



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

El fenómeno del bombeo sin válvulas.
Modelización matemática y existencia
de solución periódica.

Fatima Zohra Fathallah Ezzine

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

**El fenómeno del bombeo sin válvulas.
Modelización matemática y existencia
de solución periódica.**

Fatima Zohra Fathallah Ezzine

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemática
Título: El fenómeno del bombeo sin válvulas. Modelización matemática y existencia de solución periódica.
Breve descripción del contenido
Este trabajo es fruto del interés por la aplicación de las matemáticas a modelos de la vida real. Estudiamos el fenómeno del bombeo sin válvulas, consistente en el transporte de un fluido líquido que llena un sistema de tubos y tanques sin válvulas. Modelamos este fenómeno como una ecuación diferencial ordinaria y probaremos la existencia de soluciones del mismo.
Recomendaciones
Tener algunos conocimientos básicos de la Física así como algunos conocimientos vistos en asignaturas como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Otras observaciones

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. El modelo	1
1.1. Configuración de un tanque	1
1.2. Configuración de dos tanques	5
1.3. Configuración de tres tanques	7
1.4. Configuración de tres tanques con pistón	8
2. Definiciones y resultados auxiliares	11
3. Existencia de soluciones	19
4. Ejemplos	29
Bibliografía	35

Resumen

En hidrodinámica, el bombeo sin válvulas consiste en el transporte de fluidos líquidos en sistemas mecánicos sin válvulas garantizando una dirección predilecta para el flujo. El interés principal de este fenómeno reside en el estudio del sistema cardiovascular. Se observó que pacientes a los que les fallaron las válvulas del corazón podían mantener su circulación sanguínea por un tiempo. Los experimentos realizados por Liebau en 1954 sugirieron la existencia de un efecto de bombeo sin válvulas producido por la respiración periódica. En este trabajo se propone estudiar distintas configuraciones de este fenómeno, modelarlo como una ecuación diferencial ordinaria con una singularidad y probar la existencia de soluciones del mismo empleando algunas herramientas matemáticas como el método de las sub y sobre soluciones.

Abstract

In hydrodynamics, valveless pumping is used for the conveyance of liquid fluids in mechanical systems that have no valves to ensure the preferential direction of flow. The main interest of this phenomenon is the study of the cardiovascular system. It was observed that patients whose heart valves failed were able to maintain their blood circulation for a period of time. Experiments conducted by Liebau in 1954 suggested that highest efficiency of pumping in cardiovascular systems is reached through cooperation of heart pumping with valves and valveless pumping through respiration. The purpose of this paper is to model this phenomenon as a nonlinear ordinary differential equation with a singularity. We will also prove the existence of solutions of the model using some methods such as the lower and upper functions method.

Introducción

La circulación de la sangre en el sistema cardiovascular se mantiene cierto tiempo cuando las válvulas del corazón fallan. Este hecho se debe al fenómeno conocido como *el bombeo sin válvulas*. Se trata del transporte de fluidos líquidos en sistemas mecánicos sin válvulas garantizando una dirección predilecta para el flujo.

Este fenómeno fue estudiado y publicado en 1954 por Gerhart Liebau [4]. Observó que la energía asociada a la circulación de la sangre no era causada únicamente por el trabajo del corazón. Para probar esta hipótesis, Liebau hizo experimentos usando tubos elásticos de diferentes longitudes y propiedades elásticas demostrando así la existencia de un *bombeo sin válvulas*, conocido también como el *fenómeno de Liebau*.

El primero en procurar modelar este fenómeno fue von Bredow en 1968 [2] usando las ecuaciones de Navier-Stokes. La configuración que consideró estaba compuesta por un tubo elástico conectado a dos tanques con agua, tal y como se puede observar en la Figura 1. Además, en su estudio había indicaciones de que el fenómeno de Liebau también ocurre en los tubos rígidos.

De la misma manera, en 1985 Takagi y Takahashi [9] propusieron un modelo para tuberías rígidas y pudieron demostrar el bombeo sin válvulas en experimentos reales. Sin embargo, muchos modelos propuestos para este fenómeno fueron inexplorados puesto que no había gran interés por el bombeo sin válvulas por ser menos eficiente que el bombeo usando válvulas.

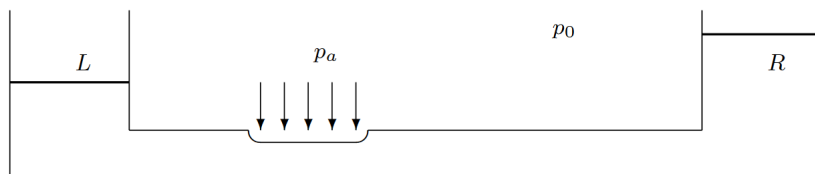


Figura 1: Configuración de von Bredow.

No obstante, unos estudios fisiológicos recientes [5] muestran que el sistema cardiovascular alcanza su eficiencia máxima a través de la combinación del bombeo con válvulas del corazón

y el bombeo sin válvulas que produce la respiración. En estos estudios también se observó que algunos invertebrados poseen un sistema circulatorio sin válvulas. Por todo esto, se reinició el estudio de estos modelos para mejorar la comprensión del fenómeno de Liebau.

En este trabajo se consideran las configuraciones modeladas por Georg Propst en [8]: un tanque, dos tanques y tres tanques, todos ellos conectados por tubos rígidos. A pesar de las diferencias en estas configuraciones, el efecto del bombeo sin válvulas se puede observar en cualquiera de ellas.

En particular, estudiaremos la existencia de soluciones para el modelo cuya configuración consta de un tanque y un tubo. Para esto nos apoyaremos en el trabajo realizado por José Ángel Cid, Georg Propst y Milan Tvrdý en [3].

Para el estudio de existencia de soluciones, haremos uso del método de las sub y sobre soluciones. La teoría de las sub y sobre soluciones es conocida como un método elemental para el estudio de la existencia, la estabilidad, la multiplicidad y la aproximación de las soluciones. De este modo, este método reemplaza la dificultad de buscar una solución de un problema a buscar las sub y sobre soluciones.

Para el estudio de las diferentes configuraciones, consideraremos un fluido que se desplaza a lo largo de una tubería horizontal de sección constante, es decir, el tubo es rígido. Cuando consideremos el modelo con fuerzas de rozamiento presentes debido a la viscosidad del fluido, será necesaria una diferencia de presiones entre los extremos del tubo para que se pueda producir el movimiento del fluido. Para esto, emplearemos la Ley de Poiseuille que establece que el caudal del fluido es proporcional a la diferencia de presiones.

Capítulo 1

El modelo

1.1. Configuración de un tanque

Se considera la configuración de la Figura 1.1: un tubo conectado a un tanque vertical que contiene un fluido incompresible de densidad ρ . El tubo está limitado por un pistón que se mueve ejerciendo una presión, $p(t)$, y se supone que tanto la masa como la fricción del pistón son nulas, así como la presión ambiental ejercida sobre el fluido del tanque abierto. De esta manera, las únicas fuerzas que actúan sobre el fluido del tubo son la presión que ejerce el pistón, $p(t)$, y la presión que hay al final del tubo en la entrada del tanque, $p^e(t)$.

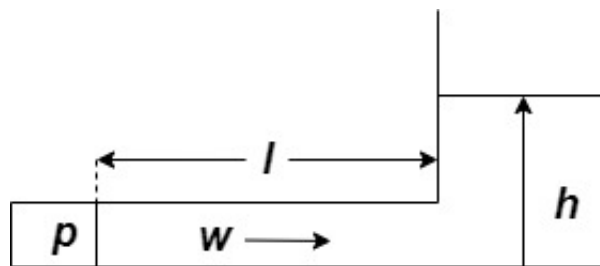


Figura 1.1: Configuración de un tanque.

Denotando por $V(t)$ el volumen del tanque, $m(t)$ la masa variable, $h(t)$ el nivel de altura en el tanque, A_t la sección transversal y g la aceleración gravitatoria, se tiene que

$$\rho = \frac{m(t)}{V(t)} = \frac{m(t)}{h(t) A_t}$$

y, por la segunda ley de Newton,

$$F = m(t) g = \rho h(t) A_t g.$$

Entonces, se observa que

$$p(t) = \frac{F}{A_t} = \frac{\rho h(t) A_t g}{A_t} = \rho h(t) g.$$

Es decir, el sistema está en equilibrio cuando se tiene

$$p(t) = \rho g h(t). \quad (1.1)$$

Por la segunda ley de Newton, se sabe también que la variación del momento de la masa del fluido en el tubo es igual a la suma de fuerzas que actúan sobre él:

$$\rho (l w)'(t) = p(t) - p^e(t), \quad (1.2)$$

donde $l(t)$ es la longitud del tubo (distancia del pistón a la entrada del tanque) y $w(t) = -l'(t)$ la velocidad del fluido en el tubo.

Es razonable pensar que la sección transversal del tanque, A_t , es mucho mayor que la sección transversal del tubo, A_p . Por lo tanto, el fluido en el tanque está casi en reposo y la pérdida de presión en la unión del tanque con el tubo viene dada por:

$$\rho g h(t) - p^e(t) = \xi^e \frac{\rho}{2} w^2, \quad (1.3)$$

donde $\xi^e \geq 1$ es un coeficiente de fricción cuyo valor depende de la forma geométrica de la unión. Para una unión ideal, se tiene que $\xi^e = 1$, con lo que la ecuación anterior se convierte en la ecuación de Bernoulli para la perfecta aceleración y desaceleración del fluido.

