materia

Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial

unidade didáctica 4

# Aplicacións lineais

Celso Rodríguez Fernández
José Manuel Fernández Vilaboa
Departamento de Álxebra
Facultade de Matemáticas

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación
Grao en Matemáticas

unidade **didáctica** 4

# Aplicacións lineais

**Celso Rodríguez Fernández**
**José Manuel Fernández Vilaboa**
Departamento de Álxebra
Facultade de Matemáticas

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostea

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital

Dep. Legal: C 59-2013
ISBN 978-84-9887-954-4

**MATERIA: Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial**
**TITULACIÓN: Grao en Matemáticas**
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

**Unidade 1. Sistemas de ecuacións lineais**

-Matrices. Operacións con matrices e propiedades. Matriz trasposta e matriz inversa. Operacións elementais dunha matriz. Matrices elementais.

-Matrices equivalentes por filas e matrices equivalentes por columnas.

-Sistemas de ecuacións lineais. Transformacións elementais dun sistema de ecuacións lineais.

-Resolución de sistemas de ecuacións lineais: o método de Gauss.

-Factorización LU dunha matriz.

-Factorización dunha matriz invertible.

**Unidade 2. Determinantes e as súas aplicacións**

-Determinantes de orde 2 e 3.

-Definición xeral de determinante: propiedades.

-Determinante dun produto de matrices.

-Determinante da matriz trasposta.

-Cálculo de determinantes de orde n.

-Inversa dunha matriz, regra de Cramer.

-Rango dunha matriz.

**Unidade 3. Espazos vectoriais**

-Definición de espazo vectorial: exemplos.

-Subespazos vectoriais. Intersección e suma de subespazos vectoriais.

-Dependencia e independencia lineal. Sistemas de Xeradores.

-Base e dimensión dun espazo vectorial. Coordenadas dun vector.

-Subespazos vectoriais e solucións dun sistema homoxéneo. Ecuacións dun subespazo vectorial.

**Unidade 4. Aplicacións Lineais**

-Definición de aplicación lineal. Exemplos.

-Núcleo e Imaxe dunha aplicación lineal. Aplicacións lineais inxectivas e sobrexectivas.

-Matriz dunha aplicación lineal.

-Cambio de base para aplicacións lineais.

-Aplicacións Lineais e Sistemas de Ecuacións Lineais.

**Unidade 5. Introdución ó espazo afín**

-Variedades lineais.

-Ecuacións lineais dunha variedade.

-Posicións relativas de rectas no plano e de rectas e planos no espazo n-dimensional.

## ÍNDICE

## PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica enmárcase dentro dos contidos relativos á materia de Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial, de 6 créditos ECTS impartida no segundo semestre do primeiro curso do Grao en Matemáticas e que pertence ó módulo de Álxebra e Xeometría.

Os contidos de Álxebra Lineal, nos que se inclúe esta materia, son unha parte fundamental das ferramentas matemáticas necesarias para o estudo en moitas áreas, como as ciencias do comportamento, da natureza, físicas ou sociais, economía, enxeñaría ou informática e por suposto nas matemáticas.

Esta materia é fundamental para una boa formación matemática. Está precedida da materia Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números onde se introducen conceptos básicos das matemáticas, e resulta indispensable para poder abordar con éxito as materias Álxebra Lineal e Multilineal e Xeometría Lineal de segundo curso do grao en matemáticas.

Nesta unidade estúdanse as aplicacións lineais entre dous espazos vectoriais de dimensión finita. O alumnado da materia de Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial teñen coñecemento das nocións básicas de aplicacións entre conxuntos, matrices, determinantes e resolución de sistemas.

A finalidade desta unidade é a de presentar a estreita relación existente entre aplicacións lineais e matrices e, ó mesmo tempo, utilizar estes coñecementos para a resolución dos sistemas de ecuacións lineais. En concreto veremos que o estudo das aplicacións lineais redúcese ó estudo das matrices asociadas segundo dúas bases fixas nos dous espazos vectoriais.

