FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Diferencias divididas e interpolación osculatoria

Elba García Hermida

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Diferencias divididas e interpolación osculatoria

Elba García Hermida

Julio de 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Diferencias divididas e interpolación osculatoria
Breve descrición do contido
El trabajo contará con una parte teórica y una práctica. En la parte teórica se abordarán los contenidos siguientes: (i) Diferencias divididas: definición, fórmula recursiva en el caso de que todos los argumentos sean distintos y expresión del polinomio de interpolación de Lagrange mediante diferencias divididas (fórmula de interpolación de Newton). (ii) Interpolación osculatoria (interpolación de Hermite generalizada): concepto, existencia y unicidad del polinomio de interpolación osculador, expresión del error. (iii) Diferencias divididas con argumentos repetidos. Expresión del polinomio de interpolación osculador mediante diferencias divididas. La parte práctica consistirá en programar en matlab algunos métodos de cálculo del polinomio de interpolación osculador descritos en la parte téorica y aplicarlos a ejemplos concretos.

Índice general

Resumen

En el primer capítulo demostraremos la existencia y unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange y obtendremos la fórmula de Newton. Además, justificaremos el uso de las tablas de diferencias divididas para obtener la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación.

En segundo y tercer capítulo trataremos la existencia y unicidad del polinomio de interpolación de Hermite. Demostraremos también algunos resultados relativos al error para este tipo de interpolación.

Extenderemos la definición de diferencia dividida al caso de argumentos repetidos y veremos que entonces el polinomio de Hermite se puede escribir en la forma de Newton.

Abstract

In the first chapter we will show the existence and uniqueness of the Lagrange's interpolation polynomial. We will obtain the Newton's formula. Furthermore, we will justify the use of the divided differences tables to find the Newton's formula for the interpolation polynomial.

In the second and third chapter we will deal with the existence and uniqueness of the Hermite's interpolation polynomial, as well as some error related results.

We will extend the divided difference definition to the case of repeated arguments. We will prove that we can write the Hermite's polynomial in the Newton's form.

Introducción

En muchas ocasiones es necesario conocer los valores aproximados que toma una función de la cual, posiblemente, sólo tenemos a nuestra disposición su valor en un número finito de nodos. Mediante un polinomio de interpolación podemos calcular dichos valores aproximados. Este trabajo de fin de grado se ve motivado por el interés de profundizar en las técnicas de interpolación, algunas de ellas estudiadas y empleadas en algunas asignaturas del grado, como en de *Cálculo Numérico en una Variable*, *Métodos Numéricos en Optimización y Ecuaciones Diferenciales* o *Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, entre otras.

Sobre el polinomio de interpolación de Lagrange demostraremos su existencia y unicidad, así como algunos resultados relativos a la acotación del error. También obtendremos su forma de Newton, que nos permite añadir puntos de interpolación con mayor eficiencia. Justificaremos el uso de las tablas de diferencias divididas, así como progresivas y regresivas en el caso de nodos uniformemente espaciados, para obtener la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación.

Con respecto a lo estudiado en el grado, ampliaremos los conocimientos definiendo el polinomio de Hermite generalizado, o osculador, demostrando su existencia y unicidad y algunos resultados relativos a la acotación del error. Extenderemos la definición de las diferencias divididas al caso de argumentos y veremos que el polinomio de interpolación de Hermite se puede escribir también en la forma de Newton, facilitando su obtención.

Capítulo 1

Diferencias divididas: Fórmula de interpolación de Newton

La búsqueda de aproximaciones para funciones ha sido siempre un problema que ha despertado el interés de matemáticos y eruditos. Este interés se ve impulsado por la necesidad de poder calcular, de forma aproximada, el valor de ciertas funciones, como por ejemplo la función de Bessel (Ejemplo 1.17); o simplemente para simplificar funciones y trabajar con ellas más cómodamente. En este capítulo haremos un repaso breve del concepto de polinomio de interpolación de Lagrange, sin entrar en detalles muy teóricos vistos en el grado, así como la forma de Newton y las diferencias divididas.

En este capítulo seguiremos los capítulos 5 y 6 de [5] y el capítulo 1 de [4].

1.1. El polinomio de interpolación de Lagrange

Esencialmente, un polinomio de interpolación es una aproximación polinómica que coincide con la función a la que aproxima en un número concreto de puntos.

Definición 1.1. Dados $n+1$ puntos distintos x_i, $i = 0, 1, ..., n$ y sus correspondientes valores $f(x_i)$, el polinomio de **interpolación de Lagrange** es el único polinomio P_n de grado menor o igual que n que cumple:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \tag{1.1}$$

Sea $\mathbb{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales.

Lema 1.2. *El polinomio de interpolación de Lagrange existe y es único.*

<u>*Demostración:*</u>

- *<u>Unicidad:</u> Consideremos $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ dos polinomios de interpolación de la función f respecto a los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, es decir, P_n y Q_n tienen grado menor o igual que n y satisfacen*

$$f(x_i) = P_n(x_i) = Q_n(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Definamos el polinomio $D_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$, que es de grado menor o igual que n. Este polinomio tiene al menos $n+1$ raíces distintas:

$$D_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

El único polinomio de grado menor o igual que n con más de n raíces es el polinomio idénticamente nulo $D_n(x) = 0$, y por tanto $P_n(x) = Q_n(x)$.

- *<u>Existencia:</u> Sean $f_i = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$. Consideremos la aplicación lineal $L : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definida por $L(p) = (p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. En virtud de la unicidad del polinomio de interpolación, $Ker(L) = 0$. Como además $dim(\mathbb{P}_n) = n+1 = dim(\mathbb{R}^{n+1})$, L es sobreyectiva. Por tanto, existe $P_n \in \mathbb{P}_n$ tal que*

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

El polinomio de interpolación de Lagrange admite la siguiente representación:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\phi_{n,j}(x), \tag{1.2}$$

donde, para $j = 0, \ldots, n$, $\phi_{n,j}(x)$ es el polinomio de grado $\leq n$ que verifica

$$\phi_{n,j}(x_i) = \delta_{ij}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Puesto que todos los x_i son distintos, los $\phi_{n,j}$ se construyen fácilmente:

$$\phi_{n,j}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{j-1})(x - x_j)...(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)}, \quad j = 0, 1, ..., n \tag{1.3}$$

Usando la notación $w_n(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ podemos reescribir (1.3) de forma más breve:

$$\phi_{n,j}(x) = \frac{w_n(x)}{(x - x_j)w_n'(x_j)} \tag{1.4}$$

En algunos textos (por ejemplo [5]) solo se usa la terminología "polinomio de interpolación de Lagrange" cuando éste está escrito en la forma (1.2). Los polinomios definidos en (1.3) o (1.4) son los denominados **polinomios fundamentales de Lagrange** o **polinomios de base de Lagrange** (terminología usada en [4]).

Usando la expresión (1.3) en (1.2) obtenemos:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \tag{1.5}$$

El siguiente ejemplo está propuesto como ejercicio en [3] y nos permite ilustrar la obtención del polinomio de interpolación de Lagrange.

Ejemplo 1.3. Consideremos la función

$$K(x) = \int_0^{\Pi/2} \frac{dt}{[1 - \sin^2(x)\sin^2(t)]^{1/2}}$$

Esta integral elíptica está tabulada. Nótese que la variable x está considerada en radianes. Sea

$$\hat{K}(\hat{x}) = K(x), \quad x = \frac{\pi}{180}\hat{x}$$

el cambio de variable a grados, consideremos los valores:

$$\hat{K}(2) = 1{,}5713, \quad \hat{K}(3) = 1{,}5719, \quad \hat{K}(5) = 1{,}5738, \quad \hat{K}(6) = 1{,}5751$$

El polinomio de interpolación de $\hat{K}(\hat{x})$ con respecto a los puntos $2, 3, 5, 6$ es de grado menor o igual que tres[1] y usando (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned} P_3(\hat{x}) = -1{,}5713\frac{(\hat{x}-3)(\hat{x}-5)(\hat{x}-6)}{12} + 1{,}5719\frac{(\hat{x}-2)(\hat{x}-5)(\hat{x}-6)}{6} - \\ 1{,}5738\frac{(\hat{x}-2)(\hat{x}-3)(\hat{x}-6)}{6} + 1{,}5751\frac{(\hat{x}-2)(\hat{x}-3)(\hat{x}-5)}{12} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Así, si podemos calcular el valor aproximado de la función en
$\hat{x} = 3{,}5^{o}, \quad P_3(3{,}5) = 1{,}5722875.$

Existen otras formas de representar este polinomio, por ejemplo la fórmula de interpolación de Newton, que trataremos en la sección siguiente.

Resulta natural formularse la siguiente pregunta: *¿Estarán los valores que toma la aproximación cercanos a los valores que toma la función aproximada?* Es aquí donde entra en juego el concepto de **error puntual**.

[1] De hecho, $P_3(x)$ es de grado 2; su coeficiente principal es cero.

Definición 1.4. Sea $f(x)$ una función dada y $P_n(x)$ una aproximación polinómica de ésta; se define el **error puntual** entre $f(x)$ y $P_n(x)$ por:

$$R_n(x) \equiv f(x) - P_n(x) \tag{1.7}$$

Es de gran utilidad tener una expresión explícita para este error. El siguiente teorema nos proporciona una representación de $R_n(x)$:

Teorema 1.5. *Supongamos que $f(x)$ tiene derivada $(n+1)$-ésima, $f^{(n+1)}(x)$, en un intervalo $[a,b]$*[2] *. Sea $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de $f(x)$ con respecto a $n+1$ puntos distintos x_i, $i = 0, 1, ..., n$, pertenecientes al intervalo $[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$, $x \neq x_i, i = 0, 1, \ldots, n$, existe un punto $\xi = \xi(x)$ en el intervalo abierto*

$$\text{mín}\{x_0, x_1, ..., x_n, x\} < \xi < \text{máx}\{x_0, x_1, ..., x_n, x\} \tag{1.8}$$

tal que

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) \equiv R_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\ &\equiv \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned} \tag{1.9}$$

<u>Demostración:</u> Definimos $S_n(x)$, para cualquier $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$, por:

$$R_n(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)S_n(x) = w_n(x)S_n(x) \tag{1.10}$$

Consideramos $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$, fijo y definimos la función $F(z)$ por:

$$F(z) \equiv f(z) - P_n(z) - w_n(z)S_n(x). \tag{1.11}$$

Dado que f tiene derivada $(n+1)$-ésima en $[a,b]$, $F^{(n+1)}(z)$ está definida en $[a,b]$.