Asimismo, empleando (1.2) y (1.3) obtenemos:

$$-\rho (l l')'(t) = p(t) - \rho g h(t) + \xi^e \frac{\rho}{2} (l')^2. \quad (1.4)$$

Como la sección transversal del tanque es constante, se ve claramente que

$$V(t + \varepsilon) = h(t + \varepsilon) A_t \quad (1.5)$$

para un $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee. Se observa también que

$$V(t + \varepsilon) = h(t) A_t + A_p \int_t^{t+\varepsilon} w(s) ds = \left(h(t) + \frac{A_p}{A_t} \int_t^{t+\varepsilon} w(s) ds \right) A_t, \quad (1.6)$$

donde $w(s)$ es la cantidad de fluido que entra por unidad de superficie.

Entonces, despejando en (1.5) y (1.6), se tiene

$$h(t + \varepsilon) = h(t) + \frac{A_p}{A_t} \int_t^{t+\varepsilon} w(s) ds$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(t + \varepsilon) - h(t)}{\varepsilon} = \frac{A_p}{A_t} w(t).$$

De este modo, aunque no se conoce $h(t)$, se sabe que la variabilidad de ésta viene dada por

$$h'(t) = c w(t) \quad (1.7)$$

donde $c = A_p/A_t \leq 1$.

Además, gracias a que el volumen total del fluido es constante, se puede relacionar $l(t)$ y $h(t)$ empleando la fórmula del volumen de la siguiente manera

$$A_p l(t) + A_t h(t) = V_0. \quad (1.8)$$

Supóngase ahora que $p(t)$ es periódica y que $w(t)$ y $h(t)$ son soluciones periódicas de (1.2) y (1.7) del mismo período $T > 0$ (veremos en el siguiente capítulo la existencia de estas soluciones). Integramos (1.2) de 0 a T y dividimos por T como sigue

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho (l w)'(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) - p^e(t) dt \quad (1.9)$$

y por ser el producto $l(t) w(t)$ T -periódico, se sabe que

$$\int_0^T (l w)'(t) dt = 0.$$

Así, se anula la parte izquierda de la igualdad de la ecuación (1.9) y en la parte derecha, empleando (1.3), obtenemos los valores medios:

$$0 = \bar{p} - \rho g \bar{h} + \xi^e \frac{\rho}{2} \overline{w^2}.$$

Notación 1.1. La barra sobre las funciones periódicas denota su valor medio, por ejemplo,

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Así, el nivel de altura medio en el tanque es de la forma que sigue

$$\bar{h} = \frac{1}{\rho g} \left(\bar{p} + \xi^e \frac{\rho}{2} \overline{w^2} \right).$$

Si la función $p(t)$ es constante, claramente $p(t) \equiv \bar{p}$ y el sistema alcanza el equilibrio en

$$h_0 = \frac{\bar{p}}{\rho g}.$$

Así se observa que el nivel medio del sistema forzado periódicamente, \bar{h} , es mayor que el del sistema con la presión constante, h_0 . Esto indica que hay un efecto de bombeo producido por la excitación periódica.

Otro modelo para la pérdida de presión en la unión del tubo con el tanque es el siguiente

$$\rho g h(t) - p^e(t) = \xi^e \frac{1 - \operatorname{sgn}(w(t))}{2} \frac{\rho}{2} w^2(t), \quad (1.10)$$

donde

$$\operatorname{sgn}(w(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(t) > 0, \\ 0 & \text{si } w(t) = 0, \\ -1 & \text{si } w(t) < 0. \end{cases}$$

Sustituyendo en (1.2), integrando de 0 a T y dividiendo por T como hicimos anteriormente, obtenemos

$$\bar{h} = \frac{1}{\rho g} \left(\bar{p} + \xi^e \frac{\rho}{4} \left(\overline{w^2} - \widehat{w^2} \right) \right).$$

Notación 1.2. Para una función continua $w: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos

$$\widehat{w^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{sgn}(w(t)) w(t)^2 dt.$$

$\widehat{w^2}$ puede ser cero, positivo o negativo, pero la diferencia $\overline{w^2} - \widehat{w^2}$ es siempre mayor o igual que cero.

La Ley de Poiseuille permite determinar el flujo laminar estacionario de un líquido incompresible y uniformemente viscoso (fluido newtoniano) a través de un tubo cilíndrico de sección circular constante.

De este modo, a continuación consideraremos el modelo estudiado en [3] que incluye la fricción dada por la Ley de Poiseuille. Esta ley establece que

$$-\rho (l l')'(t) = p(t) - \rho g h(t) + \xi^e \frac{\rho}{2} (u')^2 + r_0 l l' \quad (1.11)$$

donde $r_0 \geq 0$ es el coeficiente de fricción.

De (1.8) y (1.11), deducimos la siguiente expresión

$$l'' = -\frac{r_0}{\rho} l' + \frac{1}{l} \left(-\left(1 + \frac{\xi^e}{2}\right) (l')^2 + \frac{gV_0}{A_t} - \frac{p}{\rho} \right) - \frac{gA_p}{A_t}.$$

Por comodidad, se hará uso de la siguiente notación:

$$a = \frac{r_0}{\rho}, \quad b = 1 + \frac{\xi^e}{2}, \quad c = \frac{gA_p}{A_t}, \quad e(t) = \frac{gV_0}{A_t} - \frac{p(t)}{\rho}$$

donde, por definición,

$$a \geq 0, \quad b > 1, \quad c > 0 \quad \text{y } e(t) \text{ es una función continua y } T\text{-periódica en } \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

De este modo, se llega al siguiente problema periódico:

$$\begin{aligned} l''(t) + a l'(t) &= \frac{1}{l(t)} (e(t) - b (l'(t))^2) - c, \quad t \in [0, T] \\ l(0) &= l(T), \quad l'(0) = l'(T) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Cabe destacar que si $a = 0$, implicaría $r_0 = 0$, es decir, no habría fricción y se tendría la ecuación (1.4). Sin embargo, se supone $a > 0$ porque, como se verá en la siguiente sección, será necesario que el término lineal de primer orden tenga coeficiente positivo.

1.2. Configuración de dos tanques

A continuación, se considera la configuración de dos tanques unidos por un tubo con longitud fija l , como se observa en la Figura 1.2. De nuevo, se denota por $w(t)$ la velocidad del fluido en dirección del tanque de la izquierda hacia el tanque de la derecha. Sea $p(t)$ la presión sobre el fluido en el tanque de la izquierda de sección transversal A_0 y con nivel de altura $h_0(t)$. En esta nueva configuración, la presión $p^b(t)$ es la presión que hay en el inicio del tubo, causada por el nuevo tanque. Por la segunda ley de Newton, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\rho (l w)'(t) = p^b(t) - p^e(t).$$

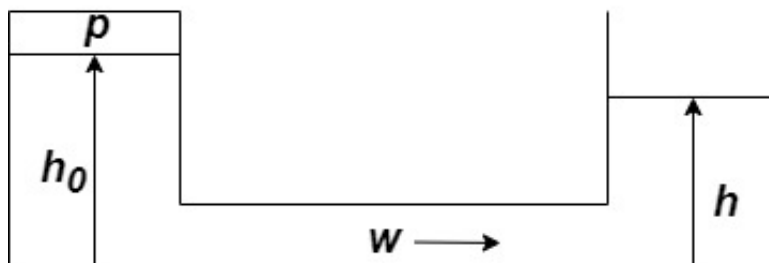


Figura 1.2: Configuración de dos tanques.

La presión al principio del tubo, $p^b(t)$, puede ser modelada de forma análoga al caso anterior, cambiando h por h_0 , A_t por A_0 y p^e por p^b , obteniendo así los siguientes modelos

$$p^b = p + \rho g h_0 - \xi^b \frac{\rho}{2} w^2(t), \quad (1.14)$$

o bien

$$p^b = p + \rho g h_0 - \xi^b \frac{1 + \text{sgn}(w(t))}{2} \frac{\rho}{2} w^2(t), \quad (1.15)$$

con $\xi^b \geq 1$ el coeficiente de fricción en la entrada del tubo.

Nótese que en este caso se toma $(1 + \text{sgn}(w(t)))/2$ puesto que sólo se considera el flujo que sale del tanque de la izquierda.

La variación de $h(t)$ viene dada por (1.7) y se relaciona $h(t)$ con $h_0(t)$ como sigue

$$A_0 h_0(t) + A_t h(t) = V_0, \quad (1.16)$$

con V_0 el volumen total del fluido fuera del tubo (siempre lleno).

De este modo, por (1.1) se sabe que

$$\text{Presión del tanque de la derecha} = \rho h(t) g$$

$$\text{Presión del tanque de la izquierda} = \rho h_0(t) g$$

e igualando la presión, se deduce que el sistema alcanza el equilibrio cuando $p + \rho g h_0 = \rho g h$. Supóngase que p es periódica y que w y h son también periódicas del mismo período $T > 0$. Combinando (1.3) y (1.14), se obtiene

$$\rho (l w)' = p + \rho g h_0 - \xi^b \frac{\rho}{2} w^2 - \rho g h + \xi^e \frac{\rho}{2} w^2.$$

Nuevamente, se integra de 0 a T y se divide entre T . Por simplicidad, se supone $\bar{p} = 0$. Como $w(t)$ es T -periódica, la parte izquierda de la igualdad se anula. Despejando se tiene lo siguiente

$$\bar{h} - \bar{h}_0 = \frac{1}{2g} \overline{w^2} (\xi^e - \xi^b). \quad (1.17)$$

Nótese que si $\xi^b = \xi^e$, no habría bombeo y si $\xi^b \neq \xi^e$ el bombeo iría en la dirección de mayor a menor presión debida a la mayor pérdida de presión en las uniones.