Á parte dos propios contidos matemáticos, esta unidade contribuirá ó desenvolvemento da capacidade de razoamento e da capacidade de formalización de demostracións matemáticas.

## OS OBXECTIVOS

Os obxectivos que se pretenden cubrir nesta unidade didáctica son:

- comprender a definición de aplicación lineal;
- establecer a conexión entre núcleo dunha aplicación lineal e o seu carácter inxectivo;
- establecer a relación entre imaxe dunha aplicación lineal e o seu carácter sobrexectivo;
- que o alumno comprenda que unha aplicación lineal está determinada polas imaxes dos vectores dunha base;
- clasificar os espazos vectoriais sobre un corpo, en función da súa dimensión;
- expresar a relación entre aplicacións lineais e matrices respecto de bases fixadas;
- que o alumno sexa capaz de relacionar as matrices asociadas a unha aplicación lineal segundo diferentes bases;

— utilizar os coñecementos adquiridos sobre aplicacións lineais para a resolución de sistemas de ecuacións lineais.

## A METODOLOXÍA

O desenvolvemento da unidade estruturarase en clases expositivas, de seminario e laboratorio.

As clases expositivas consistirán basicamente en docencia impartida polo profesor, dedicadas á exposición dos contidos teóricos e á resolución de problemas ou exercicios. Ás veces o modelo aproximarase á lección maxistral e noutras procurarase unha maior implicación do alumnado.

As clases de seminario e laboratorio dedicaranse á resolución de dúbidas formuladas polo alumnado, á discusión de cuestións teórico-prácticas e á resolución de exercicios propostos previamente. Tratarase de que o alumnado teña unha participación activa coa seguridade de que esta lle proporcionará as destrezas necesarias para o desenvolvemento da súa formación matemática.

Todas as tarefas do alumnado (estudo, traballos, programas de ordenador, lecturas, exposicións, exercicios, prácticas...) serán orientadas polo profesor.

Con respecto ás titorías individualizadas ou en grupo moi reducido, atenderase ó alumnado para discutir cuestións concretas en relación coas súas tarefas ou para tratar de resolver calquera outra dificultade relacionada coa materia.

## OS CONTIDOS BÁSICOS

### 1. Introdución

Esta unidade, continuación da unidade sobre os espazos vectoriais, é unha das partes fundamentais da materia Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial do primeiro curso do Grao en Matemáticas.

Para a introdución da noción de aplicación lineal apoiarémonos nos conceptos previos de aplicación entre conxuntos.

Veremos a identificación existente entre as matrices e as aplicacións lineais entre espazos vectoriais de dimensión finita.

Acabaremos a unidade didáctica apoiándonos nas propiedades das aplicacións lineais para demostrar o teorema de Rouché-Frobenius.

### 2. Definición de aplicación lineal. Exemplos

**Definición**

Sexan **V** e **W** espazos vectoriais sobre o mesmo corpo **K**.

Unha aplicación f : **V** $\rightarrow$ **W** dise que é unha aplicación lineal entre os espazos vectoriais **V** e **W** se verifica:

i) $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $\forall\, v_1, v_2 \in \mathbf{V}$.

ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, $\forall\, v \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbf{K}$.

**Exemplos**

1. A aplicación f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 2x)$ é unha aplicación lineal
2. A aplicación f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(x, y) = (x^2 + 2y, 3x - y, 2x)$ non é unha aplicación lineal.
3. A aplicación f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y, z) = (x + y, 3z)$ é unha aplicación lineal.
4. A aplicación f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y, z) = (x + y, 3xz)$ non é unha aplicación lineal.
5. A aplicación f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (7x + y, 8x - 3y)$ é unha aplicación lineal.
6. A aplicación f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (7x + y, 8x - 3)$ non é unha aplicación lineal.

**Proposición (Propiedades básicas)**

Se f : **V** $\rightarrow$ **W** é unha aplicación lineal, entón:

i) $f(0_V) = 0_W$.

ii) $f(-v) = -f(v)$, $\forall\, v \in V$.

iii) $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$

iv) Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + .... + \alpha_n v_n$, entón

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + .... + \alpha_n f(v_n)$$

## 3. Núcleo e Imaxe dunha aplicación lineal. Aplicacións lineais inxectivas e sobrexectivas

**Definición**

Se $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é unha aplicación lineal, entón denomínase núcleo de f e denótase por Ker(f) ó conxunto:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{V} \ / \ f(x) = 0_W\}$$

**Proposición**

Se $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é unha aplicación lineal, entón

i) Ker(f) é subespazo de **V**.

ii) Im(f) é subespazo de W.

iii) Se **U** é subespazo de **W**, $f^{-1}(\mathbf{U})$ é subespazo de **V**.

**Definición**

a) Unha aplicación lineal inxectiva chámase monomorfismo.

b) Unha aplicación lineal sobrexectiva chámase epimorfismo.

c) Unha aplicación lineal bixectiva chámase isomorfismo.

d) Unha aplicación lineal $f:\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ dun espazo vectorial en si mesmo chámase endomorfismo.

e) Un endomorfismo bixectivo chámase automorfismo.

**Proposición**

Sexa $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é unha aplicación lineal, entón:

a) f é inxectiva $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{0_V\}$.

b) f é sobrexectiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{W}$.

**Proposición**

Se $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é unha aplicación lineal e $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é unha base de **V**, entón $\{f(E_1), f(E_2), \ldots, f(E_n)\}$ é un conxunto de xeradores de Im(f).

**Corolario**

Se $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ é unha aplicación lineal e $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é unha base de **V**, entón f é sobrexectiva $\Leftrightarrow$ $\mathbf{W} = <\{f(E_1), f(E_2), \ldots, f(E_n)\}>$.

**Proposición**

Se f: **V** $\rightarrow$ **W** é un isomorfismo, entón $f^{-1}$: **W** $\rightarrow$ **V** tamén é un isomorfismo.

**Definición**

Vemos que un isomorfismo é unha aplicación lineal que ten inversa, que tamén é aplicación lineal.

Dous espazos vectoriais V, W dise que son isomorfos se existe un isomorfismo entre eles e escríbese V $\cong$ W.

**Exemplo**

Se V é un K-espazo vectorial de dimensión n, entón V $\cong$ $K^n$. En efecto, se B = {$E_1$, $E_2$, ..., $E_n$} é unha base de **V**, entón a aplicación f: **V** $\rightarrow$ $\mathbf{K}^n$, dada por f($\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$) = ($a_1$, ..., $a_n$) é un isomorfismo.

**Proposición**

Se f: **V** $\rightarrow$ **W** é unha aplicación lineal, entón:

dim **V** = dim (Ker(f)) + dim (Im(f)).

**Definición**

Se f: **V** $\rightarrow$ **W** é unha aplicación lineal, entón denomínase rango da aplicación lineal a dimensión da imaxe:

$$\text{rang}(f) = \dim_K(\text{Im}(f)) = \dim_K(f(V))$$

**Proposición**

Se **V** e **W** son dous espazos vectoriais sobre un corpo **K**, entón unha aplicación lineal f: **V** $\rightarrow$ **W** está completamente determinada se se coñecen as imaxes dos vectores dunha base B = {$E_1$, $E_2$, …, $E_m$} de **V.**

**Exercicio**

Sexa B = {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} unha base de $\mathbb{R}^3$ e f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicación lineal dada por f(1, 1, 0) = (5, 3), f(1, 0, 1) = (3, 2) e f(0, 1, 1) = (2, 2). Calcula f(7, 1, 2), f(4, 9, 5) e f(a, b, c) para un vector arbitrario (a, b, c) $\in \mathbb{R}^3$.

**Exercicio**

Sexa B = {(2, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)} unha base de $\mathbb{R}^3$ e f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicación lineal dada por f(2, 1, 0) = (4, 3), f(1, 0, 1) = (3, 4) e f(1, 1, 1) = (2, 2). Calcula f(7, 5, 5), f(9, 4, 3) e f(a, b, c) para un vector arbitrario (a, b, c) $\in \mathbb{R}^3$.

**Teorema (Teorema de clasificación)**

Sexan **V** e **W** espazos vectoriais sobre o mesmo corpo **K**. Entón **V** é isomorfo a **W** se, e só se, dim **V** = dim **W**.

## 4. Matriz dunha aplicación lineal

**Proposición**

Sexa f : **V** $\longrightarrow$ **W** unha aplicación lineal.

B = {$E_1$, $E_2$, …, $E_m$} base de **V** e B'= {$F_1$, $F_2$, …, $F_n$} base de **W**

Entón:

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & .. & .. & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & .. & .. & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & .. & .. & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & .. & .. & \text{de } B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

**Nota**

Se **V** é un espazo vectorial e se ($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) son as coordenadas dun vector v$\in$**V**, respecto dunha base B de **V**, escribirase

$$v = (x_1, x_2, ..., x_n)_B.$$

**Exercicio**

Sexa B = {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} unha base de $\mathbb{R}^3$ e B' = {(1, 1), (2, 1)} unha base de $\mathbb{R}^2$.

Sexa f : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicación lineal dada por $f(1, 1, 0) = (1, 2)_{B'}$; $f(1, 0, 1) = (1, 1)_{B'}$; $f(0, 1, 1) = (2, 0)_{B'}$;

Calcula f(7, 1, 2), f(4, 9, 5) e f(a, b, c) para un vector (a, b, c)$\in \mathbb{R}^3$.

**Proposición**

Sexa f : **V** $\longrightarrow$ **W** é unha aplicación lineal, B = {$E_1$, $E_2$, …, $E_m$} unha base de **V** e B'= {$F_1$, $F_2$, …, $F_n$} unha base de **W**.

Se M $\in$ $M_{nxm}$(**K**) é unha matriz tal que

$$M \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

Entón

$$M = \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & .. & .. & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & .. & .. & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & .. & .. & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & .. & .. & \text{de } B' \end{pmatrix}$$

**Definición**

Sexa f : **V** $\rightarrow$ **W** unha aplicación lineal.

B = {$E_1$, $E_2$, …, $E_m$} base de **V** e B'= {$F_1$, $F_2$, …, $F_n$} base de **W**

Chámase **matriz asociada** a f, respecto das bases B e B', á matriz

$$(f_{BB'}) = \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & .. & .. & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & .. & .. & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & .. & .. & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & .. & .. & \text{de } B' \end{pmatrix}$$

**Exercicio**

Sexa B = {(2, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)} unha base de $\mathbb{R}^3$ e B' = {(1, 1), (2, 1)} unha base de $\mathbb{R}^2$.

Sexa f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicación lineal dada por

$f(2, 1, 0) = (2, 1)_{B'}$, $f(1, 0, 1) = (5, -1)_{B'}$ e $f(1, 1, 1) = (2, 0)_{B'}$.

Utiliza a matriz asociada a f segundo as bases B e B' para calcular f(7, 5, 5), f(9, 4, 3) e f(a, b, c) para un vector arbitrario $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

**Proposición**

Se f: **V** $\rightarrow$ **W** e g: **W** $\rightarrow$ **U** son aplicacións lineais, entón $g \circ f$: **V** $\rightarrow$ **U** é unha aplicación lineal.

**Proposición**

Sexan f: **V** $\rightarrow$ **W** e g: **W** $\rightarrow$ **U** aplicacións lineais e B, B' e B" bases de **V**, **W** e **U** respectivamente. Entón

$$(g_{B'B''})(f_{BB'}) = ((g \circ f)_{BB''})$$

## 5. Cambio de base para aplicacións lineais

**Definición**

Se B e B' son dúas bases do mesmo espazo vectorial **V**, chamamos **matriz de cambio de bas**e de B a B' á matriz asociada á aplicación identidade **I**: **V** $\rightarrow$ **V** respecto das bases B e B': $(I_{BB'})$

Se B = {$E_1$, $E_2$, …, $E_n$} e B'= {$F_1$, $F_2$, …, $F_n$} son bases de **V**, entón

$$(I_{BB'}) = \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & .. & .. & \text{coord.} \\ \text{de } E_1 & \text{de } E_2 & .. & .. & \text{de } E_n \\ \text{respecto} & \text{respecto} & .. & .. & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & .. & .. & \text{de } B' \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \text{coord..} & \text{coord..} & . & . & \text{coord..} \\ \text{de } E_1 & \text{de } E_2 & . & . & \text{de } E_n \\ \text{respecto} & \text{respecto} & . & . & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & . & . & \text{de } B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de v} \\ \text{respecto} \\ \text{de B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de v} \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

**Nota**

Se B é unha base dun espazo vectorial **V** e consideramos **I**: **V** $\rightarrow$ **V** entón $(I_{BB})$ = **I** (sendo **I** a matriz identidade).

**Nota**

Se B e B' son dúas bases do mesmo espazo vectorial **V**, entón

$(I_{BB'}) \circ (I_{B'B}) = (I_{B'B'}) = \mathbf{I}$

$(I_{B'B}) \circ (I_{BB'}) = (I_{BB}) = \mathbf{I}$

e en consecuencia $(I_{BB'}) = (I_{B'B})^{-1}$

**Proposición** (matrices asociadas a unha aplicación lineal respecto a bases distintas).

Se f: **V** $\rightarrow$ **W** é unha aplicación lineal, $B_1$ e $B_2$ bases de **V** e $B'_1$ e $B'_2$ bases de **W**, entón:

$$(\mathbf{I}_{B'_1 B'_2})(f_{B_1 B'_1})(\mathbf{I}_{B_2 B_1}) = (f_{B_2 B'_2})$$

## 6. Aplicacións Lineais e Sistemas de Ecuacións Lineais

**Definición**

Dado un sistema con matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & .. & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .. & .. & \alpha_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & .. & .. & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & .. & \alpha_{1n} & d_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .. & .. & \alpha_{2n} & d_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & .. & .. & \alpha_{mn} & d_m \end{pmatrix}$$

como matriz de coeficientes e matriz ampliada, respectivamente, denominamos **aplicación lineal asociada** a dito **sistema** de ecuacións lineais á aplicación f: $\mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$ con $(f_{CC'}) = A$, sendo C e C' as bases canónicas de $\mathbf{K}^n$ e $\mathbf{K}^m$ respectivamente.

É dicir, se consideramos o sistema anterior e f é a súa aplicación lineal asociada, f: $\mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$ con

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ .. \\ .. \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix}, \text{ entón}$$

a resolución do sistema é equivalente a calcular o conxunto

$$f^{-1}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ .. \\ .. \\ d_n \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \,/\, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ .. \\ .. \\ d_n \end{pmatrix} \right\}$$

**Nota**

Se consideramos o sistema anterior e f é a súa aplicación lineal asociada, entón un elemento $v_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ é **solución do sistema** si $f(v_0) = D$.

**Proposición**

Se f: $\mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$ é unha aplicación lineal con $(f_{CC'}) = A$, sendo C e C' as bases canónicas de $\mathbf{K}^n$ e $\mathbf{K}^m$, respectivamente, entón

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rang} A$$

**Proposición**

Consideramos un sistema homoxéneo con m ecuacións e n incógnitas

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Se A é a matriz de coeficientes e rango(A) = r, entón as solucións do sistema dependen de n – r parámetros.

**Proposición**

Se consideramos o sistema anterior e f é a súa aplicación lineal asociada, entón:

i) Se $v_0 \in \mathbf{K}^n$ é solución do sistema, $v_0 + v$ é solución do sistema, $\forall\, v \in \text{Ker } f$.

ii) Se $v_0, v_1 \in \mathbf{K}^n$ son solucións do sistema, $\exists\, v \in \text{Ker } f \,/\, v_1 = v_0 + v$.

**Corolario**

Se consideramos o sistema anterior e f é a súa aplicación lineal asociada e $v_0$ é unha solución do sistema, entón o resto de solucións son da forma

$$\{\text{solucións do sistema}\} = \{v_0 + v /\ v \in \text{Ker } f\}.$$

**Proposición (Teorema de Rouche-Frobenius )**

Se consideramos o sistema:

$$\begin{array}{c}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = d_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = d_2 \\
................ \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n = d_m
\end{array}$$

e denotamos por A a matriz de coeficientes e por B a matriz ampliada temos:

1) rang A < rang B $\Leftrightarrow$ sistema incompatible.
2) rang A = rang B = n $\Leftrightarrow$ sistema compatible determinado.
3) rang A = rang B < n $\Leftrightarrow$ sistema compatible indeterminado.
4) Se o sistema é homoxéneo ($d_i = 0$, i = 1, ..., m), entón:
   - i) rang A = n $\Leftrightarrow$ a única solución é (0, ..., 0).
   - ii) rang A < n $\Leftrightarrow$ o sistema é indeterminado.

**Corolario**

Consideramos o sistema con m ecuacións e n incógnitas

$$\begin{array}{c}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = d_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = d_2 \\
................ \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n = d_m
\end{array}$$

Se o sistema é compatible con rang(A) = rang(B) = r e $v_0$ é unha solución do sistema, entón existen $E_1, E_2, ..., E_{n-r}$ vectores de $\mathbf{K}^n$ linealmente independentes (todos eles solucións do sistema homoxéneo asociado) tal que as solucións do sistema veñen dadas por

$$v = v_0 + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + ... + \lambda_{n-r} E_{n-r},\ \ \lambda_i \in \mathbf{K},\ i = 1, 2, ..., n\text{-}r.$$

## ACTIVIDADES PROPOSTAS

- Comprobación dos exemplos e realización dos exercicios propostos ó longo da Unidade.
- Tamén se deberán resolver os exercicios propostos nun boletín con cuestións teóricas e prácticas.
- Os alumnos poden resolver os exercicios de forma individual ou en grupo pero deben comprender os fundamentos e desenvolver as capacidades que lles permitan enfrontarse a exercicios de dificultade análoga.
- Adicionalmente poderase realizar algunha proba curta.

## AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Esta Unidade Didáctica forma parte da materia Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial e a súa avaliación enmárcase no contexto global desa materia:

Ó longo do curso requirirase do alumnado a resolución de exercicios correspondentes a cada unha das unidades e a participación activa nas clases de laboratorio e seminario. Ademais poderanse realizar probas escritas teórico-prácticas ó longo do cuadrimestre. A puntuación conxunta destas actividades (C) representará o 25% da nota final.

O 75 % restante sairá do exame final (E). Este exame será escrito e conterá preguntas de teoría, cuestións teórico-prácticas e exercicios. Para superar a materia os estudantes deberán obter cando menos o 40% da nota do exame.

Para o cómputo da cualificación final (F) terase en conta a avaliación continua (C) e a cualificación do exame final (E) e aplicarase a seguinte fórmula:

$$F = \max(E, 0{,}25 \cdot C + 0{,}75 \cdot E)$$

## BIBLIOGRAFÍA


BURGOS, J. (2006): *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. Madrid: McGraw Hill.

CASTELLET, M.; LLERENA, I. (1991): *Álgebra Lineal y Geometría*. Barcelona: Reverté/UAB.

HERNÁNDEZ, E., VÁZQUEZ, M.J., ZURRO, M.A. (2012): *Álgebra lineal y Geometría*. Madrid: Pearson.

MERINO, L., SANTOS, E. *Álgebra Lineal con métodos elementales*. Madrid: Thomson.

VILLA, A. (1994): *Problemas de Álgebra*. Madrid: CLAGSA-I.C.A.I.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

9 788498 879544