., Lee, C.-U., Mallia, F., Natusch, T., Pogge, R. W., Park, B.-G., Abe, F., Bond, I. A., Botzler, C. S., Fukui, A., Hearnshaw, J. B., Itow, Y., Kamiya, K., Korpela, A. V., Kilmartin, P. M., Lin, W., Masuda, K., Matsubara, Y., Motomura, M., Muraki, Y., Nakamura, S., Okumura, T., Ohnishi, K., Rattenbury, N. J., Sako, T., Saito, T., Sato, S., Skuljan, L., Sullivan, D. J., Sumi, T., Sweatman,

W. L., Yock, P. C. M., Albrow, M. D., Allan, A., Beaulieu, J.-P., Burgdorf, M. J., Cook, K. H., Coutures, C., Dominik, M., Dieters, S., Fouqué, P., Greenhill, J., Horne, K., Steele, I., Tsapras, Y., Chaboyer, B., Crocker, A., Frank, S., and Macintosh, B. (2008). Discovery of a Jupiter/Saturn analog with gravitational microlensing. *Science*, 319(5865):927–930.

Gaudi, B. S., Naber, R. M., and Sackett, P. D. (1998). Microlensing by multiple planets in high-magnification events. *The Astrophysical Journal Letters*, 502(1):L33.

Gaudi, B. S., Stassun, K. G., Collins, K. A., Beatty, T. G., Zhou, G., Latham, D. W., Bieryla, A., Eastman, J. D., Siverd, R. J., Crepp, J. R., Gonzales, E. J., Stevens, D. J., Buchhave, L. A., Pepper, J., Johnson, M. C., Colon, K. D., Jensen, E. L. N., Rodriguez, J. E., Bozza, V., Novati, S. C., D’Ago, G., Dumont, M. T., Ellis, T., Gaillard, C., Jang-Condell, H., Kasper, D. H., Fukui, A., Gregorio, J., Ito, A., Kielkopf, J. F., Manner, M., Matt, K., Narita, N., Oberst, T. E., Reed, P. A., Scarpetta, G., Stephens, D. C., Yeigh, R. R., Zambelli, R., Fulton, B. J., Howard, A. W., James, D. J., Penny, M., Bayliss, D., Curtis, I. A., Depoy, D. L., Esquerdo, G. A., Gould, A., Jonev, M. D., Kuhn, R. B., Labadie-Bartz, J., Lund, M. B., Marshall, J. L., McLeod, K. K., Pogge, R. W., Relles, H., Stockdale, C., Tan, T. G., Trueblood, M., and Trueblood, P. (2017). A giant planet undergoing extreme-ultraviolet irradiation by its hot massive-star host. *Nature*, 546(7659):514–518.

Gizis, J. E., Monet, D. G., Reid, I. N., Kirkpatrick, J. D., Liebert, J., and Williams, R. J. (2000). New neighbors from 2MASS: activity and kinematics at the bottom of the main sequence. *The Astronomical Journal*, 120(2):1085.

Gladman, B. (1993). Dynamics of systems of two close planets. *Icarus*, 106(1):247–263.

Günther, M. N., Queloz, D., Gillen, E., McCormac, J., Bayliss, D., Bouchy, F., Walker, S. R., West, R. G., Eigmüller, P., Smith, A. M. S., Armstrong, D. J., Burleigh, M., Casewell, S. L., Chaushev, A. P., Goad, M. R., Grange, A., Jackman, J., Jenkins, J. S., Loudon, T., Moyano, M., Pollacco, D., Poppenhaeger, K., Rauer, H., Raynard, L., Thompson, A. P. G., Udry, S., Watson, C. A., and Wheatley, P. J. (2017). Centroid vetting of transiting planet candidates from the Next Generation Transit Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472(1):295–307.

Goldreich, P., Lithwick, Y., and Sari, R. (2004). Final stages of planet formation. *The Astrophysical Journal*, 614(1):497.

- Goldreich, P. and Soter, S. (1966). Q in the solar system. *Icarus*, 5(1-6):375–389.
- Gong, Y.-X., Zhou, J.-L., Xie, J.-W., and Wu, X.-M. (2013). The effect of planet-planet scattering on the survival of exomoons. *The Astrophysical Journal Letters*, 769(1):L14.
- Gonzalez, G. (2005). Habitable zones in the universe. *Origins of life and evolution of biospheres*, 35(6):555–606.
- Gough, D. (1981). Solar interior structure and luminosity variations. In *Physics of Solar Variations*, pages 21–34. Springer.
- Gould, A. and Han, C. (2000). Astrometric resolution of severely degenerate binary microlensing events. *The Astrophysical Journal*, 538(2):653.
- Goździewski, K., Niedzielski, A., Schneider, J., Rodríguez, A., and Ferraz-Mello, S. (2010). Tidal decay and circularization of the orbits of short-period planets. *European Astronomical Society Publications Series*, 42:411–418.
- Grasset, O., Bunce, E., Coustenis, A., Dougherty, M., Erd, C., Hussmann, H., Jaumann, R., and Prieto-Ballesteros, O. (2013a). Review of exchange processes on Ganymede in view of its planetary protection categorization. *Astrobiology*, 13(10):991–1004.
- Grasset, O., Dougherty, M., Coustenis, A., Bunce, E., Erd, C., Titov, D., Blanc, M., Coates, A., Drossart, P., Fletcher, L., Hussmann, H., Jaumann, R., Krupp, N., Lebreton, J.-P., Prieto-Ballesteros, O., Tortora, P., Tosi, F., and Van Hoolst, T. (2013b). JUpiter ICy moons Explorer (JUICE): An ESA mission to orbit Ganymede and to characterise the Jupiter system. *Planetary and Space Science*, 78:1–21.
- Grasset, O., Schneider, J., and Sotin, C. (2009). A study of the accuracy of mass-radius relationships for silicate-rich and ice-rich planets up to 100 Earth masses. *The Astrophysical Journal*, 693(1):722.
- Greaves, J. S., Richards, A. M. S., Bains, W., Rimmer, P. B., Sagawa, H., Clements, D. L., Seager, S., Petkowski, J. J., Sousa-Silva, C., Ranjan, S., Drabek-Maunder, E., Fraser, H. J., Cartwright, A., Mueller-Wodarg, I., Zhan, Z., Friberg, P., Coulson, I., Lee, E., and Hoge, J. (2020). Phosphine gas in the cloud decks of Venus. *Nature Astronomy*, pages 1–10.
- Greenberg, R., Hoppa, G. V., Tufts, B., Geissler, P., Riley, J., and Kadel, S. (1999). Chaos on Europa. *Icarus*, 141(2):263–286.

Bibliografía

- Grieffmeier, J.-M., Khodachenko, M., Lammer, H., Grenfell, J., Stadelmann, A., and Motschmann, U. (2009). Stellar activity and magnetic shielding. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 5(S264):385–394.
- Grieffmeier, J.-M., Motschmann, U., Mann, G., and Rucker, H. (2005). The influence of stellar wind conditions on the detectability of planetary radio emissions. *Astronomy & Astrophysics*, 437(2):717–726.
- Griest, K. and Hu, W. (1992). Effect of binary sources on the search for massive astrophysical compact halo objects via microlensing. *The Astrophysical Journal*, 397:362–380.
- Grimm, Simon L., Demory, Brice-Olivier, Gillon, Michaël, Dorn, Caroline, Agol, Eric, Burdanov, Artem, Delrez, Laetitia, Sestovic, Marko, Triaud, Amaury H. M. J., Turbet, Martin, Bolmont, Émeline, Caldas, Anthony, de Wit, Julien, Jehin, Emmanuël, Leconte, Jérémy, Raymond, Sean N., Van Grootel, Valérie, Burgasser, Adam J., Carey, Sean, Fabrycky, Daniel, Heng, Kevin, Hernandez, David M., Ingalls, James G., Lederer, Susan, Selis, Franck, and Queloz, Didier (2018). The nature of the TRAPPIST-1 exoplanets. *Astronomy & Astrophysics*, 613:A68.
- Gurfil, P. and Seidelmann, P. K. (2016). *Celestial mechanics and astrodynamics: theory and practice*, volume 436. Springer.
- Haghighipour, N., Capen, S., and Hinse, T. C. (2013). Detection of Earth-mass and super-Earth Trojan planets using transit timing variation method. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117(1):75–89.
- Hamilton, T. L., Bryant, D. A., and Macalady, J. L. (2016). The role of biology in planetary evolution: cyanobacterial primary production in low-oxygen proterozoic oceans. *Environmental microbiology*, 18(2):325–340.
- Han, C. (2008). Microlensing detections of moons of exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 684(1):684.
- Han, C. and Han, W. (2002). On the feasibility of detecting satellites of extrasolar planets via microlensing. *The Astrophysical Journal*, 580(1):490.
- Hand, K. P., Carlson, R. W., and Chyba, C. F. (2007). Energy, chemical disequilibrium, and geological constraints on Europa. *Astrobiology*, 7(6):1006–1022.

- Hanel, R., Conrath, B., Herath, L., Kunde, V., and Pirraglia, J. (1981). Albedo, internal heat, and energy balance of Jupiter: Preliminary results of the Voyager infrared investigation. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 86(A10):8705–8712.
- Haqq-Misra, J. D., Domagal-Goldman, S. D., Kasting, P. J., and Kasting, J. F. (2008). A revised, hazy methane greenhouse for the Archean Earth. *Astrobiology*, 8(6):1127–1137.
- Hart, M. H. (1978). The evolution of the atmosphere of the Earth. *Icarus*, 33(1):23–39.
- Hart, M. H. (1979). Habitable zones about main sequence stars. *Icarus*, 37(1):351–357.
- Hartnett, J. G. and Luiten, A. (2010). A comparison of astrophysical and terrestrial frequency standards: Which are the best clocks? *Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS*, 83.
- Hauser, H. M. and Marcy, G. W. (1999). The orbit of 16 Cygni AB. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111(757):321.
- Hecht, E. (2002). Optics-addison.
- Heintz, W. D. (1988). The binary star 70 Ophiuchi revisited. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 82:140–145.
- Heller, R. (2012). Exomoon habitability constrained by energy flux and orbital stability. *Astronomy & Astrophysics*, 545:L8.
- Heller, R. and Barnes, R. (2012). Constraints on the habitability of extrasolar moons. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 8(S293):159–164.
- Heller, R. and Barnes, R. (2013). Exomoon habitability constrained by illumination and tidal heating. *Astrobiology*, 13(1):18–46.
- Heller, R., Rodenbeck, K., and Bruno, G. (2019). An alternative interpretation of the exomoon candidate signal in the combined Kepler and Hubble data of Kepler-1625. *Astronomy & Astrophysics*, 624:A95.
- Heller, R. and Zuluaga, J. I. (2013). Magnetic shielding of exomoons beyond the circumplanetary habitable edge. *The Astrophysical Journal Letters*, 776(2):L33.

Bibliografía

- Henry, G. W., Baliunas, S. L., Donahue, R. A., Fekel, F. C., and Soon, W. (2000). Photometric and Ca II H and K Spectroscopic Variations in Nearby Sun-like Stars with Planets. III. *The Astrophysical Journal*, 531(1):415.
- Henry, G. W., Baliunas, S. L., Donahue, R. A., Soon, W. H., and Saar, S. H. (1997). Properties of sun-like stars with planets: 51 Pegasi, 47 Ursae Majoris, 70 Virginis, and HD 114762. *The Astrophysical Journal*, 474(1):503.
- Henry, G. W., Marcy, G. W., Butler, R. P., and Vogt, S. S. (1999). A transiting “51 Peg-like” planet. *The Astrophysical Journal Letters*, 529(1):L41.
- Hess, S., Cecconi, B., and Zarka, P. (2008). Modeling of Io-Jupiter decameter arcs, emission beaming and energy source. *Geophysical Research Letters*.
- Heyl, J. S. and Gladman, B. J. (2007). Using long-term transit timing to detect terrestrial planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377(4):1511–1519.
- Hjorth, M., Justesen, A. B., Hirano, T., Albrecht, S., Gandolfi, D., Dai, F., Alonso, R., Barragán, O., Esposito, M., Kuzuhara, M., Lam, K. W. F., Livingston, J. H., Montanes-Rodriguez, P., Narita, N., Nowak, G., Prieto-Arranz, J., Redfield, S., Rodler, F., Van Eylen, V., Winn, J. N., Antoniciello, G., Cabrera, J., Cochran, W. D., Csizmadia, S., de Leon, J., Deeg, H., Eigmüller, P., Endl, M., Erikson, A., Fridlund, M., Grziwa, S., Guenther, E., Hatzes, A. P., Heeren, P., Hidalgo, D., Korth, J., Luque, R., Nespral, D., Palle, E., Pätzold, M., Persson, C. M., Rauer, H., Smith, A. M. S., and Trifonov, T. (2019). K2-290: a warm Jupiter and a mini-Neptune in a triple-star system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 484(3):3522–3536.
- Hoehler, T. M. (2007). An energy balance concept for habitability. *Astrobiology*, 7(6):824–838.
- Holman, M., Touma, J., and Tremaine, S. (1997). Chaotic variations in the eccentricity of the planet orbiting 16 cygni b. *Nature*, 386(6622):254–256.
- Holman, M. J. and Wiegert, P. A. (1999). Long-term stability of planets in binary systems. *The Astronomical Journal*, 117(1):621.
- Hong, Y.-C., Raymond, S. N., Nicholson, P. D., and Lunine, J. I. (2018). Innocent bystanders: Orbital dynamics of exomoons during planet–planet scattering. *The Astrophysical Journal*, 852(2):85.

- Horner, J., Hinse, T., Wittenmyer, R., Marshall, J. P., and Tinney, C. (2012). A dynamical analysis of the proposed circumbinary HW Virginis planetary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(4):2812–2823.
- Howell, S. B., Rowe, J. F., Bryson, S. T., Quinn, S. N., Marcy, G. W., Isaacson, H., Ciardi, D. R., Chaplin, W. J., Metcalfe, T. S., Monteiro, M. J. P. F. G., Appourchaux, T., Basu, S., Creevey, O. L., Gilliland, R. L., Quirion, P.-O., Stello, D., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., Elsworth, Y., García, R. A., Houdek, G., Karoff, C., Molenda-Žakowicz, J., Thompson, M. J., Verner, G. A., Torres, G., Fressin, F., Crepp, J. R., Adams, E., Dupree, A., Sasselov, D. D., Dressing, C. D., Borucki, W. J., Koch, D. G., Lissauer, J. J., Latham, D. W., Buchhave, L. A., Gautier, T. N., Everett, M., Horch, E., Batalha, N. M., Dunham, E. W., Szkody, P., Silva, D. R., Mighell, K., Holberg, J., Ballot, J., Bedding, T. R., Bruntt, H., Campante, T. L., Handberg, R., Hekker, S., Huber, D., Mathur, S., Mosser, B., Régulo, C., White, T. R., Christiansen, J. L., Middour, C. K., Haas, M. R., Hall, J. R., Jenkins, J. M., McCaulif, S., Fanelli, M. N., Kulesa, C., McCarthy, D., and Henze, C. E. (2012). Kepler-21b: A 1.6 R Earth planet transiting the bright oscillating F Subgiant Star HD 179070. *The Astrophysical Journal*, 746(2):123.
- Howell, S. B., Sobeck, C., Haas, M., Still, M., Barclay, T., Mullally, F., Troeltzsch, J., Aigrain, S., Bryson, S. T., Caldwell, D., Chaplin, W. J., Cochran, W. D., Huber, D., Marcy, G. W., Miglio, A., Najita, J. R., Smith, M., Twicken, J. D., and Fortney, J. J. (2014). The K2 mission: characterization and early results. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 126(938):398.
- Huang, S.-S. (1959a). Occurrence of life in the universe. *American scientist*, 47(3):397–402.
- Huang, S.-S. (1959b). The problem of life in the universe and the mode of star formation. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 71(422):421–424.
- Huang, S.-S. (1960). *The limiting sizes of the habitable planets*, volume 499. National Aeronautics and Space Administration.
- Hubbard, W. B., Fortney, J., Lunine, J., Burrows, A., Sudarsky, D., and Pinto, P. (2001). Theory of extrasolar giant planet transits. *The Astrophysical Journal*, 560(1):413.

Hubeny, I., Burrows, A., and Sudarsky, D. (2003). A possible bifurcation in atmospheres of strongly irradiated stars and planets. *The Astrophysical Journal*, 594(2):1011.

Hussmann, H., Spohn, T., and Wiczerkowski, K. (2002). Thermal equilibrium states of Europa's ice shell: Implications for internal ocean thickness and surface heat flow. *Icarus*, 156(1):143–151.

Hwang, K.-H., Udalski, A., Bond, I. A., Albrow, M. D., Chung, S.-J., Gould, A., Han, C., Jung, Y. K., Ryu, Y.-H., Shin, I.-G., Yee, J. C., Zhu, W., Cha, S.-M., Kim, D.-J., Kim, H.-W., Kim, S.-L., Lee, C.-U., Lee, D.-J., Lee, Y., Park, B.-G., Pogge, R. W., Pawlak, M., Poleski, R., Szymański, M. K., Skowron, J., Soszyński, I., Mróz, P., Kozłowski, S., Pietrukowicz, P., Ulaczyk, K., Abe, F., Asakura, Y., Barry, R., Bennett, D. P., Bhattacharya, A., Donachie, M., Evans, P., Fukui, A., Hirao, Y., Itow, Y., Kawasaki, K., Koshimoto, N., Li, M. C. A., Ling, C. H., Masuda, K., Matsubara, Y., Miyazaki, S., Muraki, Y., Nagakane, M., Ohnishi, K., Ranc, C., Rattenbury, N. J., Saito, T., Sharan, A., Sullivan, D. J., Sumi, T., Suzuki, D., Tristram, P. J., Yamada, T., Yamada, T., and Yonehara, A. (2018). OGLE-2015-BLG-1459L: The Challenges of Exo-moon Microlensing. *The Astronomical Journal*, 155(6):259.

III, G., Charbonneau, D., Rowe, J. F., Marcy, G. W., Isaacson, H., Torres, G., Fressin, F., Rogers, L. A., Désert, J.-M., Buchhave, L. A., Latham, D. W., Quinn, S. N., Ciardi, D. R., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Gilliland, R. L., Walkowicz, L. M., Bryson, S. T., Cochran, W. D., Endl, M., Fischer, D. A., Howell, S. B., Horch, E. P., Barclay, T., Batalha, N., Borucki, W. J., Christiansen, J. L., Geary, J. C., Henze, C. E., Holman, M. J., Ibrahim, K., Jenkins, J. M., Kinemuchi, K., Koch, D. G., Lissauer, J. J., Sanderfer, D. T., Sasselov, D. D., Seager, S., Silverio, K., Smith, J. C., Still, M., Stumpe, M. C., Tenenbaum, P., and Cleve, J. V. (2012). Kepler-20: A Sun-like star with three sub-Neptune exoplanets and two Earth-size candidates. *The Astrophysical Journal*, 749(1):15.

Ingber, L. (1993). Simulated annealing: Practice versus theory. *Mathematical and computer modelling*, 18(11):29–57.

Ingber, L. (2000). Adaptive simulated annealing (ASA): Lessons learned. *arXiv preprint cs/0001018*.

Ioannidis, P., Huber, K., and Schmitt, J. (2016). How do starspots influence the transit timing variations of exoplanets? Simulations of individual and consecutive transits. *Astronomy & Astrophysics*, 585:A72.

- Jackson, B., Barnes, R., and Greenberg, R. (2008a). Tidal heating of terrestrial extrasolar planets and implications for their habitability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391(1):237–245.
- Jackson, B., Greenberg, R., and Barnes, R. (2008b). Tidal evolution of close-in extrasolar planets. *The Astrophysical Journal*, 678(2):1396.
- Jacob, W. S. (1855). On certain Anomalies presented by the Binary Star 70 Ophiuchi. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 15:228.
- Jheeta, S. (2013). Final frontiers: the hunt for life elsewhere in the Universe. *Astrophysics and Space Science*, 348(1):1–10.
- Jiménez, L., Muñoz-Iglesias, M., Fernandez-Remolar, D., and Prieto-Ballesteros, O. (2012). Raman monitoring of carbonate dissolution/precipitation in a CO₂ atmosphere at high pressure. Planetological applications. *epsc*, pages EPSC2012–435.
- Jones, H. R., Butler, R. P., Tinney, C. G., Marcy, G. W., Carter, B. D., Penny, A. J., McCarthy, C., and Bailey, J. (2006). High-eccentricity planets from the Anglo-Australian planet search. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 369(1):249–256.
- Joshi, M., Haberle, R., and Reynolds, R. (1997). Simulations of the atmospheres of synchronously rotating terrestrial planets orbiting M dwarfs: conditions for atmospheric collapse and the implications for habitability. *Icarus*, 129(2):450–465.
- Jurić, M. and Tremaine, S. (2008). Dynamical origin of extrasolar planet eccentricity distribution. *The Astrophysical Journal*, 686(1):603.
- Kaltenegger, L. (2000). What does it take for a Moon to Support Life? In *Exploration and Utilisation of the Moon*, volume 462, page 199.
- Kaltenegger, L. (2010). Characterizing habitable exomoons. *The Astrophysical Journal Letters*, 712(2):L125.
- Kaltenegger, L. (2017). How to characterize habitable worlds and signs of life. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 55:433–485.
- Kaltenegger, L. and Haghighipour, N. (2013). Calculating the habitable zone of binary star systems. I. S-type binaries. *The Astrophysical Journal*, 777(2):165.

Bibliografía

- Kaltenegger, L., Selsis, F., Fridlund, M., Lammer, H., Beichman, C., Danchi, W., Eiroa, C., Henning, T., Herbst, T., Léger, A., Liseau, R., Lunine, J., Paresce, F., Penny, A., Quirrenbach, A., Röttgering, H., Schneider, J., Stam, D., Tinetti, G., and White, G. J. (2010). Deciphering spectral fingerprints of habitable exoplanets. *Astrobiology*, 10(1):89–102.
- Kaltenegger, L. and Traub, W. A. (2009). Transits of Earth-like planets. *The Astrophysical Journal*, 698(1):519.
- Kane, S. R., Barclay, T., Hartmann, M., Hatzes, A. P., Jensen, E. L., Ciardi, D. R., Huber, D., Wright, J. T., and Quintana, E. V. (2015). On the stellar companion to the exoplanet hosting star 30 Arietis B. *The Astrophysical Journal*, 815(1):32.
- Kargel, J. S. and Lunine, J. I. (1998). Clathrate hydrates on Earth and in the solar system. In *Solar System Ices*, pages 97–117. Springer.
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., and Donner, K. J. (2016). *Fundamental astronomy*. Springer.
- Kasting, J. F. (1988). Runaway and moist greenhouse atmospheres and the evolution of Earth and Venus. *Icarus*, 74(3):472–494.
- Kasting, J. F. (1991). CO₂ condensation and the climate of early Mars. *Icarus*, 94(1):1–13.
- Kasting, J. F. (1996). Planetary atmosphere evolution: Do other habitable planets exist and can we detect them? *Astrophysics and space science*, 241(1):3–24.
- Kasting, J. F. (1997). Habitable zones around low mass stars and the search for extraterrestrial life. In *Planetary and interstellar processes relevant to the origins of life*, pages 291–307. Springer.
- Kasting, J. F. (2008). The primitive earth. *Prebiotic Evolution and Astrobiology*, pages 1–8.
- Kasting, J. F., Kopparapu, R., Ramirez, R. M., and Harman, C. E. (2014). Remote life-detection criteria, habitable zone boundaries, and the frequency of Earth-like planets around M and late K stars. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(35):12641–12646.
- Kasting, J. F., Whitmire, D. P., and Reynolds, R. T. (1993). Habitable zones around main sequence stars. *Icarus*, 101(1):108–128.

- Katz, I. and Spetner, L. (1960). Polarization and depression angle dependence of radar terrain return. *J. Res. NBS*, 64:485.
- Kawahara, H. and Fujii, Y. (2010). Global mapping of Earth-like exoplanets from scattered light curves. *The Astrophysical Journal*, 720(2):1333.
- Kawahara, H. and Fujii, Y. (2011). Mapping clouds and terrain of Earth-like planets from photometric variability: demonstration with planets in face-on orbits. *The Astrophysical Journal Letters*, 739(2):L62.
- Kenworthy, M. A. and Mamajek, E. E. (2015). Modeling giant extrasolar ring systems in eclipse and the case of J1407b: sculpting by exomoons? *The Astrophysical Journal*, 800(2):126.
- Kerr, R. A. (2010). Magnetics Point to Magma 'Ocean' at Io. *Science*.
- Kervella, P. and Fouqué, P. (2008). The angular sizes of dwarf stars and subgiants-non-linear surface brightness relations in from interferometry. *Astronomy & Astrophysics*, 491(3):855–858.
- Kipping, D. M. (2009a). Transit timing effects due to an exomoon. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392(1):181–189.
- Kipping, D. M. (2009b). Transit timing effects due to an exomoon II. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396(3):1797–1804.
- Kipping, D. M. (2011a). LUNA: An algorithm for generating dynamic planet–moon transits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(1):689–709.
- Kipping, D. M. (2011b). *The Transits of Extrasolar Planets with Moons*. PhD thesis, University College London.
- Kipping, D. M., Bakos, G. Á., Buchhave, L., Nesvorný, D., and Schmitt, A. (2012). The hunt for exomoons with Kepler (HEK). I. Description of a new observational project. *The Astrophysical Journal*, 750(2):115.
- Kipping, D. M., Fossey, S. J., Campanella, G., Schneider, J., and Tinetti, G. (2009). Pathways towards habitable moons. *arXiv preprint arXiv:0911.5170*.
- Kipping, D. M., Huang, X., Nesvorný, D., Torres, G., Buchhave, L. A., Bakos, G. Á., and Schmitt, A. R. (2015). The possible moon of Kepler-90g is a false positive. *The Astrophysical Journal Letters*, 799(1):L14.