Repitiendo el mismo proceso para el modelo (1.10) y (1.15), se obtiene

$$\bar{h} - \bar{h}_0 = \frac{1}{4g} \overline{w^2} (\xi^e - \xi^b) - \frac{1}{4g} \widehat{w^2} (\xi^e + \xi^b). \quad (1.18)$$

De este modo, cuando $\xi^b = \xi^e$, que haya bombeo, o no, depende únicamente de si $\widehat{w^2} \neq 0$. En caso de utilizar el modelo (1.10) y (1.14), vemos que mismo si $\xi^b = \xi^e$ hay efecto bombeo

$$\bar{h} - \bar{h}_0 = \frac{1}{4g} \overline{w^2} (\xi^e - 2 \xi^b) - \frac{1}{4g} \widehat{w^2}. \quad (1.19)$$

En definitiva, en la configuración de dos tanques el efecto bombeo viene dado por la pérdida de presión en las uniones de los tanques con el tubo, pues depende de $\xi^b - \xi^e \neq 0$ o de los términos $\text{sgn}(w)$. Así, esta pérdida de presión actúa como una válvula, haciendo que el fluido vaya en dirección de la mayor pérdida de presión. Por ejemplo, en el primer modelo se obtiene (1.17) y si $\xi^b > \xi^e$, se produce un efecto de bombeo negativo, pues el nivel de altura es mayor en el tanque en el que se aplica una presión periódica.

1.3. Configuración de tres tanques

Se considera la configuración formada por tres tanques unidos por dos tubos de longitudes l_1 y l_2 , de forma que $l_1 < l_2$, tal y como se aprecia en la Figura 1.3. El tanque del medio experimenta una presión $p(t)$ dada, y los niveles de altura en los tanques laterales vienen dados por h_1 y h_2 , mientras que las velocidades se denotan por w_1 y w_2 . Por simplicidad, en este modelo se supone que las secciones transversales de los tanques son todas iguales, A_t , y las secciones transversales de los tubos iguales, A_p .

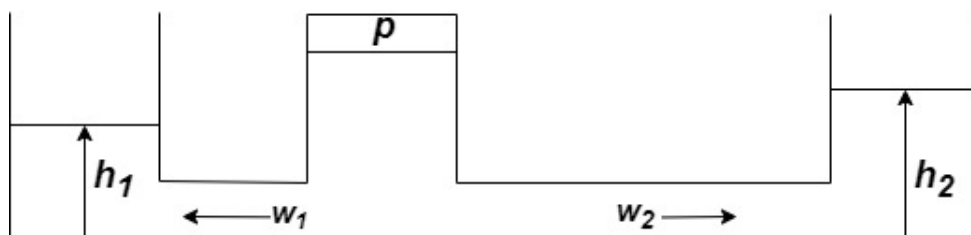


Figura 1.3: Configuración de tres tanques.

Repitiendo el proceso que se aplicó para las anteriores configuraciones de tanques y empleando la Ley de Poiseuille con coeficiente de fricción r_0 además de aplicar (1.3) para la pérdida de presión en las uniones, se obtiene el siguiente sistema formado por cuatro ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} h_i' &= c w_i, \quad i = 1, 2, \\ \rho (l_i w_i)' &= \rho g (h_0 - h_i) + (\xi_i^e - \xi_i^b) \frac{\rho}{2} w_i^2 - r_0 l_i w_i + p, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde V_0 es el volumen constante de los tres tanques (sin tener en cuenta el volumen de los tubos que están siempre llenos).

Para facilitar los cálculos, se consideran los tres tanques con igual sección transversal, A_t . De este modo,

$$h_1 A_t + h_2 A_t + h_0 A_t = V_0.$$

Despejando en esta ecuación se obtiene

$$h_0 = \frac{V_0}{A_t} - h_1 - h_2.$$

Así, para una presión constante $p \equiv \bar{p}$, el sistema está en equilibrio si $h_1 \equiv h_2$ y $\bar{p} + \rho g h_0 \equiv \rho g h_1$, pues cuando está en equilibrio se sabe que $w_i = 0$ y que

$$0 = \bar{p} = \rho g (h_i - h_0).$$

Se puede apreciar que el efecto bombeo en esta configuración viene dado por la diferencia del nivel de altura en los dos tanques exteriores, es decir, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1$. Así, el efecto bombeo en este

modelo con tres tanques puede ser comprendido como una combinación de la configuración de dos tanques. Sea $\xi_i = \xi_i^e - \xi_i^b$ la pérdida neta de presión en el tubo i . Por el análisis hecho en la configuración de dos tanques, se obtuvo (1.17), es decir,

$$\bar{h}_i - \bar{h}_0 = \frac{1}{2g} \xi_i \bar{w}_i^2. \quad (1.21)$$

Sea p periódica y sean w_1, w_2, h_1 y h_2 soluciones de (1.20) del mismo período $T > 0$ (se verá la existencia de dichas soluciones en el próximo capítulo). Integrando en las ecuaciones de h_i dadas en (1.20), se tiene que $\bar{w}_i = 0$.

Por otro lado, sabiendo que

$$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = (\bar{h}_2 - \bar{h}_0) - (\bar{h}_1 - \bar{h}_0)$$

y aplicando (1.21), se obtiene

$$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = \frac{1}{2g} \left(\xi_2 \bar{w}_2^2 - \xi_1 \bar{w}_1^2 \right). \quad (1.22)$$

En caso de que $\xi_i^e = \xi_i^b$, no hay efecto bombeo, pues tendríamos $\xi_i = 0, i = 1, 2$ y por tanto $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 0$.

Supóngase que $\xi_1 = \xi_2 =: \xi \neq 0$, entonces

$$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = \frac{\xi}{2g} \left(\bar{w}_2^2 - \bar{w}_1^2 \right).$$

En caso de que $\xi = 0$, no hay efecto bombeo. Sin embargo, si $\xi > 0$ el bombeo va desde el tanque del medio hacia los tanques exteriores porque la pérdida de presión en la unión final del tubo es mayor. Por otro lado, si $\xi < 0$, el tanque del medio absorbe más volumen del tanque 1 que del tanque 2.

1.4. Configuración de tres tanques con pistón

Por último, se considera la configuración de la Figura 1.4 que consta de tres tanques con un pistón en el tanque del medio que delimita el nivel de altura $h_0(t)$.

De nuevo, las ecuaciones para el momento del fluido son

$$\rho (l_i w_i)' = p^m - \xi_i^b \frac{\rho}{2} w_i^2 - p_i^e - r_0 l_i w_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.23)$$

donde p_i^e es la pérdida de presión en la entrada del tubo i que viene modelada por (1.3) y p^m es la presión en el fondo del tanque del medio.

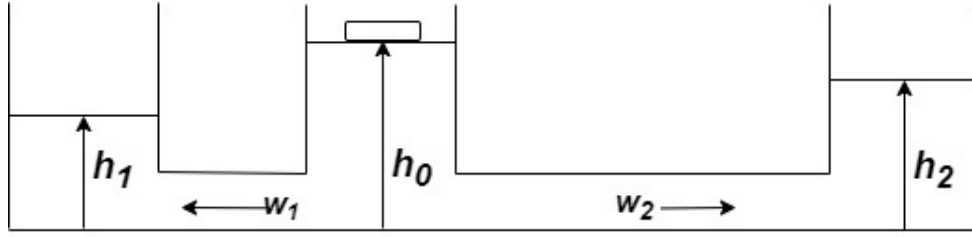


Figura 1.4: Configuración de tres tanques con pistón

Para simplificar los cálculos, se emplea la siguiente notación

$$w_- = l_1 w_1 - l_2 w_2, \quad w_+ = w_1 + w_2 \quad (1.24)$$

y se restan las dos ecuaciones de (1.23) para que se cancele p^m . De este modo, denotando

$$\xi_i = \xi_i^e - \xi_i^b$$

y

$$r = \frac{r_0}{\rho}$$

se obtiene

$$w'_- = g (h_2 - h_1) + \frac{\xi_1}{2} w_1^2 - \frac{\xi_2}{2} w_2^2 - r w_-. \quad (1.25)$$

De nuevo, $h'_i = c w_i$ y, como V_0 es constante y $A_t (h_0 + h_1 + h_2) = V_0$, se sabe que

$$h'_0 + h'_1 + h'_2 = 0.$$

Entonces, despejando en la ecuación anterior y usando (1.24), se ve que

$$c w_+ = -h'_0.$$

Denotemos ahora por $v(t) := -h'_0$ la velocidad del pistón, que es proporcional a w_+ .

Para continuar con los cálculos, se expresa la velocidad w_i en términos de w_+ , w_- y h_2 en términos de h_0 y h_1 como sigue

$$w_1 = \frac{1}{l_1 + l_2} (l_2 w_+ + w_-),$$

$$w_2 = \frac{1}{l_1 + l_2} (l_1 w_+ - w_-)$$

y

$$h_0 + h_1 + h_2 = \frac{V_0}{A_t}.$$

De esta manera, en el caso en el que $\xi_1 = \xi_2 =: \xi$, aplicando las anteriores expresiones, se obtiene

$$h'_1 = \frac{1}{l_1 + l_2} (c w_- + l_2 v), \quad (1.26)$$

$$w'_- = -2 g h_1 - \left(r - \frac{\xi}{c} \frac{v}{l_1 + l_2} \right) w_- + g \left(\frac{V_0}{A_t} - h_0 \right) + \frac{\xi}{2 c^2} \frac{l_2 - l_1}{l_1 + l_2} v^2. \quad (1.27)$$

El sistema con h_0 constante (es decir, el sistema con $h_0 \equiv \bar{h}_0$ y, por tanto, $v \equiv 0$) está en equilibrio si y sólo si $w_- \equiv 0$ y $h_2 - h_1 \equiv 0$. Se supone que h_0 es periódica y que h_1 y w_- son solución de (1.26), (1.27) del mismo período $T > 0$. Por esto, $\bar{v} = 0$ y $\bar{w}_- = 0$ y usando $\frac{V_0}{A_t} - h_0 = h_1 + h_2$ y (1.25) se llega a

$$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = \frac{\xi}{2g} (\bar{w}_2^2 - \bar{w}_1^2).$$

Nuevamente, se tiene que el bombeo del modelo de tres tanques con pistón se debe a las pérdidas de presión en las uniones tubo-tanque, puesto que, según (1.23), se tiene

$$0 = \bar{p}^m + \left(\xi_i^e - \xi_i^b \right) \frac{\rho}{2} \bar{w}_i^2 - \rho g \bar{h}_i, \quad i = 1, 2.$$

Capítulo 2

Definiciones y resultados auxiliares

Un sistema de ecuaciones diferenciales periódico se dice *bombeo* si tiene, al menos, una solución periódica asintóticamente estable cuyo valor medio no está en equilibrio.

