



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Álxebras de Hopf. Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Brais Ramos Pérez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Álxebras de Hopf. Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Brais Ramos Pérez

Julio, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Álgebras de Hopf. Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.
Breve descripción do contido
Este traballo pretende centrarse nalgún aspecto da motivación física do desenvolvemento da teoría de Álgebras de Hopf. Estas álgebras estudaranse como unha xeralización da estrutura de grupo e, en particular, farase unha introdución ao dobre de Drinfeld dun Álgebra de Hopf de dimensión finita, que permite atopar solucións á ecuación cuántica de Yang-Baxter.
Recomendacións
Outras observacións
Bibliografía: - E. Abe. Hopf Algebras. Cambridge University Press, Cambridge, 1980. - C. Kassel. Quantum Groups. GTM 155, Springer-Verlag, 1995.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Producto tensorial	1
1.1. Producto tensorial de módulos	1
1.2. Producto tensorial de homomorfismos	7
1.3. Producto tensorial de álgebras	8
2. Álgebras de Hopf	9
2.1. Concepto dual de un Álgebra	9
2.2. Biálgebras y Producto Convolución	23
2.3. Álgebras de Hopf	26
3. Ecuación Cuántica de Yang-Baxter	33
3.1. La Ecuación Cuántica de Yang-Baxter	33
3.2. Biálgebras Trenzadas	35
3.3. Álgebras de Hopf Trenzadas y R-matrices	39
3.3.1. Módulos sobre una Biálgebra	39
3.3.2. Soluciones de QYBE. R-matrices	40
4. Doble de Drinfeld	43
4.1. Producto bicruzado de grupos	43
4.2. Producto bicruzado de biálgebras	44
4.3. El Doble de Drinfeld de un Álgebra de Hopf	49
4.4. El Doble de Drinfeld y la QYBE	52
Bibliografía	57

Resumen

La importancia de las Álgebras de Hopf ha experimentado un crecimiento considerable a partir de finales de la década de los 80 tras convertirse en el contexto adecuado para el estudio de las soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, aspecto en el que destacan las contribuciones de V. G. Drinfeld y M. Jimbo.

Establecer la conexión que existe entre las Álgebras de Hopf y la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter es el objetivo fundamental de este trabajo.

En la memoria se hace un estudio de las Álgebras de Hopf desde una visión general, partiendo de las estructuras subyacentes de álgebra, coálgebra y biálgebra. Se demuestra que los módulos sobre Álgebras de Hopf trenzadas generan soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, y por ello este tipo particular de álgebras pasan a ser el tema central de estudio. Se finaliza estudiando el Doble de Drinfeld que proporciona un método para construir Álgebras de Hopf trenzadas a partir de un Álgebra de Hopf de dimensión finita.

Abstract

The importance of Hopf Algebras has grown considerably since the late 80s after becoming the appropriate context for the study of Quantum Yang-Baxter Equation solutions. In this study, the contributions of V. G. Drinfeld and M. Jimbo stand out.

The main objective of this project consists on establishing the connection between Hopf Algebras and the Quantum Yang-Baxter Equation.

In this paper, Hopf Algebras are studied from a general point of view, starting from the underlying structures of algebra, coalgebra and bialgebra. It is shown that the modules on braided Hopf Algebras generate solutions to the Quantum Yang-Baxter Equation and, therefore, this particular type of algebras become the central topic of study. It ends by studying the Drinfeld Double, which provides a method to construct braided Hopf Algebras from a finite dimensional Hopf Algebra.

Introducción

Las Álgebras de Hopf, que pueden verse como una generalización de la estructura de grupo, nacen en el campo de la Topología Algebraica entre los años 40 y 50 del siglo pasado. Aparecen en los trabajos de Heinz Hopf dedicados al estudio de la cohomología de Grupos de Lie compactos y sus espacios homogéneos asociados. A pesar de todo, quién las bautizó bajo el nombre de “Álgebras de Hopf” fue Armand Borel en el año 1953, en honor a las fundamentales aportaciones de Hopf en años anteriores. Paralelamente, Pierre Cartier hacía referencia a tales estructuras bajo el nombre de “hyper-álgebras” en sus trabajos sobre Teoría de Representaciones y Física-Matemática, inspirado en los estudios de Jean Dieudonné en Teoría de Grupos Algebraicos de característica positiva.

La definición de Álgebra de Hopf tal y como se empleaba en aquella época ha sufrido cierta evolución hasta llegar a la definición actual, que es la que se utiliza en este trabajo. Con la publicación de Sweedler en el año 1969 [13], las Álgebras de Hopf pasaron a ser objeto de estudio del Álgebra Abstracta y continuaron su desarrollo de tal manera que aparecen en prácticamente todos los campos de las Matemáticas: Teoría de Números (grupos formales), Geometría Algebraica, Teoría de Lie, Teoría de Galois y extensiones separables de cuerpos, Teoría de Anillos Graduados, Teoría de Grupos localmente compactos, Teoría de Distribución, Combinatoria, Teoría de Representación y Mecánica Cuántica. Además, las Álgebras de Hopf se han encontrado ligadas de modo natural al estudio de las simetrías de distintos objetos matemáticos. A título de ejemplo se pueden mencionar los siguientes: en Topología, ligadas a la construcción de invariantes de nudos y 3-variedades, o desde el punto de vista de la Física-Matemática, donde las Álgebras de Hopf trenzadas aparecen como los instrumentos adecuados para construir sistemáticamente soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, en cuyo estudio se centra este trabajo.

La Ecuación Cuántica de Yang-Baxter (QYBE) nace en la Física Teórica, apareciendo por vez primera en un artículo de C.N. Yang en Mecánica Cuántica y, más tarde, de R.J. Baxter, en el ámbito de la Mecánica Estadística.

Por un lado, el artículo de Yang [15], publicado en 1967, se centra en el estudio de los sistemas de partículas microscópicas interactuando entre sí, tratando de describir el

movimiento y dirección de éstas. Cada sistema de partículas tiene asociada una función de onda que describe la distribución de probabilidad de los resultados de cada medición¹. En esencia, conocer la función de onda junto con la evolución del sistema a lo largo del tiempo nos permite predecir el comportamiento del mismo. En sus investigaciones, Yang emplea el “ansatz de Bethe”² para construir la función de onda asociada a un sistema cuántico unidimensional con interacción repulsiva, obteniendo así una serie de propiedades que satisface la función de onda obtenida entre las cuales se encuentra la QYBE. Por tanto, encontrar una solución de QYBE permite obtener, de cierta manera, una función de onda asociada a un sistema de partículas, que a su vez proporciona una descripción del mismo.

Por otro lado, Baxter en un artículo publicado en el año 1972 [3], expuso sus investigaciones en la búsqueda de la función de partición asociada al modelo de los ocho vértices³, dentro del ámbito de la Mecánica Estadística. Una función de partición se trata de un funcional asociado a un sistema en equilibrio termodinámico a partir del cual podemos derivar las funciones de estado como la energía libre de Gibbs, la energía interna, la entropía o la entalpía. Para ello, introdujo las llamadas “matrices de transferencia conmutativa”⁴, las cuales debían de verificar una serie de propiedades para conmutar. Entre estas propiedades se encuentra la identidad de Yang-Baxter.

La Ecuación Cuántica de Yang-Baxter es una ecuación fundamental desde el punto de vista de la Física-Matemática, ya que la búsqueda de sus soluciones contribuyó al estudio de la Teoría de los Grupos Cuánticos, que constituyen una subclase de Álgebras de Hopf. Los primeros ejemplos de estas estructuras aparecen en trabajos de físicos-matemáticos de la Escuela de Fadeev, en Leningrado. El término “Grupo Cuántico” fue acuñado por Drinfeld y Jimbo y se popularizó tras el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Berkeley en el año 1986, donde Drinfeld expuso en una conferencia plenaria [6] las contribuciones que había obtenido en este campo junto con Michio Jimbo. Actualmente, la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter es utilizada en muchos campos, tanto desde el punto de vista físico, por ejemplo en la obtención de puertas cuánticas, como desde el punto

¹En Mecánica Cuántica, una medición es una manipulación del sistema de partículas que proporciona un resultado numérico.

²Un *ansatz* es una suposición. Por ejemplo, si se poseen una serie de datos que se encuentran en torno a una línea, se podría hacer un *ansatz* de linealidad. El *ansatz* de Bethe es un método de suposición que fue introducido por Hanse Bethe en 1931 y que se emplea para obtener la función de onda asociada a un sistema cuántico unidimensional.

³En Mecánica Estadística, los modelos de vértices hacen referencia a modelos de celosía. En ellos, los microestados se representan poniendo una flecha en cada arista de la celosía, indicando un estado u otro en función del sentido de ésta.

⁴En Mecánica Estadística, el método de la matriz de transferencia es una técnica matemática que se emplea para escribir la función de partición asociada a un determinado sistema de una manera más sencilla.

de vista matemático, por ejemplo en la representación de grupos de trenzas. Por ello, es importante el estudio y clasificación de sus soluciones. ¿Es posible obtener todas ellas? ¿Podemos generar soluciones de forma sencilla?

Con respecto a la primera de las preguntas, la obtención y clasificación de todas las soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter aún es un problema abierto en la actualidad. Fue el propio Drinfeld quien consiguió dar respuesta a la segunda de ellas en [5], donde obtiene que los módulos sobre Álgebras de Hopf trenzadas generan soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter. Inicialmente, los ejemplos de este tipo de estructuras no eran sencillos ni abundantes, y es por ello que surge la necesidad de construir Álgebras de Hopf trenzadas. En este aspecto fue de nuevo de gran importancia la aportación de Drinfeld, quién descubrió una manera universal de obtenerlas a través del llamado “Doble de Drinfeld”, el cual se construye a partir de un Álgebra de Hopf de dimensión finita. Fue así como, a partir de los años 80, las Álgebras de Hopf adquirieron una gran consideración.

Este trabajo de fin de grado está centrado en el estudio de los Grupos Cuánticos⁵ y en la búsqueda de soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter. La memoria se divide en cuatro capítulos, tratando en los dos primeros conceptos más generales para luego entrar en el estudio de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter en los posteriores.

El Capítulo 1 está dedicado al estudio de los conceptos básicos que se utilizarán a lo largo de la memoria. Se introducen las nociones de módulo y álgebra y se describe la construcción del producto tensorial de estos objetos, así como sus propiedades principales.

En el Capítulo 2 se define el concepto de Álgebra de Hopf, describiendo previamente las estructuras subyacentes: álgebra, coálgebra y biálgebra. A continuación, se relacionan la estructura de coálgebra de un espacio vectorial con la estructura de álgebra de su espacio vectorial dual. Se introduce el concepto de biálgebra como una álgebra y coálgebra que satisface una cierta condición de compatibilidad. Se finaliza el capítulo estudiando las propiedades de las Álgebras de Hopf (biálgebras con una aplicación adicional denominada antípodo) y describiendo ejemplos de estas álgebras.

Se prosigue con el Capítulo 3, donde se tratan los aspectos fundamentales de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter. Se empieza definiendo la ecuación, poniendo de manifiesto la sencillez de su formulación, y se hacen una serie de observaciones iniciales acerca de sus soluciones. A continuación, se introducen un tipo de Álgebras de Hopf particulares como son las Álgebras de Hopf cuasi-coconmutativas y posteriormente las Álgebras de Hopf trenzadas, estudiando sus propiedades más significativas. Éstas últimas álgebras tienen

⁵“Grupo Cuántico” es la terminología empleada por Drinfeld para hacer referencia a lo que se denominará Álgebra de Hopf trenzada en la memoria. Dependiendo de la referencia empleada, éstas también pueden recibir el nombre de Álgebras de Hopf cuasitriangulares.

gran relevancia en lo que resta de capítulo ya que se prueba que los módulos sobre Álgebras de Hopf trenzadas generan soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Se finaliza la memoria con un capítulo dedicado a la construcción del Doble de Drinfeld de un Álgebra de Hopf de dimensión finita y se demuestra que este nuevo objeto es un Álgebra de Hopf trenzada. Se obtiene así un contexto adecuado que permite obtener soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Capítulo 1

Producto tensorial

En este capítulo inicial se expondrán una serie de definiciones y resultados sobre el producto tensorial de módulos y álgebras, que se utilizarán en el desarrollo del trabajo.

Se establece la siguiente notación:

1. \mathbb{A} denotará un anillo conmutativo con unidad.
2. \mathbb{K} denotará un cuerpo.

1.1. Producto tensorial de módulos

Definición 1.1.1. Un \mathbb{A} -módulo M es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con una aplicación externa:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax\end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

- $a(x + y) = ax + ay$
- $(a + b)x = ax + bx$
- $(ab)x = a(bx)$
- $1_{\mathbb{A}}x = x$

$\forall a, b \in \mathbb{A}, \forall x, y \in M$.

Observación 1.1.2. Nótese que si en vez de considerar un \mathbb{A} -módulo se considera un \mathbb{K} -módulo, entonces se trata de un \mathbb{K} -espacio vectorial, por lo que el concepto de \mathbb{A} -módulo generaliza la estructura de \mathbb{K} -espacio vectorial.

Definición 1.1.3. Sean M, N \mathbb{A} -módulos. Un **homomorfismo de \mathbb{A} -módulos** es una aplicación $f: M \rightarrow N$ que verifica:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= af(x) \end{aligned}$$

$\forall x, y \in M, \forall a \in \mathbb{A}$.

Definición 1.1.4. Sean M, N y P \mathbb{A} -módulos. Una aplicación

$$\begin{aligned} f: M \times N &\rightarrow P \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

se dice **\mathbb{A} -bilineal** si para cada $x \in M$ la aplicación

$$\begin{aligned} f_x: N &\rightarrow P \\ y &\mapsto f_x(y) := f(x, y) \end{aligned}$$

es \mathbb{A} -lineal, y si para cada $y \in N$ la aplicación

$$\begin{aligned} f_y: M &\rightarrow P \\ x &\mapsto f_y(x) := f(x, y) \end{aligned}$$

es \mathbb{A} -lineal.

Construcción 1.1.5. Si M y N son \mathbb{A} -módulos, se considera el \mathbb{A} -módulo libre $\mathbb{A}^{(M \times N)}$ cuyos elementos son combinaciones lineales de elementos de $M \times N$ con coeficientes en \mathbb{A} , es decir, son expresiones de la forma:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i)$$

con $a_i \in \mathbb{A}, x_i \in M, y_i \in N$.

Si D es el submódulo de $\mathbb{A}^{(M \times N)}$ generado por los elementos de los siguientes tipos:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (ax, y) - a(x, y) \\ (x, ay) - a(x, y) \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{A}, x, x' \in M, y, y' \in N$, se denominará **producto tensorial de los \mathbb{A} -módulos M y N** al \mathbb{A} -módulo $\mathbb{A}^{(M \times N)}/D$, el cuál se denotará por $M \otimes_{\mathbb{A}} N$. Sus elementos, $[(x, y)]$, se denotarán por $x \otimes y, \forall x \in M, \forall y \in N$.

Observación 1.1.6. Nótese que si $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_j\}_{j \in J}$ son conjuntos de generadores de los \mathbb{A} -módulos M y N respectivamente, entonces $\{x_i \otimes y_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es un conjunto de generadores de $M \otimes_{\mathbb{A}} N$.

Este producto se puede caracterizar mediante la siguiente proposición.

Proposición 1.1.7. Si M, N, P son \mathbb{A} -módulos, entonces existe un isomorfismo de \mathbb{A} -módulos

$$\Psi: \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes_{\mathbb{A}} N, P) \longrightarrow \text{Bil}_{\mathbb{A}}(M \times N, P).$$

Demostración. Si

$$\begin{aligned} \varphi: M \times N &\longrightarrow M \otimes_{\mathbb{A}} N \\ (x, y) &\longmapsto [(x, y)] := x \otimes y \end{aligned}$$

es la aplicación bilineal canónica, la aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi: \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes_{\mathbb{A}} N, P) &\longrightarrow \text{Bil}_{\mathbb{A}}(M \times N, P) \\ f &\longmapsto \Psi(f): M \times N \longrightarrow P \end{aligned}$$

es un isomorfismo, en donde:

$$\begin{aligned} \Psi(f): M \times N &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto f(\varphi(x, y)) = f(x \otimes y). \end{aligned}$$

En efecto:

- **Bien definida:** $\Psi(f)$ es \mathbb{A} -bilineal $\forall f \in \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes_{\mathbb{A}} N, P)$.

$$\begin{aligned} \Psi(f)(\alpha x + x', y) &= (f \circ \varphi)(\alpha x + x', y) = f((\alpha x + x') \otimes y) \\ &= f(\alpha(x \otimes y) + (x' \otimes y)) = \alpha f(x \otimes y) + f(x' \otimes y) \\ &= \alpha \Psi(f)(x, y) + \Psi(f)(x', y) \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{A}, \forall x, x' \in M, \forall y \in N$. Análogamente se prueba que es \mathbb{A} -lineal con respecto a la segunda de las variables.