Bibliografía

- Kipping, D. M., Nesvorný, D., Buchhave, L. A., Hartman, J., Bakos, G. Á., and Schmitt, A. R. (2014). The hunt for exomoons with Kepler (HEK). IV. A search for moons around eight M dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 784(1):28.
- Kipping, D. M., Ribas, I., and Font-Ribera, A. (2008). Eccentric planets & transit time variation. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 4(S253):490–491.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., and Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680.
- Kitchin, C. R. (1987). *Stars, nebulae and the interstellar medium. Observational physics and astrophysics*. CRC Press.
- Kite, E. S., Gaidos, E., and Manga, M. (2011). Climate instability on tidally locked exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 743(1):41.
- Kivelson, M., Khurana, K., Stevenson, D., Bennett, L., Joy, S., Russell, C., Walker, R., Zimmer, C., and Polansky, C. (1999). Europa and callisto: Induced or intrinsic fields in a periodically varying plasma environment. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 104(A3):4609–4625.
- Knutson, H. A., Benneke, B., Deming, D., and Homeier, D. (2014). A featureless transmission spectrum for the Neptune-mass exoplanet GJ 436b. *Nature*, 505(7481):66–68.
- Kolokolova, L. (2015). *Polarimetry of stars and planetary systems*. Cambridge University Press.
- Konacki, M. and Wolszczan, A. (2003). Masses and orbital inclinations of planets in the PSR B1257+ 12 system. *The Astrophysical Journal Letters*, 591(2):L147.
- Kopparapu, R. K., Ramirez, R., Kasting, J. F., Eymet, V., Robinson, T. D., Mahadevan, S., Terrien, R. C., Domagal-Goldman, S., Meadows, V., and Deshpande, R. (2013a). Erratum: “Habitable Zones around Main-sequence Stars: New Estimates” (2013, ApJ, 765, 131). *The Astrophysical Journal*, 770(1):82.
- Kopparapu, R. K., Ramirez, R., Kasting, J. F., Eymet, V., Robinson, T. D., Mahadevan, S., Terrien, R. C., Domagal-Goldman, S., Meadows, V., and Deshpande, R. (2013b). Habitable zones around main-sequence stars: new estimates. *The Astrophysical Journal*, 765(2):131.

- Kopparapu, R. K., Ramirez, R. M., SchottelKotte, J., Kasting, J. F., Domagal-Goldman, S., and Eymet, V. (2014). Habitable zones around main-sequence stars: dependence on planetary mass. *The Astrophysical Journal Letters*, 787(2):L29.
- Kostov, V. B., McCullough, P., Hinse, T., Tsvetanov, Z., Hébrard, G., Díaz, R., Deleuil, M., and Valenti, J. A. (2013). A gas giant circumbinary planet transiting the F star primary of the eclipsing binary star KIC 4862625 and the independent discovery and characterization of the two transiting planets in the Kepler-47 system. *The Astrophysical Journal*, 770(1):52.
- Kostov, V. B., McCullough, P. R., Carter, J. A., Deleuil, M., Díaz, R. F., Fabrycky, D. C., Hébrard, G., Hinse, T. C., Mazeh, T., Orosz, J. A., Tsvetanov, Z. I., and Wels, W. F. (2014a). Erratum: "Kepler-413b: A Slightly Misaligned, Neptune-size Transiting Circumbinary Planet" (2014, ApJ, 784, 14). *The Astrophysical Journal*, 787.
- Kostov, V. B., McCullough, P. R., Carter, J. A., Deleuil, M., Díaz, R. F., Fabrycky, D. C., Hébrard, G., Hinse, T. C., Mazeh, T., Orosz, J. A., Tsvetanov, Z. I., and Wels, W. F. (2014b). Kepler-413b: a slightly misaligned, Neptune-size transiting circumbinary planet. *The Astrophysical Journal*, 784(1):14.
- Kostov, V. B., Orosz, J. A., Feinstein, A. D., Welsh, W. F., Cukier, W., Haghighipour, N., Quarles, B., Martin, D. V., Montet, B. T., Torres, G., Triaud, A. H. M. J., Barclay, T., Boyd, P., Briceno, C., Cameron, A. C., Correia, A. C. M., Gilbert, E. A., Gill, S., Gillon, M., Haqq-Misra, J., Hellier, C., Dressing, C., Fabrycky, D. C., Furesz, G., Jenkins, J. M., Kane, S. R., Kopparapu, R., Hodžić, V. K., Latham, D. W., Law, N., Levine, A. M., Li, G., Lintott, C., Lissauer, J. J., Mann, A. W., Mazeh, T., Mardling, R., Maxted, P. F. L., Eisner, N., Pepe, F., Pepper, J., Pollacco, D., Quinn, S. N., Quintana, E. V., Rowe, J. F., Ricker, G., Rose, M. E., Seager, S., Santerne, A., Ségransan, D., Short, D. R., Smith, J. C., Standing, M. R., Tokovinin, A., Trifonov, T., Turner, O., Twicken, J. D., Udry, S., Vanderspek, R., Winn, J. N., Wolf, E. T., Ziegler, C., Ansgore, P., Barnet, F., Bergeron, J., Hutten, M., Pappa, G., and van der Straeten, T. (2020). TOI-1338: TESS' First Transiting Circumbinary Planet. *The Astronomical Journal*, 159(6):253.
- Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., Doyle, L. R., Fabrycky, D. C., Haghighipour, N., Quarles, B., Short, D. R., Cochran, W. D., Endl, M., Ford, E. B., Gregorio, J., Hinse, T. C., Isaacson, H., Jenkins, J. M., Jensen, E. L. N., Kane, S., Kull, I., Latham, D. W., Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Mazeh,

T., Müller, T. W. A., Pepper, J., Quinn, S. N., Ragozzine, D., Shporer, A., Steffen, J. H., Torres, G., Windmiller, G., and Borucki, W. J. (2016). Kepler-1647b: the largest and longest-period Kepler transiting circumbinary planet. *The Astrophysical Journal*, 827(1):86.

Kozai, Y. (1962). Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*, 67:591.

Kreidberg, L., Bean, J. L., Désert, J.-M., Benneke, B., Deming, D., Stevenson, K. B., Seager, S., Berta-Thompson, Z., Seifahrt, A., and Homeier, D. (2014). Clouds in the atmosphere of the super-Earth exoplanet GJ 1214b. *Nature*, 505(7481):69–72.

Kreidberg, L., Luger, R., and Bedell, M. (2019). No evidence for lunar transit in new analysis of Hubble Space Telescope observations of the Kepler-1625 system. *The Astrophysical Journal Letters*, 877(2):L15.

Kuzuhara, M., Tamura, M., Kudo, T., Janson, M., Kandori, R., Brandt, T. D., Thalmann, C., Spiegel, D., Biller, B., Carson, J., Hori, Y., Suzuki, R., Burrows, A., Henning, T., Turner, E. L., McElwain, M. W., Moro-Martín, A., Suenaga, T., Takahashi, Y. H., Kwon, J., Lucas, P., Abe, L., Brandner, W., Egner, S., Feldt, M., Fujiwara, H., Goto, M., Grady, C. A., Guyon, O., Hashimoto, J., Hayano, Y., Hayashi, M., Hayashi, S. S., Hodapp, K. W., Ishii, M., Iye, M., Knapp, G. R., Matsuo, T., Mayama, S., Miyama, S., Morino, J.-I., Nishikawa, J., Nishimura, T., Kotani, T., Kusakabe, N., Pyo, T.-S., Serabyn, E., Suto, H., Takami, M., Takato, N., Terada, H., Tomono, D., Watanabe, M., Wisniewski, J. P., Yamada, T., Takami, H., and Usuda, T. (2013). Direct imaging of a cold Jovian exoplanet in orbit around the Sun-like star GJ 504. *The Astrophysical Journal*, 774(1):11.

Lada, C. J. (2006). Stellar Multiplicity and the IMF: Most Stars Are Single Born. *arXiv preprint astro-ph/0601375*.

Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., and Van Hoolst, T. (2009). Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*, 459(7249):957–959.

Lammer, H., Bredehöft, J. H., Coustenis, A., Khodachenko, M. L., Kaltenecker, L., Grasset, O., Prieur, D., Raulin, F., Ehrenfreund, P., Yamauchi, M., Wahlund, J. E., Grießmeier, J. M., Stangl, G., Cockell, C. S., Kulikov, Y. N., Grenfell, J. L., and Rauer, H. (2009). What makes a planet habitable? *The Astronomy and Astrophysics Review*, 17(2):181–249.

- Lammer, H., Selsis, F., Chassefière, E., Breuer, D., Grießmeier, J.-M., Kulikov, Y. N., Erkaev, N. V., Khodachenko, M. L., Biernat, H. K., Leblanc, F., Kallio, E., Lundin, R., Westall, F., Bauer, S. J., Beichman, C., Danchi, W., Eiroa, C., Fridlund, M., Gröller, H., Hanslmeier, A., Hausleitner, W., Henning, T., Herbst, T., Kaltenegger, L., Léger, A., Litzinger, M., Lichtenegger, H. I., Liseau, R., Lunine, J., Mutschmann, U., Odert, P., Paresce, F., Parnell, J., Penny, A., Quirrenbach, A., Rauer, H., Röttgering, H., Schneider, J., Spohn, T., Stadelmann, A., Stangl, G., Stam, D., Tinetti, G., and White, G. J. (2010). Geophysical and atmospheric evolution of habitable planets. *Astrobiology*, 10(1):45–68.
- Lane, B. F., Muterspaugh, M. W., Griffin, R., Scarfe, C., Fekel, F. C., Williamson, M. H., Eaton, J. A., Shao, M., Colavita, M., and Konacki, M. (2014). The orbits of the triple-star system 1 Geminorum from phases differential astrometry and spectroscopy. *The Astrophysical Journal*, 783(1):3.
- Lazio, J., Bastian, T., Bryden, G., Farrell, W. M., Griessmeier, J. M., Hallinan, G., Kasper, J., Kuiper, T., Lecacheux, A., Majid, W., Osten, R., Shklo-nik, E., Stevens, I., Winterhalter, D., and Zarka, P. (2009). Magnetospheric emission from extrasolar planets. *arXiv preprint arXiv:0903.0873*.
- Lecar, M., Podolak, M., Sasselov, D., and Chiang, E. (2006). On the location of the snow line in a protoplanetary disk. *The Astrophysical Journal*, 640(2):1115.
- Lee, J. W., Kim, S.-L., Kim, C.-H., Koch, R. H., Lee, C.-U., Kim, H.-I., and Park, J.-H. (2009). The sdB+ M eclipsing system HW Virginis and its circumbinary planets. *The Astronomical Journal*, 137(2):3181.
- Lee, S., Zanolin, M., Thode, A. M., Pappalardo, R. T., and Makris, N. C. (2003). Probing Europa’s interior with natural sound sources. *Icarus*, 165(1):144–167.
- Lemoine, F., Kenyon, S., Factor, J., Trimmer, R., Pavlis, N., Chinn, D., Cox, C., Klosko, S., Luthcke, S., Torrence, M., Wang, Y., Williamson, R., Pavlis, E., Rapp, R., and Olson, T. (1998). The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96.
- Lerch, F., Nerem, R., Putney, B., Felsentreger, T., Sanchez, B., Klosko, S., Patel, G., Williamson, R., Chinn, D., Chan, J., Rachlin, K., Chandler, N., McCarthy, J., Marshall, J., Luthcke, S., Pavlis, D., Robbins, J., Kapoor, S.,

and Pavlis, E. (1991). Geopotential models of the Earth from satellite tracking, altimeter and surface gravity observations: GEM-T3 and GEM-T3S. *Geopotential models of the Earth from satellite tracking, altimeter and surface gravity observations: GEM-T3 and GEM-T3S.*, by Lerch, F. J.; Nerem, R. S.; Putney, B. H.; Felsentreger, T. L.; Sanchez, B. V.; Klosko, S. M.; Patel, G. B.; Williamson, R. G.; Chinn, D. S.; Chan, J. C.; Rachlin, K. E.; Chandler, N. L.; McCarthy, J. J.; Marshall, J. A.; Luthcke, S. B.; Pavlis, D. W.; Robbins, J. W.; Kapoor, S.; Pavlis, E. C.. *National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC (USA), Jan 1992, p. 124.*

Lester, T. P., McCall, M., and Tatum, J. (1979). Theory of planetary photometry. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 73:233–257.

Levenberg, K. (1944). A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2):164–168.

Levin, E. (1968). Solar radiation pressure perturbations of earth satellite orbits. *AIAA Journal*, 6(1):120–126.

Levison, H. F., Lissauer, J. J., and Duncan, M. J. (1998). Modeling the diversity of outer planetary systems. *The Astronomical Journal*, 116(4).

Levison, H. F., Morbidelli, A., Gomes, R., and Backman, D. (2007). Planet migration in planetesimal disks. *Protostars and planets V*, pages 669–684.

Lewis, K. M. (2011). *The Detectability of Moons of Extra-Solar Planets*. PhD thesis, UC, Berkeley, Space Sci. Dept.

Lewis, K. M., Sackett, P. D., and Mardling, R. A. (2008). Possibility of detecting moons of pulsar planets through time-of-arrival analysis. *The Astrophysical Journal Letters*, 685(2):L153.

Lidov, M. (1961). Evolution of artificial planetary satellites under the action of gravitational perturbations due to external bodies. *Iskusstviennye Sputniki Zemli*, 8:5–45.

Limbach, M. A. and Turner, E. L. (2015). Exoplanet orbital eccentricity: Multiplicity relation and the Solar System. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(1):20–24.

Lin, C., Qing, A., and Feng, Q. (2011). A comparative study of crossover in differential evolution. *Journal of Heuristics*, 17(6):675–703.

- Lin, D. and Ida, S. (1997). On the origin of massive eccentric planets. *The Astrophysical Journal*, 477(2):781.
- Lin, H. W., Abad, G. G., and Loeb, A. (2014). Detecting industrial pollution in the atmospheres of earth-like exoplanets. *The Astrophysical Journal Letters*, 792(1):L7.
- Lissauer, J. J. (1993). Planet formation. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 31(1):129–172.
- Lissauer, J. J. (1995). Urey prize lecture: On the diversity of plausible planetary systems. *Icarus*, 114(2):217–236.
- Lissauer, J. J., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Borucki, W. J., Fressin, F., Marcy, G. W., Orosz, J. A., Rowe, J. F., Torres, G., Welsh, W. F., Batalha, N. M., Bryson, S. T., Buchhave, L. A., Caldwell, D. A., Carter, J. A., Charbonneau, D., Christiansen, J. L., Cochran, W. D., Desert, J.-M., Dunham, E. W., Fanelli, M. N., Fortney, J. J., Gautier, T. N., Geary, J. C., Gilliland, R. L., Haas, M. R., Hall, J. R., Holman, M. J., Koch, D. G., Latham, D. W., Lopez, E., McCauliff, S., Miller, N., Morehead, R. C., Quintana, E. V., Ragozzine, D., Sasselov, D., Short, D. R., and Steffen, J. H. (2011). A closely packed system of low-mass, low-density planets transiting Kepler-11. *Nature*, 470(7332):53–58.
- Lithwick, Y., Xie, J., and Wu, Y. (2012). Extracting planet mass and eccentricity from TTV data. *The Astrophysical Journal*, 761(2):122.
- Loeb, A. and Gaudi, B. S. (2003). Periodic flux variability of stars due to the reflex doppler effect induced by planetary companions. *The Astrophysical Journal Letters*, 588(2):L117.
- Lomb, N. R. (1976). Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and space science*, 39(2):447–462.
- Lopez, E. D. and Fortney, J. J. (2014). Understanding the mass-radius relation for sub-Neptunes: radius as a proxy for composition. *The Astrophysical Journal*, 792(1):1.
- Love, A. E. H. (1909). The yielding of the earth to disturbing forces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 82(551):73–88.

Luger, R., Sestovic, M., Kruse, E., Grimm, S., Demory, B.-O., Agol, E., Bolmont, E., Fabrycky, D., Fernandes, C., Van Grootel, V., Burgasser, A., Gillon, M., Ingalls, J., Jehin, E., Raymond, S., Selsis, F., Triaud, A., Barclay, T., Barentsen, G., and Queloz, D. (2017). A seven-planet resonant chain in TRAPPIST-1. *Nature Astronomy*, 1(6):1–8.

Luhmann, J. and Russell, C. T. (1997). Venus: Magnetic field and magnetosphere. *Encyclopedia of Planetary Sciences*, pages 905–907.

Lustig-Yaeger, J., Meadows, V. S., Mendoza, G. T., Schwieterman, E. W., Fujii, Y., Luger, R., and Robinson, T. D. (2018). Detecting Ocean Glint on Exoplanets Using Multiphase Mapping. *The Astronomical Journal*, 156(6):301.

Lyne, A. and Bailes, M. (1992). No planet orbiting PSR1829–10. *Nature*, 355(6357):213–213.

Macintosh, B., Graham, J. R., Barman, T., De Rosa, R. J., Konopacky, Q., Marley, M. S., Marois, C., Nielsen, E. L., Pueyo, L., Rajan, A., Rameau, J., Saumon, D., Wang, J. J., Patience, J., Ammons, M., Arriaga, P., Artigau, E., Beckwith, S., Brewster, J., Bruzzone, S., Bulger, J., Burningham, B., Burrows, A. S., Chen, C., Chiang, E., Chilcote, J. K., Dawson, R. I., Dong, R., Doyon, R., Draper, Z. H., Duchêne, G., Esposito, T. M., Fabrycky, D., Fitzgerald, M. P., Follette, K. B., Fortney, J. J., Gerard, B., Goodsell, S., Greenbaum, A. Z., Hibon, P., Hinkley, S., Cotten, T. H., Hung, L.-W., Ingraham, P., Johnson-Groh, M., Kalas, P., Lafreniere, D., Larkin, J. E., Lee, J., Line, M., Long, D., Maire, J., Marchis, F., Matthews, B. C., Max, C. E., Metchev, S., Millar-Blanchaer, M. A., Mittal, T., Morley, C. V., Morzinski, K. M., Murray-Clay, R., Oppenheimer, R., Palmer, D. W., Patel, R., Perrin, M. D., Poyneer, L. A., Rafikov, R. R., Rantakyö, F. T., Rice, E. L., Rojo, P., Rudy, A. R., Ruffio, J.-B., Ruiz, M. T., Sadakuni, N., Saddlemyer, L., Salama, M., Savransky, D., Schneider, A. C., Sivaramakrishnan, A., Song, I., Soummer, R., Thomas, S., Vasisht, G., Wallace, J. K., Ward-Duong, K., Wiktorowicz, S. J., Wolff, S. G., and Zuckerman, B. (2015). Discovery and spectroscopy of the young jovian planet 51 Eri b with the Gemini Planet Imager. *Science*, 350(6256):64–67.

Madhusudhan, N. (2019). Exoplanetary atmospheres: Key insights, challenges, and prospects. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 57:617–663.

Madhusudhan, N. and Seager, S. (2009). A temperature and abundance retrieval method for exoplanet atmospheres. *The Astrophysical Journal*, 707(1):24.

- Mamajek, E. E. and Hillenbrand, L. A. (2008). Improved age estimation for solar-type dwarfs using activity-rotation diagnostics. *The Astrophysical Journal*, 687(2):1264.
- Mandel, K. and Agol, E. (2002). Analytic light curves for planetary transit searches. *The Astrophysical Journal Letters*, 580(2):L171.
- Marboeuf, U., Schmitt, B., Petit, J., Mousis, O., and Fray, N. (2011). A model of cometary nucleus taking into account all phase changes of water ice: amorphous, crystalline, and clathrate. *epsc*, 2011:840.
- Marcy, G., Butler, R. P., Fischer, D., Vogt, S., Wright, J. T., Tinney, C. G., and Jones, H. R. (2005). Observed properties of exoplanets: masses, orbits, and metallicities. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 158:24–42.
- Marcy, G. W., Butler, R. P., Williams, E., Bildsten, L., Graham, J. R., Ghez, A. M., and Jernigan, J. G. (1997). The planet around 51 Pegasi. *The Astrophysical Journal*, 481(2):926.
- Marcy, G. W., Isaacson, H., Howard, A. W., Rowe, J. F., Jenkins, J. M., Bryson, S. T., Latham, D. W., Howell, S. B., Gautier, Thomas N., I., Batalha, N. M., Rogers, L., Ciardi, D., Fischer, D. A., Gilliland, R. L., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., Huber, D., Chaplin, W. J., Basu, S., Buchhave, L. A., Quinn, S. N., Borucki, W. J., Koch, D. G., Hunter, R., Caldwell, D. A., Van Cleve, J., Kolbl, R., Weiss, L. M., Petigura, E., Seager, S., Morton, T., Johnson, J. A., Ballard, S., Burke, C., Cochran, W. D., Endl, M., MacQueen, P., Everett, M. E., Lissauer, J. J., Ford, E. B., Torres, G., Fressin, F., Brown, T. M., Steffen, J. H., Charbonneau, D., Basri, G. S., Sasselov, D. D., Winn, J., Sanchis-Ojeda, R., Christiansen, J., Adams, E., Henze, C., Dupree, A., Fabrycky, D. C., Fortney, J. J., Tarter, J., Holman, M. J., Tenenbaum, P., Shporer, A., Lucas, P. W., Welsh, W. F., Orosz, J. A., Bedding, T. R., Campante, T. L., Davies, G. R., Elsworth, Y., Handberg, R., Hekker, S., Karoff, C., Kawaler, S. D., Lund, M. N., Lundkvist, M., Metcalfe, T. S., Miglio, A., Silva Aguirre, V., Stello, D., White, T. R., Boss, A., Devore, E., Gould, A., Prsa, A., Agol, E., Barclay, T., Coughlin, J., Brugamyer, E., Mullally, F., Quintana, E. V., Still, M., Thompson, S. E., Morrison, D., Twicken, J. D., Désert, J.-M., Carter, J., Crepp, J. R., Hébrard, G., Santerne, A., Moutou, C., Sobeck, C., Hudgins, D., Haas, M. R., Robertson, P., Lillo-Box, J., and Barrado, D. (2014). Masses, radii, and orbits of small Kepler planets: the transition from gaseous to rocky planets. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 210(2):20.

Bibliografía

- Mardling, R. A. and Aarseth, S. J. (2001). Tidal interactions in star cluster simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321(3):398–420.
- Marley, M. S., Fortney, J. J., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., and Lissauer, J. J. (2007). On the luminosity of young Jupiters. *The Astrophysical Journal*, 655(1):541.
- Marois, C., Zuckerman, B., Konopacky, Q. M., Macintosh, B., and Barman, T. (2010). Images of a fourth planet orbiting HR 8799. *Nature*, 468(7327):1080–1083.
- Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441.
- Marzari, F. (2014). Dynamical behaviour of multiplanet systems close to their stability limit. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 442(2):1110–1116.
- Marzari, F. and Weidenschilling, S. (2002). Eccentric extrasolar planets: the jumping jupiter model. *Icarus*, 156(2):570–579.
- Mason, J. W. (2008). Exoplanets. *Exoplanets*.
- Masters, A., Achilleos, N., Agnor, C., Campagnola, S., Charnoz, S., Christophe, B., Coates, A., Fletcher, L., Jones, G., Lamy, L., Marzari, F., Nettelmann, N., Ruiz, J., Ambrosi, R., Andre, N., Bhardwaj, A., Fortney, J., Hansen, C., Helled, R., Moragas-Klostermeyer, G., Orton, G., Ray, L., Reynaud, S., Sergis, N., Srama, R., and Volwerk, M. (2014). Neptune and Triton: Essential pieces of the Solar System puzzle. *Planetary and Space Science*, 104:108–121.
- Masuda, K. (2014). *Characterization of Multi-transiting Planetary Systems with Transit Timing Variations*. PhD thesis, University of Tokyo.
- Matsakis, D. N., Taylor, J. H., and Eubanks, T. M. (1997). A statistic for describing pulsar and clock stabilities. *Astronomy and Astrophysics*, 326:924–928.
- Mayor, M. and Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378(6555):355–359.

