



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Intervalos de confianza bootstrap

Alberto Portela Peleteiro

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Intervalos de confianza bootstrap

Alberto Portela Peleteiro

Julio 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Estadística e Investigación Operativa
Título: Intervalos de confianza bootstrap
Breve descripción do contido
El método bootstrap permite aproximar la distribución de un estadístico, lo cual es de gran utilidad para llevar a cabo procedimientos de inferencia, como intervalos de confianza o contrastes de hipótesis. En este trabajo nos centraremos en la aplicación del bootstrap para la construcción de intervalos de confianza. Se llevará a cabo una revisión del método bootstrap en términos generales, así como de los métodos principales propuestos en la literatura para obtener intervalos de confianza. Se estudiarán las propiedades teóricas de los distintos métodos y se realizarán estudios de simulación para comprobar su funcionamiento de datos simulados. Además, se ilustrarán con aplicaciones en datos reales.

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Intervalos bootstrap percentil	1
1.1. Motivación y explicación del método	1
1.2. Comparación entre los intervalos bootstrap percentil y los intervalos normales estándar	2
1.2.1. Cobertura de los intervalos	3
1.2.2. Restricciones de rango	3
1.2.3. Buen comportamiento frente a transformaciones	4
1.3. Ejemplos	4
1.4. Software de R asociado	10
1.4.1. Comando boot	10
1.4.2. Comando boot.ci	11
2. Intervalos bootstrap-t	13
2.1. Motivación y explicación del método	13
2.2. Ventajas e inconvenientes del método bootstrap-t	14
2.2.1. Malos resultados para muestras pequeñas	15
2.2.2. Problemas computacionales derivados del bootstrap	15
2.2.3. Cálculo de $\hat{\sigma}$ cuando no tiene una expresión conocida	15
2.2.4. Sensibilidad a cambios de escala	15
2.3. Relación entre el método bootstrap-t y el método bootstrap percentil	16
2.4. Estudio de simulación	17
2.5. Software de R asociado	20

3. Intervalos BC_a	21
3.1. Motivación y explicación del método	21
3.1.1. Parámetro z_0	22
3.1.2. Parámetro a	23
3.2. Propiedades de los intervalos BC_a	24
3.2.1. Comportamiento frente a transformaciones	24
3.2.2. Buenas propiedades de cobertura	25
3.3. Ejemplos	26
3.4. Software de R asociado	30
4. Intervalos ABC	31
4.1. Motivación y explicación del método	31
4.1.1. Coeficiente \hat{b}	33
4.1.2. Coeficiente \hat{c}_q	33
4.1.3. ABC cuadrático	33
4.2. Propiedades de los intervalos	34
4.3. Estudio de simulación	35
4.4. Software de R asociado	37
Anexos	38
A. Código de R de las simulaciones	41
A.1. Código de R del primer estudio de simulación	41
A.2. Código de R del segundo estudio de simulación	45
A.3. Código de R del tercer estudio de simulación	51
Bibliografía	57

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de los diferentes intervalos de confianza para un parámetro empleando el método bootstrap.

Hemos introducido los intervalos bootstrap percentil, que presentan buen comportamiento frente a transformaciones, y los intervalos bootstrap-t, que obtienen buenos resultados de cobertura, y los hemos comparado mediante un estudio de simulación. Luego definimos los intervalos BC_a que buscan reunir las ventajas de estos dos métodos, obteniendo propiedades relativamente buenas como analizamos en otro estudio de simulación. Finalmente, hablamos de los intervalos ABC que buscan reducir el cálculo computacional de los intervalos BC_a .

Abstract

The main objective of this paper is to focus on the study of the different confidence intervals for a parameter using the bootstrap method.

We have introduced the percentile bootstrap intervals, which show good behavior against monotone transformations, and the bootstrap-t intervals, which obtain good coverage results, comparing them using computer simulation. Then we define the BC_a intervals that seek to combine the advantages of these two methods, obtaining relatively good properties as we analyzed in another simulation study. Finally, we talk about the ABC intervals that pretend to reduce the computational calculation of the BC_a intervals.

Introducción

Uno de los objetivos principales de la Inferencia estadística es la estimación puntual, que consiste en aproximar, mediante un valor concreto, un cierto parámetro de interés, que por lo general denotaremos por θ .

Como ejemplo de estimación puntual podríamos considerar la media muestral, que a menudo es un buen estimador de la media poblacional.

Sin embargo, en el proceso de la estimación puntual surgen errores, lo que motiva la creación de los intervalos de confianza, que no son más que intervalos que con una probabilidad alta, llamada nivel de confianza y que denotaremos habitualmente por $(1 - \alpha)$, contendrán al verdadero valor del parámetro.

Matemáticamente, decimos que un intervalo de confianza para θ , (S, T) , tiene nivel de confianza $(1 - \alpha)$ si $\mathbb{P}(S < \theta < T) \geq 1 - \alpha$, con $\alpha \in [0, 1]$.

Si los datos que conforman la muestra, que denotaremos X_1, \dots, X_n , proceden de una distribución normal y son independientes, existen intervalos de confianza teóricos muy precisos para los parámetros que definen la distribución (media y varianza) y que detallaremos brevemente a continuación:

1. Intervalo para la media con varianza conocida.

El intervalo de confianza con nivel $(1 - \alpha)$ para la media con varianza conocida viene dado por:

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el cuantil $(1 - \alpha/2)$ de una normal estándar, siendo $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la media muestral, σ la desviación típica poblacional conocida y n el tamaño muestral.

2. Intervalo para la media con varianza desconocida.

Para el caso en que la varianza es desconocida se recurre a la distribución T de Student.

Si denotamos por $t_{\alpha/2}$ al valor que deja a su derecha una probabilidad $\alpha/2$ en una distribución T de Student con $(n-1)$ grados de libertad, el intervalo para la media es:

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S_c}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S_c}{\sqrt{n}} \right)$$

con $S_c = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ la cuasidesviación típica muestral.

3. Intervalo para la varianza con media conocida

En este caso se tiene el intervalo:

$$\left(\frac{nS_\mu^2}{\chi_{\alpha/2}^2}, \frac{nS_\mu^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right)$$

donde $S_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ es la varianza muestral, suponiendo que la media poblacional μ es conocida, y $\chi_{\alpha/2}^2$ y $\chi_{1-\alpha/2}^2$ son los cuantiles respectivos de una distribución ji-cuadrado con n grados de libertad.

4. Intervalo para la varianza con media desconocida

Finalmente, empleando el Teorema de Fisher, tenemos el siguiente intervalo para la varianza cuando la media es desconocida:

$$\left(\frac{(n-1)S_c^2}{\chi_{\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_c^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right)$$

Todos estos intervalos respetan de manera exacta el nivel de confianza propuesto $(1-\alpha)$ si, en efecto, los datos proceden de la normal.

En otros casos, se dispone de un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro general θ , que posee cierta distribución asintótica normal y cuyo error típico es posible estimar.

En estas circunstancias, y cuando el tamaño muestral es suficientemente grande, se puede emplear un intervalo asintótico del tipo:

$$\left(\hat{\theta} - z^{\alpha/2} \hat{s}e, \hat{\theta} + z^{\alpha/2} \hat{s}e \right)$$

donde $\hat{\theta}$ es la estimación de θ y $\hat{s}e$ la estimación del error típico.

A este intervalo le llamaremos **intervalo normal estándar**.

El principal problema con el que nos encontramos es que, en general, los datos de la muestra con la que queremos trabajar pueden no proceder de una distribución normal, y el intervalo asintótico o no está disponible o no ofrece una aproximación adecuada.

Por tanto, la situación en la que nos centraremos en este trabajo será la de una muestra de datos que no podemos suponer provenientes de una distribución normal.

En este contexto nacen las técnicas de remuestreo, que son métodos que se apoyan en el cálculo computacional para evitar el tratamiento teórico al realizar inferencia con un conjunto de datos.

Este tipo de técnicas buscan extraer, a partir de la muestra, información que permita obtener buenos resultados en diversos campos de la Inferencia estadística, como la estimación puntual, los intervalos de confianza o el contraste de hipótesis.

De entre este tipo de técnicas destacamos:

- Métodos de permutación
- Método jackknife

Los métodos de permutación fueron ideados por Fisher y Pitman entre 1935 y 1939 y se basan en permutaciones del conjunto de datos inicial. Su principal inconveniente es computacional pues, para una muestra de tamaño n tenemos $n!$ permutaciones diferentes, y, así, cuando tratamos con un tamaño muestral grande, el número de permutaciones se dispara.

El método jackknife fue introducido por Quenouille en 1949, aunque hasta años más tarde su método no fue conocido con el nombre de jackknife. Consiste principalmente en, dada una muestra de tamaño n , hacer n estimaciones del parámetro suprimiendo cada vez uno de los datos de la muestra inicial. Es eficiente cuando el conjunto de datos es de pequeño tamaño.

Estas técnicas de remuestreo sentaron las bases del método bootstrap, ideado en 1979 por Bradley Efron.

El término bootstrap, que es relativamente reciente en la Estadística, tuvo su origen en una de las historias de *Aventuras del barón Munchausen* del siglo XVIII, donde el barón, que quedaba sumergido en un lago, conseguía salir tirando hacia arriba de los cordones de sus botas (*to pull oneself up by one's bootstraps*).

El concepto de bootstrap en la Estadística actual es, en cierto modo, una analogía con la aventura del barón, pues consiste principalmente en, a partir de una muestra de datos, construir un número grande de submuestras del mismo tamaño que la muestra original para realizar inferencia sobre ellas.

La metáfora con la aventura del barón es el hecho de extraer cosas útiles (en nuestro caso, un número grande de muestras) de donde apenas teníamos nada (una sola muestra).

La idea de Efron era perfeccionar el método jackknife definiendo una nueva forma de remuestreo que le permitiera aproximar la distribución de un cierto estadístico y realizar inferencia con los nuevos conjuntos de datos.

Sin embargo, al estudiar cómo se comportaba su método, Efron descubrió que era más flexible que el propio método jackknife, pues para muestras de gran tamaño era mucho más eficaz.

En este trabajo nos centraremos principalmente en el contexto no paramétrico del método bootstrap, que es más general. Veamos matemáticamente en qué consiste el método bootstrap en este caso:

Como ya anticipamos previamente, el método bootstrap crea, a partir de una muestra inicial X , un número B suficientemente grande de submuestras del mismo tamaño que la muestra original.

Estas submuestras se crean mediante la extracción con reemplazamiento de datos de la muestra original.

Frente a las estimaciones teóricas de un parámetro, el bootstrap no asume que los datos que conforman la muestra proceden de una distribución particular, y solo utiliza la distribución empírica de los propios datos (que da un peso de $\frac{1}{n}$ a cada uno de ellos), por lo que es bastante menos restrictivo que los procedimientos teóricos de los que hablamos al principio de este texto.

Suponiendo que, dado un conjunto de datos X , queremos calcular una estimación para la desviación típica de un estadístico $T(X)$ empleando bootstrap, el procedimiento que deberíamos llevar a cabo es el siguiente:

1. Construir B muestras mediante extracciones con reemplazamiento que denotaremos por $X^*(i)$ con $i = 1, \dots, B$.
2. Aplicar el estadístico T a cada uno de las B submuestras creadas, obteniendo $T(X^*(i))$ con $i = 1, \dots, B$.
3. Calcular la desviación típica muestral de estos B valores, y esa será la estimación de la desviación típica del estadístico T .

Una de las principales ventajas del bootstrap frente a las estimaciones que emplean métodos teóricos es que, aunque la distribución bootstrap es, a menudo, difícil de calcular, se puede aproximar mediante simulación, por medio de algoritmos como el que se detalla arriba. Esto supone una gran mejoría con respecto a los métodos teóricos, pues no requiere de un tratamiento específico según el conjunto de datos y el parámetro de interés.

En este trabajo trataremos la construcción de intervalos de confianza empleando el método bootstrap, analizando 4 tipos de intervalo distintos, con su algoritmo de utilización, sus ventajas y desventajas, su aplicación computacional y ejemplos prácticos asociados, tanto con datos reales como simulados.

En el **Capítulo 1** trataremos el primero de estos tipos de intervalos, conocidos como intervalos bootstrap percentil. En el **Capítulo 2** trataremos los intervalos bootstrap-t o bootstrap estudentizados. En el **Capítulo 3** trataremos los intervalos BC_a y, finalmente, en el **Capítulo 4** hablaremos de los intervalos ABC.

Capítulo 1

Intervalos bootstrap percentil

1.1. Motivación y explicación del método

Los intervalos bootstrap percentil son conceptualmente bastante sencillos, pero nos permitirán introducir otro tipo de intervalos más complejos como los BC_a o los ABC , que veremos posteriormente.

