ANALISIS NO ESTANDAR Y LOGICA

Angel Nepomuceno Fernández

Abstract

Foundational studies in mathematical area are very interesting from a logical point of view and its results can have some influences in logic. At the same time one could obtain concepts from logic that give new foundations to some piece of mathematics. This is the case of *non standard analysis*, whose founder A. Robinson took model theory methods.

Making use of higher order logic and model theory it is possible to define certain numbers called *infinitesimal*, which are the base for non standard analysis and are successful to differential and integral calculus. So the instrumental nature of logic is emphasized, provided logic is not only first order logic, what we must take on account in order to settle a philosophy of logic and mathematic. Logicist and formalistic attitudes would have to be revisited because of that, since it is not easy to give a demarcation criterion between logic and mathematic, and the formal studies in mathematic can lead to another philosophical point of view.

---

1. Introducción

Uno de los resultados de la construcción de modelos no estándar para números, con los métodos propios de la teoría de modelos, es lo que se conoce como *análisis no estándar*. A partir de Robinson [6], como él mismo indica en el prefacio de su obra, «los conceptos y métodos de la Lógica Matemática contemporánea están en condiciones de proporcionar un sistema adecuado para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral». Esto significa un nuevo enfoque en relación con la fundamentación del análisis y, en función de los éxitos obtenidos, nuevos elementos para el estudio de los problemas de fundamentos y de la filosofía de la matemática en general. En efecto, el desarrollo de este tipo de cálculo a partir de nociones –como infinitésimo– perfectamente establecidas, sugiere un desplazamiento de atención hacia estructuras que no son las clásicas (estándar) de la teoría de números.

AGORA 12/2 (1993): 163-169

2. Lógica y matemáticas

Diversos conceptos deben ser fijados mínimamente. Lógica matemática es la denominación que se da a la lógica cuando ésta se aplica en la investigación matemática. En este sentido, hay lógicas que no ofrecen un interés particular para el trabajo matemático, entre las que se cuentan, por ejemplo, las lógicas de la relevancia, lógicas paraconsistentes, etc., mientras que algunas lógicas especiales están cada vez más presentes en el ámbito de dichas investigaciones; a este grupo pertenecen las lógicas de orden superior, lógicas modales, lógicas temporales, etc.

En la actualidad carece de sentido mantener una actitud puramente intuicionista, formalista o logicista, por lo que respecta a los problemas de fundamentos, puesto que el ámbito donde se plantean no está limitado por la existencia de paradojas no resueltas; se trata, en muchos casos, de establecer una base sólida a las propias teorías con objeto de impedir un replanteamiento de los viejos problemas. Bien es verdad que aparecerán otros que habremos de considerar *fundamentales*: programación lógica, verificación de programas, etc., aquéllos, en suma, que se relacionan con las ciencias de la computación. Tanto si la filosofía de la matemática es más que fundamentos como si los límites de éstos se amplían, no habrá dificultad en admitir como partes de la lógica –que se integran, de hecho, en la lógica (especial) de la matemática– la teoría de modelos, teoría de conjuntos (como soporte de la semántica), métodos de prueba, etc..

Desde un punto de vista contrario al sostenido por el logicismo, podemos decir que la matemática no es lógica desarrollada y será posible establecer un criterio de demarcación entre ambas. Sin embargo, fijar un criterio tal no es tarea fácil. Si se piensa en algunos principios, rechazados como lógicos y admitidos como exclusivamente matemáticos ¿Por qué se adoptan con un carácter tan general que en la práctica se les usa como lógicos?; así vendría ser la aceptación del axioma de elección.

En cualquier caso, aquí entenderemos como *actitudes* logicista y formalista, respectivamencte, considerar la inexistencia de criterio de demarcación y tomar como objeto de reflexión –del estudio metateorético, por tanto– sistemas formales.

3. Hacia una noción de infinitésimo

Robinson [6] parte de una lógica de orden superior para llegar a la definición de infinitésimo. En concreto, el lenguaje formal es un lenguaje de teoría de los tipos que consta de los usuales símbolos lógicos y símbolos para constates y variables predicativas y funcionales de cada tipo, además de constantes y variables individuales de cada nivel. Del mayor interés son las estructuras de orden superior, para cuya caracterización era necesario este tipo de lenguajes. Las notas del concepto de *modelo* (de orden superior), también se pueden obtener a través de una generalización de las nociones correspondientes a la teoría (de primer orden) sistematizada por Chang y Keisler [2]. Esquemáticamente, un modelo de orden superior tiene la forma[1] $M = < (D_0, D_1, ...), \Im >$, donde:

1) D_0 es un dominio no vacío, $D_0 \neq \emptyset$,

2) $D_{n+1} \subseteq P(D_n)$ y $D_{n+1} \neq \emptyset$, para cada $n \geq 0$, –donde $P(D_n)$ representa *partes de Dn*–

3) $\Im$ es una función con dominio en el lenguaje y rango en $(D_0, D_1, ...)$ definida de acuerdo con las cláusulas:

i) Si a es una constante individual de nivel n, $\Im(a) \in D_n$,

ii) Si R es una constante de predicado de tipo $(i_1, ... ,i_k)$, entonces $\Im(R) \subseteq D_{i_1} \times ... \times D_{i_k}$ –donde «×» se usa para indicar *producto cartesiano*–,

iii) Si f es un símbolo de función de tipo $(i_1, ..., i_k, m)$, entonces $\Im(f)$ se define de $D_{i_1} \times ... \times D_{i_k}$ en D_m..

Un modelo M es *estándar* si y sólo si $D_{n+1} = P(D_n)$, para todo n tal que $n \geq 1$. M es un modelo comprehensivo si y sólo si M satisface los axionas de comprehensión; es decir, las instancias del siguiente esquema de fórmulas: $\bigvee \aleph \bigwedge y_{i1} ... y_{in} \Leftrightarrow \varphi)$, donde φ es una fórmula en la que $\aleph$ no ocurre libre, y_{ij} es una variable de tipo i_j, para todo $j \leq n$, y á una variable de tipo $(i_1, ..., i_n)$, para $n \geq 1$. Según estas caracterizaciones, todos los modelos estándar son comprehensivos, pero cabe esperar que haya algún modelo comprehensivo que no sea estándar. En efecto, siguiendo los métodos de Henkin [3b], tomando como punto de partida un sistema de cálculo con estos axiomas, se puede definir un modelo comprehesivo tal que D_0 tenga la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales, D_{n+1} –para $n \geq 1$– tenga los miembros definibles mediane fórmulas y, puesto que el número de éstas es a lo sumo infinito enumerable, $D_{n+1} \neq P(D_n)$.

Dichos métodos están basados en Henkin [3a], donde se establece la completud de la lógica de primer orden, para lo cual se presenta un modelo de primer orden construido desde un sistema de cálculo formal. Introduciendo las necesarias modificaciones, se llega a la obtención de modelos de orden superior, al margen de que los mismos puedan ser descritos usando otros procedimientos.

El denominado *teorema de compacidad* se cumple en estos modelos. Es decir, dado un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje de orden superior, si cada subconjunto finito de Γ tiene un modelo comprehensivo,entonces Γ tiene un modelo comprehensivo. Robinson [6] establece una versión que denomina *principio de finitud* [2] que le permite probar que *para cualquier conjunto estratificado de sentencias del lenguaje de orden superior, si tal conjunto es consistente, entonces su extensión también lo es.* Por conjunto estratificado de sentencias hay que entender un conjunto de sentencias cada una de las cuales está estratificada en el sentido de la teoría de los tipos –cada variable (o constante) ocurre en lugares del mismo tipo–. La noción de extensión requiere una mayor explicación, a la que procedemos a continuación.

---

[1] Cfr. P. Smith [7].

[2] Cambiando tener *un modelo* por *ser consistente*: Si cada subconjunto finito es consistente, entonces Γ es consistente.

Dado un conjunto Σ de sentencias estratificadas del lenguaje de orden superior, sea χ el conjunto de las constantes que ocurren en Σ. Sea $\varphi\tau$ (a, x, y) una fórmula de tipo τ en la cual ocurren a, x, e y, tales que $a \in \chi, x \in \zeta$ e y es una variable (son de un tipo determinado) y $\zeta \subset \chi$. Supongamos que a es diádica y ζ es el conjunto de elementos x de χ tales que $\Sigma \vdash V\ y\varphi\tau\ (a, x, y)$ –el signo $\vdash$ representa la *deducibilidad* (en un cálculo determinado) de la expresión anotada a la izquierda desde la anotada a la derecha del mismo–. Sean los conjuntos finitos $\{x_1, ..., x_n\} \subset \zeta$; sólo si para cada uno de estos subconjuntos se verifica que $\Sigma \vdash V\ y\ (\varphi\tau\ (a, x_1, y) \wedge \varphi\tau\ (a, x_2, y) \wedge ... \wedge \varphi\tau\ (a, x_n, y))$, se denomina *relación concurrente.* Para cada relación concurrente a tomamos una constante c_a a condición de que $c_a \notin \chi$ y definimos el conjunto de sentencias Σ_a:

$\Sigma_a =$ def. $\{\varphi\tau\ (a, x, c_a)$: a es concurrente, $c_a \notin \chi$ y $x \in \zeta\}$, siendo Σ_k la unión de estos conjuntos. El conjunto $\Sigma\ \cup \Sigma_k$ se denomina *extensión* de Σ[3].