- McCord, T. a., Hansen, G., Clark, R., Martin, P., Hibbitts, C., Fanale, F., Granahan, J., Segura, M., Matson, D., Johnson, T., et al. (1998). Non-water-ice constituents in the surface material of the icy Galilean satellites from the Galileo near-infrared mapping spectrometer investigation. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 103(E4):8603–8626.
- McCord, T. B. and Sotin, C. (2005). Ceres: Evolution and current state. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 110(E5).
- McEwen, A. S., Keszthelyi, L., Geissler, P., Simonelli, D. P., Carr, M. H., Johnson, T. V., Klaasen, K. P., Breneman, H., Jones, T. J., Kaufman, J. M., Magee, K. P., Senske, D. A., Belton, M. J., and Schubert, G. (1998a). Active volcanism on Io as seen by Galileo SSI. *Icarus*, 135(1):181–219.
- McEwen, A. S., Keszthelyi, L., Spencer, J. R., Schubert, G., Matson, D. L., Lopes-Gautier, R., Klaasen, K. P., Johnson, T. V., Head, J. W., Geissler, P., Fagents, S., Davies, A. G., Carr, M. H., Breneman, H. H., and Belton, M. J. S. (1998b). High-temperature silicate volcanism on jupiter’s moon io. *Science*, 281(5373):87–90.
- McEwen, A. S., Keszthelyi, L. P., Lopes, R., Schenk, P. M., and Spencer, J. R. (2004). The lithosphere and surface of Io. *Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere*, pages 307–328.
- McLinden, C., McConnell, J., Griffioen, E., McElroy, C., and Pfister, L. (1997). Estimating the wavelength-dependent ocean albedo under clear-sky conditions using NASA ER 2 spectroradiometer measurements. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 102(D15):18801–18811.
- Meadows, V. S. and Barnes, R. K. (2018). Factors affecting exoplanet habitability. *Handbook of Exoplanets*.
- Méndez, A., Muñoz-Iglesias, V., Izquierdo-Ruíz, F., and Prieto-Ballesteros, O. (2017). Salting-out phenomenon induced by the clathrate hydrates formation at high-pressure . In *J. Phys. Conf. Ser.*, volume 950, page 42.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6):1087–1092.
- Mezura-Montes, E. and Palomeque-Ortiz, A. G. (2009). Self-adaptive and deterministic parameter control in differential evolution for constrained optimization. In *Constraint-Handling in Evolutionary Optimization*, pages 95–120. Springer.

Mégevand, D., Zerbi, F. M., Marcantonio, P. D., Cabral, A., Riva, M., Abreu, M., Pepe, F., Cristiani, S., Lopez, R. R., Santos, N. C., Dekker, H., Aliverti, M., Allende, C., Amate, M., Avila, G., Baldini, V., Bandy, T., Bristow, P., Broeg, C., Cirami, R., Coelho, J., Conconi, P., Coretti, I., Cupani, G., D'Odorico, V., Caprio, V. D., Delabre, B., Dorn, R., Figueira, P., Fragoso, A., Galeotta, S., Genolet, L., Gomes, R., Hernández, J. G., Hughes, I., Iwert, O., Kerber, F., Landoni, M., Lizon, J.-L., Lovis, C., Maire, C., Mannelta, M., Martins, C. C. J. A. P., Molaro, P., Monteiro, M. A. S., Moschetti, M., Oliveira, A., Osorio, M. R. Z., Poretti, E., Rasilla, J. L., Tschudi, S. S., Santos, P., Sosnowska, D., Sousa, S., Tenegi, F., Toso, G., Vanzella, E., and Viel, M. (2014). ESPRESSO: the radial velocity machine for the VLT. In *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy V*, volume 9147, page 91471H. International Society for Optics and Photonics.

Miller, M. C. and Hamilton, D. P. (2001). Implications of the PSR 1257+ 12 planetary system for isolated millisecond pulsars. *The Astrophysical Journal*, 550(2):863.

Miller-Ricci, E. and Fortney, J. J. (2010). The nature of the atmosphere of the transiting super-Earth GJ 1214b. *The Astrophysical Journal Letters*, 716(1):L74.

Miller-Ricci, E., Seager, S., and Sasselov, D. (2008). The atmospheric signatures of super-Earths: how to distinguish between hydrogen-rich and hydrogen-poor atmospheres. *The Astrophysical Journal*, 690(2):1056.

Moon, B., Jeong, D.-G., Oh, S., and Sohn, J. (2017). Variation in solar limb darkening coefficient estimated from solar images taken by SOHO and SDO. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 34(2):99–103.

Moorhead, A. V. and Adams, F. C. (2005). Giant planet migration through the action of disk torques and planet–planet scattering. *Icarus*, 178(2):517–539.

Morais, M. H. and Correia, A. (2008). Stellar wobble caused by a binary system: Can it really be mistaken as an extra-solar planet? *Astronomy & Astrophysics*, 491(3):899–906.

Mordasini, C., Alibert, Y., Georgy, C., Dittkrist, K.-M., Klahr, H., and Henning, T. (2012). Characterization of exoplanets from their formation-II. The planetary mass-radius relationship. *Astronomy & Astrophysics*, 547:A112.

- Moutou, C., Deleuil, M., Guillot, T., Baglin, A., Bordé, P., Bouchy, F., Cabrera, J., Csizmadia, S., and Deeg, H. J. (2013). CoRoT: Harvest of the exoplanet program. *Icarus*, 226(2):1625–1634.
- Muñoz-Iglesias, M. V., Bonales, L., and Prieto-Ballesteros, O. (2011a). Characterization of the Differentiation Process by Clathration in Europa Satellite Using Raman Spectroscopy. *LPICo*, 1616:59.
- Muñoz-Iglesias, M. V., Bonales, L., Taravillo, M., García Baonza, V., and Prieto-Ballesteros, O. (2011b). Monitoring by Raman Spectroscopy of CO₂ Clathrate Formation from Electrolyte Solutions. The Performance to Icy Satellites. *epsc*, 2011:914.
- Muñoz-Iglesias, M. V., Bonales, L. J., Santamaría-Pérez, D., Taravillo, M., Baonza, V. G., and Prieto-Ballesteros, O. (2012). Characterization of salting-out processes during CO₂-clathrate formation using Raman spectroscopy: planetological application. *Spectroscopy Letters*, 45(6):407–412.
- Müller, T. W. and Haghighipour, N. (2014). Calculating the habitable zones of multiple star systems with a new interactive web site. *The Astrophysical Journal*, 782(1):26.
- Muñoz, D. J. and Lai, D. (2015). Survival of planets around shrinking stellar binaries. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(30):9264–9269.
- Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge university press.
- Naoz, S., Farr, W. M., Lithwick, Y., Rasio, F. A., and Teyssandier, J. (2013). Secular dynamics in hierarchical three-body systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431(3):2155–2171.
- Nesvorný, D. and Beaugé, C. (2010). Fast inversion method for determination of planetary parameters from transit timing variations. *The Astrophysical Journal Letters*, 709(1):L44.
- Nesvorný, D., Kipping, D. M., Buchhave, L. A., Bakos, G. Á., Hartman, J., and Schmitt, A. R. (2012). The detection and characterization of a non-transiting planet by transit timing variations. *Science*, 336(6085):1133–1136.
- Nesvorný, D. and Morbidelli, A. (2008). Mass and orbit determination from transit timing variations of exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 688(1):636.

Bibliografía

- Nimmo, F. (2002). Why does Venus lack a magnetic field? *Geology*, 30(11):987–990.
- Noyola, J., Satyal, S., and Musielak, Z. (2016). On the radio detection of multiple-exomoon systems due to plasma torus sharing. *The Astrophysical Journal*, 821(2):97.
- Noyola, J. P., Satyal, S., and Musielak, Z. E. (2014). Detection of exomoons through observation of radio emissions. *The Astrophysical Journal*, 791(1):25.
- Oakley, P. and Cash, W. (2009). Construction of an Earth model: analysis of exoplanet light curves and mapping the next Earth with the New Worlds Observer. *The Astrophysical Journal*, 700(2):1428.
- Oancea, A., Grasset, O., Le Menn, E., Bezacier, L., Bollengier, O., Le Mouélic, S., and Tobie, G. (2012). IR reflectance spectroscopy of carbon dioxide clathrate hydrates. Implications for Saturn’s icy moons. *EGUGA*, page 6054.
- Ochsenbein, F., Bauer, P., and Marcout, J. (2000). The VizieR database of astronomical catalogues. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 143(1):23–32.
- Ohta, Y., Taruya, A., and Suto, Y. (2008). Predicting photometric and spectroscopic signatures of rings around transiting extrasolar planets. *The Astrophysical Journal*, 690(1):1.
- Olson, B., Hashmi, I., Molloy, K., and Shehu, A. (2012). Basin Hopping as a General and Versatile Optimization Framework for the Characterization of Biological Macromolecules. *Advances in Artificial Intelligence (16877470)*.
- Olson, P. and Christensen, U. R. (2006). Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos. *Earth and Planetary Science Letters*, 250(3-4):561–571.
- Orosz, J. A., Welsh, W. F., Carter, J. A., Brugamyer, E., Buchhave, L. A., Cochran, W. D., Endl, M., Ford, E. B., MacQueen, P., Short, D. R., Torres, G., Windmiller, G., Agol, E., Barclay, T., Caldwell, D. A., Clarke, B. D., Doyle, L. R., Fabrycky, D. C., Geary, J. C., Haghighipour, N., Holman, M. J., Ibrahim, K. A., Jenkins, J. M., Kinemuchi, K., Li, J., Lissauer, J. J., Prša, A., Ragozzine, D., Shporer, A., Still, M., and Wade, R. A. (2012a). The Neptune-sized circumbinary planet Kepler-38b. *The Astrophysical Journal*, 758(2):87.

Orosz, J. A., Welsh, W. F., Carter, J. A., Fabrycky, D. C., Cochran, W. D., Endl, M., Ford, E. B., Haghighipour, N., MacQueen, P. J., Mazeh, T., Sanchis-Ojeda, R., Short, D. R., Torres, G., Agol, E., Buchhave, L. A., Doyle, L. R., Isaacson, H., Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Shporer, A., Windmiller, G., Barclay, T., Boss, A. P., Clarke, B. D., Fortney, J., Geary, J. C., Holman, M. J., Huber, D., Jenkins, J. M., Kinemuchi, K., Kruse, E., Ragozzine, D., Sasselov, D., Still, M., Tenenbaum, P., Uddin, K., Winn, J. N., Koch, D. G., and Borucki, W. J. (2012b). Kepler-47: a transiting circumbinary multiplanet system. *Science*, 337(6101):1511–1514.

Orosz, J. A., Welsh, W. F., Haghighipour, N., Quarles, B., Short, D. R., Mills, S. M., Satyal, S., Torres, G., Agol, E., Fabrycky, D. C., Jontof-Hutter, D., Windmiller, G., Müller, T. W. A., Hinse, T. C., Cochran, W. D., Endl, M., Ford, E. B., Mazeh, T., and Lissauer, J. J. (2019). Discovery of a third transiting planet in the Kepler-47 circumbinary system. *The Astronomical Journal*, 157(5):174.

O’Toole, S., Tinney, C., Jones, H., Butler, R., Marcy, G., Carter, B., and Bailey, J. (2009). Selection functions in doppler planet searches. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392(2):641–654.

Owen, T. (1980). The search for early forms of life in other planetary systems: future possibilities afforded by spectroscopic techniques. In *Strategies for the Search for Life in the Universe*, pages 177–185. Springer.

Pál, A. and Kocsis, B. (2008). Periastron precession measurements in transiting extrasolar planetary systems at the level of general relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389(1):191–198.

Pallé, E., Ford, E. B., Seager, S., Montañés-Rodríguez, P., and Vazquez, M. (2008). Identifying the rotation rate and the presence of dynamic weather on extrasolar Earth-like planets from photometric observations. *The Astrophysical Journal*, 676(2):1319.

Pan, M. and Sari, R. (2004). Shaping the Kuiper belt size distribution by shattering large but strengthless bodies. *Icarus*, 173(2):342–348.

Papaloizou, J. C. and Terquem, C. (2001). Dynamical relaxation and massive extrasolar planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 325(1):221–230.

Pasek, M. A., Sampson, J. M., and Atlas, Z. (2014). Redox chemistry in the phosphorus biogeochemical cycle. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(43):15468–15473.

Bibliografía

- Peale, S. (1988). Speculative histories of the Uranian satellite system. *Icarus*, 74(2):153–171.
- Peale, S. J., Cassen, P., and Reynolds, R. T. (1979). Melting of Io by tidal dissipation. *Science*, 203(4383):892–894.
- Pepe, F., Mayor, M., Delabre, B., Kohler, D., Lacroix, D., Queloz, D., Udry, S., Benz, W., Bertaux, J.-L., and Sivan, J.-P. (2000). HARPS: a new high-resolution spectrograph for the search of extrasolar planets. In *Optical and IR telescope instrumentation and detectors*, volume 4008, pages 582–592. International Society for Optics and Photonics.
- Pepe, F. A., Cristiani, S., Lopez, R. R., Santos, N. C., Amorim, A., Avila, G., Benz, W., Bonifacio, P., Cabral, A., Carvas, P., Cirami, R., Coelho, J., Comari, M., Coretti, I., Caprio, V. D., Dekker, H., Delabre, B., Marcantonio, P. D., D’Odorico, V., Fleury, M., García, R., Linares, J. M. H., Hughes, I., Iwert, O., Lima, J., Lizon, J.-L., Curto, G. L., Lovis, C., Manescau, A., Martins, C., Mégevand, D., Moitinho, A., Molaro, P., Monteiro, M., Monteiro, M., Pasquini, L., Mordasini, C., Queloz, D., Rasilla, J. L., Rebordão, J. M., Tschudi, S. S., Santin, P., Sosnowska, D., Spanò, P., Tenegi, F., Udry, S., Vanzella, E., Viel, M., Osorio, M. R. Z., and Zerbi, F. (2010). ESPRESSO: the Echelle spectrograph for rocky exoplanets and stable spectroscopic observations. In *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy III*, volume 7735, page 77350F. International Society for Optics and Photonics.
- Perryman, M. (2018). The exoplanet handbook, 2nd ed. by M. Perryman. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2018, 952 p., hardcover (ISBN 978-1-108-41977-2). *Meteoritics & Planetary Science*, 54.
- Perryman, M., Hartman, J., Bakos, G. Á., and Lindgren, L. (2014). Astrometric exoplanet detection with Gaia. *The Astrophysical Journal*, 797(1):14.
- Pham, L. and Karatekin, Ö. (2016). Scenarios of atmospheric mass evolution on Mars influenced by asteroid and comet impacts since the late Noachian. *Planetary and Space Science*, 125:1–11.
- Phillips, J. and Thorsett, S. (1994). Planets around pulsars: a review. In *Planetary Systems: Formation, Evolution, and Detection*, pages 91–106. Springer.
- Pinte, C., van der Plas, G., Ménard, F., Price, D., Christiaens, V., Hill, T., Mentiplay, D., Ginski, C., Choquet, E., Boehler, Y., Duchêne, G., Perez, S.,

- and Casassus, S. (2019). Kinematic detection of a planet carving a gap in a protoplanetary disk. *Nature Astronomy*, 3(12):1109–1114.
- Poincaré, H. (1899). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3. Gauthier-Villars et fils.
- Pollacco, D. L., Skillen, I., Cameron, A. C., Christian, D. J., Hellier, C., Irwin, J., Lister, T. A., Street, R. A., West, R. G., Anderson, D., Clarkson, W. I., Deeg, H., Enoch, B., Evans, A., Fitzsimmons, A., Haswell, C. A., Hodgkin, S., Horne, K., Kane, S. R., Keenan, F. P., Maxted, P. F. L., Norton, A. J., Osborne, J., Parley, N. R., Ryans, R. S. I., Smalley, B., Wheatley, P. J., and Wilson, D. M. (2006). The WASP project and the SuperWASP cameras. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 118(848):1407.
- Pollack, J. B., Kasting, J. F., Richardson, S. M., and Poliakov, K. (1987). The case for a wet, warm climate on early Mars. *Icarus*, 71(2):203–224.
- Pont, F., Knutson, H., Gilliland, R. L., Moutou, C., and Charbonneau, D. (2008). Detection of atmospheric haze on an extrasolar planet: the 0.55–1.05 μm transmission spectrum of HD 189733b with the Hubble Space Telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385(1):109–118.
- Popova, E. and Shevchenko, I. (2014). Orbital resonances in exoplanetary systems. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 572, page 012006. IOP Publishing, IOP Publishing.
- Porco, C. C., Helfenstein, P., Thomas, P. C., Ingersoll, A. P., Wisdom, J., West, R., Neukum, G., Denk, T., Wagner, R., Roatsch, T., Kieffer, S., Turtle, E., McEwen, A., Johnson, T. V., Rathbun, J., Veverka, J., Wilson, D., Perry, J., Spitale, J., Brahic, A., Burns, J. A., DelGenio, A. D., Dones, L., Murray, C. D., and Squyres, S. (2006). Cassini observes the active south pole of Enceladus. *science*, 311(5766):1393–1401.
- Porco, C. C., West, R. A., McEwen, A., Del Genio, A. D., Ingersoll, A. P., Thomas, P., Squyres, S., Dones, L., Murray, C. D., Johnson, T. V., Burns, J. A., Brahic, A., Neukum, G., Veverka, J., Barbara, J. M., Denk, T., Evans, M., Ferrier, J. J., Geissler, P., Helfenstein, P., Roatsch, T., Throop, H., Tiscareno, M., and Vasavada, A. R. (2003). Cassini imaging of Jupiter’s atmosphere, satellites, and rings. *Science*, 299(5612):1541–1547.
- Porter, S. B. and Grundy, W. M. (2011). Post-capture evolution of potentially habitable exomoons. *The Astrophysical Journal Letters*, 736(1):L14.

- Postman, M., Traub, W., Krist, J., Stapelfeldt, K., Brown, R., Oegerle, W., Lo, A., Clampin, M., Soummer, R., Wiseman, J., and Mountain, M. (2009). Advanced Technology Large-Aperture Space Telescope (ATLAST): Characterizing Habitable Worlds. *arXiv preprint arXiv:0911.3841*.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., and Vetterling, W. T. (1992). *Numerical recipes in Fortran 77: volume 1, volume 1 of Fortran numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge university press.
- Prieto-Ballesteros, O., Gomez, F., Hand, K., Parro, V., Prieur, D., and Vorob'eva, E. (2011). Strategies of putative Europa life detection. *Adv. Space Res*, 48:678–688.
- Prieto-Ballesteros, O., Kargel, J. S., Fernández-Sampedro, M., Selsis, F., Martínez, E. S., and Hogenboom, D. L. (2005). Evaluation of the possible presence of clathrate hydrates in Europa's icy shell or seafloor. *Icarus*, 177(2):491–505.
- Prieto-Ballesteros, O. and Muñoz-Iglesias, V. (2014). The Role of Clathrate Hydrates in the (Bio) Geochemical Cycles of Essential Elements of Life in the Deep Environments Within the Icy Moons. *LPICo*, 1774:4077.
- Quirrenbach, A., Amado, P. J., Caballero, J. A., Mundt, R., Reiners, A., Ribas, I., Seifert, W., Abril, M., Aceituno, J., Alonso-Floriano, F. J., Anwand-Heerwart, H., Azzaro, M., Bauer, F., Barrado, D., Becerril, S., Bejar, V. J. S., Benitez, D., Berdinas, Z. M., Brinkmüller, M., Cardenas, M. C., Casal, E., Claret, A., Colomé, J., Cortes-Contreras, M., Czesla, S., Doellinger, M., Dreizler, S., Feiz, C., Fernandez, M., Ferro, I. M., Fuhrmeister, B., Galadi, D., Gallardo, I., Gálvez-Ortiz, M. C., Garcia-Piquer, A., Garrido, R., Gesa, L., Galera, V. G., Hernández, J. I. G., Peinado, R. G., Grözing, U., Guàrdia, J., Guenther, E. W., de Guindos, E., Hagen, H.-J., Hatzes, A. P., Hauschildt, P. H., Helmling, J., Henning, T., Hermann, D., Arabi, R. H., Castaño, L. H., Hernando, F. H., Herrero, E., Huber, A., Huber, K. F., Huke, P., Jeffers, S. V., de Juan, E., Kaminski, A., Kehr, M., Kim, M., Klein, R., Klüter, J., Kürster, M., Lafarga, M., Lara, L. M., Lamert, A., Laun, W., Launhardt, R., Lemke, U., Lenzen, R., Llamas, M., del Fresno, M. L., López-Puertas, M., López-Santiago, J., Salas, J. F. L., Madinabeitia, H. M., Mall, U., Mandel, H., Mancini, L., Molina, J. A. M., Fernández, D. M., Martín, E. L., Martín-Ruiz, S., Marvin, C., Mathar, R. J., Mirabet, E., Montes, D., Morales, J. C., Muñoz, R. M., Nagel, E., Naranjo, V., Nowak, G., Palle, E., Panduro, J., Passegger, V. M., Pavlov, A., Pedraz, S., Perez, E., Pérez-Medialdea, D., Perger, M., Pluto, M., Ramón, A., Rebolo, R., Redondo, P., Reffert, S., Reinhart, S.,

- Rhode, P., Rix, H.-W., Rodler, F., Rodríguez, E., López, C. R., Rohloff, R. R., Rosich, A., Carrasco, M. A. S., Sanz-Forcada, J., Sarkis, P., Sarmiento, L. F., Schäfer, S., Schiller, J., Schmidt, C., Schmitt, J. H. M. M., Schöfer, P., Schweitzer, A., Shulyak, D., Solano, E., Stahl, O., Storz, C., Tabernero, H. M., Tala, M., Tal-Or, L., Ulbrich, R.-G., Veredas, G., Linares, J. I. V., Vilardell, F., Wagner, K., Winkler, J., Osorio, M.-R. Z., Zechmeister, M., von Eiff, M. A., Anglada-Escudé, G., del Burgo, C., Garcia-Vargas, M. L., Klutsch, A., Lizon, J.-L., Lopez-Morales, M., Ofir, A., Pérez-Calpena, A., Perryman, M. A. C., Sánchez-Blanco, E., Strachan, J. B. P., Stürmer, J., Suárez, J. C., Trifonov, T., Tulloch, S. M., and Xu, W. (2016). CARMENES: an overview six months after first light. In *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VI*, volume 9908, page 990812. International Society for Optics and Photonics.
- Rasool, S. I. and de Bergh, C. (1970). The runaway greenhouse and the accumulation of CO₂ in the Venus atmosphere. *Nature*, 226(5250):1037–1039.
- Ray, R. D., Eanes, R. J., and Lemoine, F. G. (2001). Constraints on energy dissipation in the Earth’s body tide from satellite tracking and altimetry. *Geophysical Journal International*, 144(2):471–480.
- Regenauer-Lieb, K., Yuen, D. A., and Branlund, J. (2001). The initiation of subduction: criticality by addition of water? *science*, 294(5542):578–580.
- Reynolds, R. T., McKay, C. P., and Kasting, J. F. (1987). Europa, tidally heated oceans, and habitable zones around giant planets. *Advances in Space Research*, 7(5):125–132.
- Richardson, L. J., Harrington, J., Seager, S., and Deming, D. (2006). A Spitzer* Infrared Radius for the Transiting Extrasolar Planet HD 209458b. *The Astrophysical Journal*, 649(2):1043.
- Ricker, G. R., Vanderspek, R., Winn, J., Seager, S., Berta-Thompson, Z., Levine, A., Villaseñor, J., Latham, D., Charbonneau, D., Holman, M., Johnson, J., Sasselov, D., Szentgyorgyi, A., Torres, G., Bakos, G., Brown, T., Christensen-Dalsgaard, J., Kjeldsen, H., Clampin, M., Rinehart, S., Deming, D., Doty, J., Dunham, E., Ida, S., Kawai, N., Sato, B., Jenkins, J., Lissauer, J., Jernigan, G., Kaltenegger, L., Laughlin, G., Lin, D., McCullough, P., Narita, N., Pepper, J., Stassun, K., and Udry, S. (2016). The Transiting Exoplanet Survey Satellite. In *Space Telescopes and Instrumentation 2016: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*, volume 9904, page 99042B. International Society for Optics and Photonics.

Bibliografía

- Rieder, S. and Kenworthy, M. A. (2016). Constraints on the size and dynamics of the J1407b ring system. *Astronomy & Astrophysics*, 596:A9.
- Robinson, T. D. (2017). Characterizing exoplanet habitability. *arXiv preprint arXiv:1701.05205*.
- Robinson, T. D., Maltagliati, L., Marley, M. S., and Fortney, J. J. (2014). Titan solar occultation observations reveal transit spectra of a hazy world. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(25):9042–9047.
- Robinson, T. D., Meadows, V. S., and Crisp, D. (2010). Detecting oceans on extrasolar planets using the glint effect. *The Astrophysical Journal Letters*, 721(1):L67.
- Robuchon, G. and Nimmo, F. (2011). Thermal evolution of Pluto and implications for surface tectonics and a subsurface ocean. *Icarus*, 216(2):426–439.
- Roche, E. (1849). Mémoire de la section des sciences. *Académie des sciences et des lettres de Montpellier*, 1:243.
- Rosenblatt, F. (1971). A two-color photometric method for detection of extra-solar planetary systems. *Icarus*, 14(1):71–93.
- Rouan, D., Baglin, A., Copet, E., Schneider, J., Barge, P., Deleuil, M., Vullemin, A., and Léger, A. (1998). The exosolar planets program of the corot satellite. *Earth, Moon, and Planets*, 81(1):79–82.
- Roy, A. E. (2004). *Orbital motion*. CRC Press.
- Rugheimer, S., Kaltenegger, L., Zsom, A., Segura, A., and Sasselov, D. (2013). Spectral fingerprints of Earth-like planets around FGK stars. *Astrobiology*, 13(3):251–269.
- Santos, N., Mayor, M., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Udry, S., and Burnet, M. (2001). The CORALIE survey for southern extra-solar planets-VI. New long period giant planets around HD 28185 and HD 213240. *Astronomy & Astrophysics*, 379(3):999–1004.
- Sartoretti, P. and Schneider, J. (1999). On the detection of satellites of extrasolar planets with the method of transits. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 134(3):553–560.
- Sasaki, T., Barnes, J. W., and O’Brien, D. P. (2012). Outcomes and duration of tidal evolution in a star-planet-moon system. *The Astrophysical Journal*, 754(1):51.