Para asentar las bases de este estudio, es preciso comenzar definiendo el *bombeo periódicamente forzado*.

Definición 2.1. Sean $T > 0$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no constante T -periódica. Se dice que la ecuación

$$x'' = g(x, x', e(t))$$

es un *bombeo periódicamente forzado* si tiene una solución $x(t)$, T -periódica, tal que

$$g(\bar{x}, 0, \bar{e}) \neq 0.$$

Esto equivale a decir que el valor medio de x , es decir, \bar{x} , no es un equilibrio de la ecuación diferencial

$$x'' = g(x, x', \bar{e}).$$

A continuación, se introduce el cambio de variable $u = x^\mu$, con $\mu = \frac{1}{b+1}$. Este cambio hace que el problema singular (1.13) se transforme. Veamos cuál es el nuevo problema singular. Primero se sabe que

$$u(t) = x^\mu(t)$$

$$u'(t) = \mu x^{\mu-1}(t) x'(t)$$

$$u''(t) = \mu(\mu-1) x^{\mu-2}(t) (x'(t))^2 + \mu x^{\mu-1}(t) x''(t).$$

Sustituyendo ahora en (1.13), se tiene

$$\mu(\mu-1) x^{\mu-2}(t) (x'(t))^2 + \mu x^{\mu-1}(t) x''(t) + a (\mu x^{\mu-1}(t) x'(t)) =$$

$$\frac{1}{x^\mu(t)} (e(t) - b (\mu x^{\mu-1}(t) x'(t))^2) - c.$$

Dividiendo por μ se tiene

$$(\mu - 1) x^{\mu-2}(t) (x'(t))^2 + x^{\mu-1}(t) x''(t) + a (x^{\mu-1}(t) x'(t)) =$$

$$\frac{1}{x^\mu(t)} (r(t) - b (\mu x^{\mu-1}(t) x'(t))^2) - s(t)$$

donde

$$r(t) = \frac{e(t)}{\mu} \quad y \quad s(t) = \frac{c}{\mu}.$$

Seguidamente, por ser $\mu = \frac{1}{b+1}$ se tiene

$$x^{\mu-1}(t) x''(t) + a (x^{\mu-1}(t) x'(t)) = \frac{1}{x^\mu(t)} r(t) - s(t).$$

Dividiendo ahora por $x^{\mu-1}(t)$ se llega a

$$x''(t) + a x'(t) = x^{1-2\mu}(t) r(t) - x^{1-\mu}(t) s(t).$$

De este modo, el Problema (1.13) se transforma en el siguiente problema regular

$$x''(t) + a x'(t) + s(t) x^\beta(t) - r(t) x^\alpha(t) = 0$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T),$$
(2.1)

donde

$$r(t) = \frac{e(t)}{\mu}, \quad s(t) = \frac{c}{\mu}, \quad \alpha = 1 - 2\mu, \quad \beta = 1 - \mu.$$
(2.2)

Nótese que, puesto que $b > 1$ por definición, se tiene que $0 < \mu < 1/2$ y, por tanto, $0 < \alpha < \beta < 1$. Se sigue así que el Problema (2.1) es regular y se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.2. *La función $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es solución positiva del Problema (1.13) si y sólo si $x(t) = u(t)^{1/\mu}$ es solución positiva del Problema (2.1).*

Para probar la mayor parte de los resultados de la siguiente sección se emplea el método de *las sub y sobre soluciones*. Este método es una técnica muy efectiva y una herramienta flexible para el estudio de la existencia, la estabilidad, la multiplicidad y las aproximaciones de las soluciones. De este modo, se introducen las siguientes definiciones y resultados.

Supóngase que $a > 0$ y sea $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y consideremos el siguiente Problema

$$x''(t) + a x'(t) + f(t, x) = 0, \quad x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T).$$
(2.3)

Definición 2.3. Sea $\sigma_1 \in \mathcal{C}^2([0, T])$ una función T -periódica. Se dice que σ_1 es una *sub-solución* para el Problema (2.3) si

$$\sigma_1''(t) + a \sigma_1'(t) + f(t, \sigma_1(t)) \geq 0 \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Análogamente, una *sobre-solución* es una función $\sigma_2 \in \mathcal{C}^2([0, T])$ tal que

$$\sigma_2''(t) + a \sigma_2'(t) + f(t, \sigma_2(t)) \leq 0 \quad \text{para } t \in [0, T].$$

De este modo, una solución σ del Problema (2.3) es al mismo tiempo una sub-solución y una sobre-solución.

Definición 2.4. Una sub-solución σ_1 del Problema (2.3) (respectivamente, sobre-solución σ_2) se dice *estricta* si para toda solución u de (2.3) con $u \geq \sigma_1$ (respectivamente, $u \leq \sigma_2$) es tal que $u(t) > \sigma_1(t)$ (respectivamente, $u(t) < \sigma_2(t)$).

Los siguientes resultados y definiciones serán empleados en la siguiente sección para demostrar la existencia de soluciones.

Teorema 2.5. [1, Teorema 2.4] Sean σ_1 y σ_2 sub y sobre soluciones, respectivamente, del Problema (2.3), tales que $\sigma_2 < \sigma_1$ en $[0, T]$. Supóngase que $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función L^1 -Carathéodory tal que para algún $a_-, b_+ \in L^1(a, b)$ con $b_+ \geq 0$, se verifica

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(t, x) \leq a_-(t) \quad \text{y} \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(t, x)}{x} \leq b_+(t) \quad (2.4)$$

uniformemente en t . Además, supóngase que para cualquier $p \in L^1(a, b)$ tal que $p \leq b_*$ para casi todo punto en $[a, b]$ y un $\bar{t} \in [a, b]$, el problema

$$\begin{aligned} x'' + p(t)x &= 0 \\ x(\bar{t}) &= 0, \quad x(\bar{t} + b - a) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

tiene una única solución. Entonces, existe una solución $x \in \mathcal{S}$ del Problema (2.3), donde

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{C}([a, b]) \mid \exists t_1, t_2 \in [a, b], x(t_1) \geq \sigma_2(t_1), x(t_2) \geq \sigma_1(t_2)\}.$$

El siguiente corolario es un caso particular del anterior teorema del que se hará uso en la siguiente sección.

Corolario 2.6. Sean σ_1 y σ_2 funciones inferior y superior, respectivamente, del Problema (2.3) tales que $\sigma_2 < \sigma_1$ en $[0, T]$. Supóngase que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y que existe una función p continua en $[0, T]$ tal que, para $t \in [0, T]$, se tiene

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(t, x) \leq p(t) \quad \text{y} \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(t, x)}{x} \leq \frac{\pi^2}{T^2}.$$

Entonces, el Problema (2.3) tiene una solución x tal que, para algún $t_1 \in [0, T]$ se tiene

$$\sigma_2(t_1) \leq x(t_1) \leq \sigma_1(t_1).$$

Un estudio de las sub y sobre soluciones llevado a cabo por Pierpaolo Omari y Maurizio Trombetta [7], del cual forman parte el siguiente lema y la proposición que le prosigue, nos permitirá demostrar algunos resultados posteriores.

Denotemos por $W_{2\pi}^{p,1}(0, 2\pi)$ al espacio de todas las funciones $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^{p-1}(0, 2\pi)$ que cumplen las condiciones

$$h^{(i)}(0) = h^{(i)}(2\pi) \quad \text{para todo } i = 0, \dots, p-1$$

y con h^{p-1} absolutamente continua en $(0, 2\pi)$.

Sea $L : W_{2\pi}^{n,1}(0, 2\pi) \rightarrow L^1(0, 2\pi)$ el operador diferencial lineal de orden n que tiene la siguiente forma

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n I$$

donde $D = d/dt$, los a_i son constantes reales fijas con $i = 1, \dots, n$ y donde I es el operador identidad.

Definición 2.7. Se dice que el operador L es *inverso positivo* (respectivamente, *inverso negativo*) si $L(u) \geq 0$ implica $u \geq 0$ (respectivamente, $u \leq 0$).

Equivalentemente, el operador L es inverso positivo (respectivamente, inverso negativo) si es invertible y su inversa es positiva (respectivamente, negativa).

Lema 2.8. [7, Lema 2.1] El operador

$$D - \alpha I : W_{2\pi}^{1,1} \rightarrow L^1(0, 2\pi)$$

es inverso positivo si y sólo si $\alpha < 0$. Respectivamente, es inverso negativo si y sólo si $\alpha > 0$. Por otra parte, el operador

$$(D - \beta I)^2 + \gamma^2 I : W_{2\pi}^{2,1} \rightarrow L^1(0, 2\pi)$$

es inverso positivo si y sólo si $0 < \gamma \leq 1/2$.