A partir de un modelo estándar M que satisfaga un conjunto de sentencias (podemos referirnos a un «cálculo» determinado), de acuerdo con el teorema de compacidad, cabe considerar el modelo comprehensivo $M*$, que no es estándar y también satisface dicho conjunto. Ampliando $M*$ para que satisfaga una extensión de tal conjunto de fórmulas, se habrá obtenido un nuevo modelo $*M$. Este nuevo modelo es tal que tendrá más individuos en determinados niveles[4]; es decir, para cada $k \geq 0$, $*D_k$ tendrá una cardinalidad igual o superior a D_k, como se desprende del hecho de haber contado con más constantes en el lenguaje –tomadas para cada relación concurrente–, ampliándose también el rango de la función $\Im$ que define el modelo.

Una ampliación en este sentido, tomando como modelo estándar inicial el de los números reales, da lugar a un modelo no estándar cuyo dominio base no es R –los números reales–, sino * R. Teniendo en cuenta la noción usual de *valor absoluto* $-|c| = c$ si $c \geq 0$, $|c| = -c$ si $c < 0$–, se puede establecer la noción de infinitásimo:

Sea $\mathbf{a} \in *R$; a es un *infinitésimo* si y sólo si $|\mathbf{a}| < \mathbf{m}$ para todo $\mathbf{m}$ positivo tal que $\mathbf{m} \in R$[5].

4. La lógica como instrumento

La manera de obtener la noción de infinitésimo constituye un alegato más contra la formulación, con pretensión de absoluta claridad, de un criterio de demarcación entre lógica y matemáticas. Se pone de manifiesto, más bien, la estrecha relación entre ambas cuando se aborda un problema de fundamentos, la cual no tiene por qué ser de subordinación en alguna de las direcciones. El procedimiento seguido

---

[3] Robinson [6] 2. 9, pp. 30-34.

[4] Cuando sea necesario, haciendo uso de un lenguaje no elemental.

Por ejemplo, postulando que el conjunto de constantes individuales de determinado nivel tiene el mismo cardinal que N_1 (si N_0 representa el cardinal del conjunto de los n lumeros naturales, $N_1 = 2^{N_0}$). En Mostowski [5] aparece un apartado dedicado a la teoria de modelos para lenguajes no elementales, p. 132 y ss.

[5] Robinson [6] 3. 2, p. 56.

revela el carácter instrumental de la lógica, en el sentido de que permite hacer explícito el razonamiento usado en la construcción de un concepto matemático; como la disciplina, en general, permite establecer, de alguna manera, las características del razonamiento ordinario[6].

La lógica desde la cual se ha obtenido la precedente definición. –lógica de orden superior– es la que subyace en el sistema construido por Robinson [6]. La noción de *modelo no estándar* –desde uno estándar que satisface un conjunto de fórmulas, por extensión de éstas– tiene aplicación respecto de otras definiciones: Estructuras para caracterizar espacios topológicos, funciones de variable real, funciones de variable compleja, noción de límite más precisa, etc.. No en vano Robinson [6] llama al capítulo II «Instrumentos lógicos»[7], dado que la lógica adoptada es la base firme que sustenta su visión del análisis, aunque, precisamente por su fundamentación, no sea ya el análisis clásico. El éxito obtenido en esta aplicación de la lógica de orden superior subraya su carácter instrumental.

Una actitud excesivamente pragmática puede llevar a un rechazo de estos procedimientos. El análisis no estándar no ofrece en realidad, desde este punto de vista, ninguna ventaja adicional sobre el análisis estándar. Si un teorema se puede probar haciendo uso del análisis no estándar, usando el análisis estándar también puede probarse, de ahí su irrelevancia para el avance en la investigación matemática. Pero, como señalan Henson y Keisler [4], en tal perspectiva hay dos planos: 1º) aquel teorema que pueda ser probado mediante al análisis no estándar se puede probar en teoría axiomática de conjuntos *Zermelo-Fraenkel-Axioma de elección*; un teorema de estas características es aceptable para los usuarios del análisis estándar como teorema matemático; 2º) la actitud escéptica propiamente dicha, dado que la existencia de prueba en un tipo de análisis implicaría la existencia de prueba en el otro. Aunque la afirmación del primer plano es correcta, dicha aceptación, en todos y cada uno de los casos, y, en consecuencia, la actitud escéptica, tal vez olvida que los principios de esta teoría axiomática son más fuertes que los usados habitualmente en la práctica matemática[8].