- Saur, J., Neubauer, F. M., Connerney, J., Zarka, P., and Kivelson, M. G. (2004). Plasma interaction of Io with its plasma torus. *Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere*, 1:537–560.
- Scargle, J. D. (1982). Studies in astronomical time series analysis. II—Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 263:835–853.
- Scharf, C. A. (2006). The potential for tidally heated icy and temperate moons around exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 648(2):1196.
- Scharf, C. A. (2007). Exoplanet transit parallax. *The Astrophysical Journal*, 661(2):1218.
- Scharf, C. A. (2008). Moons of Exoplanets: Habitats for Life? In *Exoplanets*, pages 285–303. Springer.
- Schindler, T. L. and Kasting, J. F. (2000). Synthetic spectra of simulated terrestrial atmospheres containing possible biomarker gases. *Icarus*, 145(1):262–271.
- Schneider, P. and Weiss, A. (1986). The two-point-mass lens-detailed investigation of a special asymmetric gravitational lens. *Astronomy and Astrophysics*, 164:237–259.
- Schulze-Makuch, D. and Irwin, L. N. (2006). The prospect of alien life in exotic forms on other worlds. *Naturwissenschaften*, 93(4):155–172.
- Schulze-Makuch, D., Méndez, A., Fairén, A. G., Von Paris, P., Turse, C., Boyer, G., Davila, A. F., Antonio, M. R. d. S., Catling, D., and Irwin, L. N. (2011). A two-tiered approach to assessing the habitability of exoplanets. *Astrobiology*, 11(10):1041–1052.
- Schuster, A. (1898). On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena. *Terrestrial Magnetism*, 3(1):13–41.
- Schwamb, M. E., Orosz, J. A., Carter, J. A., Welsh, W. F., Fischer, D. A., Torres, G., Howard, A. W., Crepp, J. R., Keel, W. C., Lintott, C. J., Kaib, N. A., Terrell, D., Gagliano, R., Jek, K. J., Parrish, M., Smith, A. M., Lynn, S., Simpson, R. J., Giguere, M. J., and Schawinski, K. (2013). Planet hunters: A transiting circumbinary planet in a quadruple star system. *The Astrophysical Journal*, 768(2):127.

- Schwarz, R., Funk, B., Zechner, R., and Bazsó, Á. (2016). New prospects for observing and cataloguing exoplanets in well-detached binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 460(4):3598–3609.
- Schwieterman, E. W., Kiang, N. Y., Parenteau, M. N., Harman, C. E., Das-Sarma, S., Fisher, T. M., Arney, G. N., Hartnett, H. E., Reinhard, C. T., Olson, S. L., Meadows, V. S., Cockell, C. S., Walker, S. I., Grenfell, J. L., Hegde, S., Rugheimer, S., Hu, R., and Lyons, T. W. (2018). Exoplanet biosignatures: a review of remotely detectable signs of life. *Astrobiology*, 18(6):663–708.
- Seager, S. (2013). Exoplanet habitability. *Science*, 340(6132):577–581.
- Seager, S., Bains, W., and Hu, R. (2013). Biosignature gases in H₂-dominated atmospheres on rocky exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 777(2):95.
- Seager, S. and Deming, D. (2010). Exoplanet atmospheres. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48:631–672.
- Seager, S., Dotson, R., and Institute, L. (2010). *Exoplanets*. Space Science Series. University of Arizona Press.
- Seager, S., Kuchner, M., Hier-Majumder, C., and Militzer, B. (2007). Mass-radius relationships for solid exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 669(2):1279.
- Seager, S. and Mallen-Ornelas, G. (2003). A unique solution of planet and star parameters from an extrasolar planet transit light curve. *The Astrophysical Journal*, 585(2):1038.
- Seager, S. and Sasselov, D. (2000). Theoretical transmission spectra during extrasolar giant planet transits. *The Astrophysical Journal*, 537(2):916.
- Seager, S., Whitney, B., and Sasselov, D. (2000). Photometric light curves and polarization of close-in extrasolar giant planets. *The Astrophysical Journal*, 540(1):504.
- Segura, A., Kasting, J. F., Meadows, V., Cohen, M., Scalo, J., Crisp, D., Butler, R. A., and Tinetti, G. (2005). Biosignatures from Earth-like planets around M dwarfs. *Astrobiology*, 5(6):706–725.
- Selsis, F., Despois, D., and Parisot, J.-P. (2002). Signature of life on exoplanets: Can Darwin produce false positive detections? *Astronomy & Astrophysics*, 388(3):985–1003.

- Selsis, F., Kasting, J. F., Levrard, B., Paillet, J., Ribas, I., and Delfosse, X. (2007). Habitable planets around the star Gliese 581? *Astronomy & Astrophysics*, 476(3):1373–1387.
- Shallue, C. J. and Vanderburg, A. (2018). Identifying exoplanets with deep learning: A five-planet resonant chain around Kepler-80 and an eighth planet around Kepler-90. *The Astronomical Journal*, 155(2):94.
- Shevchenko, I. I. (2016). *The Lidov-Kozai effect-applications in exoplanet research and dynamical astronomy*, volume 441. Springer.
- Shibahashi, H. and Kurtz, D. W. (2012). FM stars: a Fourier view of pulsating binary stars, a new technique for measuring radial velocities photometrically. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422(1):738–752.
- Shin, I.-G., Udalski, A., Han, C., Gould, A., Dominik, M., Fouqué, P., Kubiak, M., Szymański, M. K., Pietrzyński, G., Soszyński, I., Ulaczyk, K., Wyrzykowski, L., DePoy, D. L., Dong, S., Gaudi, B. S., Lee, C.-U., Park, B.-G., Pogge, R. W., Albrow, M. D., Allan, A., Beaulieu, J. P., Bennett, D. P., Bode, M., Bramich, D. M., Brilliant, S., Burgdorf, M., Calitz, H., Cassan, A., Cook, K. H., Corrales, E., Coutures, C., Desort, N., Dieters, S., Prester, D. D., Donatowicz, J., Fraser, S. N., Greenhill, J., Hill, K., Hoffman, M., Horne, K., Jørgensen, U. G., Kane, S. R., Kubas, D., Marquette, J. B., Martin, R., Meintjes, P., Menzies, J., Mottram, C., Naylor, T., Pollard, K. R., Sahu, K. C., Snodgrass, C., Steele, I., Vinter, C., Wambsganss, J., Williams, A., and Woller, K. (2011). OGLE-2005-BLG-018: Characterization of full physical and orbital parameters of a gravitational binary lens. *The Astrophysical Journal*, 735(2):85.
- Sigurdsson, S., Richer, H. B., Hansen, B. M., Stairs, I. H., and Thorsett, S. E. (2003). A young white dwarf companion to pulsar B1620-26: evidence for early planet formation. *Science*, 301(5630):193–196.
- Simon, A., Szatmáry, K., and Szabó, G. M. (2007). Determination of the size, mass, and density of “exomoons” from photometric transit timing variations. *Astronomy & Astrophysics*, 470(2):727–731.
- Sing, D. K. (2010). Stellar limb-darkening coefficients for CoRoT and Kepler. *Astronomy & Astrophysics*, 510:A21.
- Sing, D. K. (2018). Observational Techniques With Transiting Exoplanetary Atmospheres. In *Astrophysics of Exoplanetary Atmospheres*, pages 3–48. Springer.

Sing, D. K., Fortney, J. J., Nikolov, N., Wakeford, H. R., Kataria, T., Evans, T. M., Aigrain, S., Ballester, G. E., Burrows, A. S., Deming, D., Désert, J.-M., Gibson, N. P., Henry, G. W., Huitson, C. M., Knutson, H. A., Lecavelier Des Etangs, A., Pont, F., Showman, A. P., Vidal-Madjar, A., Williamson, M. H., and Wilson, P. A. (2016). A continuum from clear to cloudy hot-Jupiter exoplanets without primordial water depletion. *Nature*, 529(7584):59–62.

Sing, D. K., Wakeford, H. R., Showman, A. P., Nikolov, N., Fortney, J. J., Burrows, A. S., Ballester, G. E., Deming, D., Aigrain, S., Désert, J.-M., Gibson, N. P., Henry, G. W., Knutson, H., Lecavelier des Etangs, A., Pont, F., Vidal-Madjar, A., Williamson, M. W., and Wilson, P. A. (2015). HST hot-Jupiter transmission spectral survey: detection of potassium in WASP-31b along with a cloud deck and Rayleigh scattering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(3):2428–2443.

Skemer, A. J., Hinz, P. M., Esposito, S., Burrows, A., Leisenring, J., Skrutskie, M., Desidera, S., Mesa, D., Arcidiacono, C., Mannucci, F., Rodrigues, T. J., Close, L., McCarthy, D., Kulesa, C., Agapito, G., Apai, D., Argomedo, J., Bailey, V., Boutsia, K., Briguglio, R., Brusa, G., Busoni, L., Claudi, R., Eisner, J., Fini, L., Follette, K. B., Garnavich, P., Gratton, R., Guerra, J. C., Hill, J. M., Hoffmann, W. F., Jones, T., Krejny, M., Males, J., Masciadri, E., Meyer, M. R., Miller, D. L., Morzinski, K., Nelson, M., Pinna, E., Puglisi, A., Quanz, S. P., Quiros-Pacheco, F., Riccardi, A., Stefanini, P., Vaitheeswaran, V., Wilson, J. C., and Xompero, M. (2012). First light LBT AO images of HR 8799 bcde at 1.6 and 3.3 μm : New discrepancies between young planets and old brown dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 753(1):14.

Skowron, J., Udalski, A., Gould, A., Dong, S., Monard, L. A. G., Han, C., Nelson, C. R., McCormick, J., Moorhouse, D., Thornley, G., Maury, A., Brämich, D. M., Greenhill, J., Kozłowski, S., Bond, I., Poleski, R., Wyrzykowski, L., Ulaczyk, K., Kubiak, M., Szymański, M. K., Pietrzyński, G., Soszyński, I., Gaudi, B. S., Yee, J. C., Hung, L.-W., Pogge, R. W., DePoy, D. L., Lee, C.-U., Park, B.-G., Allen, W., Mallia, F., Drummond, J., Bolt, G., Allan, A., Browne, P., Clay, N., Dominik, M., Fraser, S., Horne, K., Kains, N., Mottram, C., Snodgrass, C., Steele, I., Street, R. A., Tsapras, Y., Abe, F., Bennett, D. P., Botzler, C. S., Douchin, D., Freeman, M., Fukui, A., Furusawa, K., Hayashi, F., Hearnshaw, J. B., Hosaka, S., Itow, Y., Kamiya, K., Kilmartin, P. M., Korpela, A., Lin, W., Ling, C. H., Makita, S., Masuda, K., Matsu- bara, Y., Muraki, Y., Nagayama, T., Miyake, N., Nishimoto, K., Ohnishi, K., Perrott, Y. C., Rattenbury, N., Saito, T., Skuljan, L., Sullivan, D. J., Sumi, T., Suzuki, D., Sweatman, W. L., Tristram, P. J., Wada, K., Yock, P.

- C. M., Beaulieu, J.-P., Fouqué, P., Albrow, M. D., Batista, V., Brilliant, S., Caldwell, J. A. R., Cassan, A., Cole, A., Cook, K. H., Coutures, C., Dieters, S., Prester, D. D., Donatowicz, J., Kane, S. R., Kubas, D., Marquette, J.-B., Martin, R., Menzies, J., Sahu, K. C., Wambsganss, J., Williams, A., and Zub, M. (2011). Binary microlensing event OGLE-2009-BLG-020 gives verifiable mass, distance, and orbit predictions. *The Astrophysical Journal*, 738(1):87.
- Smith, B. A., Soderblom, L. A., Johnson, T. V., Ingersoll, A. P., Collins, S. A., Shoemaker, E. M., Hunt, G. E., Masursky, H., Carr, M. H., Davies, M. E., Cook, A. F., Boyce, J., Danielson, G. E., Owen, T., Sagan, C., Beebe, R. F., Veverka, J., Strom, R. G., McCauley, J. F., Morrison, D., Briggs, G. A., and Suomi, V. E. (1979a). The Jupiter system through the eyes of Voyager 1. *Science*, 204(4396):951–972.
- Smith, B. A., Soderblom, L. A., Johnson, T. V., Ingersoll, A. P., Collins, S. A., Shoemaker, E. M., Hunt, G. E., Masursky, H., Carr, M. H., Davies, M. E., Cook, A. F., Boyce, J., Danielson, G. E., Owen, T., Sagan, C., Beebe, R. F., Veverka, J., Strom, R. G., McCauley, J. F., Morrison, D., Briggs, G. A., and Suomi, V. E. (1979b). The Galilean satellites and Jupiter: Voyager 2 imaging science results. *Science*, 206(4421):927–950.
- Smith, G. R. and Hunten, D. M. (1990). Study of planetary atmospheres by absorptive occultations. *Reviews of geophysics*, 28(2):117–143.
- Smith, J. A., Tucker, D. L., Kent, S., Richmond, M. W., Fukugita, M., Ichikawa, T., Ichi Ichikawa, S., Jorgensen, A. M., Uomoto, A., Gunn, J. E., Hamabe, M., Watanabe, M., Tolea, A., Henden, A., Annis, J., Pier, J. R., McKay, T. A., Brinkmann, J., Chen, B., Holtzman, J., Shimasaku, K., and York, D. G. (2002). The ugriz standard-star system. *The Astronomical Journal*, 123(4):2121.
- Smolyak, S. (1963). Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 4, pages 240–243.
- Socia, Q. J., Welsh, W. F., Orosz, J. A., Cochran, W. D., Endl, M., Quarles, B., Short, D. R., Torres, G., Windmiller, G., and Yenawine, M. (2020). Kepler-1661 b: A Neptune-sized Kepler Transiting Circumbinary Planet around a Grazing Eclipsing Binary. *The Astronomical Journal*, 159(3):94.
- Soderblom, D. R., Duncan, D. K., and Johnson, D. R. (1991). The chromospheric emission-age relation for stars of the lower main sequence and its

implications for the star formation rate. *The Astrophysical Journal*, 375:722–739.

Soderblom, D. R., Hillenbrand, L. A., Jeffries, R. D., Mamajek, E. E., and Naylor, T. (2014). Ages of young stars. *Protostars and Planets VI*, 3(1).

Sohl, F., Spohn, T., Breuer, D., and Nagel, K. (2002). Implications from Galileo observations on the interior structure and chemistry of the Galilean satellites. *Icarus*, 157(1):104–119.

Solomatov, V. (2003). Toward understanding the conditions required for plate tectonics to occur on Earth-like planets. In *Lunar and Planetary Science Conference*, volume 34.

Solomatov, V. (2004). Initiation of subduction by small-scale convection. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109(B1).

Solomon, S. C. and Head, J. W. (1991). Fundamental issues in the geology and geophysics of Venus. *Science*, 252(5003):252–260.

Song, Y.-Y., Mao, S., and An, J. H. (2014). Degeneracies in triple gravitational microlensing. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 437(4):4006–4018.

Sotin, C., Grasset, O., and Mocquet, A. (2007). Mass–radius curve for extra-solar Earth-like planets and ocean planets. *Icarus*, 191(1):337–351.

Sotin, C., Jackson, J., and Seager, S. (2010). Terrestrial planet interiors.

Soummer, R., Valenti, J., Brown, R. A., Seager, S., Tumlinson, J., Cash, W., Jordan, I., Postman, M., Mountain, M., Glassman, T., Pueyo, L., and Roberge, A. (2010). Direct imaging and spectroscopy of habitable planets using JWST and a starshade. In *SPIE*, volume 7731, page 77312I.

Sousa-Silva, C., Seager, S., Ranjan, S., Petkowski, J. J., Zhan, Z., Hu, R., and Bains, W. (2020). Phosphine as a biosignature gas in exoplanet atmospheres. *Astrobiology*, 20(2):235–268.

Sowicka, P., Handler, G., Debski, B., Jones, D., Van de Sande, M., and Pápics, P. I. (2017). Search for exoplanets around pulsating stars of A–F type in Kepler short-cadence data and the case of KIC 8197761. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 467(4):4663–4673.

- Spaun, N., Head, J., Collins, G., Prockter, L., and Pappalardo, R. (1998a). Conamara Chaos region, Europa: Reconstruction of mobile polygonal ice blocks. *Geophysical research letters*, 25(23):4277–4280.
- Spaun, N., Head, J., Collins, G., Prockter, L., and Pappalardo, R. (1998b). Geologic History, Surface Morphology and Deformation Sequence in an Area Near Conamara Chaos, Europa. In *Lunar and Planetary Science Conference*, Lunar and Planetary Science Conference, page 1899.
- Spohn, T. (2010). *Treatise on Geophysics, Volume 10: Planets and Moons*, volume 10. Newnes.
- Spohn, T. and Schubert, G. (2003). Oceans in the icy galilean satellites of jupiter? *Icarus*, 161(2):456–467.
- Squyres, S. W., Reynolds, R. T., Cassen, P. M., and Peale, S. J. (1983). Liquid water and active resurfacing on Europa. *Nature*, 301(5897):225–226.
- Stassun, K. G., Oelkers, R. J., Pepper, J., Paegert, M., Lee, N. D., Torres, G., Latham, D. W., Charpinet, S., Dressing, C. D., Huber, D., Kane, S. R., Lépine, S., Mann, A., Muirhead, P. S., Rojas-Ayala, B., Silvotti, R., Fleming, S. W., Levine, A., and Plavchan, P. (2018). The tess input catalog and candidate target list. *The Astronomical Journal*, 156(3):102.
- Steffen, J. H., Fabrycky, D. C., Agol, E., Ford, E. B., Morehead, R. C., Cochran, W. D., Lissauer, J. J., Adams, E. R., Borucki, W. J., Bryson, S., Caldwell, D. A., Dupree, A., Jenkins, J. M., Robertson, P., Rowe, J. F., Seader, S., Thompson, S., and Twicken, J. D. (2012). Transit timing observations from Kepler – VII. Confirmation of 27 planets in 13 multiplanet systems via transit timing variations and orbital stability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 428(2):1077–1087.
- Stephan, K., Jaumann, R., Brown, R. H., Soderblom, J. M., Soderblom, L. A., Barnes, J. W., Sotin, C., Griffith, C. A., Kirk, R. L., Baines, K. H., Buratti, B. J., Clark, R. N., Lytle, D. M., Nelson, R. M., and Nicholson, P. D. (2010). Specular reflection on Titan: liquids in Kraken Mare. *Geophysical Research Letters*, 37(7).
- Stephenson, F., Morrison, L., and Hohenkerk, C. (2016). Measurement of the Earth’s rotation: 720 BC to AD 2015. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2196):20160404.

Bibliografía

- Stevenson, D. (1983). Planetary magnetic fields. *Reports on Progress in Physics*, 46(5):555.
- Stevenson, D. J. (2003). Planetary magnetic fields. *Earth and planetary science letters*, 208(1-2):1–11.
- Steves, B., Hendry, M., and Cameron, A. C. (2010). *Extra-solar planets: The detection, formation, evolution and dynamics of planetary systems*. CRC Press.
- Strutt, H. J. (1871). LVIII. On the scattering of light by small particles. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(275):447–454.
- Struve, O. (1952). Proposal for a project of high-precision stellar radial velocity work. *The Observatory*, 72:199–200.
- Sutton, P. J. (2019). Mean motion resonances with nearby moons: an unlikely origin for the gaps observed in the ring around the exoplanet J1407b. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(2):1681–1689.
- Swain, M. R., Tinetti, G., Vasisht, G., Deroo, P., Griffith, C., Bouwman, J., Chen, P., Yung, Y., Burrows, A., Brown, L. R., Matthews, J., Rowe, J. F., Kuschnig, R., and Angerhausen, D. (2009). Water, methane, and carbon dioxide present in the dayside spectrum of the exoplanet HD 209458b. *The Astrophysical Journal*, 704(2):1616.
- Swift, D. C., Eggert, J., Hicks, D. G., Hamel, S., Caspersen, K., Schwegler, E., Collins, G. W., Nettelmann, N., and Ackland, G. (2011). Mass-radius relationships for exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 744(1):59.
- Szabó, G. M., Szatmáry, K., Divéki, Z., and Simon, A. (2006). Possibility of a photometric detection of “exomoons”. *Astronomy & Astrophysics*, 450(1):395–398.
- Szebehely, V. and Zare, K. (1977). Stability of classical triplets and of their hierarchy. *Astronomy and Astrophysics*, 58:145–152.
- Takeda, G. and Rasio, F. A. (2005). High orbital eccentricities of extrasolar planets induced by the Kozai mechanism. *The Astrophysical Journal*, 627(2):1001.
- Tan, L. and Jiang, J. (2013). *Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications*. Academic Press.

- Taylor, F. (2016). *Exploring the Planets: A Memoir*. Oxford University Press.
- Teachey, A., Kipping, D., Burke, C. J., Angus, R., and Howard, A. W. (2020). Loose Ends for the Exomoon Candidate Host Kepler-1625b. *The Astronomical Journal*, 159(4):142.
- Teachey, A. and Kipping, D. M. (2018). Evidence for a large exomoon orbiting Kepler-1625b. *Science advances*, 4(10).
- Teachey, A., Kipping, D. M., and Schmitt, A. R. (2017). HEK. VI. On the dearth of Galilean analogs in Kepler, and the exomoon candidate Kepler-1625b I. *The Astronomical Journal*, 155(1):36.
- Thomas, D. J., Zachos, J. C., Bralower, T. J., Thomas, E., and Bohaty, S. (2002). Warming the fuel for the fire: Evidence for the thermal dissociation of methane hydrate during the Paleocene-Eocene thermal maximum. *Geology*, 30(12):1067–1070.
- Thomas, P., Tajeddine, R., Tiscareno, M., Burns, J., Joseph, J., Loredó, T., Helfenstein, P., and Porco, C. (2016). Enceladus’s measured physical libration requires a global subsurface ocean. *Icarus*, 264:37–47.
- Thorsett, S. E. and Phillips, J. A. (1992). Rocks around the Clock: Limits on Pulsar Planetary Systems. *The Astrophysical Journal*, 387:L69.
- Tinetti, G., Meadows, V. S., Crisp, D., Fong, W., Fishbein, E., Turnbull, M., and Bibring, J.-P. (2006). Detectability of planetary characteristics in disk-averaged spectra. I: The Earth model. *Astrobiology*, 6(1):34–47.
- Tobie, G., Choblet, G., and Sotin, C. (2003). Tidally heated convection: Constraints on Europa’s ice shell thickness. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 108(E11).
- Tokovinin, A. (1997). MSC-a catalogue of physical multiple stars. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 124(1):75–84.
- Tokovinin, A. (2014a). From binaries to multiples. I. Data on F and G dwarfs within 67 pc of the Sun. *The Astronomical Journal*, 147(4):86.
- Tokovinin, A. (2014b). From binaries to multiples. II. Hierarchical multiplicity of F and G dwarfs. *The Astronomical Journal*, 147(4):87.
- Tsapras, Y. (2018). Microlensing searches for exoplanets. *Geosciences*, 8(10):365.

Tschauner, O., Ma, C., Beckett, J. R., Prescher, C., Prakapenka, V. B., and Rossman, G. R. (2014). Discovery of bridgmanite, the most abundant mineral in Earth, in a shocked meteorite. *Science*, 346(6213):1100–1102.

Tsiaras, A., Rocchetto, M., Waldmann, I. P., Venot, O., Varley, R., Morello, G., Damiano, M., Tinetti, G., Barton, E. J., Yurchenko, S. N., and Tennyson, J. (2016). Detection of an atmosphere around the super-Earth 55 Cancri e. *The Astrophysical Journal*, 820(2):99.

Tsiaras, A., Waldmann, I. P., Tinetti, G., Tennyson, J., and Yurchenko, S. N. (2019). Water vapour in the atmosphere of the habitable-zone eight-Earth-mass planet K2-18 b. *Nature Astronomy*, 3(12):1086–1091.

Tuomi, M. (2012). Evidence for nine planets in the HD 10180 system. *Astronomy & Astrophysics*, 543:A52.

Turcotte, D. L. and Schubert, G. (2002). *Geodynamics*. Cambridge University Press.

Turner, J., Zarka, P., and Griessmeier, J.-M. (2019). The search for radio emission from the exoplanetary systems 55 Cnc, Upsilon Andromedae, and Tau Boötis using LOFAR beam-formed observations. *EPSC*, 2019:EPSC–DPS2019.

Tusnski, L. R. M. and Valio, A. (2011). Transit model of planets with moon and ring systems. *The Astrophysical Journal*, 743(1):97.

Udalski, A., Jaroszyński, M., Paczyński, B., Kubiak, M., Szymański, M. K., Soszyński, I., Pietrzyński, G., Ulaczyk, K., Szewczyk, O., Wyrzykowski, L., Christie, G. W., DePoy, D. L., Dong, S., Gal-Yam, A., Gaudi, B. S., Gould, A., Han, C., Lépine, S., McCormick, J., Park, B.-G., Pogge, R. W., Bennett, D. P., Bond, I. A., Muraki, Y., Tristram, P. J., Yock, P. C. M., Beaulieu, J.-P., Bramich, D. M., Dieters, S. W., Greenhill, J., Hill, K., Horne, K., and Kubas, D. (2005). A jovian-mass planet in microlensing event OGLE-2005-BLG-071. *The Astrophysical Journal Letters*, 628(2):L109.