La idea principal en la que se basa el método es muy intuitiva a partir de la definición del concepto de bootstrap, y es obtener, mediante la muestra ordenada de las estimaciones bootstrap, los percentiles adecuados para calcular el intervalo de confianza que buscamos.

Veámoslo matemáticamente:

Sea X una muestra de tamaño n y θ nuestro parámetro de interés, cuya estimación muestral es $\hat{\theta}$. Construimos B submuestras bootstrap, todas de tamaño n , mediante extracciones con reemplazamiento y calculamos sus correspondientes estimaciones de θ que denotaremos por $\hat{\theta}^*(i)$, $i = 1, \dots, B$.

Si denotamos por $\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}$ al valor ordenado de los $\hat{\theta}^*(i)$ que ocupa la posición $B \cdot \alpha/2$, el intervalo percentil con un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ será:

$$(\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)})$$

Nótese que los valores $\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}$ y $\hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)}$ no son más que los cuantiles muestrales de orden $\alpha/2$ y $(1 - \alpha/2)$, respectivamente, de la muestra $\{\hat{\theta}^*(i)\}_{i=1}^B$.

Si, por ejemplo, $\alpha = 0.05$ y $B = 1200$, el extremo inferior del intervalo percentil asociado para un parámetro de interés θ será el valor ordenado de los $\hat{\theta}^*(i)$ que ocupa la posición $B \cdot \alpha/2 = 1200 \cdot 0.025 = 30$, que se corresponde con el cuantil muestral de orden 0.025, también llamado percentil del 2.5%.

Observación 1.1. Aquí surge un pequeño problema, pues si se emplea un valor de α demasiado preciso, o bien el número de muestras bootstrap B no es suficientemente redondo, puede ocurrir que $B \cdot \alpha$ no sea un valor entero.

Para solventar este inconveniente definimos el siguiente criterio:

Dado $k = \lfloor (B + 1)\alpha/2 \rfloor$, es decir, k es el mayor número natural menor o igual que $(B + 1)\alpha/2$, tomamos $\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}$ el valor ordenado de los valores $\hat{\theta}^*(i)$ que ocupa la posición k y $\hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)}$ el que ocupa la posición $(B + 1 - k)$.

1.2. Comparación entre los intervalos bootstrap percentil y los intervalos normales estándar

Introduzcamos en primer lugar el siguiente lema:

Lema 1.2. *Sea $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación continua y estrictamente monótona. Si $\hat{\phi} = m(\hat{\theta})$ normaliza perfectamente la distribución de $\hat{\theta}$, es decir, $\hat{\phi} \sim N(\phi, \sigma^2)$, entonces el intervalo bootstrap percentil para θ es:*

$$\left(m^{-1}(\hat{\phi} - z_{\alpha/2}\sigma), m^{-1}(\hat{\phi} + z_{\alpha/2}\sigma) \right)$$

La conclusión que podemos extraer de este resultado es que los intervalos bootstrap percentil tienen buen comportamiento frente a transformaciones.

Para poder comparar las similitudes y las diferencias de los intervalos estándar y los intervalos bootstrap percentil analizaremos los dos casos siguientes:

1. $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2)$
2. $m(\hat{\theta}) \sim N(m(\theta), \sigma^2)$

En el primer caso en el que el estimador se aproxima a una distribución normal, los intervalos estándar y los bootstrap percentil producirán resultados similares, ambos bastante precisos.

Sin embargo, en el segundo caso existe una notable mejoría de los intervalos bootstrap percentil frente a los intervalos estándar, pues, como hemos visto en el lema 1.2, el método percentil se comporta bien frente a transformaciones.

Más concretamente, para que los intervalos estándar sean adecuados, se necesita conocer una transformación $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que el estimador transformado $m(\hat{\theta})$ siga una distribución que se aproxima a una normal.

Por el contrario, para que el método bootstrap percentil proporcione un intervalo correcto, basta con conocer que dicha transformación que normaliza las estimaciones existe,

pues, como hemos visto en el lema anterior, el intervalo bootstrap percentil será análogo al obtenido al realizar el intervalo estándar de las estimaciones normalizadas y aplicarle posteriormente la función inversa de la transformación m .

El problema de estos dos tipos de intervalos es que, para casos más generales que los dos mencionados previamente, ninguno de los dos obtiene resultados óptimos.

Sigamos ahora analizando ventajas y desventajas de los intervalos bootstrap percentil:

- Cobertura de los intervalos
- Restricciones de rango

1.2.1. Cobertura de los intervalos

Definamos en primer lugar qué entendemos por cobertura de un método para el cálculo de intervalos de confianza.

Definición 1.3. La **cobertura de un método** para el cálculo de intervalos de confianza es la probabilidad efectiva de que dicho intervalo contenga al parámetro en cuestión cuando se construye con un nivel de confianza $(1 - \alpha)$. La cobertura se suele aproximar en estudios de simulación mediante el porcentaje de intervalos que contienen al parámetro cuando se generan muchas muestras.

Aunque por lo general los intervalos de confianza bootstrap percentil son más equilibrados (en el sentido de que la probabilidad de que el parámetro real sea inferior al extremo superior al intervalo es similar a la probabilidad de que sea mayor que el extremo superior) que los intervalos estándar, la cobertura de este tipo de métodos no suele ser tan precisa como nos gustaría.

Estos problemas de cobertura serán solucionados posteriormente al introducir el método bootstrap-t.

1.2.2. Restricciones de rango

Consideremos que el parámetro de interés, θ , tiene una restricción de rango, es decir, toma valores en un subintervalo $K \subset \mathbb{R}$ y no tienen sentido valores que no pertenezcan a dicho intervalo.

Este tipo de restricciones de rango son muy comunes pues, por ejemplo, si el parámetro de interés, θ , es una probabilidad, tendrá que tomar valores pertenecientes al intervalo $[0, 1]$, y si el parámetro θ es un coeficiente de correlación, necesariamente tomará valores en el intervalo $[-1, 1]$.

Las restricciones de rango suponen un problema para varios tipos de intervalos de confianza, ya que, como es evidente, lo que se busca es que los extremos de un intervalo de confianza también respeten las restricciones de rango que tenemos para el parámetro.

Ésta es una de las importantes ventajas de los métodos bootstrap percentil, puesto que, por construcción, el intervalo de confianza para el parámetro buscado respetará la restricción de rango.

Esto se tiene porque, para construir el intervalo, estamos empleando las estimaciones bootstrap, que respetan la restricción de rango, y considerando sus percentiles, que trivialmente también conservan la restricción.

Sin embargo, los intervalos estándar no verifican, en general, esta condición, por lo que puede ocurrir que alguno de los extremos del intervalo no pertenezca al rango de valores en los que el parámetro tiene sentido, y esto haga que el intervalo de confianza no proporcione información válida.

Este tipo de intervalos que preservan el rango tienen, en general, buenas propiedades y son más precisos y eficaces que los que no lo preservan.

1.2.3. Buen comportamiento frente a transformaciones

El método bootstrap percentil se comporta bien frente a transformaciones, en el sentido de que si $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ es el intervalo bootstrap percentil para θ de nivel $(1 - \alpha)$ y m es una aplicación monótona creciente que transforma el propio parámetro, entonces el intervalo bootstrap percentil de nivel $(1 - \alpha)$ para $m(\theta)$ es $(m(\hat{\theta}_1), m(\hat{\theta}_2))$.

1.3. Ejemplos

Para ilustrar la comparación entre los intervalos bootstrap percentil y los intervalos estándar teóricos, que provienen de la suposición de que el estimador sigue una distribución normal, detallaremos los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.4. En este ejemplo utilizaremos la base de datos *rock* del paquete *datasets* de R y analizaremos una muestra de 48 rocas de una reserva petrolera. El objetivo es construir un intervalo de confianza para la media de las áreas de los poros de cada roca, medidas en píxeles. Estas áreas se distribuyen según se puede ver en el histograma de la figura 1.1.

A la vista del histograma, los datos se distribuyen de forma acampanada por lo que no parece descabellada la idea de que las áreas de los poros de las rocas sigan una distribución normal.

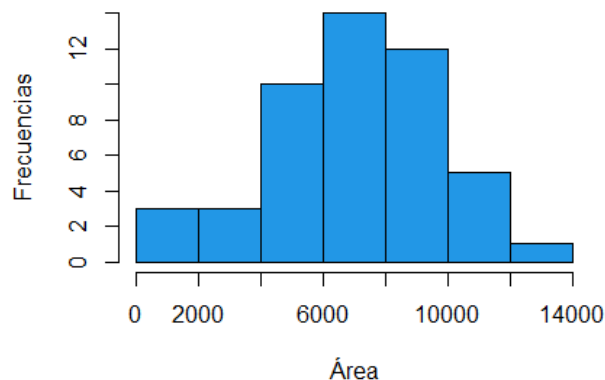


Figura 1.1: Histograma de la muestra de datos *rock* de R.

Para comprobar nuestra primera intuición estudiaremos brevemente la posible normalidad de la muestra empleando un test de normalidad de Shapiro-Wilk y una gráfica cuantil-cuantil (también llamada qqplot).

```
shapiro.test(x)

##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  x
## W = 0.97944, p-value = 0.5555
```

El test de Shapiro-Wilk nos devuelve un nivel crítico alto, del 56%, por lo podemos suponer que los datos de la muestra provienen de una distribución normal para niveles de significación usuales (1%, 5% y 10%).

Veámoslo también gráficamente con la gráfica qq-plot de la figura 1.2, que nos dice que si los datos se distribuyen sobre la recta que define una normal, podemos aceptar que los datos de la muestra provienen de una distribución de este tipo.

Nuevamente, como los datos están en su mayoría sobre la recta, podemos aceptar que provienen de una normal.

Estamos entonces en una situación similar a la descrita en la introducción del trabajo, donde se conocen intervalos exactos para parámetros específicos como la media o la

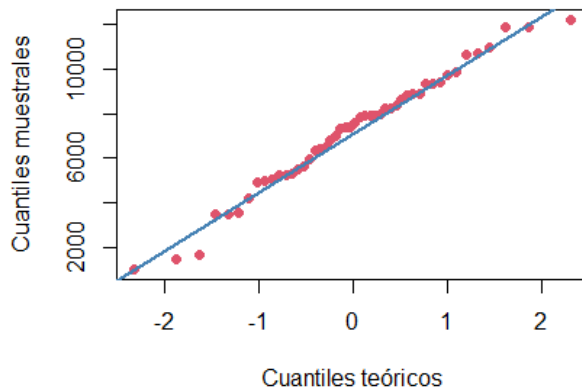


Figura 1.2: Gráfica cuantil-cuantil sobre los datos *rock*.

varianza.

Veremos de esta forma cómo se comportan los intervalos bootstrap percentil frente a los intervalos de la T de Student, en un contexto que, a priori, es favorable para estos últimos, pues la suposición de normalidad parece cumplirse.

Recordemos que se quiere estimar el valor medio del área de las rocas de la reserva petrolera, dando un intervalo de confianza del 95 % para él.

Construyamos primero el intervalo de confianza de la T de Student. Para ello, supongamos que los datos provienen de una distribución normal de la que no conocemos su desviación típica.

Como detallamos en la introducción, el intervalo de confianza de la T de Student para un nivel de confianza de $(1 - \alpha)$ viene dado por:

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S_c}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S_c}{\sqrt{n}} \right)$$

Para los datos de nuestra muestra y con nivel $1 - \alpha = 0.95$ obtenemos el intervalo (6408, 7967), mientras que la media muestral es 7188.

Hemos obtenido por simulación estimaciones bootstrap para la media, $\bar{X}^*(i), i = 1, \dots, B$, con B muestras bootstrap simuladas. El histograma correspondiente a estas B réplicas de la media muestral se tiene en la figura 1.3.

Observamos un comportamiento que se puede aproximar al de una normal y por lo tanto estaríamos en el primer caso de los detallados en la sección 1.2 de la página 2 donde también el intervalo bootstrap percentil tiene propiedades aceptables.

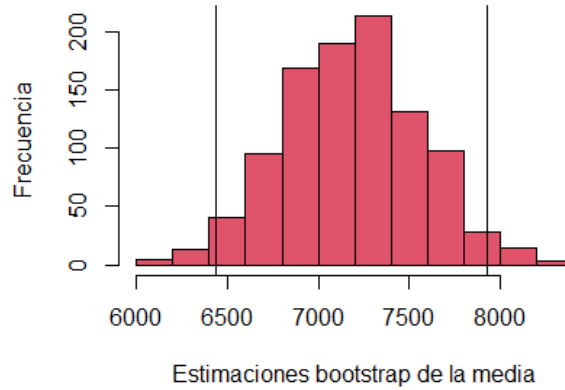


Figura 1.3: Histograma de las estimaciones bootstrap de la media sobre los datos *rock*.