Proposición 2.9. [7, Proposición 2.2] Sea $L = D^2 + a D + \lambda I : W_{2\pi}^{2,1} \rightarrow L^1(0, 2\pi)$ un operador diferencial de segundo orden con $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, el operador es inverso negativo si y sólo si $\lambda < 0$. Por otra parte, este operador es inverso positivo si y sólo si

$$0 < \lambda \leq \frac{1 + a^2}{4}.$$

Demostración. La ecuación característica de este operador es

$$t^2 + a t + \lambda = 0$$

y sus raíces son de la forma

$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2}.$$

De esta manera, se distinguen dos casos:

Caso 1: $a^2 - 4\lambda > 0$. En este caso, las raíces serían reales, es decir,

$$t_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$t_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2} \in \mathbb{R}$$

y, claramente, $t_1 < t_2$.

De esta manera, podemos escribir la siguiente composición

$$u'' + a u' + \lambda u = (L_1 \circ L_2)(u)$$

donde

$$L_1(u) = u' - t_1 u$$

$$L_2(u) = u' - t_2 u$$

y, haciendo esta composición, se tiene

$$(L_1 \circ L_2)(u) = L_1(L_2(u)) = (L_2(u))' + t_1 L_2(u) =$$

$$u'' - t_2 u' - t_1 u' + t_1 t_2 u = u'' - (t_1 + t_2) u' + t_1 t_2 u$$

donde vemos que $a = t_1 + t_2$ y $b = t_1 t_2$.

Asimismo, observamos que $t_2 < 0$ si y sólo si

$$\sqrt{a^2 - 4\lambda} < a$$

que equivale a

$$a^2 - 4\lambda < a^2.$$

De esta manera, sabemos que $t_2 < 0$ si y sólo si $\lambda > 0$.

Por el hecho de que $t_1 < t_2 < 0$, es obvio que

$$(L_1 \circ L_2)(u) = L_1(L_2(u)) \geq 0$$

y, por el Lema 2.8, puesto que $t_1 < 0$, se tiene que el operador L_1 es inverso positivo, es decir,

$$L_2(u) \geq 0.$$

De nuevo, por ser $t_2 < 0$, el Lema 2.8 implica que el operador L_2 es inverso positivo, esto es

$$u \geq 0.$$

En caso de que $\lambda < 0$, es claro que equivale a $t_2 > 0$. Véase que, en este caso, $t_1 < 0$. Supóngase que $t_1 > 0$, es decir,

$$-a > \sqrt{a^2 - 4\lambda}$$

que equivale a

$$a^2 > a^2 - 4\lambda$$

que equivaldría a que λ sea positivo, llegando así a una contradicción. Por tanto, se tiene

$$t_1 < 0 < t_2.$$

Nuevamente, por el Lema 2.8, puesto que el operador L_1 es inverso positivo, es decir,

$$L_2(u) \geq 0$$

y, como $t_2 > 0$, el operador L_2 es inverso negativo o, equivalentemente,

$$u \leq 0.$$

Caso 2: $a^2 - 4\lambda \leq 0$. En este caso, las raíces de la ecuación característica son complejas, es decir, son de la forma

$$t = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4\lambda - a^2}}{2}.$$

De esta manera, es claro que

$$t^2 + at + \lambda = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{4\lambda - a^2}{2}\right)^2.$$

Por el Lema 2.8, tomando

$$\beta = -\frac{a}{2} \quad y \quad \gamma = \frac{\sqrt{4\lambda - a^2}}{2}$$

sabemos que el operador es inverso positivo si y sólo si

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$$

o, equivalentemente,

$$4\lambda - a^2 \leq 1.$$

Así, podemos concluir que el operador es inverso positivo si y sólo si

$$0 < \lambda \leq \frac{1 + a^2}{4}$$

□

El siguiente Lema es una generalización de la proposición anterior.

Lema 2.10. Sean $a, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \lambda \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \quad (2.6)$$

y sea h continua en $[0, T]$. Entonces cualquier solución u del problema

$$u'' + a u' + \lambda u = h(t), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T)$$

es no negativa en $[0, T]$ cuando h es no negativa en $[0, T]$.

Demostración. La demostración se sigue de la anterior proposición empleando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} v(t) &= u\left(t \frac{T}{2\pi}\right) \\ v'(t) &= \frac{T}{2\pi} u'\left(t \frac{T}{2\pi}\right) \\ v''(t) &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 u''\left(t \frac{T}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2\pi]$.

Recuérdese que en la notación del Lema 2.8

$$a = -2\beta \quad y \quad \lambda = \beta^2 + \gamma^2$$

y, por tanto, empleando el cambio de variable, se tiene

$$\frac{4\pi^2}{T^2} v''(t) - 2\beta \frac{2\pi}{T} v'(t) + (\beta^2 + \gamma^2) v(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Multiplicando por el término $T^2/4\pi^2$, se obtiene

$$v''(t) - 2\bar{\beta} v'(t) + (\bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2) v(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

donde

$$\bar{\beta} = \beta \frac{T}{2\pi} \quad y \quad \bar{\gamma} = \gamma \frac{T}{2\pi}. \quad (2.7)$$

Por el Lema 2.8 se sabe que $0 < \bar{\gamma} \leq 1/2$. Entonces, se tiene

$$0 < \gamma \frac{T}{2\pi} \leq \frac{1}{2}$$

de lo que se deduce

$$0 < \gamma \leq \frac{\pi}{T}.$$

Por otro lado, como se sabe que $\gamma^2 = \lambda - \beta^2$ se deduce rápidamente que

$$\lambda \leq \frac{a^2}{4} + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2.$$

□

El siguiente resultado será útil para probar la existencia de solución periódica estable.

Lema 2.11. *Supóngase que $a > 0$ y sea σ_1 una sub-solución estricta y sea σ_2 una sobre-solución estricta de (2.1) tales que $\sigma_2 < \sigma_1$ en $[0, T]$. Además, supóngase*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \text{ para c.t.p en } [0, T] \text{ y para todo } x \in [\sigma_2(t), \sigma_1(t)],$$

y que existe una función continua $\gamma : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\bar{\gamma} > 0$ y

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \geq \gamma(t) \text{ para } t \in [0, T], \quad x \in [\sigma_2(t), \sigma_1(t)].$$

Entonces el Problema (2.3) tiene al menos una solución, x , T -periódica asintóticamente estable tal que

$$\sigma_2 \leq x \leq \sigma_1 \text{ en } [0, T].$$

Capítulo 3

Existencia de soluciones

Suponiendo que u es solución positiva del Problema (1.13) y multiplicando por $u(t)$ la ecuación del problema se tiene

$$u(t) u''(t) + a u(t) u'(t) = e(t) - b (u'(t))^2 - u(t) c$$

$$u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T).$$

Integrando sobre el intervalo $[0, T]$ y observando que

$$\int_0^T u(t) dt = 0,$$

$$\int_0^T u(t) u''(t) dt = [u(t) u'(t)]_0^T - \int_0^T u'(t) u'(t) dt = - \int_0^T u'(t) u'(t) dt,$$

$$\int_0^T u(t) u'(t) dt = \frac{(u(T))^2 - (u(0))^2}{2} = 0$$

se llega a

$$-\overline{u'(t)^2} = \overline{e(t)} - b \overline{(u'(t))^2} - \overline{u(t)} c$$

Es decir,

$$\bar{e} - c \bar{u} = (b - 1) \overline{(u')^2}. \quad (3.1)$$

De esto se deducen inmediatamente los siguientes resultados.

Teorema 3.1. *Supóngase que $a \geq 0$, $b > 1$, $c > 0$, $e(t)$ es una función continua y T -periódica en \mathbb{R} y que el Problema (1.13) tiene solución positiva. Entonces se tiene*

$$\bar{e} > 0. \quad (3.2)$$

Demostración. La prueba de este teorema es inmediata. Despejando en (3.1) se deduce que

$$\bar{e} = (b - 1) \overline{(u')^2} + c \bar{u}.$$

Por (1.12), se sabe que

$$b - 1 > 0 \quad c > 0$$

y como u es solución positiva del Problema (1.13), es claro que $\bar{u} > 0$. Por tanto, queda demostrado que $\bar{e} > 0$. □

Observación 3.2. Recuérdese que, por definición, se tiene

$$e(t) = \frac{gV_0}{A_t} - \frac{p(t)}{\rho}.$$

Entonces, $\bar{e} > 0$ si y sólo si

$$\bar{p} < \rho g \frac{V_0}{A_t}.$$

Esto implica que, fijados V_0 y A_t , si la presión periódica p es tal que $\bar{p} > 0$, entonces el problema (1.13) no tiene solución para los fluidos con densidad ρ suficientemente pequeña.

Teorema 3.3. *Supóngase que $a \geq 0$, $b > 1$, $c > 0$, $e(t)$ es una función continua y T -periódica en \mathbb{R} y que el problema (1.13) tiene solución positiva no constante. Entonces la ecuación*

$$u'' + a u' = \frac{1}{u} (e(t) - b (u')^2) - c \tag{3.3}$$

del problema se corresponde a un bombeo T -periódico forzado.

Demostración. Defínase $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x, y, z) = -a y + \frac{1}{x}(z - b y^2) - c$ para $x \in (0, \infty)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Así, la ecuación (3.3) se escribe como sigue

$$u''(t) = g(u(t), u'(t), e(t)).$$

De esta forma, por (1.12) y (3.1), se tiene que

$$g(\bar{u}, 0, \bar{e}) = \frac{1}{\bar{u}}(\bar{e} - c \bar{u}) = \frac{1}{\bar{u}}(b - 1) \overline{(u')^2} > 0,$$

implicando que $x = \bar{u}$ no puede ser un cero de $g(\bar{x}, 0, \bar{e})$. Entonces, por la definición dada en (2.1), queda probado el resultado. □

Para las pruebas de los siguientes resultados se empleará el método de las sub y sobre soluciones y se hará uso de los resultados de la sección anterior.