Udalski, A., Pietrzyński, G., Szymanski, M., Kubiak, M., Zebrun, K., Soszynski, I., Szewczyk, O., and Wyrzykowski, L. (2003). The Optical Gravitational Lensing Experiment. Additional planetary and low-luminosity object transits from the OGLE 2001 and 2002 observational campaigns. *arXiv preprint astro-ph/0306444*.

- Unterborn, C. T., Desch, S. J., Hinkel, N. R., and Lorenzo, A. (2018). Inward migration of the TRAPPIST-1 planets as inferred from their water-rich compositions. *Nature Astronomy*, 2(4):297–302.
- Valencia, D., O’Connell, R. J., and Sasselov, D. (2006). Internal structure of massive terrestrial planets. *Icarus*, 181(2):545–554.
- Valencia, D., Sasselov, D. D., and O’Connell, R. J. (2007). Radius and structure models of the first super-Earth planet. *The Astrophysical Journal*, 656(1):545.
- van Belle, G. T., von Braun, K., Boyajian, T., and Schaefer, G. (2012). Direct imaging of planet transit events. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 8(S293):378–381.
- Vanderburg, A. and Johnson, J. A. (2014). A technique for extracting highly precise photometry for the two-wheeled Kepler mission. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 126(944):948.
- Vartanyan, D., Garmilla, J. A., and Rafikov, R. R. (2016). Tutooine nurseries: structure and evolution of circumbinary protoplanetary disks. *The Astrophysical Journal*, 816(2):94.
- Verbiest, J. P., Bailes, M., van Straten, W., Hobbs, G. B., Edwards, R. T., Manchester, R. N., Bhat, N., Sarkissian, J. M., Jacoby, B. A., and Kulkarni, S. R. (2008). Precision timing of PSR J0437–4715: an accurate pulsar distance, a high pulsar mass, and a limit on the variation of Newton’s gravitational constant. *The Astrophysical Journal*, 679(1):675.
- Verrier, P. and Evans, N. (2007). Planetary stability zones in hierarchical triple star systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 382(4):1432–1446.
- Vidal-Madjar, A., Des Etangs, A. L., Désert, J.-M., Ballester, G., Ferlet, R., Hébrard, G., and Mayor, M. (2003). An extended upper atmosphere around the extrasolar planet HD209458b. *Nature*, 422(6928):143–146.
- Vogt, S. S., Allen, S. L., Bigelow, B. C., Bresee, L., Brown, W. E., Cantrall, T., Conrad, A., Couture, M., Delaney, C., Epps, H. W., Hilyard, D., Hilyard, D. F., Horn, E., Jern, N., Kanto, D., Keane, M. J., Kibrick, R. I., Lewis, J. W., Osborne, J., Pardeilhan, G. H., Pfister, T., Ricketts, T., Robinson, L. B., Stover, R. J., Tucker, D., Ward, J. M., and Wei, M. (1994). HIRES:

the high-resolution echelle spectrometer on the Keck 10-m Telescope. In *Instrumentation in Astronomy VIII*, volume 2198, pages 362–375. International Society for Optics and Photonics.

Vogt, S. S., Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Henry, G. W., Laughlin, G., Wright, J. T., and Johnson, J. A. (2005). Five new multicomponent planetary systems. *The Astrophysical Journal*, 632(1):638.

Waldvogel, J. (2006). Fast construction of the Fejér and Clenshaw–Curtis quadrature rules. *BIT Numerical Mathematics*, 46(1):195–202.

Wales, D. J. and Doye, J. P. (1997). Global optimization by basin-hopping and the lowest energy structures of Lennard-Jones clusters containing up to 110 atoms. *The Journal of Physical Chemistry A*, 101(28):5111–5116.

Wang, Z. and Cuntz, M. (2017). Fitting Formulae and Constraints for the Existence of S-type and P-type Habitable Zones in Binary Systems. *The Astronomical Journal*, 154(4):157.

Wang, Z. and Cuntz, M. (2019). S-type and P-type habitability in stellar binary systems: A comprehensive approach. III. results for Mars, Earth, and super-Earth planets. *The Astrophysical Journal*, 873(2):113.

Ward, W. R. and Reid, M. J. (1973). Solar tidal friction and satellite loss. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 164(1):21–32.

Weiss, L. M. and Marcy, G. W. (2014). The mass-radius relation for 65 exoplanets smaller than 4 Earth radii. *The Astrophysical Journal Letters*, 783(1):L6.

Welsh, W., Orosz, J., Carter, J., Fabrycky, D., Ford, E., Lissauer, J., Prša, A., Quinn, S., Ragozzine, D., Short, D., Torres, G., Winn, J., Doyle, L., Barclay, T., Batalha, N., Bloemen, S., Brugamyer, E., Buchhave, L., Caldwell, C., and Borucki, W. (2012). Transiting circumbinary planets Kepler-34 b and Kepler-35 b. *Nature*, 481(7382):475–479.

Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., Cochran, W. D., Endl, M., Brugamyer, E., Haghighipour, N., Buchhave, L. A., Doyle, L. R., Fabrycky, D. C., Hinse, T. C., Kane, S. R., Kostov, V., Mazeh, T., Mills, S. M., Müller, T. W. A., Quarles, B., Quinn, S. N., Ragozzine, D., Shporer, A., Steffen, J. H., Tal-Or, L., Torres, G., Windmiller, G., and Borucki, W. J. (2015). Kepler 453 b—the 10th Kepler transiting circumbinary planet. *The Astrophysical Journal*, 809(1):26.

- Wienbruch, U. and Spohn, T. (1995). A self sustained magnetic field on Io? *Planetary and Space Science*, 43(9):1045–1057.
- Williams, D. M. and Gaidos, E. (2008). Detecting the glint of starlight on the oceans of distant planets. *Icarus*, 195(2):927–937.
- Williams, D. M., Kasting, J. F., and Wade, R. A. (1997). Habitable moons around extrasolar giant planets. *Nature*, 385(6613):234–236.
- Winn, J. N. (2010). Exoplanet transits and occultations. *Exoplanets*, 1:55–77.
- Winn, J. N., Holman, M. J., Torres, G., McCullough, P., Johns-Krull, C., Latham, D. W., Shporer, A., Mazeh, T., Garcia-Melendo, E., Foote, C., Esquerdo, G., and Everett, M. (2008). The transit light curve project. IX. Evidence for a smaller radius of the exoplanet XO-3b. *The Astrophysical Journal*, 683(2):1076.
- Witt, H. (1990). Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars. *Astronomy and Astrophysics*, 236:311–322.
- Wolszczan, A. and Frail, D. A. (1992). A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257+ 12. *Nature*, 355(6356):145–147.
- Wordsworth, R., Forget, F., Millour, E., Head, J., Madeleine, J.-B., and Charney, B. (2013). Global modelling of the early martian climate under a denser CO₂ atmosphere: Water cycle and ice evolution. *Icarus*, 222(1):1–19.
- Wordsworth, R., Forget, F., Selsis, F., Madeleine, J.-B., Millour, E., and Eymet, V. (2010). Is Gliese 581d habitable? Some constraints from radiative-convective climate modeling. *Astronomy & Astrophysics*, 522:A22.
- Wright, J. and Eastman, J. (2014). Barycentric corrections at 1 cm s⁻¹ for precise Doppler velocities. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 126(943):838.
- Wright, J. and Howard, A. (2009). Efficient fitting of multiplanet keplerian models to radial velocity and astrometry data. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 182(1):205.
- Wright, J. T., Veras, D., Ford, E. B., Johnson, J. A., Marcy, G. W., Howard, A. W., Isaacson, H., Fischer, D. A., Spronck, J., Anderson, J., and Valenti, J. (2011). The California planet survey. III. A possible 2: 1 resonance in the exoplanetary triple system HD 37124. *The Astrophysical Journal*, 730(2):93.

- Wuchterl, G., Guillot, T., and Lissauer, J. (2000). Giant planet formation. in: *Protostars and planets*, edited by v. mannings, ap boss, ss russel.
- Xie, J.-W. (2013). Transit timing variation of near-resonance planetary pairs: Confirmation of 12 multiple-planet systems. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):22.
- Yang, J., Cowan, N. B., and Abbot, D. S. (2013). Stabilizing cloud feedback dramatically expands the habitable zone of tidally locked planets. *The Astrophysical Journal Letters*, 771(2):L45.
- Yoder, C. F. and Peale, S. J. (1981). The tides of Io. *Icarus*, 47(1):1–35.
- Zeng, L. and Sasselov, D. (2013). A detailed model grid for solid planets from 0.1 through 100 Earth masses. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):227.
- Zeng, L., Sasselov, D. D., and Jacobsen, S. B. (2016). Mass–radius relation for rocky planets based on PREM. *The Astrophysical Journal*, 819(2):127.
- Zhou, G., Bakos, G. Á., Hartman, J. D., Latham, D. W., Torres, G., Bhatti, W., Penev, K., Buchhave, L., Kovács, G., Bieryla, A., Quinn, S., Isaacson, H., Fulton, B. J., Falco, E., Csabry, Z., Everett, M., Szklenar, T., Esquerdo, G., Berlind, P., Calkins, M. L., Béky, B., Knox, R. P., Hinz, P., Horch, E. P., Hirsch, L., Howell, S. B., Noyes, R. W., Marcy, G., de Val-Borro, M., Lázár, J., Papp, I., and Sári, P. (2017). HAT-P-67b: an extremely low density Saturn transiting an F-subgiant confirmed via doppler tomography. *The Astronomical Journal*, 153(5):211.
- Zhu, W., Wang, J., and Huang, C. (2016). Dependence of small planet frequency on stellar metallicity hidden by their prevalence. *The Astrophysical Journal*, 832(2):196.
- Zimmer, C., Khurana, K. K., and Kivelson, M. G. (2000). Subsurface oceans on Europa and Callisto: Constraints from Galileo magnetometer observations. *Icarus*, 147(2):329–347.
- Zioutas, K., Tsagri, M., Semertzidis, Y., Papaevangelou, T., Georgiopolou, E., Gardikiotis, A., and Dafni, T. (2011). Solar flares as harbinger of new physics. *arXiv preprint arXiv:1112.4329*.
- Zollinger, R. R., Armstrong, J. C., and Heller, R. (2017). Exomoon habitability and tidal evolution in low-mass star systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472(1):8–25.

- Zsom, A., Kaltenecker, L., and Goldblatt, C. (2012). A 1D microphysical cloud model for Earth, and Earth-like exoplanets: Liquid water and water ice clouds in the convective troposphere. *Icarus*, 221(2):603–616.
- Zugger, M. E., Kasting, J. F., Williams, D. M., Kane, T. J., and Philbrick, C. R. (2010). Light scattering from exoplanet oceans and atmospheres. *The Astrophysical Journal*, 723(2):1168.
- Zugger, M. E., Kasting, J. F., Williams, D. M., Kane, T. J., and Philbrick, C. R. (2011). Searching for water earths in the near-infrared. *The Astrophysical Journal*, 739(1):12.
- Zuluaga, J. I., Bustamante, S., Cuartas, P. A., and Hoyos, J. H. (2013). The influence of thermal evolution in the magnetic protection of terrestrial planets. *The Astrophysical Journal*, 770(1):23.
- Zuluaga, J. I., Kipping, D. M., Sucerquia, M., and Alvarado, J. A. (2015). A novel method for identifying exoplanetary rings. *The Astrophysical Journal Letters*, 803(1):L14.

Apéndice A

Resultados del problema de los 2 cuerpos

Una órbita kepleriana elíptica se caracteriza por los siguientes elementos orbitales, respecto a un sistema cartesiano ortogonal con origen en el cuerpo principal:

La época de paso por el periastro, T .

La excentricidad de la elipse, e .

El semieje mayor de la elipse, a .

La inclinación de la órbita, i , con respecto al plano de referencia*.

El ángulo del nodo ascendente, Ω . Es el ángulo que se mide desde una dirección de referencia hasta el nodo ascendente. En nuestro trabajo hemos tomado la dirección Norte, y tomaremos un sistema de referencia levógiro, tal como el utilizado en el estudio de las estrellas dobles.

El argumento del periastro, ω . Es el ángulo que se mide, sobre el plano orbital, desde el nodo ascendente de la órbita hasta el periastro. Se cuenta en

*En los dos primeros Capítulos, hemos tomado como plano de referencia el perpendicular a la línea de observación, mientras que en los dos últimos, ha sido el plano *invariable* o de Laplace.

el sentido del recorrido.

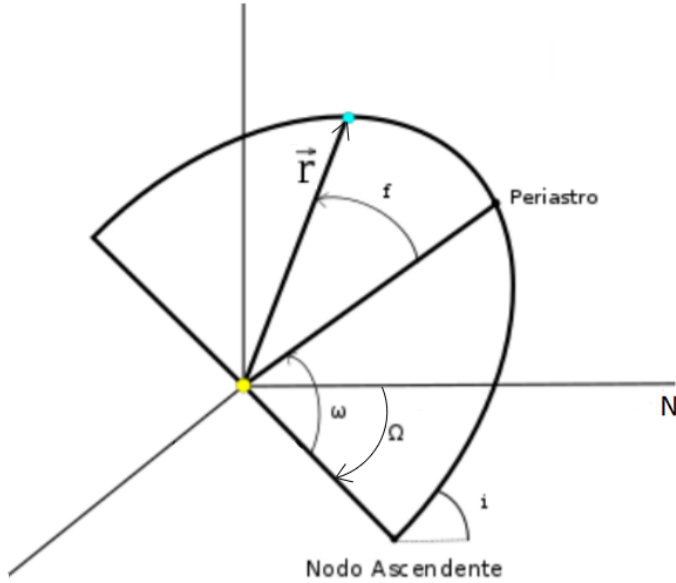


Figura A.1: Visualización de los elementos orbitales de una órbita kepleriana.

El período de revolución de la órbita, P , se relaciona con el semieje a través de la tercera ley de Kepler.

Las ecuaciones del movimiento relativo del problema de dos cuerpos son:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad (\text{A.1})$$

siendo \vec{r} el vector de posición del cuerpo secundario con respecto al primario, y $\mu = G(m_1 + m_2)$, donde G es la constante de gravitación universal y m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos primario y secundario, respectivamente.

Es bien conocido que el sistema de ecuaciones diferenciales de (A.1) se puede resolver analíticamente en forma exacta, siendo la solución

Apéndice A. Resultados del problema de los 2 cuerpos

$$r = \frac{4c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (\text{A.2})$$

donde ϵ es una constante de integración, φ es una variable angular y c es el módulo del momento angular, es decir, $c = |\vec{c}| = 1/2|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$.

Ahora, si tenemos en cuenta la ecuación polar de la elipse,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (\text{A.3})$$

donde f (*anomalía verdadera*) es el ángulo que forma el punto de menor distancia entre los cuerpos (periastro) con el vector de posición. Ver Figura A.2.

Por tanto, podemos identificar $\epsilon = e$ y $\varphi = f$, y además:

$$\frac{4c^2}{\mu} = a(1 - e^2), \quad (\text{A.4})$$

que resulta ser el parámetro de la elipse.

Definimos ahora el versor \vec{u}_r como

$$\vec{u}_r = (\cos f, \sin f) \quad (\text{A.5})$$

y el versor \vec{u}_t como

$$\vec{u}_t = (-\sin f, \cos f) \quad (\text{A.6})$$

Estos vectores unitarios nos ayudarán a descomponer el vector velocidad, $\dot{\vec{r}}$, en las componentes **radial** (en función de \vec{u}_r) y **transversal** (en función de \vec{u}_t).

Obviamente $\vec{r} = r\vec{u}_r$. Derivando esta expresión con respecto al tiempo, tenemos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r, \quad (\text{A.7})$$

pero

$$\dot{\vec{u}}_r = (-\sin f, \cos f)\dot{f} = \vec{u}_t\dot{f}, \quad (\text{A.8})$$

por tanto, llegamos a

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{f}\vec{u}_t. \quad (\text{A.9})$$

Así, la componente radial del vector velocidad es igual a \dot{r} y la transversal, igual a $r\dot{f}$.

Ahora como,

$$\dot{r} = \frac{dr}{df} \frac{df}{dt} = \frac{dr}{df} \dot{f}, \quad (\text{A.10})$$

por (A.3),

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)e \sin f \dot{f}}{(1+e \cos f)^2} = \frac{r^2 \sin f \dot{f} e}{a(1-e^2)}. \quad (\text{A.11})$$

Por otro lado, de (A.9) se tiene

$$c = |\vec{c}| = |1/2(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})| = \frac{1}{2} r^2 \dot{f} |\vec{u}_r \times \vec{u}_t| = \frac{1}{2} r^2 \dot{f}. \quad (\text{A.12})$$

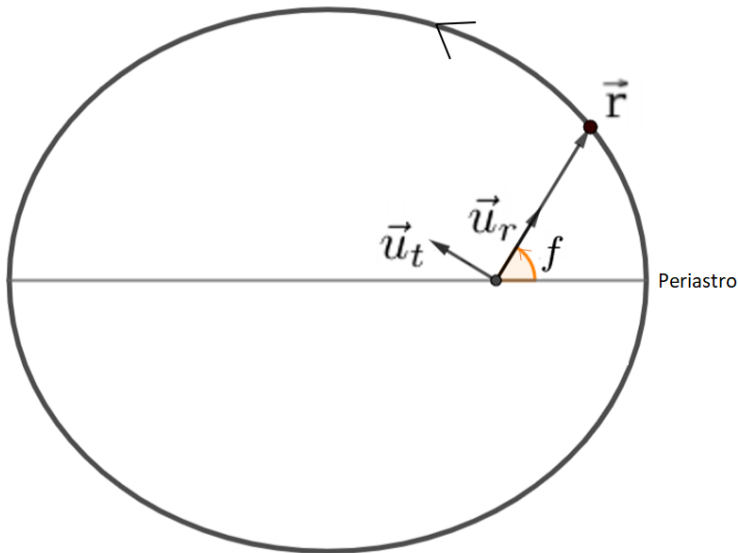


Figura A.2: Visualización de los vectores \vec{u}_t , \vec{u}_r , y la anomalía verdadera f .

Utilizando (A.11) y (A.12), obtenemos

$$\dot{r} = \frac{2ce}{a(1-e^2)} \sin f. \quad (\text{A.13})$$

Además,

$$c = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P}. \quad (\text{A.14})$$

Por tanto, (A.13) admite la forma

$$\dot{r} = \frac{2\pi a e \sin f}{P\sqrt{1-e^2}}, \quad (\text{A.15})$$

en tanto que la componente transversal del vector velocidad puede escribirse como

$$r\dot{f} = \frac{2c}{r} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}(1+e \cos f)}{Pa(1-e^2)} = \frac{2\pi a(1+e \cos f)}{P\sqrt{1-e^2}}. \quad (\text{A.16})$$

Obtención de los vectores de posición y velocidad en una órbita kepleriana a partir de los elementos orbitales

Sean $\vec{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $\dot{\vec{r}} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ los vectores de posición y velocidad referidos al sistema cartesiano de la Figura A.1. Si ahora tenemos en cuenta las componentes de dichos vectores con respecto al sistema de referencia radial, transversal y normal y las identificamos, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= ru_1 \\ \mathbf{y} &= ru_2 \\ \mathbf{z} &= ru_3 \\ \mathbf{X} &= \dot{r}u_1 + r\dot{u}_1 \\ \mathbf{Y} &= \dot{r}u_2 + r\dot{u}_2 \\ \mathbf{Z} &= \dot{r}u_3 + r\dot{u}_3, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos i \\
 u_2 &= \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos i \\
 u_3 &= \sin(\omega + f) \sin i \\
 \dot{u}_1 &= \frac{2c}{r} [-\cos \Omega \sin(\omega + f) - \sin \Omega \cos(\omega + f) \cos i] \\
 \dot{u}_2 &= \frac{2c}{r} [-\sin \Omega \sin(\omega + f) + \cos \Omega \cos(\omega + f) \cos i] \\
 \dot{u}_3 &= \frac{2c}{r} \cos(\omega + f) \sin i,
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

calculándose \dot{r} y $\frac{2c}{r}$ según (A.12) y (A.13), respectivamente.

Finalmente, para el caso particular del periastro ($f = 0$, $t - T = 0$), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= a(1 - e)(\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i), \\
 \mathbf{y} &= a(1 - e)(\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i), \\
 \mathbf{z} &= a(1 - e) \sin \omega \sin i, \\
 \mathbf{X} &= \frac{2\pi}{P} a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} (-\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i), \\
 \mathbf{Y} &= \frac{2\pi}{P} a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \\
 \mathbf{Z} &= \frac{2\pi}{P} a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i.
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Apéndice B

Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

Presentamos aquí los once programas informáticos que hemos elaborado en MATLAB, MATHEMATICA Y Python, para su uso en distintas secciones de la Tesis.

1. **transitsingle.py** Programa en Python para detectar un exoplaneta que transita una estrella (Sección [2.3.2.1](#))

```
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
#import pickle # for loading pickled test data
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import differential_evolution
from scipy.optimize import basinhopping
```

*Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de
distintos algoritmos empleados en la Tesis*

```

xdata , ydata , err=np. loadtxt ("C:\\ Users\\ Carlos\\ Downloads\\
    Tesis\\XO-3b.txt" , usecols=(1,2,3) , unpack=True)
xdata=xdata-2454864;
Rstar=1.377;
Mstar=1.213; G=0.000295912;
alimit=(Rstar/0.01)*0.00465047;
mu=G*Mstar;
Plimit=np. sqrt (( alimit**3*4*np. pi**2)/mu);
bounds=[[0.0001,0.2],[0.00001,Rstar/0.01],[6.123233995736766e
    -15,1/0.01*np. cos(80*2*np. pi/360)],[xdata[0],xdata[ len(
    xdata)-1]]];

def f(t,param):
    p=param[0];
    a=param[1];
    b=param[2];
    T0=param[3];
    P=3.1915;
    n=2*np. pi/P;
    u1=0.3423; u2=0.2939;
    c1=0;c2=u1+2*u2;c3=0;c4=-u2;
    c0=1-c1-c2-c3-c4;
    Omega = c0*(0+4)**(-1) + c1*(1+4)**(-1) + c2*(2+4)**(-1)
    + c3*(3+4)**(-1) + c4*(4+4)**(-1);
    z= a/Rstar*((np. sin(n*(t-T0)))**2+((b/(a/Rstar))*np. cos(n
    *(t-T0)))**2)**(1/2);
    lambda1= 0;
    lambda3= p**2;
    I = lambda r: (1-u1*(1-np. sqrt(1-r**2))-u2*(1-np. sqrt(1-r
    **2))**2)*2*r

F=[]
for i in range(0, len(z)):
    if ((1-p<z[i]) and (z[i]<1+p)):
        aa=(z[i]-p)**2;
        II = integrate.quad(I,z[i]-p,1)[0];
        II1 = (1-aa)**(-1)*II;
        F.append(i)
        F[i] = 1-II1/(4*np. pi*Omega)*((p**2)*np. arccos((z
        [i]-1)/p)-(z[i]-1)*np. sqrt(p**2-(z[i]-1)**2));
    elif (z[i]<=1-p):
        II2 = integrate.quad(I,z[i]-p,z[i]+p)[0];
        int2 = (4*z[i]*p)**(-1)* II2;
        F.append(i)
        F[i] = 1-lambda3*int2/(4*Omega);
    elif(1+p<=z[i]):
        F.append(i)
        F[i] = 1-lambda1;

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
    return np.asarray(F)
#0.9998763605023904, error = 0.0010 0.0014 0.0090 0.0005
#p_best=[0.09205354, 9.983821, 0.66583094, 0.76516848];

def sumOfSquaredError(p):
#    warnings.filterwarnings("ignore") # do not print
#    warnings by genetic algorithm
    return np.sum((ydata - f(xdata, p))/err) ** 2)

def Chireduced(p):
    nu= len(xdata)-len(p);
    return sumOfSquaredError(p)/nu

def generate_Initial_Parameters():
    parameterBounds = []
    parameterBounds.append([0.00001,0.2]) #p
    parameterBounds.append([0.00001,Rstar/0.01]) #a
    parameterBounds.append([0.00001,1/0.01]) #b
    parameterBounds.append([xdata[0],xdata[len(xdata)-1]]) #
    T0

    # "seed" the numpy random number generator for
    # repeatable results
    result = differential_evolution(sumOfSquaredError,
    parameterBounds, seed=3)
    return result.x

initialParameters = generate_Initial_Parameters()
print(Chireduced(initialParameters))
print(initialParameters)

# curve fit the test data
minimizer_kwargs=dict(method="L-BFGS-B", bounds=bounds);

fittedParameters=basinhopping(sumOfSquaredError,x0=
    initialParameters,minimizer_kwargs=minimizer_kwargs,niter
    =100)

p_opt=fittedParameters.x
print(Chireduced(p_opt))
print(p_opt)

y_fit = f(xdata,p_opt)
#plt.plot(xdata, y_fit, label='fit',color='red')
#plt.scatter(xdata, ydata, label='data')
#plt.legend()
#plt.grid()
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
#plt.show()
#
#rms=np.sqrt(sum((ydata-f(xdata,p_opt))**2)/len(ydata))
#rmsinitial=np.sqrt(sum((ydata-f(xdata,initialParameters))
**2)/len(ydata));
#
#plt.scatter(xdata, ydata-y_fit, label='residuos')
#plt.legend()
#plt.grid()
#plt.show
```