Las líneas verticales que aparecen en el histograma son los cuantiles de nivel $\alpha/2 = 0.025$ y $1 - \alpha/2 = 0.975$, que determinan el intervalo de confianza bootstrap percentil para la media. De esta manera el intervalo es $(6438, 7926)$.

Definamos ahora un concepto sencillo que nos permitirá comparar estos dos intervalos.

Definición 1.5. Definimos la **forma** de un intervalo de confianza para θ , $[\theta_{inf}, \theta_{sup}]$, como:

$$\frac{\theta_{sup} - \hat{\theta}}{\hat{\theta} - \theta_{inf}}$$

donde $\hat{\theta}$ es la estimación muestral de θ .

La forma de un intervalo de confianza mide la simetría del intervalo con respecto a $\hat{\theta}$. Los intervalos con forma igual a 1 tienen una simetría total con respecto a $\hat{\theta}$. Los intervalos con forma menor que 1 presentan más longitud a la izquierda de $\hat{\theta}$ que a la derecha y, por el contrario, los intervalos con forma mayor que 1 presentan más longitud a la derecha de $\hat{\theta}$.

Para poder comparar estos intervalos que hemos obtenido, elaboraremos una tabla que contenga los siguientes elementos:

- Extremos del intervalo
- Longitud del intervalo
- Forma del intervalo

	Extremo inferior	Extremo superior	Longitud	Forma
T de Student	6408	7967	1559	1
Bootstrap percentil	6438	7926	1488	0.984

Tabla 1.1: Comparación del intervalo de la T de Student frente al intervalo bootstrap percentil.

A la vista de la tabla 1.1 tenemos que el intervalo de la T de Student, que suponemos correcto en vista del contraste de normalidad realizado previamente, es más amplio que el intervalo bootstrap percentil.

La forma del intervalo de la T de Student es trivialmente 1, pues la construcción del propio intervalo consiste en pivotar de manera simétrica entorno al valor de $\hat{\theta}$.

La diferencia entre ambos extremos, superior e inferior, del intervalo bootstrap percentil respecto del estimador $\hat{\theta}$ es similar, y esto es lo que hace que la forma del intervalo bootstrap percentil sea muy próxima a 1, y por tanto el intervalo sea casi simétrico.

La conclusión que extraemos de este ejemplo es la que habíamos explicado previamente y es que cuando $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2)$ ambos intervalos tienen buenas propiedades y son similares.

Como hemos tratado con un conjunto de datos que parecen pertenecer a una distribución normal, el método exacto será el adecuado para construir el intervalo de confianza, pero es interesante ver que incluso en este tipo de casos en los que se dan todas las condiciones que propician el uso de los intervalos exactos, el método bootstrap percentil proporciona un intervalo bastante acertado y con un alto grado de simetría.

Ejemplo 1.6. En este segundo ejemplo, basado en un ejemplo de Efron y Tibshirani(1993), testaremos el buen comportamiento frente a transformaciones de los intervalos bootstrap percentil.

Para ello, simularemos una muestra X de tamaño $n = 10$ de datos provenientes de una distribución normal $N(0, 1)$ y buscaremos un intervalo de confianza al 95% para nuestro parámetro de interés, que en este caso será $\theta = e^\mu$, donde μ es la media de la población.

Estamos en el caso 2 de la sección 1.2 de la página 2, donde se tiene la transformación $m(x) = \log(x)$, que normalizará la distribución del estimador.

Como la media teórica de la población es 0, el valor teórico del parámetro de interés es $e^0 = 1$.

El valor muestral $\hat{\theta}$ del parámetro de interés en la muestra simulada es $e^{\bar{X}} = 1.22$.

Construimos ahora $B = 1000$ réplicas bootstrap y sus correspondientes valores del estimador, que se distribuyen según el histograma de la figura 1.4.

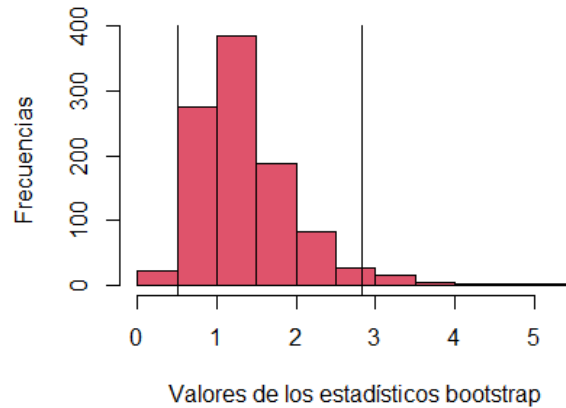


Figura 1.4: Histograma de las estimaciones bootstrap de e^μ .

Observamos que la distribución de los estimadores presenta cierta asimetría. Las líneas verticales señalan los cuantiles de nivel 0.025 y 0.975 que determinan el intervalo bootstrap percentil. En consecuencia dicho intervalo es: $(0.51, 2.83)$.

Por otro lado, el intervalo normal estándar para θ es $(0.34, 2.10)$.

Observamos, a priori, una gran diferencia entre estos dos intervalos. Para intentar conocer cuál de los dos se ajusta mejor a la realidad y es más preciso, recurriremos al hecho de que existe una función que normaliza la distribución de las estimaciones y al lema 1.2.

Si ahora aplicamos la transformación $m(x) = \log(x)$ que, como se dijo previamente, normaliza la distribución del estimador, obtenemos que los estimadores bootstrap transformados se distribuyen según el siguiente histograma:

Observamos que, como preveíamos, se ha conseguido normalizar la distribución de los estimadores.

El intervalo normal estándar para el parámetro $\phi = \log(\theta) = \log(e^\mu) = \mu$ es $(-0.68, 1.04)$.

Si a este intervalo le aplicamos la transformación $m^{-1}(x) = e^x$, obtenemos el intervalo $(0.51, 2.82)$ que se corresponde casi perfectamente con el intervalo que devuelve el método bootstrap percentil.

Por tanto, tiene sentido que de entre los dos intervalos que obteníamos previamente sea más preciso el dado por el método bootstrap percentil, pues prácticamente coincide con el que se obtiene al aplicar la transformación inversa al intervalo normal estándar.

Este ejemplo sirve para ilustrar lo que veíamos en el lema 1.2 del comportamiento del

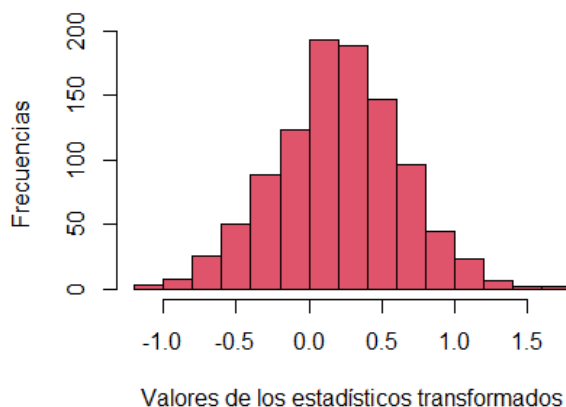


Figura 1.5: Histograma de las transformaciones de las estimaciones bootstrap.

bootstrap percentil frente a transformaciones.

1.4. Software de R asociado

En esta breve sección trataremos los comandos de R que son útiles para la construcción de intervalos de confianza bootstrap percentil.

Para la construcción de intervalos de confianza bootstrap disponemos de una librería llamada *boot* que tiene muchas funcionalidades y permite construir los intervalos bootstrap que consideraremos en este trabajo.

Para los intervalos bootstrap percentil destacaremos dos comandos principales:

1.4.1. Comando `boot`

El comando `boot` realiza el cálculo de réplicas bootstrap. Sus argumentos principales son:

- `data`: La muestra de datos.
- `statistic`: Función que calcula el estadístico.
- `R`: Número de réplicas bootstrap.
- `sim`: Tipo de simulación a realizar para la obtención de submuestras.

También hay otros argumentos secundarios que permitirán, según qué caso, perfeccionar el cálculo de las réplicas bootstrap, como: `stype`, `strata`, `L`, `m`, `weights`, `ran.gen`, ...

1.4.2. Comando `boot.ci`

Una vez construidas la réplicas bootstrap, el comando `boot.ci` calculará directamente el intervalo de confianza bootstrap deseado.

Al igual que el comando `boot`, también tiene un gran número de argumentos. Detallamos a continuación los más interesantes:

- `boot.out`: Objeto que contiene las réplicas bootstrap.
- `conf`: Nivel de confianza del intervalo a calcular.
- `type`: Tipo de intervalo de confianza que queremos calcular. En este caso tendríamos que poner “perc” para obtener el intervalo bootstrap percentil.

Al igual que en el comando anterior, también tenemos un número importante de argumentos secundarios como: `index`, `var.t0`, `var.t`, ...

Capítulo 2

Intervalos bootstrap-t

2.1. Motivación y explicación del método

Los intervalos bootstrap-t buscan, mediante la computación, evitar realizar suposiciones teóricas sobre la muestra como:

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}} \sim N(0, 1)$$

Este tipo de intervalos deben su nombre a la distribución t de Student, por su analogía a la hora de definir el estadístico con el de la propia distribución.

Dado X un conjunto de datos, $\hat{\theta}(X)$ una estimación del parámetro de interés θ y $\hat{\sigma}(X)$ una estimación de la desviación típica de $\hat{\theta}$, definimos el estadístico

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}}$$

El objetivo del método será estimar la distribución de T directamente a partir de la muestra de datos inicial, empleando bootstrap.

Si denotamos por $T^{(\alpha/2)}$ el percentil $100 \cdot \alpha/2$ de T , la idea es que el intervalo bootstrap-t para θ con un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ vendrá dado por:

$$(\hat{\theta} - \hat{\sigma}T^{(1-\alpha/2)}, \hat{\theta} - \hat{\sigma}T^{(\alpha/2)})$$

La idea teórica está clara, el problema que surge ahora es cómo estimar los cuantiles $T^{(\alpha/2)}$, pues estos son, en general, desconocidos.

El método bootstrap-t lo que hace es estimar estos cuantiles por medio de lo que se conoce como bootstrapping.

Para ello, construimos en primer lugar las B réplicas bootstrap, con B suficientemente grande. Obtenemos así B conjuntos de datos $X^*(i)$ con $i = 1, \dots, B$.

Cada conjunto de datos X^* nos proporciona una estimación $\hat{\theta}^*$ de nuestro parámetro de interés y una estimación de la desviación típica $\hat{\sigma}^*$.

Así, construimos los siguientes estadísticos T^* :

$$T^* = \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}^*}$$

Ahora tenemos B valores para T^* , uno para cada muestra bootstrap, y, tras haberlos ordenado de menor a mayor, definimos $\hat{T}^{(\alpha)}$ como el T^* que ocupa la posición $B \cdot \alpha$.

Observación 2.1. Al igual que para los intervalos bootstrap percentil, puede ocurrir que una mala elección de B o de α propicie que $B \cdot \alpha$ no sea entero.

Para solucionar este inconveniente procederíamos igual que en la observación 1.1

Arreglado este problema técnico, para un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ tenemos el intervalo siguiente:

$$(\hat{\theta} - \hat{T}^{(1-\alpha/2)} \hat{\sigma}, \hat{\theta} - \hat{T}^{(\alpha/2)} \hat{\sigma})$$

2.2. Ventajas e inconvenientes del método bootstrap-t

Al contrario que los intervalos normales estándar, los intervalos bootstrap-t no son, en general, simétricos. Este hecho permite que los intervalos bootstrap-t puedan ser más precisos que los intervalos estándar, sobre todo en muestras que presenten un alto grado de asimetría o muestras con un gran número de datos.

El método bootstrap-t trabaja mejor si θ es una medida de localización, es decir, si θ es un parámetro que verifica que, al aumentar en una constante k todos los datos de la muestra, θ también aumentará en k . Ejemplos de medidas de localización son la media, la mediana o la moda. Además, generalmente obtiene resultados ligeramente menos precisos que los métodos BC_a y ABC que veremos posteriormente y que son algo más complejos.

Sin embargo, pese a que el método bootstrap-t parece mejorar la precisión de los intervalos estándar en bastantes casos, también presenta unos notables inconvenientes en su ejecución:

- Malos resultados para muestras pequeñas.
- Problemas propios del bootstrap como el nivel de computación.
- Cálculo de la estimación $\hat{\sigma}$ cuando no tiene una expresión conocida.
- Sensibilidad a cambios de escala.

Nos centraremos individualmente en cada uno de estos problemas y cómo poder solucionarlos si es posible.