Notación 3.4. Para una función continua dada $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ se denota

$$h_* = \min\{h(t) : t \in [0, T]\}$$

$$h^* = \max\{h(t) : t \in [0, T]\}.$$

Teorema 3.5. *Supóngase que $a > 0$, $b > 1$, $c > 0$ y sea $e(t)$ continua y T -periódica tal que $e_* > 0$. Si se cumple la siguiente desigualdad*

$$\frac{(b+1)c^2}{4e_*} < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \quad (3.4)$$

entonces el Problema (1.13) tiene solución positiva.

Demostración. Denótese

$$\lambda^* = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (3.5)$$

Por el Lema 2.2 y recordando las definiciones dadas en (2.2) basta con ver que, cumpliéndose $a > 0$, $r_* > 0$, $s_* > 0$, $\alpha = 1 - 2\mu$, $\beta = 1 - \mu$ y

$$\frac{(s^*)^2}{4r_*} < \lambda^*,$$

el problema (2.1) tiene, al menos, una solución positiva.

Dividiremos la demostración del teorema en cuatro pasos.

PASO 1. Se sabe que $0 < r_* \leq r^* < \infty$ y que $0 < s_* \leq s^* < \infty$. Sea

$$f(t, x) = s(t) x^\beta - r(t) x^\alpha \text{ para } t \in [0, T] \text{ y } x \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Entonces, es fácil ver que

$$\begin{aligned} f(t, x) &\geq x^\alpha (s_* x^{\beta-\alpha} - r^*) > 0 \text{ para } t \in [0, T] \text{ y } x > (r^*/s_*)^{1/(\beta-\alpha)} \\ \text{y} \\ f(t, x) &\leq x^\alpha (s^* x^{\beta-\alpha} - r_*) < 0 \text{ para } t \in [0, T] \text{ y } x \in \left(0, (r_*/s^*)^{1/(\beta-\alpha)}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sean $\rho_1 \in ((r^*/s_*)^{1/(\beta-\alpha)}, \infty)$ y $\rho_2 \in (0, (r_*/s^*)^{1/(\beta-\alpha)})$ arbitrarios. Entonces, las funciones constantes $\sigma_1(t) \equiv \rho_1$ y $\sigma_2(t) \equiv \rho_2$ son sub-solución estricta y sobre-solución estricta, respectivamente, del problema (2.1) y, como $\rho_1 > \rho_2$, se tiene un par de sub y sobre soluciones estrictas ordenadas inversamente.

PASO 2. Fijados ρ_1 y ρ_2 del paso anterior, se define

$$\lambda_0 := \frac{(s^*)^2}{4r_*}.$$

Probaremos que existe un $\delta_0 \in (0, \rho_2)$ tal que

$$\lambda (x - \delta) - f(t, x) \geq 0 \text{ para } t \in [0, T], \delta \in (0, \delta_0), \lambda \geq \lambda_0 \text{ y } x \in [\delta, \infty). \quad (3.8)$$

Por lo anteriormente expuesto en (3.7), si se define $x_0 = (r_*/s^*)^{1/(\beta-\alpha)}$, se tiene

$$-f(t, x) > 0 \text{ para } t \in [0, T], x \in (0, x_0)$$

y por (2.2) se sabe que

$$\beta - \alpha = 1 - \beta = \mu,$$

$$1 - \alpha = 2\mu,$$

$$x_0 = \left(\frac{r_*}{s^*}\right)^{1/\mu}.$$

Asimismo, para $x > 0$ y $\lambda > 0$, definimos las siguientes funciones

$$\psi(x, \lambda) := \lambda x - s^* x^{1-\mu} + r_* x^{1-2\mu},$$

y

$$\varphi(x, \lambda) := \lambda x^{2\mu} - s^* x^\mu + r_*.$$

De este modo, es fácil comprobar que, para $t \in [0, T]$, $x > 0$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$\psi(x, \lambda) = x^{1-2\mu} \varphi(x, \lambda) \quad \text{y} \quad \lambda x - f(t, x) \geq \psi(x, \lambda). \quad (3.9)$$

y, por definición, se tiene

$$\psi(\delta, \lambda) \geq \lambda \delta \text{ si y sólo si } \delta \in [0, x_0].$$

Asimismo, si $\varphi(x, \lambda) > 0$ entonces $\lambda x - f(t, x) > 0$. Además, si $\lambda > \lambda_0$, entonces $\varphi(x, \lambda) > 0$, y por tanto $\lambda x - f(t, x) > 0$ se cumple para todo $t \in [0, T]$ y $x > 0$.

Calcúlese ahora la derivada parcial respecto a x ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \lambda) = x^{-2\mu} (\lambda x^{2\mu} - s^* (1 - \mu) x^\mu + r_* (1 - 2\mu)) \quad (3.10)$$

Es claro que,

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \lambda) \geq 0 \text{ para } x > 0 \text{ y } \lambda \geq \lambda_1$$

con

$$\lambda_1 := \frac{(s^*)^2 (1 - \mu)^2}{4 r_* (1 - 2\mu)}.$$

Esto significa que, para cualquier $\lambda \geq \lambda_1$, la función $\psi(\cdot, \lambda)$ es creciente en $[0, \infty)$ y, por lo visto anteriormente en (3.9), se tiene que la desigualdad

$$\lambda(x - \delta) - f(t, x) \geq 0 \text{ se cumple para } \lambda \geq \lambda_1, \delta \in (0, x_0), x \in [\delta, \infty) \text{ y } t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

Supóngase que $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ y recuérdese que

$$\lambda_0 = \frac{(s^*)^2}{4 r_*} < \lambda$$

y

$$\lambda < \lambda_1 = \frac{(s^*)^2}{4 r_*} \frac{(1 - \mu)^2}{1 - 2\mu}.$$

De esto y del hecho de que $0 < \mu < \frac{1}{2}$, se sigue que

$$(s^*)^2 (1 - 2\mu) < 4 r_* \lambda (1 - 2\mu) < (s^*)^2 (1 - 2\mu)^2. \quad (3.12)$$

En particular, denótese

$$\Delta := (s^*)^2 (1 - 2\mu)^2 - 4 r_* \lambda (1 - 2\mu) > 0. \quad (3.13)$$

Es evidente que

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \lambda) = 0 \text{ si y sólo si } x = \zeta_1 \text{ o bien } x = \zeta_2$$

donde

$$\zeta_1 := \left(\frac{s^* (1 - \mu) - \sqrt{\Delta}}{2 \lambda} \right)^{1/\mu}$$

y

$$\zeta_2 := \left(\frac{s^* (1 - \mu) + \sqrt{\Delta}}{2 \lambda} \right)^{1/\mu}.$$

Además, es inmediato verificar que $\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \lambda) > 0$ para $x \in (0, \zeta_1) \cup (\zeta_2, \infty)$ y que $\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \lambda) < 0$ para $x \in (\zeta_1, \zeta_2)$. Equivalentemente, $x = \zeta_1$ es el punto en el que la función $\psi(x, \lambda)$ alcanza el máximo local en $(0, \infty)$ y $x = \zeta_2$ es el punto en el que la función alcanza el mínimo local en $(0, \infty)$.

De este modo,

$$\psi(x, \lambda) \geq \psi(\delta, \lambda) \geq \lambda \delta \text{ para } \delta \in (0, x_0) \text{ y } x \in (\delta, \zeta_1]$$

y

$$\psi(x, \lambda) \geq \psi(\zeta_2, \lambda) \text{ para } x \in (\zeta_1, \infty).$$

Por (3.10) y sustituyendo por el mínimo local, se obtiene

$$\lambda \zeta_2^{2\mu} - s^* (1 - \mu) \zeta_2^\mu + r_* (1 - 2\mu) = 0. \quad (3.14)$$

En (3.12), la desigualdad de la izquierda, se reescribe como sigue

$$(\mu - 1)^2 (s^*)^2 - 4 \lambda r_* (1 - 2\mu) < \mu^2 (s^*)^2$$

y, por (3.13), se sabe que la parte izquierda de esta desigualdad es mayor que 0. Así, por todo esto, se deduce que

$$\zeta_2^\mu < 2 \frac{r_*}{s_*}. \quad (3.15)$$

Ahora, empleando (3.14) y (3.15), se llega a

$$\varphi(\zeta_2, \lambda) = \lambda \zeta_2^{2\mu} - s_* \zeta_2^\mu + r_* - \lambda \zeta_2^{2\mu} + s_* (1 - \mu) \zeta_2^\mu - r_* (1 - 2\mu) = \mu (2r_* - s_* \zeta_2^\mu) > 0.$$

Esto equivale a $\psi(\zeta_2, \lambda) > 0$. En particular, para $\delta_0 = \min\{x_0, \frac{\psi}{\lambda}\}$ se satisface

$$\psi(x, \lambda) \geq \lambda \delta \quad \text{para } \delta \in (0, \delta_0), \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1) \text{ y } x \in [\delta, \infty). \quad (3.16)$$

Así, por (3.11) y (3.16) queda probado (3.8), tal y como se deseaba.

PASO 3. Sean ahora λ_0 y δ_0 dados por los razonamientos anteriores. Dado un $\delta \in (0, \delta_0)$ arbitrario y λ^* dado por (3.5). Supóngase que $\lambda^* > \lambda_0$ y defínase

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, \delta) + \lambda^*(x - \delta) & \text{para } x < \delta, \\ f(t, x) & \text{para } x \geq \delta. \end{cases}$$

Considérese el problema auxiliar siguiente

$$x''(t) + a x'(t) + \tilde{f}(t, x) = 0, \quad x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \quad (3.17)$$

Dado que $\delta \in (0, \delta_0)$ y $\delta_0 \in (0, \rho_2)$, es inmediato verificar que las funciones σ_1 y σ_2 son sub y sobre soluciones, respectivamente, del Problema (3.17). Es fácil comprobar que la función \tilde{f} definida anteriormente satisface las hipótesis del Corolario 2.6 y, por tanto, el problema (3.17) tiene una solución x tal que $\rho_2 \leq x(t_1) \leq \rho_1$ para algún $t_1 \in [0, T]$.

PASO 4. Para finalizar la prueba, se verá que, dada la definición de \tilde{f} , la desigualdad $x \geq \delta$ en $[0, T]$ (i.e., $\tilde{f} = f$) se cumple para cualquier solución x del problema (3.17). Esto implica que x es una solución positiva para el problema (2.1).

Sea x una solución arbitraria del problema (3.17). Sea $u(t) = x(t) - \delta$ para $t \in [0, T]$. Entonces u satisface claramente las condiciones periódicas $u(0) = u(T)$ y $u'(0) = u'(T)$ y, además,

$$u''(t) + a u'(t) + \lambda^* u(t) = \lambda^* (x(t) - \delta) - \tilde{f}(t, x(t)) \quad \text{para } t \in [0, T] \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

De este modo, por (3.8), se satisface que

$$h(t) := \lambda^* (x(t) - \delta) - \tilde{f}(t, x(t)) \geq 0 \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Entonces, por el Lema 2.10, $u \geq 0$ en $[0, T]$, es decir, $x \geq \delta$ en $[0, T]$. De este modo, queda probado que el Problema (2.1) tiene solución y, por tanto, el problema (1.13) también la tiene.

□

Observación 3.6. En particular, para $e_* > 0$, el problema (1.13) tiene solución positiva si a es suficientemente grande o T suficientemente pequeña. Cabe destacar que

$$e_* > 0 \text{ si y sólo si } p^* < \rho g \frac{V_0}{A_t} = \rho g h.$$

Es decir, la presión forzada p no es demasiado grande en comparación con la presión hidrostática en el fondo del tanque. Esto impide el vaciado del tubo.

Observación 3.7. Reemplazando las condiciones (2.2) por

$$r(t) = \frac{e(t)}{\mu}, \quad s(t) = \frac{c}{\mu}, \quad 0 < \alpha < \beta < 1,$$

el Problema (2.3), con la función f dada por (3.6), tiene al menos una solución siempre y cuando a sea suficientemente grande o T suficientemente pequeña ($\lambda^* > \lambda_0$).

Teorema 3.8. *Supóngase que $a > 0$, $b > 1$, $c > 0$, $e(t)$ continua y T -periódica y $e_* > 0$. Si se cumplen las siguientes desigualdades*

$$\frac{c^2 (b (e^*)^2 - (b-1) (e_*)^2)}{e_* (e^*)^2} < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \quad (3.18)$$

y

$$(b-1) e^* < b e_* \quad (3.19)$$

entonces el problema (1.13) tiene al menos una solución positiva asintóticamente estable.

Demostración. De nuevo, por el Lema 2.2, basta con ver que, si se cumple que $a > 0$, $r_* > 0$, $s_* > 0$, $0 < \alpha < \beta < 1$,

$$\beta s^* \left(\frac{s^*}{r^*}\right)^{(1-\beta)/(\beta-\alpha)} - \alpha r_* \left(\frac{s_*}{r_*}\right)^{(1-\alpha)/(\beta-\alpha)} < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \quad (3.20)$$

y

$$\frac{\alpha r^*}{\beta s_*} < \frac{r_*}{s^*}, \quad (3.21)$$

entonces el Problema (2.1) tiene al menos una solución positiva asintóticamente estable. Nótese que las desigualdades del enunciado del teorema equivalen a las condiciones (2.2).

Equivalentemente a lo visto en la prueba del Teorema (3.5), el problema (2.1) tiene un par de sub y sobre soluciones inversamente ordenadas. Supóngase que

$$\tilde{\sigma}_1 = \left(\frac{r^*}{s_*}\right)^{1/(\beta-\alpha)}$$

y

$$\tilde{\sigma}_2 = \left(\frac{r^*}{s^*} \right)^{1/(\beta-\alpha)}.$$

De este modo, para cada $\eta > 0$ se puede encontrar una sub-solución estricta σ_1 del problema (2.1) y una sobre-solución estricta σ_2 del Problema (2.1) tales que

$$0 < \tilde{\sigma}_2 - \eta < \sigma_2 < \tilde{\sigma}_2 \leq \tilde{\sigma}_1 < \sigma_1 < \tilde{\sigma}_1 + \eta. \quad (3.22)$$

La desigualdad (3.21) permite escoger $\eta > 0$ y σ_2 de modo que se cumplan las relaciones (3.22) y

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{r^*}{s_*} < \frac{r_*}{s^*} - \eta = \tilde{\sigma}_2 - \eta < \sigma_2. \quad (3.23)$$

Tomando de nuevo la función $f(t, x)$ definida en (3.6), se tiene, por (3.7),

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \geq \beta s_* x^{\beta-1} - \alpha r^* x^{\alpha-1} \text{ para todo } x > 0 \text{ y todo } t \in [0, T].$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) > 0 \text{ para todo } t \in [0, T] \text{ cuando } x > \left(\frac{\alpha r^*}{\beta s_*} \right)^{1/(\beta-\alpha)}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) > 0 \text{ para todo } x \geq \sigma_2.$$

En particular, se satisface la hipótesis del Lema 2.11 de la existencia de una función continua $\gamma : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\bar{\gamma} > 0$ y

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \geq \gamma(t) \text{ para } t \in [0, T], \quad x \in [\sigma_2(t), \sigma_1(t)].$$

Queda por ver la otra condición del Lema 2.11.

Para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\eta > 0$ tal que se satisfacen las desigualdades (3.22), (3.23) y

$$\beta s^* (\tilde{\sigma}_2 - \eta)^{\beta-1} - \alpha r_* (\tilde{\sigma}_1 + \eta)^{\alpha-1} \leq \beta s^* \tilde{\sigma}_2^{\beta-1} - \alpha r_* \tilde{\sigma}_1^{\alpha-1} + \varepsilon.$$

De este modo, para cada $t \in [0, T]$, $x \in [\sigma_2, \sigma_1]$ y $\eta > 0$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = \beta s(t) x^{\beta-1} - \alpha r(t) x^{\alpha-1} \leq \beta s^* \sigma_2^{\beta-1} - \alpha r_* \sigma_1^{\alpha-1} \leq \beta s^* (\tilde{\sigma}_2 - \eta)^{\beta-1} - \alpha r_* (\tilde{\sigma}_1 + \eta)^{\alpha-1}.$$

Por la continuidad de las funciones $x^{\beta-1}$ y $x^{\alpha-1}$ en $(0, \infty)$, se prueba que, por (3.20) y (3.21), se pueden encontrar σ_1 y σ_2 de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \text{ para c.t.p en } [0, T] \text{ y para todo } x \in [\sigma_2(t), \sigma_1(t)].$$

Finalmente, por el Lema 2.11, se sabe que el Problema (2.1) (y, por tanto, el problema (1.13)) tiene al menos una solución positiva asintóticamente estable.

□

Observación 3.9. Sea $e(t)$ es una constante positiva, es decir, $e^* = e_* > 0$. Es obvio que bajo esta hipótesis la condición (3.19) se cumple y que si además $1 < b \leq 3$, entonces la condición (3.4) del Teorema 3.5 implica el cumplimiento de la desigualdad (3.18).

A continuación, consideraremos la configuración de un tanque y un tubo sin fricción, es decir, $r_0 = 0$ y, por tanto, $a = 0$. Este modelo fue estudiado por Feng Wang, José Ángel Cid y Mirosława Zima en [10].

Recordemos que el problema sin considerar la fricción se modelaba como sigue

$$l''(t) = \frac{1}{l(t)} (e(t) - b (l'(t))^2) - c, \quad t \in [0, T], \quad (3.24)$$

$$l(0) = l(T), \quad l'(0) = l'(T).$$

Así, el siguiente resultado nos muestra las condiciones necesarias para la existencia de soluciones y estabilidad.

Teorema 3.10. [10, Teorema 4.1] *Supóngase que $b > 1$, $c > 0$, $e(t)$ continua y T -periódica y $e_* > 0$. Se tienen los siguientes resultados:*

1. Existencia. *Si se satisface la siguiente condición*

$$c^2 (b e^* - (b - 1) e_*) < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e_*^2,$$

entonces existe una solución, $l(t)$, T -periódica de (3.24) tal que

$$\frac{e_*}{c} \leq l(t) \leq \frac{e^*}{c} \text{ para todo } t \in [0, T].$$

2. Estabilidad. *Si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$\frac{e^*}{e_*} < \frac{b(b+2)}{2(b-1)(b+3)},$$

$$\frac{c^2}{e_*} < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2,$$

$$\frac{e^*}{e_*} \leq \frac{4(b-1)(b+3)}{b(2b+3)},$$

y

$$3b(b+2) \left(\frac{e^*}{e_*}\right)^{5/2} - 6(b-1)(b+3) \left(\frac{e^*}{e_*}\right)^{3/2} < 5(b-2)^2,$$

entonces existe una solución, $l(t)$, estable y T -periódica del Problema (3.24) tal que

$$\frac{e_*}{c} \leq l(t) \leq \frac{e^*}{c} \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Por último, si tomamos límites en c , obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11. [10, Teorema 4.2] *Supóngase que $b > 1$, $c > 0$, $e(t)$ continua y T -periódica y $\bar{e} > 0$. Entonces, para c suficientemente pequeño, existe, al menos, una solución T -periódica.*

Capítulo 4

Ejemplos

En esta sección estudiaremos algunos ejemplos concretos de funciones que cumplan las condiciones de los resultados vistos en la sección anterior.

Ejemplo 4.1. El Problema siguiente

$$l''(t) + l'(t) = \frac{1}{l(t)} \left(\frac{3}{2} \sin(t) + 6 - (l'(t))^2 \right) - c, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (4.1)$$
$$l(0) = l(2\pi), \quad l'(0) = l'(2\pi),$$

tiene solución si

$$0 < c < \sqrt{3} \approx 1,73205.$$

Demostración. Definimos

$$e(t) = \frac{3}{2} \sin(t) + 6,$$

que es una función continua y 2π -periódica.

Como se tiene que el valor mínimo del seno se alcanza en $t = 3\pi/2$, sabemos que

$$e_* = \frac{9}{2} > 0.$$

Así, tomando los siguientes datos en el Teorema 3.5

$$a = 1, \quad b = 2, \quad T = 2\pi,$$

vemos que el Problema (4.1) tiene solución 2π -periódica si

$$0 < c^2 < \frac{4 e_*}{b+1} \left(\left(\frac{\pi}{T} \right)^2 + \frac{a^2}{4} \right),$$

y sustituyendo con nuestros datos, se tiene que

$$0 < \sqrt{3} \approx 1,73205$$

□

Ejemplo 4.2. Sea ahora el problema

$$l''(t) + l'(t) = \frac{1}{l(t)} \left(\frac{1}{2} \cos^2(t) + 2 - 2 (l'(t))^2 \right) - c, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (4.2)$$

$$l(0) = l(2\pi), \quad l'(0) = l'(2\pi).$$

Este problema tiene al menos una solución 2π -periódica asintóticamente estable si

$$0 < c < 0,47818.$$

Demostración. En este caso, tenemos la siguiente función continua y 2π -periódica

$$e(t) = \frac{1}{2} \cos^2(t) + 2.$$

De esta manera, tomando los siguientes valores en el Teorema 3.8

$$a = 1, \quad b = 2, \quad T = 2\pi.$$

Es fácil ver que se cumple

$$(b - 1) e^* < b e_*,$$

donde, para este caso concreto,

$$e^* = \frac{5}{2}$$

y

$$e_* = 2.$$

Por otra parte, de la condición 3.18, sustituyendo por nuestros datos, se deduce

$$0 < c < 0,367647.$$

De esta forma, se cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.8 y, por lo tanto, existe al menos una solución asintóticamente estable del Problema 4.2. □

Ejemplo 4.3. En este ejemplo consideraremos el modelo sin fricción, es decir, $r_0 = 0$ y, por tanto, $a = 0$.

Sea entonces el problema siguiente

$$l''(t) = \frac{1}{l(t)} \left(\frac{1}{5} \sin^2(t) + 10 - b (l'(t))^2 \right) - c, \quad (4.3)$$

$$l(0) = l(2\pi), \quad l'(0) = l'(2\pi).$$

Si se cumplen las siguientes condiciones

$$1,5 \leq b < 1,56138$$

y

$$0 < c < 0,790569,$$

entonces el Problema (4.3) tiene al menos una solución 2π -periódica estable.

Demostración. La función siguiente

$$e(t) = \frac{1}{5} \sin^2(t) + 10$$

es continua y 2π -periódica. Entonces, sabemos que

$$e^* = 10,2,$$

$$e_* = 10$$

y

$$\frac{e^*}{e_*} = 1,02.$$

De este modo, vemos que las condiciones del Teorema 3.10 se cumplen para

$$1,5 \leq b < 1,56138$$

y

$$0 < c < 0,790569.$$

Por tanto, el problema considerado tiene solución 2π -periódica.

Ahora representemos una solución del Problema (4.3). Tomando $c = \frac{2}{5}$ y $b = 1,55$, por el Teorema 3.10, la Figura 4.1 representa una solución 2π -periódica para el Problema (4.3).

Cabe mencionar que la gráfica de la Figura 4.1 proviene del trabajo [10].

□

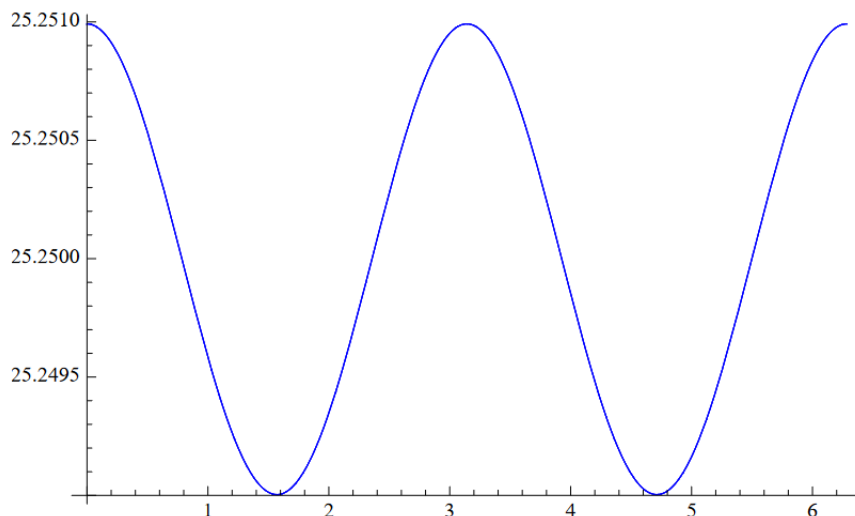


Figura 4.1: Solución del Problema (4.3).

Ejemplo 4.4. Daremos ahora un último ejemplo del modelo sin considerar la fricción. En particular, consideremos el siguiente problema

$$l''(t) = \frac{1}{l(t)} \left(\cos(t) + \frac{1}{2} - b (l'(t))^2 \right) - c, \quad t \in [0, T], \quad (4.4)$$

$$l(0) = l(T), \quad l'(0) = l'(T).$$

Entonces existe una solución 2π -periódica para un c suficientemente pequeño.

Demostración. Puesto que en este caso tenemos que

$$e(t) = \cos(t) + \frac{1}{2},$$

no podemos aplicar el Teorema 3.10 ya que

$$e_* = -\frac{1}{2} < 0.$$

Sin embargo, por el Teorema 3.11 sabemos que (4.4) tiene solución 2π -periódica.

Consideremos el caso particular para $c = 0,133333$ y $b = 3/2$. De este modo, la Figura 4.2 representa la solución 2π -periódica para el problema particular.

□

Cabe mencionar que las gráficas estos dos últimos ejemplos provienen del trabajo [10].

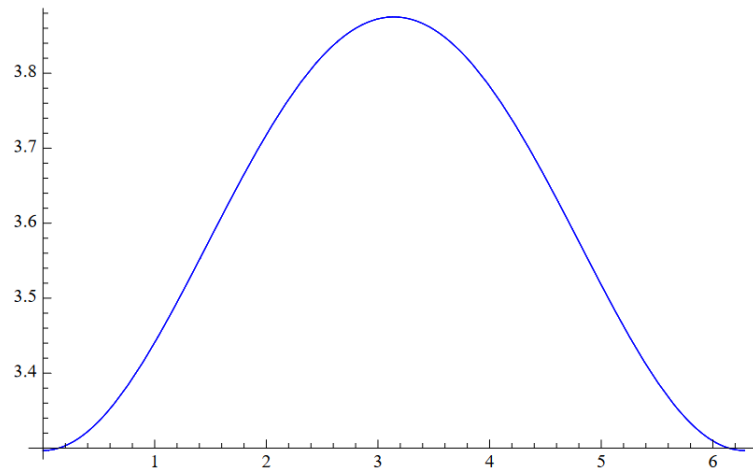


Figura 4.2: Solución del Problema (4.4).

Bibliografía

- [1] D. Bonheure and C. de Coster, Forced singular oscillators and the method of lower and upper solutions, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **22** (2003), 297–317.
- [2] H.J. von Bredow, *Untersuchung eines ventillosen Pumpprinzipts*, (1968), Fortschr. Ber. VDI-Zeitschr. Reihe 7, Nr. 9.
- [3] J.A. Cid, G. Propst, M. Tvrdý, On the pumping effect in a pipe/tank flow configuration with friction, *Physica D* **273-274** (2014), 28-33.
- [4] G. Liebau, Über ein ventilloses Pumpprinzip, *Naturwissenschaften* , **41**, (1954), 327.
- [5] M. Moser, J.W. Huang, G.S. Schwarz, T. Kenner, A. Noordergraaf , Impedance defined flow generalisation of William Harvey’s concept of circulation *Int. J. of Cardiovascular Med. and Sci.* **1** (1998), 205-211.
- [6] F.I. Njoku, P. Omari, Stability properties of periodic solutions of a Duffing equation in the presence of lower and upper solutions, *Applied Mathematics and Computation* **135** (2003), 471–490.
- [7] P. Omari, M. Trombetta, Remarks on the lower and upper solutions method for second and third-order periodic boundary value problems, *Appl. Math. Comput.* **50** (1992), 1–21.
- [8] G. Propst, Pumping effects in models of periodically forced flow configurations, *Physica D* **217** (2006), 193–201.
- [9] S. Takagi and K. Takahashi, Study of a Piston Pump without Valves, *Bulletin of JSME* **28** (1985), 831–836.
- [10] F. Wang, J.A. Cid, M. Zima, Lyapuniv stability for regular equations to the Liebau phenomenon, *Discrete and continuous dynamical systems* **38** (2018), 9.