5. Cálculos generalizados

Los cálculos de predicados de orden superior no han gozado de muy buena prensa, lo que tal vez se deba a sus limitaciones frente a los de primer orden. No obstante, ello no invalida su utilidad en determinados contextos. Desde una actitud formalista habrá que exigir sumo cuidado en el tratamiento de las propiedades metateóricas de unos cálculos y otros; pero los cálculos mismos podrán ser usados, asumiendo las restricciones en el uso que impongan sus límites esenciales. A este respecto, mientras que nociones como *corrección y consistencia* tienen el mismo

[6] Que la lgica se conciba de manera tal que se pueda usar como instrumento , es algo tan antiguo como ella misma, aunque en la historia reciente se ha puesto una vez m s de manifiesto.

[7] Su denominacin exacta es *Tools from logic* , pp. 6-49.

[8] Henson y Keisler [4], p. 377.

sentido para todos los niveles, otras como *completud* se establecen relativamente, según que los sistemas sean de primer orden o superior. Tal vez el ideal de procedimiento deductivo sea el restringido al modo de deducción de los cálculos proposicionales; contaríamos así con las propiedades metateóricas de *corrección, completud, decidibilidad,* aunque, como contrapartida, la capacidad expresiva resultaría pequeña. Atendiendo un punto de vista pragmático, es aconsejable tomar partido por los sistemas más expresivos para conseguir determinados objetivos; una aritmética de segundo orden –donde el *principio de inducción completa* aparecerá expresado en toda su generalidad–, por ejemplo, es categórica respecto de todos sus modelos estándar.

Más arriba hemos esquematizado el proceso de elaboración de la noción de infinitésimo a partir de un cálculo de orden superior. Cabe una aproximación como la debida a Bernstein [1], quien a partir de la teoría de modelos y tras establecer la noción de ultraproducto de orden superior, hace uso de ésta para obtener directamente un modelo no estándar que contiene los infinitésimos; de cualquier modo, esta teoría de modelos es una teoría de modelos de *orden superior*, por lo que los procedimientos deductivos implicados tampoco están restringidos.

Una hojeada a la historia del cálculo diferencial –como aparece en el capítulo *X* de Robinson [6]– muestra su aceptación por las distintas corrientes de pensamiento matemático desde el comienzo, al margen de las primitivas disputas entre leibnizianos y newtonianos; además su fundamentación ha sido diversa y únicamente a partir de Robinson entran en juego, por así decir, los cálculos lógicos de orden superior. Este examen puede conducir al planteamiento de cuestiones de orden ontológico, acerca de la existencia de determinadas entidades –infinitésimos, por ejemplo–, su carácter en relación con otras –números naturales, enteros, etc.–. Pero desde otro punto de vista, hay que destacar la necesidad de procedimientos deductivos no limitados a los patrones marcados por los cálculos lógicos de primer orden. Algunas teorías matemáticas quedan perfectamente expresadas con lenguajes de primer orden; más aún, *son* sistemas de cálculo de primer orden cuyo estudio puede requerir metateorías donde tiene sentido hablar de «algunas propiedades», «todos los axiomas», etc..

En resumen, podemos decir que los sistemas de cálculo generalizado de predicados muestran las características de ciertos razonamientos, los cuales van más allá de los de los cálculos de primer orden. A este respecto, tanto una actitud logicista como una formalista admitirán la conveniencia de estudiar los sistemas de cálculo generalizado. La primera porque la idea de que es imposible establecer un claro criterio de demarcación (entre lógica y matemáticas) se refuerza; la segunda porque el estudio formal del análisis no estándar puede proporcionar una fundamentación lógica del cálculo diferencial e integral.

Bibliografía

Bernstein, A. R. (1973), «Non-Standard analysis», *Studies in Model Theory*, Mathematical Association of America. Vol 8.

Chang, C. L., Keisler, H. J. (1973), *Model Theory.* Amsterdam, North-Holland.
Henkin, L. (a) «The Completeness of the First-Order Functional Calculus» and (b) «Completeness in the Theory of Types», *The Philosophy of Mathematics* (Ed. by J. Hintikka), pp. 42-63.
Henson, C. W., Keisler, H. J. (1986), «The Strength of Non-Standard Analysis», *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 51, N. 2, pp. 377-386.
Mostowski, A. (1966), *Thirty Years of Foundational Studies,* New York, Barnes-Noble.
Robinson, A. (1980), *Non-Standard Analysis*, Amsterdam, North-Holland. (Reimp.).
Smith, P., *Higher-order logic, model theory, recursion theory, and proof theory*, Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science (texto procesado en TEX, gentilmente cedido por I. Németi, miembro de este Instituto).

Angel NEPOMUCENO FERNANDEZ
Universidad de Sevilla