2.2.1. Malos resultados para muestras pequeñas

Como ya hemos comentado previamente, el método bootstrap-t trabaja mejor cuando tenemos una muestra suficientemente grande, para que tenga sentido crear réplicas bootstrap que proporcionen información relevante sobre la muestra inicial.

2.2.2. Problemas computacionales derivados del bootstrap

Si el cálculo de $\hat{\theta}$ o de $\hat{\sigma}$ es computacionalmente costoso, como hay que realizarlo un número alto B de veces, pueden surgir problemas con el tiempo de cálculo computacional de los intervalos.

2.2.3. Cálculo de $\hat{\sigma}$ cuando no tiene una expresión conocida

En el cálculo de los valores T^* aparece $\hat{\sigma}$ en el denominador. Para parámetros θ comunes, como la media, existen expresiones conocidas y sencillas para la obtención de la desviación típica. Sin embargo, cuando θ es un parámetro más general, lo más habitual es que no exista una expresión conocida. Es común en estos casos emplear técnicas bootstrap para estimar estas desviaciones típicas.

Aunque lo habitual es que un número $B_\sigma = 50$ de réplicas bootstrap proporcionen una estimación de $\hat{\sigma}$ suficientemente buena, es necesario realizar estas réplicas para cada una de las B muestras que necesitábamos para calcular los percentiles. Así, si tomamos $B = 1000$, que es una cantidad estándar de réplicas bootstrap, necesitaríamos $B \cdot B_\sigma = 1000 \cdot 50 = 50000$ muestras, que es un número muy considerable.

Por este hecho decimos que el método bootstrap-t trabaja mejor cuando el parámetro de interés, θ , es una medida de traslación, pues para este tipo de parámetros es común conocer expresiones para la desviación típica.

2.2.4. Sensibilidad a cambios de escala

Al contrario que los métodos BC_a y ABC , el bootstrap-t es muy sensible a cambios de escala, es decir, los intervalos de confianza difieren bastante si la muestra está sometida a una transformación o no. Este hecho provoca que una mala elección de escala genere un intervalo de confianza impreciso.

Para algunos parámetros, como el coeficiente de correlación, es conocido el tipo de transformación adecuada para obtener un intervalo de confianza preciso, pero en general

la transformación correcta es desconocida, lo que provoca una barrera a priori insalvable para este método, pues, como hemos dicho anteriormente, una mala elección de la escala puede tener graves consecuencias.

Para poder solventar este inconveniente se puede emplear bootstrap y algunos conceptos algo más avanzados para conseguir determinar la transformación adecuada para nuestro parámetro de interés θ y nuestro conjunto de datos.

2.3. Relación entre el método bootstrap-t y el método bootstrap percentil

Como hemos visto, el pivote a partir del cual construimos el intervalo bootstrap-t es:

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}}$$

Si suponemos que $\hat{\sigma} = 1$, el pivote sería $T = \hat{\theta} - \theta$. Construyendo ahora el intervalo bootstrap-t obtenemos:

$$(\hat{\theta} - [\hat{\theta}^* - \hat{\theta}]^{(1-\alpha/2)}, \hat{\theta} - [\hat{\theta}^* - \hat{\theta}]^{(\alpha/2)})$$

Y tras una simple modificación tenemos:

$$(2\hat{\theta} - \hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)}, 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^{*(\alpha/2)}) \quad (2.1)$$

Podemos compararlo con el intervalo bootstrap percentil para el mismo parámetro de interés θ :

$$(\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)}) \quad (2.2)$$

A la vista de las expresiones 2.1 y 2.2 observamos que si uno de los intervalos presenta una asimetría negativa (positiva), el otro presentará una asimetría positiva (negativa).

Esto nos puede llevar a pensar que al menos uno de los dos tipos de intervalos debe ser erróneo, pues parece que ambos llegan a resultados contradictorios. Sin embargo, dependiendo de la situación, será más eficaz un tipo de intervalo que otro, es decir, ninguno de ellos es incorrecto.

Veamos ahora estas y otras propiedades del método bootstrap-t con un estudio de simulación.

2.4. Estudio de simulación

En esta sección simularemos 1000 muestras de tamaño $n = 50$ de datos procedentes de distintas distribuciones y calcularemos intervalos de confianza para la media empleando tres métodos: T de Student, bootstrap percentil y bootstrap-t, en los tres casos con un nivel de confianza del 95 %.

La idea será estudiar el comportamiento de los distintos tipos de intervalos según la procedencia del conjunto de muestras con el que trabajemos.

El lenguaje de R asociado a este ejemplo se expondrá en el anexo para el caso de que las muestras procedan de una distribución normal estándar y será análogo para el resto de tipos de muestra.

La tabla 2.1 contiene los valores teóricos de las medias de las distribuciones con las que hemos trabajado anteriormente vienen dadas por la siguiente tabla:

	$N(0,1)$	$N(0,4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2,2)$	$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$B(5,1)$
Media teórica	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$

Tabla 2.1: Medias teóricas de cada tipo de distribución: Normal estándar ($N(0,1)$), Normal de media 0 y desviación típica 4 ($N(0,4^2)$), Exponencial de parámetro 1 ($\text{Exp}(1)$), Gamma con parámetros de forma y escala 2 ($\Gamma(2,2)$), Beta con parámetros 1/2 y 1/2 ($B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$) y Beta con parámetros 5 y 1 ($B(5,1)$).

Como generamos 1000 muestras, obtenemos otros tantos intervalos de cada tipo. Para dar una idea de cómo será el intervalo promedio de cada tipo de método, trataremos en cada caso el extremo inferior medio y el extremo superior medio de cada uno de ellos. Recogemos los resultados obtenidos en la tabla 2.2.

	$N(0,1)$	$N(0,4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2,2)$	$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$B(5,1)$
T de Stud.	(-0.29,0.27)	(-1.17,1.09)	(0.72,1.28)	(0.80,1.20)	(0.40,0.60)	(0.79,0.87)
Percentil	(-0.28,0.26)	(-1.12,1.05)	(0.75,1.28)	(0.82,1.20)	(0.41,0.60)	(0.79,0.87)
Boot-t	(-0.29,0.27)	(-1.17,1.09)	(0.76,1.35)	(0.82,1.24)	(0.40,0.60)	(0.79,0.87)

Tabla 2.2: Intervalos promedio que proporcionan los distintos métodos.

Observamos que, como se podía prever, todos los intervalos contienen a la media teórica de cada distribución. A la vista de la tabla 2.2, el método bootstrap-t produce intervalos similares a los de la T de Student en poblaciones normales. En otras distribuciones como

la exponencial o la gamma, los intervalos de la T de Student y los del bootstrap-t son ligeramente diferentes. Para valorar cuál de ellos es más preciso estudiaremos luego sus correspondientes coberturas.

En vista del comportamiento frente a poblaciones normales, donde el método bootstrap-t obtiene un intervalo similar al obtenido con el estadístico de la T de Student y ligeramente distinto al bootstrap percentil, parece que el método bootstrap-t refleja una cierta mejoría en el trato de poblaciones normales con respecto al bootstrap percentil, pues se asemeja más al intervalo exacto de la T de Student.

Para poder analizar cómo se comportan los distintos métodos en los casos en que la muestra no procede de una distribución normal, emplearemos las tablas 2.3, 2.4 y 2.5, que contienen las longitudes medias, formas promedio y coberturas de los tres métodos.

	$N(0,1)$	$N(0,4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2,2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
T de Student	0.565	2.262	0.557	0.400	0.201	0.079
Bootstrap percentil	0.543	2.174	0.534	0.383	0.193	0.076
Bootstrap-t	0.564	2.257	0.592	0.412	0.201	0.081

Tabla 2.3: Longitudes de los intervalos promedio obtenidos por los distintos métodos.

	$N(0,1)$	$N(0,4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2,2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
T de Student	1	1	1	1	1	1
Bootstrap percentil	1.003	1.003	1.12	1.08	1.002	0.93
Bootstrap-t	1.005	1.005	1.47	1.32	1	0.79

Tabla 2.4: Forma promedio de los distintos tipos de intervalos.

	$N(0,1)$	$N(0,4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2,2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
T de Student	0.953	0.953	0.939	0.951	0.948	0.946
Bootstrap percentil	0.944	0.944	0.933	0.941	0.944	0.938
Bootstrap-t	0.954	0.954	0.952	0.957	0.957	0.948

Tabla 2.5: Coberturas de los intervalos obtenidos por los distintos métodos.

De la tabla 2.3, lo que más llama la atención es que el método bootstrap percentil devuelve intervalos con una longitud considerablemente inferior a los otros dos, y esto

se ve reflejado luego en la tabla 2.5 en una cobertura claramente peor que los otros dos métodos.

Por otro lado, para los datos procedentes de distribuciones no normales, el método bootstrap-t obtiene intervalos ligeramente más amplios que el intervalo de la T de Student. Sin embargo, para las poblaciones normales, los intervalos de la T de Student son ligeramente más amplios.

Esto, que se ve reflejado en la cobertura de los intervalos que, aunque en general un intervalo más amplio no tiene por qué verificar una mejor cobertura, en estos casos sí que se tiene.

En los casos que hemos tratado, los métodos producen en general intervalos bastante simétricos (con forma próxima a 1), aunque hay algunas excepciones, como los intervalos dados por el método bootstrap-t para la distribución exponencial, la gamma, y la $B(5, 1)$, lo cual se debe a la asimetría de dichas distribuciones en torno a su media teórica.

Este buen comportamiento del método bootstrap frente a distribuciones asimétricas es una de las principales ventajas de los métodos bootstrap y del método bootstrap-t en particular.

Nos centraremos finalmente en la tabla de las coberturas, que es la más importante de todas pues nos da una idea de si los intervalos que estamos construyendo verifican verdaderamente el nivel de confianza nominal del 95 % para el que se buscaba construir el intervalo.

Aquí se observa un comportamiento excelente del bootstrap-t, pues obtiene mejor cobertura de los intervalos que los otros dos métodos en las seis distribuciones que estamos considerando. Además en cinco de ellos obtiene un nivel de cobertura superior a 0.95, lo que indica que los intervalos calculados son realmente intervalos para la media con un nivel de confianza del 95 %. Nótese además que para el caso de la distribución $B(5, 1)$ en el que no se obtiene el umbral del 0.95, el valor obtenido (0.948) es muy cercano a dicho valor.

Por otro lado se observa bien la pobre cobertura de los intervalos bootstrap percentil y los intervalos de la T de Student para algunas distribuciones, en concreto para la distribución exponencial.

Este hecho confirma lo que ya se comentó en el apartado 1.2.1 de que los intervalos bootstrap percentil presentan ciertos problemas de cobertura.

En resumen, en base a esta simulación y a la explicación teórica, determinamos que el método bootstrap-t perfecciona la idea del método bootstrap percentil y obtiene, en líneas generales, mejores resultados.

Sin embargo, el método bootstrap-t para la construcción de los intervalos de confianza también tiene defectos. Para corregir estos pequeños defectos de este método, surgieron

nuevos tipos de intervalos que consiguen mejorar alguna propiedad del método bootstrap-t como su mal comportamiento frente a transformaciones.

2.5. Software de R asociado

Los comandos de R que se pueden emplear para la construcción de intervalos de confianza por el método bootstrap-t son completamente análogos a los empleados para el caso de los bootstrap percentil, con la salvedad de que en el argumento **type** deberemos poner “stud”.

Capítulo 3

Intervalos BC_a

En este capítulo nos centraremos en el primero de los métodos que consigue mejorar considerablemente las propiedades de los procedimientos estudiados hasta ahora: el método BC_a .

3.1. Motivación y explicación del método

El método BC_a surge con la idea de conseguir reunir las ventajas de los métodos bootstrap-t y bootstrap percentil en un solo método.

Su nombre es una abreviatura de *bias-corrected and accelerated* y es básicamente un perfeccionamiento del método bootstrap percentil.

El método BC_a también construye intervalos de confianza basados en percentiles del histograma de las réplicas bootstrap. Sin embargo, la gran diferencia con los intervalos percentil es que no toma los valores $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$, sino que realiza una ligera modificación que le permite ajustarse más al conjunto de datos.

Como veremos posteriormente, este método supone una ligera mejoría frente a los dos métodos bootstrap que hemos estudiado hasta ahora, aunque también presenta ciertos inconvenientes como una mala precisión ocasional cuando la muestra es de pequeño tamaño y un alto coste computacional, pues precisa bastantes más operaciones que el propio método bootstrap percentil.

Recordemos que el intervalo de confianza bootstrap percentil para un parámetro θ con un nivel de confianza de $(1 - \alpha)$ viene dado por:

$$(\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)})$$

El intervalo BC_a no se aleja de esta idea de intervalo. De hecho, el intervalo de este método viene dado por:

$$(\hat{\theta}^{*(\alpha_1)}, \hat{\theta}^{*(\alpha_2)})$$

La diferencia con respecto al bootstrap percentil radica únicamente en los valores α_1 y α_2 que, aunque no son excesivamente difíciles de calcular, sí que requieren un cierto cálculo computacional.