- **Linealidad:**

$$\begin{aligned} \Psi(f + g)(x, y) &= ((f + g) \circ \varphi)(x, y) = (f \circ \varphi)(x, y) + (g \circ \varphi)(x, y) \\ &= \Psi(f + g)(x, y) = \Psi(f)(x, y) + \Psi(g)(x, y), \end{aligned}$$

$$\Psi(\alpha f)(x, y) = (\alpha f \circ \varphi)(x, y) = (\alpha f)(x \otimes y) = \alpha f(x \otimes y) = \alpha \Psi(f)(x, y)$$

$\forall (x, y) \in M \times N$. Por lo tanto:

$$\Psi(\alpha f + g) = \alpha \Psi(f) + \Psi(g) \forall \alpha \in \mathbb{A}, \forall f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes_{\mathbb{A}} N, P).$$

- **Inyectividad:** Sean $f, f' \in \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes_{\mathbb{A}} N, P)$ arbitrarias y sea $\{x \otimes y\}$ un conjunto de generadores de $M \otimes_{\mathbb{A}} N$:

$$\text{Si } \Psi(f) = \Psi(f') \Rightarrow f(x \otimes y) = f'(x \otimes y) \quad \forall x \otimes y \in M \otimes_{\mathbb{A}} N \Rightarrow f = f'.$$

- **Sobreyectividad:** Sea $g: M \times N \rightarrow P$ una aplicación \mathbb{A} -bilineal. La aplicación $g': \mathbb{A}^{(M \times N)} \rightarrow P$, que resulta de extender g por linealidad, se anula en todos los generadores de D por ser \mathbb{A} -bilineal. Por lo tanto, $D \subset \ker g'$, induciendo un homomorfismo de \mathbb{A} -módulos $h: M \otimes_{\mathbb{A}} N := \mathbb{A}^{(M \times N)} / D \rightarrow P$ tal que $\Psi(h) = h \circ \varphi = g$.

□

Observación 1.1.8. El resultado anterior se puede ver como una **propiedad universal**. Es decir, dados M, N, P \mathbb{A} -módulos y $f: M \times N \rightarrow P$ una aplicación \mathbb{A} -bilineal, entonces $\exists! g: M \otimes_{\mathbb{A}} N \rightarrow P$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & P \\ \downarrow \varphi & \searrow \exists! g & \\ M \otimes_{\mathbb{A}} N & & \end{array} \quad (1.1)$$

Observación 1.1.9. Si en vez de considerar aplicaciones bilineales se considerasen aplicaciones multilineales $f: M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$, siendo M_1, \dots, M_r, P \mathbb{A} -módulos, siguiendo la misma construcción se obtendría el *producto multi-tensorial*, $M_1 \otimes_{\mathbb{A}} \dots \otimes_{\mathbb{A}} M_r$.

Notación 1.1.10. De ahora en adelante, excepto que exista ambigüedad en el anillo \mathbb{A} , se denotará $M \otimes N := M \otimes_{\mathbb{A}} N$.

Proposición 1.1.11. Si M, N, P son \mathbb{A} -módulos, se tienen los siguientes isomorfismos canónicos de \mathbb{A} -módulos:

1. $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$
 $x \otimes y \mapsto y \otimes x,$
2. $\mathbb{A} \otimes M \xrightarrow{\sim} M$
 $a \otimes x \mapsto ax,$
3. $(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes N \otimes P$
 $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z,$
 $M \otimes (N \otimes P) \xrightarrow{\sim} M \otimes N \otimes P$
 $x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall x \in M, \forall y \in N, \forall z \in P.$$

Demostración.

1. La aplicación $\hat{f}: M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ obtenida a partir de la aplicación \mathbb{A} -bilineal

$$\begin{aligned} f: M \times N &\longrightarrow N \otimes M \\ (x, y) &\longmapsto y \otimes x \end{aligned}$$

es un isomorfismo de \mathbb{A} -módulos cuyo inverso viene dado por

$$\begin{aligned} \bar{f}: N \otimes M &\longrightarrow M \otimes N \\ y \otimes x &\longmapsto x \otimes y. \end{aligned}$$

2. Se considera la aplicación \mathbb{A} -bilineal dada por:

$$\begin{aligned} h: \mathbb{A} \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax. \end{aligned}$$

La propiedad universal induce un isomorfismo de \mathbb{A} -módulos

$$\begin{aligned} \hat{h}: \mathbb{A} \otimes M &\longrightarrow M \\ a \otimes x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

con inverso

$$\begin{aligned} \bar{h}: M &\longrightarrow \mathbb{A} \otimes M \\ x &\longmapsto 1_{\mathbb{A}} \otimes x. \end{aligned}$$

3. Para cada $z \in P$, se define la aplicación:

$$\begin{aligned} f_z: M \times N &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (x, y) &\longmapsto f_z(x, y) = x \otimes y \otimes z. \end{aligned}$$

Por las propiedades del producto tensorial, la aplicación f_z es \mathbb{A} -bilineal. Entonces, por la propiedad universal, $\exists! \hat{f}_z: M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes P$ que hace conmutativo el diagrama (1.1).

Si se considera la aplicación \mathbb{A} -bilineal dada por:

$$\begin{aligned} g: (M \otimes N) \times P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (t, z) &\longmapsto g(t, z) = f_z(t) = t \otimes z, \end{aligned}$$

entonces la propiedad universal induce el isomorfismo

$$\begin{aligned}\hat{g}: (M \otimes N) \otimes P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (x \otimes y) \otimes z &\longmapsto \hat{g}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z\end{aligned}$$

con inverso

$$\begin{aligned}\bar{g}: M \otimes N \otimes P &\longrightarrow (M \otimes N) \otimes P \\ x \otimes y \otimes z &\longmapsto (x \otimes y) \otimes z.\end{aligned}$$

Similarmente se prueba que $M \otimes (N \otimes P) \simeq M \otimes N \otimes P$.

□

Proposición 1.1.12. *Si M, N, P son \mathbb{A} -módulos, entonces existe un isomorfismo de \mathbb{A} -módulos entre*

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes N, P) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, \text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, P)).$$

Demostración. Existe una correspondencia biyectiva entre

$$\text{Bil}_{\mathbb{A}}(M \times N, P) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, \text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, P))$$

dada por:

- Si $f: M \times N \longrightarrow P$ es una aplicación \mathbb{A} -bilineal, entonces induce una aplicación \mathbb{A} -lineal:

$$\begin{aligned}M &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, P) \\ x &\longmapsto f_x: N \longrightarrow P,\end{aligned}$$

donde $f_x(y) = f(x, y) \forall y \in N$.

- Recíprocamente, dado un \mathbb{A} -homomorfismo

$$\phi: M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, P)$$

define una aplicación \mathbb{A} -bilineal:

$$\begin{aligned}M \times N &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto (\phi(x))(y).\end{aligned}$$

Como consecuencia de la propiedad universal del producto tensorial,

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes N, P) \simeq \text{Bil}_{\mathbb{A}}(M \times N, P).$$

Por lo tanto:

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(M \otimes N, P) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, \text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, P)).$$

□

1.2. Producto tensorial de homomorfismos

Definición 1.2.1. Sean $f: M \rightarrow M'$ y $g: N \rightarrow N'$ homomorfismos de \mathbb{A} -módulos. Se define el **producto tensorial de f y g** como:

$$\begin{aligned} f \otimes g: M \otimes N &\rightarrow M' \otimes N' \\ x \otimes y &\mapsto (f \otimes g)(x \otimes y) := f(x) \otimes g(y). \end{aligned}$$

Proposición 1.2.2. Si $f: M \rightarrow M'$ y $g: N \rightarrow N'$ son homomorfismos de \mathbb{A} -módulos, entonces el producto tensorial de f y g es un homomorfismo de \mathbb{A} -módulos.

Demostración. Se considera la aplicación:

$$\begin{aligned} f \times g: M \times N &\rightarrow M' \times N' \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

y se define la aplicación \mathbb{A} -bilineal $\varphi' \circ (f \times g)$. En virtud de la propiedad universal se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f \times g} & M' \times N' \\ \downarrow \varphi & \searrow \varphi' \circ (f \times g) & \downarrow \varphi' \\ M \otimes N & \xrightarrow{\exists! f \otimes g} & M' \otimes N' \end{array}$$

de donde se sigue que el producto tensorial de homomorfismos de \mathbb{A} -módulos es un homomorfismo de \mathbb{A} -módulos. \square

Proposición 1.2.3. Si $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$, $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$ son homomorfismos de \mathbb{A} -módulos, entonces:

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Demostración. Se tiene que:

$$\begin{aligned} M \otimes N &\xrightarrow{(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)} M'' \otimes N'' \\ M \otimes N &\xrightarrow{f \otimes g} M' \otimes N' \xrightarrow{f' \otimes g'} M'' \otimes N''. \end{aligned}$$

Si $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_j\}_{j \in J}$ son conjuntos de generadores para los \mathbb{A} -módulos M y N , respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(x_i \otimes y_j) &= (f' \otimes g')(f(x_i) \otimes g(y_j)) = f'(f(x_i)) \otimes g'(g(y_j)) \\ &= ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(x_i \otimes y_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ ya que coinciden sobre $\{x_i \otimes y_j\}_{(i,j) \in I \times J}$, conjunto de generadores de $M \otimes N$. \square

1.3. Producto tensorial de álgebras

Definición 1.3.1. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Una \mathbb{K} -álgebra es una terna (A, η, μ) donde:

- A es un anillo,
- $\eta: \mathbb{K} \rightarrow A$ es un homomorfismo de anillos,
- La multiplicación de A como anillo, $\mu: A \times A \rightarrow A$ es una aplicación bilineal.

Observación 1.3.2. Obsérvese que la aplicación η dota a A de una estructura de \mathbb{K} -espacio vectorial, ya que podemos definir el producto por escalares como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times A &\longrightarrow A \\ (k, a) &\longmapsto \mu(\eta(k), a). \end{aligned}$$

Definición 1.3.3. Sean A, B \mathbb{K} -álgebras. Un **morfismo de \mathbb{K} -álgebras** es un homomorfismo de anillos $f: A \rightarrow B$ que verifica $f \circ \eta_A = \eta_B$.

Como consecuencia inmediata, si f es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras, entonces $f(1_A) = 1_B$.

Proposición 1.3.4. Si B, C son \mathbb{K} -álgebras, entonces $D := B \otimes_{\mathbb{K}} C$ es una \mathbb{K} -álgebra.

Demostración. Nótese que tanto B como C son \mathbb{K} -espacios vectoriales, es decir, \mathbb{K} -módulos, por lo tanto, D es un \mathbb{K} -módulo.

La aplicación

$$\begin{aligned} g: B \times C \times B \times C &\longrightarrow B \otimes C \\ (b, c, b', c') &\longmapsto bb' \otimes cc' \end{aligned}$$

es \mathbb{K} -multilineal, por lo que, por la propiedad universal del producto tensorial se tiene que existe un homomorfismo de \mathbb{K} -módulos

$$\begin{aligned} \hat{g}: B \otimes C \otimes B \otimes C &\longrightarrow B \otimes C \\ b \otimes c \otimes b' \otimes c' &\longmapsto bb' \otimes cc'. \end{aligned}$$

Así, por la Proposición 1.1.7, existe una aplicación \mathbb{K} -bilineal

$$\begin{aligned} \mu: D \times D &\longrightarrow D \\ (b \otimes c, b' \otimes c') &\longmapsto \mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'. \end{aligned}$$

Entonces, la terna (D, μ, η) es una \mathbb{K} -álgebra siendo

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{K} &\longrightarrow D \\ 1_{\mathbb{K}} &\longmapsto \eta(1_{\mathbb{K}}) := \eta_B(1_{\mathbb{K}}) \otimes \eta_C(1_{\mathbb{K}}). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

En este capítulo se analizan los conceptos fundamentales de coálgebra y biálgebra y se introduce el concepto de álgebra de Hopf como una biálgebra con una aplicación adicional llamada antípodo. Se estudian además las características básicas de estas álgebras, que serán necesarias para obtener soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

2.1. Concepto dual de un Álgebra

Es sencillo probar que el concepto de \mathbb{K} -álgebra de la Definición 1.3.1 es equivalente a considerar ternas (V, μ, η) siendo V un \mathbb{K} -espacio vectorial junto con los siguientes morfismos:

- $\mu: V \otimes V \rightarrow V$ es una aplicación lineal que se denominará **multiplicación**,
- $\eta: \mathbb{K} \rightarrow V$ es una aplicación lineal que se denominará **unidad**,

que hacen conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes V \otimes V & \xrightarrow{\mu \otimes id_V} & V \otimes V \\
 \downarrow id_V \otimes \mu & & \downarrow \mu \\
 V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V
 \end{array}$$

Diagrama 2.1: Asociatividad (As).

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K} \otimes V & \xrightarrow{\eta \otimes id_V} & V \otimes V & \xleftarrow{id_V \otimes \eta} & V \otimes \mathbb{K} \\
 & \searrow \cong & \downarrow \mu & \swarrow \cong & \\
 & & V & &
 \end{array}$$

Diagrama 2.2: Existencia de unidad (Un).

Se dirá que la \mathbb{K} -álgebra es además *conmutativa* cuando se verifique la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & V \otimes V & \\
 \tau_{V,V} \swarrow & & \searrow \mu \\
 V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V
 \end{array}$$

Diagrama 2.3: Conmutatividad (Comm)

siendo el isomorfismo de \mathbb{K} -álgebras:

$$\begin{aligned}
 \tau_{V,V}: V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \\
 v \otimes w &\longmapsto w \otimes v.
 \end{aligned}$$

Notación 2.1.1. Sea (V, μ, η) una \mathbb{K} -álgebra, se denotará por $\mu^{op} := \mu \circ \tau_{V,V}$. Entonces, se dirá que una \mathbb{K} -álgebra es conmutativa si $\mu = \mu^{op}$.

Definición 2.1.2. Sean $(V, \mu, \eta), (V', \mu', \eta')$ \mathbb{K} -álgebras. Una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ se dice que es un **morfismo de \mathbb{K} -álgebras** si verifica:

- $\mu' \circ (f \otimes f) = f \circ \mu$,
- $f \circ \eta = \eta'$,

equivalentemente, si son conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes V & \xrightarrow{f \otimes f} & V' \otimes V' \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \mu' \\
 V & \xrightarrow{f} & V'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & V \\
 & \searrow \eta' & \downarrow f \\
 & & V'
 \end{array}$$

Ejemplo 2.1.3.

1. El propio cuerpo \mathbb{K} presenta una estructura natural de \mathbb{K} -álgebra con las siguientes multiplicación y unidad:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\
 k_1 \otimes k_2 &\longmapsto k_1 k_2 \\
 \eta_{\mathbb{K}} \equiv id_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\
 k &\longmapsto \eta(k) := k.
 \end{aligned}$$

2. Sea \mathbb{K} un cuerpo. El anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$ tiene estructura de \mathbb{K} -álgebra con μ la multiplicación usual de polinomios y η la inclusión de los escalares como polinomios constantes en $\mathbb{K}[x]$.

3. Si se consideran (V_1, μ_1, η_1) y (V_2, μ_2, η_2) \mathbb{K} -álgebras, entonces $V_1 \otimes V_2$ admite estructura de \mathbb{K} -álgebra con las siguientes multiplicación y unidad:

$$\begin{aligned} \mu_{V_1 \otimes V_2}: (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_1 \otimes V_2) &\longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \\ (v_1 \otimes v_2) \otimes (v'_1 \otimes v'_2) &\longmapsto [(\mu_1 \otimes \mu_2) \circ (id_{V_1} \circ \tau_{V_1, V_2} \circ id_{V_2})]((v_1 \otimes v_2) \otimes (v'_1 \otimes v'_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{V_1 \otimes V_2}: \mathbb{K} &\longrightarrow V_1 \otimes V_2 \\ 1_{\mathbb{K}} &\longmapsto \eta_1(1_{\mathbb{K}}) \otimes \eta_2(1_{\mathbb{K}}). \end{aligned}$$

Se introduce a continuación el concepto de coálgebra que es esencialmente la noción *dual* de álgebra.

Definición 2.1.4. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Una \mathbb{K} -**coálgebra** es una terna (W, Δ, ε) donde:

- W es un \mathbb{K} -espacio vectorial,
- $\Delta: W \longrightarrow W \otimes W$, una aplicación lineal que se denominará **comultiplicación**,
- $\varepsilon: W \longrightarrow \mathbb{K}$, una aplicación lineal que se denominará **counidad**,

que hacen conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Delta} & W \otimes W \\ \downarrow \Delta & & \downarrow id_W \otimes \Delta \\ W \otimes W & \xrightarrow{\Delta \otimes id_W} & W \otimes W \otimes W \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes W & \xleftarrow{\varepsilon \otimes id_W} & W \otimes W & \xrightarrow{id_W \otimes \varepsilon} & W \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow \cong & \uparrow \Delta & \swarrow \cong & \\ & & W & & \end{array}$$

Diagrama 2.4: Coasociatividad (Coas). Diagrama 2.5: Existencia de counidad (Coun).

Se dirá que la coálgebra es *coconmutativa* cuando $\tau_{W,W} \circ \Delta = \Delta$, es decir:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Delta} & W \otimes W \\ & \searrow \Delta & \swarrow \tau_{W,W} \\ & & W \otimes W \end{array}$$

Diagrama 2.6: Coconmutatividad (Coconm).

Notación 2.1.5. Sea (W, Δ, ε) una \mathbb{K} -coálgebra, se denotará por $\Delta^{cop} := \tau_{W,W} \circ \Delta$. Entonces, se dirá que una \mathbb{K} -coálgebra es coconmutativa si $\Delta = \Delta^{cop}$.