$F(z)$ se anula en $n+2$ puntos distintos de $[a,b]$:

$$F(x_0) = F(x_1) = ... = F(x_n) = F(x) = 0.$$

Por lo tanto, existen $n+1$ intervalos consecutivos contenidos en $[a,b]$ en cuyos extremos $F(z)$ es cero. En virtud del teorema de Rolle, en el interior de cada uno de estos intervalos existe al menos un punto en el cual $F'(z)$ se anula. Tenemos, por tanto, al menos $n+1$ puntos distintos en el intervalo (1.8) en los cuales $F'(z) = 0$. A su vez, estos puntos definen al menos n intervalos en cuyo interior, aplicando de nuevo el teorema de Rolle, existe un punto en el que la derivada de $F'(z)$ se anula. Con lo cual, $F''(z) = 0$ en al menos n puntos

[2] En realidad, la conclusión del teorema se obtiene del mismo modo para condiciones más débiles: basta que $f(x)$ sea continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y que tenga derivada $(n+1)$-ésima en el intervalo (a,b).

distintos en el intervalo (1.8). Repitiendo este proceso, llegamos a que existe un punto en el intervalo (1.8), que denotamos ξ, tal que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Puesto que $P_n(z)$ es un polinomio de grado n,

$$\frac{d^{n+1}P_n}{dz^{n+1}}(z) = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}[w_n(z)S_n(x)] = (n+1)!S_n(x).$$

Derivando en la expresión (1.11) y teniendo en cuenta las dos últimas ecuaciones se obtiene que:

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - (n+1)!S_n(x)$$

y puesto que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ se deduce que:

$$S_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \tag{1.12}$$

Sustituyendo (1.12) en (1.10) se concluye (1.9).

Observación 1.6. Si $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $R_n(x) = 0$ y (1.9) también se verifica en este caso (cualquiera que sea $\xi \in [a, b]$).

Si podemos acotar $|f^{(n+1)}(x)|$ en $[a, b]$, mediante (1.9) obtendremos una acotación del error, como veremos en el Ejemplo 1.17 más adelante.

1.2. El polinomio de interpolación de Newton

Esta sección recoge la obtención de la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de Lagrange, así como la introducción de las tablas de diferencias divididas. Examinaremos también el error cuando tomamos puntos uniformemente espaciados.

Ya hemos visto que el polinomio de interpolación existe y es único; además, dado un conjunto de puntos de interpolación, lo podemos construir fácilmente usando los polinomios fundamentales de Lagrange. La principal desventaja de este método es que si añadimos un nuevo punto de interpolación, el nuevo polinomio de grado superior no puede ser obtenido simplemente modificando el anterior. Buscaremos una nueva representación del polinomio de interpolación que cuente con esta propiedad, es decir, que nos permita encontrar polinomios de interpolación de grado mayor de forma sencilla añadiendo nuevos términos.

Sea $P_k(x)$ el polinomio de interpolación de $f(x)$, de grado menor o igual que k, con respecto a los $k+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Buscamos los polinomios de interpolación sucesivos $\{P_k(x)\}$, de grado menor o igual que k tales que $P_0(x) \equiv f(x_0)$ y

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + q_k(x), \quad para \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.13}$$

donde $q_k(x)$ tiene a lo sumo grado k. Puesto que necesitamos que

$$P_k(x_j) = f(x_j) = P_{k-1}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

deducimos que $q_k(x_j) = 0$ en estos k puntos. Por ello, podemos escribir

$$q_k(x) = a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \tag{1.14}$$

expresión que representa el polinomio más general de grado menor o igual que k que se anula en estos k puntos. Desconocemos el valor de las constantes a_k pero, de la ecuación $P_k(x_k) = f(x_k)$, junto con (1.13) y (1.14), deducimos que

$$a_k = \frac{f(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)}, \quad para \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Trivialmente, obtenemos el polinomio de interpolación de grado cero para el punto inicial x_0: $P_0(x) \equiv f(x_0)$. Definimos $a_0 = f(x_0)$. Usando repetidamente (1.13) y (1.14) para $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos que

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}). \tag{1.16}$$

El coeficiente a_k recibe el nombre de **diferencia dividida de orden k**; normalmente se emplea la notación:

$$f[x_0] := a_0,$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] := a_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{1.17}$$

Buscamos ahora una expresión alternativa para estos coeficientes, tratando que sea más explícita que la expresión (1.15). Dado que el polinomio $P_n(x)$ obtenido en (1.16) es el único polinomio de interpolación de grado $\leq n$, tiene que ser el mismo que obtuvimos en forma de Lagrange en (1.5).

Igualando el coeficiente principal en las expresiones (1.16) y (1.5), deducimos que:

$$a_n = f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}. \tag{1.18}$$

De la representación (1.18) se sigue que las diferencias divididas son **funciones simétricas de sus argumentos**. Esto es, si usamos la notación

$$f_{i,j,k,...} \equiv f[x_i, x_j, x_k, ...],$$

entonces esta simetría se expresa por:

$$f_{0,1,...,n} = f_{j_0,j_1,...,j_n}, \tag{1.19}$$

siendo $(j_0, j_1, ..., j_n)$ una permutación arbitraria de los enteros $(0, 1, ..., n)$.

Lema 1.7.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \tag{1.20}$$

con $f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k.$

Demostración: Denotemos por P^*_{k-1} *el polinomio de interpolación de* f *de grado* $\leq k-1$ *relativo a los puntos* $x_1, x_2, \ldots, x_k$*; el coeficiente de* x^{k-1} *es* $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$.

Definimos el polinomio

$$Q_k(x) = ((x - x_0)P^*_{k-1}(x) - (x - x_k)P_{k-1}(x))/(x_k - x_0).$$

Q_k *tiene grado menor o igual que* k *y coincide con* f *en los puntos* $x_0, x_1, \ldots, x_k$*; por la unicidad del polinomio de interpolación,* $Q_k(x) \equiv P_k(x)$*. Igualando el coeficiente de* x^k *de* Q_k *con el de* P_k *se obtiene (1.20)* $\square$

Esta fórmula recursiva justifica el nombre de **diferencias divididas** y el uso de la tabla mostrada a continuación para obtener el polinomio de interpolación, pues cada diferencia dividida puede ser calculada explicitamente en función de $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$

Tabla 1. Diferencias Divididas.

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$	$\cdots$
x_0	f_0				
		$\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} \equiv f_{01}$			
x_1	f_1		$\frac{f_{12}-f_{01}}{x_2-x_0} \equiv f_{012}$		
		$\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} \equiv f_{12}$		$\frac{f_{123}-f_{012}}{x_3-x_0} \equiv f_{0123}$	
x_2	f_2		$\frac{f_{23}-f_{12}}{x_3-x_1} \equiv f_{123}$		$\cdots$
		$\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2} \equiv f_{23}$		$\frac{f_{234}-f_{123}}{x_4-x_1} \equiv f_{1234}$	
x_3	f_3		$\frac{f_{34}-f_{23}}{x_4-x_2} \equiv f_{234}$		
		$\frac{f_4-f_3}{x_4-x_3} \equiv f_{34}$		$\vdots$	
x_4	f_4		$\vdots$		
		$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

La primera columna está formada por los valores de la función f, la segunda por las diferencias divididas de primer orden, etc; pasamos de una columna a otra aplicando la fórmula (1.20). Así, el polinomio de interpolación se puede escribir como:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \qquad (1.21)$$

Esta expresión de $P_n(x)$ se conoce como **fórmula de interpolación de Newton**; resulta muy sencilla de obtener a partir de la tabla.

Ejemplo 1.8. Calcularemos el polinomio de interpolación para la función $\hat{K}(\hat{x})$ del Ejemplo 1.3 relativo a los puntos $2, 3, 5, 6$, en grados, empleando la Tabla 1. Obtenemos así la siguiente tabla de diferencias divididas:

$\hat{x}$	$\hat{K}(\hat{x})$	$\hat{K}[\hat{x},\hat{x}]$	$\hat{K}[\hat{x},\hat{x},\hat{x}]$	$\hat{K}[\hat{x},\hat{x},\hat{x},\hat{x}]$
2	1,5713			
		0,0006		
3	1,5719		$1{,}1\widehat{6} \cdot 10^{-4}$	
		0,00095		0
5	1,5738		$1{,}1\widehat{6} \cdot 10^{-4}$	
		0,0013		
6	1,5751			

La fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de Lagrange de $K(\hat{x})$ relativo a los puntos 2,3,5,6 viene dada por:

$$P_3(\hat{x}) = 1{,}5713 + 0{,}0006(\hat{x}-2) + 1{,}1\widehat{6} \cdot 10^{-4}(\hat{x}-2)(\hat{x}-3) + 0(\hat{x}-2)(\hat{x}-3)(\hat{x}-5).$$

$P_3(3{,}5) = 1{,}57228750$ que es el valor que habíamos obtenido en el Ejemplo 1.3.

Para realizar los cálculos hemos empleado el programa **NEWTON.m**, cuyo código se incluye en el anexo al final del documento.

Nótese que, como ya se ha mencionado, para obtener un polinomio de interpolación de orden superior añadiendo un nuevo punto, tan solo necesitamos sumar otro término a (1.21) pero esta vez se ve involucrada una diferencia dividida de orden superior. De (1.16) y (1.17) se deduce que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

y como $P_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$

$$f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1}) = f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n} (x_{n+1} - x_j).$$

Sea $x \neq x_0, \ldots, x_n$, reemplazando x_{n+1} por x se obtiene

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \tag{1.22}$$

Esta igualdad nos da una representación del error distinta de la vista en el Teorema 1.5.

Proposición 1.9. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.5, para todo* $x \in [a, b], x \neq x_i, i = 0, 1, \ldots, n$, *existe* $\xi = \xi(x)$ *en el intervalo (1.8) tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{1.23}$$

Demostración: Basta comparar las representaciones del error (1.9) y (1.22). □

1.2.1. Diferencias finitas: fórmulas de Newton progresiva y regresiva

Cuando los puntos x_i de interpolación no son equidistantes, utilizamos la fórmula de Newton; sin embargo, cuando los x_i son equidistantes podemos emplear fórmulas más simples y menos costosas.