Estos valores α_1 y α_2 de los que estamos hablando se calculan como sigue:

$$\alpha_1 = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z^{(\alpha/2)}}{1 - a(z_0 + z^{(\alpha/2)})} \right)$$

$$\alpha_2 = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z^{(1-\alpha/2)}}{1 - a(z_0 + z^{(1-\alpha/2)})} \right)$$

donde z_0 es un parámetro que corrige el sesgo y a es un parámetro llamado aceleración en el que profundizaremos posteriormente. Además, Φ es la función de distribución de una normal estándar y $z^{(\alpha/2)}$ y $z^{(1-\alpha/2)}$ son los percentiles $100 \cdot \alpha/2$ y $100 \cdot (1 - \alpha/2)$ de esta distribución.

Estos valores a partir de los cuales se calculan los percentiles parecen tener una expresión muy compleja. Veamos que no lo es tanto:

En primer lugar, si tomamos la mayor simplificación posible, es decir, $a = z_0 = 0$, entonces:

$$\alpha_1 = \Phi(z^{(\alpha/2)}) = \alpha/2$$

$$\alpha_2 = \Phi(z^{(1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha/2$$

Es decir, para el caso particular en que $a = 0$ y $z_0 = 0$ el intervalo BC_a coincide con el intervalo bootstrap percentil visto en el primer capítulo.

Esto nos permitirá, según qué casos, mejorar el intervalo dado por el método bootstrap percentil mediante la introducción de un parámetro de corrección de sesgo z_0 y un parámetro de aceleración a que mida la velocidad de cambio del error típico.

Observación 3.1. Efron y Tibshirany(1986) afirman que un número $B = 1000$ réplicas bootstrap es, en general, suficiente para obtener un intervalo de confianza suficientemente bueno empleando el método BC_a .

3.1.1. Parámetro z_0

Como se ha dicho anteriormente, el parámetro z_0 es una medida de corrección del sesgo. Su estimación más conocida, que denotaremos por \hat{z}_0 , viene dada por:

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\sum_{b=1, \hat{\theta}^*(b) < \hat{\theta}}^B 1}{B} \right) \quad (3.1)$$

donde B es el número de réplicas bootstrap, $\hat{\theta}$ es el estimador del parámetro θ , $\hat{\theta}^*(b)$, $b = 1, \dots, B$ son las réplicas bootstrap del estimador y Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución normal estándar. Este parámetro, que se extrae directamente de las réplicas bootstrap, mide la diferencia entre $\hat{\theta}$ y $\hat{\theta}^*$ a través de la proporción de réplicas $\hat{\theta}^*$ menores que el estimador $\hat{\theta}$. Tiene una interpretación muy sencilla pues $\hat{z}_0 = 0$ cuando la mitad de los valores $\hat{\theta}^*(b)$ son menores que $\hat{\theta}$.

El parámetro z_0 , como hemos dicho, busca corregir el sesgo, dando sentido al nombre de la primera parte del método (*bias-corrected*). Veamos ahora el segundo parámetro principal, que requiere un cálculo más complejo.

3.1.2. Parámetro a

El parámetro a , también conocido como parámetro de aceleración, tiene como objetivo analizar lo rápido que cambia el error típico de $\hat{\theta}$ con respecto al verdadero valor del parámetro de interés θ .

Hay distintas aproximaciones del valor de a en la literatura. La que emplearemos en este trabajo se puede ver en Efron(1987) y evita aproximaciones complejas en el cálculo de derivadas. Aunque probablemente no sea la aproximación más precisa, presenta buenas propiedades en la práctica y reduce considerablemente el cálculo computacional. Además, no deja de lado el objetivo de los métodos bootstrap, que es realizar inferencia apoyándose en las submuestras creadas.

La idea de esta aproximación se basa en el método jackknife, que introdujimos previamente. Como breve recordatorio, dada una muestra de tamaño n , el método jackknife hace n estimaciones del parámetro de interés θ , suprimiendo en cada una de ellas un dato diferente de la muestra inicial.

Sea X una muestra de datos de tamaño n y $\hat{\theta}$ el estimador de θ obtenido con la muestra X . Para poder introducir la función de influencia jackknife, que nos ayudará en la estimación de a , denotaremos $\hat{\theta}_{(i)}$ al estimador de θ obtenido con la muestra X eliminando el dato i -ésimo. A su vez, consideraremos la media de las estimaciones $\hat{\theta}_{(i)}$, que denotamos:

$$\hat{\theta}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\theta}_{(i)}}{n}$$

Estamos ahora en condiciones de definir la función de influencia jackknife, que nos permitirá escribir de forma sencilla la aproximación del parámetro a . La función de influencia

jackknife, para cada valor $i \in \{1, \dots, n\}$, devuelve:

$$U_i = (n-1)(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)})$$

Una vez definida esta función, introducimos el valor \hat{a} , que servirá para aproximar el valor del parámetro de aceleración:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)}\right)^3}{6 \left[\sum_{i=1}^n \left(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2)$$

Tenemos entonces construido el intervalo BC_a para un parámetro θ con nivel $(1 - \alpha)$ con las estimaciones para z_0 y a dadas por (3.1) y (3.2), respectivamente.

3.2. Propiedades de los intervalos BC_a

En esta sección nos centraremos en dos propiedades muy importantes del método BC_a para la creación de intervalos. Estas dos propiedades, que serán el comportamiento frente a transformaciones y la cobertura, nos permitirán compararlos con los intervalos que hemos estudiado previamente y entender la mejoría de los intervalos BC_a frente a los anteriores.

3.2.1. Comportamiento frente a transformaciones

En primer lugar tengamos en cuenta lo siguiente:

Observación 3.2. El resultado que enunciaremos a continuación no es exactamente cierto para las estimaciones de z_0 y a que hemos considerado. Sí es completamente cierto si a la estimación de a llegamos mediante procedimientos de aproximación de derivadas. Sin embargo, el resultado se aproxima mucho a ser exacto para la aproximación \hat{a} que estamos considerando, así que lo tomaremos por cierto también en este caso.

Proposición 3.3. *De la misma forma que los intervalos bootstrap percentil, el método BC_a respeta transformaciones del parámetro de interés. Esto significa que si $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ es un intervalo de confianza de nivel $(1 - \alpha)$ para un parámetro de interés θ , y m es una aplicación monótona creciente que permite transformar el propio parámetro, entonces el intervalo de confianza de nivel $(1 - \alpha)$ para $m(\theta)$ será $(m(\hat{\theta}_1), m(\hat{\theta}_2))$.*

Esta propiedad que verifican los intervalos BC_a corrige una de las grandes desventajas del método bootstrap-t, que es la sensibilidad a cambios de escala, ya que, al comportarse de esta manera frente a transformaciones, conseguirá realizar una elección óptima de la escala adecuada en cada problema.

Aunque esta propiedad del método BC_a solventa una de las principales desventajas del método bootstrap-t, no supone ningún cambio con el método bootstrap percentil, que ya verificaba esta propiedad. La gran diferencia frente al método bootstrap percentil radica en las propiedades de cobertura que veremos a continuación.

3.2.2. Buenas propiedades de cobertura

Cuando hablamos durante este trabajo de que un intervalo tiene buena cobertura, lo que se busca es que $\mathbb{P}(\theta < \hat{\theta}_1) = \alpha$ y $\mathbb{P}(\theta > \hat{\theta}_2) = \alpha$

Para poder hablar de la cobertura de los intervalos y poder relacionarlo con los anteriores, daremos dos definiciones importantes.

Definición 3.4 (Precisión de primer orden). Un intervalo $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ para θ que busca tener nivel de confianza $(1 - \alpha)$ se dice de primer orden si:

$$\mathbb{P}(\theta < \hat{\theta}_1) \approx \alpha/2 + \frac{k_1}{\sqrt{n}}$$

$$\mathbb{P}(\theta > \hat{\theta}_2) \approx \alpha/2 + \frac{k_2}{\sqrt{n}}$$

siendo k_1 y k_2 constantes que no dependen de n .

Definición 3.5 (Precisión de segundo orden). Un intervalo $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ para θ que busca tener nivel de confianza $(1 - \alpha)$ se dice de segundo orden si:

$$\mathbb{P}(\theta < \hat{\theta}_1) \approx \alpha/2 + \frac{k_1}{n}$$

$$\mathbb{P}(\theta > \hat{\theta}_2) \approx \alpha/2 + \frac{k_2}{n}$$

donde k_1 y k_2 son constantes que no dependen de n .

La definición de precisión de segundo orden significa, en la práctica, que en aquellos contextos particulares en los que existen intervalos de confianza exactos dados por procedimientos teóricos, los intervalos con precisión de segundo orden se aproximarán más a los intervalos exactos que los intervalos con precisión de primer orden.

Aunque no lo hemos estudiado, pues para el contexto no paramétrico que estamos tratando es muy difícil de probar, los intervalos estándar y bootstrap percentil tienen precisión de primer orden, mientras que los intervalos bootstrap-t y BC_a tienen precisión de segundo orden.

Esto es coherente con lo que se venía comentando de las propiedades de cada uno de los métodos, pues, como se vio en el apartado 1.2.1 y en la sección 2.4, los intervalos bootstrap

percentil no presentaban buena cobertura y, como se vio en el apartado 2.2.4, los intervalos bootstrap-t no se adaptan a transformaciones del parámetro de interés.

Por tanto, como decíamos al principio del capítulo, el método BC_a supone una importante mejora frente a los métodos bootstrap percentil y bootstrap-t, al reunir las ventajas de ambos como se puede ver en la tabla 3.1.

	Respeto transformaciones	Tiene buenas propiedades de cobertura
Intervalos estándar	NO	NO
Intervalos bootstrap percentil	SI	NO
Intervalos bootstrap-t	NO	SI
Intervalos BC_a	SI	SI

Tabla 3.1: Tabla de comparación de las propiedades de los distintos métodos.

3.3. Ejemplos

Dedicaremos esta sección a corroborar mediante ejemplos las propiedades del método BC_a que hemos introducido previamente.

Ejemplo 3.6. En primer lugar, trataremos un ejemplo sencillo que refleje la adaptación del método BC_a frente a transformaciones monótonas crecientes.

Para ello, emplearemos el mismo conjunto de datos que el ejemplo 1.4 sobre datos de rocas. La idea que llevaremos a cabo será construir un intervalo de confianza al 95% para la media del área de las rocas con el método BC_a . Además, construiremos un intervalo de confianza del mismo nivel para $\theta = \sqrt{\mu}$, con μ denotando la media, y comprobaremos que aplicando la transformación monótona creciente $m(x) = \sqrt{x}$ al intervalo inicial, obtenemos un intervalo prácticamente idéntico al segundo.

Nos centraremos primero en el cálculo del intervalo de confianza para $\theta = \sqrt{\mu}$. En primer lugar, calculamos las aproximaciones \hat{z}_0 y \hat{a} , obteniendo: $\hat{z}_0 = -0.09288$ y $\hat{a} = -0.007078$. Realizando los cálculos correspondientes, obtenemos los siguientes valores α_1 y α_2 que determinan los percentiles correspondientes:

$$\alpha_1 = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z^{(\alpha/2)}}{1 - a(z_0 + z^{(\alpha/2)})} \right) \approx 0.01478$$

$$\alpha_2 = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z^{(1-\alpha/2)}}{1 - a(z_0 + z^{(1-\alpha/2)})} \right) \approx 0.9599$$

Representemos ahora el histograma de las estimaciones bootstrap con los correspondientes cuantiles, marcados con las líneas verticales, que determinan el intervalo de confianza. Vemos que los cuantiles son de órdenes muy asimétricos. El intervalo BC_a para este caso es (80.06, 88.83).

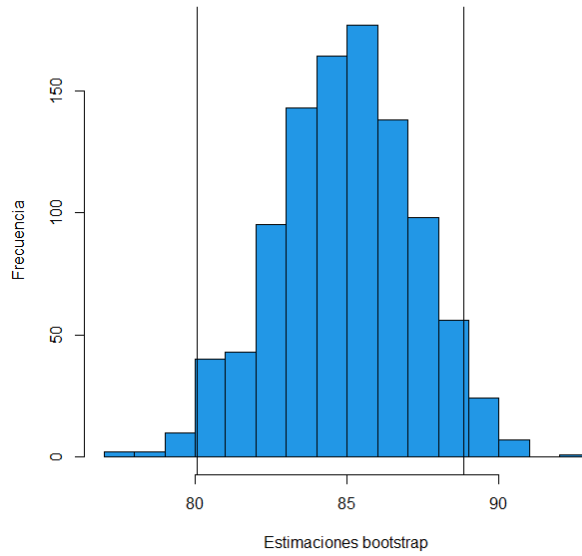


Figura 3.1: Histograma de las estimaciones bootstrap del parámetro $\theta = \sqrt{\mu}$

Construyamos ahora el intervalo de confianza para $\theta = \mu$ con objeto de posteriormente aplicarle la transformación $m(x) = \sqrt{x}$.