2. **transitmoon.py** Programa en Python para detectar un exosatélite que transita una estrella (Sección 2.3.2.2). Basado en el algoritmo LUNA (Sección 1.2.2; Kipping 2011a).

```
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
#import np.pickle # for loading np.pickled test data
from scipy.optimize import differential_evolution
from scipy.optimize import basinhopping

xdata,ydata,err=np.loadtxt("C:\\Users\\Carlos\\Downloads\\
Tesis\\transit.txt",usecols=(0,1,2),unpack=True)
p_best=[53.758, 0.1005, 1.1076, 0.0184];
n=len(xdata);

def f(t,param):
    R=1;
    Pp=45.6353;
    Ps=4.3630;
    ap=param[0]
    p=param[1]
    ass=param[2]
    s=param[3]

    z=[]; F=[]; Fp=[];

    for i in range(0, len(t)):

        xp=ap/R*np.cos(2*np.pi*t[i]/Pp);
        yp=0;
        Sp=np.sqrt(xp**2+yp**2);
        xs=ap/R*np.cos(2*np.pi*t[i]/Pp)+ ass/R*np.cos(2*np.pi
*t[i]/Ps);
        ys=0;
        Ss=np.sqrt(xs**2+ys**2);
        Sps=np.sqrt((xp-xs)**2+(yp-ys)**2);
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

z.append(Sp);
# print(Sp)
c1=0.6060; c2=-0.3196; c3=0.9569; c4=-0.4745;
Ftotal=1-(c1/(1+4)+2*c2/(2+4)+3*c3/(3+4)+4*c4/(4+4));

lambdas=0;lambdap=0;lambdaps=0;

if 1+s<Ss:
    lambdas=0;
elif (1-s<Ss and Ss<=1+s):
    k0s=np.arccos((s**2+Ss**2-1)/(2*s*Ss));
    k1s=np.arccos((1-s**2+Ss**2)/(2*Ss));
    k2s=0.5*np.sqrt(4*Ss**2-(1+Ss**2-s**2)**2);
    lambdas=(s**2*k0s+k1s-k2s);
elif Ss<=1-s:
    lambdas=np.pi*s**2;

if 1+p<Sp:
    lambdap=0;
elif (1-p<Sp and Sp<=1+p):
    k0p=np.arccos((p**2+Sp**2-1)/(2*p*Sp));
    k1p=np.arccos((1-p**2+Sp**2)/(2*Sp));
    k2p=0.5*np.sqrt(4*Sp**2-(1+Sp**2-p**2)**2);
    lambdap=(p**2*k0p+k1p-k2p);
elif Sp<=1-p:
    lambdap=np.pi*p**2;

if p+s<Sps:
    lambdaps=0;
elif (p-s<Sps and Sps<=p+s):
    k0ps=np.arccos((s**2+Sps**2-p**2)/(2*s*Sps));
    k1ps=np.arccos((p**2-s**2+Sps**2)/(2*p*Sps));
    k2ps=0.5*np.sqrt(4*Sps**2*p**2-(p**2+Sps**2-s**2)
**2);
    lambdaps=(s**2*k0ps+p**2*k1ps-k2ps);
elif Sps<=p-s:
    lambdaps=np.pi*p**2;

alphas=lambdas;
alphap=lambdap;
alphaps=lambdaps;

if (Sp>=1+p):
    if Ss>=1+s:
        if Sps>=p+s:

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
print('Caso 1\n')
alphap=0;
alphas=0;

elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
print('Caso 2\n')
alphap=0;
alphas=0;

elif Sps<=p-s:
print('Caso 3\n')
alphap=0;
alphas=0;

elif (1-s<Ss and Ss<1+s):

if Sps>=p+s:
print('Caso 4\n')
alphap=0;

elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
print('Caso 5\n')
alphap=0;

elif Sps<=p-s:
print('Caso 6 - Imposible\n')
break

elif (Ss<=1-s):

if Sps>=p+s:
print('Caso 7\n')
alphap=0;
alphas=np.pi*s**2;

elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
print('Caso 8 - Imposible\n')
break

elif Sps<=p-s:
print('Caso 9 - Imposible\n')
break

elif (1-p<Sp and Sp<1+p):
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

if Ss>=1+s:

    if Sps>=p+s:
        print( 'Caso 10\n' )
        alphas=0;

    elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
        print( 'Caso 11\n' )
        alphas=0;

    elif Sps<=p-s:
        print( 'Caso 12\n' )
        alphas=0;

elif (1-s<Ss and Ss<1+s):

    if Sps>=p+s:
        print( 'Caso 13\n' )

    elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
        print( 'Caso 14\n' )
        XX13=(1-s**2+Ss**2)/(2*Ss); X12=(1-p**2+
Sp**2)/(2*Sp);
        Y12= 1/(2*Sp)*np.sqrt(2*Sp**2*(1+p**2)
-(1-p**2)**2-Sp**4);
        YY13=-1/(2*Ss)*np.sqrt(2*Ss**2*(1+s**2)
-(1-s**2)**2-Ss**4);
        cost= 1; sint=np.sqrt(1-cost**2);
        XXX23=(p**2-s**2+Sps**2)/(2*Sps); YYY23
=1/(2*Sps)*np.sqrt(2*Sps**2*(p**2+s**2)-(p**2-s**2)**2-
Sps**4);
        costt=1; sintt= np.sqrt(1-costt**2);
        X23= XXX23*costt-YYY23*sintt+Sp; X13=XX13
*cost-YY13*sint;
        Y23= XXX23*sintt+YYY23*costt; Y13=XX13*
sint+YY13*cost;
        C1 = np.sqrt((X12-X13)**2+(Y12-Y13)**2);
        C2 = np.sqrt((X12-X23)**2+(Y12-Y23)**2);
        C3 = np.sqrt((X13-X23)**2+(Y13-Y23)**2);
        R1=R;R2=p*R1;R3=s*R1;
        print( ap , p , ass , s , Sps , Sp , Ss**2 , (Sp+Sps)
**2 , Ss , Y12 , XX13 , cost , XXX23 , costt , C1 , C2 , C3)

        if (((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)**2<s
**2) and not((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2) and

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

(Ss*sint>Y13+(Y23-Y13)/(X23-X13)*(Ss*cost-X13)):
    print('Caso 14.1a')
    Aoverlap = 1/4*np.sqrt((C1+C2+C3)
*(C2+C3-C1))*np.sqrt((C1+C3-C2)*(C1+C2-C3))+(R1**2*np.
arcsin(C1/(2*R1))-C1/4*np.sqrt(4*R1**2-C1**2))+(R2**2*np.
arcsin(C2/(2*R2))-C2/4*np.sqrt(4*R2**2-C2**2))+((R3**2*np.
arcsin(C3/(2*R3))-C3/4*np.sqrt(4*R3**2-C3**2)));
    alphas=alphas-Aoverlap;
    elif ((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and not((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and not(Ss*sint>Y13+(Y23-Y13)/(X23-X13)*(Ss*cost-X13)):
    print('Caso 14.1b')
    Aoverlap = 1/4*np.sqrt((C1+C2+C3)
*(C2+C3-C1))*np.sqrt((C1+C3-C2)*(C1+C2-C3))+(R1**2*np.
arcsin(C1/(2*R1))-C1/4*np.sqrt(4*R1**2-C1**2))+(R2**2*np.
arcsin(C2/(2*R2))-C2/4*np.sqrt(4*R2**2-C2**2))+((R3**2*np.
arcsin(C3/(2*R3))+C3/4*np.sqrt(4*R3**2-C3**2)));
    alphas=alphas-Aoverlap;
    elif (not((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and not((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and ((X13-Sp)**2+Y13**2<p**2) and (Ss-s<Sp-p)):
    print('Caso 14.2a')
    alphas=np.pi*s**2-alphaps;
    elif (not((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and not((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and ((X13-Sp)**2+Y13**2<p**2) and not(Ss-s<Sp-p)):
    print('Caso 14.2b')
    alphas=0;
    elif ((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and ((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and (Sp>1)):
    print('Caso 14.3a')
    alphas=alphas-alphap;
    elif ((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and ((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and not(Sp>1)):
    print('Caso 14.3b')
    alphas=np.pi*p**2-alphap-alphaps+
alphas;
    elif (not((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and not((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and not((X13-Sp)**2+Y13**2<p**2) and not(X23**2+Y23
**2<1)):
    print('Caso 14.7a')
    elif (not((X12-Ss*cost)**2+(Y12-Ss*sint)
**2<s**2) and not((X12-Ss*cost)**2+(Y12+Ss*sint)**2<s**2)
and not((X13-Sp)**2+Y13**2<p**2) and (X23**2+Y23**2<1)):
    print('Caso 14.7b')
    alphas=alphas-alphaps;

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
elif Sps<=p-s:
    print('Caso 15\n')
    alphas=0;

elif (Ss<=l-s):

    if Sps>=p+s:
        print('Caso 16\n')
        alphas=np.pi*s**2;

    elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
        print('Caso 17\n')
        alphas=np.pi*s**2-alphas;

    elif Sps<=p-s:
        print('Caso 18\n')
        alphas=0;

elif (Sp<=l-p):

    if Ss>=l+s:

        if Sps>=p+s:
            print('Caso 19\n')
            alphap=np.pi*p**2;
            alphas=0;

        elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
            print('Caso 20 - Impossible\n')
            break
        elif Sps<=p-s:
            print('Caso 21 - Impossible\n')
            break

    elif (1-s<Ss and Ss<l+s):

        if Sps>=p+s:
            print('Caso 22\n')
            alphap=np.pi*p**2;

        elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
            print('Caso 23\n')
            alphap=np.pi*p**2;
```

*Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de
distintos algoritmos empleados en la Tesis*

```

alphas=alphas-alphaps;

elif Sps<=p-s:
    print('Caso 24 - Imposible\n')
    break

elif (Ss<=1-s):

    if Sps>=p+s:
        print('Caso 25\n')
        alphap=np.pi*p**2;
        alphas=np.pi*s**2;

    elif (p-s<Sps and Sps<p+s):
        print('Caso 26\n')
        alphap=np.pi*p**2;
        alphas=np.pi*s**2-alphaps;

    elif Sps<=p-s:
        print('Caso 27\n')
        alphap=np.pi*p**2;
        alphas=0;

if (s<Ss and Ss<1-s):

    am=(Ss-s)**2; bm=(Ss+s)**2;
    amr=(1-am)**(1/4); bmr=(1-bm)**(1/4);
    Fannulus=4/5*(s**2*(bmr-amr)+(Ss**2-1)*(bmr-amr)+2*
s*Ss*(-5/2+amr+bmr))*c1+2/21*(7*(s**2*(bmr**2-amr**2)+(Ss
**2-1)*(bmr**2-amr**2)+2*s*Ss*(-3+amr**2+bmr**2))*c2-6*((
bmr**3-amr**3+2*s*Ss*(7/2-amr**3-bmr**3)+s**2*(amr**3-bmr
**3)+Ss**2*(amr**3-bmr**3))*c3+7*s*Ss*(-1+(s**2+Ss**2)*c4
));
    Atransits= alphas/(np.pi*(bm-am));
    Atransits=Atransits*(Fannulus/Ftotal);

elif s>=Ss:
    am=(Ss-s)**2; bm=(Ss+s)**2;
    amr=(1-am)**(1/4); bmr=(1-bm)**(1/4);
    Fannulus=4/5*(1-bmr+(s+Ss)**2*(-5/4+bmr))*c1
+2/3*(1-bmr**2+(s+Ss)**2*(-3/2+bmr**2))*c2+1/14*(14*(s+Ss
)**2-7*(s+Ss)**4*c4+2*(4-4*bmr**3+(s+Ss)**2*(-7+4*bmr**3)
)*c3);
    Atransits= alphas/(np.pi*(bm));
    Atransits=Atransits*(Fannulus/Ftotal);

elif (1-s<Ss and Ss<1+s):
    am=(Ss-s)**2;

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

        amr=(1-am)**(1/4);
        Fannulus=1/5*(-5+4*amr)*amr**4*c1+(am-1)
/42*(-42+(42-28*amr**2)*c2+6*(7-4*amr**3)*c3+21*(1+am)*c4
);
        Atransits= alphas/(np.pi*(1-am));
        Atransits=Atransits*(Fannulus/Ftotal);

    else:
        Atransits=0;

    if (p<Sp and Sp<1-p):
        am=(Sp-p)**2; bm=(Sp+p)**2;
        amr=(1-am)**(1/4); bmr=(1-bm)**(1/4);
        Fannulus=4/5*(p**2*(bmr-amr)+(Sp**2-1)*(bmr-amr)
+2*p*Sp*(-5/2+amr+bmr))*c1+2/21*(7*(p**2*(bmr**2-amr**2)
+(Sp**2-1)*(bmr**2-amr**2)+2*p*Sp*(-3+amr**2+bmr**2))*c2
-6*((bmr**3-amr**3+2*p*Sp*(7/2-amr**3-bmr**3))+p**2*(amr
**3-bmr**3)+Sp**2*(amr**3-bmr**3))*c3+7*p*Sp*(-1+(p**2+Sp
**2)*c4));
        Atransitp= alphap/(np.pi*(bm-am));
        Atransitp=Atransitp*(Fannulus/Ftotal);
    elif p>=Sp:
        am=(Sp-p)**2; bm=(Sp+p)**2;
        amr=(1-am)**(1/4); bmr=(1-bm)**(1/4);
        Fannulus=4/5*(1-bmr+(p+Sp)**2*(-5/4+bmr))*c1
+2/3*(1-bmr**2+(p+Sp)**2*(-3/2+bmr**2))*c2+1/14*(14*(p+Sp)
)**2-7*(p+Sp)**4*c4+2*(4-4*bmr**3+(p+Sp)**2*(-7+4*bmr**3)
)*c3);
        Atransitp= alphap/(np.pi*(bm));
        Atransitp=Atransitp*(Fannulus/Ftotal);
    elif (1-p<Sp and Sp<1+p):
        am=(Sp-p)**2;
        amr=(1-am)**(1/4);
        Fannulus=1/5*(-5+4*amr)*amr**4*c1+(am-1)
/42*(-42+(42-28*amr**2)*c2+6*(7-4*amr**3)*c3+21*(1+am)*c4
);
        Atransitp= alphap/(np.pi*(1-am));
        Atransitp=Atransitp*(Fannulus/Ftotal);
    else:
        Atransitp=0;

    F.append(1 - Atransitp - Atransits);
    Fp.append(1 - Atransitp);

    return F

bounds
=[[0.00001,1/0.01],[0.05,0.2],[0.0001,2],[0.00001,0.04]];

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
#bounds = [[0.00001, 1/0.01], [0.05, 0.2]];

def sumOfSquaredError(p):
    return np.sum((ydata - f(xdata, p))/err) ** 2)

def Chireduced(p):
    nu = len(xdata) - len(p);
    return sumOfSquaredError(p)/nu

def generate_Initial_Parameters():
    parameterBounds = []
    parameterBounds.append([0.00001, 1/0.01]) #ap
    parameterBounds.append([0.05, 0.2]) #p
    parameterBounds.append([0.0001, 2]) #as
    parameterBounds.append([0.00001, 0.05]) #s
    # parameterBounds.append([0.00001, 0.2]) #p
    # parameterBounds.append([0.00001, Rstar/0.01]) #a
    # parameterBounds.append([0.00001, 1/0.01]) #b
    # parameterBounds.append([xdata[0], xdata[len(xdata) - 1]]) #
    T0

    # "seed" the numpy random number generator for
    repeatable results
    result = differential_evolution(sumOfSquaredError,
    parameterBounds, seed=3)
    return result.x

initialParameters = generate_Initial_Parameters()
print(Chireduced(initialParameters))
print(initialParameters)
#
# curve fit the test data
minimizer_kwargs=dict(method="L-BFGS-B", bounds=bounds);

fittedParameters=basinhopping(sumOfSquaredError, x0=
    initialParameters, minimizer_kwargs=minimizer_kwargs, niter
    =100)

p_opt=fittedParameters.x
print(Chireduced(p_opt))
print(p_opt)

#y_fit = f(xdata, p_opt)
#plt.plot(xdata, y_fit, label='fit', color='red')
#plt.scatter(xdata, ydata, label='data')
#plt.legend()
#plt.grid()
```


Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
# return np.asarray(F)

from autograd import numpy as np
from autograd import hessian
H=hessian(sumOfSquaredError)(p_opt)
variance = np.diag(np.linalg.inv(H))
std_error = np.sqrt(variance)
print(std_error)
```

3. **RVsingle.py** Programa en Python para detectar un exoplaneta por el método de velocidad radial (Sección 2.3.1.1)

```
import numpy as np
#import pickle # for loading pickled test data
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import differential_evolution
from scipy.optimize import basinhopping
from scipy.optimize import newton
xdata , ydata=np.loadtxt("C:\\Users\\Carlos\\Downloads\\Tesis\\
vrmoon.txt", usecols=(0,1), unpack=True)
bounds=[[ -0.5,0.5],[6000,8000],[0,xdata[len(xdata)
-1]],[0,0.9],[0,2*np.pi],[20,23]]

def f(t,p):
    n1 = 2*np.pi/p[5];
    M1= n1*(t-p[2]);
    fmean1 = M1 + (2*p[3]-1/4*p[3]**3)*np.sin(M1)+ (5/4*p
[3]**2)*np.sin(2*M1)+13/12*p[3]**3*np.sin(3*M1);
# func1 = lambda anom : M1-(anom-p[3]*np.sin(anom))
# E1=newton(func1,M1);
# fmean1= 2*np.arctan(np.sqrt((1+p[3])/(1-p[3]))*np.tan
(E1/2));
##
    y_hat = p[0]+ p[1]*(np.cos(fmean1+p[4])+p[3]*np.cos(p
[4]));
    return y_hat

def sumOfSquaredError(p):
# warnings.filterwarnings("ignore") # do not print
warnings by genetic algorithm
# return np.sum(((ydata - f(xdata, p))/err) ** 2)
return np.sum((ydata - f(xdata, p))**2)

def Chireduced(p):
nu= len(xdata)-len(p);

return sumOfSquaredError(p)/nu
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
def generate_Initial_Parameters():
#     min and max used for bounds
    maxX = max(xdata)
    minX = min(xdata)
    maxY = max(ydata)
    minY = min(ydata)

    parameterBounds = []
    parameterBounds.append([-0.5, 0.5]) #V0
    parameterBounds.append([6000,8000]) #K1
    parameterBounds.append([0 ,xdata[ len(xdata) -1]]) #T1
    parameterBounds.append([0.0, 0.9]) #e1
    parameterBounds.append([0, 2*np.pi]) #w1
    parameterBounds.append([20,23]) #P1

    # "seed" the numpy random number generator for repeatable
    results
    result = differential_evolution(sumOfSquaredError,
    parameterBounds, seed=3)
    return result.x

initialParameters = generate_Initial_Parameters()

# curve fit the test data
minimizer_kwargs=dict(method="L-BFGS-B", bounds=bounds);

initialParameters = generate_Initial_Parameters()

fittedParameters=basinhopping(sumOfSquaredError ,x0=
    initialParameters ,minimizer_kwargs=minimizer_kwargs ,niter
    =100)

    # create values for display of fitted peak function
p_opt=fittedParameters.x
print(sumOfSquaredError(p_opt))
print(p_opt)
print(sumOfSquaredError(initialParameters))
print(initialParameters)

p_best = [7.46684863e+00, 56.04, 6.05275167e+01, 0.01,
    6.93265357e-01, 4.23];
y_fit = f(xdata,p_opt)
plt.plot(xdata, ydata, label='fit',color='red')
plt.scatter(xdata, ydata, label='data')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

rms=np.sqrt(sum((ydata-f(xdata,p_best))**2)/len(ydata))
rmsinitial=np.sqrt(sum((ydata-f(xdata,initialParameters))**2)
                /len(ydata));

plt.scatter(xdata, ydata-y_fit, label='residuos')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show

data = np.array([xdata, ydata-y_fit])
data = data.T

datafile_path = "C:\\Users\\Carlos\\Downloads\\Tesis\\vrmoon2
                .txt"
with open(datafile_path, 'w+') as datafile_id:

    np.savetxt(datafile_id, data, fmt=['%f', '%f'])

```

4. **RVmultiple.py** Programa en Python para detectar un sistema con varios exoplanetas por el método de velocidad radial (Sección 2.3.1.2).

```

import numpy as np
#import pickle # for loading pickled test data
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
from curve_fit import annealing
from scipy.optimize import differential_evolution
from scipy.optimize import basinhopping
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import dual_annealing
xdata,ydata,err=np.loadtxt("C:\\Users\\Carlos\\Downloads\\
                          Tesis\\HD_37124.txt", usecols=(0,1,2), unpack=True)
jitter=4
err=np.sqrt(jitter**2+err**2)
# Double Lorentzian peak function
# bounds on parameters are set in generate_Initial_Parameters
# () below
def f(t,p):
    n1 = 2*np.pi/p[5];
    M1= n1*(t-p[2]);
    fmean1 = M1 + (2*p[3]-1/4*p[3]**3)*np.sin(M1)+ (5/4*p
[3]**2)*np.sin(2*M1)+13/12*p[3]**3*np.sin(3*M1);
#    func1 = lambda anom : M1-(anom-p[3]*np.sin(anom))
#    E1=newton(func1,M1);
#    fmean1= 2*np.arctan(np.sqrt((1+p[3])/(1-p[3]))*np.tan
(E1/2));
##

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

n2 = 2*np.pi/p[10];
M2= n2*(t-p[7]);
fmean2 = M2 + (2*p[8]-1/4*p[8]**3)*np.sin(M2)+ (5/4*p
[8]**2)*np.sin(2*M2)+13/12*p[8]**3*np.sin(3*M2);
#   func2 = lambda anom : M2-(anom-p[8]*np.sin(anom))
#   E2=newton(func2,M2);
#   fmean2= 2*np.arctan(np.sqrt((1+p[8])/(1-p[8]))*np.tan
(E2/2));

n3 = 2*np.pi/p[15];
M3= n3*(t-p[12]);
fmean3 = M3 + (2*p[13]-1/4*p[13]**3)*np.sin(M3)+ (5/4*
p[13]**2)*np.sin(2*M3)+13/12*p[13]**3*np.sin(3*M3);
#   func3 = lambda anom : M3-(anom-p[13]*np.sin(anom))
#   E3=newton(func3,M3);
#   fmean3= 2*np.arctan(np.sqrt((1+p[13])/(1-p[13]))*np.
tan(E3/2));

#
#

y_hat = p[0]+ p[1]*(np.cos(fmean1+p[4])+p[3]*np.cos(p
[4])) + p[6]*(np.cos(fmean2+p[9])+p[8]*np.cos(p[9]))+ p
[11]*(np.cos(fmean3+p[14])+p[13]*np.cos(p[14]))+p[16]*(t-
xdata[0]);
#   y_hat = p[0]+ p[1]*(np.cos(fmean1+p[4])+p[3]*np.cos(p
[4]))
#   y_hat = p[0]+ p[1]*(np.cos(fmean1+p[4])+p[3]*np.cos(p
[4])) + p[6]*(np.cos(fmean2+p[9])+p[8]*np.cos(p[9]))

return y_hat

bounds=[[ -100,100],[0,300],[0,xdata[len(xdata)
-1]],[0,0.9],[0,2*np.pi],[150,170],[0,300],[0,xdata[len(
xdata)-1]],[0,0.9],[0,2*np.pi],[800,900],[0,300],[0,xdata
[len(xdata)-1]],[0,0.9],[0,2*np.pi
],[1800,2300],[ -100,100]]
#bounds=[[ -100,100],[0,300],[0,xdata[len(xdata)
-1]],[0,0.9],[0,2*np.pi],[150,170]]

#0.945585054432559
p_best=[3.50134246e+00, 2.83226390e+01, 1.06129143e+04,
3.89190736e-02, 2.14028281e+00, 1.54325101e+02,

```

*Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de
distintos algoritmos empleados en la Tesis*

```

1.22187112e+01, 1.04385799e+04, 1.50336810e-01,
7.24228227e-01, 8.72724883e+02, 1.21393837e+01,
9.92370190e+03, 3.09246887e-01, 4.71046229e+00,
1.87102096e+03, 1.73416843e-03]
# error [9.78786050e-01, 7.81492207e-01, 1.33898178e+01,
2.58396786e-02, 5.43407126e-01, 6.42608530e-02,
9.34092109e-01, 8.17464933e+01, 7.79340562e-02,
6.25208493e-01, 6.49825239e+00, 1.04549653e+00,
1.38188882e+02, 1.10309790e-01, 3.44451740e-01,
4.55090822e+01, 4.57457353e-04]

# function for genetic algorithm to minimize (sum of squared
error)
# bounds on parameters are set in generate_Initial_Parameters
() below
def sumOfSquaredError(p):
# warnings.filterwarnings("ignore") # do not print
warnings by genetic algorithm
return np.sum(((ydata - f(xdata, p))/err) ** 2)

def Chireduced(p):
nu= len(xdata)-len(p_best);

return sumOfSquaredError(p)/nu

def generate_Initial_Parameters():
# min and max used for bounds
maxX = max(xdata)
minX = min(xdata)
maxY = max(ydata)
minY = min(ydata)

parameterBounds = []
parameterBounds.append([-100.0, 100.0]) #V0
parameterBounds.append([0, maxY]) #K1
parameterBounds.append([0, xdata[len(xdata) - 1]]) #T1
parameterBounds.append([0.0, 0.9]) #e1
parameterBounds.append([0, 2*np.pi]) #w1
parameterBounds.append([150, 170]) #P1
parameterBounds.append([0, maxY]) #K2
parameterBounds.append([0, xdata[len(xdata) - 1]]) #T2
parameterBounds.append([0.0, 0.9]) #e2
parameterBounds.append([0, 2*np.pi]) #w2
parameterBounds.append([800, 900]) #P2
parameterBounds.append([0, maxY]) #K3
parameterBounds.append([0, xdata[len(xdata) - 1]]) #T3
parameterBounds.append([0.0, 0.9]) #e3
parameterBounds.append([0, 2*np.pi]) #w3
parameterBounds.append([1800, 2300]) #P3

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
parameterBounds.append([-100,100]) #d

# "seed" the numpy random number generator for repeatable
  results
result = differential_evolution(sumOfSquaredError,
  parameterBounds, seed=3)
return result.x

# generate initial parameter values

# curve fit the test data

initialParameters = generate_Initial_Parameters()
print(initialParameters)
print(Chireduced(initialParameters))

minimizer_kwargs=dict(method="L-BFGS-B", bounds=bounds);
fittedParameters=basinhopping(sumOfSquaredError, x0=
  initialParameters, minimizer_kwargs=minimizer_kwargs, niter
  =100)

# create values for display of fitted peak function
p_opt=fittedParameters.x
print(Chireduced(p_opt))
print(p_opt)

y_fit = f(xdata, p_opt)
plt.plot(xdata, ydata, label='fit', color='red')
plt.scatter(xdata, ydata, label='data')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

rms=np.sqrt(sum((ydata-f(xdata, p_opt))**2)/len(ydata))
rmsinitial=np.sqrt(sum((ydata-f(xdata, initialParameters))**2)
  /len(ydata));

plt.scatter(xdata, ydata-y_fit, label='residuos')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show

#data = np.array([xdata, ydata-y_fit, err])
#data = data.T
#datafile_path = "C:/Users/Carlos/residuos.txt"
#with open(datafile_path, 'w+') as datafile_id:
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

###here you open the ascii file
#
#   np.savetxt(datafile_id , data , fmt=['%f' , '%f' , '%f '])
#

from autograd import numpy as np
from autograd import hessian
H=hessian(sumOfSquaredError)(p_opt)
variance = np.diag(np.linalg.inv(H))
std_error = np.sqrt(variance)
#print(std_error)
#
#

```

5. **roots.m** Programa en MATLAB para encontrar raíces de una cierta función polinomial (Sección 1.1.3).

```

t=linspace(-3,3,500);

for i=1:length(t)
tstar=t(i); alpha= 0.2;
u0=0.02;
w=tstar*cos(alpha)+u0+ 1i*tstar*sin(alpha);
q=0.0095;s=1.5; DL= 5000; DS= 7000;
m1=1/(1+q); m2=q/(1+q);
syms X
c5=s^2*w*m2^2;
c4=-s*m2*(2*w+s*(-1+s*w-2*w*conj(w)+m2));
c3=w-s^3*w*conj(w)+s*(-1+m2-2*w*conj(w)*(1+m2))+s
^2*(conj(w)-2*conj(w)*m2+w*(1+conj(w)*conj(w)+m2
));
c2=s^3*conj(w)+2*w*conj(w)+s^2*(-1+2*w*conj(w)-conj(
w)*conj(w)+m2)-s*(w+2*w*conj(w)*conj(w)-2*conj(w
)*m2);
c1=conj(w)*(-1+2*s*conj(w)+w*conj(w))-s*(-1+2*s*conj
(w)+w*conj(w)+m2);
c0=(s-conj(w))*conj(w);
P=c0*X^5+c1*X^4+c2*X^3+c3*X^2+c4*X+c5;      %Equation
we interest to solve
n=5;
Pd1 = diff(P,X,1);
Pd2 = diff(P,X,2);

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

err=1e-12;
N=100;
x(1)=1e-3;

for k=1:N
    G=double(vpa(subs(Pd1,X,x(k))/subs(P,X,x(k))));
    H=G^2 - double(subs(Pd2,X,x(k)) /subs(P,X,x(k))
    ;
    D1= (G+sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
    D2= (G-sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
    if abs(D1)>=abs(D2)
        D=D1;
    else
        D=D2;
    end
    a=n/D;
    x(k+1)=x(k)-a;
    Err(k) = abs(x(k+1)-x(k));
    if Err(k) <=err
        break
    end
end
z(1)=x(length(x));

[q1,r1] = deconv([c0 c1 c2 c3 c4 c5],[1 -z(1)]);
P=q1(1)*X^4+q1(2)*X^3+q1(3)*X^2+q1(4)*X+q1(5);
n=4;
Pd1 = diff(P,X,1);
Pd2 = diff(P,X,2);
err=1e-12;
N=100;

x=[];
x(1)=1e-3;

for k=1:N
    G=double(vpa(subs(Pd1,X,x(k))/subs(P,X,x(k))));
    H=G^2 - double(subs(Pd2,X,x(k)) /subs(P,X,x(k))
    ;
    D1= (G+sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

D2= (G-sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
D = max(D1,D2);
a=n/D;
x(k+1)=x(k)-a;
Err(k) = abs(x(k+1)-x(k));
if Err(k) <=err
    break
end
end

z(2)=x(length(x));
[q2,r2] = deconv([q1(1) q1(2) q1(3) q1(4) q1(5)],[1
-z(2)]);

P=q2(1)*X^3+q2(2)*X^2+q2(3)*X+q2(4);
n=3;
Pd1 = diff(P,X,1);
Pd2 = diff(P,X,2);
err=1e-12;
N=100;

x=[];
x(1)=1e-3;

for k=1:N
    G=double(vpa(subs(Pd1,X,x(k))/subs(P,X,x(k))));

    H=G^2 - double(subs(Pd2,X,x(k)) /subs(P,X,x(k)))
    ;
    D1= (G+sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
    D2= (G-sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
    D = max(D1,D2);
    a=n/D;
    x(k+1)=x(k)-a;
    Err(k) = abs(x(k+1)-x(k));
    if Err(k) <=err
        break
    end
end

```

```

end
%end
z(3)=x(length(x));
[q3,r3]=deconv([q2(1) q2(2) q2(3) q2(4)],[1 -z(3)
]);

P=q3(1)*X^2+q3(2)*X+q3(3);
n=2;
Pd1=diff(P,X,1);
Pd2=diff(P,X,2);
err=1e-12;
N=100;

x=[];
x(1)=1e-3;

for k=1:N
G=double(vpa(subs(Pd1,X,x(k))/subs(P,X,x(k))));
H=G^2 - double(subs(Pd2,X,x(k))/subs(P,X,x(k))
);
D1=(G+sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
D2=(G-sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
D=max(D1,D2);
a=n/D;
x(k+1)=x(k)-a;
Err(k)=abs(x(k+1)-x(k));
if Err(k)<=err
break
end
end
%end
z(4)=x(length(x));
[q4,r4]=deconv([q3(1) q3(2) q3(3)],[1 -z(4)]);

P=q4(1)*X+q4(2);
n=1;
Pd1=diff(P,X,1);
Pd2=diff(P,X,2);
err=1e-12;
N=100;

```

```

x = [];
x(1) = 1e-3;

for k=1:N
    G = double(vpa(subs(Pd1,X,x(k))/subs(P,X,x(k))));
    H = G^2 - double(subs(Pd2,X,x(k)) /subs(P,X,x(k)))
        ;
    D1 = (G + sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
    D2 = (G - sqrt((n-1)*(n*H-G^2)));
    D = max(D1,D2);
    a = n/D;
    x(k+1) = x(k) - a;
    Err(k) = abs(x(k+1) - x(k));
    if Err(k) <= err
        break
    end
end
% end
z(5) = x(length(x));
[q5, r5] = deconv([q4(1) q4(2)], [1 -z(5)]);

z1 = [];
for m=1:length(z)
    aux = z(m) - m1 / (conj(z(m)) - s) - m2 / (conj(z(m)));
    for j=1:length(z1)
        if abs(w - aux) < 0.001
            z1(j) = z(m);
        end
    end
end
end
z = z1;
if length(z) == 5
    break
end
disp('El numero de imagenes es: ')
disp(length(z))
disp(i)
A = 1 ./ (abs(1 - abs(m1 ./ (conj(z) - s) .^ 2 + m2 ./ conj(z) .^ 2)
    .^ 2));

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
A=sum(A);

magn(i)=A;

end
figure(2)
plot(t,magn,'LineWidth',1.5)
xlabel('t_*)')
ylabel('Aumento optico')

syms X Y
fun=@(X,Y) abs(m1/((X-1i*Y)-s)^2+m2/(X-1i*Y)^2)^2;
x1=linspace(-3,3,500);
t=[]; y=[];
for i=1:length(x1)
    xi=subs(fun,X,x1(i));
    yi=vpasolve(xi==1,Y,[-3,3]);
    if ~isempty(yi)
        y(i)=yi;
        t(i)=x1(i);
        [t(i) y(i)]'
    else
        x1(i)
    end
end
end
t2=t;
y2=-y;
t1=[flip(t) t2];
y1=[flip(y) y2];
% t1=[t1 t1(1498)];
% y1=[y1 y1(1498)];
z1=t1+1i*y1;
w1=z1-m1./conj(z1)-s)-m2./conj(z1);
t4=[]; t3=[]; y4=[]; y3=[];
for i=1:length(t1)
    if t1(i)<=0.3
        for j=1+length(t3)
            t3(j)=t1(i);
            y3(j)=y1(i);
```

```
end
elseif 0.3 < t1(i) <= 2.5
    for k=1+length(t4)
        t4(k)=t1(i);
        y4(k)=y1(i);
    end
end
end

t3=nonzeros(t3)'; y4=nonzeros(y4)';
t4=nonzeros(t4)'; y3=nonzeros(y3)';
t4=[t4 t4(1)]; y4=[y4 y4(1)];
t3=[t3 t3(1)]; y3=[y3 y3(1)];
plot(t4,y4,'black','Linewidth',2)
% [a,b] = sort(t1);
% newY=y1(a);
% t1=a; y1=newY;
figure(1)
hold on
plot(t4,y4,'black','Linewidth',2)
plot(t3,y3,'black','Linewidth',2)
plot(w1,'r','Linewidth',1.5)
xlabel('r_E')
ylabel('r_E')
hold off
```

6. **lombscargle.m** Programa en MATLAB para aplicar el periodograma Lomb-Scargle a una determinada señal (Capítulo 2).

```
t = linspace(0,2, 1000);
x = randn(size(t));
% t = linspace(0,2*pi*10, 100000);
% x = cos(pi/4*t)+0.5*sin(pi/2*t);
[pxx,f,pth] = plomb(x,t,'Pd',0.999);
% [pk,f0] = findpeaks(pxx,f,'MinPeakHeight',5);

subplot(2,1,1)
plot(t,x,'LineWidth',0.5)
subplot(2,1,2)
hold on
plot(f,pxx,'black','LineWidth',0.5)
plot(f,pth*ones(size(f)),'r--','LineWidth',0.5)
% xlim([0 0.4])
xlabel('Frecuencia')
ylabel('Densidad espectral')
hold off
```

7. **TTV/TDV.m** Programa en MATLAB para detectar el TTV/TDV provocado por un exosatélite sobre un exoplaneta (Sección 2.3.3.1).

```
M = 1;Mp=9.548*10^(-4);Ms=3*10^-6;G=0.000295912;mu1=G
*(M+Mp+Ms);mu2=G*(Mp+Ms);
omega1=0*2*pi/360;omega2=0*2*pi/360;
Omega1=60*2*pi/360; Omega2=80*2*pi/360;
Rp=0.10049; R=1; ip=90*2*pi/360; Rs=2*0.0091577;
e1=0; e2= 0; i1=90*2*pi/360; i2=90*2*pi/360;
zetat=0;Upsilon=1;
Pp=10;
a1=(Pp^2*mu1/(4*pi^2))^(1/3);
RH= a1*(Mp/(3*M))^(1/3);
a2=0.3*RH; P2=sqrt((a2^3*4*pi^2)/mu2);
t=linspace(0,5*Pp,5);
TTV=((a2*sqrt(1-e1^2)*(1-e2^2)*Ms*Pp)/(2*pi*a1*Mp
*(1+e1*sin(omega1))))*cos(2*pi*t/P2);
TTV=TTV*24*60*60;
```

```

amplitude1=abs(fft(TTV)/length(t));
amplitude1=amplitude1(islocalmax(amplitude1));
amplitude1=2*amplitude1(1);
dTTV=amplitude1;

a1=a1/0.00465047; a2=a2/0.00465047;
tT=Pp/pi*asin(R/a1*((1+Rp/R)^2-(a1/R*cos(ip))^2)
/(1-cos(ip)^2))^(1/2));
zetad=sqrt((1+e2^2-e2^2*cos(2*omega2))/(1-e2^2));
TDV=tT*((a2*Ms*Pp)/(a1*Mp*P2))*sqrt((sqrt(1-e1^2))/(
sqrt(1-e2^2)*(1+e1*sin(omega1))))*sin(2*pi*t/P2)
;
TDV=TDV*24*60*60;
amplitude2=abs(fft(TDV)/length(t));
amplitude2=amplitude2(islocalmax(amplitude2));
amplitude2=2*amplitude2(1);
dTDV=amplitude2;
eta=dTDV/dTTV;
Ps=2*pi*tT/eta;

figure(1)
hold on
t2=linspace(t(1),t(length(t)),100000);
waveformTTV=feval(@y2,[dTTV,Ps],t2);
plot(t2,waveformTTV,'r')
plot(t,TTV,'b.','MarkerSize',15)
xlabel('Tiempo (en dias)')
ylabel('TTV (s)')
hold off

figure(2)
hold on
waveformTDV=feval(@y,[dTDV,Ps],t2);
plot(t2,waveformTDV,'r')
plot(t,TDV,'b.','MarkerSize',15)
xlabel('Tiempo (en dias)')
ylabel('TDV (s)')
hold off
%DTTV=dTTV/(sqrt(2));
%dTDV=dTDV/(sqrt(2));

```

```

%% %% Mirar que coincide con P2

figure (3)
hold on
plot (t2 , waveformTDV , 'r ')
plot (t2 , waveformTTV , 'b ')
xlabel ( 'Tiempo (en dias) ')
xlim ([0 5])
ylabel ( '' )

t1=t2 ( islocalmax ( waveformTTV ) );
t1=t1 ( 1 );
t3=t2 ( islocalmax ( waveformTDV ) );
t3=t3 ( 2 );
2*pi/Ps*abs ( t1-t3 )

a1=a1*0.00465047; dTTV=dTTV/(60*60*24); dTDV=dTDV
/(60*60*24);
Msas=dTTV*sqrt ( 2 ) * sqrt ( mu1 ) * ( Mp+Ms ) / ( a1 ^ ( 1 / 2 ) );
Msasinvs=dTDV / ( a1 ^ ( 1 / 2 ) ) * sqrt ( 2 ) * sqrt ( ( Mp+Ms ) * ( Mp+Ms+
M ) ) / tT;
asest=(Msas/Msasinvs)^(2/3);
Msest=Msas/asest;
asest=asest/0.00465047;

function y_hat=y(p,t)
A=p(1);P2=p(2);
y_hat=A*sin(2*pi*t/P2);

end

function y_hat2=y2(p,t)
A=p(1);P2=p(2);
y_hat2=A*cos(2*pi*t/P2);

end

```

8. **TTVPlanet.m** Programa en MATLAB para detectar el TTV/TDV provocado por un exoplaneta sobre otro exoplaneta (Sección 2.3.3.2)

```
j=3;
dat=load('TTV_Kepler49b.dat');
Mstar=0.55; %Steffen et al. (2012)
t=dat(:,4);
Pp1=7.2038;
Pp2=10.91;
err=dat(:,5);
cycle=dat(:,3);
T0=t(3);
tcalc=T0+Pp1*cycle;
t0=T0;
[theta] = lsqcurvefit(@quad, [0, 0], tcalc, t);
parabola=feval(@quad,theta,tcalc);
% figure (2)
% hold on
% plot(tcalc,parabola,'r','LineWidth',1.5)
% plot(tcalc,t,'.','MarkerSize',5)
% xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
% hold off

rms=sqrt(sum((tcalc-parabola).^2)/length(t));
ttv=t-parabola;
figure(3)
plot(tcalc,(t-parabola),'o')
xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
ylabel('TTV (dias)')

[pxx,f,pth] = plomb(ttv,tcalc,'Pd',0.999);
figure(4)
plot(f,pxx,f,pth*ones(size(f)),'r—','LineWidth',
1.25)
xlabel('Frecuencia (dia^{-1})')
ylabel('Potencia espectral')
[pk,f0] = findpeaks(pxx,f,'MinPeakHeight',0.02);
P=1/f0;
Pttv=P*Pp1;
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

dat2=load('TTV_Kepler49c.dat');
t2=dat2(:,4);
err2=dat2(:,5);
cycle2=dat2(:,3);
T02=t2(3)+Pp2*-cycle2(3);
tcalc2=T02+Pp2*cycle2;
t02=T02;
[theta2] = lsqcurvefit(@quad2, [0, 0], tcalc2, t2);
parabola2=feval(@quad2, theta2, tcalc2);
% figure (5)
% hold on
% plot(tcalc2, parabola2, 'r', 'LineWidth', 1.5)
% plot(tcalc2, t2, '.', 'MarkerSize', 5)
% hold off

rms2=sqrt(sum((tcalc2-parabola2).^2)/length(t2));
ttv2=t2-parabola2;
figure(6)
plot(tcalc2, (t2-parabola2), 'o')
xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
ylabel('TTV (días)')

[pxx2, f2, pth2] = plomb(ttv2, tcalc2, 'Pd', 0.999);
figure(7)
plot(f2, pxx2, f2, pth*ones(size(f2)), 'r—', 'LineWidth', 1.25)
xlabel('Frecuencia (día-1)')
ylabel('Potencia espectral')
[pk2, f02] = findpeaks(pxx2, f2, 'MinPeakHeight', 0.06);
P2=1/f02;

Pttv2=P2*Pp2;

[theta3] = [0.00719107 0.26928948];
sinusoidal=feval(@seno, theta3, linspace(tcalc(1), tcalc(length(tcalc)), 1000));
figure(8)
hold on
plot(linspace(tcalc(1), tcalc(length(tcalc)), 1000), sinusoidal*24*60, 'r', 'LineWidth', 1.5)

```

```

plot(tcalc,ttv*24*60,'o','MarkerSize',5)
hold off

[theta4] = [0.01167418 3.2513945];
sinusoidal2=feval(@seno,theta4,linspace(tcalc2(1),
    tcalc2(length(tcalc2)),1000));
figure(9)
hold on
plot(linspace(tcalc2(1),tcalc2(length(tcalc2)),1000)
    ,sinusoidal2*24*60,'r','LineWidth',1.5)
plot(tcalc2,ttv2*24*60,'o','MarkerSize',5)
hold off

Attv1=theta3(1); Attv2=theta4(1);
phi1 =theta3(2); phi2=theta4(2);
Lambdaj1=2*pi/Pp2*(t-t02)*j-(j-1)*2*pi/Pp1*(t-t0);
Lambdaj2=2*pi/Pp2*(t2-t02)*j-(j-1)*2*pi/Pp1*(t2-t0);

V1=Attv1*exp(1i*phi1);
V2=Attv2*exp(1i*phi2);
Delta=Pp2/Pp1*(j-1)/j-1;
f=-2.025+6.21*Delta;
g= 2.484-5.99*Delta;

m1nom=Mstar*abs(V2*Delta/(Pp2*g))*pi*j;
m2nom=Mstar*abs(V1*Delta/(Pp1*f))*pi*j^(2/3)*(j-1)
    ^ (1/3);

mu1=m1nom/Mstar;
mu2=m2nom/Mstar;
zfree= 0.003;
zforced1=-1/(j*Delta)*mu2*f*(Pp1/Pp2)^(1/3)*exp(1i*
    Lambdaj1);
zforced2=-1/(j*Delta)*mu1*g*exp(1i*Lambdaj2);
z1=zfree+zforced1;
z2=zfree+zforced2;
e1=abs(z1);
e2=abs(z2);
omega1=atan(imag(z1)./real(z1))*360/(2*pi);

```

```
omega2=atan(imag(z2)./real(z2))*360/(2*pi);

figure(11)
plot(t,omega1,'.','MarkerSize',10)
xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
ylabel('Argumento del periastro del planeta interior
(radianes)')

figure(12)
plot(t2,omega2,'.','MarkerSize',10)
xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
ylabel('Argumento del periastro del planeta exterior
(radianes)')

figure(13)
plot(t,e1/0.001,'.','MarkerSize',10)
xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
ylabel('Excentricidad del planeta interior (x0.001)')
)

figure(14)
plot(t2,e2/0.001,'.','MarkerSize',10)
xlabel('Tiempo (BJD - 2454900)')
ylabel('Excentricidad del planeta exterior (x0.001)')
)

[pxx3,f3,pth3] = plomb(ttv2-feval(@seno,theta4,
tcalc2),tcalc2,'Pd',0.999);

function y_hat=quad(p,time)
A=p(1);B=p(2);
dat=load('TTV_Kepler49b.dat');
tcalc=dat(:,4);
T0=tcalc(3);
% tcalc=linspace(tobs(1),tobs(length(tobs)),length(
tobs));
% tcalc=tcalc';
% t0=sum(tobs.*(1./err.^2))/(sum(1./(err).^2));
t0=T0;
```

```
y_hat= A + B*(time-t0);  
end
```

```
function y_hat=quad2(p, time)  
Pp2=10.91;  
A=p(1);B=p(2);  
dat2=load('TTV_Kepler49c.dat');  
t2=dat2(:,4);  
cycle2=dat2(:,3);  
T02=t2(3)+Pp2*-cycle2(3);  
% tcalc=linspace(tobs(1),tobs(length(tobs)),length(  
tobs));  
% tcalc=tcalc';  
% t0=sum(tobs.*(1./err.^2))/(sum(1./(err).^2));  
t02=T02;  
y_hat= A + B*(time-t02);  
end
```

```
function y_hat=seno(p, t)  
amp=p(1);  
phase=p(2);  
Pp1=7.2038;  
Pp2=10.91;  
j=3;  
dat2=load('TTV_Kepler49c.dat');  
t2=dat2(:,4);  
cycle2=dat2(:,3);  
T02=t2(3)+Pp2*-cycle2(3);  
t02=T02;  
dat=load('TTV_Kepler49b.dat');  
tcalc=dat(:,4);  
T0=tcalc(3);  
% tcalc=linspace(tobs(1),tobs(length(tobs)),length(  
tobs));  
% tcalc=tcalc';  
% t0=sum(tobs.*(1./err.^2))/(sum(1./(err).^2));  
t0=T0;  
Lambdaj=2*pi/Pp2*(t-t02)*j-(j-1)*2*pi/Pp1*(t-t0);  
y_hat=amp*sin(phase+Lambdaj);
```

end

9. **HZ.m** Programa en MATLAB para calcular la zona habitable de un estrella binaria.

```
m1=1.1;m2=0.9;m3=1;m4=9.548*10^(-4); m5=3*10^(-6);
e=0.3;a=0.5; a3=a*4;aout=0.1883*a; com=(m1*0.1575-m2
*0.1925)/(m1+m2);
com2=(m1*0.1575-m2*0.1925+m3*1.6)/(m1+m2+m3);
aout2=3.2610*a; aout3=2.7*a3; aout4=0.1661*a; aout5
=0.2*a3;
f = 0*2*pi/360; theta = linspace(0,2*pi,200); rbin =
a*(1 - e^2)/(1 + e*cos(f)); rsun = 0.99;
```

```
S=zeros(1,length(theta));
for i=1:length(theta)
syms r
x = vpasolve(1/r^2 + 1/(r^2 + rbin^2 - 2*cos(f -
theta(i))*r*rbin) == 1/rsun^2,r,[0.8,4]);
if length(x)>1
x=min(x);
end
S(i)=S(i)+x;
end
```

```
rsun = 1.71;
```

```
S2=zeros(1,length(theta));
for i=1:length(theta)
syms r
x = vpasolve(1/r^2 + 1/(r^2 + rbin^2 - 2*cos(f -
theta(i))*r*rbin) == 1/rsun^2,r,[0.8,6]);
if length(x)>1
x=min(x);
end
S2(i)=S2(i)+x;
end
```

```
figure(1)
```

```

hold on
polar(theta,S,'green')
polar(theta,S2,'green')
plot(0,0,'black.','MarkerSize',10)
plot(a*(1-e),0,'black.','MarkerSize',10)
plot(com+aout*cos(theta),aout*sin(theta),'black—')
% xlim([-2 8])
% ylim([-2 2])
hold off

figure(2)
hold on
plot(0.1575+aout*cos(theta),aout*sin(theta),'black—')
plot(-0.1925+aout4*cos(theta),aout4*sin(theta),'black—')
plot(1.6+aout5*cos(theta),aout5*sin(theta),'black—')
% plot(com+aout2*cos(theta),aout2*sin(theta),'black—')
plot(com2+aout3*cos(theta),aout3*sin(theta),'black—')
plot(0.1575,0,'black.','MarkerSize',6)
plot(-0.1925,0,'black.','MarkerSize',6)
plot(1.6,0,'black.','MarkerSize',6)
hold off

```

10. **spots.nb** Programa en MATHEMATICA para calcular la curva de luz provocada por un exoplaneta que transita una estrella con una mancha solar (Sección 1.2.2.2)

```

M = 1; Mp = 3*10^-6; G = 0.000295912; mu1 = G*(M + Mp);
Rp = 0.0091577; R = 1; ip = 90*2*Pi/360;
Pp = 1;
ap = (Pp^2*mu1/(4*Pi^2))^(1/3);
ap = ap/0.00465047;
p = Rp/R;
time = N@Subdivide[0, Pp, 10000];

```

```

n = Length[time];
r = Sqrt[x^2 + y^2];
m = Sqrt[1 - r^2];
u1 = 0.4412; u2 = 0.2312;
Istar = 1 - u1*(1 - m) - u2*(1 - m)^2;

XX = 0.25*R; YY = 0; RR = 0.0091577;

IIs = 0*Boole[x^2 + y^2 > R^2] +
      Istar*Boole[(x - XX)^2 + (y - YY)^2 > RR^2] *
      Boole[x^2 + y^2 <= R^2] +
      0.6*Istar*Boole[(x - XX)^2 + (y - YY)^2 <= RR^2] *
      Boole[x^2 + y^2 <= R^2];
Ftotal = NIntegrate[IIs, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PrecisionGoal -> 1,
                    AccuracyGoal -> 10,
                    WorkingPrecision -> 16, Method -> "ClenshawCurtisRule"];
Ftotal

```

11. **TIDES.nb** Programa en MATHEMATICA para integrar las ecuaciones del problema de dos, tres, cuatro y cinco cuerpos, por medio del paquete MathTIDES (Capítulo 3).

```
SetDirectory["C:/tides"];

```

```
<<MathTIDES';
G=0.000295912*365.25^2;

```

```

five={x1''==G(m3*(z1-x1)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+
+(z3-x3)^2])^3+
      m4*(t1-x1)/(Sqrt[(t1-x1)^2+(t2-x2)^2+(t3-x3)^2])^3
+m5*(w1-x1)/(Sqrt[(w1-x1)^2+(w2-x2)^2+(w3-x3)^2])^3
+m2*(y1-x1)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3},
x2''==G(m3*(z2-x2)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3
+m4*(t2-x2)/(Sqrt[(t1-x1)^2+(t2-x2)^2+(t3-x3)^2])^3
+m5*(w2-x2)/(Sqrt[(w1-x1)^2+(w2-x2)^2+(w3-x3)^2])^3
+m2*(y2-x2)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3},
x3''==G(m3*(z3-x3)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3
+m4*(t3-x3)/(Sqrt[(t1-x1)^2+(t2-x2)^2+(t3-x3)^2])^3

```

```

+m5*(w3-x3)/(Sqrt[(w1-x1)^2+(w2-x2)^2+(w3-x3)^2])^3
+m2*(y3-x3)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3,
y1''=G(-m3*(y1-z1)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m4*(t1-y1)/(Sqrt[(t1-y1)^2+(t2-y2)^2+(t3-y3)^2])^3
+m5*(w1-y1)/(Sqrt[(w1-y1)^2+(w2-y2)^2+(w3-y3)^2])^3,
y2''=G(-m3*(y2-z2)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m4*(t2-y2)/(Sqrt[(t1-y1)^2+(t2-y2)^2+(t3-y3)^2])^3
+m5*(w2-y2)/(Sqrt[(w1-y1)^2+(w2-y2)^2+(w3-y3)^2])^3,
y3''=G(-m3*(y3-z3)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m4*(t3-y3)/(Sqrt[(t1-y1)^2+(t2-y2)^2+(t3-y3)^2])^3
+m5*(w3-y3)/(Sqrt[(w1-y1)^2+(w2-y2)^2+(w3-y3)^2])^3,
z1''=G(m4*(t1-z1)/(Sqrt[(t1-z1)^2+(t2-z2)^2+(t3-z3)^2])^3
+m5*(w1-z1)/(Sqrt[(w1-z1)^2+(w2-z2)^2+(w3-z3)^2])^3,
z2''=G(m4*(t2-z2)/(Sqrt[(t1-z1)^2+(t2-z2)^2+(t3-z3)^2])^3
+m5*(w2-z2)/(Sqrt[(w1-z1)^2+(w2-z2)^2+(w3-z3)^2])^3,
z3''=G(m4*(t3-z3)/(Sqrt[(t1-z1)^2+(t2-z2)^2+(t3-z3)^2])^3
+m5*(w3-z3)/(Sqrt[(w1-z1)^2+(w2-z2)^2+(w3-z3)^2])^3,
t1''=G(m3*(z1-t1)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3
+m5*(w1-t1)/(Sqrt[(w1-t1)^2+(w2-t2)^2+(w3-t3)^2])^3,
t2''=G(m3*(z2-t2)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3
+m5*(w2-t2)/(Sqrt[(w1-t1)^2+(w2-t2)^2+(w3-t3)^2])^3,
t3''=G(m3*(z3-t3)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3
+m5*(w3-t3)/(Sqrt[(w1-t1)^2+(w2-t2)^2+(w3-t3)^2])^3,
w1''=G(m3*(z1-w1)/(Sqrt[(z1-w1)^2+(z2-w2)^2+(z3-w3)^2])^3
+m4*(t1-w1)/(Sqrt[(w1-t1)^2+(w2-t2)^2+(w3-t3)^2])^3,
w2''=G(m3*(z2-w2)/(Sqrt[(z1-w1)^2+(z2-w2)^2+(z3-w3)^2])^3
+m4*(t2-w2)/(Sqrt[(w1-t1)^2+(w2-t2)^2+(w3-t3)^2])^3,
w3''=G(m3*(z3-w3)/(Sqrt[(z1-w1)^2+(z2-w2)^2+(z3-w3)^2])^3
+m4*(t3-w3)/(Sqrt[(w1-t1)^2+(w2-t2)^2+(w3-t3)^2])^3}
/.{m1->3*10^(-6),m2->9.548*10^-4 ,m3->1.1,m4->0.9,m5->0.2};
fiveBPEQ=NthOrderODE[five ,t,{x1,x2 ,x3 ,y1 ,y2 ,y3 ,z1 ,z2 ,z3 ,
t1 ,t2 ,t3 ,w1 ,w2 ,w3 }];

four={x1''=G(-m2*(x1-y1)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])
x2''=G(-m2*(x2-y2)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3 ,
x3''=G(-m2*(x3-y3)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3 ,
y1''=G(m1*(x1-y1)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3 ,
y2''=G(m1*(x2-y2)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3 ,
y3''=G(m1*(x3-y3)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3 ,
z1''=G(-m1*(z1-x1)/(Sqrt[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-y3)^2])^3

```

$$\begin{aligned}
 &+m2 (y1-z1)/(\text{Sqrt}[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3 \\
 &+m5*(t1-z1)/(\text{Sqrt}[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3, \\
 z2''=&G(-m1(z2-x2))/(\text{Sqrt}[(x2-z2)^2+(x1-z1)^2+(x3-z3)^2])^3 \\
 &+m2 (y2-z2)/(\text{Sqrt}[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(z3-y3)^2])^3+m5*(t2-z2) \\
 &/(\text{Sqrt}[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3, \\
 z3''=&G(-m1(z3-x3))/(\text{Sqrt}[(x3-z3)^2+(x2-z2)^2+(x1-z1)^2])^3 \\
 &+m2 (y3-z3)/(\text{Sqrt}[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(z3-y3)^2])^3 \\
 &+m5*(t3-z3)/(\text{Sqrt}[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3, \\
 t1''=&G(-m1(t1-x1))/(\text{Sqrt}[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3 \\
 &+m2 (y1-t1)/(\text{Sqrt}[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3 \\
 &+m4*(z1-t1)/(\text{Sqrt}[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3, \\
 t2''=&G(-m1(t2-x2))/(\text{Sqrt}[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3 \\
 &+m2 (y2-t2)/(\text{Sqrt}[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3 \\
 &+m4*(z2-t2)/(\text{Sqrt}[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3, \\
 t3''=&G(-m1(t3-x3))/(\text{Sqrt}[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3 \\
 &+m2 (y3-t3)/(\text{Sqrt}[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3 \\
 &+m4*(z3-t3)/(\text{Sqrt}[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3\} \\
 &/.\{m1->1.1,m2->0.9,m4->9.548*10^{-4},m5->3*10^{-6}\};
 \end{aligned}$$

fourBPEQ=NthOrderODE[four,t,{x1,x2,x3,y1,y2,y3,z1,z2,z3,t1,t2,t3}];

$$\begin{aligned}
 \text{four2}=\{ &x1''=G(-m2(x1-y1))/(\text{Sqrt}[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3+ \\
 &m3 (z1-x1)/(\text{Sqrt}[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3, \\
 x2''=&G(-m2(x2-y2))/(\text{Sqrt}[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3 \\
 &+m3 (z2-x2)/(\text{Sqrt}[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3, \\
 x3''=&G(-m2(x3-y3))/(\text{Sqrt}[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3 \\
 &+m3 (z3-x3)/(\text{Sqrt}[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3, \\
 y1''=&G(-m3(y1-z1))/(\text{Sqrt}[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3 \\
 &+m1 (x1-y1)/(\text{Sqrt}[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3, \\
 y2''=&G(-m3(y2-z2))/(\text{Sqrt}[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3 \\
 &+m1 (x2-y2)/(\text{Sqrt}[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3, \\
 y3''=&G(-m3(y3-z3))/(\text{Sqrt}[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3 \\
 &+m1 (x3-y3)/(\text{Sqrt}[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3, \\
 z1''=&G(-m1(z1-x1))/(\text{Sqrt}[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3 \\
 &+m2 (y1-z1)/(\text{Sqrt}[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(z3-y3)^2])^3, \\
 z2''=&G(-m1(z2-x2))/(\text{Sqrt}[(x2-z2)^2+(x1-z1)^2+(x3-z3)^2])^3 \\
 &+m2 (y2-z2)/(\text{Sqrt}[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(z3-y3)^2])^3, \\
 z3''=&G(-m1(z3-x3))/(\text{Sqrt}[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
 \end{aligned}$$

```

+m2 (y3-z3)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(z3-y3)^2])^3,
t1''=G(-m1(t1-x1)/(Sqrt[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3
+m2 (y1-t1)/(Sqrt[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3
+m3*(z1-t1)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3,
t2''=G(-m1(t2-x2)/(Sqrt[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3
+m2 (y2-t2)/(Sqrt[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3
+m3*(z2-t2)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3,
t3''=G(-m1(t3-x3)/(Sqrt[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3
+m2 (y3-t3)/(Sqrt[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3
+m3*(z3-t3)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3}
/.{m1->1.1,m2->0.9,m3->1,m4->9.548*10^-4};

```

```

fourBPEQ=NthOrderODE[four2,t,{x1,x2,x3,y1,y2,y3,
z1,z2,z3,t1,t2,t3}];

```

```

four3 = {x1''=G(m2 (y1-x1)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2
+(y3-x3)^2])^3
+m3 (z1-x1)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3,
x2''=G(m2 (y2-x2)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3
+m3 (z2-x2)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3,
x3''=G(m2 (y3-x3)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3
+m3 (z3-x3)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3,
y1''=G(m3 (z1-y1)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1 (x1-y1)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3,
y2''=G(m3 (z2-y2)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1 (x2-y2)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3,
y3''=G(m3 (z3-y3)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1 (x3-y3)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3,
z1''=G(m1 (x1-z1)/(Sqrt[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y1-z1)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3,
z2''=G(m1 (x2-z2)/(Sqrt[(x2-z2)^2+(x1-z1)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y2-z2)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3,
z3''=G(m1 (x3-z3)/(Sqrt[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y3-z3)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3,
t1''=G(-m1(t1-x1)/(Sqrt[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3
+m2 (y1-t1)/(Sqrt[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3
+m3 (z1-t1)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3,
t2''=G(-m1(t2-x2)/(Sqrt[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3
+m2 (y2-t2)/(Sqrt[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3
+m3 (z2-t2)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3,

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

$$t3'' = G(-m1(t3-x3) / (\text{Sqrt}[(x1-t1)^2 + (x2-t2)^2 + (x3-t3)^2])^3 + m2(y3-t3) / (\text{Sqrt}[(y1-t1)^2 + (y2-t2)^2 + (y3-t3)^2])^3 + m3(z3-t3) / (\text{Sqrt}[(z1-t1)^2 + (z2-t2)^2 + (z3-t3)^2])^3) / \{m1 > 1, m2 > 9.548 * 10^{-4}, m3 > 2.857 * 10^{-4}, m4 > 3 * 10^{-6}\};$$

$$\text{fourBPEQ} = \text{NthOrderODE}[\text{four3}, t, \{x1, x2, x3, y1, y2, y3, z1, z2, z3, t1, t2, t3\}];$$

$$\begin{aligned} \text{four4} = & \{x1'' = G(m2(y1-x1) / (\text{Sqrt}[(y1-x1)^2 + (y2-x2)^2 + (y3-x3)^2])^3 + m3*(z1-x1) / (\text{Sqrt}[(z1-x1)^2 + (z2-x2)^2 + (z3-x3)^2])^3 + m4*(t1-x1) / (\text{Sqrt}[(t1-x1)^2 + (t2-x2)^2 + (t3-x3)^2])^3), \\ x2'' = & G(m2(y2-x2) / (\text{Sqrt}[(y1-x1)^2 + (y2-x2)^2 + (y3-x3)^2])^3 + m3(z2-x2) / (\text{Sqrt}[(z1-x1)^2 + (z2-x2)^2 + (z3-x3)^2])^3 + m4*(t2-x2) / (\text{Sqrt}[(t1-x1)^2 + (t2-x2)^2 + (t3-x3)^2])^3), \\ x3'' = & G(m2(y3-x3) / (\text{Sqrt}[(y1-x1)^2 + (y2-x2)^2 + (y3-x3)^2])^3 + m3(z3-x3) / (\text{Sqrt}[(z1-x1)^2 + (z2-x2)^2 + (z3-x3)^2])^3 + m4*(t3-x3) / (\text{Sqrt}[(t1-x1)^2 + (t2-x2)^2 + (t3-x3)^2])^3), \\ y1'' = & G(m3(z1-y1) / (\text{Sqrt}[(z1-y1)^2 + (z2-y2)^2 + (z3-y3)^2])^3 + m1(x1-y1) / (\text{Sqrt}[(x1-y1)^2 + (x2-y2)^2 + (x3-y3)^2])^3 + m4*(t1-y1) / (\text{Sqrt}[(t1-y1)^2 + (t2-y2)^2 + (t3-y3)^2])^3), \\ y2'' = & G(m3(z2-y2) / (\text{Sqrt}[(z1-y1)^2 + (z2-y2)^2 + (z3-y3)^2])^3 + m1(x2-y2) / (\text{Sqrt}[(x1-y1)^2 + (x2-y2)^2 + (x3-y3)^2])^3 + m4*(t2-y2) / (\text{Sqrt}[(t1-y1)^2 + (t2-y2)^2 + (t3-y3)^2])^3), \\ y3'' = & G(m3(z3-y3) / (\text{Sqrt}[(z1-y1)^2 + (z2-y2)^2 + (z3-y3)^2])^3 + m1(x3-y3) / (\text{Sqrt}[(x1-y1)^2 + (x2-y2)^2 + (x3-y3)^2])^3 + m4*(t3-y3) / (\text{Sqrt}[(t1-y1)^2 + (t2-y2)^2 + (t3-y3)^2])^3), \\ z1'' = & G(m1(x1-z1) / (\text{Sqrt}[(x1-z1)^2 + (x2-z2)^2 + (x3-z3)^2])^3 + m2(y1-z1) / (\text{Sqrt}[(y1-z1)^2 + (y2-z2)^2 + (y3-z3)^2])^3 + m4*(t1-z1) / (\text{Sqrt}[(t1-z1)^2 + (t2-z2)^2 + (t3-z3)^2])^3), \\ z2'' = & G(m1(x2-z2) / (\text{Sqrt}[(x2-z2)^2 + (x1-z1)^2 + (x3-z3)^2])^3 + m2(y2-z2) / (\text{Sqrt}[(y1-z1)^2 + (y2-z2)^2 + (y3-z3)^2])^3 + m4*(t2-z2) / (\text{Sqrt}[(t1-z1)^2 + (t2-z2)^2 + (t3-z3)^2])^3), \\ z3'' = & G(m1(x3-z3) / (\text{Sqrt}[(x1-z1)^2 + (x2-z2)^2 + (x3-z3)^2])^3 + m2(y3-z3) / (\text{Sqrt}[(y1-z1)^2 + (y2-z2)^2 + (y3-z3)^2])^3 + m4*(t3-z3) / (\text{Sqrt}[(t1-z1)^2 + (t2-z2)^2 + (t3-z3)^2])^3), \\ t1'' = & G(-m1(t1-x1) / (\text{Sqrt}[(x1-t1)^2 + (x2-t2)^2 + (x3-t3)^2])^3 + m2(y1-t1) / (\text{Sqrt}[(y1-t1)^2 + (y2-t2)^2 + (y3-t3)^2])^3 + m3*(z1-t1) / (\text{Sqrt}[(z1-t1)^2 + (z2-t2)^2 + (z3-t3)^2])^3), \\ t2'' = & G(-m1(t2-x2) / (\text{Sqrt}[(x1-t1)^2 + (x2-t2)^2 + (x3-t3)^2])^3 + m2(y2-t2) / (\text{Sqrt}[(y1-t1)^2 + (y2-t2)^2 + (y3-t3)^2])^3 \end{aligned}$$

```

+m3*(z2-t2)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3,
t3''==G(-m1(t3-x3)/(Sqrt[(x1-t1)^2+(x2-t2)^2+(x3-t3)^2])^3
+m2(y3-t3)/(Sqrt[(y1-t1)^2+(y2-t2)^2+(y3-t3)^2])^3
+m3*(z3-t3)/(Sqrt[(z1-t1)^2+(z2-t2)^2+(z3-t3)^2])^3)
/.{m1->3*10^-6,m2->9.548*10^(-4),m3->9.548*10^(-4)*40,m4->0.2}

```

```

fourBPEQ=NthOrderODE[four4,t,{x1,x2,x3,y1,y2,y3,z1,z2,z3,t,
,t2,t3}];

```

```

three = {x1''==G(m2(y1-x1)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2
+(y3-x3)^2])^3
+m3(z1-x1)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3),
x2''==G(m2(y2-x2)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3
+m3(z2-x2)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3),
x3''==G(m2(y3-x3)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3
+m3(z3-x3)/(Sqrt[(z1-x1)^2+(z2-x2)^2+(z3-x3)^2])^3),
y1''==G(m3(z1-y1)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1(x1-y1)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y2''==G(m3(z2-y2)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1(x2-y2)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y3''==G(m3(z3-y3)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1(x3-y3)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
z1''==G(m1(x1-z1)/(Sqrt[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2(y1-z1)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3),
z2''==G(m1(x2-z2)/(Sqrt[(x2-z2)^2+(x1-z1)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2(y2-z2)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3),
z3''==G(m1(x3-z3)/(Sqrt[(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2(y3-z3)/(Sqrt[(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3)
/.{m1->9.548*10^(-4),m2->40*9.548*10^(-4),m3->1};
threeBPEQ=NthOrderODE[three,t,{x1,x2,x3,y1,y2,y3,z1,z2,z3}];

```

```

three2 = {x1''==G(m2(y1-x1)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+
(y3-x3)^2])^3),
x2''==G(m2(y2-x2)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
x3''==G(m2(y3-x3)/(Sqrt[(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
y1''==G(m3(z1-y1)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1(x1-y1)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y2''==G(m3(z2-y2)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3
+m1(x2-y2)/(Sqrt[(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y3''==G(m3(z3-y3)/(Sqrt[(z1-y1)^2+(z2-y2)^2+(z3-y3)^2])^3

```

```
+m1 (x3-y3)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3,
z1''==G(m1 (x1-z1)/(Sqrt [(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y1-z1)/(Sqrt [(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3),
z2''==G(m1 (x2-z2)/(Sqrt [(x2-z2)^2+(x1-z1)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y2-z2)/(Sqrt [(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3),
z3''==G(m1 (x3-z3)/(Sqrt [(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y3-z3)/(Sqrt [(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3)
/. {m1->1,m2->9.548*10^(-4),m3->3*10^(-6)};
```

```
threeBPEQ=NthOrderODE [three2, t, {x1, x2, x3, y1, y2, y3, z1, z2, z3}];
threeBPEQ
```

```
three3 = {x1''== G(m2 (y1-x1)/(Sqrt [(y1-x1)^2+(y2-x2)^2
+(y3-x3)^2])^3),
x2''==G(m2 (y2-x2)/(Sqrt [(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
x3''==G(m2 (y3-x3)/(Sqrt [(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
y1''==G(m1 (x1-y1)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y2''==G(m1 (x2-y2)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y3''==G(m1 (x3-y3)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
z1''==G(m1 (x1-z1)/(Sqrt [(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y1-z1)/(Sqrt [(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3),
z2''==G(m1 (x2-z2)/(Sqrt [(x2-z2)^2+(x1-z1)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y2-z2)/(Sqrt [(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3),
z3''==G(m1 (x3-z3)/(Sqrt [(x1-z1)^2+(x2-z2)^2+(x3-z3)^2])^3
+m2 (y3-z3)/(Sqrt [(y1-z1)^2+(y2-z2)^2+(y3-z3)^2])^3)
/. {m1->1.1,m2->0.9};
```

```
threeBPEQ=NthOrderODE [three3, t, {x1, x2, x3, y1, y2, y3, z1, z2, z3}];
```

```
two = {x1''==G(-m2(x1-y1)/(Sqrt [(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
x2''==G(-m2(x2-y2)/(Sqrt [(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
x3''==G(-m2(x3-y3)/(Sqrt [(y1-x1)^2+(y2-x2)^2+(y3-x3)^2])^3),
y1''==G*(m1 (x1-y1)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y2''==G*(m1 (x2-y2)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3),
y3''==G*(m1 (x3-y3)/(Sqrt [(x1-y1)^2+(x2-y2)^2+(x3-y3)^2])^3)
/. {m1->1,m2->9.548*10^(-4)};
```

```
twoBPEQ =NthOrderODE [two, t, {x1, x2, x3, y1, y2, y3}];
```

```
TSMCodeFiles [threeBPEQ, "three",
```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```

InitialConditions ->{-0.0043901282056690782082397639385363,
-0.073140651165152212320741398343671,
0.05675646964985412573634349087115,
0.00010975320514172693352195064875332,
0.0018285162791288047876014921655496,
-0.0014189117412463528398319789758375,
5.0, -0.6602540378443864676372317075294,
0,2.6601197441382091746220339700812,
1.7563548022168267159770493890392,
2.469131739428745753173188859364,
-0.066502993603455212712205479874683,
-0.043908870055420656797195988474414,
-0.061728293485718628563763132888198,
2.4570265767194681139073964004638,
-1.4185649554750499046207323772251,
-0.024759257638068771223416320026445,
IntegrationPoints-> {0,500000,Points[500000]},
Output->"three.txt",MinTIDES->"C", TimeConstraint->10000]
"Files\_\"dr_three.c\",\_three.c\" written on directory
\_\"C:\\tides\"."

```

```

TSMCodeFiles[twoBPEQ,_"two",
InitialConditions ->{-0.00095388922656647443139299458181313,
0,0,0.99904611077343363767511164041935,
0,0,0*365.25,0*365.25,
-0.000016416747425009867367888885536509*365.25,
0*365.25, _0*365.25,
0.017193912259122191149574021551416*365.25},
IntegrationPoints ->{0,10000,Points[100000]},
Output->"two.txt",MinTIDES->"C",_TimeConstraint ->10000]
"Files \_\"dr_two.c\", two.c\"_written_on_directory\_\"C:\\tides\"
TSMCodeFiles[fourBPEQ, "four",
InitialConditions ->{-0.0044857869816685696368052660432113,
-0.074734350674252977841938161418511,
0.05799316574673495094938147076391,
0.00001409442914223471890987349208757,
0.0002348167700280257138775730219038,
-0.00018221564436552667811709815826049,
-5.0, 8.6602540378443864676372317075294,
0,-65.122325018263182982991565950215,

```

Apéndice B. Programación en MATLAB, MATHEMATICA y Python de distintos algoritmos empleados en la Tesis

```
8.4483808911757591886271256953478,0,
0.42515952433413206623669111650088,
0.28071329266960903803251881072356,
0.39463444386934021235191494270111,
-0.0013358594187289445347904814909157,
-0.00088200657520823972073537033722346,
-0.0012399490276581699808172709609266,
0.34044768228322924707995866810961,
-0.19655756101120663847936498314084,
-0.0034306636964376085660588522330272},
IntegrationPoints-> {0,30*10^6,Points[30*10^6]},
Output->"four.txt",MinTIDES->"C", TimeConstraint->10000]
"Files\"dr_four.c\",_four.c\" written on directory
\"C:\\tides\"."
TSMCodeFiles[fiveBPEQ,_"five",
InitialConditions ->{81.437,0,0,81.0,0,0,-3.15,0,0,3.85,
0,0,160.0,0,0,0,1.2889383149906437076026577415178,0,0,
0.9875247035041776477726216398878,
0,0,1.7231444318481199395876046764897,
0,0,2.1060654167032577532836512546055,
0,0,0.80707423913122755543270159250824,0},
IntegrationPoints->_{0,500000,Points[5000000]},
_Output->"five.txt",_MinTIDES->"C",
TimeConstraint->10000]
"Files \"dr_five.c\", five.c\"_written_on_directory
\"C:\\tides\"."
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE COMPOSTELA
```



Carlos Vázquez Monzón, autor de la Tesis, junto al profesor Docobo, director de la misma.