Definición 2.1.6. Sean (W, Δ, ε) , $(W', \Delta', \varepsilon')$ \mathbb{K} -coálgebras. Una aplicación lineal $f: W \rightarrow W'$ se dice **morfismo de \mathbb{K} -coálgebras** si se verifican las dos siguientes condiciones:

- $(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f$,
- $\varepsilon = \varepsilon' \circ f$,

es decir, f es un morfismo de \mathbb{K} -coálgebras si son conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Delta} & W \otimes W \\ \downarrow f & & \downarrow f \otimes f \\ W' & \xrightarrow{\Delta'} & W' \otimes W' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & W' \\ & \searrow \varepsilon & \downarrow \varepsilon' \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

Notación 2.1.7. En lo que sigue, se empleará la llamada *Notación de Sweedler* para expresar la comultiplicación. Si (W, Δ, ε) es una \mathbb{K} -coálgebra y $x \in W$, entonces se escribirá:

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x''.$$

Así, las condiciones de coasociatividad, counidad y coconmutatividad reflejadas en los Diagramas 2.4, 2.5 y 2.6 se pueden reescribir como sigue:

- **Coasociatividad:**

$$\sum_{(x)} \left(\sum_{(x')} (x')' \otimes (x')'' \right) \otimes x'' = \sum_{(x)} x' \otimes \left(\sum_{(x'')} (x'')' \otimes (x'')'' \right)$$

lo que, por convención, se escribirá:

$$\sum_{(x)} x' \otimes x'' \otimes x'''.$$

- **Counidad:**

$$\sum_{(x)} \varepsilon(x') x'' = x = \sum_{(x)} x' \varepsilon(x'').$$

- **Coconmutatividad:**

$$\sum_{(x)} x' \otimes x'' = \sum_{(x)} x'' \otimes x'.$$

Ejemplo 2.1.8.

1. El propio cuerpo base \mathbb{K} , como \mathbb{K} -espacio vectorial, presenta una estructura natural de \mathbb{K} -coálgebra considerando:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \Delta(a) := a \otimes 1_{\mathbb{K}} \\ \varepsilon_{\mathbb{K}} \equiv id_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ k &\longmapsto \varepsilon(k) := k.\end{aligned}$$

Esta coálgebra se conoce como *coálgebra trivial*.

2. Sea X un conjunto, se denota por $\mathbb{K}[X]$ el \mathbb{K} -espacio vectorial que tiene a X como base. $\mathbb{K}[X]$ presenta una estructura de \mathbb{K} -coálgebra. Basta definir como actúan Δ y ε sobre los elementos de X para luego extender ambas por linealidad a todo $\mathbb{K}[X]$. Sea $x \in X$:

$$\begin{aligned}\Delta: \mathbb{K}[X] &\longmapsto \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X] \\ x &\longmapsto x \otimes x \\ \varepsilon: \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto 1_{\mathbb{K}}.\end{aligned}$$

Esta coálgebra recibe el nombre de *coálgebra de grupo*.

3. Se pretende con el siguiente ejemplo hacer notar que un espacio vectorial no tiene porque presentar una única estructura de coálgebra.

Sea \mathbb{K} un cuerpo y $\mathbb{K}[x]$ el \mathbb{K} -espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en \mathbb{K} . Este espacio vectorial tiene como base a $\{1_{\mathbb{K}}, x, x^2, x^3, \dots\}$, entonces bastará con definir las aplicaciones Δ y ε sobre los elementos de la base.

3.1. Se definen:

$$\begin{aligned}\Delta_1: \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[x] \\ x^m &\longmapsto \Delta_1(x^m) := x^m \otimes x^m \\ \varepsilon_1: \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x^m &\longmapsto \varepsilon_1(x^m) := 1_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

que dotan a $\mathbb{K}[x]$ de estructura de \mathbb{K} -coálgebra.

3.2. Se consideran:

$$\begin{aligned}\Delta_2: \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[x] \\ x^m &\longmapsto \Delta_2(x^m) := \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \\ \varepsilon_2: \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x^m &\longmapsto \varepsilon_2(x^m) := \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 1_{\mathbb{K}} & \text{si } m = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Con esta comultiplicación y counidad, $\mathbb{K}[x]$ tiene estructura de coálgebra. En efecto, se comprobará que se verifica la conmutatividad de los Diagramas 2.4 y 2.5.

■ **Coasociatividad:**

$$\begin{aligned}((id_{\mathbb{K}[x]} \otimes \Delta_2) \circ \Delta_2)(x^m) &= (id_{\mathbb{K}[x]} \otimes \Delta_2) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes \Delta_2(x^{m-i}) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} x^i \otimes x^j \otimes x^{m-i-j}\end{aligned}$$

que mediante el cambio de variable $k = i + j$ se tiene que:

$$((id_{\mathbb{K}[x]} \otimes \Delta_2) \circ \Delta_2)(x^m) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=i}^m \binom{m}{i} \binom{m-i}{k-i} x^i \otimes x^{k-i} \otimes x^{m-k}.$$

Reasignando los nombres de las variables: $k \mapsto i$, $i \mapsto j$ se obtiene:

$$\begin{aligned}((id_{\mathbb{K}[x]} \otimes \Delta_2) \circ \Delta_2)(x^m) &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=j}^m \binom{m}{j} \binom{m-j}{i-j} x^j \otimes x^{i-j} \otimes x^{m-i} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \binom{m}{i} \binom{i}{j} x^j \otimes x^{i-j} \otimes x^{m-i} \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \Delta_2(x^i) \otimes x^{m-i} \\ &= (\Delta_2 \otimes id_{\mathbb{K}[x]}) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\ &= ((\Delta_2 \otimes id_{\mathbb{K}[x]}) \circ \Delta_2)(x^m).\end{aligned}$$

■ **Counidad:**

$$\begin{aligned} ((\varepsilon_2 \otimes id_{\mathbb{K}[x]}) \circ \Delta_2)(x^m) &= (\varepsilon_2 \otimes id_{\mathbb{K}[x]}) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \varepsilon_2(x^i) \otimes x^{m-i} = \binom{m}{0} 1_{\mathbb{K}} \otimes x^m = x^m. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} ((id_{\mathbb{K}[x]} \otimes \varepsilon_2) \circ \Delta_2)(x^m) &= (id_{\mathbb{K}[x]} \otimes \varepsilon_2) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \otimes \varepsilon_2(x^{m-i}) = \binom{m}{m} x^m \otimes 1_{\mathbb{K}} = x^m. \end{aligned}$$

Esta coálgebra recibe el nombre de *Coálgebra de potencias divididas*.

4. Por último, si $(W_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$, $(W_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ son \mathbb{K} -coálgebras, entonces $W_1 \otimes W_2$ tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra con la siguiente comultiplicación y counidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{W_1 \otimes W_2}: W_1 \otimes W_2 &\longrightarrow (W_1 \otimes W_2) \otimes (W_1 \otimes W_2) \\ x_1 \otimes x_2 &\longmapsto \Delta_{W_1 \otimes W_2}(x_1 \otimes x_2) := [(id_{W_1} \circ \tau_{W_1, W_2} \circ id_{W_2}) \circ (\Delta_1 \otimes \Delta_2)](x_1 \otimes x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{W_1 \otimes W_2}: W_1 \otimes W_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_1 \otimes x_2 &\longmapsto \varepsilon_{W_1 \otimes W_2}(x_1 \otimes x_2) := (\mu_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2)(x_1 \otimes x_2) = \varepsilon_1(x_1)\varepsilon_2(x_2). \end{aligned}$$

Notación 2.1.9. Si U es un \mathbb{K} -espacio vectorial, U^* denotará el \mathbb{K} -espacio vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \mathbb{K})$.

Ahora, se enunciarán una serie de resultados que relacionan álgebras y coálgebras. Para la demostración de estos será necesario el siguiente Lema.

Lema 2.1.10. *Si U y V son dos \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita, entonces:*

$$U^* \otimes V^* \simeq (V \otimes U)^*.$$

Demostración. Si U, U', V, V' son \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda: \text{Hom}(U, U') \otimes \text{Hom}(V, V') &\longrightarrow \text{Hom}(V \otimes U, U' \otimes V') \\ f \otimes g &\longmapsto \lambda(f \otimes g): V \otimes U \longrightarrow U' \otimes V', \end{aligned}$$

donde $\lambda(f \otimes g)(v \otimes u) = f(u) \otimes g(v)$, es un isomorfismo de \mathbb{K} -espacios vectoriales.

En particular, considerando $U' = V' = \mathbb{K}$ se tiene que $U^* \otimes V^* \simeq (V \otimes U)^*$. □

Proposición 2.1.11. *Si (W, Δ, ε) es una \mathbb{K} -coalgebra, entonces W^* admite una estructura de \mathbb{K} -álgebra.*

Demostración. Se definen la multiplicación y unidad para W^* siguientes:

$$\begin{aligned} \mu: W^* \otimes W^* &\longrightarrow W^* \\ f \otimes g &\longmapsto \mu(f \otimes g) := (\Delta^* \circ \lambda \circ \tau_{W^*, W^*})(f \otimes g) \\ \eta: \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}^* &\longrightarrow W^* \\ k &\longmapsto \eta(k) := \varepsilon^*(k): W \longrightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

donde λ es el homomorfismo de \mathbb{K} -espacios vectoriales definido en el Lema 2.1.10 y además, $\varepsilon^*(k)(w) := k\varepsilon(w)$.

Para concluir que (W^*, μ, ε) es un álgebra, se probará que son conmutativos los Diagramas 2.1 y 2.2.

■ **Asociatividad:** Sean $f, g, h \in W^*$, $w \in W$.

$$\begin{aligned} \mu(\mu \otimes id_{W^*})(f \otimes g \otimes h)(w) &= (\lambda(h \otimes (\lambda(g \otimes f) \circ \Delta)) \circ \Delta)(w) \\ &= \sum_{(w)} h(w'') \otimes (\lambda(g \otimes f) \circ \Delta)(w') \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(w')} h(w'') \otimes g((w')'') \otimes f((w')') \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(w')} (h \otimes g \otimes f)(w'' \otimes (w')'' \otimes (w')') \\ &= (h \otimes g \otimes f) \left(\sum_{(w)} \sum_{(w')} w'' \otimes (w')'' \otimes (w')' \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(id_{W^*} \otimes \mu)(f \otimes g \otimes h)(w) &= (\lambda((\lambda(h \otimes g) \circ \Delta) \otimes f) \circ \Delta)(w) \\ &= \sum_{(w)} (\lambda(h \otimes g) \circ \Delta)(w'') \otimes f(w') \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(w'')} h((w'')'') \otimes g((w'')') \otimes f(w') \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(w'')} (h \otimes g \otimes f)((w'')'' \otimes (w'')' \otimes w') \\ &= (h \otimes g \otimes f) \left(\sum_{(w)} \sum_{(w'')} (w'')'' \otimes (w'')' \otimes w' \right). \end{aligned}$$

La asociatividad se concluye por ser Δ coasociativa, lo que implica que:

$$\sum_{(w)} \sum_{(w')} w'' \otimes (w')'' \otimes (w')' = \sum_{(w)} \sum_{(w'')} (w'')'' \otimes (w'')' \otimes w'.$$

- **Unidad:** Sean $f \in W^*$, $a \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \mu(\eta(a) \otimes f)(w) &= (\lambda(f \otimes \eta(a)) \circ \Delta)(w) = \sum_{(w)} f(w'') \otimes \eta(a)(w') \\ &= \sum_{(w)} f(w'') \otimes a\varepsilon(w') = \sum_{(w)} f(w'')a\varepsilon(w') \\ &= a \sum_{(w)} f(\varepsilon(w')w'') = af \left(\sum_{(w)} \varepsilon(w')w'' \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(f \otimes \eta(a))(w) &= (\lambda(\eta(a) \otimes f) \circ \Delta)(w) = \sum_{(w)} \eta(a)(w'') \otimes f(w') \\ &= \sum_{(w)} a\varepsilon(w'') \otimes f(w') = \sum_{(w)} a\varepsilon(w'')f(w') \\ &= a \sum_{(w)} f(w'\varepsilon(w'')) = af \left(\sum_{(w)} w'\varepsilon(w'') \right). \end{aligned}$$

La conmutatividad del Diagrama 2.2 se tiene como consecuencia de ser W una coálgebra, entonces se tiene que:

$$\sum_{(w)} \varepsilon(w')w'' = \sum_{(w)} w'\varepsilon(w'').$$

□

A continuación se enunciará una especie de recíproco para el resultado anterior, aunque para ello se necesita la hipótesis de dimensión finita.

Proposición 2.1.12. *Sea (V, μ, η) una \mathbb{K} -álgebra con V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, entonces V^* admite una estructura de \mathbb{K} -coálgebra.*

Demostración. Como V es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita, por el Lema 2.1.10, la aplicación

$$\lambda: V^* \otimes V^* \longrightarrow (V \otimes V)^*$$

es un isomorfismo de \mathbb{K} -espacios vectoriales, por lo que $\exists \lambda^{-1}$.

Se define la siguiente comultiplicación y counidad para V^* :

$$\begin{aligned} \Delta: V^* &\longrightarrow V^* \otimes V^* \\ f &\longmapsto \Delta(f) := (\lambda^{-1} \circ \mu^*)(f) \\ \varepsilon: V^* &\longrightarrow \mathbb{K}^* \simeq \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \varepsilon(f) := \eta^*(f) \end{aligned}$$

donde $\Delta(f) = (\lambda^{-1} \circ \mu^*)(f) = \sum_{(f)} f_1 \otimes f_2$ tal que $f(xy) = \sum_{(f)} f_1(x)f_2(y)$.

Se probará que son conmutativos los Diagramas 2.4 y 2.5:

■ **Coasociatividad.** Sean $f \in V^*$, $x, y, z \in V$.

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes id_{W^*}) \circ \Delta)(f)(x \otimes y \otimes z) &= \sum_{(f)(f_1)} (f_1)_1(x) \otimes (f_1)_2(y) \otimes f_2(z) \\ &= \sum_{(f)(f_1)} (f_1)_1(x)(f_1)_2(y)f_2(z) \\ &= \sum_{(f)} f_1(xy)f_2(z) = f(xyz). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((id_{W^*} \otimes \Delta) \circ \Delta)(f)(x \otimes y \otimes z) &= \sum_{(f)(f_2)} f_1(x) \otimes (f_2)_1(y) \otimes (f_2)_2(z) \\ &= \sum_{(f)(f_2)} f_1(x)(f_2)_1(y)(f_2)_2(z) \\ &= \sum_{(f)} f_1(x)f_2(yz) = f(xyz). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(\Delta \otimes id_{W^*}) \circ \Delta = (id_{W^*} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

■ **Counidad.** Sean $f \in V^*$, $x, y \in V$.

$$\begin{aligned} ((\varepsilon \otimes id_{W^*}) \circ \Delta)(f)(x \otimes y) &= \sum_{(f)} \varepsilon(f_1)(x) \otimes f_2(y) = \sum_{(f)} f_1(\eta(x)) \otimes f_2(y) \\ &= \sum_{(f)} f_1(\eta(x))f_2(y) = f(\eta(x)y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((id_{W^*} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(f)(x \otimes y) &= \sum_{(f)} f_1(x) \otimes \varepsilon(f_2)(y) = \sum_{(f)} f_1(x) \otimes f_2(\eta(y)) \\ &= \sum_{(f)} f_1(x)f_2(\eta(y)) = f(x\eta(y)). \end{aligned}$$

Por ser V una \mathbb{K} -álgebra se verifica la conmutatividad del Diagrama 2.2, así se tiene que $\eta(x)y = x\eta(y)$, y por lo tanto:

$$(\varepsilon \otimes id_{W^*}) \circ \Delta = (id_{W^*} \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

□

Observación 2.1.13. Nótese la importancia en la Proposición 2.1.12 de que la \mathbb{K} -álgebra sea de dimensión finita.

En general, la aplicación:

$$\lambda: V^* \otimes V^* \longrightarrow (V \otimes V)^*$$

es inyectiva, independientemente de la dimensión.

Para obtener un coproducto Δ_{V^*} en V^* , se necesita que $\Delta_{V^*}: V^* \longrightarrow V^* \otimes V^*$. Sin embargo, la aplicación dual de μ , $\mu^*: V^* \longrightarrow (V \otimes V)^*$. Por lo tanto, en general, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\mu^*} & (V \otimes V)^* \\ \uparrow id_{V^*} & & \uparrow \lambda \\ V^* & \xrightarrow{\Delta_{V^*}} & V^* \otimes V^* \end{array}$$

lo que impide definir directamente $\Delta_{V^*} = \mu^*$.

Ejemplo 2.1.14. $V = M_n(\mathbb{K})$, el \mathbb{K} -espacio vectorial de las matrices $n \times n$ con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} , tiene estructura de \mathbb{K} -álgebra con las siguientes multiplicación y unidad:

$$\begin{aligned} \mu: V \otimes V &\longrightarrow V \\ (a_{ij}) \otimes (b_{ij}) &\longmapsto \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (\text{Multiplicación usual de matrices}) \\ \eta: \mathbb{K} &\longrightarrow V \\ 1_{\mathbb{K}} &\longmapsto \eta(1_{\mathbb{K}}) := \sum_{k=1}^n E_{kk} \end{aligned}$$

V es un \mathbb{K} -espacio vectorial con base $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$, donde $E_{ij} = \delta_{ij}$, por lo tanto $\dim_{\mathbb{K}} V = n^2$, entonces se verifican las hipótesis de la Proposición 2.1.12.

Se concluye entonces que V^* presenta una estructura de coálgebra con las siguientes comultiplicación y counidad, las cuales bastará con definir sobre los elementos de la base dual de $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$, que se denotarán por $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

■ **Comultiplicación.**

$$\begin{aligned}
\Delta(x_{ij})(E_{kl} \otimes E_{mn}) &= (\lambda^{-1} \circ \mu^*)(x_{ij})(E_{kl} \otimes E_{mn}) \\
&= (\lambda^{-1} \circ x_{ij} \circ \mu)(E_{kl} \otimes E_{mn}) \\
&= \lambda^{-1}(x_{ij}(\delta_{lm}E_{kn})) = \lambda^{-1}(\delta_{lm}\delta_{ik}\delta_{jn}) \\
&= \lambda^{-1}\left(\sum_p \delta_{ik}\delta_{lp}\delta_{pm}\delta_{jn}\right) \\
&= \lambda^{-1}\left(\sum_p x_{ip}(E_{kl})x_{pj}(E_{mn})\right) \\
&= (\lambda^{-1} \circ \lambda)\left(\sum_p x_{ip} \otimes x_{pj}\right)(E_{kl} \otimes E_{mn}) \\
&= \left(\sum_p x_{ip} \otimes x_{pj}\right)(E_{kl} \otimes E_{mn}).
\end{aligned}$$

■ **Counidad.**

$$\varepsilon(x_{ij})(1_{\mathbb{K}}) = \eta^*(x_{ij})(1_{\mathbb{K}}) = (x_{ij} \circ \eta)(1_{\mathbb{K}}) = x_{ij}\left(\sum_{k=1}^n E_{kk}\right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}.$$

Cuando se trabaja con un anillo $(A, +, \cdot)$, se habla de los ideales del anillo, al igual que, si (G, \cdot) es un grupo, se habla de sus subgrupos normales. En ambos casos, si J es un ideal de A o N es un subgrupo normal de G , se puede dotar a A/J o a G/N de estructura de anillo cociente o grupo cociente, respectivamente.

El papel de los ideales en el caso de la teoría de anillos, así como el papel de los subgrupos normales en el caso de la teoría de grupos, es el que juegan los **coideales** para las coálgebras.

A continuación se definirá el concepto de coideal y se enunciará el resultado que permite construir la estructura de coálgebra cociente.

Definición 2.1.15. Si (W, Δ, ε) es una \mathbb{K} -coálgebra, se dice que un subespacio $I \subset W$ es un **coideal** de W si:

$$\Delta(I) \subset I \otimes W + W \otimes I \text{ y } \varepsilon(I) = 0.$$

Proposición 2.1.16. Si (W, Δ, ε) es una \mathbb{K} -coálgebra e I es un coideal de W , entonces W/I es una \mathbb{K} -coálgebra.

Demostración. Se considera la composición $p \circ \Delta: W \rightarrow (W \otimes W)/(I \otimes W + W \otimes I)$ en

donde p es el epimorfismo canónico:

$$\begin{aligned} p: W \otimes W &\longrightarrow (W \otimes W)/(I \otimes W + W \otimes I) \\ w_1 \otimes w_2 &\longmapsto (w_1 \otimes w_2) + (I \otimes W + W \otimes I). \end{aligned}$$

Por hipótesis, como I es un coideal, entonces $\Delta(I) \subset I \otimes W + W \otimes I$. Así, $I \subset \ker(p \circ \Delta)$. Entonces, por la propiedad universal del cociente, el siguiente diagrama es conmutativo, induciendo la aplicación $\overline{p \circ \Delta}$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{p \circ \Delta} & (W \otimes W)/(I \otimes W + W \otimes I) \\ \downarrow \pi & \searrow \exists! \overline{p \circ \Delta} & \\ W/I & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \overline{p \circ \Delta}: W/I &\longrightarrow (W \otimes W)/(I \otimes W + W \otimes I) \\ w + I &\longmapsto \Delta(w) + (I \otimes W + W \otimes I) \end{aligned}$$

Por otro lado, se considera el isomorfismo:

$$\begin{aligned} \alpha: (W \otimes W)/(I \otimes W + W \otimes I) &\longrightarrow W/I \otimes W/I \\ (w_1 \otimes w_2) + (I \otimes W + W \otimes I) &\longmapsto (w_1 + I) \otimes (w_2 + I) \end{aligned}$$

y se define la comultiplicación en W/I como:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}: W/I &\longrightarrow W/I \otimes W/I \\ w + I &\longmapsto \overline{\Delta}(w + I) := (\alpha \circ \overline{p \circ \Delta}) = \sum_{(w)} (w' + I) \otimes (w'' + I) \end{aligned}$$

que está bien definida en base a la discusión anterior.

Ahora falta por definir la counidad. De nuevo, por ser I un coideal de W , $\varepsilon(I) = 0$, por lo tanto, por la propiedad universal del cociente, el siguiente diagrama es conmutativo e induce la aplicación $\overline{\varepsilon}$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} \\ \downarrow \pi & \searrow \exists! \overline{\varepsilon} & \\ W/I & & \end{array}$$

Por lo tanto, se define la counidad en W/I de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}: W/I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ w + I &\longmapsto \varepsilon(w). \end{aligned}$$

A continuación, se comprobará que, así definidas, se verifica la conmutatividad de los Diagramas 2.4 y 2.5:

■ **Coasociatividad.**

$$\begin{aligned}
((id_{W/I} \otimes \bar{\Delta}) \circ \bar{\Delta})(w + I) &= (id_{W/I} \otimes \bar{\Delta}) \left(\sum_{(w)} (w' + I) \otimes (w'' + I) \right) \\
&= \sum_{(w)(w'')} (w' + I) \otimes ((w'')' + I) \otimes ((w'')'' + I) \\
&= (\pi \otimes \pi \otimes \pi) \left(\sum_{(w)(w'')} w' \otimes (w'')' \otimes (w'')'' \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\bar{\Delta} \otimes id_{W/I}) \circ \bar{\Delta})(w + I) &= (\bar{\Delta} \otimes id_{W/I}) \left(\sum_{(w)} (w' + I) \otimes (w'' + I) \right) \\
&= \sum_{(w)(w')} ((w')' + I) \otimes ((w')'' + I) \otimes (w'' + I) \\
&= (\pi \otimes \pi \otimes \pi) \left(\sum_{(w)(w')} (w')' \otimes (w')'' \otimes w'' \right).
\end{aligned}$$

Por ser Δ coasociativa, $\sum_{(w)(w'')} w' \otimes (w'')' \otimes (w'')'' = \sum_{(w)(w')} (w')' \otimes (w')'' \otimes w''$, lo que concluye la demostración de la coasociatividad de $\bar{\Delta}$.

■ **Counidad.**

$$\begin{aligned}
((\bar{\varepsilon} \otimes id_{C/I}) \circ \bar{\Delta})(w + I) &= (\bar{\varepsilon} \otimes id_{C/I}) \left(\sum_{(w)} (w' + I) \otimes (w'' + I) \right) \\
&= \sum_{(w)} \varepsilon(w') \otimes (w'' + I) = \sum_{(w)} (\varepsilon(w')w'') + I \\
&= \pi \left(\sum_{(w)} \varepsilon(w')w'' \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((id_{C/I} \otimes \bar{\varepsilon}) \circ \bar{\Delta})(w + I) &= (id_{C/I} \otimes \bar{\varepsilon}) \left(\sum_{(w)} (w' + I) \otimes (w'' + I) \right) \\
&= \sum_{(w)} (w' + I) \otimes \varepsilon(w'') = \sum_{(w)} (w'\varepsilon(w'')) + I \\
&= \pi \left(\sum_{(w)} w'\varepsilon(w'') \right).
\end{aligned}$$

Como ε verifica la propiedad de counidad, $\sum_{(w)} \varepsilon(w')w'' = \sum_{(w)} w'\varepsilon(w'')$, y por tanto $\bar{\varepsilon}$ verifica la propiedad de counidad.

□

2.2. Biálgebras y Producto Convolución

Las biálgebras son espacios vectoriales que presentan, simultáneamente, estructura de álgebra y de coálgebra, satisfaciendo una condición de compatibilidad entre ellas. Su estudio es el paso previo para estudiar las Álgebras de Hopf que dan nombre a este capítulo.

Lema 2.2.1. *Si (V, μ, η) es una \mathbb{K} -álgebra y (V, Δ, ε) es una \mathbb{K} -coálgebra, entonces son equivalentes:*

μ y η son morfismos de \mathbb{K} -coálgebras $\iff \Delta$ y ε son morfismos de \mathbb{K} -álgebras.

Demostración. Por ser μ y η son morfismos de \mathbb{K} -coálgebras se verifica que:

$$(\mu \otimes \mu) \circ \underbrace{[(id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes \Delta)]}_{\Delta_{V \otimes V}} = \Delta \circ \mu \quad (2.1)$$

$$\underbrace{\mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)}_{\varepsilon_{V \otimes V}} = \varepsilon \circ \mu \quad (2.2)$$

$$(\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}} = \Delta \circ \eta \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{\mathbb{K}} = id_{\mathbb{K}} = \varepsilon \circ \eta \quad (2.4)$$

siendo las condiciones (2.1) y (2.2) consecuencia de ser μ morfismo de \mathbb{K} -coálgebras y, (2.3) y (2.4) por ser η morfismo de \mathbb{K} -coálgebras. Nótese además que $\Delta_{\mathbb{K}}$ y $\varepsilon_{\mathbb{K}}$ se corresponden con la comultiplicación y counidad del Ejemplo 1 de 2.1.8.

De (2.1) y (2.3) se tiene que:

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \underbrace{[(id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes \Delta)]}_{\mu_{V \otimes V}} = \underbrace{[(\mu \otimes \mu) \circ (id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V)]}_{\mu_{V \otimes V}} \circ (\Delta \otimes \Delta)$$

$$\Delta \circ \eta = \underbrace{(\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}}}_{\eta_{V \otimes V}}$$

lo que implica que Δ es morfismo de \mathbb{K} -álgebras.

De (2.2) y (2.4) se deduce:

$$\varepsilon \circ \mu = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$$

$$\varepsilon \circ \eta = id_{\mathbb{K}} = \eta_{\mathbb{K}}$$

y, por tanto, ε es morfismo de \mathbb{K} -álgebras.

Análogamente se prueba el recíproco. □

Definición 2.2.2. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Una \mathbb{K} -biálgebra es una quintupla $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ donde:

- (V, μ, η) es una \mathbb{K} -álgebra,
- (V, Δ, ε) es una \mathbb{K} -cóalgebra,

satisfaciendo una de las dos condiciones equivalentes del Lema 2.2.1 anterior.

Observación 2.2.3. En general, cuando se enuncien resultados para biálgebras, se usará la condición de compatibilidad de que Δ, ε son morfismos de \mathbb{K} -álgebras, excepto que se especifique lo contrario.

Empleando la notación de Sweedler, esta condición significa que:

$$\sum_{(v_1 v_2)} (v_1 v_2)' \otimes (v_1 v_2)'' = \sum_{(v_1)} \sum_{(v_2)} v_1' v_2' \otimes v_1'' v_2'' \quad (2.5)$$

$$\varepsilon(v_1 v_2) = \varepsilon(v_1) \varepsilon(v_2) \quad (2.6)$$

$\forall v_1, v_2 \in V$.

Lema 2.2.4. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{K} -biálgebra, entonces son \mathbb{K} -biálgebras:

1. $V^{op} := (V, \mu^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon)$,
2. $V^{cop} := (V, \mu, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon)$,
3. $V^{op cop} := (V, \mu^{op}, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon)$.

Definición 2.2.5. Sean $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ y $(V', \mu', \eta', \Delta', \varepsilon')$ \mathbb{K} -biálgebras. Una aplicación $f: V \rightarrow V'$ es un **morfismo de \mathbb{K} -biálgebras** si es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras y de \mathbb{K} -cóalgebras.

Ejemplo 2.2.6.

1. Si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial de **dimensión finita** dotado de estructura de \mathbb{K} -biálgebra, entonces V^* también es una \mathbb{K} -biálgebra como consecuencia de las Proposiciones 2.1.11 y 2.1.12.
2. Sea (X, μ) un monoide, es decir, un par donde:
 - X es un conjunto,
 - $\mu: X \otimes X \rightarrow X$ es una operación interna, asociativa y con elemento neutro que se denotará por e .

El \mathbb{K} -espacio vectorial $\mathbb{K}[X]$ tiene estructura de cóalgebra con la comultiplicación y counidad definidas en el Ejemplo 2 de 2.1.8. Además, si se considera en $\mathbb{K}[X]$ la

multiplicación $\mu_{\mathbb{K}[X]}$ obtenida al extender μ por linealidad a todo $\mathbb{K}[X]$ y la unidad dada por:

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbb{K}[X]}: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ 1_{\mathbb{K}} &\longmapsto e,\end{aligned}$$

entonces $(\mathbb{K}[X], \mu_{\mathbb{K}[X]}, \eta_{\mathbb{K}[X]}, \Delta_{\mathbb{K}[X]}, \varepsilon_{\mathbb{K}[X]})$ es una \mathbb{K} -biálgebra.

A continuación se introduce el concepto de convolución, que permite dotar a $\text{Hom}(W, V)$ de estructura de monoide, siendo V una \mathbb{K} -álgebra y W una \mathbb{K} -coálgebra.

Definición 2.2.7. Sean (V, μ, η) una \mathbb{K} -álgebra, (W, Δ, ε) una \mathbb{K} -coálgebra y $f, g \in \text{Hom}(W, V)$. La **convolución** de f y g , que se denotará por $f * g$, viene dada por la siguiente composición:

$$W \xrightarrow{\Delta} W \otimes W \xrightarrow{f \otimes g} V \otimes V \xrightarrow{\mu} V.$$

Es decir, la convolución es una aplicación:

$$\begin{aligned}*: \text{Hom}(W, V) \otimes \text{Hom}(W, V) &\longrightarrow \text{Hom}(W, V) \\ f \otimes g &\longmapsto f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Observación 2.2.8. Con la notación de Sweedler, (2.7) significa:

$$\begin{aligned}(f * g)(w) &= (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(w) = (\mu \circ (f \otimes g)) \left(\sum_{(w)} w' \otimes w'' \right) \\ &= \mu \left(\sum_{(w)} f(w') \otimes g(w'') \right) = \sum_{(w)} f(w')g(w'').\end{aligned}$$

Proposición 2.2.9. Si (V, μ, η) es una \mathbb{K} -álgebra y (W, Δ, ε) es una \mathbb{K} -coálgebra, entonces $(\text{Hom}(W, V), *)$ es un monoide con elemento neutro $\eta \circ \varepsilon$.

Demostración. La operación interna $*$ es asociativa. En efecto:

$$\begin{array}{ccc}\text{Hom}(W, V) \otimes \text{Hom}(W, V) \otimes \text{Hom}(W, V) &\xrightarrow{* \otimes id}& \text{Hom}(W, V) \otimes \text{Hom}(W, V) \\ \downarrow id \otimes * & & \downarrow * \\ \text{Hom}(W, V) \otimes \text{Hom}(W, V) &\xrightarrow{*}& \text{Hom}(W, V)\end{array}$$

$$\begin{aligned}(* \circ (* \otimes id))(f \otimes g \otimes h)(w) &= ((f * g) * h)(w) = \sum_{(w)} (f * g)(w')h(w'') \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(w')} f((w')')g((w')'')h(w'') = \sum_{(w)} f(w')g(w'')h(w''').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(* \circ (id \otimes *))(f * g * h)(w) &= (f * (g * h))(w) = \sum_{(w)} f(w')(g * h)(w'') \\
&= \sum_{(w)} \sum_{(w'')} f(w')g((w'')')h((w'')'') = \sum_{(w)} f(w')g(w'')h(w''').
\end{aligned}$$

Por último, se verifica que $\eta \circ \varepsilon$ es el neutro para $*$, es decir, $f * (\eta \circ \varepsilon) = (\eta \circ \varepsilon) * f = f$ $\forall f \in \text{Hom}(W, V)$.

$$\begin{aligned}
(f * (\eta \circ \varepsilon))(w) &= \sum_{(w)} \mu(f(w') \otimes (\eta \circ \varepsilon)(w'')) = \sum_{(w)} f(w')\varepsilon(w'') \\
&= \sum_{(w)} f(w'\varepsilon(w'')) = f \left(\sum_{(w)} w'\varepsilon(w'') \right) \stackrel{\text{Counidad}}{=} f(w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\eta \circ \varepsilon) * f)(w) &= \sum_{(w)} \mu((\eta \circ \varepsilon)(w') \otimes f(w'')) = \sum_{(w)} \varepsilon(w')f(w'') \\
&= \sum_{(w)} f(\varepsilon(w')w'') = f \left(\sum_{(w)} \varepsilon(w')w'' \right) \stackrel{\text{Counidad}}{=} f(w).
\end{aligned}$$

□

Observación 2.2.10. Nótese que por la Proposición 2.2.9, si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{K} -biálgebra, entonces $(\text{End}(V), *)$ es un monoide.

2.3. Álgebras de Hopf

En esta última sección se estudia la noción de \mathbb{K} -Álgebra de Hopf, así como sus propiedades fundamentales. Una \mathbb{K} -Álgebra de Hopf es una \mathbb{K} -biálgebra V junto con un elemento de $\text{End}(V)$ llamado el antípodo, que satisface una cierta propiedad.

Su nombre surge en honor a los estudios realizados por Heinz Hopf en la década de los 40, aunque la definición formal de Álgebra de Hopf no aparece hasta los años 60 en los trabajos de, por un lado, Pierre Cartier, en teoría de grupos algebraicos de característica positiva, y por otro lado, de Armand Borel, en topología algebraica.

Dentro del contexto que proporcionan las Álgebras de Hopf se estudiarán, en los capítulos posteriores, las soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Definición 2.3.1. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{K} -biálgebra, el **antípodo** es un endomorfismo $S \in \text{End}(V)$ que verifica:

$$S * id_V = id_V * S = \eta \circ \varepsilon. \quad (2.8)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & V \otimes V & \xrightarrow{S \otimes id_V} & V \otimes V \\
& \nearrow \Delta & & & \searrow \mu \\
V & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & V \\
& \searrow \Delta & & & \nearrow \mu \\
& & V \otimes V & \xrightarrow{id_V \otimes S} & V \otimes V
\end{array}$$

Observación 2.3.2. Empleando la notación de Sweedler, la condición del antípodo (2.8) se puede escribir como sigue:

$$\sum_{(v)} S(v')v'' = (\eta \circ \varepsilon)(v) = \sum_{(v)} v'S(v'').$$

Lema 2.3.3. Sea $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ una \mathbb{K} -biálgebra. En caso de existir antípodo $S \in \text{End}(V)$, éste es único.

Demostración. Supongamos que existen $S_1, S_2 \in \text{End}(V)$ tal que:

$$S_1 * id_V = id_V * S_1 = \eta \circ \varepsilon \quad (2.9)$$

$$S_2 * id_V = id_V * S_2 = \eta \circ \varepsilon. \quad (2.10)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
S_1 & \underset{\eta \circ \varepsilon \text{ neutro} *}{=} S_1 * (\eta \circ \varepsilon) \underset{(2.10)}{=} S_1 * (id_V * S_2) \\
& \underset{* \text{ asociativa}}{=} (S_1 * id_V) * S_2 \underset{(2.9)}{=} (\eta \circ \varepsilon) * S_2 \underset{\eta \circ \varepsilon \text{ neutro} *}{=} S_2.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.3.4. Un **Álgebra de Hopf** es una quintupla $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ donde:

- $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{K} -biálgebra,
- $S \in \text{End}(V)$ es el antípodo.

Definición 2.3.5. Sean $(V_1, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1, S_1)$ y $(V_2, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2, S_2)$ \mathbb{K} -Álgebras de Hopf. Un **morfismo de Álgebras de Hopf** $f: V_1 \rightarrow V_2$ es un morfismo de biálgebras que verifica la propiedad siguiente:

$$S_2 \circ f = f \circ S_1.$$

Lema 2.3.6. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ es una \mathbb{K} -Álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces V^* admite estructura de \mathbb{K} -Álgebra de Hopf con antípodo S^* .

Demostración. Ya se ha visto en Ejemplo 1 de 2.2.6 que si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{K} -biálgebra de dimensión finita, entonces V^* tiene estructura de \mathbb{K} -biálgebra.

Basta con probar que S^* verifica la propiedad del antípodo (2.8). En efecto:

$$\begin{aligned} (S^* * id_{V^*})(f)(x) &= \left(\sum_{(f)} S^*(f')f'' \right) (x) = \sum_{(f)} \sum_{(x)} f'(S(x'))f''(x'') \\ &= f \left(\sum_{(x)} S(x')x'' \right) \stackrel{(2.8)}{=} f((\eta \circ \varepsilon)(x)) = (\varepsilon^* \circ \eta^*)(f)(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (id_{V^*} * S^*)(f)(x) &= \left(\sum_{(f)} f'S^*(f'') \right) (x) = \sum_{(f)} \sum_{(x)} f'(x')f''(S(x'')) \\ &= f \left(\sum_{(x)} x'S(x'') \right) \stackrel{(2.8)}{=} f((\eta \circ \varepsilon)(x)) = (\varepsilon^* \circ \eta^*)(f)(x). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.3.7. Ya se vio en el Ejemplo 2 de 2.2.6 que dado un monoide (X, μ) , entonces $\mathbb{K}[X]$ presenta estructura de \mathbb{K} -biálgebra.

Si se considera (G, \cdot) un grupo multiplicativo, en particular, es un monoide con la condición adicional de que, para cada $x \in G$, $\exists! y \in G/x \cdot y = y \cdot x = e$, siendo e el elemento neutro para la operación “ \cdot ”. En este caso, $\mathbb{K}[G]$ es un Álgebra de Hopf cuyo antípodo se obtiene a continuación.

$$\begin{aligned} (S * id_G)(x) &= (\cdot \circ (S \otimes id_G) \circ \Delta_{\mathbb{K}[G]})(x) = (\cdot \circ (S \otimes id_G))(x \otimes x) = S(x) \cdot x, \\ (\eta \circ \varepsilon)(x) &= \eta(1_{\mathbb{K}}) = e, \\ (id_G * S)(x) &= x \cdot S(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$S(x) \cdot x = e = x \cdot S(x) \implies S(x) = x^{-1} \forall x \in G.$$

Observación 2.3.8. Nótese que, si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ es una Álgebra de Hopf, en general V^{op} , V^{cop} y V^{opcop} no son Álgebras de Hopf.

En la proposición siguiente se enuncian las propiedades fundamentales del antípodo.

Proposición 2.3.9. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ es una \mathbb{K} -Álgebra de Hopf, entonces:

$$S: V \longrightarrow V^{opcop}$$

es un morfismo de biálgebras. Es decir, se verifica que:

1. $S(xy) = S(y)S(x) \quad \forall x, y \in V$ (el antípodo es antimultiplicativo).
2. $S(1_V) = 1_V$.
3. $(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{cop} \circ S$.
4. $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

Demostración. En primer lugar se demostrará que S es un morfismo de álgebras, es decir, se probará que $S \circ \eta = \eta$ y que $S \circ \mu = \mu^{op} \circ (S \otimes S)$.

Se tiene que:

$$S \circ \eta = \eta \iff S(1_V) = 1_V.$$

Por la Propiedad 2.8 del antípodo, se verifica que $S * id = \eta \circ \varepsilon$. Evaluando en $x = 1_V$ se obtiene:

$$(S * id)(1_V) = (\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta)(1_V) = (\mu \circ (S \otimes id))(1_V \otimes 1_V) = \mu(S(1_V) \otimes 1_V) = S(1_V)$$

$$(\eta \circ \varepsilon)(1_V) = \eta(1_{\mathbb{K}}) = 1_V$$

por lo tanto $S(1_V) = 1_V$.

Para probar que S es antimultiplicativa se consideran las aplicaciones $\rho, \nu \in \text{Hom}(V \otimes V, V)$:

$$\nu: V \otimes V \longrightarrow V$$

$$x \otimes y \longmapsto \nu(x \otimes y) := (\mu^{op} \circ (S \otimes S))(x \otimes y) = S(y)S(x)$$

$$\rho: V \otimes V \longrightarrow V$$

$$x \otimes y \longmapsto \rho(x \otimes y) := (S \circ \mu)(x \otimes y) = S(xy).$$

Se verifica que $\mu * \nu = \eta \circ \varepsilon_{V \otimes V} = \rho * \mu$. En efecto:

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)(x \otimes y) &= (\mu \circ (\mu \otimes \nu) \circ \Delta_{V \otimes V})(x \otimes y) = (\mu \circ (\mu \otimes \nu)) \left(\sum_{(x)(y)} x' \otimes y' \otimes x'' \otimes y'' \right) \\ &= \mu \left(\sum_{(x)(y)} \mu(x' \otimes y') \otimes \nu(x'' \otimes y'') \right) = \mu \left(\sum_{(x)(y)} x' y' \otimes S(y'') S(x'') \right) \\ &= \sum_{(x)(y)} x' y' S(y'') S(x'') = \sum_{(x)} x' \left(\sum_{(y)} y' S(y'') \right) S(x'') \stackrel{(2.8)}{=} \sum_{(x)} x' (\eta \circ \varepsilon)(y) S(x'') \\ &\stackrel{\text{Propiedad de unidad 2.2}}{=} \sum_{(x)} x' S(x'') (\eta \circ \varepsilon)(y) \stackrel{(2.8)}{=} (\eta \circ \varepsilon)(x) (\eta \circ \varepsilon)(y) \\ &= \eta(\varepsilon(x)) \varepsilon(y) \eta(1_{\mathbb{K}}) = \eta(\varepsilon(x) \varepsilon(y)) 1_V = \eta(\varepsilon_{V \otimes V}(x \otimes y)) = (\eta \circ \varepsilon_{V \otimes V})(x \otimes y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho * \mu)(x \otimes y) &= (\mu \circ (\rho \otimes \mu) \circ \Delta_{V \otimes V})(x \otimes y) = (\mu \circ (\rho \otimes \mu)) \left(\sum_{(x)(y)} x' \otimes y' \otimes x'' \otimes y'' \right) \\
&= \mu \left(\sum_{(x)(y)} \rho(x' \otimes y') \otimes \mu(x'' \otimes y'') \right) = \mu \left(\sum_{(x)(y)} S(x'y') \otimes x''y'' \right) \\
&= \sum_{(x)(y)} S(x'y')x''y'' \stackrel{\Delta \text{ morfismo de álgebras}}{=} \sum_{(xy)} S((xy)')(xy)'' \stackrel{(2.8)}{=} \eta(\varepsilon(xy)) \\
&\stackrel{\varepsilon \text{ morfismo de álgebras}}{=} \eta(\varepsilon(x)\varepsilon(y)) = (\eta \circ \varepsilon_{V \otimes V})(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\text{Hom}(V \otimes V, V)$ es un monoide con unidad $\eta \circ \varepsilon_{V \otimes V}$, se tiene que $\nu = \rho$.

Además, S es morfismo de coálgebras, es decir, $(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{cop} \circ S$ y $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

Probar que $(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{cop} \circ S$ es equivalente a demostrar que $(S \otimes S) \circ \Delta^{cop} = \Delta \circ S$. Se consideran $\alpha, \beta \in \text{Hom}(V, V \otimes V)$:

$$\begin{aligned}
\alpha: V &\longrightarrow V \otimes V \\
x &\longmapsto \alpha(x) := (\Delta \circ S)(x) \\
\beta: V &\longrightarrow V \otimes V \\
x &\longmapsto \beta(x) := ((S \otimes S) \circ \Delta^{cop})(x).
\end{aligned}$$

Entonces, de nuevo, como $\text{Hom}(V, V \otimes V)$ es un monoide con unidad $\eta_{V \otimes V} \circ \varepsilon$, si se demuestra que

$$\alpha * \Delta = \eta_{V \otimes V} \circ \varepsilon = \Delta * \beta$$

se tiene que $\alpha = \beta$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(\alpha * \Delta)(x) &= (\mu_{V \otimes V} \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) = \sum_{(x)} (\mu_{V \otimes V} \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (S \otimes id))(x' \otimes x'') \\
&= \sum_{(x)} (\mu_{V \otimes V} \circ (\Delta \otimes \Delta))(S(x') \otimes x'') \stackrel{\Delta \text{ morfismo de álgebras}}{=} \sum_{(x)} (\Delta \circ \mu)(S(x') \otimes x'') \\
&= \Delta \left(\sum_{(x)} S(x')x'' \right) \stackrel{(2.8)}{=} \Delta((\eta \circ \varepsilon)(x)) \stackrel{\Delta \text{ morfismo de álgebras}}{=} ((\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}})(\varepsilon(x)) \\
&= (\eta \otimes \eta)(\varepsilon(x)1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon(x)\eta(1_{\mathbb{K}}) \otimes \eta(1_{\mathbb{K}}) = \eta_{V \otimes V}(\varepsilon(x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta * \beta)(x) &= (\mu_{V \otimes V} \circ (\Delta \otimes \beta) \circ \Delta)(x) = \sum_{(x)} \mu_{V \otimes V}(\Delta(x') \otimes [(S \otimes S) \circ \Delta^{cop}](x'')) \\
&= \sum_{(x)} \mu_{V \otimes V}(x' \otimes x'' \otimes S(x''')) \otimes S(x''') = \sum_{(x)} x' S(x''') \otimes x'' S(x''') \\
&\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{(x)} x' S(x''') \otimes \varepsilon(x'') \eta(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{(x)} x' \varepsilon(x'') S(x''') \otimes \eta(1_{\mathbb{K}}) \\
&\stackrel{\text{Counidad (2.5)}}{=} \sum_{(x)} x' S(x'') \otimes \eta(1_{\mathbb{K}}) = \varepsilon(x) \eta(1_{\mathbb{K}}) \otimes \eta(1_{\mathbb{K}}) = \eta_{V \otimes V}(\varepsilon(x)).
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $\alpha = \beta$.

Finalmente, se demuestra que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S(x)) &\stackrel{\text{Counidad}}{=} \varepsilon \left(S \left(\sum_{(x)} \varepsilon(x') x'' \right) \right) = \varepsilon \left(\sum_{(x)} \varepsilon(x') S(x'') \right) = \sum_{(x)} \varepsilon(x') \varepsilon(S(x'')) \\
&\stackrel{\varepsilon \text{ morfismo de álgebras}}{=} \varepsilon \left(\sum_{(x)} x' S(x'') \right) \stackrel{(2.8)}{=} \varepsilon((\eta \circ \varepsilon)(x)) = (\varepsilon \circ \eta)(\varepsilon(x)) \stackrel{\varepsilon \circ \eta = id_{\mathbb{K}}}{=} \varepsilon(x).
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.10. *Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ es una \mathbb{K} -Álgebra de Hopf, entonces se tiene que $V^{op\ cop} := (V, \mu^{op}, \eta, \Delta^{cop}, \eta, S)$ es una \mathbb{K} -Álgebra de Hopf.*

Si además $S \in \text{Aut}(V)$, es decir, S es isomorfismo, entonces $V^{op} := (V, \mu^{op}, \eta, \Delta, \eta, S^{-1})$ y $V^{cop} := (V, \mu, \eta, \Delta^{cop}, \eta, S^{-1})$ son \mathbb{K} -Álgebras de Hopf.

Proposición 2.3.11. *Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf, entonces:*

a) *Son equivalentes:*

$$i. S \circ S = id_V \Leftrightarrow ii. \sum_{(x)} S(x'') x' = (\eta \circ \varepsilon)(x) \Leftrightarrow iii. \sum_{(x)} x'' S(x') = (\eta \circ \varepsilon)(x).$$

b) *Si V es conmutativa (Diagrama 2.3) o coconmutativa (Diagrama 2.6), entonces se tiene que $S \circ S = id_V$.*

Demostración.

a)

$i. \Rightarrow ii.$

$$\begin{aligned} \sum_{(x)} S(x'')x' &\stackrel{S^2=id_V}{=} S^2 \left(\sum_{(x)} S(x'')x' \right) = S \left(\sum_{(x)} S(S(x'')x') \right) \\ &\stackrel{S \text{ antimultiplicativa}}{=} S \left(\sum_{(x)} S(x')S^2(x'') \right) \stackrel{S^2=id_V}{=} S \left(\sum_{(x)} S(x')x'' \right) \\ &\stackrel{(2.8)}{=} S((\eta \circ \varepsilon)(x)) \stackrel{S \circ \eta = \eta}{=} (\eta \circ \varepsilon)(x). \end{aligned}$$

$ii. \Rightarrow i.$

Por la unicidad de la inversa para la convolución, basta con probar que $S * S^2 = \eta \circ \varepsilon \Rightarrow S^2 = id$.

$$\begin{aligned} (S * S^2)(x) &= \sum_{(x)} S(x')S^2(x'') \stackrel{S \text{ antimultiplicativa}}{=} \sum_{(x)} S(S(x'')x') \\ &= S \left(\sum_{(x)} S(x'')x' \right) \stackrel{(\text{Hip})}{=} S((\eta \circ \varepsilon)(x)) \stackrel{S \circ \eta = \eta}{=} (\eta \circ \varepsilon)(x). \end{aligned}$$

Análogamente, se puede demostrar $i. \Leftrightarrow iii.$

b) Si V es conmutativa, es decir, $\mu = \mu \circ \tau_{V,V} = \mu^{op}$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{(x)} S(x'')x' &= (\mu^{op} \circ (id_V \otimes S) \circ \Delta)(x) \\ &\stackrel{\mu = \mu^{op}}{=} (\mu \circ (id_V \otimes S) \circ \Delta)(x) = \sum_{(x)} x'S(x'') \stackrel{(2.8)}{=} (\eta \circ \varepsilon)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifican las hipótesis del apartado $ii.$ de a). Por otro lado, si V es coconmutativa, es decir, si $\Delta = \tau_{V,V} \circ \Delta = \Delta^{cop}$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{(x)} S(x'')x' &= (\mu \circ (S \otimes id_V) \circ \Delta^{cop})(x) \\ &\stackrel{\Delta = \Delta^{cop}}{=} (\mu \circ (S \otimes id_V) \circ \Delta)(x) = \sum_{(x)} S(x')x'' \stackrel{(2.8)}{=} (\eta \circ \varepsilon)(x). \end{aligned}$$

De nuevo, se verifican las hipótesis del apartado $ii.$ de a).

□

Capítulo 3

Ecuación Cuántica de Yang-Baxter

De ahora en adelante el trabajo se centrará en el estudio de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, tratando de analizar sus soluciones. Aún actualmente, la clasificación completa de sus soluciones sigue siendo un problema abierto y sin resolver, a pesar de la sencillez de ésta.

En primer lugar, se comenzará definiendo la ecuación. Luego se estudiarán las Álgebras de Hopf Trenzadas para, finalmente, alcanzar el resultado fundamental de este capítulo, donde se probará que los módulos sobre Álgebras de Hopf Trenzadas proporcionan soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

3.1. La Ecuación Cuántica de Yang-Baxter

Definición 3.1.1. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $c \in \text{Aut}(V \otimes V)$, c se dice **R -matriz** cuando c es solución de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, es decir, cuando se cumple que:

$$(c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) = (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c). \quad (3.1)$$

Notación 3.1.2. En lo que sigue, para simplificar, se hará referencia a la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter con la abreviatura **QYBE**, que son las siglas de su nombre en inglés, *Quantum Yang-Baxter Equation*.

Observación 3.1.3. Como se puede observar en (3.1), se trata de una igualdad de aplicaciones de $V \otimes V \otimes V$ en $V \otimes V \otimes V$. Es una ecuación sencilla que, de forma gráfica, se puede representar como sigue:

3.2. Biálgebras Trenzadas

En primer lugar, se define un concepto previo a las Biálgebras Trenzadas, las Biálgebras Cuasi-Coconmutativas.

Definición 3.2.1. Sea $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ una \mathbb{K} -biálgebra. V es una \mathbb{K} -biálgebra cuasi-coconmutativa si $\exists R \in V \otimes V$ invertible verificando:

$$\Delta^{cop}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \quad \forall x \in V. \quad (3.2)$$

R se denomina **R -matriz universal**.

Observación 3.2.2.

1. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una \mathbb{K} -biálgebra coconmutativa, entonces V es cuasi-coconmutativa con R -matriz universal $R = 1_V \otimes 1_V$. En efecto:

$$R\Delta(x)R^{-1} \underset{R=R^{-1}=1_V \otimes 1_V}{=} \sum_{(x)} x' \otimes x'' \underset{V \text{ coconmutativa}}{=} \sum_{(x)} x'' \otimes x' = \Delta^{cop}(x).$$

2. Con la notación de Sweedler, se puede desarrollar la expresión (3.2) como sigue a continuación. Sea $R = \sum_i s_i \otimes t_i$ entonces:

$$\Delta^{cop}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \quad \forall x \in V \Leftrightarrow \Delta^{cop}(x)R = R\Delta(x) \quad \forall x \in V.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i,(x)} x'' s_i \otimes x' t_i = \sum_{i,(x)} s_i x' \otimes t_i x''. \quad (3.3)$$

Definición 3.2.3. Sea $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ una \mathbb{K} -álgebra de Hopf. V es cuasi-coconmutativa si la biálgebra subyacente es cuasi-coconmutativa.

Notación 3.2.4. Sea $x \in V \otimes \cdots \otimes V$ $p > 1$, entonces x será un elemento de la forma $x = \sum_i x_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_i^{(p)}$. Dada una p -tupla (k_1, \dots, k_p) de elementos de $\{1, \dots, n\}$ con $p \leq n$, definimos el elemento $x_{k_1 \dots k_p} \in V \otimes \cdots \otimes V$ como:

$$x_{k_1 \dots k_p} = \sum_i y_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes y_i^{(p)}$$

donde:

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} x_i^{(j)} & \text{si } k_j = k \\ 1_V & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall k = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, p.$$

Por ejemplo, si se considera una biálgebra cuasi-coconmutativa con R -matriz universal $R = \sum_i s_i \otimes t_i$, entonces:

$$R_{32} = \sum_i 1_V \otimes t_i \otimes s_i.$$

Definición 3.2.5. Sea $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, R)$ una \mathbb{K} -biálgebra cuasi-coconmutativa, se dirá que V es **trenzada** si la R -matriz universal R satisface las siguientes condiciones:

$$(\Delta \otimes id_V)(R) = R_{13}R_{23} \quad (3.4)$$

$$(id_V \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}. \quad (3.5)$$

Observación 3.2.6. Con la notación de Sweedler, si $R = \sum_i s_i \otimes t_i$, las condiciones (3.4) y (3.5) se pueden escribir como sigue:

$$\sum_{i, (s_i)} (s_i)' \otimes (s_i)'' \otimes t_i = \left(\sum_i s_i \otimes 1_V \otimes t_i \right) \left(\sum_j 1_V \otimes s_j \otimes t_j \right) = \sum_{i,j} s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j. \quad (3.6)$$

$$\sum_{i, (t_i)} s_i \otimes (t_i)' \otimes (t_i)'' = \left(\sum_i s_i \otimes 1_V \otimes t_i \right) \left(\sum_j s_j \otimes t_j \otimes 1_V \right) = \sum_{i,j} s_i s_j \otimes t_j \otimes t_i. \quad (3.7)$$

Definición 3.2.7. Sea $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ una \mathbb{K} -álgebra de Hopf cuasi-coconmutativa con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$, se dirá que V es **trenzada** si la biálgebra subyacente es **trenzada**.

Lema 3.2.8.

1. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf cuasi-coconmutativa con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$, entonces son \mathbb{K} -álgebras de Hopf cuasi-coconmutativas:

- $V^{op} = (V, \mu^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon, S^{-1}, S, R^{-1})$,
- $V^{cop} = (V, \mu, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1}, S, R^{-1})$,
- $\bar{V}^{cop} = (V, \mu, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1}, S, \tau_{V,V}(R))$.

2. Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf **trenzada** con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$, entonces, \bar{V}^{cop} es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf **trenzada**.

Demostración.

1.

En primer lugar nótese que por el Corolario 2.3.10 y por ser S invertible, entonces V^{op} , V^{cop} y \bar{V}^{cop} son \mathbb{K} -álgebras de Hopf.

Además,

$$\Delta_{\text{Hip}}^{cop}(x) = \mu(R \otimes \mu(\Delta(x) \otimes R^{-1})) = \mu^{op}(\mu(\Delta(x) \otimes R^{-1}) \otimes R) = \mu^{op}(\mu^{op}(R^{-1} \otimes \Delta(x)) \otimes R)$$

ya que, por hipótesis,

$$\Delta^{cop}(x) = R\Delta(x)R^{-1} = \mu(\mu(R \otimes \Delta(x)) \otimes R^{-1}) = \mu(R \otimes \mu(\Delta(x) \otimes R^{-1}))$$

y, por lo tanto, V^{op} es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf cuasi-coconmutativa.

Análogamente, se demuestra que también lo son V^{cop} y \overline{V}^{cop} .

2.

Como V es un \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada, entonces se tienen las igualdades $(\Delta \otimes id_V)(R) = R_{13}R_{23}$ y $(id_V \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$. Así, se obtiene:

▪

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id_V)(R) &= R_{13}R_{23} \stackrel{(12)}{\Leftrightarrow} (\Delta^{cop} \otimes id_V)(R) = R_{23}R_{13} \\ &\stackrel{(123)}{\Leftrightarrow} (id_V \otimes \Delta^{cop})(R) = (\tau_{V,V}(R))_{13}(\tau_{V,V}(R))_{12}. \end{aligned}$$

▪

$$\begin{aligned} (id_V \otimes \Delta)(R) &= R_{13}R_{12} \stackrel{(23)}{\Leftrightarrow} (id_V \otimes \Delta^{cop})(R) = R_{12}R_{13} \\ &\stackrel{(321)}{\Leftrightarrow} (\Delta^{cop} \otimes id_V)(R) = (\tau_{V,V}(R))_{13}(\tau_{V,V}(R))_{23}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \overline{V}^{cop} es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada. \square

A continuación se demostrará uno de los teoremas relevantes de la presente sección, donde se enunciarán las propiedades fundamentales de las biálgebras trenzadas.

Teorema 3.2.9. *Sea $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, R)$ una \mathbb{K} -biálgebra trenzada. Se verifican:*

a) *La R -matriz universal R satisface:*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (3.8)$$

b)

$$(\varepsilon \otimes id_V)(R) = 1_V = (id_V \otimes \varepsilon)(R). \quad (3.9)$$

c) *Si además V es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf con antípodo $S \in \text{Aut}(V)$, entonces:*

•

$$(S \otimes id_V)(R) = R^{-1} = (id_V \otimes S^{-1})(R). \quad (3.10)$$

•

$$(S \otimes S)(R) = R. \quad (3.11)$$

Demostración.

a)

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{13}R_{23} &\stackrel{(3.4)}{=} R_{12}(\Delta \otimes id_V)(R) = (\Delta^{cop} \otimes id_V)(R)R_{12} \\
&= ((\tau_{V,V} \circ \Delta) \otimes id_V)(R)R_{12} = ((\tau_{V,V} \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes id_V))(R)R_{12} \\
&\stackrel{(3.4)}{=} (\tau_{V,V} \otimes id_V)(R_{13}R_{23})R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
R &\stackrel{\varepsilon \otimes id_V \circ \Delta = id_V}{=} (((\varepsilon \otimes id_V) \circ \Delta) \otimes id_V)(R) = ((\varepsilon \otimes id_V \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes id_V))(R) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} (\varepsilon \otimes id_V \otimes id_V)(R_{13}R_{23}) = (\varepsilon \otimes id_V)(R)R.
\end{aligned}$$

Por ser R invertible, se concluye entonces que $RR^{-1} = (\varepsilon \otimes id_V)(R) = 1_V$. De forma análoga:

$$\begin{aligned}
R &\stackrel{id_V \otimes \varepsilon \circ \Delta = id_V}{=} (id_V \otimes ((id_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta))(R) = ((id_V \otimes id_V \otimes \varepsilon) \circ (id_V \otimes \Delta))(R) \\
&\stackrel{(3.5)}{=} (id_V \otimes id_V \otimes \varepsilon)(R_{13}R_{12}) = (id_V \otimes \varepsilon)(R)R
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $RR^{-1} = (id_V \otimes \varepsilon)(R) = 1_V$.

c)

- Sea V una \mathbb{K} -álgebra de Hopf con antípodo S , entonces, por (2.8), se tiene que:

$$\begin{aligned}
(S * id_V)(x) &= (\mu \circ (S \otimes id_V) \circ \Delta)(x) = (\eta \circ \varepsilon)(x) \quad \forall x \in V \\
&\Rightarrow ((\mu \otimes id_V) \circ (S \otimes id_V \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes id_V))(R) = ((\eta \circ \varepsilon) \otimes id_V)(R) \\
&\stackrel{(3.4)}{\Leftrightarrow} ((\mu \otimes id_V) \circ (S \otimes id_V \otimes id_V))(R_{13}R_{23}) \stackrel{(\eta \circ \varepsilon)(x) = \varepsilon(x)1_V}{=} (\varepsilon \otimes id_V)(R) \stackrel{b)}{=} 1_V \\
&\Leftrightarrow (S \otimes id_V)(R)R = 1_V
\end{aligned}$$

y así $(S \otimes id_V)(R) = R^{-1}$.

Por el Lema 3.2.8,

$$(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R) \text{ trenzada} \Rightarrow (V, \mu, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1}, S, \tau_{V,V}(R)) \text{ trenzada.}$$

Entonces, particularizando el resultado previo para este álgebra de Hopf:

$$(S^{-1} \otimes id_V)(\tau_{V,V}(R)) = (\tau_{V,V}(R))^{-1} \Leftrightarrow (id_V \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}.$$

•

$$\begin{aligned}
(S \otimes S)(R) &= ((id_V \otimes S) \circ (S \otimes id_V))(R) \stackrel{(3.4)}{=} (id_V \otimes S)(R^{-1}) \\
&= ((id_V \otimes S) \circ (id_V \otimes S^{-1}))(R) = (id_V \otimes (S \circ S^{-1}))(R) \\
&= (id_V \otimes id_V)(R) = R.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.2.10. Con la notación de Sweedler, si $R = \sum_i s_i \otimes t_i$, las igualdades (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) se pueden expresar como sigue:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \Leftrightarrow \sum_{i,j,k} s_i s_j \otimes t_i s_k \otimes t_j t_k = \sum_{i,j,k} s_j s_k \otimes s_i t_k \otimes t_i t_j.$$

$$(\varepsilon \otimes id_V)(R) = 1_V = (id_V \otimes \varepsilon)(R) \Leftrightarrow \sum_i \varepsilon(s_i) t_i = 1_V = \sum_i s_i \varepsilon(t_i).$$

$$(S \otimes id_V)(R) = R^{-1} = (id_V \otimes S^{-1})(R) \Leftrightarrow \sum_i S(s_i) \otimes t_i = R^{-1} = \sum_i s_i \otimes S^{-1}(t_i).$$

$$(S \otimes S)(R) = R \Leftrightarrow \sum_i S(s_i) \otimes S(t_i) = \sum_i s_i \otimes t_i.$$

3.3. Álgebras de Hopf Trenzadas y R-matrices

En esta última sección del capítulo se analizará como los módulos sobre una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ generan soluciones de QYBE.

3.3.1. Módulos sobre una Biálgebra

Sean (A, μ, η) una \mathbb{K} -álgebra y U, V A -módulos. $U \otimes V$ admite estructura de $A \otimes A$ -módulo con la siguiente operación:

$$\begin{aligned}
\varphi: (A \otimes A) \times (U \otimes V) &\longrightarrow U \otimes V \\
((a \otimes a'), (u \otimes v)) &\longmapsto \varphi_U(a, u) \otimes \varphi_V(a', v)
\end{aligned}$$

en donde φ_U y φ_V son las operaciones de U y V como A -módulos, respectivamente.

La estructura de biálgebra, que compatibiliza un álgebra con una coálgebra, permite que el producto tensorial de dos módulos sobre una biálgebra adquiera estructura de módulo sobre ella misma. Esto es posible gracias a la comultiplicación de la biálgebra como se verá a continuación.

Sea $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ una \mathbb{K} -biálgebra y (U, φ_U) , (V, φ_V) B -módulos. $U \otimes V$ admite estructura de B -módulo con la siguiente operación:

$$\begin{aligned} \varphi_{U \otimes V}: B \times (U \otimes V) &\longrightarrow U \otimes V \\ (b, u \otimes v) &\longmapsto \varphi(\Delta(b), u \otimes v) = \sum_{(b)} b' u \otimes b'' v. \end{aligned}$$

Este no sería posible sin la estructura de coalgebra, que permite, a través de la multiplicación, *duplicar* un elemento.

3.3.2. Soluciones de QYBE. R-matrices

Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$ y V, W son H -módulos, entonces la R -matriz universal $R = \sum_i s_i \otimes t_i \in H \otimes H$ permite definir el siguiente isomorfismo natural de H -módulos:

$$\begin{aligned} c_{V,W}^R: V \otimes W &\longrightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\longmapsto c_{V,W}^R(v \otimes w) := \tau_{V,W}(R(v \otimes w)) = \sum_i t_i w \otimes s_i v \end{aligned}$$

siendo su inverso:

$$\begin{aligned} (c_{V,W}^R)^{-1}: W \otimes V &\longrightarrow V \otimes W \\ w \otimes v &\longmapsto (c_{V,W}^R)^{-1}(w \otimes v) := R^{-1} \tau_{W,V}(w \otimes v). \end{aligned}$$

Empleando la notación de Sweedler, se escribirá:

$$(c_{V,W}^R)^{-1}(w \otimes v) := R^{-1} \tau_{W,V}(w \otimes v) \stackrel{(3.10)}{=} (S \otimes id_V)(R)(v \otimes w) = \sum_i S(s_i) v \otimes t_i w.$$

Proposición 3.3.1. *En la hipótesis anteriores, se verifica:*

a) $c_{V,W}^R$ es un isomorfismo de H -módulos.

b) Si U, V, W son H -módulos, entonces se verifican las siguientes identidades:

- $c_{U \otimes V, W}^R = (c_{U,W}^R \otimes id_V) \circ (id_U \otimes c_{V,W}^R)$,
- $c_{U, V \otimes W}^R = (id_V \otimes c_{U,W}^R) \circ (c_{U,V}^R \otimes id_W)$,
- $(c_{V,W}^R \otimes id_U) \circ (id_V \otimes c_{U,W}^R) \circ (c_{U,V}^R \otimes id_W) = (id_W \otimes c_{U,V}^R) \circ (c_{U,W}^R \otimes id_V) \circ (id_U \otimes c_{V,W}^R)$.

Demostración. Sólo se desarrollará la prueba del último punto del apartado b), por su relevancia en las soluciones de la QYBE. Se denotará por f_1 al lado izquierdo de la igualdad, mientras que f_2 será el lado derecho.

Sea un elemento $x \otimes y \otimes z \in U \otimes V \otimes W$ arbitrario, se tiene:

$$\begin{aligned} f_1(x \otimes y \otimes z) &= ((c_{V,W}^R \otimes id_U) \circ (id_V \otimes c_{U,W}^R)) \left(\sum_i t_i y \otimes s_i x \otimes z \right) \\ &= (c_{V,W}^R \otimes id_U) \left(\sum_{i,j} t_i y \otimes t_j z \otimes s_j s_i x \right) = \sum_{i,j,k} t_k t_j z \otimes s_k t_i y \otimes s_j s_i x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x \otimes y \otimes z) &= ((id_W \otimes c_{U,V}^R) \circ (c_{U,W}^R \otimes id_V)) \left(\sum_i x \otimes t_i z \otimes s_i y \right) \\ &= (id_W \otimes c_{U,V}^R) \left(\sum_{i,j} t_j t_i z \otimes s_j x \otimes s_i y \right) = \sum_{i,j,k} t_j t_i z \otimes t_k s_i y \otimes s_k s_j x, \end{aligned}$$

de donde, como consecuencia de la expresión (3.8), se concluye que $f_1 = f_2$. \square

Corolario 3.3.2. *Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$ y V es un H -módulo, entonces $c_{V,V}^R$ es una R -matriz, es decir, una solución de la QYBE.*

Demostración. Consecuencia de última propiedad de la Proposición 3.3.1, particularizando al caso $U = V = W$. \square

Ejemplo 3.3.3 (Caso particular). Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$ coconmutativa, es decir, $\tau_{V,V} \circ \Delta = \Delta$, entonces $R = 1_H \otimes 1_H$ es R -matriz universal y, por lo tanto:

$$\begin{aligned} c_{V,V}^R: V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \\ v \otimes v' &\longmapsto \tau_{V,V}(R(v \otimes v')) \underset{R=1_H \otimes 1_H}{=} \tau_{V,V}(v \otimes v') = v' \otimes v. \end{aligned}$$

En este caso, $c_{V,V}^R = \tau_{V,V}$.

Capítulo 4

Doble de Drinfeld

En el capítulo anterior se demostró que si H es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada, los H -módulos proporcionan soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

La cuestión es ahora encontrar tales estructuras ya que no se trata de una tarea fácil encontrar ejemplos ilustrativos de Álgebras de Hopf trenzadas. Drinfeld, en el año 1986, ideó un ingenioso método para su obtención, el *Doble de Drinfeld*, que tomada un Álgebra de Hopf de dimensión finita construye, a partir de ella, un Álgebra de Hopf trenzada.

En este capítulo se tratará de detallar dicha construcción, concluyendo que dada un Álgebra de Hopf de dimensión finita, su Doble de Drinfeld es trenzada y, por lo tanto, genera una solución de QYBE, es decir, genera una R -matriz.

4.1. Producto bicruzado de grupos

La construcción del Doble de Drinfeld es en esencia una generalización de la construcción del producto bicruzado de grupos. Por ello, se empezará describiendo éste.

Definición 4.1.1. Sea (G, \odot) un grupo con elemento neutro e y X un conjunto, una aplicación $\alpha: G \times X \rightarrow X$ es una **acción por la izquierda** del grupo G sobre el conjunto X si:

1. $\alpha(e, x) = x \quad \forall x \in X$.
2. $\alpha(g \odot g', x) = \alpha(g, \alpha(g', x)) \quad \forall g, g' \in G, \forall x \in X$.

Análogamente, $\beta: X \times G \rightarrow X$ es una **acción por la derecha** del grupo G sobre el conjunto X si:

1. $\beta(x, e) = x \quad \forall x \in X$.

$$2. \beta(x, g \odot g') = \beta(\beta(x, g), g') \quad \forall g, g' \in G, \forall x \in X.$$

Notación 4.1.2. En lo que sigue, se denotará:

- $\alpha(g, x) = g \cdot x \quad \forall x \in X, \forall g \in G.$
- $\beta(x, g) = x^g \quad \forall x \in X, \forall g \in G.$

Definición 4.1.3. Sean H, K grupos, (H, K) son **grupos emparejados** si existe $\alpha: K \times H \rightarrow H$ acción por la izquierda de K en H , y $\beta: K \times H \rightarrow K$ acción por la derecha de H en K , verificando:

$$(kk')^h = k^{k' \cdot h} k'^h \quad (4.1)$$

$$k \cdot (hh') = (k \cdot h)(k^h \cdot h') \quad (4.2)$$

$$k \cdot 1_H = 1_H \quad (4.3)$$

$$1_K^h = 1_K \quad (4.4)$$

$$\forall k, k' \in K, \forall h, h' \in H.$$

Proposición 4.1.4. Si (H, K) son grupos emparejados, entonces existe una única estructura de grupo en $H \times K$ con neutro $(1_H, 1_K)$ para la siguiente operación

$$(h, k)(h', k') := (h(k \cdot h'), k^{h'} k')$$

$$\forall h, h' \in H, \forall k, k' \in K.$$

Esta estructura de grupo se denomina **producto bicruzado de los grupos H y K** , que se denotará por $H \bowtie K$.

La demostración de la proposición se puede encontrar en [12], en el capítulo IX, página 201.

4.2. Producto bicruzado de biálgebras

Definición 4.2.1. Sea B una \mathbb{K} -biálgebra y C una \mathbb{K} -coálgebra, C es un **módulo-coálgebra** por la izquierda [resp. por la derecha] sobre B si existe un morfismo de \mathbb{K} -coálgebras $f: B \otimes C \rightarrow C$ [resp. $f: C \otimes B \rightarrow C$] dotando a C de estructura de B -módulo por la izquierda [resp. por la derecha].

Observación 4.2.2. La definición anterior puede enunciarse de la siguiente forma equivalente.

Si B una \mathbb{K} -biálgebra y C una \mathbb{K} -coálgebra tal que C y $C \otimes C$ son B -módulos junto con las operaciones externas definidas en la Sección 3.3.1, entonces se dice que C es un B -módulo-coálgebra si Δ_C es un morfismo de B -módulos, es decir:

$$\Delta_C(\varphi_C(b \otimes c)) = \varphi_{C \otimes C}(b \otimes \Delta_C(c))$$

y además:

$$\varepsilon_C(\varphi_C(b \otimes c)) = \varepsilon_B(b)\varepsilon_C(c).$$

Definición 4.2.3. Sean $(B_1, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ y $(B_2, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ \mathbb{K} -biálgebras, (B_1, B_2) son **biálgebras emparejadas** si existen aplicaciones lineales

$$\alpha: B_2 \otimes B_1 \longrightarrow B_1$$

$$a \otimes x \longmapsto a \cdot x$$

$$\beta: B_2 \otimes B_1 \longrightarrow B_2$$

$$a \otimes x \longmapsto a^x$$

haciendo que B_1 sea un módulo-coálgebra por la izquierda sobre B_2 , B_2 un módulo-coálgebra por la derecha sobre B_1 y, además, se verifiquen las siguientes condiciones:

$$a \cdot (xy) = \sum_{(a)(x)} (a' \cdot x')(a''^{x''} \cdot y) \quad (4.5)$$

$$a \cdot 1_{B_1} = \varepsilon_2(a)1_{B_1} \quad (4.6)$$

$$(ab)^x = \sum_{(b)(x)} a^{b' \cdot x'} b''^{x''} \quad (4.7)$$

$$1_{B_2}^x = \varepsilon_1(x)1_{B_2} \quad (4.8)$$

$$\sum_{(a)(x)} a^{x'} \otimes a'' \cdot x'' = \sum_{(a)(x)} a''^{x''} \otimes a' \cdot x' \quad (4.9)$$

$\forall x, y \in B_1, \forall a, b \in B_2.$

Observación 4.2.4.

1. Nótese que, si B_1 y B_2 son coconmutativas, es decir, $\tau_{B_i, B_i} \circ \Delta_i = \Delta_i \forall i = 1, 2$, entonces (4.9) se verifica trivialmente. En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{(a)(x)} a'^{x'} \otimes a'' \cdot x'' &= [(\beta \otimes \alpha) \circ (id_{B_2} \otimes \tau_{B_2, B_1} \otimes id_{B_1}) \circ (\Delta_2 \otimes \Delta_1)](a \otimes x) \\
&= [(\beta \otimes \alpha) \circ (id_{B_2} \otimes \tau_{B_2, B_1} \otimes id_{B_1})] \left(\sum_{(a)(x)} a' \otimes a'' \otimes x' \otimes x'' \right) \\
&\stackrel{\text{Coconmutatividad}}{=} [(\beta \otimes \alpha) \circ (id_{B_2} \otimes \tau_{B_2, B_1} \otimes id_{B_1})] \left(\sum_{(a)(x)} a'' \otimes a' \otimes x'' \otimes x' \right) \\
&= (\beta \otimes \alpha) \left(\sum_{(a)(x)} a'' \otimes x'' \otimes a' \otimes x' \right) = \sum_{(a)(x)} a''^{x''} \otimes a' \cdot x'.
\end{aligned}$$

2. Además, dado que α y β son morfismos de \mathbb{K} -coálgebras se verifica que:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(a \cdot x) &= [\alpha \otimes \alpha \circ \Delta_{B_2 \otimes B_1}](a \otimes x) \\
&= (\alpha \otimes \alpha) \left(\sum_{(a)(x)} a' \otimes x' \otimes a'' \otimes x'' \right) = \sum_{(a)(x)} a' \cdot x' \otimes a'' \cdot x'' \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1(a \cdot x) = \varepsilon_{B_2 \otimes B_1}(a \otimes x) = \varepsilon_2(a) \varepsilon_1(x) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2(a^x) &= [\beta \otimes \beta \circ \Delta_{B_2 \otimes B_1}](a \otimes x) \\
&= (\beta \otimes \beta) \left(\sum_{(a)(x)} a' \otimes x' \otimes a'' \otimes x'' \right) = \sum_{(a)(x)} a'^{x'} \otimes a''^{x''} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_2(a^x) = \varepsilon_{B_2 \otimes B_1}(a \otimes x) = \varepsilon_2(a) \varepsilon_1(x) \quad (4.13)$$

siendo (4.10) y (4.11) consecuencia de ser α morfismo de coálgebras y (4.12) y (4.13) consecuencia de ser β morfismo de coálgebras.

El siguiente teorema se trata de la extensión para biálgebras de la Proposición 4.1.4.

Teorema 4.2.5. Sean $(B_1, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ y $(B_2, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ \mathbb{K} -biálgebras. Si (B_1, B_2) son biálgebras emparejadas, entonces existe una única estructura de biálgebra sobre $B_1 \otimes B_2$ con unidad $1_{B_1} \otimes 1_{B_2}$ y con las siguientes operaciones:

$$\mu((x \otimes a) \otimes (y \otimes b)) = (x \otimes a)(y \otimes b) := \sum_{(a)(y)} x(a' \cdot y') \otimes a''^{y''} b$$

$$\Delta(x \otimes a) := \sum_{(x)(a)} (x' \otimes a') \otimes (x'' \otimes a'')$$

$$\varepsilon(x \otimes a) := \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(a)$$

$\forall x, y \in B_1, \forall a, b \in B_2$.

Esta estructura de biálgebra se denomina **producto bicruzado de las biálgebras** B_1 y B_2 y se denota por $B_1 \bowtie B_2$.

Si además, B_1 y B_2 son \mathbb{K} -álgebras de Hopf con antípodos S_1 y S_2 , respectivamente, entonces $B_1 \bowtie B_2$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf con antípodo:

$$S(x \otimes a) = \sum_{(x)(a)} S_2(a'') \cdot S_1(x'') \otimes S_2(a')^{S_1(x')}.$$

Demostración. En primer lugar, nótese que se está dotando a $B_1 \bowtie B_2$ con la misma estructura de coálgebra que la de $B_1 \otimes B_2$. Entonces será suficiente con demostrar que:

1. $(B_1 \bowtie B_2, \mu)$ es una \mathbb{K} -álgebra con unidad $1_{B_1} \otimes 1_{B_2}$,
2. Δ y ε son morfismos de \mathbb{K} -álgebras, y por tanto $B_1 \bowtie B_2$ es una \mathbb{K} -biálgebra.

En efecto:

1. Utilizando las propiedades (4.5) y (4.7), junto con el hecho de que α y β son morfismos de \mathbb{K} -coálgebras, se puede comprobar que μ es asociativa, obteniendo:

$$\begin{aligned} [(x \otimes a)(y \otimes b)](z \otimes c) &= \sum_{(a)(y)(b)(z)} x(a' \cdot y')((a''y''b') \cdot z') \otimes a'''y'''(b''z'')b'''z'''c \\ &= (x \otimes a)[(y \otimes b)(z \otimes c)]. \end{aligned}$$

Ahora, se probará que $1_{B_1} \otimes 1_{B_2}$ es unidad para la multiplicación μ . En efecto:

$$\begin{aligned} (x \otimes a)(1_{B_1} \otimes 1_{B_2}) &= \sum_{(a)} x(a' \cdot 1_{B_1}) \otimes a''^{1_{B_1}} 1_{B_2} \stackrel{(4.6)}{=} \sum_{(a)} x\varepsilon_2(a') \otimes a'' \\ &= \sum_{(a)} x \otimes \varepsilon_2(a')a'' \stackrel{\text{Counidad}}{=} x \otimes a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1_{B_1} \otimes 1_{B_2})(x \otimes a) &= \sum_{(x)} 1_{B_1}(1_{B_2} \cdot x') \otimes 1_{B_2}^{x''} a \stackrel{(4.8)}{=} \sum_{(x)} x' \otimes \varepsilon_1(x'')a \\ &= \sum_{(x)} x' \varepsilon_1(x'') \otimes a \stackrel{\text{Counidad}}{=} x \otimes a. \end{aligned}$$

2.

■ Δ es morfismo de \mathbb{K} -álgebras:

$$\begin{aligned}\Delta((x \otimes a)(y \otimes b)) &= \Delta\left(\sum_{(a)(y)} x(a' \cdot y') \otimes a''y''b\right) \\ &= \sum_{(a)(y)(b)(x)} x'(a' \cdot y') \otimes a''y''b' \otimes x''(a'' \cdot y'') \otimes a''''y''''b''.\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\Delta(x \otimes a)\Delta(y \otimes b) &= \left(\sum_{(a)(x)} x' \otimes a' \otimes x'' \otimes a''\right) \left(\sum_{(b)(y)} y' \otimes b' \otimes y'' \otimes b''\right) \\ &= \sum_{(a)(y)(b)(z)} (x' \otimes a')(y' \otimes b') \otimes (x'' \otimes a'')(y'' \otimes b'') \\ &= \sum_{(a)(y)(b)(z)} x'(a' \cdot y') \otimes a''y''b' \otimes x''(a'' \cdot y'') \otimes a''''y''''b''.\end{aligned}$$

Entonces por (4.9), se concluye la igualdad.

■ ε es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras:

$$\begin{aligned}\varepsilon((x \otimes a)(y \otimes b)) &= \varepsilon\left(\sum_{(a)(y)} x(a' \cdot y') \otimes a''y''b\right) = \sum_{(a)(y)} \varepsilon_1(x(a' \cdot y'))\varepsilon_2(a''y''b) \\ &\stackrel{\varepsilon_i(xy)=\varepsilon_i(x)\varepsilon_i(y)}{=} \sum_{(a)(y)} \varepsilon_1(x)\varepsilon_1(a' \cdot y')\varepsilon_2(a''y'')\varepsilon_2(b) \\ &\stackrel{\varepsilon_i \text{ morfismo de coálgebras}}{=} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(b) \left(\sum_{(a)(y)} \varepsilon_2(a')\varepsilon_1(y')\varepsilon_2(a'')\varepsilon_1(y'')\right) \\ &\stackrel{\text{Counidad}}{=} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(b)\varepsilon_2(a)\varepsilon_1(y) = \varepsilon(x \otimes a)\varepsilon(y \otimes b).\end{aligned}$$

De esta manera, $B_1 \bowtie B_2$ adquiere estructura de \mathbb{K} -biálgebra, ya que verifica la condición de compatibilidad del Lema 2.2.1.

Ahora se demostrará la segunda parte del Teorema. Sean S_1, S_2 antípodos para B_1, B_2 , respectivamente, se probará que el endomorfismo $S \in \text{End}(B_1 \otimes B_2)$ dado por:

$$S(x \otimes a) = \sum_{(x)(a)} S_2(a'') \cdot S_1(x'') \otimes S_2(a') S_1(x')$$

verifica la condición (2.8). En efecto, se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}\sum_{(a)(x)} S(x' \otimes a')(x'' \otimes a'') &\stackrel{1)}{=} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(a)1_{B_1} \otimes 1_{B_2} \\ &\stackrel{2)}{=} \varepsilon(x \otimes a)1_{B_1} \otimes 1_{B_2} \stackrel{3)}{=} \sum_{(a)(x)} (x' \otimes a')S(x'' \otimes a'')\end{aligned}$$

donde las igualdades 1) y 3) son consecuencia de que (B_1, B_2) son biálgebras emparejadas, es decir, de las identidades (4.5)-(4.8), y de que S_1 y S_2 verifican la propiedad del antípodo (2.8), mientras que 2) es por la definición de ε .

□

Ejemplo 4.2.6.

1. Si (H, K) son grupos emparejados, entonces $(\mathbb{K}[H], \mathbb{K}[K])$ son biálgebras emparejadas. En efecto, se sigue del siguiente procedimiento:
 - $\alpha: K \times H \rightarrow H$ y $\beta: K \times H \rightarrow K$ se extienden por linealidad a todo $\mathbb{K}[K \times H]$ obteniendo aplicaciones $\tilde{\alpha}: \mathbb{K}[K \times H] \rightarrow \mathbb{K}[H]$ y $\tilde{\beta}: \mathbb{K}[K \times H] \rightarrow \mathbb{K}[K]$.
 - Componiendo $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ con el isomorfismo natural $\mathbb{K}[K \times H] \simeq \mathbb{K}[K] \otimes \mathbb{K}[H]$, se obtienen $\bar{\alpha}: \mathbb{K}[K] \otimes \mathbb{K}[H] \rightarrow \mathbb{K}[H]$ y $\bar{\beta}: \mathbb{K}[K] \otimes \mathbb{K}[H] \rightarrow \mathbb{K}[K]$ que dotan a $\mathbb{K}[H]$ de estructura de módulo-coálgebra por la izquierda sobre $\mathbb{K}[K]$ y a $\mathbb{K}[K]$ de estructura de módulo-coálgebra por la derecha sobre $\mathbb{K}[H]$, respectivamente.

Por lo tanto, en base al Teorema 4.2.5, se construye el producto bicruzado de las \mathbb{K} -biálgebras $\mathbb{K}[H]$ y $\mathbb{K}[K]$, $\mathbb{K}[H] \bowtie \mathbb{K}[K]$.

2. El producto tensorial de biálgebras $B_1 \otimes B_2$ se trata de un caso particular de la construcción del producto bicruzado. Basta para ello considerar α y β definidas como sigue:

$$\alpha(a \otimes x) = a \cdot x = \varepsilon_2(a)x.$$

$$\beta(a \otimes x) = a^x = \varepsilon_1(x)a.$$

4.3. El Doble de Drinfeld de un Álgebra de Hopf

Una vez que ya se ha introducido la noción de producto bicruzado de biálgebras, se procede a definir el Doble de Drinfeld asociado a un Álgebra de Hopf de dimensión finita H , como el producto bicruzado $(H^{op})^* \bowtie H$.

Para poder concluir que el Doble de Drinfeld está bien definido, según el Teorema 4.2.5 se necesita que:

- $(H^{op})^*$ sea un H -módulo-coálgebra por la izquierda,
- H sea un $(H^{op})^*$ -módulo-coálgebra por la derecha,
- $((H^{op})^*, H)$ sean biálgebras emparejadas.

Notación 4.3.1. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Se denotará la *aplicación evaluación*, también llamada *par dualidad*, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \otimes V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v \otimes f &\longmapsto \langle v, f \rangle := f(v). \end{aligned}$$

Proposición 4.3.2. Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1})$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf de dimensión finita con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$, entonces existe una única estructura en $(H^{op})^* = (H^*, \Delta^*, \varepsilon^*, (\mu^{op})^*, \eta^*, (S^{-1})^*, S^*)$ de H -módulo-coálgebra por la izquierda dada por

$$\begin{aligned} H \otimes (H^{op})^* &\longrightarrow (H^{op})^* \\ x \otimes f &\longmapsto x \cdot f, \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $\langle a, x \cdot f \rangle = \sum_{(x)} \langle S^{-1}(x'')ax', f \rangle \forall a \in H$.

Proposición 4.3.3. Si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1})$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf de dimensión finita con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$, entonces existe una única estructura en H de $(H^{op})^*$ -módulo-coálgebra por la derecha dada por la siguiente operación externa:

$$\begin{aligned} H \otimes (H^{op})^* &\longrightarrow H \\ x \otimes f &\longmapsto x^f := \sum_{(x)} f(S^{-1}(x''')x')x''. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Teorema 4.3.4. Sea $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1})$ una \mathbb{K} -álgebra de Hopf de dimensión finita con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$. Se definen las acciones:

$$\begin{aligned} \alpha : H \otimes (H^{op})^* &\longrightarrow (H^{op})^* \\ x \otimes f &\longmapsto x \cdot f, \end{aligned}$$

donde $\langle a, x \cdot f \rangle = \sum_{(x)} \langle S^{-1}(x'')ax', f \rangle \forall a \in H, y$

$$\begin{aligned} \beta : H \otimes (H^{op})^* &\longrightarrow H \\ x \otimes f &\longmapsto x^f = \sum_{(x)} f(S^{-1}(x''')x')x'' \end{aligned}$$

que dotan, en base a las proposiciones previas, a $(H^{op})^*$ de estructura de H -módulo-coálgebra por la izquierda, y a H de estructura de $(H^{op})^*$ -módulo-coálgebra por la derecha, respectivamente. Entonces, considerando dichas operaciones, $((H^{op})^*, H)$ son \mathbb{K} -álgebras de Hopf emparejadas.

Nótese que, para la demostración de este Teorema, basta con comprobar que se verifican las igualdades (4.5)-(4.9). Ésta, junto con las demostraciones de las Proposiciones 4.3.2 y 4.3.3, se pueden consultar en [12], en el capítulo IX, páginas 207-213.

Definición 4.3.5. Sea H una \mathbb{K} -álgebra de Hopf de dimensión finita, se define el Doble de Drinfeld del Álgebra de Hopf H como $D(H) := (H^{op})^* \bowtie H$.

Lema 4.3.6. La multiplicación en $D(H)$ viene dada por

$$(f \otimes x)(g \otimes y) = \sum_{(x)} f g(S^{-1}(x''')?x') \otimes x''y$$

$\forall f, g \in (H^{op})^*, \forall x, y \in H$, donde $\langle a, g(S^{-1}(x''')?x') \rangle = g(S^{-1}(x''')ax')$ $\forall a \in H$.

Demostración. Por el Teorema 4.2.5 se tiene que:

$$(f \otimes x)(g \otimes y) = \sum_{(x)(g)} f(x' \cdot g') \otimes x''g''y.$$

Por lo tanto, desarrollando la expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} (f \otimes x)(g \otimes y) &= \sum_{(x)(g)} f g'(S^{-1}(x'')?x') \otimes g''(S^{-1}(x''''')x''')x''''y \\ &\stackrel{\text{Comult. de } (H^{op})^*}{=} \sum_{(x)} f g(S^{-1}(x''''')x''''S^{-1}(x'')?x') \otimes x''''y \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{(x)} f g(S^{-1}(x''''')\varepsilon(x'')?x') \otimes x''''y \\ &= \sum_{(x)} f g(S^{-1}(x''''')?x') \otimes \varepsilon(x'')x''''y \\ &\stackrel{\text{Counidad}}{=} \sum_{(x)} f g(S^{-1}(x''''')?x') \otimes x''''y \end{aligned}$$

□

Observación 4.3.7. El Doble de Drinfeld de un Álgebra de Hopf H de dimensión finita, $D(H)$, es en base al Teorema 4.2.5 y 4.3.4, un Álgebra de Hopf con las siguientes operaciones:

$$(f \otimes x)(g \otimes y) = \sum_{(x)} f g(S^{-1}(x''')?x') \otimes x''y$$

$$\Delta(f \otimes x) = \sum_{(f)(x)} (f' \otimes x') \otimes (f'' \otimes x'')$$

$$\varepsilon(f \otimes x) = \varepsilon_{(H^{op})^*}(f)\varepsilon_H(x) = \varepsilon_H(x)f(1_H)$$

$\forall x, y \in H \forall f, g \in (H^{op})^*$.

4.4. El Doble de Drinfeld y la QYBE

En el Corolario 3.3.2 del capítulo anterior, se demostró que si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada y V es un H -módulo, entonces la aplicación $c_{V,V}^R$ es una R -matriz, es decir, una solución de QYBE.

Para concluir el trabajo, se demostrará que el Doble de Drinfeld asociado a un Álgebra de Hopf H de dimensión finita es un Álgebra de Hopf trenzada y, por lo tanto, en base a dicho Corolario, los módulos sobre $D(H)$ generan R -matrices.

Teorema 4.4.1. *Sea $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1})$ una \mathbb{K} -álgebra de Hopf de dimensión finita con antípodo invertible $S \in \text{Aut}(H)$ y base $\{e_i\}_{i \in I}$ y sea $\{e^i\}_{i \in I}$ su base dual asociada. Considérese la R -matriz universal $R = \sum_{i \in I} (1_{H^*} \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1_H) \in D(H) \otimes D(H)$, entonces $(D(H), R)$ es una \mathbb{K} -Álgebra de Hopf trenzada.*

Demostración. La demostración consta de dos partes, la primera de ellas en la que se prueba que $D(H)$ es cuasi-coconmutativa, es decir, R es invertible en $D(H)$ y se verifica la identidad (3.2) y, por otro lado, que $D(H)$ es trenzada, es decir, que verifica las condiciones (3.4)-(3.5).

■ **Parte 1.** $D(H)$ es cuasi-coconmutativa.

1. R es invertible en $D(H)$ con inverso $\bar{R} = \sum_{i \in I} (1_{H^*} \otimes e_i) \otimes ((e^i \circ S) \otimes 1_H) \in D(H) \otimes D(H)$.

Sea $b \otimes u \otimes c \otimes v \in H \otimes (H^{op})^* \otimes H \otimes (H^{op})^*$ arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle R\bar{R}, b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle &= \sum_{i,j \in I} \langle (1_{H^*} \otimes e_i e_j) \otimes (e^i (e^j \circ S) \otimes 1_H), b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\
&= \sum_{i,j \in I} \varepsilon(b) u(e_i e_j) \left(\sum_{(c)} e^i(c') e^j(S(c'')) \right) v(1_H) \\
&= \varepsilon(b) v(1_H) u \left(\sum_{(c)} \sum_{i,j \in I} (e^i(c') e^j(S(c''))) e_i e_j \right) \\
&\stackrel{e^i(e_i) = 1_{\mathbb{K}} = e^j(e_j)}{=} \varepsilon(b) v(1_H) u \left(\sum_{(c)} c' S(c'') \right) \\
&\stackrel{(2.8)}{=} \varepsilon(b) v(1_H) u(\varepsilon(c)) = \varepsilon(b) v(1_H) \varepsilon(c) u(1_H) \\
&= \langle (1_{H^*} \otimes 1_H) \otimes (1_{H^*} \otimes 1_H), b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, \bar{R} es el inverso por la derecha de R en $D(H)$. De forma análoga, se demuestra que \bar{R} es inverso por la izquierda.

$$2. \Delta^{cop}(f \otimes a)R = R\Delta(f \otimes a).$$

De nuevo, sea $b \otimes u \otimes c \otimes v \in H \otimes (H^{op})^* \otimes H \otimes (H^{op})^*$ arbitrario, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle R\Delta(f \otimes a), b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle &= \sum_{(f)(a), i \in I, (e_i)} \langle f'(S^{-1}(e_i''')?e_i') \otimes e_i'' a' \otimes e^i f'' \otimes a'', b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\ &= \sum_{(f)(a), i \in I, (e_i)} f'(S^{-1}(e_i''')be_i')u(e_i'' a') \left(\sum_{(c)} e^i(c')f''(c'') \right) v(a'') \\ &= \sum_{(a), i \in I, (e_i), (c)} f(c'' S^{-1}(e_i''')be_i')u(e_i'' a')e^i(c')v(a'') \end{aligned}$$

Ahora, aplicando $(\Delta \otimes id_H) \circ \Delta$ a $c = \sum_{i \in I} e^i(c)e_i$, se obtiene:

$$\sum_{(c)} c' \otimes c'' \otimes c''' = \sum_{i \in I, (e_i)} e^i(c)e_i' \otimes e_i'' \otimes e_i'''. \quad (4.16)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle R\Delta(f \otimes a), b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle &= \sum_{(a), i \in I, (e_i), (c)} f(c'' S^{-1}(e_i''')be_i')u(e_i'' a')e^i(c')v(a'') \\ &\stackrel{(4.16)}{=} \sum_{(a), (c)} f(c''' S^{-1}(c''')bc')u(c'' a')v(a'') \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{(a), (c)} \varepsilon(c''')f(bc')u(c'' a')v(a'') \\ &\stackrel{\text{Counidad}}{=} \sum_{(a), (c)} f(bc')u(c'' a')v(a'') \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{cop}(f \otimes a)R, b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle &= \sum_{(f)(a), i \in I} \langle f'' \otimes a'''' e_i \otimes f' e^i(S^{-1}(a''''?)a') \otimes a'', b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\ &= \sum_{(f)(a), i \in I} f''(b)u(a'''' e_i) \left(\sum_{(c)} f'(c')e^i(S^{-1}(a''''?)c'' a') \right) v(a'') \\ &= \sum_{(a), i \in I, (c)} f(bc')u(a'''' e_i)e^i(S^{-1}(a''''?)c'' a')v(a'') \\ &= \sum_{(a), i \in I, (c)} f(bc')u(a'''' e^i(S^{-1}(a''''?)c'' a')e_i)v(a'') \\ &= \sum_{(a), (c)} f(bc')u(a'''' S^{-1}(a''''?)c'' a')v(a'') \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{(a), (c)} \varepsilon(a''''?)f(bc')u(c'' a')v(a'') \\ &\stackrel{\text{Counidad}}{=} \sum_{(a), (c)} f(bc')u(c'' a')v(a'') \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $\Delta^{cop}(f \otimes a)R = R\Delta(f \otimes a)$.

■ **Parte 2.** $D(H)$ es trenzada:

Se probará la identidad $(\Delta \otimes id_{D(H)})(R) = R_{13}R_{23}$ siendo análoga la demostración de (3.5). Sea $a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v \in (H \otimes (H^{op})^*)^{\otimes 3}$ arbitrario, se tiene:

$$\begin{aligned} & \langle (\Delta \otimes id_{D(H)})(R), a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\ &= \sum_{i \in I, (e_i)} \langle (1_{H^*} \otimes e'_i) \otimes (1_{H^*} \otimes e''_i) \otimes (e^i \otimes 1_H), a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\ &= \sum_{i \in I, (e_i)} \varepsilon(a)t(e'_i)\varepsilon(b)u(e''_i)e^i(c)v(1_H) \\ &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)v(1_H) \sum_{i \in I, (e_i)} t(e'_i)u(e''_i)e^i(c). \end{aligned}$$

Aplicando Δ a $c = \sum_{i \in I, (e_i)} e^i(c)e_i$, se obtiene:

$$\sum_{(c)} c' \otimes c'' = \sum_{i \in I, (e_i)} e^i(c)e'_i \otimes e''_i. \quad (4.17)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \otimes id_{D(H)})(R), a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)v(1_H) \sum_{i \in I, (e_i)} t(e'_i)u(e''_i)e^i(c) \\ &\stackrel{(4.17)}{=} \varepsilon(a)\varepsilon(b)v(1_H) \sum_{(c)} t(c')u(c'') \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle R_{13}R_{23}, a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle &= \sum_{i, j \in I} \langle (1_{H^*} \otimes e_i) \otimes (1_{H^*} \otimes e_j) \otimes (e^i e^j \otimes 1_H), a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\ &= \sum_{i, j \in I} \varepsilon(a)t(e_i)\varepsilon(b)u(e_j) \left(\sum_{(c)} e^i(c')e^j(c'') \right) v(1_H) \\ &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)v(1_H) \sum_{i, j \in I, (c)} t(e_i)u(e_j)e^i(c')e^j(c'') \\ &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)v(1_H) \sum_{i, j \in I, (c)} t(e^i(c')e_i)u(e^j(c'')e_j) \\ &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)v(1_H) \sum_{(c)} t(c')u(c'') \end{aligned}$$

de donde se concluye la igualdad.

□

Ejemplo 4.4.2. En este ejemplo se pretende particularizar la estructura de Álgebra de Hopf del Doble de Drinfeld cuando $H = \mathbb{K}[G]$.

Como ya se vio en el Ejemplo 2.3.7, si (G, \cdot) es un grupo multiplicativo finito con elemento neutro e , entonces $\mathbb{K}[G]$ adquiere estructura de \mathbb{K} -álgebra de Hopf de dimensión finita con las siguientes multiplicación, comultiplicación, unidad, counidad y antípodo:

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] & \eta: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ g \otimes g' &\longmapsto g \cdot g' & 1_{\mathbb{K}} &\longmapsto e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta: \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] & \varepsilon: \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longmapsto g \otimes g & e &\longmapsto 1_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S: \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ g &\longmapsto g^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\mathbb{K}[G]$ es de dimensión finita, se define el Doble de Drinfeld asociado a $\mathbb{K}[G]$ como $D(\mathbb{K}[G]) = (\mathbb{K}[G]^{op})^* \bowtie \mathbb{K}[G]$. Sea $\{g\}_{g \in G}$ una base de $\mathbb{K}[G]$ y $\{e_g\}_{g \in G}$ su base dual asociada tal que $e_g(h) = \delta_{gh}$, entonces $D(\mathbb{K}[G])$ es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf con la siguiente multiplicación

$$\begin{aligned} (e_g \otimes h)(e_k \otimes z) &= e_g e_k(S^{-1}(h) \cdot ? \cdot h) \otimes h \cdot z \\ &= e_g e_k(h^{-1} \cdot ? \cdot h) \otimes h \cdot z, \end{aligned}$$

donde $e_g e_k(h^{-1} \cdot ? \cdot h) = \delta_{g, h \cdot k \cdot h^{-1}}$, y antípodo

$$\begin{aligned} S(e_g \otimes h) &= (e_g \circ S)(S^{-1}(h^{-1}) \cdot ? \cdot h^{-1}) \otimes (e_g \circ S)(S^{-1}(h^{-1}) \cdot h^{-1}) \cdot h^{-1} \\ &= (e_g \circ S)(h \cdot ? \cdot h^{-1}) \otimes e_g(e) \cdot h^{-1} = e_g(h \cdot (?)^{-1} \cdot h^{-1}) \otimes e_g(e) \cdot h^{-1} \\ &= \delta_{g, h \cdot (?)^{-1} \cdot h^{-1}} \otimes \delta_{ge} h^{-1}. \end{aligned}$$

Por último, nótese que, por el Teorema 4.4.1, $D(\mathbb{K}[G])$ es trenzada con R -matriz universal:

$$R = \sum_{g \in G} (1_{(\mathbb{K}[G]^{op})^*} \otimes g) \otimes (e_g \otimes e).$$

Por lo tanto, todo grupo finito (G, \cdot) induce una \mathbb{K} -álgebra de Hopf trenzada, $D(\mathbb{K}[G])$, y, por consiguiente, una solución de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Bibliografía

- [1] Abe, E. (2004). *Hopf Algebras* (Vol. 74). Cambridge University Press.
- [2] Atiyah, M. F. y Macdonald, I. G. (1989). *Introducción al Álgebra Conmutativa*. Reverté.
- [3] Baxter, R. J. (1972). Partition function of the eight-vertex lattice model. *Annals of Physics*, 70(1), 193-228.
- [4] Baxter, R. J. (1982). *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press. London.
- [5] Drinfeld, V. G. (1985). Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 283(5), 1060-1064.
- [6] Drinfeld, V. G. (1986). Quantum Groups. En *Proceedings of International Congress of Mathematics*, 789-820. Berkeley.
- [7] Drinfeld, V. G. (1989). On almost coconmutative Hopf algebras. *Algebra i Analiz*, 1(2), 30-46.
- [8] Faddeev, L. D. (1984). *Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory*. Lectures al Les Houches 1982. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam. New York.
- [9] Fuchs, J. (1995). *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge.
- [10] Jimbo, M. (1985). A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 10(1), 63-69.
- [11] Jimbo, M. (1986). Quantum R -matrix for the generalised Toda system. *Comm. Math. Phys.*, 102, 537-547.
- [12] Kassel, C. (1995). *Quantum Groups* (Vol. 155). Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York.

- [13] Sweedler, M. E. (1969). *Hopf Algebras*. WA Benjamin Inc.
- [14] Underwood, R. G. (2015). *Fundamentals of Hopf Algebras*. Springer.
- [15] Yang, C. N. (1967). Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Physical Review Letters*, 19(23), 1312-1315.