Procedemos de manera análoga al caso anterior obteniendo las siguientes aproximaciones de los parámetros z_0 y a : $\hat{z}_0 = -0.07276$ y $\hat{a} = -0.007311$. Con estas aproximaciones se calculan los valores α_1 y α_2 que dan origen al intervalo de confianza:

$$\alpha_1 = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z^{(\alpha/2)}}{1 - a(z_0 + z^{(\alpha/2)})} \right) \approx 0.01633$$

$$\alpha_2 = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z^{(1-\alpha/2)}}{1 - a(z_0 + z^{(1-\alpha/2)})} \right) \approx 0.9632$$

Obtenemos así el siguiente intervalo para la media: (6408.685, 7879.389). Si aplicamos ahora la transformación $m(x) = \sqrt{x}$ obtenemos el intervalo (80.05, 88.77) que se asemeja

bastante al intervalo calculado para la raíz.

Los errores entre estos dos intervalos (0.01 para el extremo inferior y 0.06 para el superior) se deben principalmente a dos factores:

En primer lugar al ligero error de estimación que ya se citó en la observación 3.2 para el cual el comportamiento del método BC_a frente a transformaciones no es completamente exacto.

En segundo lugar, a la escala considerablemente grande de la muestra inicial de datos, lo que hace que diferencias como las que se aprecian entre los dos intervalos no sean demasiado significativas.

Por otro lado, es importante notar que, en general, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 1$, es decir, al contrario que los intervalos bootstrap percentil, los BC_a no tienen por qué dejar colas de igual tamaño en ambos extremos del intervalo. Esta falta de simetría permite al método BC_a adaptarse a situaciones mucho más diversas que el método bootstrap percentil, que es bastante menos versátil, como veremos en la siguiente simulación.

Observación 3.7. Las aproximaciones que hemos escogido para los parámetros a y z_0 hacen que la cobertura de los intervalos BC_a así construidos no sea tan buena como buscamos. Sin embargo, es suficiente para notar la mejoría en este aspecto con respecto al método bootstrap percentil visto en el primer capítulo.

Una aproximación de estos parámetros usando cálculo analítico y no únicamente procedimientos bootstrap haría que la cobertura de los intervalos BC_a se equiparase a la del método bootstrap-t.

Ejemplo 3.8 (Estudio de simulación). En esta simulación, al igual que en el apartado 2.4, generaremos 1000 muestras de 50 datos procedentes de distintas distribuciones. Buscaremos, de manera similar, construir intervalos de confianza para cada uno de los distintos tipos de muestra empleando los métodos vistos hasta el momento, con objeto de compararlos y comprobar las propiedades que hemos estudiado de los mismos. El código en lenguaje R asociado a este ejemplo se puede ver en el anexo.

Para evitar repetir los argumentos del estudio de simulación presentado en el segundo capítulo, nos centraremos solo en dos tablas para comparar los métodos: la tabla de los intervalos promedio y la tabla de coberturas de los intervalos.

Reflejamos en la tabla 3.2 los intervalos promedio que obtiene cada método. Recordemos que por intervalos promedio nos referimos al intervalo dado por el valor medio de los extremos inferior y superior para los 1000 intervalos que construimos.

Observamos intervalos promedio muy similares entre los cuatro métodos, mientras que las diferencias aparecen principalmente en las muestras procedentes de distribuciones asi-

	N(0,1)	Exp(1)	$\Gamma(2, 2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
T de Student	(-0.29,0.28)	(0.72,1.28)	(0.80,1.20)	(0.40,0.60)
Bootstrap percentil	(-0.28,0.27)	(0.75,1.28)	(0.82,1.20)	(0.40,0.60)
Bootstrap-t	(-0.29,0.28)	(0.76,1.35)	(0.83,1.24)	(0.40,0.60)
BC_a	(-0.28,0.27)	(0.77,1.32)	(0.83,1.22)	(0.40,0.60)

Tabla 3.2: Intervalos promedio obtenidos mediante cada uno de los cuatro tipos de intervalos.

métricas con respecto a la media, que son la Exponencial y la Gamma.

Sin embargo vemos que, como es lógico, todos los intervalos promedio contienen a la media teórica de su correspondiente distribución y, salvo las diferencias comentadas previamente, observamos intervalos casi iguales (por ejemplo, para la distribución beta, los cuatro métodos devuelven el mismo intervalo con precisión de dos cifras decimales).

La tabla 3.3 contiene las coberturas obtenidas con cada uno de los cuatro tipos de intervalos de confianza para un nivel de confianza nominal del 95 %.

	N(0,1)	Exp(1)	$\Gamma(2, 2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
T de Student	0.956	0.933	0.943	0.959
Bootstrap percentil	0.943	0.932	0.936	0.955
Bootstrap-t	0.957	0.95	0.95	0.968
BC_a	0.948	0.943	0.938	0.964

Tabla 3.3: Coberturas de cada uno de los cuatro métodos.

En la tabla 3.3 podemos observar la notable mejoría en el ámbito de la cobertura del método BC_a frente al bootstrap percentil, ya que obtiene mejor valor para los cuatro tipos de muestra tratados.

Sin embargo, el método BC_a no devuelve, en esta simulación resultados óptimos de cobertura y vemos que se aleja bastante de la del método bootstrap-t. De hecho, sus resultados de cobertura se encuentran en una posición intermedia entre el bootstrap percentil y el bootstrap-t.

Este defecto de cobertura va en la línea de lo que se expuso en la observación 3.7 de la página 28, y es que las aproximaciones para los parámetros a y z_0 no son suficientemente buenas para proporcionar un nivel de cobertura como el del método bootstrap-t. Esto se podría solucionar con aproximaciones empleando cálculo analítico, que son difíciles de

implementar y requieren de un alto coste computacional.

Para el caso que nos ocupa, las aproximaciones \hat{a} y \hat{z}_0 son suficientemente buenas, pues logran mejorar considerablemente la cobertura del método bootstrap percentil y el comportamiento frente a transformaciones del método bootstrap-t.

Hemos observado así con estos dos ejemplos el motivo de la creación del método BC_a , que consigue reunir en cierto modo las ventajas de los dos métodos anteriores.

3.4. Software de R asociado

Para construir los intervalos de tipo BC_a en R, emplearemos el paquete *boot* que hemos tratado en los dos capítulos anteriores, con la única modificación de cambiar el valor del argumento **type** del comando **boot.ci** por “bca”.

Capítulo 4

Intervalos ABC

4.1. Motivación y explicación del método

El método BC_a que hemos analizado en la sección anterior tiene un notable problema a la hora de aplicarlo en la práctica, y es su alto coste computacional. Para sobrellevar este inconveniente surge el método ABC para la creación de intervalos de confianza. El nombre de este método es una abreviatura de *approximate bootstrap confidence intervals* y busca, como se puede extraer de su nombre, aproximar los extremos del intervalo BC_a de forma analítica.

El hecho de recurrir al mundo analítico para construir intervalos de confianza hace que algunos autores no lo consideren un método bootstrap, pues sustituye en gran medida el cálculo computacional derivado de las réplicas bootstrap por aproximaciones empleando cálculos de derivadas. Sin embargo, en este trabajo sí que lo consideraremos un método bootstrap, pues no es más que una reformulación de uno de los métodos vistos, empleando herramientas propias del análisis, que veremos posteriormente. Este método solventa en gran medida el alto coste computacional que requería el método BC_a , pues en algunos casos logra reducirlo en más de un 90 %.

Veamos ahora como construir los extremos del intervalo.

Sea X una muestra de datos de tamaño n . Si el estadístico de interés es una función T de la muestra, se puede probar (Efron y Tibshirani, 1993) que la aproximación de la desviación típica de $\hat{\theta} = T(X)$ empleando el método delta es:

$$\hat{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\dot{T}_i^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde \dot{T}_i es la conocida como función de influencia de primer orden y que se define como sigue:

$$\hat{T}_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T((1 - \epsilon)P^0 + \epsilon \vec{e}_i) - T(P^0)}{\epsilon}$$

siendo \vec{e}_i el vector i -ésimo de la base canónica.

Si $(\hat{\theta}_{ABC}[\alpha/2], \hat{\theta}_{ABC}[1 - \alpha/2])$ es el intervalo de confianza para θ con nivel $(1 - \alpha)$ dado por el método ABC, sus extremos se calculan como sigue:

$$w = \hat{z}_0 + z^{(\alpha/2)}$$

$$\lambda = \frac{w}{(1 - \hat{a}w)^2}$$

$$\hat{\delta} = \hat{T}(P^0)$$

$$\hat{\theta}_{ABC}[\alpha/2] = T\left(P^0 + \frac{\lambda \hat{\delta}}{\hat{\sigma}}\right)$$

A $\hat{\delta}$ se le conoce como dirección menos favorable.

La principal ventaja del método ABC frente al método BC_a es que las estimaciones \hat{z}_0 y \hat{a} se pueden expresar como derivadas de primer y segundo orden, evitando el elevado cálculo computacional que se tenía en el BC_a propiciado por el remuestreo. Este es el hecho por el que, como decíamos anteriormente, algunos autores no consideran este método como un método bootstrap.

La estimación \hat{a} es muy similar a la que realizábamos en el capítulo anterior, sustituyendo en este caso la función de influencia jackknife, U , por la función de influencia de primer orden, \hat{T} , definida previamente.

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{T}_i^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n \hat{T}_i^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.1)$$

La estimación de z_0 no es tan sencilla como la anterior y requiere de tres coeficientes:

- La estimación \hat{a} .
- Una aproximación del sesgo, \hat{b} .
- Un coeficiente de no-linealidad, que denotamos por \hat{c}_q .

De la aproximación \hat{a} ya nos hemos ocupado anteriormente. Nos centraremos ahora en los parámetros \hat{b} y \hat{c}_q .

4.1.1. Coeficiente \hat{b}

Este valor es una aproximación del sesgo ($b = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$) y viene dado por el desarrollo en serie de Taylor de $\theta = T(P^0)$,

$$\hat{b} = \sum_{i=1}^n \frac{\ddot{T}_i}{2n^2} \quad (4.2)$$

donde

$$\ddot{T}_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T((1-\epsilon)P^0 + \epsilon \vec{e}_i) - 2T(P^0) + T((1-\epsilon)P^0 - \epsilon \vec{e}_i)}{\epsilon^2}$$

es la componente i -ésima de la función de influencia de segundo orden.

4.1.2. Coeficiente \hat{c}_q

El valor \hat{c}_q , conocido como coeficiente cuadrático, mide la no-linealidad de la función $\theta = T(P)$, cuando nos desplazamos en la dirección de $\hat{\delta}$.

Su expresión analítica es:

$$\hat{c}_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T\left((1-\epsilon)P^0 + \frac{\epsilon \hat{T}}{n^2 \hat{\sigma}}\right) - 2T(P^0) + T\left((1-\epsilon)P^0 - \frac{\epsilon \hat{T}}{n^2}\right)}{\epsilon^2} \quad (4.3)$$

Ahora, con las expresiones (4.2) y (4.3) definimos:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} - \hat{c}_q \quad (4.4)$$

Estamos finalmente en condiciones de dar la estimación \hat{z}_0 , que viene dada por:

$$\hat{z}_0 = \phi^{-1}\{2\phi(\hat{a}) \cdot \phi(-\hat{\gamma})\} = \hat{a} - \hat{\gamma}$$

Esta forma del método ABC es la más sencilla que existe, aunque no soluciona del todo el problema computacional pues requiere de la evaluación de las funciones T y \hat{T} para el cálculo de $\hat{\delta}$ y del propio extremo del intervalo.

4.1.3. ABC cuadrático

Para solventar este inconveniente nace el ABC cuadrático o ABC_q que emplea las estimaciones \hat{a} , \hat{z}_0 y \hat{c}_q para definir:

$$w = \hat{z}_0 + z^{(\alpha/2)}$$

$$\lambda = \frac{w}{(1 - \hat{a}w)^2}$$

$$\xi = \lambda + \hat{c}_q \lambda^2$$

$$\hat{\theta}_{ABC}[\alpha/2] = \hat{\theta} + \hat{\sigma} \xi$$

Sin embargo, esta versión del método ABC tampoco es perfecta, pues el ABC_q es un método local. Esto hace que en algunos contextos surjan problemas computacionales derivados de trabajar fuera del conjunto donde el método produce resultados coherentes.