Supongamos conocidos los valores de la función f en los puntos equidistantes x_i con paso $h > 0$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{1.24}$$

Definición 1.10. Definimos el **operador diferencia progresiva**, $\triangle$, por:

$$\triangle^0 f_i = f(x_i) = f_i,$$

$$\triangle f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

y para todo entero $k \geq 0$,

$$\triangle^{k+1} f_i = \triangle(\triangle^k f_i) = \triangle^k f_{i+1} - \triangle^k f_i$$

Lema 1.11. *Se verifica que:*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\triangle^k f_i}{k! h^k}, \quad \forall k \geq 0.$$

Demostración: Procederemos por inducción en k.

- *Para $k = 0$ es trivial. Para $k = 1$, debido a (1.24), tenemos que*

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\triangle f_i}{h}$$

- *Supongamos que el resultado se verifica para $k = n$ y veamos que se cumple para $k = n+1$. Usando (1.20), la hipótesis de inducción y (1.24) tenemos que*

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}, x_{i+n+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+n}]}{x_{i+n+1} - x_i} = \\ &= \frac{\frac{\triangle^n f_{i+1}}{n!h^n} - \frac{\triangle^n f_i}{n!h^n}}{(n+1)h} = \frac{\triangle^n f_{i+1} - \triangle^n f_i}{(n+1)!h^{n+1}} = \\ &= \frac{\triangle^{n+1} f_i}{(n+1)!h^{n+1}}, \end{aligned}$$

  de donde se tiene el resultado. $\square$

Aplicando este lema e introduciendo la variable $s = (x - x_0)/h$, podemos escribir

$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!}\triangle^k f_0, \quad (1.25)$$

Introducimos la notación: para $s \in \mathbb{R}$ y k entero,$k \geq 1$,

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!} \quad (1.26)$$

Teniendo en cuenta (1.25) y (1.26), la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de f relativo a los $n+1$ puntos equidistantes $x_0, \ldots, x_n$ se puede simplificar como sigue

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1}\triangle f_0 + \binom{s}{2}\triangle^2 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\triangle^n f_0 \quad (1.27)$$

A esta forma de escribir el polinomio de interpolación se la suele denominar **fórmula de Newton progresiva**.

De forma similar a lo que sucedía con las diferencias divididas, las diferencias progresivas pueden ser obtenidas mediante la Tabla 2. De este modo, una diferencia progresiva se obtiene restando dos diferencias de orden inferior.

Tabla 2. Diferencias finitas progresivas.

x	f_i	$\triangle f_i$	$\triangle^2 f_i$	$\triangle^3 f_i$	$\cdots$
x_0	f_0				
		$f_1 - f_0 = \triangle f_0$			
x_1	f_1		$\triangle^2 f_0$		
		$f_2 - f_1 = \triangle f_1$		$\triangle^3 f_0$	
x_2	f_2		$\triangle^2 f_1$		$\cdots$
		$f_3 - f_2 = \triangle f_2$		$\triangle^3 f_1$	
x_3	f_3		$\triangle^2 f_2$		
		$f_4 - f_3 = \triangle f_3$		$\vdots$	
x_4	f_4		$\vdots$		
		$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

Lema 1.12. *Suponemos que $f(x)$ tiene derivada $(n+1)$-ésima en el intervalo $[a,b]$. Sea $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de $f(x)$ con respecto a $n+1$ puntos equidistantes $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$ pertenecientes al intervalo $[a,b]$, siendo $h > 0$ el paso. Entonces, para todo $x = x_0 + sh$ perteneciente al intervalo $[a,b]$ existe un punto $\xi = \xi(x)$ en el intervalo abierto*

$$\text{mín}\{x_0, x_n, x\} < \xi < \text{máx}\{x_0, x_n, x\}$$

tal que

$$f(x) - P_n(x) = h^{n+1} \binom{s}{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Demostración: *El resultado se obtiene directamente del Teorema 1.5. Bajo estas condiciones se tiene la representación del error (1.9); usando la notación (1.26) de esta sección y que $s = (x - x_0)/h$ se tiene el resultado.* $\square$

Definición 1.13. Definimos el **operador diferencia regresiva**, ∇, por:

$$\nabla^0 f_i = f_i$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

y para todo entero $k \geq 0$

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla(\nabla^k f_i) = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}.$$

Lema 1.14. *Se verifica que:*

$$f[x_{i-k}, x_{i-k}, \ldots, x_i] = \frac{\nabla^k f_i}{k! h^k}, \quad \forall k \geq 0.$$

Demostración: *Análoga a la demostración del Lema 1.11.* □

Dado que

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \cdots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n) \ldots (x - x_1),$$

haciendo el cambio de variable $s = (x - x_n)/h$ y usando la notación (1.26), obtenemos la expresión del polinomio de interpolación $P_n(x)$

$$P_n(x) = f_n + \binom{s}{1} \nabla f_n + \binom{s+1}{2} \nabla^2 f_n + \cdots + \binom{s+n-1}{n} \nabla^n f_n, \tag{1.28}$$

que recibe el nombre de **fórmula de Newton regresiva**. Podemos calcularla fácilmente con el uso de la tabla de diferencias finitas regresivas (Tabla 3).

Tabla 3. Diferencias finitas regresivas.

x	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$				
		$\vdots$			
x_{n-4}	f_{n-4}		$\vdots$		
		∇f_{n-3}		$\vdots$	
x_{n-3}	f_{n-3}		$\nabla^2 f_{n-2}$		
		∇f_{n-2}		$\nabla^3 f_{n-1}$	
x_{n-2}	f_{n-2}		$\nabla^2 f_{n-1}$		$\cdots$
		∇f_{n-1}		$\nabla^3 f_n$	
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_n$		
		∇f_n			
x_n	f_n				

Lema 1.15. *Bajo las condiciones del Lema 1.12, para todo $x = x_0 + sh$ perteneciente al intervalo $[a, b]$ existe un punto $\xi = \xi(x)$ en el intervalo abierto:*

$$\text{mín}\{x_0, x_n, x\} < \xi < \text{máx}\{x_0, x_n, x\}$$

tal que:

$$f(x) - P_n(x) = h^{n+1} \binom{s+n}{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

<u>Demostración:</u> *Análoga a la demostración del Lema 1.12, empleando el cambio de variable $s = (x - x_n)/h$.* □

Corolario 1.16. *Para todo $i = 0, 1, \ldots, n$ y todo $k \geq 0$ se tiene:*

$$\nabla^k f_i = \triangle^k f_{i-k}$$

<u>Demostración:</u> *Por los lemas 1.11 y 1.14:*

$$\frac{\triangle^k f_{i-k}}{k!h^k} = f[x_{i-k}, \ldots, x_i] = \frac{\nabla^k f_i}{k!h^k}$$

de donde se obtiene el resultado. □

Veamos un ejemplo extraído de [1] que nos permite, mediante diferencias progresivas, calcular valores de la función de Bessel en puntos intermedios.

Ejemplo 1.17. Consideramos la tabla

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$J_0(x)$	0,2239	0,1666	0,1104	0,0555	0,0025	−0,0484

que muestra valores uniformemente espaciados de la función de Bessel de orden cero

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)dt;$$

nos interesa emplear diferencias progresivas para encontrar los valores $J_0(2{,}15), J_0(2{,}25)$ y $J_0(2{,}35)$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$. Para cada $x = 2{,}15, 2{,}25, 2{,}35$, tomamos los puntos consecutivos de la tabla $x_0, x_1, \ldots, x_m$ de manera que $x_0 < x < x_1$. Puesto que los puntos son equidistantes se puede representar el error usando el Lema 1.12 para cada x

$$J_0(x) - P_m(x) = h^{m+1}\binom{s}{m+1} J_0^{(m+1)}(\xi), x = x_0 + sh.$$

Está claro que $h = 0{,}1$ y $s = 1/2$. Para los valores citados de x podemos acotar el error

$$\begin{aligned} |J_0(x) - P_m(x)| &\leq |J_0^{(m+1)}(\xi)| \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2} \\ &\leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}h^{m+1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

donde

$$\max_{\eta\in[x_0,x_m]} |J_0^{(m+1)}(\eta)| \leq M_{m+1}.$$

Buscamos acotaciones para las derivadas de la función J_0:

$$J_0'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin t)\sin t dt$$

$$|J_0'(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{\pi}$$

$$J_0^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t) \sin^2 t dt$$

$$|J_0^{(2)}(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}$$

$$J_0^{(3)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin t) \sin^3 t dt$$

$$|J_0^{(3)}(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3 t dt = \frac{4}{3\pi}$$

Tomando $M_2 = \frac{1}{2}$ y $M_3 = \frac{4}{3\pi}$, tenemos

$$|J_0(x) - P_1(x)| \leq \frac{1}{4}(0{,}1)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{1600},$$

$$|J_0(x) - P_2(x)| \leq \frac{4}{18\pi}(0{,}1)^3 \frac{3}{8} = \frac{1}{12\pi} 10^{-3} < \frac{1}{2} 10^{-3}$$

Observamos que no es suficiente realizar una interpolación lineal y que una interpolación cuadrática produce un error inferior al buscado. Construimos la tabla de diferencias progresivas de manera que nos permita calcular las tres aproximaciones requeridas

x	J_0	$\triangle J_0$	$\triangle^2 J_0$
2,1	0,1666		
		$-0{,}0562$	
2,2	0,1104		0,0013
		$-0{,}0549$	
2,3	0,0555		0,0019
		$-0{,}0530$	
2,4	0,0025		0,0021
		$-0{,}0509$	
2,5	$-0{,}0484$		

Así se deduce

$$J_0(2{,}15) \simeq 0{,}1666 - 0{,}0562\binom{1/2}{1} + 0{,}0013\binom{1/2}{2}$$
$$= 0{,}1383, \tag{1.30}$$

$$J_0(2{,}25) \simeq 0{,}1104 - 0{,}0549\binom{1/2}{1} + 0{,}0019\binom{1/2}{2}$$
$$= 0{,}0827, \tag{1.31}$$

$$J_0(2{,}35) \simeq 0{,}0555 - 0{,}053\binom{1/2}{1} + 0{,}0021\binom{1/2}{2}$$
$$= 0{,}0287, \tag{1.32}$$

Capítulo 2

Interpolación de Hermite

La interpolación osculatoria o de Hermite es una generalización de la interpolación polinómica. Ahora no solo haremos coincidir f y P_n en los puntos de interpolación x_i del intervalo $[a, b]$, sino también los valores de sus derivadas hasta cierto orden en dichos puntos.

Para este capítulo seguiremos de nuevo [5] y [4], principalmente.

