FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Unicidad de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Antón Rodríguez de Castro

2020-2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Unicidad de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Antón Rodríguez de Castro

Julio, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Área de Análisis Matemático.
Título: Unicidad de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Breve descripción del contenido
En este trabajo se recogen diferentes criterios que garantizan la unicidad de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Además del ampliamente conocido Teorema de Lipschitz, serán probados otros criterios, como pueden ser, por citar algunos, los de Peano, Osgood, Montel – Tonelli, Nagumo, Krasnosel'skii – Krein o el de Perron. Se realizará un estudio de estos y otros resultados, con sus correspondientes pruebas, así como ejemplos en los que son aplicados.

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar cuando es posible garantizar la unicidad de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Para ello demostramos una serie de criterios que se basan en las propiedades de la función que define el problema.

Empezaremos definiendo un conjunto de conceptos y resultados introductorios a los que recurriremos constantemente a lo largo del texto, como la definición de problema de valor inicial. Posteriormente, como núcleo del texto, recogemos los distintos teoremas que nos aseguran la unicidad de la solución, avanzando de forma progresiva desde aquellos con un orden más restrictivo, como el conocido Teorema de Lipschitz, hasta aquellos con uno más amplio, como el Criterio de Perron que generaliza al anterior. Para demostrar la unicidad, la tónica general es suponer que existen dos soluciones en un cierto intervalo que no coinciden en algún punto y, por algún resultado previo o alguna condición impuesta, concluir que esta hipótesis no es posible. Todos los criterios se acompañan de numerosos ejemplos donde se ilustra si es factible aplicarlos.
En el último capítulo estudiaremos condiciones en la variable independiente para determinar la unicidad.

Resumo

A finalidade deste traballo é estudar cuando é posíbel garantir a unicidade da solución do problema de Cauchy para ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde. Para iso probamos unha serie de criterios basados nas propiedades da función que define o problema.

Comezaremos definindo un conxunto de conceptos e resultados introdutorios aos que recorreremos constantemente ao longo do texto, como a definición de problema de valor inicial. Posteriormente, como núcleo do traballo, recollemos os distintos teoremas que nos

aseguran a unicidade da solución, avanzando de forma progresiva dende aqueles cunha orde máis restritiva, como o coñecido Teorema de Lipschitz, ata aqueles cunha máis amplia, como o Criterio de Perron que xeneraliza ao anterior. Para demostrar a unicidade, a tónica xeral é supor que existen dúas solucións nun certo intervalo que non coinciden nalgún punto e, por algún resultado previo ou por algunha condición imposta, concluir que non é posíbel esta hipótese. Tódolos criterios principais acompáñanse de numerosos exemplos onde ilústrase se é factible aplicalos.
No derradeiro capítulo estudaremos condicións na variable independente para determinar a unicidade.

Abstract

The aim of this proyect consists of studying when is possible to ensure uniqueness of solution of Cauchy problem in the field of first order differential equations. To achieve this, we prove a series of criteria based on some properties of the function that defines the problem.

We begin with a set of key words and introductory results needed to the development of the text wich will be constantly referred, such as initial value problem. After, as the main part of the work, we collect different theorems to ensure uniqueness, starting with those which are more restrictive, like the well-known Lipschitz Theorem, and continuing with those more general, such as Perron Criterion which generalizes Lipschitz. In order to guarantee uniqueness, the usual technique is to assume there are two solutions differing on a point and, thanks to a previous result or a condition in the statement, prove this is not true. Each main theorem is accompanied with various examples, explaining if is possible or not to apply them .
In the last chapter we will study conditions on the independent variable to determine uniqueness.

Introducción

El problema de Cauchy ha sido uno de los tema más investigados durante los últimos cien años por la comunidad científica. Uno de sus focos es el estudio de soluciones, poniendo especial atención sus propiedades tanto cualitativas, como se centra este escrito, como cuantitativas. Lo primero que debemos recoger son una serie de definiciones que vamos a usar a lo largo de todo el trabajo y a las que nos referiremos continuamente. Para ello, nos guiaremos en esta sección por [8].
Comenzamos definiendo el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria, donde n denota un natural mayor que cero.

Definición 0.1. Sea

$$\begin{array}{rcl} f: D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x, y) = (x, y_1, ..., y_n) & \mapsto & f(x, y) = (f_1(x, y), ..., f_n(x, y)). \end{array}$$

Llamamos **Ecuación Diferencial Ordinaria**, de forma abreviada EDO, de primer orden en forma normal relativa a la función f a

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{1}$$

donde

$$y' = (y_1', ..., y_n') = \left(\frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{dy_n}{dx} \right).$$

Aclarando los términos de la definición anterior, decimos que es ordinaria al aparecer solo la derivada respecto de x, de primer orden al tener orden uno la derivada y en forma normal o explícita [1] al aparecer despejada $y'(x)$.
De la misma forma que dada función uno de los objetivo es hallar los valores donde se anula, nuestra meta en cierto sentido en este tipo de ecuaciones es hallar funciones que la verifiquen. Veamos que entendemos por solución de una EDO.

[1] En forma implícita, una EDO es una expresión de la forma $h(x, y, y') = 0$.

Definición 0.2. Sea

$$\begin{aligned} y : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto y(x) \end{aligned}$$

una función definida en I, un intervalo cualquiera. Decimos que $y(x)$ es una **solución** de la ecuación diferencial (1) si, y solo si, para todo $x \in I$:

a. $(x, y(x)) \in D$,

b. la función es derivable en I; y además

c. $y'(x) = f(x, y(x))$.

Expliquemos brevemente el sentido detrás de esta idea. La condición (a) nos dice que la gráfica de $y(x)$ está en D y la igualdad (c) muestra que la función debe cumplir la ecuación diferencial. En el caso de que I sea cerrado, en sus puntos extremos entendemos (b) como que exista la derivada lateral correspondiente.

El último de los conceptos a definir es el de problema de valor inicial, que está íntimamente relacionado con los dos anteriores.

Definición 0.3. Sea $y' = f(x, y)$ una ecuación diferencial como en la Definición 0.1 y sea (x_0, y_0) un punto del conjunto D[2]. El **problema de valor inicial**, también conocido como **problema de Cauchy**, consiste en encontrar una función $y(x)$ en las condiciones de la Definición 0.2 tal que

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ y(x_0) = y_0, \quad x \in I. \tag{2}$$

Por lo tanto, la función $y(x)$ para ser solución del problema de Cauchy (2) debe verificar los requisitos relativos al concepto de solución y además cumplir que $y(x_0) = y_0$.

Aclaremos que a lo largo del trabajo los teoremas y ejemplos recogidos son relativos al caso particular $n = 1$ en las Definiciones 0.1 y 0.2, pudiendo varios de ellos generalizarse a mayor dimensión para garantizar la unicidad de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, teniendo en cuenta que el rol que desempeñan las variables y_1,...,y_n es idéntico.

Una vez aclarados estos términos preliminares, comentemos brevemente el esquema y desarrollo del texto. Empezaremos razonando la necesidad de trabajar con funciones continuas en el problema (2), ejemplificando la dificultad que tiene el caso discontinuo. Además,

[2] El único requisito que debe cumplir el conjunto D en las Definiciones 0.1 y 0.2 es que tenga interior no vacío. Por otro lado, el punto (x_0, y_0) debe pertenecer a su clausura.

probaremos una proposición que relaciona la regularidad de las funciones y sus soluciones. A continuación, como parte principal del proyecto, se enuncian los distintos criterios para asegurar la unicidad de la solución. Nótese que la mayoría de ellos garantizan la existencia global de una única solución en un intervalo de la forma $[x_0 - a, x_0 + a]$, pudiendo fácilmente ser adaptados tanto a un subconjunto de él como al caso local. Junto a la prueba de los teoremas se recogen numerosos ejemplos, donde mostramos cuando es posible aplicar los resultados. En particular, pondremos especial atención en el estudio de las condiciones de los criterios, ejemplificando que si son suprimidas los teoremas no tienen por qué cumplirse, pese a que a veces se tenga la unicidad del problema. Los primeros nombrados son los Teoremas de Lipschitz y Peano, que piden que la función cumpla ciertas condiciones. Posteriormente, se introducen los criterios de Osgood y Montel-Tonelli, generalizando este último para dar una condición más sencilla de aplicar a la resolución de problemas. Tras ello, se recogen los resultados de Nagumo y Rogers, que guardan un cierto parecido en su estructura. Como últimos criterios, probaremos los Teoremas de Krasnosel'skii-Krein y Perron. Para finalizar, en el último capítulo estudiaremos condiciones en la variable independiente para asegurar la unicidad, relacionando los problemas directo e inverso con sus soluciones. El trabajo acaba con la Bibliografía, en la que aparecen los documentos que manejamos para su realización.

Capítulo 1

Ejemplos y resultados previos

Antes de enunciar los distintos criterios para asegurar la unicidad de la solución, destacamos un último apunte sobre los ejemplos y resultados del texto, en los cuales vamos a trabajar con la hipótesis de que nuestra función $f(x, y)$ sea continua en el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, lo que implica que la condición (b) relativa al concepto de solución se puede reescribir como:

$$y'(x) \text{ existe y es continua para todo } x \in I.$$

Esta propiedad adicional se deduce de la siguiente proposición, recogida también en [8].

Proposición 1.1. *Sea $f(x, y)$ una función continua e $y(x)$ una solución de $y' = f(x, y)$. Entonces $y(x) \in \mathcal{C}^1(I)$.*

Demostración. Como la función y es solución, por la condición (b) es derivable, por tanto continua, en el intervalo I. Como, por hipótesis, f es continua en D, $y' = f(x, y)$ es continua en I, al ser composición de funciones continuas. Por lo que $y \in \mathcal{C}^1(I)$. $\square$

El resultado anterior se puede generalizar para el caso de que la función sea r veces continuamente diferenciable, con $r \in \mathbb{N}^+$, garantizando así que su solución tenga un grado más de regularidad.

Proposición 1.2. *Dado el problema de Cauchy* (2)*, si la función $f(x, y) \in \mathcal{C}^r(D)$, la solución $y(x) \in \mathcal{C}^{r+1}(I)$.*

Demostración. Aplicamos el método de inducción para probar el enunciado.

- Para $r = 1$. Como $f \in \mathcal{C}^1(D)$, la función es continua en D. Por la Proposición 1.1, la solución $y \in \mathcal{C}^1(I)$. Ahora bien, escribiendo $y' = f(x, y)$ vemos que y' es composición de funciones clase 1, por tanto $y' \in \mathcal{C}^1(I)$, de donde se deduce que $y \in \mathcal{C}^2(I)$.

- Como hipótesis de inducción, suponemos cierto el resultado para $r-1$, o lo que es lo mismo:
$$\text{si } f \in \mathcal{C}^{r-1}(D) \Longrightarrow y \in \mathcal{C}^r(I).$$
- Probamos la proposición para r, es decir, dada una función $f(x,y) \in \mathcal{C}^r(D)$ demostremos que la solución $y(x) \in \mathcal{C}^{r+1}(I)$.
  Como la función es clase r, $f \in \mathcal{C}^{r-1}(D)$. Por la hipótesis de inducción, $y \in \mathcal{C}^r(I)$. Escribiendo $y' = f(x,y)$ vemos que y' es composición de funciones clase r, por lo tanto $y' \in \mathcal{C}^r(I)$ y la función $y \in \mathcal{C}^{r+1}(I)$.

□

Existencia de solución

Antes de hablar de soluciones y su unicidad, en este apartado, donde nos apoyamos en el Capítulo 1 de los libros [1] y [6], justificamos de forma breve el hecho de trabajar con funciones continuas. Como vimos en las Proposiciones 1.1 y 1.2, que la función tenga cierta regularidad implica que su solución también. Sin embargo, en el caso de que la función sea discontinua, la naturaleza de la misma es de carácter variado. Esta observación se muestra en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3. Consideramos el problema de valor inicial
$$y' = \frac{2y}{x}, \ \ y(0) = 0.$$
La función $f(x,y) = 2y/x$ no está definida en los puntos de la recta $x = 0$, por lo tanto no es posible encontrar un entorno centrado en el punto $(0,0)$ donde la función sea continua. Como veremos luego en el Teorema de Cauchy-Peano, no podemos garantizar la existencia de solución en este caso.
Sin embargo, separando las variables e integrando a ambos lados se sigue que las funciones
$$y(x) = cx^2,$$
con $c \in \mathbb{R}$, son todas soluciones del problema de Cauchy.

Ejemplo 1.4. El problema de valor inicial
$$y' = \frac{1}{x}, \ y(0) = 0,$$
con $f(x,y)$ discontinua, como vimos en el Ejemplo 1.3, no tiene ninguna solución. Supongamos al contrario que sí la tiene. Separando las variables e integrando, teniendo en cuenta que $y(x_0) = y_0$, la solución vendría dada implícitamente por
$$y - y_0 = \log\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Aplicando la condición inicial vemos que no existe tal función.

El Teorema de Cauchy-Peano[1] es el resultado más conocido para garantizar la existencia de solución, local en este caso. Pese a no recoger la prueba por su extensión, notamos que una de las posibles se basa, al igual que la original de Peano, en la construcción de una sucesión de soluciones aproximadas.

Teorema 1.5 (Teorema de existencia de Cauchy-Peano). *Dado* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, consideramos el rectángulo cerrado*

$$\bar{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}, \quad a, b > 0, \tag{1.1}$$

con f *continua en él. Entonces, el problema de valor inicial* (2) *tiene al menos una solución en el intervalo* $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$*, donde*

$$\delta = \text{mín}\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \sup_{\bar{S}} |f(x, y)|.$$

Sin embargo, aunque la existencia de solución esté asegurada bajo la continuidad de la función, el siguiente ejemplo muestra que para garantizar la unicidad del problema necesitamos alguna condición adicional.

Ejemplo 1.6. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = y^{1/2},\ y(0) = 0. \tag{1.2}$$

La función $f(x, y) = y^{1/2}$ es continua en el conjunto $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Por el Teorema de Cauchy-Peano 1.5, existe al menos una solución en el intervalo $[0, \infty)$.
De manera inmediata se hallan dos: la trivial $y(x) = 0$ y, tras separar las variables e integrar, la función $y(x) = x^2/4$.

Nótese que en particular el problema posee infinitas soluciones de la forma

$$y(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq a, \\ \\ \dfrac{1}{4}(x - a)^2 & si \quad\quad x < a, \end{cases}$$

con $a \geq 0$.

Una explicación a no tener la unicidad en el Ejemplo 1.6 es que estamos ante una ecuación diferencial autónoma, aquella donde la función no depende de la variable independiente.

[1] Publicado por primera vez por el propio Peano en 1886 con varias incorrecciones en la prueba y corregido por él 4 años más tarde.

Capítulo 2

Teoremas de Unicidad

En este capítulo recogemos los distintos criterios que garantizan la unicidad de la solución del problema de Cauchy (2). A lo largo de él seguiremos como referencia principal el Capítulo 1 del libro [1], complementándonos en cada sección de otros textos que nombraremos en su inicio.
Nótese primero que la gran mayoría de teoremas definen una única solución de forma global en el intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$, recogiendo en algunos casos un resultado análogo para los conjuntos $[x_0 - a, x_0]$ y $[x_0, x_0 + a]$. Empezamos por el conocido Teorema de Lipschitz.