4.2. Propiedades de los intervalos

De manera análoga al BC_a , el método ABC produce intervalos con precisión de segundo orden y que respetan transformaciones monótonas. De hecho cuando B crece, los intervalos ABC y BC_a tienden a ser el mismo.

Definamos ahora un par de conceptos que nos ayudarán a relacionar los tipos de intervalo estudiados hasta el momento.

Definición 4.1 (Exactitud de primer orden). Sea (θ_1, θ_2) un intervalo de confianza exacto para θ con nivel de confianza $(1 - \alpha)$. Un intervalo de confianza $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ se dice que tiene exactitud de primer orden si:

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1 + \frac{k_1}{n}$$

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 + \frac{k_2}{n}$$

donde k_1 y k_2 son constantes que no dependen de n .

Definición 4.2 (Exactitud de segundo orden). Sea (θ_1, θ_2) un intervalo de confianza exacto para θ con nivel de confianza $(1 - \alpha)$. Un intervalo de confianza $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ se dice que tiene exactitud de segundo orden si:

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1 + \frac{k_1}{\sqrt{n^3}}$$

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 + \frac{k_2}{\sqrt{n^3}}$$

donde k_1 y k_2 son constantes, al igual que en la definición anterior.

A la vista de las definiciones anteriores, se puede llegar a la siguiente proposición:

Proposición 4.3. *Si un intervalo (θ_1, θ_2) tiene exactitud de orden m , entonces también tiene precisión de orden m .*

Esta proposición nos permite comparar los distintos tipos de intervalos.

Como ya vimos en el capítulo anterior, salvo en casos muy particulares, los intervalos normales asintóticos, T de Student y bootstrap percentil tienen precisión de primer orden, por lo que, a lo sumo, tendrán exactitud de primer orden.

Esto supone una notable diferencia tanto con los intervalos BC_a como con su aproximación empleando el método ABC, ya que, en la gran mayoría de los casos, estos métodos obtienen intervalos con exactitud de segundo orden.

Veamos ahora si el método ABC ofrece una buena aproximación de los intervalos BC_a con un nuevo estudio de simulación.

4.3. Estudio de simulación

En este estudio generaremos, al igual que en la sección 2.4, 1000 muestras de tamaño $n = 50$ de seis distribuciones distintas, que serán las mismas que empleamos en dicho estudio. El objetivo será comparar los intervalos promedio dados por el método BC_a con los correspondientes del método ABC, analizando también sus longitudes, coberturas y formas promedio. De manera análoga a los estudios de simulación anteriores, el código en lenguaje R asociado se puede ver en el anexo.

En primer lugar, recordemos que las medias teóricas de las seis distribuciones vienen dadas por la tabla 4.1.

	$N(0,1)$	$N(0,4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2,2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
Media teórica	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$

Tabla 4.1: Medias teóricas de cada tipo de distribución: Normal estándar ($N(0,1)$), Normal de media 0 y desviación típica 4 ($N(0,4^2)$), Exponencial de parámetro 1 ($\text{Exp}(1)$), Gamma con parámetros de forma y escala 2 ($\Gamma(2,2)$), Beta con parámetros $1/2$ y $1/2$ ($B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) y Beta con parámetros 5 y 1 ($B(5,1)$).

Lo primero que estudiaremos serán los intervalos promedio que obtiene cada método y que viene recogido en la tabla 4.2.

Observamos que los intervalos son prácticamente idénticos con precisión de dos decimales para las seis distribuciones. Esto nos da una idea de que, a priori, el método ABC devuelve intervalos muy similares a los obtenidos mediante el método BC_a . Sin embargo, aunque los intervalos promedio coincidan, podría ocurrir que los intervalos ABC presentasen problemas de cobertura o longitudes y asimetrías muy distintas a las obtenidas

	$N(0,1)$	$N(0, 4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2, 2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
BC_a	(-0.28,0.27)	(-1.11,1.07)	(0.77,1.32)	(0.83,1.22)	(0.40,0.60)	(0.79,0.87)
ABC	(-0.28,0.27)	(-1.11,1.08)	(0.77,1.32)	(0.83,1.22)	(0.40,0.60)	(0.79,0.87)

Tabla 4.2: Intervalos promedio que proporcionan ambos métodos.

empleando el método BC_a .

Para poder analizar estos hechos, estudiaremos las tablas 4.3, 4.4 y 4.5 que contienen las longitudes medias, formas promedio y coberturas de los dos métodos, respectivamente.

	$N(0,1)$	$N(0, 4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2, 2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
BC_a	0.544	2.177	0.546	0.390	0.194	0.077
ABC	0.547	2.187	0.549	0.392	0.194	0.077

Tabla 4.3: Longitudes de los intervalos promedio obtenidos por los dos métodos.

	$N(0,1)$	$N(0, 4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2, 2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
BC_a	1.004	1.004	1.410	1.295	1.002	0.802
ABC	1.004	1.004	1.409	1.295	1	0.800

Tabla 4.4: Forma promedio de los dos tipos de intervalos.

Observamos en las tablas 4.3 y 4.4 valores muy similares de simetría y de longitud de los intervalos para los dos métodos. Esta semejanza en estas dos propiedades de los intervalos continúa en la línea de lo visto tabla 4.2, por lo que hasta ahora podemos observar un comportamiento notable de los intervalos ABC .

Finalmente nos centraremos en la tabla 4.5 que es la más importante pues refleja cómo de correctos son los intervalos que estamos construyendo. A la vista de la tabla, observamos que la cobertura del método ABC para las seis distribuciones es similar al obtenido empleando el método BC_a e incluso en algún caso, como en el de la Beta $B(5,1)$, es notablemente mejor.

Por tanto y a la vista de estas tablas podemos concluir que en nuestro estudio de simulación el método ABC se comporta satisfactoriamente al conseguir resultados similares, y en algún caso mejores, que el método BC_a , además de reducir considerablemente su coste computacional.

	$N(0,1)$	$N(0, 4^2)$	$\text{Exp}(1)$	$\Gamma(2, 2)$	$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$B(5,1)$
BC_a	0.948	0.948	0.943	0.938	0.964	0.932
ABC	0.949	0.949	0.941	0.939	0.962	0.944

Tabla 4.5: Coberturas de los intervalos obtenidos por los dos métodos.

4.4. Software de R asociado

Esta sección difiere un poco de las tres anteriores, pues el comando `boot.ci` no permite construir intervalos del tipo ABC . Sin embargo, existe otro comando que nos permite realizar esta función, y ese comando es el `abc.ci`.

Al igual que para el comando `boot.ci`, tenemos muchos argumentos, de entre los que destacamos:

- `data`: La muestra de datos con la que trabajamos.
- `statistic`: Función que calcula el estadístico.
- `conf`: Nivel de confianza para el que queremos calcular el intervalo.

También existen multitud de argumentos secundarios como: `index`, `strata`, `eps`, ...

Anexos

Apéndice A

Código de R de las simulaciones

A.1. Código de R del primer estudio de simulación

En esta sección nos centraremos en el código R del estudio de simulación de la sección 2.4. Por simplicidad trataremos solo el caso en el que la muestra provenga de una distribución normal $N(0,1)$. Los demás casos serán análogos.

```
set.seed(1705) #Creamos una semilla para aleatorizar los datos

nivel=0.95 #El nivel de confianza que queremos para nuestro intervalo
alfa=1-nivel #El nivel de significación del mismo

n=50 #Tamaño de la muestra
t=qt(1-alfa/2,df=n-1)/sqrt(n) #Pivote teórico

ns=1000 # Número de muestras simuladas
interv_teor=matrix(0,nrow=ns,ncol=2)
interv_boot=interv_teor
interv_perc=interv_teor
form_teor=c()
form_perc=c()
form_boot=c()

for (is in 1:ns){ # Bucle de las simulaciones
```

```
x=rnorm(n) # Datos procedentes de la normal
mediat=0 # Media teórica

#x=rexp(n) # Datos procedentes de la Exponencial
#mediat=1

#x=rnorm(n,sd=4) # Datos procedentes de una normal  $N(0,4^2)$ 
#mediat=0

#x=rgamma(n,2,2) # Datos procedentes de una gamma (2,2)
#mediat=1

#x=rbeta(n,1/2,1/2) # Datos procedentes de una beta (1/2,1/2)
#mediat=1/2

#x=rbeta(n,5,1) # Datos procedentes de una beta (5,1)
#mediat=5/6

m=mean(x)
dt=sd(x)

# Intervalo de la T de Student
interv_teor[is,]=c(m-t*dt,m+t*dt)

# Intervalo bootstrap estudentizado
nb=1000
tb=c()
mb=c()
for (ib in 1:nb){ # Bucle de las réplicas bootstrap
ind=sample(n,n,replace=TRUE)
xb=x[ind] # Muestra bootstrap
mb[ib]=mean(xb)
dtb=sd(xb)
tb[ib]=(mb[ib]-m)/dtb # Pivote bootstrap estudentizado
}
```

```

qb1=quantile(tb,prob=alfa/2)
qb2=quantile(tb,prob=1-alfa/2)

interv_perc[is,]=c(quantile(mb,alfa/2),quantile(mb,1-alfa/2))

interv_boot[is,]=c(m-qb2*dt,m-qb1*dt)

##### FORMA DE LOS INTERVALOS #####

form_teor[is]=(interv_teor[is,2]-m)/(m-interv_teor[is,1])

form_perc[is]=(interv_perc[is,2]-m)/(m-interv_perc[is,1])

form_boot[is]=(interv_boot[is,2]-m)/(m-interv_boot[is,1])

#####

if (is==100*round(is/100)){
cat('is=',is,interv_teor[is,],interv_perc[is,],interv_boot[is,],'\n') }

}

## is= 100 -0.2722403 0.1982184 -0.2824373 0.1955075 -0.2879058 0.1982289
## is= 200 -0.1964942 0.2694289 -0.1839766 0.2497626 -0.1957016 0.2548919
## is= 300 -0.4610445 0.140419 -0.4620546 0.125154 -0.4676876 0.144831
## is= 400 -0.4064745 0.2141972 -0.3792281 0.1824995 -0.3923854 0.1776621
## is= 500 -0.3039801 0.2478133 -0.2987489 0.2410507 -0.2860656 0.2463994
## is= 600 -0.36891 0.196693 -0.3518798 0.1817455 -0.3744949 0.1840266
## is= 700 0.01979297 0.5120796 0.03705892 0.4977014 0.03698765 0.5123642
## is= 800 -0.3726124 0.119349 -0.3751796 0.1001931 -0.3706442 0.1248528
## is= 900 -0.2269466 0.3772317 -0.2325158 0.3901924 -0.2591638 0.3876263
## is= 1000 -0.08780542 0.3627355 -0.08662912 0.3478645 -0.0762632 0.3760242

##### COBERTURA DE LOS INTERVALOS #####

cobertura_teor=sum((interv_teor[,1]<mediat)&(interv_teor[,2]>mediat))/ns

```

```
cobertura_teor

## [1] 0.953

cobertura_perc=sum((interv_perc[,1]<mediat)&(interv_perc[,2]>mediat))/ns
cobertura_perc

## [1] 0.944

cobertura_boot=sum((interv_boot[,1]<mediat)&(interv_boot[,2]>mediat))/ns
cobertura_boot

## [1] 0.954

##### PROMEDIO DE LOS INTERVALOS #####

prom_teor=c(sum(interv_teor[,1])/ns,sum(interv_teor[,2])/ns)
prom_teor

## [1] -0.2922030  0.2732538

prom_perc=c(sum(interv_perc[,1])/ns,sum(interv_perc[,2])/ns)
prom_perc

## [1] -0.2810882  0.2623857

prom_boot=c(sum(interv_boot[,1])/ns,sum(interv_boot[,2])/ns)
prom_boot

## [1] -0.2915873  0.2726291

##### FORMA DE LOS INTERVALOS #####

form_teor_prom=sum(form_teor)/ns
form_teor_prom

## [1] 1

form_perc_prom=sum(form_perc)/ns
form_perc_prom
```

```
## [1] 1.002813

form_boot_prom=sum(form_boot)/ns
form_boot_prom

## [1] 1.004578

##### LONGITUD DE LOS INTERVALOS #####

long_teor=prom_teor[2]-prom_teor[1]
long_teor

## [1] 0.5654568

long_perc=prom_perc[2]-prom_perc[1]
long_perc

## [1] 0.5434739

long_boot=prom_boot[2]-prom_boot[1]
long_boot

## [1] 0.5642164
```