2.1. El polinomio de interpolación de Hermite

Comenzamos considerando a modo ilustrativo un caso particular. Supongamos que queremos encontrar un polinomio, que denotaremos H_{2n+1}, tal que

$$f(x_j) = H_{2n+1}(x_j), \quad f'(x_j) = H'_{2n+1}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

es decir, tal que los valores del polinomio y la función aproximada coincidan en los $n+1$ puntos $x_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n$ y que en esos mismos puntos coincidan también los valores de sus derivadas de primer orden.

Tenemos $2n+2$ condiciones y un polinomio de grado $2n+1$ tiene precisamente $2n+2$ coeficientes. De forma análoga a la obtención de la fórmula (1.2) para la interpolación de Lagrange, buscamos una representación de la forma:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\psi_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\Psi_{n,j}(x), \tag{2.2}$$

donde los polinomios $\psi_{n,j}(x)$ y $\Psi_{n,j}(x)$ deben tener grado menor o igual que $2n+1$ y satisfacer:

$$\psi_{n,j}(x_i) = \delta_{ij}, \quad \psi'_{n,j}(x_i) = 0, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\Psi_{n,j}(x_i) = 0, \quad \Psi'_{n,j}(x_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Estos polinomios vienen dados, en términos de los polinomios fundamentales de Lagrange, $\phi_{n,j}(x)$, como:

$$\psi_{n,j}(x) \equiv [1 - 2\phi'_{n,j}(x_j)(x - x_j)]\phi^2_{n,j}(x),$$

$$\Psi_{n,j}(x) \equiv (x - x_j)\phi^2_{n,j}(x). \tag{2.4}$$

Generalicemos este tipo de interpolación:

Teorema 2.1. *Dados $k+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ de un intervalo $[a, b]$ y $k+1$ enteros no negativos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, denotamos $n = k + \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Dada una función f definida en el intervalo $[a, b]$ que admite derivada de orden α_i en el punto x_i para todo $i = 0, \ldots, k$, existe un único polinomio P_n de grado menor o igual que n tal que:*

Para todo (i, l) tal que $0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq l \leq \alpha_i$, se tiene que:

$$P_n^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i), \tag{2.5}$$

donde $f^{(l)}(x_i)$ denota la derivada de orden l de f en el punto x_i.

Demostración: *Las ecuaciones (2.5) constituyen un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas (los coeficientes de P_n). Será suficiente demostrar que el sistema homogéneo asociado admite únicamente la solución nula, es decir que las relaciones*

$$P_n \in \mathbb{P}_n, \quad y \quad \forall(i, l) \quad con \quad 0 \leq i \leq k \quad y \quad 0 \leq l \leq \alpha_i, \quad P_n^{(l)}(x_i) = 0, \tag{2.6}$$

implican que $P_n \equiv 0$. En efecto, (2.6) implica que para todo $i = 0, 1, \ldots, k$, x_i es una raíz de multiplicidad $\alpha_i + 1$ de P_n; por tanto P_n es de la forma:

$$P_n(x) = q(x) \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{\alpha_i + 1},$$

donde q es un polinomio. Como $\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i + 1) = n + 1$, esto sólo es compatible con el hecho de que $P_n \in \mathbb{P}_n$ si $q \equiv 0$, por tanto $P_n \equiv 0$. $\square$

Definición 2.2. El polinomio P_n definido en el teorema anterior recibe el nombre de **polinomio de interpolación de Hermite** de la función f relativo a los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ y a los enteros $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Nótese que si tomamos $\alpha_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$ obtenemos la definición de polinomio de interpolación de Lagrange, mientras que si $\alpha_i = 1$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$ llegamos al caso particular explicado al principio de este capítulo.

Cuando $\alpha_i \geq 1$ para todo $i = 0, \ldots, k$, se habla de interpolación osculatoria. En este caso, en cada punto x_i el polinomio P_n coincide con f y la recta tangente a P_n coincide con la recta tangente a f.

Además, si $k = 0$ y $\alpha_0 = n$ obtenemos el polinomio de Taylor de grado n.

Supongamos dados los números reales b_{il} para todo par (i, l) tal que $0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq l \leq \alpha_i$; en virtud del Teorema 2.1 el problema

$$\begin{cases} \text{Encontrar} \quad P_n \in \mathbb{P}_n \quad \text{tal que} \\ \forall (i, l) \quad \text{con} \quad 0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq l \leq \alpha_i, \quad P_n^{(l)}(x_i) = b_{il}, \end{cases}$$

tiene solución única.

En particular, si para un par (i, l) tomamos $b_{il} = 1$ y $b_{jm} = 0$, $\forall (j, m) \neq (i, l)$, obtenemos los **polinomios de base o fundamentales**, p_{il}, para la interpolación de Hermite relativa a los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ y los enteros $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Sea

$$q_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)^{\alpha_j + 1},$$

los polinomios de base $p_{i,l}$ están dados por:

$$p_{i,\alpha_i}(x) = \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\alpha_i!} q_i(x),$$

y para $l = \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots, 1, 0$,

$$p_{i,l}(x) = \frac{(x - x_i)^l}{l!} q_i(x) - \sum_{j=l+1}^{\alpha_i} \binom{j}{l} q_i^{(j-l)}(x_i) p_{i,j}(x).$$

Sea $i = 0, \ldots, k$ y $l = 0, \ldots, \alpha_i$; tenemos que comprobar las condiciones:

$$\begin{aligned} &p_{i,l}^{(l)}(x_i) = 1, \\ &p_{i,l}^{(m)}(x_i) = 0, && \forall m = 0, \ldots, \alpha_i, \quad m \neq l \\ &p_{i,l}^{(m)}(x_j) = 0, && \forall j = 0, \ldots, k, \quad j \neq i \quad \text{y} \quad \forall m = 0, \ldots, \alpha_j. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Procederemos de forma recursiva en l, en orden decreciente: $l = \alpha_i, \alpha_i - 1, \ldots, 0$.

Comenzamos pues con $l = \alpha_i$.

Como $p_{i,\alpha_i}(x)$ contiene el factor $(x - x_j)^{\alpha_j + 1}$ para todo $j = 0, \ldots, k$, $j \neq i$, tenemos que

$$p_{i,\alpha_i}^{(m)}(x_j) = 0, \quad \forall j = 0, \ldots, k \quad \text{y} \quad \forall m = 0, \ldots, \alpha_j.$$

Dado que $p_{i,\alpha_i}(x)$ contiene el factor $(x-x_i)^{\alpha_i}$, tenemos que

$$p_{i,\alpha_i}^{(m)}(x_i) = 0, \quad \forall m = 0, \ldots, \alpha_i - 1.$$

Aplicando la regla de Leibniz, obtenemos

$$p_{i,\alpha_i}^{(\alpha_i)}(x) = \sum_{t=0}^{\alpha_i} \binom{\alpha_i}{t} \frac{\alpha_i(\alpha_i-1)\ldots(\alpha_i-y+1)}{\alpha_i!}(x-x_i)^{\alpha_i-t} q_i^{(\alpha_i-t)}(x).$$

Todos los sumandos se anulan en $x = x_i$, salvo el correspondiente a $t = \alpha_i$, por tanto

$$p_{i,\alpha_i}^{(\alpha_i)}(x_i) = \binom{\alpha_i}{\alpha_i} \frac{\alpha_i!}{\alpha_i!} q_i^{(0)}(x_i) = q_i(x_i) = 1.$$

Consideramos ahora $l = \alpha_1, \ldots, 0$ y suponemos ciertas las condiciones relativas a $p_{i,r}$, para $l+1 \leq r \leq \alpha_i$.

$p_{i,l}(x)$ contiene el factor $(x-x_j)^{\alpha_j+1}$ para todo $j = 0, \ldots, k$, $j \neq i$, por tanto,

$$p_{i,l}^{(m)}(x_j) = 0, \quad \forall j = 0, \ldots, k, \quad j \neq i.$$

Sea m entero, $o \leq m \leq l-1$,

$$p_{i,l}^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{(x-x_i)^l}{l!} q_i(x)\right] - \sum_{j=l+1}^{\alpha_i} \binom{j}{l} q_i^{(j-l)}(x_i) p_{i,j}^{(m)}(x)$$

El primer término del segundo miembro se anula en x_i; por otra parte, para todo j con $\alpha_i \geq j \geq l+1$, como $j > m$, $p_{i,j}^{(m)}(x_i) = 0$.

Luego $p_{i,l}^{(m)}(x_i) = 0$.

Sea ahora $m = l$,

$$p_{i,l}^{(l)}(x) = \sum_{t=0}^{l} \binom{l}{t} \frac{l(l-1)\ldots(l-t+1)}{l!}(x-x_i)^{l-t} q_i^{(l-t)}(x) - \sum_{j=l+1}^{\alpha_i} \binom{j}{l} q_i^{(j-l)}(x_i) p_{i,j}^{(l)}(x).$$

Todos los sumandos de la primera suma se anulan en x_i salvo el correspondiente a $t = l$; por otra parte $p_{i,j}^{(l)}(x_i) = 0$ ya que $j > l$.

Obtenemos, por tanto

$$p_{i,l}^{(l)}(x_i) = \binom{l}{l} \frac{l!}{l!} q_i^{(0)}(x_i) = 1.$$

Consideremos,por último, el caso en que $l+1 \leq m \leq \alpha_i$,

$$p_{i,l}^{(m)}(x) = \sum_{t=0}^{l} \binom{m}{t} \frac{l(l-1)\ldots(l-t+1)}{l!}(x-x_i)^{l-t} q_i^{(m-t)}(x) - \sum_{j=l+1}^{\alpha_i} \binom{j}{l} q_i^{(j-l)}(x_i) p_{i,j}^{(m)}(x).$$

En la primera suma, el único término que no se anula en x_i es el que corresponde a $t = l$ y su valor en dicho punto es

$$\binom{m}{l} q_i^{(m-l)}(x_i).$$

Por otra parte, los valores $p_{i,j}^{(m)}(x_i)$ son todos nulos salvo para $j = m$, ya que $l + 1 \leq m \leq \alpha_i$.

Por tanto, el valor de la segunda suma en x_i es

$$\binom{m}{l} q_i^{(m-l)}(x_i) p_{i,m}^{(m)}(x_i) = \binom{m}{l} q_i^{(m-l)}(x_i).$$

Concluimos pues que $p_{i,l}^{(m)}(x_i) = 0$. Con esto quedan comprobadas todas las condiciones (2.7).

El polinomio de interpolación de Hermite de f se obtiene a partir de los polinomios de base por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=0}^{\alpha_i} f^{(l)}(x_i) p_{il}(x). \tag{2.8}$$

2.2. Acotación del error para la interpolación de Hermite

Teorema 2.3. *Supongamos $f \in C^{n+1}([a, b])$. Para todo $x \in [a, b], x \neq x_0, \ldots, x_k$ existe $\xi = \xi(x)$ en el intervalo abierto:*

$$\text{mín}\{x_0, x_1, ..., x_k, x\} < \xi < \text{máx}\{x_0, x_1, ..., x_k, x\} \tag{2.9}$$

tal que

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_n(x) f^{(n+1)}(\xi), \tag{2.10}$$

donde

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{\alpha_i + 1}.$$

Demostración: Consideremos x fijo; definimos el polinomio de grado $n+1$ en la variable t

$$q_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

Para todo (i, l) con $0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq l \leq \alpha_i$, q_{n+1} verifica que $q_{n+1}^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$; además $q_{n+1}(x) = f(x)$. (q_{n+1} es el polinomio de interpolación de Hermite relativo a los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k, x$ y a los enteros $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0$.)

Consideremos la función $F(t) = f(t) - q_{n+1}(t)$, que tiene en x_i un cero de multiplicidad mayor o igual que $\alpha_i + 1$ y en el punto x un cero de multiplicidad mayor o igual que 1. Así, el número de ceros de la función F, contados con sus multiplicidades, es al menos $\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i + 1) + 1 = n + 2$. En virtud del Teorema de Rolle, deducimos que F' tiene al menos $n+1$ ceros, contados con sus multiplicidades. En un número finito de pasos se llega a que la función $F^{(n+1)}$ admite al menos un cero, ξ, en el intervalo (2.9). Por tanto:

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - q_{n+1}^{(n+1)}(\xi). \tag{2.11}$$

El polinomio $q_{n+1}(t)$ es de grado $n + 1$ y su coeficiente principal es

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)};$$

en consecuencia,

$$q_{n+1}^{(n+1)}(t) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)}(n + 1)!,$$

lo que, junto con (2.11) implica (2.10). □

Observación 2.4. Si $x = x_i$, $E(x) = 0$ y (2.10) se verifica trivialmente.

En conclusión, si podemos acotar $|f^{(n+1)}(x)|$ en $[a, b]$, el teorema anterior nos proporciona una acotación del error.

Ejemplo 2.5. Sea $f(x) = \tan(\pi x)$, supongamos que queremos calcular $f(1/8)$ sabiendo que $f(0) = 0$, $f(1/4) = 1$, $f'(0) = \pi$ y $f'(1/4) = 2\pi$.

Tenemos que $a = x_0 = 0$, $b = x_1 = 1/4$ y $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, con lo cual $n = 3$. Empleando las fórmulas (2.2) y (2.4) podemos calculamos el polinomio de interpolación de Hermite de grado menor o igual que 3.

Empleando el programa **HERMITE1.m**, cuyo código se incluye en el anexo, se obtiene

```
pol = 16*X^2 - 128*X^2*(X - 1/4) + 32*pi*X^2*(X - 1/4) + X*pi*(4*X - 1)^2.
```

Haciendo $x = 1/8$ obtenemos el valor aproximado de f en $1/8$:

$$P_3(1/8) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{32} \simeq 0,4018\ldots$$

Aplicando el Teorema 2.3 podemos acotar el error

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x - 1/4)^2$$

para algún $\xi \in [0, 1/4]$.

$$f^{(4)}(x) = 8\pi^4(2\tan x\pi + 5\tan^3 x\pi + 3\tan^5 x\pi)$$

En el intervalo $[0, 1/4]$, $0 \leq \tan x\pi \leq 1$, por lo que, $0 \leq f^{(4)}(x) \leq 80\pi^4$ en dicho intervalo. Así,

$$|f(1/8) - P_3(1/8)| \leq \frac{5\pi^4}{3 \cdot 2^{11}} \simeq 0{,}0792\ldots$$

Definición 2.6. Sea $f \in C([a,b])$ definimos la norma $||.||_{C([a,b])}$ por

$$||f||_{C([a,b])} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Veamos a continuación algunos ejemplos que ilustran el Teorema 2.3.

Ejemplo 2.7. Sea $f \in C^4([a,b])$, vamos a acotar el error para el polinomio de interpolación de Hermite P_3, es decir, siendo $k = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ y $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, con lo que $n = 3$.

P_3 interpola a $f(x)$ y su primera derivada. Aplicamos el Teorema 2.3 para estimar $f(x) - P_3(x)$:

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2,$$

con $\xi \in (a,b)$.

Como $|(x-a)(x-b)| \leq (b-a)^2/4$, se tiene

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{||f^{(4)}||_{C([a,b])}}{4!2^4}(b-a)^4.$$

Ejemplo 2.8. Sea ahora $f \in C^6([a,b])$, acotamos el error para el polinomio de interpolación de Hermite P_5, siendo $k = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ y $\alpha_0 = \alpha_1 = 2$, con lo que $n = 5$.

P_5 interpola a $f(x)$ y las derivadas primera y segunda. Para estimar $f(x) - P_5(x)$ aplicamos el Teorema 2.3 y se tiene

$$f(x) - P_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-a)^3(x-b)^3,$$

con $\xi \in (a,b)$.

Como $|(x-a)(x-b)| \leq (b-a)^2/4$ se deduce que

$$|f(x) - P_5(x)| \leq \frac{||f^{(6)}||_{C([a,b])}}{6!2^6}(b-a)^6.$$

Podemos obtener también una expresión para acotar $f^{(r)} - P_n^{(r)}$, como se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 2.9. *Supongamos $f \in C^{n+1}([a,b])$. Sea P_n el polinomio de interpolación de Hermite de f respecto a los $k+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en el intervalo $[a,b]$ y a los enteros $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, siendo $n = k + \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Sea $1 \le r \le n$.Entonces*

$$||f^{(r)} - P_n^{(r)}||_{C[a,b]} \le \frac{||f^{(n+1)}||_{C([a,b])}}{(n+1-r)!}(b-a)^{n+1-r} \tag{2.12}$$

Demostración: *Consideremos primero el caso $k = 0$, con lo que $x_k = x_0$ y $n = \alpha_0$. El polinomio de interpolación en este caso es el polinomio de Taylor de grado n de f entorno al punto x_0*

$$P_n(x) = (T_n f)_{x_0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Así, puesto que $P_n^{(r)}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado $n-r$ de $f^{(r)}$ en torno a x_0, por la representación del error del polinomio de Taylor se tiene

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| &= |f^{(r)}(x) - (T_{n-r}f^{(r)})_{x_0}(x)| \le \\ &\le \frac{1}{(n-r+1)!} \max_{\eta \in I[x_0,x]} |f^{(n+1)}(\eta)||x - x_0|^{n-r+1}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

con $x, x_0 \in [a,b]$, $I[a,b] = [\min(x_0,x), \max(x_0,x)]$. Esta desigualdad implica (2.12).

Consideremos ahora el caso $k \ge 1$. $f(x) - P(x)$ tiene al menos $n+1$ ceros (contados con sus multiplicidades) en el intervalo $J := [\min(x_0, \ldots, x_k), \max(x_0, \ldots, x_k)]$. Aplicando reiteradamente el Teorema de Rolle resulta que $f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)$ tiene al menos $n+1-r$ ceros (contados con sus multiplicidades) en el intervalo J. Nótese que $n+1-r \ge 1$ ya que $r \le n$. Por tanto, podemos encontrar en el intervalo J l ceros distintos de $f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)$, donde $1 \le l \le n+1-r$, que denotamos $\xi_1, \ldots, \xi_l$, de manera que sus multiplicidades respectivas, $\hat\beta_1, \ldots, \hat\beta_l$, cumplen $\hat\beta_1 + \hat\beta_2 + \cdots + \hat\beta_l \ge n+1-r$. Sean $\beta_1, \ldots, \beta_l$ enteros tales que $1 \le \beta_j \le \hat\beta_j$ para todo $j = 1, \ldots, l$ y $\beta_1 + \cdots + \beta_l = n+1-r$.

Definimos la función auxiliar:

$$E(t) = f^{(r)}(t) - P_n^{(r)}(t) - \frac{f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)}{\prod_{j=1}^{l}(x-\xi_j)^{\beta_j}} \prod_{j=1}^{l}(t-\xi_j)^{\beta_j}.$$

Dado que $f \in C^{n+1}([a,b])$, $E \in C^{n+1-r}([a,b])$.

Para cada $j = 1, \ldots, l$, ξ_j es un cero de E con multiplicidad mayor o igual que β_j y como $E(x) = 0$, E tiene al menos $\beta_1 + \cdots + \beta_l + 1 = n-r+2$ ceros, contados con sus multiplicidades, en el intervalo $J_x := [\min(x_0, \ldots, x_k, x), \max(x_0, \ldots, x_k, x)]$. Por el Teorema de Rolle, E' tiene al menos $n-r+1$ ceros en el intervalo J_x contados con sus multiplicidades. Aplicando el Teorema de Rolle repetidamente llegamos a que existe $\xi \in J_x$ tal que $E^{(n-r+1)}(\xi) = 0$.

Dado que

$$E^{(n-r+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1-r)! \frac{f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)}{\prod_{j=1}^{l}(x-\xi_j)^{\beta_j}},$$

se tiene

$$f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1-r)!} \prod_{j=1}^{l} (x-\xi_j)^{\beta_j} \tag{2.14}$$

Nótese que si $x = \xi_j$ para algún $j = 1, \ldots, l$, esta ecuación también se cumple.

Finalmente, (2.12) se deduce de (2.14). $\square$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.10. Bajo las condiciones del Ejemplo 2.7, obtenemos las siguientes acotaciones:

- $||f' - P'||_{C([a,b])} \leq \frac{||f^{(4)}||_{C([a,b])}}{3!}(b-a)^3$.
- $||f'' - P''||_{C([a,b])} \leq \frac{||f^{(4)}||_{C([a,b])}}{2}(b-a)^2$.
- $||f^{(3)} - P^{(3)}||_{C([a,b])} \leq ||f^{(4)}||_{C([a,b])}(b-a)$.

Ejemplo 2.11. Bajo las condiciones del Ejemplo 2.8 podemos obtener las siguientes cotas:

- $||f' - P'||_{C([a,b])} \leq \frac{||f^{(6)}||_{C([a,b])}}{5!}(b-a)^5$.
- $||f'' - P''||_{C([a,b])} \leq \frac{||f^{(6)}||_{C([a,b])}}{4!}(b-a)^4$.
- $||f^{(3)} - P^{(3)}||_{C([a,b])} \leq \frac{||f^{(6)}||_{C([a,b])}}{3!}(b-a)^3$.
- $||f^{(4)} - P^{(4)}||_{C([a,b])} \leq \frac{||f^{(6)}||_{C([a,b])}}{2}(b-a)^2$.
- $||f^{(5)} - P^{(5)}||_{C([a,b])} \leq ||f^{(6)}||_{C([a,b])}(b-a)$.

Ejemplo 2.12. Sea $f \in C^{2m}([a,b])$ y P_{2m-1} el polinomio de interpolación, con $k = 1$, $x_0 = a, x_1 = b$ y $\alpha_0 = \alpha_1 = m-1$

P_{2m-1} interpola a f y a sus derivadas hasta el orden $m-1$ en a y b. Aplicando el Teorema 2.9,

$$||f^{(r)} - P_{2m-1}^{(r)}||_{C[a,b]} \leq \frac{||f^{(2m)}||_{C([a,b])}}{(2m-r)!}(b-a)^{2m-r}, \quad 0 \leq r \leq 2m-1.$$

Observación 2.13. Los ejemplos 2.10 y 2.11 son casos particulares del Ejemplo 2.12.

En el capítulo 3 de [6] se obtienen unas cotas similares a las dadas en los ejemplos 2.11 y 2.12.

Capítulo 3

Diferencias divididas con argumentos repetidos

En este último capítulo nos centraremos en extender la definición de las diferencias divididas al caso de argumentos repetidos. Veremos también que esta nueva expresión de las diferencias divididas nos permitirá construir el polinomio de interpolación de Hermite mediante la elaboración de tablas como habíamos hecho con la fórmula de interpolación de Newton.

Finalmente, estudiaremos el límite del polinomio de interpolación de Lagrange cuando los puntos de interpolación tienden a unos nodos límite, pudiendo coincidir algunos de estos.

Seguiremos principalmente la sección 2.7 de [3].

3.1. Diferencias divididas con argumentos repetidos

Anteriormente definíamos $f[x_0, \ldots, x_k]$ solamente cuando todos los $k+1$ puntos $x_0, \ldots, x_k$ son distintos. Si tomamos $k = 1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

que sólo tiene sentido si $x_1 \neq x_0$. Si $f(x)$ es continuamente diferenciable

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

con lo que parece coherente definir la diferencia dividida

$$f[x_0, x_1] = f'(x_0)$$

Nótese que el polinomio de interpolación de Hermite de grado 1 relativo al punto x_0 es

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

y $f'(x_0)$ es precisamente su coeficiente principal.

A diferencia de los capítulos anteriores vamos a considerar la **secuencia finita** $x_0, \ldots, x_n$ de números reales en la que puede haber puntos repetidos. Tras efectuar, si es preciso, una reordenación de la secuencia, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que si un punto está repetido, todas sus apariciones son consecutivas:

$$\underbrace{x_0, \ldots, x_{\alpha_0}}_{\alpha_0+1}, \underbrace{x_{\alpha_0+1}, \ldots, x_{\alpha_0+\alpha_1+1}}_{\alpha_1+1}, \ldots, \underbrace{x_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}+k}, \ldots, x_{\alpha_0+\cdots+\alpha_k+k}}_{\alpha_k+1}. \tag{3.1}$$

Simplificamos la notación como sigue

$$\left.\begin{array}{c} x_0 = x_1 = \cdots = x_{\alpha_0} = y_0 \\ x_{\alpha_0+1} = \cdots = x_{\alpha_0+\alpha_1+1} = y_1 \\ \vdots \\ x_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}+k} = \cdots = x_{\alpha_0+\cdots+\alpha_k+k} = y_k \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

De esta manera, la secuencia finita (3.1) se reescribe

$$\underbrace{y_0, \ldots, y_0}_{\alpha_0+1}, \underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{\alpha_1+1}, \ldots, \underbrace{y_k, \ldots, y_k}_{\alpha_k+1}. \tag{3.3}$$

Nótese que, recíprocamente dados $k+1$ puntos distintos $y_0, \ldots, y_k$ y $k+1$ enteros $\alpha_j \geq 0$, $j = 0, \ldots, k$, podemos construir la secuencia finita $x_0, \ldots, x_n$, donde $n = \alpha_0 + \cdots + \alpha_k + k$ y cada x_j está dado por (3.2).

Definición 3.1. Sea $x_0, \ldots, x_n$ una secuencia finita de números reales en la que puede haber puntos repetidos. Sean f y g dos funciones[1] definidas en un abierto que contiene a todos los puntos $x_0, \ldots x_n$. Decimos que f y g **coinciden en la secuencia** $x_0, \ldots, x_n$ si

$$f^{(l)}(z) = g^{(l)}(z) \quad \text{para} \quad l = 0, \ldots, m-1, \tag{3.4}$$

para cada punto z que aparece m veces en la secuencia $x_0, \ldots, x_n$.

Observación 3.2. Considerando la secuencia $x_0, \ldots, x_n$ en la forma (3.3) y teniendo en cuenta (3.2), las condiciones (3.4) se reescriben

$$f^{(l)}(y_j) = g^{(l)}(y_j), \quad l = 0, \ldots, \alpha_j, \quad j = 0, \ldots, k. \tag{3.5}$$

[1] Implícitamente suponemos que f y g admiten en cada punto de la secuencia las derivadas que aparecen en (3.4)

Observación 3.3. Sea una secuencia finita $x_0, \dots, x_n$. Suponemos sin pérdida de generalidad, que es de la forma (3.1) o, de forma equivalente, (3.3), y sea f una función que admite derivada de orden α_j en el punto y_j para todo $j = 0, \dots, k$. Recordemos que el polinomio de interpolación de Hermite, $P_n(x)$, es el único polinomio de grado menor o igual que $n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j + k$ que satisface que para todo par (j, l) tal que $0 \leq j \leq n$, $0 \leq l \leq \alpha_j$,

$$P_n^{(l)}(y_j) = f^{(l)}(y_j). \tag{3.6}$$

Teniendo en cuenta la Definición 3.1, el polinomio de Hermite P_n es el único polinomio de grado menor o igual que n que coincide con f en la secuencia finita $x_0, \dots, x_n$.

En lo que sigue, usaremos esta terminología, empleada en [3] y [2], cuando resulte conveniente.

Definición 3.4. Bajo las condiciones de regularidad exigidas a f en la Observación 3.3, se define la diferencia dividida $f[x_0, \dots, x_n]$ como el coeficiente principal de $P_n(x)$.

Observación 3.5. f es función simétrica de sus argumentos, es decir, $f[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, siendo $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ una permutación arbitraria de $(0, 1, \dots, n)$.

Podemos obtener ahora el polinomio de interpolación de Hermite de manera recursiva, como ya hicimos en el capítulo anterior. Sea $P_m \in \mathbb{P}_m$ el polinomio que coincide con f en la secuencia $x_0, \dots, x_m$; tenemos que

$$P_m(x) = P_{m-1}(x) + a_m(x - x_0) \dots (x - x_{m-1})$$

donde a_m es el coeficiente principal de P_m, es decir, $a_m = f[x_0, \dots, x_m]$. Llegamos entonces a la siguiente fórmula de tipo Newton para el polinomio de interpolación de Hermite

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_1) \tag{3.7}$$

Esta fórmula es idéntica a la vista en (1.21), pero ahora es válida para cualquier elección de los puntos $x_0, \dots, x_n$, siempre y cuando $f(x)$ tenga la regularidad exigida en la observación 3.3[2].

Hemos visto en el capítulo 2 que si f admite derivada α_j-ésima en y_j para $j = 0, \dots, k$, existe un único polinomio P_n que satisface (3.6). El siguiente teorema nos proporciona una demostración alternativa de la existencia de dicho polinomio, basada en un proceso constructivo.

Para simplificar, exigiremos a f más regularidad que la exigida en la observación 3.3.

[2]La fórmula (3.7) es válida incluso en el caso en que la secuencia $x_0, x_1, \dots, x_n$ no satisfaga la hipótesis de las repeticiones consecutivas

Teorema 3.6. *Supongamos que* $f \in C^m([a,b])$, *donde* $a = \text{mín}(x_0, \ldots, x_n)(= \text{mín}(y_0, \ldots, y_k))$ *,* $b = \text{máx}(x_0, \ldots, x_n)(= \text{máx}(y_0, \ldots, y_k))$ *y* $m = \text{máx}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$. *Entonces existe un único polinomio de grado menor o igual que* n, $P_n(x)$, *que coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_0, \ldots, x_n$.

<u>Demostración:</u> La unicidad es consecuencia del Teorema 2.1. Probaremos la existencia de forma constructiva.

Supondremos que cuando un punto de la secuencia se repite, todas sus apariciones son consecutivas.

Realizaremos la demostración por inducción en n *(el número de puntos de la secuencia).*

Para $n = 0$, *trivialmente* $P_0(x) = f(x_0)$. *Supongamos que la hipótesis es cierta para* $n = l - 1$ *y consideremos* $n = l$. *Tenemos dos casos:*

- *Caso* $x_0 = x_l$. *Entonces* $x_0 = \cdots = x_l$ *y debemos tener* $m \geq l$. *Nótese que el polinomio de Taylor de* $f(x)$ *en torno al punto* $c = x_0$ *es el polinomio buscado. Su coeficiente principal es el número* $f^{(l)}(x_0)/l!$, *por tanto*

$$f[x_0, \ldots, x_l] = f^{(l)}(x_0)/l!, \quad (\textit{en el caso} \quad x_0 = x_1 = \cdots = x_l). \tag{3.8}$$

- *Caso* $x_0 \neq x_l$. *Por hipótesis de inducción, podemos encontrar un polinomio,* $P_{l-1}(x)$, *de grado menor o igual que* $l - 1$ *que coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_0, \ldots, x_{l-1}$ *y un polinomio,* $q_{l-1}(x)$, *de grado menor o igual que* $l - 1$ *que coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_1, \ldots, x_l$. *El polinomio*

$$P_l(x) = \frac{x - x_0}{x_l - x_0} q_{l-1}(x) + \frac{x_l - x}{x_l - x_0} P_{l-1}(x) \tag{3.9}$$

es de grado menor o igual que l. *Veamos que coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_0, \ldots, x_k$. *Aplicando la fórmula de Leibniz, obtenemos que*

$$P_l^{(j)}(x) = \frac{x - x_0}{x_l - x_0} q_{l-1}^{(j)}(x) + \frac{x_l - x}{x_l - x_0} P_{l-1}^{(j)}(x) + j \frac{q_{l-1}^{(j-1)}(x) - P_{l-1}^{(j-1)}(x)}{x_l - x_0}. \tag{3.10}$$

Supongamos que $z = x_i = \cdots = x_{i+r}$.

Si $z = x_0$, $r \leq l - 1$ *ya que* $x_0 = \cdots = x_r \neq x_l$. $P_{l-1}(x)$ *coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_0, \ldots, x_{l-1}$ *y, en particular, en la secuencia* $x_0, \ldots, x_r$, *y por tanto*

$$P_{l-1}^{(j)}(z) = f^{(j)}(z), \quad j = 0, \ldots, r. \tag{3.11}$$

$q_{l-1}(x)$ *coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_1, \ldots, x_l$, *y en particular, en la secuencia* $x_1, \ldots, x_r$, *y por tanto*

$$q_{l-1}^{(j)}(z) = f^{(j)}(z), \quad j = 0, \ldots, r - 1. \tag{3.12}$$

Tomando $x = z(= x_0)$ *en (3.10) y usando (3.11) y (3.12), obtenemos que*

$$P_l^{(j)}(z) = 0\dot{q}_{l-1}^{(j)}(z) + f^{(j)}(z) + j\frac{f^{(j-1)}(z) - f^{(j-1)}(z)}{x_l - x_0} = f^{(j)}(z),$$

para $j = 0, \ldots, r$.

Si $z = x_l$, $x_{l-r} = \cdots = x_l \neq x_0$, *luego* $i = l - r \geq 1$. $P_{l-1}(x)$ *coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_0, \ldots, x_{l-1}$ *y, en particular, en la secuencia* $x_{l-r}, \ldots, x_{l-1}$, *por tanto,*

$$P_{l-1}^{(j)}(z) = f^{(j)}(z), \quad j = 0, \ldots, r-1 \tag{3.13}$$

$q_{l-1}(x)$ *coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_1, \ldots, x_l$, *luego coincide con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_{l-r}, \ldots, x_l$. *Así*

$$q_{l-1}^{(j)}(z) = f^{(j)}(z), \quad j = 0, \ldots, r. \tag{3.14}$$

Tomando $x = z(= x_l)$ *en (3.10) y usando (3.13) y (3.14) se deduce ahora que* $P_l^{(j)}(z) = f^{(j)}(z)$, *para* $j = 0, \ldots, r$.

Si $z \neq x_0, x_l$, $P_{l-1}^{(j)}(x)$ *y* $q_{l-1}^{(j)}(x)$ *coinciden con* $f(x)$ *en la secuencia* $x_i, \ldots, x_{i+r}$, *pues está contenida en la secuencia* $x_0, \ldots, x_{l-1}$ *y en la secuencia* $x_1, \ldots, x_l$. *Por lo tanto,*

$$q_{l-1}^{(j)}(z) = f^{(j)}(z) = P_{l-1}^{(j)}(z), \quad \textit{para} \quad j = 0, \ldots, r, \tag{3.15}$$

y por (3.10)

$$P_l^{(j)}(z) = \frac{z - x_0}{x_l - x_0} f^{(j)}(z) + \frac{x_l - x}{x_l - x_0} f^{(j)}(z) + j\frac{f^{(j-1)}(z) - f^{(j-1)}(z)}{x_l - x_0} = f^{(j)}(z),$$

para $j = 0, \ldots, r$.

Esto prueba el teorema para $n = l$. □

Comparando los coeficientes principales a ambos lados en (3.9) volvemos a obtener la fórmula (1.20), es decir

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad \text{si} \quad x_0 \neq x_k. \tag{3.16}$$

Observación 3.7. La fórmula (3.16) es válida incluso en el caso de que la secuencia $x_0, \ldots, x_k$ no cumpla la hipótesis de las repeticiones consecutivas.

El siguiente teorema muestra que $f[x_0, \ldots, x_k]$ es una función continua de sus argumentos.

Teorema 3.8. *Supongamos que $f \in C^n([a,b])$ y sean $z_0, \ldots, z_n$ una secuencia finita de puntos contenidos en el intervalo $[a,b]$. Entonces:*

1. *Existe $\xi \in [\text{mín}_{i=0,\ldots,n} z_i, \text{máx}_{i=0,\ldots,n} z_i]$ tal que*
$$f[z_0, \ldots, z_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

2. *Si, para cada entero $r \geq 1$, $x_0^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}$ es una secuencia finita de puntos en el intervalo $[a,b]$, y se cumple que*
$$\lim_{r\to\infty} x_i^{(r)} = z_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$
Entonces
$$\lim_{r\to\infty} f[x_0^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}] = f[z_0, \ldots, z_n].$$

<u>*Demostración:*</u> *Haremos la demostración por inducción en n. Para $n = 0$ las dos afirmaciones son trivialmente ciertas. Supongamos que son ciertas para $n = l-1$ y consideremos $n = l$.*

Probamos primero la afirmación 2 en el caso de que no todos los puntos $z_0, \ldots, z_n$ coinciden. Suponemos, sin pérdida de generalidad que $z_0 \leq \cdots \leq z_n$; tenemos que $z_0 < z_n$ con lo que $x_0^{(r)} < x_n^{(r)}$ para r grande y, por tanto, por (3.16),

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} f[x_0^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}] &= \lim_{r\to\infty} \frac{f[x_1^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}] - f[x_0^{(r)}, \ldots, x_{n-1}^{(r)}]}{x_n^{(r)} - x_0^{(r)}} \\
&= \frac{\lim_{r\to\infty} f[x_1^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}] - \lim_{r\to\infty} f[x_0^{(r)}, \ldots, x_{n-1}^{(r)}]}{z_n - z_0} \\
&= \frac{f[z_1, \ldots, z_n] - f[z_0, \ldots, z_{n-1}]}{z_n - z_0},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida a la hipótesis de inducción. En virtud de (3.16), la expresión resultante es precisamente $f[z_0, \ldots, z_n]$, como queríamos probar.

Probamos ahora la afirmación 1. Si $z_0 = z_1 = \cdots = z_n$, en virtud de (3.8) tenemos que
$$f[z_0, \ldots, z_n] = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$
ya que $\xi = z_0$.

En caso contrario, podemos suponer que $z_0 \leq \cdots \leq z_n$ y que $z_0 < z_n$. Entonces, para todo r, podemos encontrar $x_0^{(r)} < \ldots < x_n^{(r)}$ tales que
$\lim_{r\to\infty} x_i^{(r)} = y_i$, *$i = 0, \ldots, n$. Aplicando la Proposición 1.9 existe $\xi^{(r)} \in [x_0^{(r)}, x_n^{(r)}]$ tal que*
$$f[x_0^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}] = f^{(n)}(\xi^{(r)})/n! \quad \textit{para} \quad r = 1, 2, \ldots$$

Por la afirmación 2 de este teorema, que acabamos de probar para este caso

$$f[z_0,\ldots,z_n] = \lim_{r\to\infty} f[x_0^{(r)},\ldots,x_n^{(r)}] = \lim_{r\to\infty} f^{(n)}(\xi^{(r)})/n! = f^{(n)}(\xi)/n!,$$

para algún $\xi \in [\text{lím}_{r\to\text{ínf}}\, x_0^{(r)}, \text{lím}_{r\to\text{ínf}}\, x_n^{(r)}] = [z_0, z_n]$, *por la continuidad de* $f^{(n)}(x)$, *lo que prueba la afirmación* 1.

Nos queda por probar la afirmación 2 *en el caso en que* $z_0 = z_1 = \cdots = z_n$. *En virtud de la afirmación* 1, *para todo entero* $r \geq 1$, *existe* $\xi^{(r)} \in [\text{mín}_i\, x_i^{(r)}, \text{máx}_i\, x_i^{(r)}]$ *tal que*

$$f[x_0^{(r)},\ldots,x_n^{(r)}] = \frac{f^{(n)}(\xi^{(r)})}{n!}.$$

Puesto que $z_0 = \cdots = z_n$ *y* $\text{lím}_{r\to\infty}\, x_i^{(r)} = z_i$, *tenemos que* $lim_{r\to\infty}\xi^{(r)} = z_0$ *y entonces*

$$\lim_{r\to\infty} f[x_0^{(r)},\ldots,x_n^{(r)}] = \frac{\text{lím}_{r\to\infty} f^{(n)}(\xi^{(r)})}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = f[z_0,\ldots,z_n]. \quad \square$$

Corolario 3.9. *Sea* $f \in C^n([a,b])$, *donde* $n \geq 1$ *es un entero. Para cada entero* $r \geq 1$, *sea* $x_0^{(r)}, ..., x_n^{(r)}$ *una secuencia finita de puntos distintos pertenecientes al intervalo* $[a,b]$ *y sea* $P_{r,n}$ *el polinomio de interpolación de Lagrange de* f *relativo a los* $n+1$ *puntos* $x_0^{(r)}, ..., x_n^{(r)}$. *Supongamos que*

$$\lim_{r\to\infty} x_i^{(r)} = z_i \quad \forall i = 0,\ldots,n$$

y sea P_n *el único polinomio de grado menor o igual que* n *que coincide con* f *en la secuencia* $z_0,\ldots,z_n$. *Se cumple que* $P_{r,n}$ *converge uniformemente a* P_n *en* $[a,b]$ *(cuando* $r\to\infty$*).*

Demostración: *resulta de la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de Lagrange* $P_{r,n}$, *la segunda afirmación del Teorema 3.6 y la fórmula de Newton para* P_n *(ecuación (3.7)).* $\square$

Este corolario nos lleva a interpretar el polinomio de interpolación de Hermite como un caso límite del polinomio de interpolación de Lagrange cuando dos o más puntos colapsan en el mismo punto.

Por otra parte, podemos extender la construcción de la tabla de las diferencias divididas para la interpolación de Hermite. Basta observar que en el Teorema 3.6 llegamos a las expresiones de las diferencias divididas (3.8) y (3.16).

Por tanto, podemos calcular la diferencia dividida de orden l mediante la expresión

$$f[x_0,\ldots,x_l] = \begin{cases} \frac{f[x_1,\ldots,x_l]-f[x_0,\ldots,x_{l-1}]}{x_l-x_0} & x_0 \neq x_l \\ \\ \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!} & x_0 = x_l \end{cases} \tag{3.17}$$

Nótese que para la construcción de la tabla de las diferencias divididas para el polinomio de interpolación de Hermite es necesario que la secuencia finita $x_0,\ldots x_n$ verifique la hipótesis de las repeticiones consecutivas. Esto es debido a que se usa la fórmula (3,8), obtenida en la demostración del Teorema 3.6, en la cual que usó dicha hipótesis.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.10. Vamos a construir la tabla de las diferencias divididas para calcular el polinomio de interpolación de $f(x) = \sinh x$ dados los valores:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f(1) = 1{,}1752, \quad f'(1) = 1{,}5431$$

Obviamente, el polinomio de interpolación será de grado menor o igual que 3 y usando (3.17) obtenemos la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$
0	0			
		1		
0	0		0,1752	
		1,1752		0,1927
1	1,1752		0,3679	
		1,5431		
1	1,1752			

$$\hat{P}_3(x) = 0 + 1(x-0) + (0{,}1752)(x-0)^2 + (0{,}1927)(x-0)^2(x-1)$$

Si calculamos el valor aproximado de la función en 0,5 se tiene que $P_3(0{,}5) = 0{,}5197125$ mientras que $f(0{,}5) = 0{,}5211$. Puesto que los puntos de interpolación están bastante alejados entre si el error es considerable.

El siguiente ejemplo está propuesto como ejercicio en [5].

Ejemplo 3.11. Consideramos los valores:

$$\sin(1{,}6) = 0{,}9995736030 \quad \cos(1{,}6) = -0{,}9291995223$$
$$\sin(1{,}7) = 0{,}9916648105 \quad \cos(1{,}7) = -0{,}1288444943$$

Queremos aproximar el valor de $sin(1{,}65)$. Tenemos que $f(x) = sin(x)$, $x_0 = a = 1{,}6$ y $x_1 = b = 1{,}7$, construyamos primero la tabla de las diferencias divididas para estos datos:

x	$f(x)$	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$
1,6	0,9995736030			
		−0,0291995223		
1,6	0,9995736030		−0,498884027	
		−0,079087925		0,01318334
1,7	0,9916648105		−0,497565693	
		−0,1288444943		
1,7	0,9916648105			

Se obtiene el polinomio de interpolación de Hermite:

```
P_3(X) =

(3799839047132805*X^3)/288230376151711744 - (324825484178482993*X^2)/576460752303423488 +

(241060910753806775 7*X)/1441151880758558720 - 259609249427398889/9007199254740992 00
```

Para los cálculos hemos empleado el programa **HERMITE2.m**, cuyo código se adjunta en el apéndice.

Al evaluar este polinomio en el punto 1,65 se obtiene que $P_3(1{,}65) = 0{,}996864768900000$ mientras que el valor real de la función es $f(1{,}65) = 0{,}996865028453919$. El error es por tanto

$$|P_3(1{,}65) - f(1{,}65)| = 2{,}59554 \cdot 10^{-7} \tag{3.18}$$

Acotemos el error cometido al aproximar $f(x)$ por $P_3(x)$ en el intervalo $[1{,}6, 1{,}7]$, para ello usaremos el Teorema 2.9.

$f^{(4)}(x) = sin(x)$ es decreciente y positiva en el intervalo $[1{,}6, 1{,}7]$, por tanto,

$$||f^{(4)}||_{C([a,b])} = f^{(4)}(1{,}6) = sin(1{,}6) = 0{,}9995736030,$$

y entonces

$$|P_3(x) - f(x)| \leq 2{,}60306 \cdot 10^{-7}. \tag{3.19}$$

Vemos que el error calculado en (3.18) está por debajo de la cota hallada en (3.19).

ANEXO I. Codigo Matlab para el polinomio de interpolación de Lagrange

Estas líneas de código nos permiten obtener la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación de Lagrange. El programa **NEWTON.m** obtiene también una matriz triangular inferior que se corresponde con la tabla de las diferencias divididas.

```
%POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON

%ORDEN DEL POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN
n=input('Introduca el grado del polinomio de interpolación');

%PUNTOS DE INTERPOLACIÓN
x=zeros(1,n+1);
fprintf('Introduzca %d los puntos de interpolación: \n',n+1)
for i=1:n+1
x(i)=input('');
end

%VALORES DE LA FUNCIÓN
fx=zeros(1,n+1);
fprintf('Introduzca los valores delafunción en dichos puntos')
for i=1:n+1
fx(i)=input('');
end

%CÁLCULO DE LA TABLA DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS. Obtendremos una matriz
```

```
%triangular inferior
D=zeros(n+1,n+2);
for i=1:n+1
D(i,1)=x(i);
D(i,2)=fx(i);
for j=3:n+2
if i+1>=j
D(i,j)=(D(i,j-1)-D(i-1,j-1))/(D(i,1)-D(i-1-j+3,1));
end
end
end
fprintf('La matriz de las diferencias divididas es:\n')
disp(D)

%CONSTRUIMOS EL POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN

syms X

Q=D(1,2);
p=0;
for i=2:n+1
p=D(i,i+1);
for j=2:i;
p=p*(X-D(j-1,1));
end
Q=Q+p;
end
fprintf('El polinomio de interpolación de Newton es')
disp(Q)

%GRÁFICA
%Representamos ahora el polinomio de interpolación en azul. Los puntos de
%interpolación están señalados con asteriscos rojos.
a=input('Introduce el exremo inferior de la gráfica');
b=input('Introduce el extremo superior de la gráfica');
T=linspace(a,b); Y=subs(Q,X,T);
```

```
plot(T,Y)
hold on
plot(x,fx,'r*')

%CÁLCULO APROXIMADO DEL VALOR DE LA FUNCIÓN EN UN PUNTO
fprintf('Introduce un punto donde quieras aproximar el valor de la función')
t=input('');
subs(Q,t)
```

ANEXO II. Codigo Matlab para el polinomio de interpolación de Hermite

Hemos visto a lo largo de este trabajo que podemos obtener el polinomio de Hermite de dos maneras distintas: mediante la fórmula (2.8) y mediante diferencias divididas.

Se muestran a continuación las líneas de código del programa **HERMITE1.m** que obtiene el polinomio de interpolación de Hermite usando la fórmula (2.8).

También se incluyen los datos correspondientes al Ejemplo 2.5 en el archivo **data1.m**.

```
%CÁLCULO DEL POLINOMIO DE HERMITE USANDO LA FÓRMULA (2.8)
clc
clear all
data2



k=length(x)-1;
m=[fx',dx];

syms X

for i=1:k+1
prod=1;
for j=1:k+1
if i~=j
res=(((X-x(j))/(x(i)-x(j)))^(alfa(j)+1));
prod=prod*res;
end
```

```
end
q(i)=prod;
end


for i=1:k+1

syms X
p(i,alfa(i)+1)=((X-x(i))^alfa(i)/factorial(alfa(i)))*q(i);

for l=alfa(i):-1:1

p(i,l)=((X-x(i))^(l-1)/factorial(l-1))*q(i);
sum=0;

for j=l:alfa(i)
dq(i)=diff(q(i),j-l+1);
qixi=subs(dq(i),x(i));
sum=sum+nchoosek(j,l-1)*qixi*p(i,j+1);
end

p(i,l)=p(i,l)-sum;

end
end

pol=0;
for i=1:k+1
for l=1:alfa(i)+1
pol=m(i,l)*p(i,l)+pol;
end
end

pol
```

Código de **data1.m** relativo al Ejemplo 2.5:

```
%DATOS DEL EJEMPLO 2.5

%n= grado del polinomio de interpolación
%x= puntos de interpolación
%fx valores de la funcion
%dx matriz de derivadas

x=[0 0.25]
fx=[0 1]
dx=[pi;2*pi]
alfa=[1 1]
```

A continuación se muestran las líneas de código del programa **HERMITE2.m** para obtener el polinomio de interpolación de Hermite en la forma de Newton, así como la tabla de las diferencias divididas en forma de matriz triangular inferior.

Se dan los datos del Ejemplo 3.11 en el archivo **data2.m**, mostrado abajo.

```
%CÁLCULO DEL POLINOMIO DE HERMITE EN LA FORMA DE NEWTON
clc
clear all



data
D=[x',fx',dx]
DD=zeros(n+1,n+2);

%MATRIZ DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS
for i=1:n+1
DD(i,1)=x(i);
DD(i,2)=fx(i);
end
for i=2:n+1
for j=3:n+2
if i+1>=j
if D(i,1)==D(i-1-j+3,1)
DD(i,j)=D(i-1,j)/factorial(j-2);
else DD(i,j)=(DD(i,j-1)-DD(i-1,j-1))/(DD(i,1)-DD(i-1-j+3,1));
```

```
end
end
end
end

%CÁLCULO DEL POLINOMIO DE HERMITE
syms X
P=0;
Q=DD(1,2);
for i=2:n+1
p=DD(i,i+1);
for j=2:i;
p=p*(X-DD(j-1,1));
end
Q=Q+p;
end
disp(Q)
```

A continuación el archivo **data2.m** relativo al Ejemplo 3.11:

```
%DATOS DEL EJEMPLO 3.11

%n= grado del polinomio de interpolación
%x= puntos de interpolación
%fx valores de la funcion
%dx matrizde derivadas

n=3;
x=[1.6 1.6 1.7 1.7]
fx=[0.9995736030 0.9995736030 0.9916648105 0.9916648105]
dx=[-0.9291995223 0 0 ;-0.9291995223 0 0 ;-0.1288444943 0 0;-0.1288444943 0 0]
```

La representación gráfica y el cálculo aproximado del valor de la función en un punto es análogo al realizado en el programa **NEWTON.m**.

Bibliografía

[1] A. Aubanell, A. Benseny y A. Delshams, *Eines bàsiques de càlcul numèric : amb 87 problemes resolts*, Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, 1991.

[2] C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer, New York, 1987.

[3] S.D. Conte y C. de Boor, *Elementary numerical analysis, an algorithmic approach*, tercera edición, McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

[4] M. Crouzeix y A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, segunda edición, Masson, Paris, 1992.

[5] E. Isaacson y H. B. Keller, *Analysis of numerical methods*, Dover Publications, New York, 1994.

[6] P.M. Prenter, *Splines and variational methods*, John Wiley and Sons, New York, 1975.