2.1. Condición y Teorema de Lipschitz

En esta sección nos apoyamos de las notas de [5] y del Capítulo 1 de [6], además de lo mencionado respecto del libro [1].

Para asegurar la unicidad de la solución del problema de Cauchy (2) empezamos pidiendo que la variación de la función respecto de la variable y esté acotada.

Definición 2.1. Una función $f(x, y)$ se dice **lipschitziana** o que satisface la **condición de Lipschitz** en un conjunto D si

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}| \tag{2.1}$$

para todo par $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$. La constante $L \geq 0$ se llama **constante de Lipschitz**.

De la Definición 2.1 se observa que el concepto de que una función sea lipschitziana oscila entre la continuidad y la diferenciabilidad de la misma con respecto de la variable y. La siguiente proposición recoge este hecho con detalle.

Proposición 2.2. *Toda función lipschitziana es uniformemente continua, por tanto continua, respecto de y.*

Demostración. Por hipótesis, si f es lipschitziana se cumple la desigualdad (2.1). Sean $\epsilon > 0$ y x fijados arbitrariamente. Distinguimos los dos siguientes casos:

- si $L = 0$, se tiene que $f(x, y) = f(x, \bar{y})$ para todo $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$. Esto demuestra que la función es constante respecto de la variable y. Por tanto, f es uniformemente continua respecto y.

- si $L > 0$, tomamos $\delta = \epsilon/L > 0$. Entonces, para todo par $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$ tal que $|y - \bar{y}| < \delta$ se sigue que

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}| < \epsilon.$$

□

Ejemplo 2.3. La función $f(x, y) = 1 + xy^2$ definida en

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [3, 10],\ y \in [-1, 1]\}$$

es lipschitziana. Veámoslo.
Dados $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, \bar{y})| &= |(1 + xy^2) - (1 + x\bar{y}^2)| \\ &= |x||y^2 - \bar{y}^2| = |x||(y - \bar{y})(y + \bar{y})| \\ &= |x||y - \bar{y}||y + \bar{y}|. \end{aligned}$$

Como $|x| \leq 10$, $|y - \bar{y}| \leq 2$ e $|y + \bar{y}| \leq 2$ concluimos que

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq 40|y - \bar{y}|.$$

Por tanto, la constante de Lipschitz es en este caso $L = 40$. Notar que dichas constantes no son únicas, ya que si L es la constante de Lipschitz para f, $\bar{L} > L$ también lo es.

No obstante, el recíproco no se cumple. Es decir, existen funciones uniformemente continuas con respecto de y que no son lipschitzianas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{y}$. Veamos primero que es uniformemente continua en el conjunto $D = \mathbb{R} \times [0, \infty)$.
Fijado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon^2$. Por tanto si $|\bar{y} - y| < \delta$ se tiene que

$$\left(|\sqrt{\bar{y}} - \sqrt{y}|\right)^2 \leq |\sqrt{\bar{y}} - \sqrt{y}||\sqrt{\bar{y}} + \sqrt{y}| = |\bar{y} - y| < \epsilon^2 \Longrightarrow |\sqrt{\bar{y}} - \sqrt{y}| < \epsilon.$$

Sin embargo, no es lipschitziana en D al no existir una constante L en las condiciones de la Definición 2.1. Supongamos, al contrario, que sí lo es, existiendo $L \geq 0$ como en la desigualdad (2.1). Entonces

$$L \geq \left|\frac{f(x,y) - f(x,\bar{y})}{y - \bar{y}}\right| = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{\bar{y}}}{(\sqrt{y} - \sqrt{\bar{y}})(\sqrt{y} + \sqrt{\bar{y}})} = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{\bar{y}}}, \quad y, \bar{y} \geq 0,\ y \neq \bar{y}.$$

Por la Definición 2.1, la desigualdad debe verificarse para todo par $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$. Ahora bien, fijado un x, tomando $\bar{y} = 0$ e $y = 1/n^2$ con $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue que

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{\bar{y}}} = \frac{1}{(1/n^2)^{1/2}} = n,$$

lo que implica que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente por la constante L, lo cual es un sinsentido. Notar que en particular dicha función no es lipschitziana en ningún subconjunto que contenga a puntos de la forma $(x, 0)$.

Además, que una función no sea diferenciable no implica que no sea lipschitziana. Por ejemplo, la función $f(x,y) = |y-1|$ no es diferenciable en la recta $y = 1$ y, sin embargo, es lipschitziana con $L = 1$, ya que para todo par $(x, y),\ (x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = ||y-1| - |\bar{y}-1|| \leq |(y-1) - (\bar{y}-1)| = |y - \bar{y}|.$$

Si la función es derivable respeto de y, la constante de Lipschitz se puede hallar de la siguiente forma.

Lema 2.5. *Sea D un conjunto convexo*[1] *y $f(x,y)$ una función derivable respecto de y en todo D. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que se verifique la condición de Lipschitz* (2.1) *es que*

$$\sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{df(x,y)}{dy}\right| \leq L.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $y > \bar{y}$. Como D es convexo y $f(x,y)$ derivable respecto de la variable y, por el Teorema del Valor Medio, para todo par $(x,y), (x,\bar{y}) \in D$ se tiene que

$$f(x,y) - f(x,\bar{y}) = \frac{df(x,y^*)}{dy}(y - \bar{y}) \tag{2.2}$$

donde $y^* \in (\bar{y}, y)$. Tomando el valor absoluto en la ecuación (2.2) se sigue el resultado. Recíprocamente, de forma directa de la Definición 2.1 se deduce que

$$\left|\frac{df(x,y)}{dy}\right| = \lim_{y\to\bar{y}} \left|\frac{f(x,y) - f(x,\bar{y})}{y - \bar{y}}\right| \leq L.$$

□

[1] Un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si, y solo si, para todo $x, y \in D$ se tiene que $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$, con $\alpha \in [0,1]$.

El siguiente ejemplo muestra que, aplicando el Lema 2.5, ser lipschitziana depende tanto de la función como del conjunto considerado.

Ejemplo 2.6. Sea la función diferenciable $f(x,y) = \cos(x) + y^2$.

- Consideramos primero el rectángulo
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$
Para todo $(x,y) \in D_1$ tenemos que
$$\left|\frac{df(x,y)}{dy}\right| = |2y| \leq 2.$$
Por el Lema 2.5 se tiene que la función es lipschitziana en D_1 con $L = 2$.

- Tomamos ahora la banda
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y \in \mathbb{R}\}.$$
Pese que la derivada respecto de la variable y existe y es continua, no está acotada al tender a ∞ cuando $y \to \infty$. Por el Lema 2.5 se sigue que la función no es lipschitziana en D_2.
Otra forma de ver este hecho es por la propia definición, debido a que para todo $(x,y), (x,\bar{y}) \in D_2$:
$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= |y^2 - \bar{y}^2| \\ &= |(y-\bar{y})(y+\bar{y})| \\ &= |y+\bar{y}||y-\bar{y}|. \end{aligned}$$
Escogiendo $L = |y+\bar{y}|$ vemos que la constante de Lipschitz se puede hacer arbitrariamente grande.

Como observación, en el Ejemplo 2.4 otra posible explicación de por qué la función $f(x,y) = \sqrt{y}$ no es lipschitziana en $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ nos la da lema anterior. Calculando su derivada y tomando el límite cuando $y \to 0^+$ obtenemos:
$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \infty.$$
Por el Lema 2.5 se concluye que la función no satisface la condición de Lipschitz (2.1).

A continuación, enunciamos y demostramos dos lemas necesarios para probar el Teorema de Unicidad de Lipschitz. El primero es una caracterización de las soluciones del problema de Cauchy, relacionándolas con el campo de las Ecuaciones Integrales.
El segundo nos será útil para demostrar que dos posibles soluciones son idénticas.

Lema 2.7. *Sea $f(x, y)$ una función continua definida en un conjunto D. Entonces $y(x)$ es solución del problema (2) si, y solo si, es solución de la ecuación integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt. \tag{2.3}$$

Demostración. Toda solución y de (2) cumple que $y'(x) = f(x, y(x))$. Integrando la igualdad respecto de x se tiene que

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\ dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt \Longrightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt.$$

Teniendo en cuenta la condición inicial se sigue el resultado.
Recíprocamente, si $y(x)$ es una solución de la ecuación integral (2.3), tomando $x = x_0$ se tiene que $y(x_0) = y_0$. Ahora bien, como por hipótesis $f(x, y)$ es continua, derivando (2.3) respecto de x a ambos lados de la igualdad se tiene que $y'(x) = f(x, y(x))$. $\square$

Lema 2.8. *Sean $\phi(x)$ y $q(x)$ dos funciones continuas no negativas en $[x_0 - a, x_0 + a]$ de tal forma que*

$$\phi(x) \leq \Big| \int_{x_0}^{x} q(t)\phi(t)\ dt \Big|. \tag{2.4}$$

Entonces $\phi(x) = 0$ para todo $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Demostración. Fijado un $x \in [x_0, x_0 + a]$ arbitrario, definimos la función $r(x)$ como

$$r(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)\phi(t)\ dt,$$

que cumple que $r(x_0) = 0$ y $r'(x) = q(x)\phi(x)$.
Por la desigualdad (2.4) tenemos que

$$r'(x) \leq q(x)r(x). \tag{2.5}$$

Multiplicando a ambos lados de la desigualdad (2.5) por $(-\int_{x_0}^{x} q(t)dt)$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\int_{x_0}^{x} q(s)\ ds\right) r(x)\right) \leq 0.$$

Por tanto la función

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} q(s)\ ds\right) r(x)$$

es decreciente para todo x.
Como $r(x_0) = 0$, se tiene que $r(x) \leq 0$ y entonces $\phi(x) \leq r(x) \leq 0$. Como por hipótesis la función ϕ es no negativa, concluimos que $\phi(x) = 0$ en $[x_0, x_0 + a]$.
La prueba en el intervalo $[x_0 - a, x_0]$ es análoga. $\square$

El siguiente resultado prueba la unicidad de la solución por el criterio de Lipschitz, el cual demostramos de dos formas diferentes. En la primera haremos uso de los dos lemas previos.

Teorema 2.9 (Teorema de Unicidad de Lipschitz). *Sea $f(x, y)$ una función continua en $\bar{S}$ cumpliendo la condición de Lipschitz* (2.1). *Entonces, el problema de Cauchy tiene a lo sumo una solución definida en* $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Demostración. Supongamos que tenemos dos soluciones del problema del valor inicial (2), $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, en el conjunto $[x_0 - a, x_0 + a]$. Por la hipótesis (2.1) y la ecuación integral (2.3) se tiene que

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \Big| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| \; dt \Big| \leq L \Big| \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| \; dt \Big|.$$

Por el Lema 2.8 se sigue que $|y(x) - \bar{y}(x)| = 0$, lo que demuestra que ambas soluciones son idénticas para todo $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. □

Veamos ahora una segunda prueba del teorema en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$ *usando exclusivamente el Teorema del Valor Medio, siendo análoga en* $[x_0 - a, x_0]$.

Demostración. Sean otra vez dos soluciones del problema de Cauchy (2), $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, definidas en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$. Por ser soluciones:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \; \bar{y}'(x) = f(x, \bar{y}(x)) \text{ e } y(x_0) = \bar{y}(x_0) = y_0.$$

Consideramos la función $|y(x) - \bar{y}(x)|$, que es diferenciable y cumple que $|y(x_0) - \bar{y}(x_0)| = 0$. Supongamos que no es nula en en algún punto del intervalo $[x_0, x_0 + a]$. Por tanto, existe un $\epsilon \in [x_0, x_0 + a)$ tal que $|y(x) - \bar{y}(x)| = 0$ en $[x_0, \epsilon]$ e $|y(x) - \bar{y}(x)|$ es no nula en algún punto del intervalo $[\epsilon, \epsilon + l]$, con $l > 0$.

Tomamos un l suficientemente pequeño tal que $lL < 1$, donde L es la constante de Lipschitz de f.

Ahora bien, como la función $|y(x) - \bar{y}(x)|$ es continua y no nula en el intervalo cerrado $[\epsilon, \epsilon + l]$, por el Teorema de Weierstrass alcanza un máximo positivo en $\bar{\epsilon} > \epsilon$. Por el Teorema del Valor Medio en el conjunto $[\epsilon, \bar{\epsilon}]$, existe un $\epsilon^* \in (\epsilon, \bar{\epsilon})$ tal que

$$y'(\epsilon^*) - \bar{y}'(\epsilon^*) = \frac{[y(\bar{\epsilon}) - \bar{y}(\bar{\epsilon})] - [y(\epsilon) - \bar{y}(\epsilon)]}{\bar{\epsilon} - \epsilon}.$$

Entonces, dado que $[y(\epsilon) - \bar{y}(\epsilon)] = 0$ por la construcción de la función, y e $\bar{y}$ son solución y que f es lipschitziana:

$$\begin{aligned} 0 &< |y(\bar{\epsilon}) - \bar{y}(\bar{\epsilon})| = |\bar{\epsilon} - \epsilon||y'(\epsilon^*) - \bar{y}'(\epsilon^*)| \\ &= (\bar{\epsilon} - \epsilon)|f(\epsilon^*, y(\epsilon^*)) - f(\epsilon^*, \bar{y}(\epsilon^*))| \\ &\leq lL|y(\epsilon^*) - \bar{y}(\epsilon^*)| < |y(\epsilon^*) - \bar{y}(\epsilon^*)|. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, al tener que la imagen de ϵ^* es estrictamente mayor que la de $\bar{\epsilon}$, máximo de la función $|y(x) - \bar{y}(x)|$ en $[\epsilon, \epsilon + l]$. □

Ejemplo 2.10. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = 1 + y^4, \; y(0) = 0.$$

La función $f(x, y) = 1 + y^4$ es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Por el Lema 2.5, es lipschitziana cualquier rectángulo

$$\bar{S} = [-a, a] \times [-b, b], \;\; a, b > 0,$$

con constante de Lipschitz

$$L = \sup_{\bar{S}} |4y^3| \leq (1 + 4b^3).$$

Por el Teorema de Unicidad 2.9, el problema tiene a lo sumo una solución en el intervalo $[-a, a]$.

Notar que la condición de que la función sea continua en $\bar{S}$ en el Teorema 2.9 es necesaria para la existencia de la unicidad de la solución, como indicaba el Teorema de Cauchy-Peano 1.5. Pongamos un ejemplo donde pese a ser lipschitziana la función, no existe solución al problema.

Ejemplo 2.11. Consideramos el problema de Cauchy

$$y' = f(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0, \\ \\ -1 & si \quad x \geq 0, \end{cases} \;, \; y(0) = 0.$$

Es trivial ver que f satisface la condición (2.1). Veamos que pese a ello no existe solución al problema de valor inicial.
La función $y = -|x|$ es la única función que satisface la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, pero no es una posible solución al no ser derivable en $x = 0$. Por tanto, concluimos que no existe solución.

En el caso particular de que la función continua f sea lipschitziana por un cierto lado, la solución del problema de Cauchy tiene la característica de que la unicidad se garantiza en la parte del intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$ donde se tenga la propiedad. Esto se prueba en el siguiente resultado, considerando que la función es lipschitziana por la derecha, por tanto la unicidad se tiene para el conjunto $[x_0, x_0 + a]$. La demostración es muy similar a la primera del Teorema 2.9.

Teorema 2.12. *Sea $f(x, y)$ una función continua en*

$$\bar{S}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

*donde, para todo $(x, y), (x, \bar{y}) \in \bar{S}_+$ con $y < \bar{y}$, se satisface la **condición de Lipschitz por la derecha***

$$f(x, \bar{y}) - f(x, y) \leq L(\bar{y} - y). \tag{2.6}$$

Entonces, el problema de Cauchy tiene a lo sumo una solución en $[x_0, x_0 + a]$.

Demostración. Suponemos que $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ son dos soluciones de (2) con algún valor distinto en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$.
Sin pérdida de generalidad, suponemos que existe un $x_1 \in [x_0, x_0 + a)$ tal que, por un lado $y(x) \leq \bar{y}(x)$ en $(x_1, x_1 + \epsilon]$ y, por otro, que $y(x) = \bar{y}(x)$ en $[x_0, x_1]$. Por ello, x_1 es el ínfimo del conjunto

$$A = \{x : \ \bar{y}(x) > y(x)\}.$$

La existencia de éste se debe a que A es no vacío y está acotado inferiormente. Entonces, para todo $x \in (x_1, x_1 + \epsilon]$ tenemos que

$$\bar{y}(x) - y(x) = \int_{x_1}^{x} (f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y(t)))\ dt \leq L \int_{x_1}^{x} (\bar{y}(t) - y(t))\ dt.$$

Aplicando el Lema 2.8 a la desigualdad anterior se sigue que $\bar{y}(x) - y(x) = 0$ en $[x_1, x_1 + \epsilon]$. Como x_1 fue escogido arbitrariamente, esto prueba que ambas soluciones son iguales en $[x_0, x_0 + a]$. □

Recapitulando, hemos visto que, bajo continuidad, si cumple la condición (2.1) el carácter único de la solución está asegurado. Ahora bien, el siguiente ejemplo prueba que existen problemas que pese a no estar en las hipótesis del Teorema 2.9, su solución es única.

Ejemplo 2.13. Consideramos el siguiente problema de valor inicial

$$y' = 3 + 2\sqrt{y},\ y(0) = 0.$$

La función $f(x, y)$ es continua en el conjunto convexo $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Calculando su derivada respecto de la variable y obtenemos la expresión

$$\frac{df(x, y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

que no está acotada en D ya que su límite cuando $y \to 0^+$ es igual a ∞. Por el Lema 2.5, la función no es lipschitziana en D, en particular, como vimos en el Ejemplo 2.4, no lo es

en cualquier subconjunto que contenga puntos de la forma $(x,0)$.
Ahora bien, separando las variables y tomando el cambio $y=z^2$ $(y'=2zz')$ obtenemos

$$\frac{2z}{3+2z}\ dz = dx.$$

Integrando a ambos lados, deshaciendo el cambio considerado y teniendo en cuenta la condición inicial impuesta, se halla la única solución del problema, dada implícitamente como

$$\sqrt{y}-\frac{3}{2}\log\left(3+2\sqrt{y}\right)+\frac{3}{2}\log(3)=x.$$

La unicidad de la solución del Ejemplo 2.13 se puede deducir del siguiente resultado, donde se parte de que la función tiene las variables perfectamente separadas.

Teorema 2.14. *Sea $f(x,y)=h(x)g(y)$ una función continua en un conjunto D tal que $g(y)\neq 0$. Entonces, el problema de Cauchy* (2) *tiene una única solución $y(x)=G^{-1}(H(x))$, donde*

$$H(x)=\int_{x_0}^{x} h(t)\ dt \quad y \quad G(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{dz}{g(z)},$$

siempre que $(x,H(x))\in D$.

Demostración. Como la función $g(y)$ no se anula, escribimos la ecuación diferencial como $h(x)=y'/g(y)$. Integrando a ambos lados se tiene que

$$G(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{dz}{g(z)}=\int_{x_0}^{x} h(t)\ dt = H(x).$$

Como, por hipótesis, $g(y)\neq 0$ y la función es continua, o bien $g(y)<0$ o bien $g(y)>0$ para todo valor de y. Por tanto, la función $G(y)$ es estrictamente monótona. El Teorema de la Función Inversa prueba el resultado. $\square$

Volviendo atrás, hemos visto en el Ejemplo 1.6 que el problema de valor inicial, autónomo en particular, tiene infinitas soluciones. Además, la función $h(y)=y^{1/2}$ se anula en el cero claramente. El siguiente resultado relaciona estos hechos.

Teorema 2.15. *Sea $g(y)$ una función continua en el intervalo cerrado $[y_0-b, y_0+b]$. Supongamos que el problema de valor inicial autónomo*

$$y'=g(y),\ \ y(x_0)=y_0 \tag{2.7}$$

posee, al menos, dos soluciones en cualquier entorno de x_0. Entonces $g(y_0)=0$.

Demostración. Sean $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ dos soluciones del problema (2.7) definidas en el entorno $U = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Supongamos que $g(y_0) \neq 0$, entonces existe un entorno V centrado en y_0 tal que $g(y) > 0$ (el caso $g(y) < 0$ es análogo). Sea $W = [x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_1]$ un conjunto tal que $y(W) \subset V$ e $\bar{y}(W) \subset V$.
Fijado $x \in W$, definimos la función

$$G(x) = \int_{y(x)}^{\bar{y}(x)} \frac{dz}{g(z)}.$$

Por construcción, si $y(x) \neq \bar{y}(x)$ para algún $x \in W$, entonces $G(x) \neq 0$. Además, para todo $x \in W$, aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$G'(x) = \frac{\bar{y}'(x)}{g(\bar{y}(x))} - \frac{y'(x)}{g(y(x))} = 0.$$

Por lo tanto $G(x)$ es constante en W. Pero, como $G(x_0) = 0$, tenemos que $G(x) = 0$ para todo $x \in W$, lo cual es una contradicción al haber al menos dos soluciones posibles distintas del problema en todo entorno de x_0. □

Como dijimos, el Ejemplo 1.6 verifica el resultado anterior. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es necesariamente cierto.

Ejemplo 2.16. Consideramos el problema de Cauchy

$$y' = f(x,y),\ y(0) = \frac{1}{2},$$

con la función $f(x,y)$, definida en el rectángulo $D = [0,1] \times [0,1]$, dada de la forma

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3} y \log\left(\frac{6}{y}\right) & si \quad 0 < y \leq 1, \\ \\ 0 & si \qquad y = 0. \end{cases}$$

En el conjunto $(0,1] \times (0,1] \cup \{(0,y)\}$, con $y \in (0,1]$, la función es continua al ser producto y composición de funciones elementales donde el denominador no se anula. En los puntos de la recta $y = 0$, restringida al conjunto D, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0^+} f(x,y) &= \lim_{y \to 0^+} \frac{2}{3} y \log(6/y) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{y \to 0^+} \frac{\log(6/y)}{(1/y)} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{y \to 0^+} \frac{-1/y}{-1/y^2} = 0. \end{aligned}$$

Concluimos por tanto que la función es continua en D.
Calculando su derivada respecto de la variable y hallamos la expresión

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{2}{3}\log\left(\frac{6}{y}\right) - \frac{2}{3},$$

que no está acotada en D, ya que el límite cuando $y \to 0^+$ tiende a ∞.
Sin embargo, existe una única solución al problema de Cauchy. Al estar separadas las variables escribimos el problema como

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}y\log\left(\frac{6}{y}\right) \Longrightarrow dx = \frac{3}{2y\log(6/y)}\ dy.$$

Integrando a ambos lados obtenemos que

$$x + c = \int\ dx = \int \frac{3}{2y\log(6/y)}\ dy = \frac{3}{2}\log\left(\log\left(\frac{6}{y}\right)\right),$$

donde c engloba ambas constantes de integración. Teniendo en cuenta la condición inicial escribimos la constante c como

$$c = \log(12).$$

Despejando y se halla la única solución al problema, que es

$$y(x) = \frac{6}{e^{\frac{\log(12)}{e^{\frac{2x}{3}}}}}.$$

2.2. Teorema de Unicidad de Peano

En el apartado anterior hemos visto que el problema de valor inicial puede tener una única solución incluso cuando la función $f(x,y)$ no verifique las hipótesis del Teorema de Unicidad de Lipschitz 2.9, como vimos en el Ejemplo 2.13. En esta sección demostramos el Teorema de Unicidad de Peano, que pide condiciones diferentes a la función f respecto de las anteriores anteriores para asegurar la unicidad.

Teorema 2.17 (Teorema de Unicidad de Peano)**.** *Sean $a, b > 0$ y $f(x,y)$ una función continua en el conjunto*

$$\bar{S}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0, x_0 + a],\ y \in [y_0 - b, y_0 + b]\},$$

tal que, fijado un x, la función es decreciente respecto de la variable y. Entonces, el problema de Cauchy (2) *tiene a lo sumo una solución en $[x_0, x_0 + a]$.*

Demostración. Supongamos que $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ son dos soluciones del problema (2) tales que existe un punto $\bar{x} \in (x_0, x_0 + a]$ donde las soluciones no coinciden. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\bar{y}(\bar{x}) > y(\bar{x})$. Sea el conjunto

$$A = \{x \in (x_0, x_0 + a] : \ \bar{y}(x) > y(x)\},$$

que es no vacío, debido a que $\bar{x} \in A$, y acotado inferiormente por x_0. Denotamos por x_1 al ínfimo de A. Luego, dado $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\bar{y}(x) > y(x), \quad x \in (x_1, x_1 + \epsilon).$$

Como f es decreciente por hipótesis, tenemos que $f(x, y(x)) \geq f(x, \bar{y}(x))$, o lo que es lo mismo:

$$y'(x) \geq \bar{y}'(x), \quad x \in (x_1, x_1 + \epsilon).$$

Visto esto, definimos la función

$$\phi(x) = \bar{y}(x) - y(x),$$

que es decreciente en el abierto $(x_1, x_1 + \epsilon)$. Como $\phi(x_1) = 0$ resulta que $\phi(x) \leq 0$ en $(x_1, x_1 + \epsilon)$, es decir,

$$\bar{y}(x) \leq y(x), \quad x \in (x_1, x_1 + \epsilon).$$

Esta contradicción demuestra que ambas soluciones son iguales en $[x_0, x_0 + a]$. □

Nótese que el Teorema 2.17 es un caso particular del Teorema 2.12. Efectivamente, si la constante L es igual a 0, la condición (2.6) sobre la lipschitizianidad de la función se reduce a las hipótesis del Teorema de Peano 2.17.

Cabría esperar que la hipótesis en el Teorema 2.17 de que la función sea decreciente respecto de la variable y pudiera tener un resultado análogo para el caso creciente en el mismo intervalo. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra lo contrario.

Ejemplo 2.18. Consideramos el problema de valor inicial autónomo

$$y' = f(x, y), \ y(0) = 0, \tag{2.8}$$

donde la función $f(x, y)$ está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} -c\sqrt{-y} & si \quad y < 0, \\ \\ c\sqrt{y} & si \quad y \geq 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

con $c > 0$. Dicha función es trivialmente continua en la banda $[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$. Calculando su derivada respecto de y obtenemos

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \begin{cases} \dfrac{c}{2\sqrt{-y}} & si \quad y < 0, \\ \\ \dfrac{c}{2\sqrt{y}} & si \quad y > 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Nótese que no está definida en $y = 0$ al no estar acotadas las derivadas laterales.
Del estudio de la expresión (2.10) se tiene que, fijado cualquier $x \in [0,\infty)$, la función es estrictamente creciente en y .
Sin embargo, es inmediato ver que el problema de Cauchy (2.8) tiene al menos dos posibles soluciones en el intervalo $[0,\infty)$: la trivial e $y(x) = x^2/4$.

Nuestro próximo ejemplo pone de manifiesto que no existe relación alguna entre el Teorema de Unicidad 2.9 y el criterio 2.17.

Ejemplo 2.19. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = -y^{1/2}, \; y(0) = 0.$$

Por el Ejemplo 2.4, la función no es lipschitziana en cualquier subconjunto con puntos de la recta $y = 0$, lo que implica que el Teorema 2.9 no asegura la unicidad de la solución.
Sin embargo, estudiando su derivada podemos afirmar que, fijado un $x \in [0,\infty)$, la función es estrictamente decreciente en $y \in [0,\infty)$. Por el Teorema 2.17, existe una única solución en $[0,\infty)$, que es la trivial.

El Teorema 2.17 puede reformularse de la siguiente manera para asegurar la unicidad de la solución en $[x_0 - a, x_0]$ pidiendo que f sea creciente. La prueba es idéntica a la del Teorema 2.17 y por ello no se recoge.

Teorema 2.20. *Supongamos que la función $f(x,y)$ es continua en el conjunto*

$$\bar{S}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - a, x_0], \; y \in [y_0 - b, y_0 + b]\},$$

tal que, fijado un x, la función es creciente en la variable y. Entonces, el problema de valor inicial (2) *tiene a lo sumo una solución en* $[x_0 - a, x_0]$.

Ejemplo 2.21. Consideramos el problema de Cauchy

$$y' = xe^y, \; y(0) = 0.$$

La función $f(x,y) = xe^y$ es trivialmente continua en el rectángulo $[-1,0]\times[-1,0]$.
Fijado un x, f es estrictamente creciente en la variable y. Por tanto, por el Teorema 2.20,

existe una única solución al problema de valor inicial definida en el intervalo $[-1, 0]$, que viene dada por

$$y(x) = \log\left(-\frac{2}{x^2-2}\right).$$

Juntando los Teoremas 2.17 y 2.20 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Sea $f(x, y)$ una función continua en el rectángulo $\bar{S}$ tal que*

- *fijado $x \in [x_0 - a, x_0]$, la función es decreciente respecto de y en $\bar{S}_-$,*
- *fijado un $x \in [x_0, x_0 + a]$, la función es creciente respecto de y en $\bar{S}_+$.*

Entonces, el problema de Cauchy (2) *tiene a lo sumo una solución en $[x_0 - a, x_0 + a]$.*

El siguiente ejemplo muestra un problema de valor inicial donde se puede garantizar la unicidad por el criterio de Peano 2.17. Sin embargo, en la Sección 2.5 veremos que el Teorema de Nagumo 2.41 no asegura este hecho, pese a ser a priori un resultado más complejo.

Ejemplo 2.23. Consideramos la función $f(x, y)$, definida en la banda

$$D = \{(x, y) : x \leq 1,\ y \in \mathbb{R}\},$$

como

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 2x & \text{si } 0 < x \leq 1,\ y < 0, \\ \dfrac{2x^2-4y}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2, \\ -2x & \text{si } 0 < x \leq 1,\ x^2 < y. \end{cases} \tag{2.11}$$

Demostremos que el problema de Cauchy

$$y' = f(x, y),\ y(0) = 0$$

tiene una única solución definida en el intervalo $(-\infty, 1]$.
La función es continua en los puntos del segmento de recta $x = 0$, con $y \in [0, x^2]$, puesto que

$$\left|\frac{2x^2-4y}{x}\right| \leq \frac{2x^2+x^2}{x} \to 0 \quad \text{cuando } x \to 0^+.$$

Como el estudio de la continuidad en D en los restantes casos es trivial, se sigue que f es continua en dicho conjunto.
Además, se tiene que la función está acotada por 2. Por el Teorema de Cauchy-Peano 1.5,

existe al menos una solución local en un entorno del origen.
Ahora bien, fijado un $x \in (-\infty, 0]$, la función es constante y, tomando un $x \in (0, 1]$, es decreciente con respecto de la variable y, por tanto el Teorema 2.22 asegura la unicidad de solución en el intervalo $(-\infty, 1]$, que viene dada por

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{3} & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Para acabar esta sección, al igual que en el caso de Lipschitz, el Teorema de Unicidad de Peano 2.17 nos da una condición suficiente para asegurar la unicidad, siendo posible encontrar problemas que no están en las hipótesis del criterio y tienen una única solución posible.

Ejemplo 2.24. El Ejemplo 2.13 nos vuelve a servir para probar este hecho. La función $f(x, y) = 3 + 2y^{1/2}$ es estrictamente creciente en la variable y fijado cualquier $x \in [0, \infty)$. Por tanto, no está en las condiciones del Teorema 2.17. Sin embargo, ya vimos que existía una única solución al problema.

2.3. Generalización de Lipschitz: criterio de Osgood

Una generalización del Teorema de Unicidad de Lipschitz 2.9 viene dada por el criterio de Osgood, al existir una relación entre sus condiciones. Para probarlo, comenzamos demostrando el siguiente lema.

Lema 2.25. *Sea $g(z)$ una función continua y creciente en el intervalo $[0, \infty)$ tal que $g(0) = 0$ y $g(z) > 0$ para todo $z > 0$. Además,*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon} \frac{dz}{g(z)} = \infty. \tag{2.12}$$

Sea $\phi(x)$ una función continua no negativa en el intervalo $[0, a]$, con $a > 0$. Si se cumple que

$$\phi(x) \leq \int_0^x g(\phi(t))\, dt, \quad 0 < x \leq a, \tag{2.13}$$

entonces, la función $\phi(x) = 0$ para todo $x \in [0, a]$.

Demostración. Empezamos definiendo la función $\Phi(x)$ como

$$\Phi(x) = \max_{t \in [0,x]} \phi(t).$$

Supongamos que es positiva (en caso de ser nula el resultado es trivial) para todo $x \in (0, a]$. Es obvio que, por construcción, $\phi(x) \leq \Phi(x)$ para cualquier $x \in [0, a]$ y, fijado uno de forma arbitraria, existe un $x_1 \leq x$ tal que se tiene la igualdad $\phi(x_1) = \Phi(x)$. Por lo tanto, aplicando la desigualdad (2.13) se sigue que

$$\Phi(x) = \phi(x_1) \leq \int_0^{x_1} g(\phi(t))\ dt \leq \int_0^{x} g(\Phi(t))\ dt.$$

Deducimos entonces que $\Phi(x)$, creciente por definición, satisface, al igual que $\phi(x)$, la desigualdad (2.13).
Sea ahora la función

$$\bar{\Phi}(x) = \int_0^{x} g(\Phi(t))\ dt.$$

Se tiene que $\bar{\Phi}(0) = 0$, $\Phi(x) \leq \bar{\Phi}(x)$ y $\bar{\Phi}'(x) = g(\Phi(x)) \leq g(\bar{\Phi}(x))$. Entonces, para todo $\delta \in (0, a)$,

$$\int_\delta^{a} \frac{\bar{\Phi}'(x)}{g(\bar{\Phi}(x))}\ dx \leq a - \delta < a.$$

Sin embargo, de la condición (2.12) tenemos que

$$\int_\delta^{a} \frac{\bar{\Phi}'(x)}{g(\bar{\Phi}(x))} = \int_\epsilon^{\alpha} \frac{dz}{g(z)}, \quad \bar{\Phi}(\delta) = \epsilon,\ \bar{\Phi}(a) = \alpha,$$

tiende a infinito cuando $\epsilon \to 0^+$ $(\delta \to 0)$.
Esta contradicción muestra la imposibilidad de que la función Φ sea positiva, por lo tanto es nula en el intervalo $[0, a]$ y, en consecuencia, la función $\phi(x)$ también lo es . □

Ejemplo 2.26. La función $g(z) = z$ es continua y creciente en el intervalo $[0, \infty)$. Además, cumple que $g(0) = 0$, $g(z) > 0$ para todo $z > 0$ y

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \infty.$$

Por tanto, concluimos que $g(z)$ está en las hipótesis del Lema 2.25.

Definición 2.27. Una función $f(x, y)$ se dice que satisface la **condición de Osgood** en un conjunto D si para todo par $(x, y), (\bar{x}, y) \in D$ se verifica

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, y)| \leq g(|y - \bar{y}|), \tag{2.14}$$

donde $g(z)$ es una función definida como en el Lema 2.25.

Ejemplo 2.28. La función $f(x, y) = y$ es trivialmente continua en todo $\mathbb{R}^2$.
Si tomamos $g(z) = z$, por el Ejercicio 2.26, está en las condiciones del Lema 2.25. Ahora bien, para todo par de puntos $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$ se tiene que

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |y - \bar{y}| = g(|y - \bar{y}|).$$

Por tanto, la condición de Osgood (2.14) se verifica.

El siguiente resultado, conocido como el Teorema de Unicidad de Osgood, generaliza el criterio de Lipschitz 2.9. Demostramos el enunciado en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$, siendo similar en el conjunto $[x_0 - a, x_0]$.

Teorema 2.29 (Teorema de Unicidad de Osgood)**.** *Sea $f(x, y)$ una función continua verificando la condición de Osgood* (2.14) *en el rectángulo $\bar{S}$. Entonces, el problema de valor inicial* (2) *tiene como mucho una solución definida en* $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones distintas en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$ del problema de Cauchy (2), $y(x)$ e $\bar{y}(x)$. Probemos que bajo las hipótesis del teorema esto no puede suceder.
Por la condición de Osgood (2.14) y la ecuación integral (2.3) se tiene que

$$\begin{aligned} |y(x_0 + x) - \bar{y}(x_0 + x)| &\leq \int_{x_0}^{x_0+x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| \, dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+x} g(|y(t) - \bar{y}(t)|) \, dt \\ &= \int_0^x g(|y(z + x_0) - \bar{y}(z + x_0)|) \, dz. \end{aligned}$$

Fijado un $x \in [0, a]$ arbitrario, tomamos la función $\phi(x) = |y(x_0 + x) - \bar{y}(x_0 + x)|$, que así definida es no negativa y satisface la desigualdad (2.13). Por el Lema 2.25, $\phi(x) = 0$ en el conjunto $[0, a]$, es decir, $y(x) = \bar{y}(x)$ en $[x_0, x_0 + a]$. $\square$

El siguiente ejemplo, donde nos apoyamos de los Ejemplos 2.26 y 2.28, muestra la clara relación entre las condiciones de Osgood (2.14) y Lipschitz (2.1).

Ejemplo 2.30. Consideramos el problema autónomo

$$y' = y, \; y(0) = 0. \tag{2.15}$$

Con ayuda de los Ejemplos 2.26 y 2.28, el Teorema 2.29 garantiza la unicidad de la solución, que es la trivial. Además, esto prueba que la condición de Osgood (2.14) se reduce a la condición de Lipschitz (2.1), tomando $g(z) = kz$, con $k > 0$.

Recogemos un ejemplo donde se muestra un problema que no se verifica las hipótesis ni del Teorema de Unicidad de Lipschitz 2.9 ni del criterio de Peano 2.17, pero que gracias al Teorema de Osgood 2.29 afirmamos que tiene una única solución.

Ejemplo 2.31. Consideramos el problema de Cauchy autónomo

$$y' = f(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad y = 0, \\ \\ -\dfrac{1}{4} y \log(5y) & si \quad 0 < y \leq \dfrac{1}{5e}, \end{cases} \; , \; y(0) = 0.$$

Comencemos estudiando la función. En el conjunto $(0, 1/(5e)]$, f es continua al ser producto de funciones elementales. Calculando el límite en $y = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+} -\frac{1}{4}y\log(5y) &= -\frac{1}{4}\lim_{y\to 0^+}\frac{\log(5y)}{1/y}\\ &= \frac{1}{4}\lim_{y\to 0^+}\frac{1/y}{1/y^2} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, la función es continua en el intervalo convexo $[0, 1/(5e)]$. Por el Lema 2.5, la función no es lipschitziana debido a que

$$\frac{df(x,y)}{dy} = -\frac{1}{4}\left(\log(5y)+1\right), \quad \lim_{y\to 0^+} -\frac{1}{4}\left(\log(5y)+1\right) = \infty.$$

Se sigue entonces que no podemos aplicar el Teorema de Unicidad de Lipschitz 2.9. Además, por el cálculo de la derivada, la función es estrictamente creciente en $(0, 1/(5e)]$, lo que indica que no estamos en las hipótesis del Teorema de Peano 2.17.
Intentemos garantizar la unicidad de la solución por el Teorema de Osgood 2.29.
Definimos primero la función g en el intervalo $[0, \infty)$ como

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0,\\ -\frac{1}{4}z\log(5z) & \text{si } 0 < z \le \frac{1}{5e},\\ \frac{1}{20e} & \text{si } z > \frac{1}{5e}.\end{cases}$$

Por construcción, $g(z)$ es una función continua y creciente en $[0, \infty)$, cumpliendo que $g(0) = 0$, $g(z) > 0$ para todo $z > 0$ y la condición (2.12) debido a que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon \frac{-4}{z\log(5z)}\,dz = -4\log\left(\log\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\right)\right) = \infty.$$

Por tanto, $g(z)$ está en las hipótesis del Lema 2.25. Veamos que también se cumple la condición de Osgood (2.14).
La expresión de la segunda derivada respecto de y de la función viene dada por

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} = -\frac{1}{4y},$$

que es negativa en el conjunto $(0, 1/(5e)]$. Esto indica que nuestra función f es cóncava en dicho intervalo, lo que implica que

$$\frac{f(x, y-\bar{y}) - f(x,0)}{y-\bar{y}} \ge \frac{f(x,y) - f(x,\bar{y})}{y-\bar{y}}, \quad 0 < y-\bar{y} < \bar{y} < y \le 1/(5e).$$

La desigualdad anterior se puede reescribir como

$$-\frac{1}{4}(y-\bar{y})\log(5(y-\bar{y})) \geq -\frac{1}{4}(y\log(5y)-\bar{y}\log(5\bar{y})).$$

Visto este razonamiento, estamos en situación de poder demostrar que se cumple la condición de Osgood (2.14):

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x,\bar{y})| &= \Big| -\frac{1}{4}y\log(5y)+\frac{1}{4}\bar{y}\log(5\bar{y})\Big| \\ &\leq -\frac{1}{4}|y-\bar{y}|\log(5|y-\bar{y}|) \\ &= g(|y-\bar{y}|). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Unicidad de Osgood 2.29, el problema de valor inicial posee una única solución en el intervalo $[0, 1/(5e)]$.

2.4. Criterio de Montel-Tonelli

Una generalización del Teorema de Osgood 2.29 viene dada a través del criterio de Montel-Tonelli. Antes de demostrar este resultado, empecemos dando la condición que hace posible que la solución sea única en este caso, la cual definimos en un rectángulo cerrado, aunque se puede definir para un conjunto arbitrario.

Definición 2.32. Una función $f(x,y)$ satisface la **condición de Montel-Tonelli** en el rectángulo $\bar{S}$ si para todo par de puntos $(x,y),(x,\bar{y}) \in \bar{S}$ se cumple que

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})| \leq h(x)g(|y-\bar{y}|), \tag{2.16}$$

donde la función no negativa $h(x)$ es integrable en $[x_0-a, x_0+a]$ y $g(z)$ es una función continua y positiva en $(0, 2b]$ cumpliendo que $g(0)=0$ y la condición (2.12).

Teorema 2.33 (Teorema de Unicidad de Montel-Tonelli)**.** *Sea $f(x,y)$ una función continua en $\bar{S}$ en las hipótesis de la Definición 2.32. Entonces, el problema de Cauchy* (2) *tiene a lo sumo una solución en el intervalo* $[x_0-a, x_0+a]$.

Demostración. Sean $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ dos soluciones del problema de valor inicial (2) en el intervalo $[x_0, x_0+a]$. Definimos la función $\phi(x)=\bar{y}(x)-y(x)$ y suponemos que existe un punto $x_1 \in (x_0, x_0+a]$ tal que $\phi(x)>0$ en $(x_1, x_1+\epsilon]$ y $\phi(x)=0$ en el conjunto $[x_0, x_1]$. Entonces, para todo $x \in [x_1, x_1+\epsilon]$, por la condición de Montel-Tonelli (2.16) se tiene que

$$\phi'(x)=\bar{y}'(x)-y(x)=f(x,\bar{y}(x))-f(x,y(x)) \leq h(x)g(\phi(x))$$

Por tanto, para cualquier $\bar{x} \in (x_1, x_1+\epsilon)$:

$$\int_{\phi(\bar{x})}^{\phi(x_1+\epsilon)} \frac{dz}{g(z)} \leq \int_{\bar{x}}^{x_1+\epsilon} h(t)\ dt. \tag{2.17}$$

Sin embargo, en la desigualdad (2.17), la parte derecha se mantiene finita cuando $\bar{x} \to x_1$, mientras que la parte izquierda, por la hipótesis (2.12), no está acotada. Esta contradicción demuestra el enunciado.
La prueba en el intervalo $[x_0 - a, x_0]$ es análoga. □

De igual forma que en las secciones anteriores, el Teorema 2.33 puede enunciarse con condiciones similares para asegurar que la solución es única en los intervalo de la forma $[x_0, x_0 + a]$ y $[x_0 - a, x_0]$, teniendo en cuenta donde definir las funciones g y h.

Ejemplo 2.34. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = \begin{cases} -x^2 y \log(y) & \text{si } x, y \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right], \\ \\ 0 & \text{si } x = 0,\ y = 0, \end{cases} \quad,\ y(0) = 0.$$

De forma trivial, la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo donde está definida.
Construimos la función g en el intervalo $[0, \infty)$ de la forma

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0, \\ -z\log(z) & \text{si } 0 < z \leq \dfrac{1}{e}, \\ \dfrac{1}{e} & \text{si } z > \dfrac{1}{e}. \end{cases}$$

Claramente, g es continua y creciente en todo punto, cumpliendo que $g(0) = 0$ y $g(z) > 0$ para todo $z > 0$. Además, se verifica la igualdad (2.12) ya que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon \frac{dz}{-z\log(z)} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \log\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) = \infty.$$

Comprobemos que efectivamente se tiene la condición de Montel-Tonelli (2.16):

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \Big| \big(-x^2 y \log(y)\big) - \big(-x^2 \bar{y} \log(\bar{y})\big) \Big| \\ &= x^2 | - y\log(y) + \bar{y}\log(y)| \\ &\leq -x^2 |y - \bar{y}| \log(|y - \bar{y}|) \\ &= h(x) g(|y - \bar{y}|), \end{aligned}$$

donde la desigualdad

$$-(y-\bar{y})\log(y-\bar{y}) \geq -y\log(y) + \bar{y}\log(\bar{y}), \quad 0 < y - \bar{y} \leq \frac{1}{e},$$

se tiene al ser la función cóncava respecto de la variable y en $(0, 1/e]$.
Por último, se sigue que la función

$$h(x) = x^2$$

es positiva e integrable en el intervalo $[0, 1/e]$.
Por lo tanto, por el Teorema de Montel-Tonelli 2.33, existe una única solución al problema de Cauchy en el intervalo $[0, 1/e]$.

2.4.1. Generalización del Teorema de Montel-Tonelli

Ante la gran dificultad de aplicar las condiciones del Teorema de Unicidad 2.33, una generalización del mismo, como se recoge en [2], se basa en que la función g dependa no solo de la variable y, sino también de x. Recogemos el enunciado para garantizar la solución en el conjunto $[x_0, x_0 + a]$.

Teorema 2.35 (Generalización Montel-Tonelli). *Supongamos que $f(x, y)$ es un función continua en el rectángulo $\bar{S}_+$ tal que para todo $(x, y), (x, \bar{y}) \in \bar{S}_+$ se tiene que*

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq h(x - x_0)g(x - x_0, |y - \bar{y}|), \quad x \neq x_0, \tag{2.18}$$

con $h : (0, a] \to (0, \infty)$ una función integrable y $g : (0, a] \times [0, 2b] \to [0, \infty)$ una función continua tal que

- *$g(x, 0) = 0$ para todo $x \in (0, a]$;*
- *la función g es decreciente respecto de la variable x;*
- *se cumple la igualdad (2.12) de la forma*

$$\int_{0^+} \frac{dz}{g(z, z)} = \infty.$$

Entonces, el problema de Cauchy tiene a lo sumo una solución en $[x_0, x_0 + a]$.

El siguiente corolario particulariza al teorema anterior, dando así una condición más sencilla de aplicar a ciertos ejercicios para garantizar la unicidad.

Corolario 2.36. *El problema de valor inicial* (2) *tiene a lo sumo una única solución en* $[x_0, x_0 + a]$ *si, dada una constante* $c > 0$*, se tiene que*

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq \frac{c}{(x-x_0)j(x-x_0)}|y-\bar{y}|, \quad x \neq x_0, \tag{2.19}$$

para todo $(x,y),(x,\bar{y}) \in \bar{S}_+$*, con* $j : (0,a] \to (0,\infty)$ *una función continua y decreciente cumpliendo que*

$$\int_{0^+} \frac{dx}{xj^2(x)} < \infty, \quad \int_{0^+} \frac{dx}{xj(x)} = \infty.$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.35, tomando las funciones g y h como

$$g(x) = \frac{c}{xj^2(x)}, \ h(x,y) = j(x)y.$$

□

Pese a que podemos definir numerosas funciones en las condiciones de la función j, la elección específica de $j(x) = 1 - \log(x)$, con $x \in (0, e)$, da el siguiente resultado.

Corolario 2.37. *El problema de Cauchy* (2) *tiene a lo sumo una única solución en el intervalo* $[x_0, x_0 + a]$*, con* $a \in (0, e)$*, si se cumple que*

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq \frac{c}{(x-x_0)(1-\log(x-x_0))}|y-\bar{y}|, \quad x \neq x_0, \tag{2.20}$$

para todo $(x,y),(x,\bar{y}) \in \bar{S}_+$*.*

Ejemplo 2.38. Estudiemos la unicidad de la solución del problema de Cauchy

$$y' = \sqrt{c|y| + b^2x^2(1-\log(x))^2}, \ x > 0, \quad y(0) = 0; \tag{2.21}$$

con $c > 0, \ b \geq 0$, constantes arbitrarias.

El caso de que $b = 0$, descartamos la unicidad al existir al menos dos posibles soluciones:

$$y(x) = 0 \text{ e } y(x) = \frac{cx^2}{4}.$$

Para estudiar de forma general el problema, escribimos la función como

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{c|y| + b^2x^2(1 - 1\log(x))^2} & \text{si } (x,y) \in (0,a] \times [-b,b] \\ \sqrt{c|y|} & \text{si } x = 0, \ y \in [-b,b], \end{cases}$$

Como la función es trivialmente continua en el compacto $[0,a] \times [-b,b]$ y sublineal con respecto de la variable y, afirmamos que existe al menos una solución al problema de Cauchy en el conjunto $[0,a]$.

Veamos que es única. Se tiene que para todo $x \in (0,a]$

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq \frac{c}{2b}\frac{1}{x(1-\log(x))}|y-\bar{y}|.$$

El Corolario 2.37 garantiza la unicidad de la solución en el intervalo $[0,a]$.

2.5. Condición y Teorema de Nagumo

El criterio para asegurar la unicidad de esta sección, como se recoge en el artículo [4] y en el Capítulo 1 de [1], pide que la dependencia de la función $f(x, y)$ con respecto de y permanezca acotada por un cociente, que es lo que se conoce como la condición de Nagumo.

Definición 2.39. La función $f(x, y)$ se dice que satisface la **condición de Nagumo** en un conjunto D si

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq k\frac{|y-\bar{y}|}{|x-x_0|},\ x \neq x_0,\ 0 < k \leq 1; \tag{2.22}$$

para todo $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$.

Para probar el resultado principal de esta sección es necesario demostrar el siguiente lema, el cual será útil en su demostración. Recogemos la prueba en $[x_0, x_0 + a]$, siendo análoga en $[x_0 - a, x_0]$.

Lema 2.40. *Sea $\phi(x)$ una función continua no negativa en el intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$ tal que*

- $\phi(x_0) = 0$,
- *la función es derivable en $x = x_0$, y*
- $\phi'(x_0) = 0$.

Entonces, si se cumple que

$$\phi(x) \leq \Big|\int_{x_0}^{x} \frac{\phi(t)}{t-x_0}\ dt\Big|, \tag{2.23}$$

se sigue que $\phi(x) = 0$ en $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Demostración. Para todo $x \in [x_0, x_0 + a]$, definimos la función no negativa

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\phi(t)}{t-x_0}\ dt,$$

que existe ya que por hipótesis

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0} = \phi'(x_0) = 0.$$

Por tanto, se tiene que

$$\Phi'(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0} \leq \frac{\Phi(x)}{x-x_0}.$$

Derivando este último cociente obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi(x)}{x-x_0}\right)=\frac{(x-x_0)\Phi'(x)-\Phi(x)}{(x-x_0)^2}\leq 0,$$

lo cual indica que la función es decreciente en $[x_0, x_0+a]$.
Como $\Phi(x_0)=0$, tenemos que $\Phi(x)\leq 0$ para cualquier valor de x, y como por definición $\Phi(x)\geq 0$, concluimos que $\Phi(x)=\phi(x)=0$ en $[x_0, x_0+a]$. □

Recogemos ahora dos demostraciones del Teorema de Unicidad de Nagumo. En la primera de ellas utilizaremos el Lema 2.40 y el Teorema del Valor Medio.

Teorema 2.41 (Teorema de Unicidad de Nagumo)**.** *Sea $f(x,y)$ una función continua verificando la condición de Nagumo* (2.22) *en el conjunto $\bar{S}$. Entonces, el problema de Cauchy* (2) *tiene a lo sumo una solución en $[x_0-a, x_0+a]$.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones, $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, del problema de valor inicial (2) en el intervalo $[x_0-a, x_0+a]$. Entonces, por la condición de Nagumo (2.22) y la ecuación integral (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned}|y(x)-\bar{y}(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y(t))-f(t,\bar{y}(t))|\,dt\right|\\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}\frac{|y(t)-\bar{y}(t)|}{|t-x_0|}\,dt\right|.\end{aligned}$$

Definimos la función, continua y no negativa, $\phi(x)=|y(x)-\bar{y}(x)|$ en $[x_0-a, x_0+a]$ que verifica la desigualdad (2.23).
Entonces, por ser continua y cumplir que $\phi(x_0)=0$, por el Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned}\phi'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|y(x_0+h)-\bar{y}(x_0+h)|}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|(y(x_0+h)-y(x_0))-(\bar{y}(x_0+h)-\bar{y}(x_0))|}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{|hy'(x_0+\theta_1 h)-h\bar{y}'(x_0+\theta_2 h)|}{h},\quad 0<\theta_1,\theta_2<1,\\ &= (\mathrm{sgn}(h))\lim_{h\to 0}|y'(x_0+\theta_1 h)-\bar{y}'(x_0+\theta_2 h)|=0.\end{aligned}$$

Como, por hipótesis, ϕ derivable en x_0 y $\phi'(x_0)=0$, estamos en las condiciones del Lema 2.40. Por tanto, concluimos que la función es nula en todo punto, por lo que ambas soluciones son iguales en el intervalo $[x_0-a, x_0+a]$. □

La segunda prueba se recoge sin hacer uso del Lema 2.40, usando exclusivamente el Teorema del Valor Medio en $[x_0, x_0+a]$, siendo análoga para el intervalo $[x_0-a, x_0]$.

Demostración. Al igual que antes, supongamos que tenemos dos soluciones, $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, definidas en $[x_0, x_0 + a]$. Tomemos $x_0 = 0$ para simplificar. En primer lugar, definimos la función

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{|y(x) - \bar{y}(x)|}{x} & x \in (0, a], \\ \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Es trivial comprobar que $v(x)$ es continua en todo punto de $[0, a]$. Por el Teorema del Valor Medio y del hecho que ambas funciones son solución se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{|y(x) - \bar{y}(x)|}{x} &= \frac{|(y(x) - \bar{y}(x)) - (y(0) - \bar{y}(0))|}{x} \\ &= |y'(x^*) - \bar{y}'(x^*)| \\ &= |f(x^*, y(x^*)) - f(x^*, \bar{y}(x^*))|, \end{aligned}$$

con $x^* \in (0, x)$.
Ahora bien, por la continuidad de $f(x, y)$ en el punto $(0, y_0)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|y(x) - \bar{y}(x)|}{x} = |f(0, y_0) - f(0, y_0)| = 0.$$

Supongamos que existe un punto del intervalo $[0, a]$ donde las soluciones no coinciden. En este caso, por la construcción de la función $v(x)$, ésta tiene un máximo positivo. Denotamos a dicho punto como $x_m \in (0, a]$. Por tanto, para todo $x \in (0, x_m)$:

$$\frac{|y(x) - \bar{y}(x)|}{x} < \frac{|y(x_m) - \bar{y}(x_m)|}{x_m}. \tag{2.24}$$

Sin embargo, aplicando el Teorema del Valor Medio en el conjunto $[0, x_m]$, teniendo en cuenta que nuestra función f cumple la condición de Nagumo 2.22, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{|y(x_m) - \bar{y}(x_m)|}{x_m} &= \frac{|(y(x_m) - y(0)) - (\bar{y}(x_m) - \bar{y}(0))|}{x_m} \\ &= |y'(\bar{x}) - \bar{y}'(\bar{x})| = |f(\bar{x}, y(\bar{x})) - f(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))| \\ &\leq \frac{|y(\bar{x}) - \bar{y}(\bar{x})|}{\bar{x}}, \end{aligned}$$

con $\bar{x} \in (0, x_m)$.
La última desigualdad contradice con hecho de que x_m sea máximo, como muestra (2.24), por lo que se llega a una contradicción. □

El siguiente ejemplo pone de manifiesto la importancia de que la constante k sea menor o igual a uno en las hipótesis del Teorema 2.41.

Ejemplo 2.42. Sea el problema de Cauchy

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ y \leq 0, \\ \dfrac{2y}{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y < x^2, \\ 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y, \end{cases}, \ y(0) = 0.$$

Consideramos el conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}\}.$$

La continuidad de f en D es trivial salvo en los puntos de la forma $(0,y)$, con $x^2 \leq y$, donde tenemos

$$\left|\frac{2y}{x}\right| < \frac{2x^2}{x} = 2x \to 0 \quad \text{cuando } x \to 0^+.$$

Por tanto, la función es continua en D.
Veamos que no se cumple la condición de Nagumo (2.22) al tener que $k = 2$.
Estudiamos los siguientes casos[2]:

- Si se tiene que $0 < y, \bar{y} < x^2$, entonces

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left|\frac{2y}{x} - \frac{2\bar{y}}{x}\right| = \frac{2}{x}|y - \bar{y}|.$$

- Si $0 < y < x^2 \leq \bar{y}$:

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left|\frac{2y}{x} - 2x\right| = \frac{2}{x}|y - x^2| = \frac{2}{x}(x^2 - y) \leq \frac{2}{x}|\bar{y} - y|.$$

- En el caso de que $y \leq 0,\ x^2 \leq \bar{y}$, tenemos

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = |0 - 2x| = \frac{2}{x}|x^2| \leq \frac{2}{x}|\bar{y}| = \frac{2}{x}|\bar{y} - y|.$$

- Por último, si $y \leq 0 < \bar{y} < x^2$, se sigue que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left|0 - \frac{2\bar{y}}{x}\right| = \frac{2}{x}|\bar{y}| \leq \frac{2}{x}|\bar{y} - y|.$$

Queda probado que no podemos garantizar la unicidad de la solución en el intervalo $[0,1]$ por el Teorema de Nagumo 2.41. Además, en este caso, el problema de Cauchy tiene infinitas soluciones de la forma

$$y(x) = cx^2,$$

con $c \in (0,1)$.

[2] Obviamos en todo el trabajo los casos donde y e $\bar{y}$ pertenecen a un cierto conjunto que solo depende de x, al ser trivial.

Destacamos ahora que la condición de que la función sea continua en el conjunto $\bar{S}$ en las hipótesis del Teorema 2.41 es necesaria para garantizar la unicidad, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.43. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y),\ \ y(0) = 0,$$

con $f(x, y)$, definida en el intervalo $x \in [0, a]$ con $a > 0$, de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y, \\ \dfrac{y}{x} & \text{si } 0 < y \leq x, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

En este caso la función f no es continua en el punto $(0, 0)$ ya que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 1 \quad \text{si } y > x,$$

que no coincide con el valor de la función en el origen.
Sin embargo sí se verifica la condición de Nagumo (2.22) con $k = 1$. Para probarlo, fijado un $x \in [0, a]$, consideramos los siguientes casos:

- Si $0 < y, \bar{y} \leq x$ se tiene que

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left| \frac{y}{x} - \frac{\bar{y}}{x} \right| = \frac{1}{x} |y - \bar{y}|.$$

- Si $y \leq 0 < \bar{y} \leq x$ obtenemos

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left| 0 - \frac{\bar{y}}{x} \right| = \frac{1}{x} |\bar{y}| \leq \frac{1}{x} |\bar{y} - y|.$$

- En el caso de que $y \leq 0,\ x < \bar{y}$,

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |0 - 1| = \frac{1}{x} |x| \leq \frac{1}{x} |\bar{y}| \leq \frac{1}{x} |\bar{y} - y|.$$

- Por último, si $0 < y \leq x < \bar{y}$ tenemos que

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = \left| \frac{y}{x} - 1 \right| = \frac{1}{x} |y - x| = \frac{1}{x} (x - y) < \frac{1}{x} |\bar{y} - y|.$$

En este problema, las funciones $y(x) = 0$ e $y(x) = x$ son dos posibles soluciones, por lo tanto queda descartada la unicidad.

Como a lo largo de las secciones previas, el Teorema de Nagumo 2.41 tampoco nos da una condición necesaria para asegurar la unicidad de la solución, siendo posible encontrar ejemplos donde, aunque no se cumpla el criterio, la solución es única. El siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 2.44. Consideramos el problema de Cauchy

$$y' = f(x,y), \;\; y(0) = 0,$$

donde f está definida como la función (2.11) del Ejemplo 2.23, que como vimos en él, es continua en todo punto de la banda D.
Para ver si verifica la condición (2.22), fijado un $x \in (-\infty, 1]$, estudiamos los siguientes casos:

- Supongamos que $y, \bar{y} \in [0, x^2]$; entonces
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \Big| \left(2x - \frac{4y}{x}\right) - \left(2x - \frac{4\bar{y}}{x}\right) \Big| = \Big| -\frac{4y}{x} + \frac{4\bar{y}}{x} \Big| = \frac{4}{x}|\bar{y} - y|.$$
- Consideramos el caso donde $y < 0$ e $\bar{y} \in [0, x^2]$. Por tanto
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \Big| 2x - \left(2x - \frac{4\bar{y}}{x}\right) \Big| = \frac{4}{x}|\bar{y}| < \frac{4}{x}|\bar{y} - y|.$$
- Ahora bien, si $y < 0, \;\; \bar{y} \in (x^2, \infty)$, se tiene que
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = |2x - (-2x)| = 4|x| = \frac{4}{x}|x^2| < \frac{4}{x}|\bar{y}| < \frac{4}{x}|\bar{y} - y|.$$
- Por último, tomando $0 \leq y \leq x^2 < \bar{y}$,
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \Big| 2x - \left(2x - \frac{4y}{x}\right) \Big| = \frac{4}{x}(x^2 - y) < \frac{4}{x}|\bar{y} - y|.$$

Por tanto $k = 4 > 1$ y no estamos en las condiciones del Teorema 2.41, por lo que no podemos aplicarlo para asegurar la unicidad de la solución. Sin embargo, como vimos en el Ejemplo 2.23, por el Teorema de Peano 2.17 existe una solución única al problema.

Como último ejemplo recogemos un problema de valor inicial donde la solución es única y sí podemos asegurarlo por el criterio de Nagumo 2.41.

Ejemplo 2.45. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{1}{2x} & \text{si } 0 < x \leq 1, \;\; y < 0, \\ \dfrac{x^2 - 2y}{2x} & \text{si } 0 < x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq x^2, \\ -\dfrac{1}{2x} & \text{si } 0 < x \leq 1, \;\; x^2 < y, \end{cases} \;\; , \;\; y(0) = 0.$$

Por la similitud de f con la función (2.11) de los Ejemplos 2.23 y 2.44, la función es continua en la banda

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Además, por los cálculos del Ejemplo 2.44, se cumple la condición de Nagumo (2.22), al ser la constante $k = 1$. Por tanto, por el Teorema de Nagumo 2.41, la solución del problema es única y viene dada por

$$y(x) = \frac{x^2}{4}, \quad x \in [0,1].$$

Para acabar esta sección enunciamos una versión del Teorema de Nagumo para asegurar la unicidad en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$, teniendo un resultado análogo para $[x_0 - a, x_0]$.

Teorema 2.46. *Sea $f(x,y)$ una función continua en el conjunto $\bar{S}_+$ tal que, para todo par $(x,y), (x,\bar{y}) \in \bar{S}_+$ con $\bar{y} > y$, se verifica la **condición de Nagumo por la derecha***

$$f(x,\bar{y}) - f(x,y) \leq k\frac{\bar{y} - y}{x - x_0},\ x \neq x_0,\ 0 < k \leq 1.$$

Entonces, el problema de valor inicial (2) *tiene a lo sumo una solución en* $[x_0, x_0 + a]$.

2.6. Criterio de Rogers

La condición de Nagumo (2.22) nos ayuda a garantizar la unicidad de solución a través del Teorema 2.41. Tomando $k = 1$ y $x \geq x_0 = 0$ podemos reescribirla como

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq \frac{1}{x}|y - \bar{y}|,\ x \neq 0. \tag{2.25}$$

En este apartado, apoyándonos en el documento [9], recogemos un criterio para asegurar la unicidad de la solución del problema (2) cuando en la desigualdad (2.25) reemplazamos en el denominador x por x^2, que es lo que se conoce como condición de Rogers.

Comenzamos demostrando el siguiente lema, donde se recoge la prueba en el intervalo $[0,1]$, siendo fácilmente generalizable al conjunto $[0,a]$, con $a > 0$.

Lema 2.47. *Sea $f(x)$ una función continua y no negativa en el intervalo* $[0,1]$ *tal que*

$$f(x) \leq \int_0^x \frac{1}{s^2} f(s)\ ds, \tag{2.26}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = o(e^{-(1/x)}). \tag{2.27}$$

Entonces, $f(x) = 0$ *en todo* $[0,1]$.

Demostración. Empecemos definiendo la función F como

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{s^2} f(s)\ ds.$$

Derivando y aplicando la desigualdad (2.26) obtenemos que

$$\begin{aligned} F'(x) = \frac{f(x)}{x^2} &\leq \frac{F(x)}{x^2}, \\ F'(x) - \frac{F(x)}{x^2} &\leq 0, \\ \frac{d}{dx}\left(e^{1/x}F(x)\right) &\leq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la función $e^{1/x}F(x)$ es decreciente. Fijado un $\epsilon > 0$, por la condición (2.27), para un cierto x suficientemente pequeño, se tiene que

$$e^{1/x}F(x) = e^{1/x}\int_0^x \frac{1}{s^2} f(s)\ ds \leq e^{1/x}\int_0^x \frac{\epsilon}{s^2} e^{-(1/s)}\ ds = \epsilon.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}F(x) = 0,$$

lo que implica que la función $e^{1/x}F(x) \leq 0$ para todo $x \in (0, 1]$. El resultado se sigue del carácter continuo y no negativo de la función f y de la definición de $F(x)$. $\square$

Visto esto, supongamos que la función $f(x, y)$ es continua en la banda

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in \mathbb{R}\},$$

verificando la **condición de Rogers**:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq \frac{1}{x^2}|y - \bar{y}|, \quad x \neq 0. \tag{2.28}$$

Entonces, si dos funciones, y e $\bar{y}$, son solución del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y),\ y(0) = 0, \tag{2.29}$$

por la condición (2.28) y la ecuación integral (2.3) se tiene que

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \int_0^x \frac{1}{s^2}|y(s) - \bar{y}(s)|\ ds.$$

Por el Lema 2.47 se tiene que si las soluciones del problema de Cauchy (2.29) cumplen que

$$\lim_{x\to 0} (y(x) - \bar{y}(x)) = o(e^{-(1/x)}),$$

el carácter de la solución es único. Este razonamiento se recoge en el siguiente teorema, pudiendo también generalizarse al intervalo $[0, a]$.

Teorema 2.48 (Teorema de Unicidad de Rogers)**.** *Sea $f(x,y)$ una función continua en las condiciones de Rogers* (2.28) *en la banda P, cumpliendo que*

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = o\left(\frac{e^{-(1/x)}}{x^2}\right) \tag{2.30}$$

uniformemente para todo $y \in [0,\delta]$, con $\delta > 0$. Entonces, el problema de Cauchy (2.29) *tiene a lo sumo una solución, definida en el intervalo* $[0,1]$.

Demostración. Supongamos que las funciones y e $\bar{y}$ son dos soluciones del problema de valor inicial (2.29). Por la desigualdad (2.28) y la ecuación integral (2.3) se sigue que

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \int_0^x \frac{1}{s^2}|y(s) - \bar{y}(s)|\, ds.$$

Fijado un $\epsilon > 0$ arbitrario, por la igualdad (2.30), para un cierto x suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} |y(t) - \bar{y}(t)| &\leq \int_0^x |f(s,y(s)) - f(s,\bar{y}(s))|\, ds \\ &\leq \epsilon \int_0^x \frac{e^{-(1/s)}}{s^2}\, ds = \epsilon e^{-(1/x)}. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.47, $y(x) = \bar{y}(x)$ para todo valor de $x \in [0,1]$. □

A continuación recogemos un problema donde se asegura la unicidad de la solución por el criterio de Rogers 2.48.

Ejemplo 2.49. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} e^{-(1/x)} + \dfrac{e^{-(1/x)}}{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ xe^{-(1/x)} \leq y, \\[2ex] \dfrac{y}{x^2} + e^{-(1/x)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y < xe^{-(1/x)}, \\[2ex] e^{-(1/x)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ y \leq 0, \end{cases} \quad ,\ y(0) = 0.$$

Comenzamos estudiando la continuidad de la función en la banda P. El único caso no trivial es en los puntos de la recta $x = 0$, donde tenemos los siguientes casos:

- Si $y \leq 0$ se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,y)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,y)} e^{-(1/x)} = 0.$$

- En el caso de que $xe^{-(1/x)} \leq y$,

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,y)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,y)} \frac{1}{x}e^{-(1/x)} + e^{-(1/x)} = 0.$$

- Por último, si $y \in (0, xe^{-(1/x)})$ tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,y)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0^+,y)} \frac{|y|}{x^2} + e^{-(1/x)} \leq \lim_{(x,y)\to(0^+,y)} \frac{e^{-(1/x)}}{x^2} + e^{-(1/x)} = 0.$$

Por tanto, como el valor de f en la recta es también cero, se sigue que la función es continua en todo P.

Ahora comprobemos que se cumple la condición de Rogers (2.28). Fijado un $x \in [0,1]$, estudiamos los siguientes casos:

- Primero, si $0 < y, \bar{y} < xe^{-(1/x)}$, tenemos que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left| \left(\frac{y}{x^2} + e^{-(1/x)}\right) - \left(\frac{\bar{y}}{x^2} + e^{-(1/x)}\right) \right| = \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|.$$

- Si $y \leq 0 < \bar{y} < xe^{-(1/x)}$,

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left| e^{-(1/x)} - \left(\frac{\bar{y}}{x^2} + e^{-(1/x)}\right) \right| = \frac{1}{x^2}|\bar{y}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|.$$

- Ahora bien, si $y \leq 0,\ xe^{-(1/x)} \leq \bar{y}$,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left| e^{-(1/x)} - \left(e^{-(1/x)} + \frac{e^{-(1/x)}}{x}\right) \right| = \frac{1}{x}|e^{-(1/x)}| = \frac{1}{x^2}|xe^{-(1/x)}| \\ &\leq \frac{1}{x^2}|\bar{y}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|. \end{aligned}$$

- Por último, si $0 < y < xe^{-(1/x)} \leq \bar{y}$ se sigue que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left| \left(\frac{y}{x^2} + e^{-(1/x)}\right) - \left(e^{-1/x} + \frac{e^{-(1/x)}}{x}\right) \right| \\ &= \frac{1}{x^2}|y - xe^{-(1/x)}| = \frac{1}{x^2}(xe^{-(1/x)} - y) \\ &\leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|. \end{aligned}$$

Por tanto sí se verifica la condición de Rogers (2.28).

Para finalizar y poder aplicar el Teorema 2.48, estudiamos si se satisface la condición (2.30). Escribimos la función como

$$\frac{x^2 f(x,y)}{e^{-(1/x)}} = \begin{cases} x + x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1,\ xe^{-(1/x)} \leq y, \\ \dfrac{y}{e^{-(1/x)}} + x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1,\ 0 < y < xe^{-(1/x)}, \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1,\ y \leq 0. \end{cases}$$

Estudiemos si

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 f(x,y)}{e^{-(1/x)}} = 0,$$

en todos los casos. El único no trivial es cuando $y \in (0, xe^{-(1/x)})$, donde se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{e^{-(1/x)}} + x^2 = 0,$$

Concluimos que se cumple la condición (2.30) y, por el Teorema de Rogers 2.48, el problema tiene una única solución.

Para finalizar esta sección mostremos que la condición (2.30) es necesaria para garantizar la unicidad a través del Teorema 2.48, ya que en caso de que no cumplirse, como en el siguiente ejemplo, el criterio no es aplicable.

Ejemplo 2.50. Consideramos el problema de valor inicial

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 1,\ y \le 0, \\ \dfrac{y}{x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1,\ 0 < y < e^{-(1/x)}, \\ \dfrac{e^{-(1/x)}}{x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1,\ e^{-(1/x)} \le y, \end{cases} \quad ,\ y(0) = 0.$$

La continuidad de la función en la banda P es trivial salvo en la recta $x = 0$. El caso de los puntos de la forma $(0, y)$, con $y \le 0$, es directo. Además, se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-(1/x)}}{x^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} = -\frac{1}{2} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{y} = \frac{1}{2} \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0,$$

por lo que f es continua en la los puntos $(0, y)$, con $y \in [e^{-(1/x)}, \infty)$. Por último, como

$$\left|\frac{y}{x^2}\right| < \left|\frac{e^{-(1/x)}}{x^2}\right| \to 0 \quad \text{cuando } x \to 0^+,$$

con $y \in (0, e^{-(1/x)})$, se tiene también la continuidad en estos puntos. Por tanto, concluimos que f es continua en P.
Comprobemos ahora que se cumple la condición de Rogers (2.28). Consideramos los siguientes casos:

- Si $0 < y, \bar{y} < e^{-(1/x)}$, tenemos

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left|\frac{y}{x^2} - \frac{\bar{y}}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}|y - \bar{y}|$$

- Si tomamos $y \le 0 < \bar{y} < e^{-(1/x)}$, se sigue que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left|0 - \frac{\bar{y}}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}|\bar{y}| \le \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|.$$

- Tomando $y \leq 0,\ e^{-(1/x)} \leq \bar{y}$, se sigue que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left|0 - \frac{e^{-(1/x)}}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}|e^{-(1/x)}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|.$$

- Por último, si $0 < y < e^{-(1/x)} \leq \bar{y}$,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left|\frac{y}{x^2} - \frac{e^{-(1/x)}}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}|y - e^{-(1/x)}| \\ &= \frac{1}{x^2}(e^{-(1/x)} - y) \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y|. \end{aligned}$$

Para acabar, veamos que la condición (2.30) no se verifica. Fijado un $y \in [e^{-(1/x)}, \infty)$, se tiene que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 f(x,y)}{e^{-(1/x)}} = 1 \neq 0.$$

Esto imposibilita aplicar el Teorema de Unicidad de Rogers 2.48.
En particular, el problema tiene infinitas, que vienen dadas de la forma

$$y(x) = ce^{-(1/x)},$$

con $c \in [0,1]$.

2.7. Teorema de Unicidad de Krasnosel'skii-Krein

Una restricción del Teorema de Unicidad de Nagumo 2.41 era que la constante positiva k debía de ser menor o igual uno. En esta sección enunciamos el criterio de Krasnosel'skii-Krein, que elimina esta hipótesis, como se recoge en el Capítulo 1 de [1].

Definición 2.51. Una función $f(x,y)$ se dice que verifica la **condición de Krasnosel'skii -Krein** en un conjunto D si para todo par $(x,y), (x,\bar{y}) \in D$ se verifica que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq k\frac{|y - \bar{y}|}{|x - x_0|},\ x \neq x_0,\ k > 0. \tag{2.31}$$

Además, se dice que f satisface la **condición de Hölder**, con k la misma constante de la desigualdad (2.31), si

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq c|y - \bar{y}|^\alpha,\ c > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ k(1-\alpha) < 1. \tag{2.32}$$

Obviamente, si $k \in (0,1]$ como en la condición de Nagumo (2.22), la condición de que $k(1-\alpha) < 1$ es superflua. Nótese que la condición de Krasnosel'skii-Krein (2.31) generaliza de forma obvia a la de Nagumo (2.22).
Enunciamos el teorema principal de este apartado, recogiendo la prueba en el intervalo $[x_0, x_0 + a]$, siendo análoga para el conjunto $[x_0 - a, x_0]$.

Teorema 2.52 (Teorema de Unicidad de Krasnosel'skii-Krein)**.** *Sea $f(x,y)$ una función continua en el rectángulo $\bar{S}$ verificando las condiciones* (2.31) *y* (2.32)*. Entonces, el problema de Cauchy* (2) *tiene a lo sumo una solución en* $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones, $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, del problema de valor inicial (2) en el intervalo $I = [x_0, x_0 + a]$. Definimos la función $\phi(x) = |y(x) - \bar{y}(x)|$, que es claramente no negativa y continua. Por la condición de Holder (2.32) y la ecuación (2.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= |y(x) - \bar{y}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| \ dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} c|y(t) - \bar{y}(t)|^{\alpha} \ dt = \int_{x_0}^{x} c(\phi^{\alpha}(t)) \ dt. \end{aligned}$$

Definimos la función

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} c(\phi^{\alpha}(t)) \ dt,$$

que cumple que $R(x_0) = 0$ y

$$R'(x) = c(\phi^{\alpha}(x)) \leq c(R^{\alpha}(x)), \tag{2.33}$$

lo que implica que $R'(x) - c(R^{\alpha}(x)) \leq 0$.
Como $R(x) > 0$ para todo $x > x_0$, multiplicando la desigualdad (2.33) por $(1-\alpha)(R^{-\alpha}(x))$ obtenemos que

$$(R^{1-\alpha}(x))' \leq c(1 - \alpha) \leq c,$$

de donde se deduce que $R^{1-\alpha}(x) \leq c(x - x_0)$.
Por tanto, se tiene que $\phi(x) \leq (c(x - x_0))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ y se cumple las siguientes desigualdades:

$$0 \leq \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^k} \leq c^{\frac{1}{1-\alpha}} (x - x_0)^{\frac{1}{1-\alpha} - k}.$$

Ahora, definimos la función γ como

$$\gamma(x) = \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^k}$$

Como, por la condición de Hölder (2.32), $k(1 - \alpha) < 1$, se sigue que

$$\lim_{x \to x_0^+} \gamma(x) = 0.$$

Veamos que $\gamma(x) = 0$ en todo el conjunto I. Supongamos al contrario que la función γ es no nula en algún punto. En ese caso, existe un $x_1 > x_0$ tal que

$$0 < m = \gamma(x_1) = \max_{x \in I} \gamma(x).$$

Por la condición de Krasnosel'skii-Krein (2.31) tenemos que

$$\begin{aligned} m = \gamma(x_1) = \frac{\phi(x_1)}{(x_1 - x_0)^k} \quad &\le \quad \frac{k}{(x_1 - x_0)^k} \int_{x_1}^{x_0} \frac{\phi(t)}{t - x_0}\, dt \\ &\le \quad \frac{k}{(x_1 - x_0)^k} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\gamma(t)}{(t - x_0)^{k-1}}\, dt \\ &< \quad \frac{m}{(x_1 - x_0)^k} \int_{x_0}^{x_1} \frac{k}{(t - x_0)^{k-1}}\, dt = m. \end{aligned}$$

Por la contradicción anterior, concluimos que $\gamma(x) = \phi(x) = 0$ en I y ambas soluciones son iguales. □

Ejemplo 2.53. Consideramos el problema de Cauchy

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 1,\ x^2 < y, \\ \dfrac{x^2 - y}{x} & \text{si } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2, \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1,\ y < 0. \end{cases} \quad , \ y(0) = 0.$$

Veamos primero si la función es continua en la banda

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Es evidente que f es continua en todo $(x,y) \in D$ tal que $x \neq 0$. Estudiemos los puntos restantes a través del cálculo de los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x,y) &= \lim_{x\to 0^+} 0 = 0 \quad \text{si } x^2 < y. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x,y) &= \lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{si } y < 0. \end{aligned}$$

En el caso restante se tiene que

$$\Big|\frac{x^2 - y}{x}\Big| \le \Big|\frac{x^2 + x^2}{x}\Big| \to 0 \quad \text{si } 0 \le y \le x^2.$$

Como los límites coinciden con el valor de la función, f es continua en la recta $x = 0$, por tanto, en el conjunto D.
Veamos ahora si se cumple la condición de Krasnosel'skii-Krein (2.31). Consideramos los siguientes casos.

- Si $0 \le y, \bar{y} \le x^2$ tenemos que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \Big| \left(\frac{x^2 - y}{x}\right) - \left(\frac{x^2 - \bar{y}}{x}\right) \Big| = \frac{1}{x}|\bar{y} - y|.$$

- Si $y < 0 \leq \bar{y} \leq x^2$,

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left| x - \left(\frac{x^2 - \bar{y}}{x} \right) \right| = \frac{1}{x}|\bar{y}| < \frac{1}{x}|\bar{y} - y|.$$

- En el caso de que $y < 0,\ x^2 < \bar{y}$, se tiene que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = |x - 0| = \frac{1}{x}|x^2| < \frac{1}{x}|\bar{y}| < \frac{1}{x}|\bar{y} - y|.$$

- Por último, si $0 \leq y \leq x^2 < \bar{y}$ se sigue que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left| \left(\frac{x^2 - y}{x} \right) - 0 \right| = \frac{1}{x}(x^2 - y) < \frac{1}{x}|\bar{y} - y|.$$

Para finalizar y ayudándonos de los cálculos anteriores para ver si se cumplía (2.31), estudiamos si se verifica en todos los casos la condición de Holder (2.32).

- Si $0 \leq y, \bar{y} \leq x^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \frac{1}{x}|y - \bar{y}| = \frac{1}{x}|y - \bar{y}|^{1/2}|y - \bar{y}|^{1/2} \leq \frac{1}{x}(|y| + |\bar{y}|)^{1/2}|y - \bar{y}|^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}x}{x}|y - \bar{y}|^{1/2} = \sqrt{2}|y - \bar{y}|^{1/2}. \end{aligned}$$

- Si $y < 0 \leq \bar{y} \leq x^2$ se sigue que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \frac{1}{x}|\bar{y}| \leq |\bar{y}|^{1/2} < \sqrt{2}|\bar{y} - y|^{1/2}.$$

- En el caso de que $y < 0,\ x^2 < \bar{y}$,

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = |x| < \bar{y}^{1/2} < |\bar{y} - y|^{1/2} < \sqrt{2}|\bar{y} - y|^{1/2}.$$

- Por último, si $0 \leq y \leq x^2 < \bar{y}$ se tiene que

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = \left| \frac{x^2 - y}{x} \right| \leq |x^2 - y|^{1/2} < (\bar{y} - y)^{1/2} < \sqrt{2}|\bar{y} - y|^{1/2}.$$

Por tanto, el Teorema de Krasnosell'skii-Krein 2.52 garantiza que el problema tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$, que viene dada por

$$y(x) = \frac{x^2}{3}.$$

2.8. Criterio de Unicidad de Perron

Apoyándonos principalmente en el Capítulo 1 de [7], complementado como a lo largo del texto con el Capítulo 1 de [1], recogemos en esta última sección del capítulo principal el Teorema de Unicidad de Perron, que guarda cierta relación con alguno de los ya vistos, como el de Lipschitz 2.9. Empezamos definiendo dos conceptos previos relativos a la solución de un problema de valor inicial.

Definición 2.54. Dado el problema de Cauchy (2), una solución $q(x)$, definida en un intervalo I, se dice **maximal** si, dada otra solución cualquiera $y(x)$ definida también en I, se tiene que

$$y(x) \leq q(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

De forma análoga, una solución $s(x)$ se dice **minimal** si dada otra solución $\bar{y}(x)$ del mismo problema, definidas ambas en I, se tiene que

$$s(x) \leq \bar{y}(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

De la propia definición se deduce que, de existir, ambas soluciones son únicas.
En nuestro caso, al trabajar con funciones con una cierta continuidad, la existencia de solución está garantizada por el Teorema de Cauchy-Peano 1.5. El siguiente resultado muestra que, bajo estas hipótesis, existen siempre ambas soluciones.

Teorema 2.55. *Si $f(x, y)$ es una función continua en el conjunto $\bar{S}_+$, entonces existe tanto una solución maximal como una minimal del problema de Cauchy (2), definidas en el intervalo $[x_0, x_0 + \alpha)$, con $\alpha > 0$.*

Otro término a definir antes de probar el criterio de Perron es el de derivada en el sentido de Dini, que generaliza la idea de la derivada usual para funciones continuas no necesariamente diferenciables.

Definición 2.56. Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I. Llamamos derivada superior derecha, inferior derecha, superior izquierda e inferior izquierda en el sentido de Dini de la función f a

$$\begin{aligned}
D^+f(x) &= \limsup_{h\to 0^+} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right), \\
D_+f(x) &= \liminf_{h\to 0^+} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right), \\
D^-f(x) &= \limsup_{h\to 0^-} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right), \\
D_-f(x) &= \liminf_{h\to 0^-} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right).
\end{aligned}$$

La relación entre la derivada usual y la de Dini es clara: si $D^-f(x) = D_-f(x)$, existe la derivada lateral izquierda de la función continua $f(x)$, denotada como $f'(x^-)$. De forma análoga se tiene este concepto para $f'(x^+)$.
Como ejemplo, si consideramos la función $f(x) = -|x|$ en el punto $x_0 = 0$, se tiene que

$$D^+f(0) = D_+f(0) = -1 = f'(0^+), \quad D^-f(0) = D_-f(0) = 1 = f'(0^-).$$

Las siguientes definiciones y resultados, relativos al campo de las Desigualdades Diferenciales, muestran relaciones entre las las derivadas de Dini y ciertas funciones.

Definición 2.57. Consideremos el problema de Cauchy (2) con $f(x, y)$ una función continua. Sea $y(x)$ una función continua tal que se cumplen las condiciones (a) y (b) de solución. Si y satisface la desigualdad diferencial

$$y'(x^+) < f(x, y(x)), \quad x \in [x_0, x_0 + a),$$

se dice que es una sub-solución del problema de valor inicial (2). En las mismas hipótesis, si $y(x)$ cumple que

$$y'(x^+) > f(x, y(x)), \quad x \in [x_0, x_0 + a),$$

decimos que es una sobre-solución del problema de Cauchy (2).

Teorema 2.58. *Consideremos el problema de valor inicial* (2) *con f continua en el conjunto $\bar{S}_+$. Sean y e $\bar{y}$ dos funciones continuas en el intervalo $[x_0, x_0 + a)$ tales que $(x, y(x)), (x, \bar{y}(x)) \in D$ y*

$$y(x_0) < \bar{y}(x_0)$$

para un cierto x_0. Además, se tiene que

$$D_-y(x) \le f(x, y(x)), \quad D_-\bar{y}(x) > f(x, \bar{y}(x)) \tag{2.34}$$

para todo $x \in [x_0, x_0 + a)$. Entonces

$$y(x) < \bar{y}(x), \quad x \in [x_0, x_0 + a).$$

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces el conjunto

$$A = \{x \in [x_0, x_0 + a) : \ \bar{y}(x) \le y(x)\}$$

es no vacío y está acotado inferiormente. Sea $x_1 > x_0$ el ínfimo de A, que cumple que $y(x) < \bar{y}(x)$ en $[x_0, x_1)$ e $y(x_1) = \bar{y}(x_1)$.
Por todo ello, para un $h < 0$ suficientemente pequeño se tiene que

$$\frac{y(x_1 + h) - y(x_1)}{h} > \frac{\bar{y}(x_1 + h) - \bar{y}(x_1)}{h},$$

donde la última desigualdad implica que

$$D_{-}y(x_1) \geq D_{-}\bar{y}(x_1). \tag{2.35}$$

Por las desigualdades (2.34) y (2.35) junto al hecho que las funciones son iguales en x_1 llegamos a la contradicción

$$f(x_1, \bar{y}(x_1)) < f(x_1, y(x_1)).$$

En consecuencia, el conjunto A es vacío y se sigue el resultado. □

Un resultado análogo se tiene en caso de considerar las restantes derivadas de Dini. Notar que en la demostración del resultado no utilizamos la condición de que las desigualdades (2.34) se cumplan en todo $x \in (x_0, x_0 + a)$. Esto se debe a que el resultado sigue siendo cierto si la condición (2.34) se cumple para todo x perteneciente al conjunto

$$A = \{x \in (x_0, x_0 + a) : \; y(x) = \bar{y}(x)\}.$$

Como corolario de este último teorema, enunciamos un resultado que necesitaremos para probar el criterio de Perron.

Corolario 2.59. *Sea $f(x, y)$ una función continua en un conjunto D, siendo $q(x)$ la solución maximal del problema de Cauchy* (2) *en el intervalo $I = [x_0, x_0 + a)$. Sea $y(x)$ una solución de la siguiente desigualdad:*

$$D^{+}y(x) \leq f(x, y(x)), \quad x \in I.$$

Entonces, si $y(x_0) \leq y_0$ se tiene que $y(x) \leq q(x)$ para todo $x \in I$.

Un resultado análogo del Corolario 2.59 se tiene si consideramos $s(x)$ solución minimal en el intervalo $(x_0 - a, x_0]$, con $y(x)$ solución de

$$D_{-}y(x) \leq f(x, y(x)), \quad x \in I,$$

tal que $y_0 \leq y(x_0)$, implicando que $s(x) \leq y(x)$ en I.

Una vez visto esto, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.60 (Teorema de Unicidad de Perron)**.** *Si se cumple que:*

a. La función $g(x, z)$ es continua y no negativa en el rectángulo $[x_0, x_0 + a] \times [0, 2b]$ tal que, para todo $\bar{x} \in (x_0, x_0 + a)$, la función $z(x) = 0$ es la única función diferenciable en el intervalo $[x_0, \bar{x})$ cumpliendo que

$$z'(x) = g(x, z(x)), \; x \in [x_0, \bar{x}); \quad z(x_0) = 0.$$

*b. La función $f(x,y)$ es continua en el conjunto $\bar{S}_+$ verificando la llamada **condición de Perron**, que dice que para todo $(x,y),(x,\bar{y}) \in \bar{S}_+$ se tiene que*

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq g(x, |y - \bar{y}|). \tag{2.36}$$

Entonces, el problema de Cauchy (2) tiene a lo sumo una solución en $[x_0, x_0 + a]$.

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones, $y(x)$ e $\bar{y}(x)$, del problema de valor inicial (2) en el intervalo $I = [x_0, x_0 + a]$. Definimos en I la función

$$\phi(x) = |y(x) - \bar{y}(x)|.$$

Por ser soluciones, $\phi(x_0) = 0$. Ahora , por la condición de Perron (2.36), se tiene que

$$\begin{aligned} D^+\phi(x) &\leq |y'(x) - \bar{y}'(x)| = |f(x,y(x)) - f(x,\bar{y}(x))| \\ &\leq g(x, |y(x) - \bar{y}(x)|) = g(x, \phi(x)). \end{aligned}$$

Tomando un $\bar{x} \in (x_0, x_0 + a)$, por el Corolario 2.59 tenemos que

$$\phi(x) \leq q(x), \quad \text{para todo } x \in [x_0, \bar{x}),$$

donde $q(x)$ es la solución maximal del problema. Como por hipótesis $q(x) = 0$, se deduce que la función $\phi(x)$ es nula en $[x_0, \bar{x})$. Como $\bar{x}$ fue escogido de forma arbitraria, ambas soluciones son iguales en el intervalo I. □

Corolario 2.61. *La condición de Lipschitz (2.1) es un caso particular de la condición de Perron (2.36), tomando $g(x,z) = kz$, con $k \geq 0$.*

Ejemplo 2.62. Veamos que la función f, definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(1/x)} + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ y \leq 0, \\ \dfrac{y}{x^2} + e^{-(1/x)} + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y < xe^{-(1/x)}, \\ \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{-(1/x)} + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ xe^{-(1/x)} \leq y, \end{cases}$$

cumple la condición de Perron (2.36) en el conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}\}.$$

De forma análoga al Ejemplo 2.49 se sigue que f es continua en la banda D.
Tomamos la función g como

$$g(x,z) = \frac{z}{x^2}.$$

Estudiemos los siguientes casos:

- Supongamos que $0 < y, \bar{y} < xe^{-(1/x)}$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left| \left(\frac{y}{x^2} + e^{-(1/x)} + 1\right) - \left(\frac{\bar{y}}{x^2} + e^{-(1/x)} + 1\right) \right| \\ &= \frac{1}{x^2}|y - \bar{y}| = g(x, |y - \bar{y}|). \end{aligned}$$

- Si $0 < y < xe^{-(1/x)} \leq \bar{y}$ se sigue que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left| \left(\frac{y}{x^2} + e^{-(1/x)} + 1\right) - \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-(1/x)} + 1\right) \right| \\ &= \left| \frac{y}{x^2} - \frac{e^{-(1/x)}}{x} \right| = \frac{1}{x^2}(xe^{-(1/x)} - y) \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y| \\ &= g(x, |\bar{y} - y|). \end{aligned}$$

- En el caso de que $y \leq 0,\ xe^{-(1/x)} \leq \bar{y}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left| \left(e^{-(1/x)} + 1\right) - \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-(1/x)} + 1\right) \right| \\ &= \frac{1}{x}|e^{-(1/x)}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y| = g(x, |\bar{y} - y|). \end{aligned}$$

- Por último, si $y \leq 0 < \bar{y} < xe^{-(1/x)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &= \left| \left(e^{-(1/x)} + 1\right) - \left(\frac{\bar{y}}{x^2} + e^{-(1/x)} + 1\right) \right| \\ &= \frac{1}{x^2}|\bar{y}| \leq \frac{1}{x^2}|\bar{y} - y| = g(x, |\bar{y} - y|). \end{aligned}$$

Por tanto se cumple la condición de Perron (2.36). Sin embargo, la función no está en las hipótesis de (a) al no estar definida $g(x, z)$ en los puntos de la recta $x = 0$. Por tanto no se puede garantizar la unicidad por el Teorema de Perron 2.60.
Nótese que tampoco podemos aplicar el Teorema de Rogers 2.48 pese a cumplirse la condición de Rogers (2.28), debido a que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 f(x,y)}{e^{-(1/x)}} = x^2 + x + \frac{x^2}{e^{-(1/x)}} = \infty.$$

Esto implica que no se verifica la hipótesis (2.30).

Capítulo 3

Unicidad a través de la variable independiente

En este último capítulo, utilizando como fuente el artículo [3], nuestro objetivo es demostrar la unicidad del problema de Cauchy (2) a través del estudio de la variable independiente. Para ello relacionamos el problema de partida, comúnmente llamado directo, con el que define su función inversa, conocido como problema inverso, viendo las conexiones entre sus respectivas soluciones.

Consideramos el problema directo

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ x \geq x_0, \quad y(x_0) = y_0; \tag{3.1}$$

con $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Definición 3.1. Una solución del problema (3.1) es una función $y : [x_0, \bar{x}] \to \mathbb{R}$, con $x_0 < \bar{x} \leq x_0 + a$, tal que

- $y([x_0, \bar{x}]) \subseteq [y_0, y_0 + b]$,
- $y'(x) = f(x, y(x))$ para todo $x \in [x_0, \bar{x}]$, y además
- $y(x_0) = y_0$.

Nótese que nos centraremos en aquellas soluciones definidas en un intervalo a la derecha del punto x_0, ya que al ser f continua las condiciones de existencia son iguales a ambos lados y con un simple cambio de variable tenemos el caso restante.

Sea $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + b] \to \mathbb{R}$. Definimos la función inversa[1] $\bar{f} : [y_0, y_0 + b] \times [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ como

$$\bar{f}(r,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(t,r)} & \text{si } f(t,r) \neq 0, \\ 0 & \text{si } f(t,r) = 0. \end{cases}$$

Consideremos el problema inverso

$$t'(r) = \bar{f}(r, t(r)), \; r \geq y_0, \quad t(y_0) = x_0. \tag{3.2}$$

Intentemos establecer una relación entre los problemas (3.1) y (3.2). Empezamos enunciando dos proposiciones que serán útiles para demostrar el resultado principal de este capítulo. La primera dice lo siguiente.

Proposición 3.2. *Dados I y J dos intervalos no degenerados, consideramos la función $y : I \to J$ continua y biyectiva en I. Entonces, su inversa $y^{-1} : J \to I$ es continua en J si, y solo si, $y'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*
Es más, si y^{-1} es continua en el intervalo J, se tiene que para todo $r \in J$:

$$(y^{-1})'(r) = \frac{1}{y'(y^{-1}(r))}.$$

La segunda es un resultado del campo de la Teoría de la Medida que garantiza que cierto conjunto es medible.

Proposición 3.3. *Sea $g : I \to J$ una función continua en I. Consideramos el conjunto $N \subseteq J$ de medida nula. Entonces, si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, el conjunto $g^{-1}(N)$ es de medida cero.*

Como corolario de esta última proposición se tiene el siguiente enunciado.

Corolario 3.4. *Sea $g : I \to J$ una función continua en I tal que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Consideramos las funciones $h_1, h_2 : J \backslash N \to \mathbb{R}$, con N un conjunto de medida nula. Entonces, si $h_1(y) = h_2(y)$ para todo $y \in J$, se tiene que*

$$h_1(g(x)) = h_2(g(x)) \text{ para todo } x \in I.$$

Aplicando los anteriores resultados demostramos el teorema que relaciona las soluciones de los problemas (3.1) y (3.2).

Teorema 3.5. *Si la función $t : [y_0, \bar{y}] \to \mathbb{R}$, con $y_0 < \bar{y} \leq y_0 + b$, es una solución del problema (3.2) cumpliendo que $t'(r) > 0$ para todo $r \in [y_0, \bar{y}]$, entonces la función $t^{-1} : [x_0, t(\bar{y})] \to \mathbb{R}$ es una solución del problema (3.1).*

[1] Se tiene que $\bar{f} \circ f = f \circ \bar{f} = \mathbb{1}$.

Demostración. De la Proposición 3.2, para todo $x \in [x_0, t(\bar{y})]$ se tiene que

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{t'(t^{-1}(x))} > 0. \tag{3.3}$$

Además, para todo $r \in [y_0, \bar{y}]$,

$$0 < t'(r) = \bar{f}(r, t(r)) = \frac{1}{f(t(r), r)}.$$

Aplicando el Corolario 3.4, teniendo en cuenta que

$$h_1 = t', \ h_2 = \frac{1}{f(t(\cdot), \cdot)} \ \text{ y } g = t^{-1},$$

tenemos que para todo $x \in [x_0, t(\bar{y})]$:

$$0 < t'(t^{-1}(x)) = \frac{1}{f(t(t^{-1}(x)), t^{-1}(x))} = \frac{1}{f(x, t^{-1}(x))},$$

que, junto a (3.3), muestra que la función t^{-1} es solución del problema (3.1) en $[x_0, t(\bar{y})]$. $\square$

Destacamos algunas de las aplicaciones que tiene el Teorema 3.5.

- Cálculo de la inversa: es posible hallar la expresión explícita de la inversa en determinados casos si la ecuación (3.2) es lo suficientemente buena, como muestra el siguiente ejemplo.

  Ejemplo 3.6. Consideramos el problema (3.1) con la condición inicial $y(0) = 0$ y la función

  $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

  En este caso, el problema (3.2) es lineal y la función

  $$t(r) = e^r - r - 1, \qquad r \in [0, \infty),$$

  define su única solución posible. Además, como $t'(r) = e^r - 1 > 0$ para todo valor de $r \in (0, \infty)$, por el Teorema 3.5 se sigue que $t^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es solución del problema (3.1).
  Nótese que en numerosas situaciones el cálculo de la inversa t^{-1} es complicado o incluso imposible.

- Un criterio de existencia para problemas con singularidades donde f es continua: Como corolario del **Teorema de Cauchy-Peano** 1.5 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *Sea B una bola centrada en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si la función $\bar{f}$ es continua en B y positiva en los puntos de $B \backslash \{(x_0, y_0)\}$, entonces el problema* (3.1) *tiene al menos una solución continua.*

Nótese que la hipótesis de que la función $\bar{f}$ sea positiva en la bola abierta perforada $B \backslash \{(x_0, y_0)\}$ se puede cambiar suponiendo que es negativa en toda ella. Además, no hemos supuesto que la función esté acotada, al contrario que en el Teorema 1.5.

- **Una versión alternativa de los criterios de unicidad, como el de Lipschitz.** Si f es continua en un entorno del punto (x_0, y_0), el Teorema 3.7 garantiza la existencia de al menos una solución, $y(x)$, tal que $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$. El siguiente paso sería estudiar si dicha solución es única por algún criterio, como el de Lipschitz 2.9. Sin embargo, esto no se tiene asegurado siempre como vimos en el Ejemplo 1.6. Recogemos una situación donde es posible solventar este problema.

Ejemplo 3.8. Consideremos el problema de Cauchy

$$y' = f(x, y) = \sqrt{|y|} + \cos(x), \;\; y(0) = 0. \tag{3.4}$$

La función $f(x, y)$ es continua al ser suma de funciones elementales. Como vimos a lo largo de la Sección 2.1, f no es lipschitziana respecto de la variable y.
Sin embargo, como $f(0, 0) = 1 > 0$ y f es lipschitziana respecto de x en cualquier entorno del origen, se tiene que

$$\bar{f}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r} + \cos(t)}$$

es lipschitziana respecto de t en un entorno del punto $(0, 0)$. Por tanto, el correspondiente problema (3.2) tiene una única solución.
Además, al ser f una función positiva en un entorno de $(0, 0)$, toda solución de (3.4) define una solución local del problema inverso (3.2), por lo que (3.4) tiene una única solución posible.

Como consecuencia del anterior ejemplo, deducimos el siguiente resultado que garantiza una solución local del problema de Cauchy (2).

Teorema 3.9 (Versión del Teorema de Lipschitz). *Sea $f(x, y)$ una función continua en un entorno de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, el problema de valor inicial* (2) *tiene una solución única si es f es lipschitziana en un entorno de (x_0, y_0) respecto de x y/o respecto de y.*

Para finalizar, estudiemos brevemente la condición de que $f(x_0, y_0) \neq 0$ en el Teorema de Lipschitz 3.9 a través de dos ejemplos.
El problema de valor inicial autónomo

$$y' = \sqrt{|y|},\ x \geq 0, \quad y(0) = 0,$$

muestra que la condición de que la función sea distinta a cero en el punto (x_0, y_0) es necesaria para garantizar la unicidad por el Teorema 3.9. Como habíamos visto en el Ejemplo 2.18, dos posibles soluciones a este problema son la trivial e $y(x) = x^2/4$.
Ahora consideremos el problema de Cauchy

$$y' = \sqrt{|y-x|} + 1,\ x \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

Nótese que pese a cumplirse que $f(0,0) \neq 0$, la función no es lipschitziana en ningún entorno del origen respecto de alguna variable, por tanto no se puede aplicar el Teorema 3.9. Además, las funciones

$$y(x) = x \quad \text{e} \quad \bar{y}(x) = \frac{x^2}{4} + x$$

son dos soluciones al problema.

Nótese que también es posible estudiar la unicidad a través de condiciones en la variable independiente con otros criterios distintos al de Lipschitz, como los vistos en el Capítulo 2. Por ejemplo, en el caso de Peano bastaría pedir que la función f sea continua y decreciente respecto de alguna variable en un entorno de dicho punto y además que no se anule en el punto (x_0, y_0).

Bibliografía

[1] Agarwal, R. P. y Lakshmikantham, V. (1993). *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*. World Scientific.

[2] Cid, J. A. y López Pouso, R. *A generalization of Montel Tonelli's Uniqueness Theorem*. J. Math. Anal. Appl. 429 (2015), 1173–1177.

[3] Cid, J. A. y López Pouso, R. *On first-order ordinary differential equations with non-negative right-hand sides*. Nonlinear Analysis, 52 (2003), 1961-1977.

[4] Diaz, J. B. y Walter, W. L. *On Uniqueness Theorems for Ordinary Differential Equations and for Partial Differential Equations of Hyperbolic Type*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 96, 90-100.

[5] Fernandez Tojo F. A. *Notas de clase de la materia "Continuidad y Derivabilidad de Funciones de una Variable Real"*. Curso 2017- 2018. Manuscrito.

[6] Hu, J. y Li W. (2004). *Theory of Ordinary Differential Equations Existence, Uniqueness and Stability*. Notes.

[7] Lakshmikantham, V. y Leela, S. (1969). *Differential and Integral Inequalities*. Academic Press.

[8] Otero Zarraquiños, Ó. A. *Notas de clase de la materia "Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"*. Curso 2018- 2019. Manuscrito.

[9] Rogers, T. (1972). *On Nagumo's Condition*. Canadian Mathematical Bulletin, 15(4), 609-611. Doi: 10.4153/CMB-1972-109-2.