A.2. Código de R del segundo estudio de simulación

En esta sección trataremos el código R del estudio de simulación del ejemplo 3.8. Por simplicidad trataremos solo el caso en el que la muestra provenga de una distribución normal $N(0,1)$. Los demás casos serán análogos.

```
set.seed(1707) #Creamos una semilla para aleatorizar los datos

nivel=0.95 #El nivel de confianza que queremos para nuestro intervalo
alfa=1-nivel #El nivel de significación del mismo

n=50 #Tamaño de la muestra
t=qt(1-alfa/2,df=n-1)/sqrt(n) #Pivote teórico
```

```
ns=1000 # Número de muestras simuladas
interv_teor=matrix(0,nrow=ns,ncol=2)
interv_boot=interv_teor
interv_perc=interv_teor
interv_bca=interv_teor
form_teor=c()
form_perc=c()
form_boot=c()
form_bca=c()

for (is in 1:ns){ # Bucle de las simulaciones

  x=rnorm(n) # Datos procedentes de la normal
  mediat=0 # Media teórica

  #x=rexp(n) # Datos procedentes de la Exponencial
  #mediat=1

  #x=rbeta(n,1/2,1/2) # Datos procedentes de una beta (1/2,1/2)
  #mediat=1/2

  #x=rgamma(n,2,2) # Datos procedentes de una gamma (2,2)
  #mediat=1

  m=mean(x)
  dt=sd(x)

  # Intervalo de la T de Student
  interv_teor[is,]=c(m-t*dt,m+t*dt)

  # Intervalo bootstrap estudentizado
  nb=1000
  k=0
  tb=c()
```

```

mb=c()
for (ib in 1:nb){ # Bucle de las réplicas bootstrap
ind=sample(n,n,replace=TRUE)
xb=x[ind] # Muestra bootstrap
mb[ib]=mean(xb)
if (mb[ib]<m){
k=k+1
}
dtb=sd(xb)
tb[ib]=(mb[ib]-m)/dtb # Pivote bootstrap estudentizado
}

z0=qnorm(k/nb) #Cálculo de la estimación del parámetro z0

mj=c()

for (j in 1:n){
mj[j]=mean(x[-j])
}

mjt=sum(mj)/n

U=c()

for(l in 1:n){ #Cálculo de la función de influencia jackknife
U[l]=mjt-mj[l]
}

a=sum(U^3)/(6*((sum(U^2))^(3/2))) #Aproximación del parámetro a

alfa1=pnorm(z0+(z0+qnorm(alfa/2))/(1-a*(z0+qnorm(alfa/2))))
alfa2=pnorm(z0+(z0+qnorm(1-alfa/2))/(1-a*(z0+qnorm(1-alfa/2))))

qb1=quantile(tb,prob=alfa/2)
qb2=quantile(tb,prob=1-alfa/2)

```

```

interv_perc[is,]=c(quantile(mb,alfa/2),quantile(mb,1-alfa/2))

interv_boot[is,]=c(m-qb2*dt,m-qb1*dt)

interv_bca[is,]=c(quantile(mb,alfa1),quantile(mb,alfa2))

##### FORMA DE LOS INTERVALOS #####

form_teor[is]=(interv_teor[is,2]-m)/(m-interv_teor[is,1])

form_perc[is]=(interv_perc[is,2]-m)/(m-interv_perc[is,1])

form_boot[is]=(interv_boot[is,2]-m)/(m-interv_boot[is,1])

form_bca[is]=(interv_bca[is,2]-m)/(m-interv_bca[is,1])

#####

if (is==100*round(is/100)){
cat('is=',is,interv_teor[is,],interv_perc[is,],
interv_boot[is,],interv_bca[is,],'\n') }

}

## is= 100 -0.139 0.470 -0.132 0.471 -0.136 0.485 -0.133 0.469
## is= 200 -0.370 0.296 -0.351 0.302 -0.372 0.297 -0.343 0.320
## is= 300 -0.515 0.065 -0.505 0.056 -0.507 0.075 -0.505 0.057
## is= 400 -0.263 0.268 -0.267 0.254 -0.270 0.277 -0.269 0.254
## is= 500 -0.238 0.289 -0.224 0.278 -0.240 0.275 -0.217 0.284
## is= 600 -0.050 0.608 -0.049 0.584 -0.064 0.602 -0.064 0.579
## is= 700 -0.439 0.074 -0.446 0.065 -0.412 0.138 -0.437 0.075
## is= 800 -0.546 0.129 -0.514 0.119 -0.541 0.112 -0.505 0.140
## is= 900 -0.316 0.304 -0.301 0.302 -0.324 0.304 -0.292 0.307
## is= 1000 -0.402 0.258 -0.383 0.247 -0.381 0.260 -0.399 0.226

##### COBERTURA DE LOS INTERVALOS #####

```

```
cobertura_teor=sum((interv_teor[,1]<mediat)&(interv_teor[,2]>mediat))/ns
cobertura_teor

## [1] 0.956

cobertura_perc=sum((interv_perc[,1]<mediat)&(interv_perc[,2]>mediat))/ns
cobertura_perc

## [1] 0.943

cobertura_boot=sum((interv_boot[,1]<mediat)&(interv_boot[,2]>mediat))/ns
cobertura_boot

## [1] 0.957

cobertura_bca=sum((interv_bca[,1]<mediat)&(interv_bca[,2]>mediat))/ns
cobertura_bca

## [1] 0.948

##### PROMEDIO DE LOS INTERVALOS #####

prom_teor=c(sum(interv_teor[,1])/ns,sum(interv_teor[,2])/ns)
prom_teor

## [1] -0.2873495 0.2783529

prom_perc=c(sum(interv_perc[,1])/ns,sum(interv_perc[,2])/ns)
prom_perc

## [1] -0.2763331 0.2671190

prom_boot=c(sum(interv_boot[,1])/ns,sum(interv_boot[,2])/ns)
prom_boot

## [1] -0.2865110 0.2783045

prom_bca=c(sum(interv_bca[,1])/ns,sum(interv_bca[,2])/ns)
prom_bca

## [1] -0.2767618 0.2673660
```

```
##### FORMA DE LOS INTERVALOS #####

form_teor_prom=sum(form_teor)/ns
form_teor_prom

## [1] 1

form_perc_prom=sum(form_perc)/ns
form_perc_prom

## [1] 1.001297

form_boot_prom=sum(form_boot)/ns
form_boot_prom

## [1] 1.007747

form_bca_prom=sum(form_bca)/ns
form_bca_prom

## [1] 1.004354

##### LONGITUD DE LOS INTERVALOS #####

long_teor=prom_teor[2]-prom_teor[1]
long_teor

## [1] 0.5657024

long_perc=prom_perc[2]-prom_perc[1]
long_perc

## [1] 0.5434521

long_boot=prom_boot[2]-prom_boot[1]
long_boot

## [1] 0.5648155

long_bca=prom_bca[2]-prom_bca[1]
long_bca

## [1] 0.5441279
```

A.3. Código de R del tercer estudio de simulación

En esta sección trataremos el código R del estudio de simulación de la sección 4.3. Por simplicidad trataremos solo el caso en el que la muestra provenga de una distribución normal $N(0,1)$. Los demás casos serán análogos.

```
set.seed(1707) #Creamos una semilla para aleatorizar los datos
library(boot)

nivel=0.95 #El nivel de confianza que queremos para nuestro intervalo
alfa=1-nivel #El nivel de significación del mismo

n=50 #Tamaño de la muestra
t=qt(1-alfa/2,df=n-1)/sqrt(n) #Pivote teórico

ns=1000 # Número de muestras simuladas
interv_bca=matrix(0,nrow=ns,ncol=2)
interv_abc=interv_bca

form_bca=c()
form_abc=c()

for (is in 1:ns){ # Bucle de las simulaciones

x=rnorm(n) # Datos procedentes de la normal
mediat=0 # Media teórica

#x=rnorm(n,mean=0,sd=4) # Datos procedentes de la normal  $N(0,4^2)$ 
#mediat=0 # Media teórica

#x=rexp(n) # Datos procedentes de la Exponencial
#mediat=1

#x=rgamma(n,2,2) # Datos procedentes de una gamma (2,2)
#mediat=1
```

```
#x=rbeta(n,1/2,1/2) # Datos procedentes de una beta (1/2,1/2)
#mediat=1/2

#x=rbeta(n,5,1) # Datos procedentes de una beta (5,1)
#mediat=5/6

m=mean(x)
dt=sd(x)

i=rep(1/n,n)
media<-function(x,i){
  sum(x*i)
}

interv_abc[is,]=abc.ci(x,media,conf=0.95,eps=0.001/n)[c(2,3)]

nb=1000
k=0
tb=c()
mb=c()
for (ib in 1:nb){ # Bucle de las réplicas bootstrap
  ind=sample(n,n,replace=TRUE)
  xb=x[ind] # Muestra bootstrap
  mb[ib]=mean(xb)
  if (mb[ib]<m){
    k=k+1
  }
}

z0=qnorm(k/nb) #Cálculo de la estimación del parámetro z0

mj=c()

for (j in 1:n){
  mj[j]=mean(x[-j])
}
```

```

mjt=sum(mj)/n

U=c()

for(l in 1:n){      #Cálculo de la función de influencia jackknife
U[l]=mjt-mj[l]
}

a=sum(U^3)/(6*((sum(U^2))^(3/2))) #Aproximación del parámetro a

alfa1=pnorm(z0+(z0+qnorm(alfa/2))/(1-a*(z0+qnorm(alfa/2))))
alfa2=pnorm(z0+(z0+qnorm(1-alfa/2))/(1-a*(z0+qnorm(1-alfa/2))))

interv_bca[is,]=c(quantile(mb,alfa1),quantile(mb,alfa2))

##### FORMA DE LOS INTERVALOS #####

form_bca[is]=(interv_bca[is,2]-m)/(m-interv_bca[is,1])

form_abc[is]=(interv_abc[is,2]-m)/(m-interv_abc[is,1])

#####

if (is==100*round(is/100)){
cat('is=',is,interv_bca[is,],interv_abc[is,],'\n') }

}

## is= 100 -0.1326414 0.4685368 -0.1175815 0.4710775
## is= 200 -0.3431239 0.3204149 -0.3537932 0.2887397
## is= 300 -0.5047584 0.05687106 -0.4984203 0.06173165
## is= 400 -0.2688639 0.2542557 -0.2566898 0.2561227
## is= 500 -0.2168557 0.2843857 -0.2332563 0.2754397
## is= 600 -0.06392886 0.5792595 -0.05800721 0.5783905
## is= 700 -0.4369793 0.07525489 -0.4097825 0.08829007
## is= 800 -0.5053228 0.1402596 -0.5312045 0.1205397

```

```
## is= 900 -0.2916933 0.3070372 -0.2993186 0.2997511
## is= 1000 -0.3986938 0.2256725 -0.3829054 0.2549409

##### COBERTURA DE LOS INTERVALOS #####

cobertura_bca=sum((interv_bca[,1]<mediat)&(interv_bca[,2]>mediat))/ns
cobertura_bca

## [1] 0.948

cobertura_abc=sum((interv_abc[,1]<mediat)&(interv_abc[,2]>mediat))/ns
cobertura_abc

## [1] 0.949

##### PROMEDIO DE LOS INTERVALOS #####

prom_bca=c(sum(interv_bca[,1])/ns,sum(interv_bca[,2])/ns)
prom_bca

## [1] -0.2767618 0.2673660

prom_abc=c(sum(interv_abc[,1])/ns,sum(interv_abc[,2])/ns)
prom_abc

## [1] -0.2776082 0.2691058

##### FORMA DE LOS INTERVALOS #####

form_bca_prom=sum(form_bca)/ns
form_bca_prom

## [1] 1.004354

form_abc_prom=sum(form_abc)/ns
form_abc_prom

## [1] 1.004251
```

```
##### LONGITUD DE LOS INTERVALOS #####
```

```
long_bca=prom_bca[2]-prom_bca[1]
```

```
long_bca
```

```
## [1] 0.5441279
```

```
long_abc=prom_abc[2]-prom_abc[1]
```

```
long_abc
```

```
## [1] 0.546714
```


Bibliografía

- [1] Chernick, M. R. (2008). *Bootstrap Methods*. John Wiley & Sons.
- [2] Chernick, M. R. y LaBudde, R. A. (2011). *An Introduction to Bootstrap Methods with Applications to R*. John Wiley & Sons.
- [3] DiCiccio, T. y Efron, B. (1996). Bootstrap Confidence Intervals. *Statistical Science*, 11(3), 189-212.
- [4] DiCiccio, T. y Tibshirani, R. (1987). Bootstrap Confidence Intervals and Bootstrap Approximations. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397), 163-170.
- [5] Efron, B. (1987). Better Bootstrap Confidence Intervals. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397), 171-185.
- [6] Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] Efron, B. y Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall.