



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

GENERACIÓN DE MEDIDAS

Paulina Traba Piñeiro

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

GENERACIÓN DE MEDIDAS

Paulina Traba Piñeiro

Junio, 2024

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis matemático
Título: Generación de medidas
Breve descripción del contenido
En este trabajo estudiaremos cómo extender, empleando los teoremas de Carathéodory y Hahn, medidas definidas sobre álgebras de conjuntos a espacios de medida completos. Para ilustrar toda la teoría estudiada, emplearemos como ejemplo base la construcción del espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes.
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. La recta real ampliada	1
1.2. Espacios de medida	2
2. Medidas en álgebras de conjuntos	7
2.1. Álgebra y medida sobre un álgebra	7
2.2. La medida y el álgebra de conjuntos de Lebesgue-Stieltjes	8
3. Extensión de medidas	27
3.1. Medidas exteriores	27
3.2. Teoremas de extensión de medidas	30
3.3. El espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes	40
Bibliografía	53

Resumen

En este trabajo trataremos aspectos generales de la teoría de la medida para, posteriormente, centrarnos en la construcción y las propiedades de la medida de Lebesgue-Stieltjes. Comenzaremos introduciendo un álgebra de conjuntos para construir sobre él la medida mencionada. A continuación, probaremos ciertos teoremas de extensión de medidas y, trabajando con la medida exterior, seremos capaces de construir el espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes. Finalmente, estudiaremos algunas propiedades interesantes sobre su estructura y forma y trataremos el caso de conjuntos que no son medibles con respecto a la medida de Lebesgue-Stieltjes.

Abstract

In this work we will deal with general aspects of measure theory and then focus on the construction and properties of the Lebesgue-Stieltjes measure. We will begin by introducing an algebra of sets in order to construct on it the mentioned measure. Then, we will prove certain measure extension theorems and, working with the exterior measure, we will be able to construct the Lebesgue-Stieltjes measure space. Finally, we will study some interesting properties about its structure and form and we will treat the case of sets that are not measurable with respect to the Lebesgue-Stieltjes measure.

Introducción

La teoría de la medida es una rama de las matemáticas que se encarga de formalizar la idea del tamaño de los subconjuntos de un conjunto dado. Esto resulta de utilidad para dar sentido a la noción de longitud de conjuntos más complejos que los intervalos de la recta real, pues, en general, su cálculo no parece intuitivo. Además del análisis matemático, esta rama también es de interés en el área de probabilidad y estadística.

La teoría de la medida permite, además, estudiar y desarrollar el cálculo de integrales. Es sabido que la integrabilidad de una función puede depender del “tamaño” del conjunto de sus puntos de discontinuidad. La integral de Lebesgue fue creada y estudiada por el matemático francés Henri Lebesgue a principios del siglo XX para superar las limitaciones de la integral de Riemann.

En la teoría que emplea Lebesgue, el cálculo de integrales se restringe a una clase de funciones llamadas funciones medibles. Se sabe que entre sus definiciones de medida e integral incluyó algunos de los resultados de Borel. Así, la definición de Lebesgue hizo posible calcular integrales para una clase más amplia de funciones. Un desarrollo más detallado de estos aspectos puede encontrarse en [Gentili, 2020].

Entre las medidas más destacadas se encuentra la de Lebesgue, cuya idea se basa en aproximar la medida de un conjunto arbitrario mediante la longitud, área o volumen de una colección adecuada de intervalos de tamaño conocido. En el momento en el que Lebesgue describe su medida, la teoría establecida era la de Jordan y Peano. Mientras que ellos aproximan los conjuntos a medir con una cantidad finita de intervalos, Lebesgue, en contraposición, utiliza una colección numerable de ellos. De esta manera, la medida de Lebesgue se basa en el concepto de recubrimiento numerable. Esto hace que su medida posea un carácter muy general. En este contexto, surge la necesidad de considerar unas familias especiales de conjuntos, formalmente conocidas como álgebras y σ -álgebras, que se pueden construir fácilmente a partir de colecciones de conjuntos más sencillos y que permiten dotar de rigor al planteamiento previamente mencionado.

En concreto, trabajando en la recta real, la medida de Lebesgue se basa en la longitud de un segmento. Si, en lugar de medir intervalos, el objetivo es medir el incremento de una función,

en particular, monótona creciente y continua por la izquierda, entonces surge la necesidad de generalizar la función longitud convencional. Así, llamamos medida de Lebesgue-Stieltjes a la generalización de la medida de Lebesgue.

Para establecer una teoría de la medida que fuese capaz de medir el mayor número de subconjuntos en un espacio dado, Lebesgue procede a utilizar su medida exterior. Surgen de este modo varios teoremas de extensión de medidas, fundamentales para construir el espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes, con propiedades muy interesantes y más completas que para el de Lebesgue.

En el desarrollo del presente trabajo, seguiremos la siguiente estructura. En el primer capítulo, que consta, esencialmente, de preliminares, comenzaremos definiendo la recta real ampliada, así como conceptos básicos de la teoría de la medida que resultarán de gran utilidad en razonamientos posteriores.

En el segundo capítulo, introduciremos una colección de conjuntos con la que trabajaremos durante todo el trabajo. Veremos que se trata de un álgebra de conjuntos y definiremos una medida sobre ella a partir de la longitud generalizada de un intervalo.

Con el fin de trabajar sobre una familia más amplia de conjuntos, en el tercer capítulo, definiremos el concepto de medida exterior y extenderemos a la recta real la medida construida en el capítulo anterior.

A continuación, probaremos los Teoremas de Carathéodory y Hahn junto con algún contraejemplo explicativo y, gracias a ellos, restringiremos la medida exterior que definíamos antes a una σ -álgebra de conjuntos. De esta manera, conseguiremos definir la medida de Lebesgue-Stieltjes y su espacio de medida, del que estudiaremos algunas de sus propiedades más interesantes y veremos algún ejemplo ilustrativo.

Para concluir, introduciremos los conjuntos que no son medibles en el sentido de Lebesgue-Stieltjes y veremos algunos aspectos que diferencian a esta medida con la de Lebesgue y que hace que resulte tan compleja la construcción de conjuntos de este tipo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. La recta real ampliada

Con el fin de trabajar con intervalos que incluyen valores infinitos, tiene sentido definir la recta real ampliada para poder manejar esos intervalos de manera conveniente.

Definición 1.1 (Recta real ampliada). Llamaremos *recta real extendida o ampliada* al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ obtenido al añadir los elementos $-\infty$ y $+\infty$ a la recta real \mathbb{R} .

Existen múltiples motivos por los cuales consideramos la recta real ampliada, como tomar la longitud de \mathbb{R} como $+\infty$ o definir el supremo de un conjunto no vacío de números reales.

Ya conocemos el hecho de que el supremo de un conjunto acotado de números reales es único y es un número real. No obstante, podríamos tener la necesidad de trabajar con conjuntos no acotados. En ese caso, definimos el supremo de un conjunto de números reales que no posee una cota superior como $+\infty$ y, entonces, cualquier subconjunto no vacío de \mathbb{R} o $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un único supremo en $\overline{\mathbb{R}}$. Análogamente, cualquier subconjunto no vacío de \mathbb{R} o $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un único ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$.

A continuación, resultará interesante definir algunas operaciones entre elementos de la recta real y $\pm\infty$. Dado $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$,
- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$,
- $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$,
- $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty$, si $x > 0$,

- $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty$, si $x < 0$,
- $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = 0$, si $x = 0$.
- $x/(\pm\infty) = 0$,
- $(\pm\infty)/x = \pm\infty$, si $x > 0$,
- $(\pm\infty)/x = \mp\infty$, si $x < 0$.

No están definidas las operaciones $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ y $0/0$.

1.2. Espacios de medida

En este capítulo, además de definir el concepto de recta real ampliada, introduciremos los espacios de medida y algunas de sus propiedades más relevantes.

Para ello, comenzamos dando un resultado que nos servirá de base durante toda la sección. En lo que sigue trabajaremos con un conjunto de referencia X , no vacío, y del cual vamos a querer medir algunos de sus subconjuntos. Comenzamos describiendo algunas familias de subconjuntos.

Definición 1.2 (σ -Álgebra de conjuntos). Dado un conjunto X no vacío, diremos que una familia \mathcal{Y} de subconjuntos de X , $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es una σ -álgebra en X si satisface:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{Y}$.
2. $E \in \mathcal{Y} \Rightarrow E^c \in \mathcal{Y}$.
3. $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{Y}$ (σ -aditividad).

Definición 1.3 (Espacio medible). Dado un conjunto no vacío X y una σ -álgebra \mathcal{Y} , llamaremos *espacio medible* al par (X, \mathcal{Y}) .

Observación 1.4. Además de para uniones, una σ -álgebra es cerrada para intersecciones numerables. Para comprobar esto, nos basamos en las leyes de De Morgan de forma que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_n), \quad (1.1)$$

y también en la estabilidad de cualquier σ -álgebra con respecto a la complementación (condición 2 de la definición de σ -álgebra).

En el siguiente resultado veremos algunas propiedades de las σ -álgebras.

Proposición 1.5. *Dado un espacio medible (X, \mathcal{Y}) , se cumple que:*

1. Si $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{Y}$, entonces $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{Y}$.
2. Si $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{Y}$, entonces $\bigcap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{Y}$.
3. Si $E, F \in \mathcal{Y}$, entonces $E \setminus F \in \mathcal{Y}$.

Demostración. Probaremos cada apartado por separado.

1. Sea $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}$ una colección numerable de conjuntos de la σ -álgebra cumpliendo que $F_j = E_j \in \mathcal{Y}$ para $j = 1, \dots, n$ y $F_j = \emptyset \in \mathcal{Y}$, para $j \geq n + 1$. Ahora bien, por ser \mathcal{Y} una σ -álgebra se tendrá que

$$\bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{Y}.$$

2. Consideremos $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y}$ de modo que $F_j = E_j \in \mathcal{Y}$ para $j = 1, \dots, n$ y $F_j = X \in \mathcal{Y}$, para $j \geq n + 1$. De esta forma, por la observación anterior obtenemos que

$$\bigcap_{j=1}^n E_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{Y},$$

de lo que deducimos que la σ -álgebra es cerrada para intersecciones finitas.

3. Tenemos que demostrar que $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{Y}$. Como la σ -álgebra es cerrada para la complementación y para la intersección finita de elementos, como acabamos de ver, queda probado que $E \cap F^c \in \mathcal{Y}$.

□

Una vez vistos los conceptos de σ -álgebra y espacio medible, pasaremos a formalizar la noción de medida.

Definición 1.6 (Medida sobre una σ -álgebra). Sean X un conjunto no vacío e \mathcal{Y} una σ -álgebra de subconjuntos de X . Se dice que una función $\mu : \mathcal{Y} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es una *medida* sobre \mathcal{Y} si verifica:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $0 \leq \mu(E) \leq +\infty$, $\forall E \in \mathcal{Y}$.

3. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cualquier colección disjunta de elementos de \mathcal{Y} , entonces:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad (1.2)$$

Esto es, μ es numerablemente aditiva.

Definición 1.7. Sean X un conjunto no vacío e \mathcal{Y} una σ -álgebra de subconjuntos de X . Dada una medida μ definida en \mathcal{Y} diremos que:

1. es *finita* si $\mu(X) < +\infty$.
2. es σ -*finita* si existe una sucesión $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y}$ tal que

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,$$

donde $\mu(E_j) < +\infty$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Definición 1.8 (Espacio de medida). Dado un conjunto X no vacío, \mathcal{Y} una σ -álgebra en X y μ una medida definida en \mathcal{Y} , se tiene que la terna (X, \mathcal{Y}, μ) es un *espacio de medida*.

Veamos ahora algunas de las propiedades de los espacios de medida.

Proposición 1.9. Sea (X, \mathcal{Y}, μ) un espacio de medida, se cumple que:

1. Dados dos elementos $E, F \in \mathcal{Y}$, $E \subseteq F$, se tiene que $\mu(E) \leq \mu(F)$ (*monotonía de la medida sobre una σ -álgebra*).
2. Si $E, F \in \mathcal{Y}$ son tales que $E \subseteq F$ y $\mu(E) < +\infty$, entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.
3. Dada una colección finita de conjuntos $\{E_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{Y}$, se cumple que:

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(E_j), \quad (1.3)$$

es decir, se tiene la *subaditividad finita de la medida*.

Demostración. Demostraremos cada apartado por separado.

1. Al ser $F = E \cup (F \setminus E)$ y tratarse de una unión disjunta ($E \cap (F \setminus E) = \emptyset$), por el tercer punto de la definición de medida sobre una σ -álgebra se tendrá que $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$. Ahora bien, como $\mu(F \setminus E) \geq 0$, se tiene el resultado.

2. Como $\mu(E) < +\infty$, podemos utilizar de nuevo la igualdad del apartado anterior y restar esa cantidad finita,

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \Rightarrow \mu(F) - \mu(E) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) - \mu(E) = \mu(F \setminus E),$$

con lo que concluimos.

3. Procederemos por el principio de inducción. Comenzamos viendo que se cumple para $n = 2$. Sean $E, F \in \mathcal{Y}$ y pongamos $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$, siendo la unión anterior disjunta. Así, del hecho de que $F \setminus E \subseteq F$ y de la primera condición se tiene que

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F).$$

De esta forma, suponemos que la condición es cierta para $n - 1$ y probemos que se cumple para n (en este caso, $n \geq 3$ para que así $n - 1$ valga, por lo menos, 2). Dado que

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \in \mathcal{Y},$$

se tendrá que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \cup E_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right) + \mu(E_n) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \mu(E_j) + \mu(E_n) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j) \end{aligned}$$

por tanto, tenemos que se cumple para n y se finaliza la prueba.

□

Gracias a la Definición 1.6 sabemos que toda medida sobre una σ -álgebra \mathcal{Y} debe verificar que la medida de la unión disjunta de elementos de \mathcal{Y} sea igual a la suma de las medidas. A continuación, veremos qué ocurre cuando no podemos asegurar que tales conjuntos sean disjuntos. Para ello, es necesario introducir un resultado previo, cuya demostración se encuentra en [Bartle, 1995].

Proposición 1.10. *Sea (X, \mathcal{Y}, μ) un espacio de medida, se cumple que:*

1. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y}$ es una sucesión creciente de conjuntos de la σ -álgebra ($E_j \subseteq E_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$), entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n)$$

(continuidad superior).

2. Si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de la σ -álgebra ($F_{j+1} \subseteq F_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$), y $\mu(F_1) < +\infty$, entonces:

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_n)$$

(continuidad inferior).

Corolario 1.11 (Subaditividad numerable). Sea (X, \mathcal{Y}, μ) un espacio de medida y $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y}$ una colección de elementos de la σ -álgebra (no necesariamente disjuntos). Se cumple que:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ e introducimos los siguientes conjuntos:

$$B_n = \bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{Y}.$$

Se cumple que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

y, además, $B_n \subseteq B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que estamos en las condiciones del primer punto del resultado anterior y se verifica que:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n).$$

Así, por la propiedad de subaditividad finita de la medida, se tiene que:

$$\mu(B_n) = \mu \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(E_j),$$

de donde:

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \mu(E_j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

Capítulo 2

Medidas en álgebras de conjuntos

A lo largo de este capítulo y siguientes recorreremos algunos aspectos básicos de la teoría de la medida, con el fin de ver cómo pueden ser construidos espacios de medida de una forma genérica a partir de un álgebra de conjuntos y una medida asociada. Estos conceptos nos servirán para poder construir, entre otros, el espacio de medida de Lebesgue en \mathbb{R} y su generalización, el espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes. Para desarrollar los contenidos de este capítulo hemos seguido, principalmente, las referencias [Bartle, 1995] y [Márquez Albés, 2021].

2.1. Álgebra y medida sobre un álgebra

Comenzamos definiendo el concepto de álgebra de conjuntos para, posteriormente, construir el álgebra con el cual trabajaremos a lo largo de todo el capítulo.

Definición 2.1 (Álgebra de conjuntos). Dado un conjunto X no vacío, diremos que una familia \mathcal{X} de subconjuntos de X , $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es un *álgebra de conjuntos* si satisface que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{X}$.
2. $E \in \mathcal{X} \Rightarrow E^c \in \mathcal{X}$.
3. $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{X} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{X}$.

A continuación, definimos el concepto sobre el cual basaremos la mayor parte del desarrollo de este trabajo. Puesto que nuestro objetivo es construir medidas sobre álgebras de conjuntos, es fundamental conocer el siguiente término.

Definición 2.2 (Medida sobre un álgebra). Sea \mathcal{X} un álgebra de conjuntos sobre un conjunto X , diremos que una función μ con valores en la recta real ampliada y definida sobre \mathcal{X} es una *medida* si cumple las siguientes condiciones:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{X}$.
3. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cualquier colección disjunta de conjuntos de \mathcal{X} tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{X}$, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

2.2. La medida y el álgebra de conjuntos de Lebesgue-Stieltjes

Para construir el álgebra de conjuntos a la que hacíamos mención anteriormente, consideremos la siguiente definición.

Definición 2.3 (Conjuntos básicos). Definimos un *conjunto básico* de \mathbb{R} como un elemento del siguiente subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{C} = \{[a, b) : -\infty < a < b \leq +\infty\} \cup \{(-\infty, a) : -\infty < a \leq +\infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Adicionalmente, definimos \mathcal{A} como el conjunto formado por las uniones finitas y disjuntas de elementos básicos,

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{k=1}^n C_k : \{C_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{C}, C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j \right\}.$$

Comencemos viendo dos propiedades de las álgebras de conjuntos que nos serán de gran utilidad en el siguiente capítulo.

Lema 2.4. Dado un conjunto X no vacío y \mathcal{X} un álgebra de subconjuntos de X . Si $\{B_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{X}$, entonces $\bigcap_{j=1}^n B_j \in \mathcal{X}$.

Demostración. Si probamos que la propiedad se cumple para $n = 2$, razonando por inducción deducimos que se cumple para n y tendríamos el resultado buscado. Veamos esto.

Dados $C, D \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$C, D \in \mathcal{X} \Rightarrow C^c, D^c \in \mathcal{X} \Rightarrow C^c \cup D^c = (C \cap D)^c \in \mathcal{X} \Rightarrow C \cap D \in \mathcal{X},$$

de donde las implicaciones se siguen de la definición de álgebra de conjuntos y la igualdad se deduce de las leyes de De Morgan.

□

Lema 2.5. *Dado un conjunto X no vacío y \mathcal{X} un álgebra de subconjuntos de X . Si $C, D \in \mathcal{X}$, entonces $C \setminus D \in \mathcal{X}$.*

Demostración. Dados $C, D \in \mathcal{X}$ se tiene que

$$C, D \in \mathcal{X} \Rightarrow C, D^c \in \mathcal{X} \Rightarrow C \cap D^c = C \setminus D \in \mathcal{X}$$

como consecuencia de las leyes de De Morgan y del resultado anterior.

□

A continuación, probaremos dos lemas que nos resultarán útiles en razonamientos posteriores.

Lema 2.6. *Dado E un conjunto formado por una unión finita de elementos de \mathcal{C} , siempre podremos encontrar una combinación finita y disjunta de elementos de \mathcal{C} de forma que su unión sea E .*

Demostración. Supongamos que el conjunto $E \neq \mathbb{R}$, en caso contrario, $E = (-\infty, \infty) \in \mathcal{C}$. Se tendrá que el conjunto E puede expresarse de la siguiente forma:

$$E = \underbrace{\left[\bigcup_{j=1}^r (-\infty, a_j) \right]}_{\text{(I)}} \cup \underbrace{\left[\bigcup_{j=1}^s [b_j, +\infty) \right]}_{\text{(II)}} \cup \left[\bigcup_{j=1}^t [c_j, d_j) \right], \quad (2.1)$$

para ciertos $r, s, t \in \mathbb{N}$ y $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$ con $c_j < d_j$, $j = 1, \dots, t$.

A partir de la expresión anterior, veamos que podemos construir una nueva colección de conjuntos básicos disjuntos dos a dos tales que su unión sea, de nuevo, E .

En efecto, comencemos definiendo $a = \max\{a_j : j = 1, \dots, r\}$ y $b = \min\{b_j : j = 1, \dots, s\}$. Se tendrá que (I) = $(-\infty, a)$ y (II) = $[b, +\infty)$, por lo tanto:

$$E = (-\infty, a) \cup \left[\bigcup_{j=1}^t [c_j, d_j) \right] \cup [b, +\infty).$$

Ahora, realizaremos una serie de iteraciones para construir una colección de conjuntos básicos disjuntos cuya unión sea (2.1). A estos conjuntos los denotaremos por G_j , $j \in \mathbb{N}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que tanto (I) como (II) son distintos del vacío; en caso contrario, el resultado se deduce de forma inmediata del razonamiento que seguiremos a continuación.

Lo primero que haremos será suponer que $[c_j, d_j) \not\subseteq [(-\infty, a) \cup [b, +\infty)]$, $j \in \{1, \dots, t\}$, así como $[c_i, d_i) \not\subseteq [c_j, d_j)$, para $i \neq j$, (en caso contrario, basta con eliminar el intervalo más “pequeño” en ambos casos). Así, tendremos una nueva familia de intervalos $[c_j, d_j)$ que será posible reordenar de manera que $c_1 < c_2 < \dots < c_l$ con $l \leq t$. A continuación, procederemos de la siguiente manera:

- Si $c_1 \leq a$, entonces, necesariamente, $d_1 < b$ (en caso contrario, se contradice el hecho de que la unión sea distinta de \mathbb{R}). Definimos $G_1 = (-\infty, a)$, $G_2 = [a, d_1)$ y continuamos analizando los siguientes casos:
 - Si $c_2 \leq d_1$, entonces $d_2 < b$, siguiendo el mismo razonamiento que antes. Así, $G_3 = [d_1, d_2)$.
 - Si $c_2 > d_1$, tenemos 2 posibilidades:
 - Si $d_2 \geq b$, entonces $G_3 = [c_2, b)$, y $G_4 = [b, +\infty)$ (terminamos).
 - Si $d_2 < b$, entonces $G_3 = [c_2, d_2)$ y continuamos de forma análoga a los casos anteriores.
- Si $c_1 > a$, entonces $G_1 = (-\infty, a)$. Ahora, para seguir iterando, existen dos posibilidades:
 - Si $d_1 \geq b$, entonces $G_2 = [c_1, b)$ y $G_3 = [b, +\infty)$ (terminamos).
 - Si $d_1 < b$, entonces $G_2 = [c_1, d_1)$ y continuamos de forma análoga a los casos anteriores.

Al final del proceso tendremos el resultado buscado.

□

En el siguiente lema veremos que la intersección de dos conjuntos básicos es también un conjunto básico.

Lema 2.7. *Dados dos conjuntos $C, D \in \mathcal{C}$, su intersección pertenece a \mathcal{C} .*

Demostración. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se tiene que:

- Si $C = [a, b)$ y $D = [c, d)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, su intersección es o bien $\emptyset \in \mathcal{C}$ o $[\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) \in \mathcal{C}$.
- Si $C = [a, b)$ y $D = [c, +\infty)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, su intersección es o bien $\emptyset \in \mathcal{C}$ o $[\max\{a, c\}, b) \in \mathcal{C}$.
- Si $C = (-\infty, b)$ y $D = [c, d)$, con $b, c, d \in \mathbb{R}$, su intersección es o bien $\emptyset \in \mathcal{C}$ o $[c, \min\{b, d\}) \in \mathcal{C}$.

- Si $C = (-\infty, b)$ y $D = [c, +\infty)$, con $b, c \in \mathbb{R}$, su intersección es o bien $\emptyset \in \mathcal{C}$ o $[c, b) \in \mathcal{C}$.
- Si $C = \emptyset$, su intersección será $\emptyset \in \mathcal{C}$, para cualquier D .
- Si $C = \mathbb{R}$, su intersección será $D \in \mathcal{C}$, para cualquier D .

□

Ahora, veremos un lema que nos facilitará los cálculos en razonamientos posteriores. Este resultado nos permite asegurar que si tenemos una unión finita y disjunta de elementos de \mathcal{C} , siempre podremos reagrupar estos conjuntos de manera que el supremo de uno sea estrictamente menor que el ínfimo del siguiente. Así, encontraremos otra colección de elementos básicos separados entre sí, también finita y disjunta, cuya unión es exactamente la misma. Este hecho será útil a la hora de comprobar el número de componentes conexas de un conjunto del álgebra \mathcal{A} .

Lema 2.8. *Sea $E \in \mathcal{A}$, $E \neq \emptyset$. Existe $n \in \mathbb{N}$ y una familia $\{C_j\}_{j=1}^n$ de elementos de \mathcal{C} cumpliendo que*

- $C_j \neq \emptyset$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.
- $E = \bigcup_{j=1}^n C_j$.
- $\sup_{\mathbb{R}} C_j < \inf_{\mathbb{R}} C_{j+1}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. El primer punto es inmediato gracias a la definición de \mathcal{A} , ya que si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E = \bigcup_{j=1}^p C_j$, $C_j \in \mathcal{C}$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$. Así, por ser $E \neq \emptyset$ existe al menos un conjunto básico distinto del vacío que conforma E .

Para probar el segundo y el tercero, tomamos un punto arbitrario de cada conjunto, $x_j \in C_j$. Por ser las uniones anteriores disjuntas, se cumple que

$$x_{k(1)} < \dots < x_{k(j)} < \dots < x_{k(p)}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos reordenar los conjuntos C_j de partida para que tengan la numeración dada por la anterior cadena de desigualdades. De este modo, resulta claro que

$$\sup_{\mathbb{R}} C_k \leq \inf_{\mathbb{R}} C_{k+1}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p-1\}.$$

A partir de la anterior familia de conjuntos, generaremos otra para la cual el supremo de un conjunto sea estrictamente menor que el ínfimo del siguiente. Supongamos que existe un índice $k \in \{1, \dots, p-1\}$ tal que $\sup_{\mathbb{R}} C_k = \inf_{\mathbb{R}} C_{k+1}$. En ese caso, definimos los conjuntos

$$\tilde{C}_j = C_j, \text{ para } j \in \{1, \dots, k-1, k+2, \dots, p\}, \quad \tilde{C}_k = \emptyset \text{ y } \tilde{C}_{k+1} = C_k \cup C_{k+1} \in \mathcal{C} \quad (2.2)$$

donde la última unión es, claramente, un elemento de \mathcal{C} puesto que

- Si $C_k = (-\infty, b)$, $C_{k+1} = [b, c)$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $b < c$, entonces $\tilde{C}_{k+1} = (-\infty, c) \in \mathcal{C}$.
- Si $C_k = [a, b)$, $C_{k+1} = [b, c)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b < c$, entonces $\tilde{C}_{k+1} = [a, c) \in \mathcal{C}$.

Una vez hemos construido la familia $\{\tilde{C}_j\}_{j=1}^{p-1}$, puede ocurrir, o bien que exista un índice $m \in \{1, \dots, p-2\}$ de manera que $\sup_{\mathbb{R}} \tilde{C}_m = \inf_{\mathbb{R}} \tilde{C}_{m+1}$, en cuyo caso razonamos de forma análoga al caso anterior y tomamos una nueva colección de conjuntos de la forma (2.2) (repetimos este proceso hasta que no haya ningún otro índice para el cual se cumpla la igualdad anterior), o bien que no haya más índices.

Al final del proceso tendremos una colección de elementos separados $\{\tilde{C}_j\}_{j=1}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, $n \leq p$, de forma que $\sup_{\mathbb{R}} C_j < \inf_{\mathbb{R}} C_{j+1}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, y cuya unión es claramente igual a E . Notemos que el número de elementos básicos que tenemos al final puede ser menor que el de partida al haber eliminado los conjuntos vacíos que teníamos en (2.2).

□

Gráficamente, la idea del lema anterior sigue el siguiente esquema:

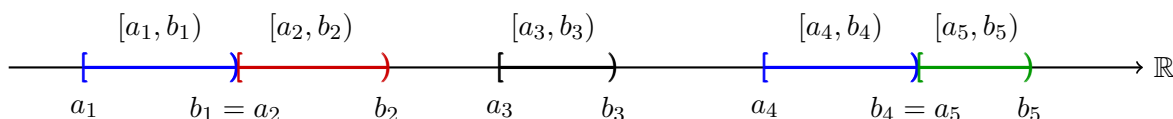


Figura 2.1: Colección de elementos básicos no separados.

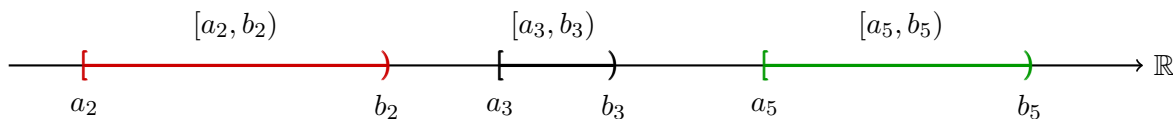


Figura 2.2: Colección de elementos básicos separados tras aplicar el Lema 2.8.

Ya estamos en disposición de demostrar que el conjunto \mathcal{A} es un álgebra de conjuntos sobre \mathbb{R} .

Proposición 2.9. \mathcal{A} es un álgebra de conjuntos sobre \mathbb{R} .

Demostración. Para ver esto, debemos verificar que se cumplen las tres condiciones de la Definición 2.1. Probaremos cada una por separado.

1. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

$$\emptyset \in \mathcal{C} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}.$$

2. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{A}$. En efecto, para los conjuntos básicos:

- Si $E = [a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, distinguimos:
 - $b \in \mathbb{R} \Rightarrow E = [a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) \in \mathcal{A}$ (unión finita y disjunta de elementos de \mathcal{C}).
 - $b = +\infty \Rightarrow E = [a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E = (-\infty, a) \in \mathcal{C} \Rightarrow (-\infty, a) \in \mathcal{A}$.
- Si $E = (-\infty, a)$, $-\infty < a \leq +\infty$, distinguimos:
 - $a \in \mathbb{R} \Rightarrow E = (-\infty, a) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E = [a, +\infty) \in \mathcal{A}$.
 - $a = +\infty \Rightarrow E = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E = \emptyset \in \mathcal{A}$.

Ahora, debemos ver que para cualquier conjunto $E \in \mathcal{A}$ de la forma

$$E = \bigcup_{j=1}^p C_j, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad C_i \in \mathcal{C}, \quad \forall i = 1, \dots, p$$

se satisface que $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{A}$.

Por el Lema 2.8, somos capaces de construir una nueva familia de elementos de \mathcal{C} “separados” entre si y tales que

$$E = \bigcup_{j=1}^q \tilde{C}_j, \quad \tilde{C}_i \in \mathcal{C}, \quad \forall i = 1, \dots, q, \quad q \leq p,$$

donde la unión es claramente disjunta y los conjuntos siguen el orden inducido en el lema.

Realicemos un razonamiento simple basado en el hecho de que el conjunto $\mathbb{R} \setminus E$ tendrá un número finito de componentes conexas en \mathbb{R} . En concreto, si E es de la forma definida anteriormente, $\mathbb{R} \setminus E$ estará formado por la unión disjunta de, a lo sumo, $q + 1$ elementos.

Por un lado, denotemos por

$$i_j = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} \tilde{C}_j, \quad s_j = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \tilde{C}_j, \quad j \in \{1, \dots, q\},$$

donde $\overline{\mathbb{R}}$ es la recta real ampliada.

Por otro lado, veamos qué forma tienen tales uniones:

$$\mathbb{R} \setminus E = \begin{cases} \bigcup_{j=1}^{q-1} [s_j, i_{j+1}), & \text{si } i_1 = -\infty, s_q = +\infty, \\ \left(\bigcup_{j=1}^{q-1} [s_j, i_{j+1}) \right) \cup [s_q, +\infty), & \text{si } i_1 = -\infty, s_q \neq +\infty, \\ (-\infty, i_1) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q-1} [s_j, i_{j+1}) \right), & \text{si } i_1 \neq -\infty, s_q = +\infty, \\ (-\infty, i_1) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q-1} [s_j, i_{j+1}) \right) \cup [s_q, +\infty), & \text{si } i_1 \neq -\infty, s_q \neq +\infty. \end{cases}$$

Acabamos de ver que $\mathbb{R} \setminus E$ es una unión finita y disjunta de elementos básicos en todos los casos anteriores, por lo que concluimos que pertenece a \mathcal{A} .

3. $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$. En efecto, fijado un elemento $k \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{m(k)} C_{kj}, \quad \{C_{kj}\}_{j=1}^{m(k)} \subseteq \mathcal{C}, \quad C_{ki} \cap C_{kj} = \emptyset,$$

para todo $i \neq j$, entonces:

$$\bigcup_{k=1}^n E_k = \bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{m(k)} C_{kj} \right). \quad (2.3)$$

Gracias al Lema 2.6, podemos expresar (2.3) como unión finita de conjuntos básicos disjuntos, esto es:

$$\bigcup_{k=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{m(k)} C_{kj} \right) = \bigcup_{j=1}^p F_j, \quad F_j \in \mathcal{C}, \quad F_i \cap F_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A},$$

tal y como queríamos demostrar.

□

En lo que sigue veremos cómo es posible definir una medida sobre el álgebra de conjuntos \mathcal{A} . Para ello, comencemos definiendo el concepto de longitud generalizada de un intervalo.

Definición 2.10 (Longitud de un intervalo generalizada). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente y continua por la izquierda, definimos $l_g : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ de la siguiente manera:

$$l_g(C) = \begin{cases} 0, & \text{si } C = \emptyset, \\ g(b) - g(a), & \text{si } C = [a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a), & \text{si } C = [a, +\infty), a \in \mathbb{R}, \\ g(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), & \text{si } C = (-\infty, b), b \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), & \text{si } C = (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Observación 2.11. Veamos que la aplicación anterior está bien definida. En efecto, al ser g monótona creciente:

- $C = \emptyset \Rightarrow l_g(C) = 0$.
- $C = [a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow g(b) \geq g(a) \Rightarrow g(b) - g(a) \geq 0$.
- $C = [a, +\infty), a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \geq g(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a) \geq 0$.
- $C = (-\infty, b), b \in \mathbb{R} \Rightarrow g(b) \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \Rightarrow g(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \geq 0$.
- $C = (-\infty, +\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \geq 0$.

Por tanto, la imagen de cualquier conjunto básico mediante la aplicación l_g es siempre no negativa.

Ejemplo 2.12. Veamos cómo sería la longitud generalizada de un intervalo si tomamos como funciones de referencia las siguientes:

- g constante: $g(x) = k, k \in \mathbb{R}$.
En este caso, $l_g(C) = 0$, para cualquier $C \in \mathcal{C}$.
- g dada por dos trozos constantes: Pongamos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1, \\ 5, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La función longitud vendrá dada por:

$$l_g(C) = \begin{cases} 3, & \text{si } 1 \in C, \\ 0, & \text{si } 1 \notin C. \end{cases}$$

Nota 2.13. Resulta de especial interés tomar como función de referencia $g = id$. De esta manera, $l_{id} : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ quedaría definida de la siguiente forma:

$$l_{id}(C) = \begin{cases} 0, & \text{si } C = \emptyset, \\ id(b) - id(a) = b - a, & \text{si } C = [a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} id(x) - id(a) = +\infty - a = +\infty, & \text{si } C = [a, +\infty), a \in \mathbb{R}, \\ id(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} id(x) = b - (-\infty) = +\infty, & \text{si } C = (-\infty, b), b \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} id(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} id(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty, & \text{si } C = (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Observamos que la aplicación anterior coincide con la definición de longitud de un conjunto:

$$l(C) = \begin{cases} 0, & \text{si } C = \emptyset, \\ b - a, & \text{si } C = [a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b, \\ +\infty, & \text{si } C = [a, +\infty), a \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{si } C = (-\infty, b), b \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{si } C = (-\infty, +\infty), \end{cases}$$

y de ahí que consideremos l_g como la generalización de la longitud de un intervalo.

Una vez visto esto, construiremos una aplicación sobre el álgebra de conjuntos \mathcal{A} empleando la Definición 2.10. A dicha aplicación la llamaremos inicialmente medida sobre \mathcal{A} y, posteriormente, veremos que, en efecto, es una medida sobre dicho álgebra.

Definición 2.14 (Medida sobre \mathcal{A}). Dada una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua por la izquierda, definimos

$$\mu_g : A \in \mathcal{A} \rightarrow \mu_g(A) = \sum_{k=1}^n l_g(C_k),$$

donde

$$A = \bigcup_{k=1}^n C_k,$$

siendo $\{C_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{C}$ una colección de elementos disjuntos.

Observamos que la aplicación anterior cumple trivialmente las dos primeras condiciones de la Definición 2.2. Veamos a continuación que es numerablemente aditiva. Para ello, tal y como veremos en el siguiente lema, será suficiente con demostrar que es numerablemente aditiva sobre los elementos del conjunto \mathcal{C} .

Lema 2.15. *Sea \mathcal{A} el álgebra de conjuntos introducida en la Definición 2.3 y μ_g la aplicación que hemos definido en la Definición 2.14. Se tendrá que μ_g es numerablemente aditiva sobre los elementos de \mathcal{A} si y solamente si lo es sobre los elementos de \mathcal{C} .*

Demostración. Veamos cada una de las implicaciones por separado:

“ \Rightarrow ” Se cumple trivialmente, puesto que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

“ \Leftarrow ” Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos. Tenemos que demostrar que

$$\mu_g(A) = \mu_g\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g(A_k),$$

lo cual es cierto, por hipótesis, si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$.

Ahora bien, $A_k \in \mathcal{A}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, con lo cual, por el Lema 2.8 podemos reescribir cada conjunto A_k como unión finita, disjunta y, además, separada, de elementos básicos. Dado $k \in \mathbb{N}$, existe una colección $\{E_{kj}\}_{j=1}^{n(k)} \subseteq \mathcal{C}$, $E_{ki} \cap E_{kl} = \emptyset$, $i \neq l$, tal que

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{kj}. \quad (2.4)$$

Además, $A \in \mathcal{A}$, por lo que también se cumple que

$$A = \bigcup_{j=1}^m E_j,$$

con $\{E_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{C}$, siendo la unión anterior disjunta. Por lo tanto:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^m E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{kj} \right).$$

Ahora, $E_{k_1 j_1} \cap E_{k_2 j_2} = \emptyset$ si $j_1 \neq j_2$ (por cómo hemos definido la colección $\{E_{kj}\}$) o bien si $k_1 \neq k_2$ (por ser los conjuntos $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$, $k_1 \neq k_2$). Esto implica que será posible encontrar una colección numerable y disjunta de elementos de \mathcal{C} cuya unión sea A y, en consecuencia, estaremos en las condiciones del enunciado y podremos finalizar la prueba.

Con el fin de construir dicha colección numerable de elementos básicos, denotemos por $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{E_{kj} : j = 1, \dots, n(k), k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$, esto es:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_{11}, F_2 = E_{12}, \dots, F_{n(1)} = E_{1n(1)}, \\ F_{n(1)+1} &= E_{21}, F_{n(1)+2} = E_{22}, \dots, F_{n(1)+n(2)} = E_{2n(2)}, \\ &\vdots \\ F_{\sum_{l=1}^{k-1} n(l)+1} &= E_{k1}, F_{\sum_{l=1}^{k-1} n(l)+2} = E_{k2}, \dots, F_{\sum_{l=1}^k n(l)} = E_{kn(k)}, \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Observamos que, por construcción, $F_i \cap F_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, además,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{kj} \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{j=1}^m E_j = A.$$

En particular, dado $j \in \{1, \dots, m\}$, existe una sucesión de índices $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{j_n}, \quad (2.5)$$

con lo cual,

$$\bigcup_{j=1}^m E_j = \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{j_n} \right),$$

de donde deducimos que

$$\bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{j_n} \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{kj} \right). \quad (2.6)$$

Ahora, por definición de la medida μ_g ,

$$\mu_g(A) = \mu_g \left(\bigcup_{j=1}^m E_j \right) = \sum_{j=1}^m l_g(E_j) = \sum_{j=1}^m \mu_g(E_j).$$

Siguiendo la cadenas de igualdades anteriores y empleando la ecuación (2.5),

$$\mu_g(A) = \sum_{j=1}^m \mu_g \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{j_n} \right).$$

Por la propia hipótesis de partida,

$$\mu_g(A) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(F_{j_n}) \right).$$

Reordenando los términos de la serie teniendo en cuenta (2.6),

$$\mu_g(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n(k)} \mu_g(E_{kj}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n(k)} l_g(E_{kj}) \right)$$

Empleando la definición de la medida μ_g ,

$$\mu_g(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g \left(\bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{kj} \right).$$

Finalmente, por (2.4),

$$\mu_g(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g(A_k),$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

□

Una vez visto el lema anterior, ya estamos en condiciones de demostrar que, efectivamente, μ_g es una medida sobre el álgebra de conjuntos \mathcal{A} .

Proposición 2.16. *Dada una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua por la izquierda, se tendrá que la aplicación μ_g dada en la Definición 2.14 es una medida sobre el álgebra de conjuntos \mathcal{A} .*

Demostración. Demostraremos cada una de las condiciones de la Definición 2.2 por separado:

1. $\mu_g(\emptyset) = 0$.

$$\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu_g(\emptyset) = l_g(\emptyset) = 0.$$

2. $\mu_g(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{A}$.

Dado $E \in \mathcal{A}$, pongamos $E = \bigcup_{k=1}^n C_k$, $\{C_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{C}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene que

$$\mu_g(E) = \mu_g\left(\bigcup_{k=1}^n C_k\right) = \sum_{k=1}^n l_g(C_k) \geq 0,$$

puesto que cada uno de los sumandos $l_g(C_k)$ es no negativo, como ya vimos en la Observación 2.11.

3. Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ es cualquier colección disjunta de conjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mu_g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(E_n).$$

Aplicando de nuevo el Lema 2.15, será suficiente con ver que si $C \in \mathcal{C}$, $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in \mathcal{C}$ disjuntos dos a dos, entonces

$$l_g(C) = l_g\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} l_g(E_k).$$

Para ello, analizaremos los siguientes casos:

CASO 1. $C = [a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Pongamos que

$$[a, b) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}, E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$

Existen dos posibilidades:

- o C es unión finita de elementos de \mathcal{C} , es decir, fijado $k \in \mathbb{N}$, $E_j = [a_j, b_j)$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, para $j = 1, \dots, k$ y $E_j = \emptyset$, para $j \geq k + 1$.

Supongamos que podemos tomar $r, s \in \{1, \dots, k\}$ tales que $a = a_r$, $b = b_s$. Claramente, se tiene que

$$[a, b) = \bigcup_{j=1}^k [a_j, b_j),$$

siendo la unión disjunta, por lo que existe un índice $m_j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{r\}$ tal que $b_j = a_{m_j}$.

Finalmente, tenemos una colección finita de elementos básicos que recubren C y se cumple que:

$$\sum_{j=1}^k l_g([a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^k (g(b_j) - g(a_j)) = g(b_s) - g(a_r) = g(b) - g(a) = l_g([a, b)),$$

como queríamos ver.

- o C es unión numerable de elementos de \mathcal{C} , es decir, $E_j = [a_j, b_j)$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Queremos ver que se verifica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_g(E_j) = l_g([a, b)).$$

Para ello, veremos que se cumple cada una de las desigualdades.

Por un lado, construimos una colección finita a partir de la familia de conjuntos definida anteriormente. Así, dado $k \in \mathbb{N}$, tomamos $[a_1, b_1), \dots, [a_k, b_k)$ cumpliendo que $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < \dots < b_{k-1} \leq a_k < b_k \leq b$. Es evidente que esta colección no recubre necesariamente $[a, b)$. En efecto,

$$\sum_{j=1}^k l_g([a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^k (g(b_j) - g(a_j)) \leq g(b) - g(a) = l_g([a, b)),$$

y como k ha sido escogido de forma arbitraria, se tendrá que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_g([a_j, b_j)) \leq l_g([a, b)). \quad (2.7)$$

Por otro lado, probemos que se cumple la desigualdad opuesta. Dado que g es continua por la izquierda, para cada $0 < \varepsilon < b - a$ y cada $j \in \mathbb{N}$, existe $a'_j < a_j$ de manera que

$$g(a_j) - g(a'_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Así, para cada $\varepsilon \in (0, b - a)$, la colección de conjuntos abiertos $\{(a'_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ recubre $[a, b - \varepsilon]$ y, por el teorema de Heine-Borel, se tiene la existencia de un subrecubrimiento finito $\{(a'_{j_n}, b_{j_n})\}_{n=1}^N$ del intervalo. Observemos que, en particular, la familia $\{(a'_{j_n}, b_{j_n})\}_{n=1}^N$ recubre $[a, b - \varepsilon]$, en efecto, también lo hace con el intervalo $[a, b - \varepsilon]$. Así, para cada $0 < \varepsilon < b - a$, se tiene que:

$$\begin{aligned} g(b - \varepsilon) - g(a) = l_g([a, b - \varepsilon]) &\leq \sum_{n=1}^N l_g([a'_{j_n}, b_{j_n}]) = \sum_{n=1}^N (g(b_{j_n}) - g(a'_{j_n})) \\ &< \sum_{n=1}^N \left(g(b_{j_n}) - g(a_{j_n}) + \frac{\varepsilon}{2^{j_n}} \right) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} (g(b_j) - g(a_j)), \end{aligned}$$

de donde, tomando el límite cuando ε tiende a 0 por la derecha y por ser g continua por la izquierda, tenemos que

$$g(b) - g(a) = l_g([a, b]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (g(b_j) - g(a_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} l_g([a_j, b_j]).$$

Por lo tanto, junto con (2.7) concluimos el resultado.

CASO 2. $C = [a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

Pongamos que se tiene lo siguiente

$$[a, +\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Existen, de nuevo, dos posibles situaciones:

- o Existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E_{j_0} = [c, +\infty)$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Si $c = a$, queda probado de manera trivial.

Ahora, si $c > a$, suponemos que los conjuntos E_j , $j \in \mathbb{N}$, $j \neq j_0$, son de la forma $[a_j, b_j)$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, disjuntos dos a dos.

Por otra parte, se tiene que

$$\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{\infty} E_j = [a, c)$$

es una unión disjunta y, por tanto, podemos construir la colección de conjuntos $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ que definimos a continuación:

$$B_j = \begin{cases} E_j, & \text{si } j \in \{1, \dots, j_0 - 1\} \\ E_{j+1}, & \text{si } j \geq j_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Ahora bien, como se cumple que

$$[a, c) = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

con $B_j = [a_j, b_j) \in \mathcal{C}$ claramente disjuntos dos a dos, estamos en las condiciones del caso 1 y se verifica que

$$l_g([a, c)) = \sum_{j=1}^{\infty} l_g(B_j).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} l_g(E_j) &= l_g(E_{j_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} l_g(B_j) = l_g([c, +\infty)) + l_g([a, c)) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(c) + g(c) - g(a) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a) = l_g([a, +\infty)) = l_g(C). \end{aligned}$$

- o Todos los conjuntos E_j son acotados. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $E_j = [a_j, b_j)$ con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$.

Comenzamos definiendo un conjunto de valores con el fin de encontrarnos en las condiciones del caso 1 y, así, concluir el resultado. Sean

$$\tilde{a}_1 = a, \quad \tilde{a}_k = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{a_j / a_j \leq a + k\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Observamos que para todo $k \in \{2, 3, \dots\}$, los elementos \tilde{a}_k están bien definidos pues $\sup_{j \in \mathbb{N}} a_j = +\infty$ y los conjuntos $\{a_j / a_j \leq a + k\}$ son no vacíos.

Por construcción, existe $j_k \in \mathbb{N}$ de forma que $\tilde{a}_k \in [a_{j_k}, b_{j_k}) \subset [a, +\infty)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Además, por ser los conjuntos $[a_j, b_j)$ disjuntos, se sigue que $\tilde{a}_k = a_{j_k}$.

Como consecuencia, podemos considerar la colección $\{\tilde{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ dada por $\tilde{A}_k = [\tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1})$, donde cada E_j , $j \in \mathbb{N}$, está contenido en uno y solo uno de los intervalos anteriores. En el caso de que exista un $k \in \mathbb{N}$ de manera que $\tilde{a}_k = \tilde{a}_{k+1}$, basta con definir $\tilde{A}_k = \emptyset$ y $\tilde{A}_{k+1} = [\tilde{a}_{k+1}, \tilde{a}_{k+2})$.

Ahora, consideremos la siguiente colección de índices:

$$\Lambda_k = \{j = 1, 2, \dots / [a_j, b_j) \subseteq \tilde{A}_k\}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Así, la familia $\{\tilde{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ cumple que

$$\tilde{A}_k = [\tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}) = \bigcup_{j \in \Lambda_k} [a_j, b_j),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, con $[a_j, b_j] \in \mathcal{C}$ disjuntos dos a dos, es decir, ya estamos en condiciones de aplicar el caso 1.

Fijado $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\sum_{j \in \Lambda_k} l_g([a_j, b_j]) = \sum_{j \in \Lambda_k} (g(b_j) - g(a_j)) = g(\tilde{a}_{k+1}) - g(\tilde{a}_k) = l_g([\tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}]) = l_g(\tilde{A}_k).$$

De lo anterior y del hecho de que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{a}_k = +\infty$ se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \Lambda_k} (g(b_j) - g(a_j)) \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} l_g(\tilde{A}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (g(\tilde{a}_{k+1}) - g(\tilde{a}_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g(\tilde{a}_{k+1}) - g(\tilde{a}_1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a) = l_g([a, +\infty)). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en la tercera igualdad aparece una serie telescópica, se concluye el resultado.

Para facilitar la comprensión de este apartado, nos apoyamos en el siguiente esquema:

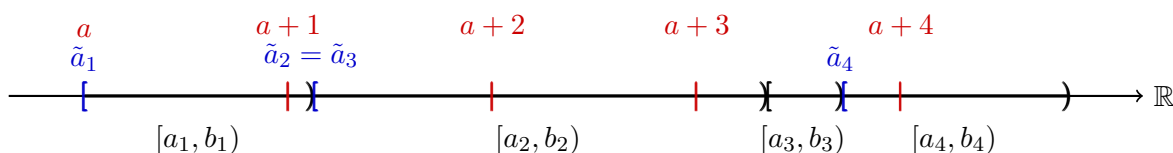


Figura 2.3: Representación gráfica del caso 2.

CASO 3. $C = (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Pongamos que

$$(-\infty, b) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Siguiendo la misma idea que exponíamos en el caso anterior, separamos dos casos:

- o Existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E_{j_0} = (-\infty, c)$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Si $c = b$, queda probado de manera trivial. Ahora, si $c < b$, lo anterior implica que los conjuntos E_j , $j \in \mathbb{N}$, $j \neq j_0$ son de la forma $[a_j, b_j)$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$ disjuntos.

De nuevo, estamos en disposición de construir una colección de conjuntos definida de forma similar a la obtenida en (2.8)

$$D_j = \begin{cases} E_j, & \text{si } j \in \{1, \dots, j_0 - 1\} \\ E_{j+1}, & \text{si } j \geq j_0 \end{cases}$$

y razonamos análogamente al caso anterior de manera que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} l_g(E_j) &= l_g(E_{j_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} l_g(D_j) = l_g((-\infty, c)) + l_g([c, b)) \\ &= g(c) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + g(b) - g(c) \\ &= g(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = l_g((-\infty, b)) = l_g(C). \end{aligned}$$

- Los conjuntos E_j son de la forma $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
Asumimos que $E_j = [a_j, b_j)$ con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$.

Definimos

$$\tilde{b}_1 = b, \quad \tilde{b}_k = \inf_{j \in \mathbb{N}} \{a_j / a_j \leq b - k\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

y construimos una nueva familia de conjuntos $\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$ dada por $\tilde{B}_k = [\tilde{b}_{k+1}, \tilde{b}_k)$, donde cada E_j , $j \in \mathbb{N}$, está contenido en uno y solo uno de los intervalos anteriores. El resultado se sigue de manera análoga al caso anterior.

CASO 4. $C = (-\infty, +\infty)$.

Pongamos que

$$(-\infty, +\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Si $E_j = \mathbb{R}$, para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces se cumple de manera trivial. Por el contrario, existirá al menos un conjunto E_{j_0} , $j_0 \in \mathbb{N}$, que esté acotado inferiormente, es decir, $E_{j_0} = [a_{j_0}, b_{j_0})$, $a_{j_0} \in \mathbb{R}$, $a_{j_0} < b_{j_0} \leq +\infty$.

Definimos las siguientes familias de conjuntos, $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$, como sigue

$$B_j = E_j \cap [a_{j_0}, +\infty), \quad j \in \mathbb{N},$$

$$C_j = E_j \cap (-\infty, a_{j_0}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Claramente, se verifica que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = [a_{j_0}, +\infty),$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = (-\infty, a_{j_0}),$$

y, además, cada una de las uniones anteriores es disjunta.

De los resultados obtenidos en los casos anteriores deducimos que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_g(B_j) = l_g([a_{j_0}, +\infty)),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_g(C_j) = l_g((-\infty, a_{j_0})).$$

Por lo tanto, se tiene que, $\forall j \in \mathbb{N}$, B_j y C_j son disjuntos y $E_j = B_j \cup C_j$.

Así, se verifica que $l_g(E_j) = l_g(B_j) + l_g(C_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} l_g(E_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} l_g(B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} l_g(C_j) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a_{j_0}) + g(a_{j_0}) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = l_g((-\infty, +\infty)) = l_g(C). \end{aligned}$$

con lo que concluimos.

□

Observación 1. La medida con la que acabamos de trabajar recibe el nombre de medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función g .

Nota 2.17. La medida asociada a $g = id$ coincide con la medida de Lebesgue usual definida sobre el álgebra de conjuntos \mathcal{A} .

Capítulo 3

Extensión de medidas

Una vez establecidas las nociones básicas de álgebra de conjuntos y medida sobre un álgebra de conjuntos, nos disponemos a extender el concepto de medida a un caso más general.

En particular, el objetivo de este capítulo es establecer las bases para probar ciertos resultados de construcción de medidas, como los Teoremas de Carathéodory y Hahn y así llegar a un espacio de medida con el cual poder trabajar. Tras el marco teórico, aplicaremos estos resultados a nuestro álgebra de conjuntos y a la medida de Lebesgue-Stieltjes ya construidas en el capítulo anterior.

3.1. Medidas exteriores

Como bien acabamos de introducir, será interesante poder extender la noción de medida a conjuntos más generales. Para ello, damos la siguiente definición.

Definición 3.1 (Medida exterior). Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{X} un álgebra de subconjuntos de X . Dado E un subconjunto arbitrario de X , definimos la *medida exterior de E* como:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, B_j \in \mathcal{X}, \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

También recibe el nombre de medida exterior generada por μ .

Observación 3.2. Debemos observar que la función que acabamos de considerar no es necesariamente una medida. No obstante, tiene una ventaja con respecto a la medida definida en el capítulo anterior, y es que puede ser aplicada a cualquier subconjunto de X .

Veamos algunas propiedades interesantes de la medida exterior que nos permitirán apreciar similitudes con la definición de medida.

Proposición 3.3. Dada μ^* la función definida anteriormente y μ una medida definida sobre el álgebra de conjuntos \mathcal{X} , se tienen las siguientes propiedades:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. $\mu^*(E) \geq 0, \forall E \subseteq X$.
3. $E \subseteq F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ (monotonía de la medida exterior).
4. $E \in \mathcal{X} \Rightarrow \mu^*(E) = \mu(E)$.
5. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cualquier colección de subconjuntos de X , entonces

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

esto es, la medida exterior es numerablemente subaditiva.

Demostración. Probaremos cada uno de los apartados por separado.

1. La prueba de este hecho es trivial. Claramente, $\emptyset \in \mathcal{X}$ y como $\mu(\emptyset) = 0$, se tendrá que $\mu^*(\emptyset) = \inf \mu(\emptyset) = 0$, con lo que se concluye.
2. La prueba es una consecuencia inmediata del punto 2 de la Definición 2.2. Dados los conjuntos $B_j \in \mathcal{X}, \forall j \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mu(B_j) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \geq 0$$

de lo que deducimos que el ínfimo de la expresión anterior también es no negativo y se cumple la propiedad.

3. Sean $E, F \subseteq X, E \subseteq F$. Pongamos que

$$F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{X}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $E \subseteq F$, entonces la unión numerable de los conjuntos A_j también recubre E y se cumple que

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\} \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\},$$

de donde deducimos que $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ al aplicar el ínfimo a la expresión anterior.

4. Sea $\{E, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ una colección de elementos del álgebra \mathcal{X} cuya unión contiene a E .

Se sigue que

$$\mu^*(E) \leq \mu(E) + 0 + 0 + \dots = \mu(E). \quad (3.1)$$

Por otra parte, sea $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ cualquier colección de elementos de \mathcal{X} tales que

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

entonces

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap B_j),$$

de donde, para cada $j \in \mathbb{N}$, $E \cap B_j \in \mathcal{X}$ por el Lema 2.4.

Finalmente, al ser μ una medida sobre el álgebra \mathcal{X} se cumple que

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap B_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$$

de donde la última desigualdad se sigue de que $E \cap B_j \subseteq B_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

De la anterior cadena de desigualdades se deduce que $\mu(E) \leq \mu^*(E)$, que junto con (3.1) concluye el resultado.

5. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y fijemos $n \in \mathbb{N}$ de manera que

$$E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad B_{nk} \in \mathcal{X}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mu^*(E_n) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}), \quad E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

En efecto, $\{B_{nk} : n, k \in \mathbb{N}\}$ es una colección de elementos de \mathcal{X} cuya unión en n y en k contiene a $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Gracias a este hecho estamos en las condiciones de la Definición 3.1, con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, puesto que $\varepsilon > 0$ considerado es arbitrario, se tiene el resultado.

□

Uno de los problemas que nos encontramos al hacer uso de la medida exterior es que no tiene por qué ser numerablemente aditiva. Resultará útil encontrar una colección de conjuntos para los cuales se cumpla esta propiedad. A lo largo de este tema veremos que dicha colección será una σ -álgebra en X y que la medida exterior restringida a ella será una medida.

En el siguiente resultado veremos la condición que nos permitirá obtener el espacio de medida deseado a partir de la medida exterior que hemos definido anteriormente.

Definición 3.4 (Condición de Carathéodory). Sea μ^* la medida exterior definida sobre un conjunto X arbitrario. Diremos que un subconjunto $E \subseteq X$ es μ^* -medible o que verifica la *condición de Carathéodory* si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

para cualquier subconjunto A de X .

Denotamos por \mathcal{A}^* a la colección de todos los subconjuntos que cumplen la condición anterior.

Observación 3.5. Debemos observar que, dados dos conjuntos $A, E \subseteq X$,

$$A = (A \cap E) \cup (A \setminus E),$$

de donde, gracias a la Proposición 3.3,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

En particular, para demostrar que un conjunto $E \in \mathcal{A}^*$, es suficiente con comprobar que se cumple la otra desigualdad:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

3.2. Teoremas de extensión de medidas

Comenzamos esta sección demostrando un resultado de gran importancia en este tema, que nos ayudará a explicar los conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue-Stieltjes a partir de la condición de Carathéodory. Este teorema establece que siempre que tengamos una medida μ en un álgebra de conjuntos \mathcal{X} seremos capaces de extenderla a una medida μ^* en una σ -álgebra de conjuntos \mathcal{A}^* .

Teorema 3.6 (de Carathéodory). *Sea μ^* la medida exterior definida sobre los subconjuntos de X . Entonces, la colección \mathcal{A}^* formada por todos subconjuntos de X μ^* -medibles es una σ -álgebra en X que contiene al álgebra \mathcal{X} . Además, la restricción de μ^* a \mathcal{A}^* es una medida sobre \mathcal{A}^* , en particular se tiene que es numerablemente aditiva.*

Demostración. Para probar este resultado, procederemos de la siguiente forma: en primer lugar, veremos que la colección \mathcal{A}^* de subconjuntos de X que cumplen la condición de Carathéodory es una σ -álgebra en X , en segundo lugar, que la medida exterior restringida a \mathcal{A}^* es una medida y, por último, que \mathcal{A}^* contiene a \mathcal{X} .

- Para ver que \mathcal{A}^* es una σ -álgebra probaremos cada uno de los puntos de la Definición 1.2 por separado.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}^*$. En efecto, gracias a la Proposición 3.3, dado un conjunto $A \subseteq X$ arbitrario, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \setminus \emptyset), \\ \mu^*(A) &= \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \setminus X),\end{aligned}$$

de donde deducimos que tanto el conjunto \emptyset como el conjunto X pertenecen a \mathcal{A}^* .

2. Veamos ahora que, dado un conjunto $E \in \mathcal{A}^*$, su complementario $E^c = X \setminus E$ también es un elemento de \mathcal{A}^* . Para ello, basta tener en cuenta que, dado un elemento $A \subseteq X$ arbitrario, se cumple que:

$$(E^c)^c = E, \quad A \setminus E = A \cap E^c \quad \text{y} \quad A \cap E = A \cap (E^c)^c = A \setminus E^c,$$

por lo tanto, al ser $E \in \mathcal{A}^*$,

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \\ &= \mu^*(A \setminus E^c) + \mu^*(A \cap E^c).\end{aligned}$$

Concluimos entonces que E^c cumple la condición de Carathéodory.

3. La última condición que tenemos que comprobar es que \mathcal{A}^* es cerrado para las uniones numerables. Esto es, dada una colección numerable de conjuntos $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$, veamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}^*.$$

La demostración de este punto la haremos en tres partes.

- Comencemos demostrando que, dados $E, F \in \mathcal{A}^*$, entonces, $E \cap F \in \mathcal{A}^*$. Esto es, tendremos que demostrar que, dado un conjunto $A \subseteq X$ arbitrario,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \setminus (E \cap F)).$$

Por un lado, por ser $E \in \mathcal{A}^*$, dado cualquier $A \subseteq X$, obtenemos que

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*((A \cap F) \setminus E). \quad (3.2)$$

Además, dado que $F \in \mathcal{A}^*$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F). \quad (3.3)$$

Sustituyendo la expresión (3.2) en (3.3) se verifica lo siguiente:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*((A \cap F) \setminus E) + \mu^*(A \setminus F). \quad (3.4)$$

Tomemos ahora el conjunto $A \setminus (E \cap F)$ y las siguientes relaciones entre conjuntos:

$$\begin{aligned} (A \setminus (E \cap F)) \cap F &= (A \cap F) \setminus (E \cap F) \\ &= ((A \cap F) \setminus E) \cup ((A \cap F) \setminus F) \\ &= (A \cap F) \setminus E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \setminus (E \cap F)) \setminus F &= A \setminus ((E \cap F) \cup F) \\ &= A \setminus F. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que la condición de Carathéodory para $F \in \mathcal{A}^*$ utilizando el conjunto anterior se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \mu^*(A \setminus (E \cap F)) &= \mu^*((A \setminus (E \cap F)) \cap F) + \mu^*((A \setminus (E \cap F)) \setminus F) \\ &= \mu^*((A \cap F) \setminus E) + \mu^*(A \setminus F). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para concluir, basta con sustituir la expresión (3.5) que acabamos de calcular en (3.4),

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*((A \cap F) \setminus E) + \mu^*(A \setminus F) \\ &= \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*(A \setminus (E \cap F)) - \mu^*(A \setminus F) + \mu^*(A \setminus F) \\ &= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \setminus (E \cap F)), \end{aligned}$$

de lo que se deduce que $E \cap F \in \mathcal{A}^*$.

- Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos ahora una colección finita de conjuntos $\{E_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Veamos que

$$\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}^*$$

y, además,

$$\mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \right) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j), \quad \forall A \subseteq X.$$

Procederemos por el principio de inducción. Para $n = 2$, dados $E, F \in \mathcal{A}^*$, con $E \cap F = \emptyset$, por resultados ya vistos, $E \cap F \in \mathcal{A}^*$ y $E^c, F^c \in \mathcal{A}^*$. Con lo cual:

$$E^c \cap F^c \in \mathcal{A}^* \Rightarrow (E^c \cap F^c)^c = E \cup F \in \mathcal{A}^*,$$

de donde se deduce que, para cualquier $A \subseteq X$,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E \cup F)) &= \mu^*((A \cap (E \cup F)) \cap E) + \mu^*((A \cap (E \cup F)) \setminus E) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que la condición es cierta para $n - 1$ y demostremos que se cumple para n . Por hipótesis de inducción, se tiene que

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \in \mathcal{A}^*$$

y, además,

$$\mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right) \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_j).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) \right) &= \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \cup E_n \right) \right) \\ &= \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right) \right) + \mu^*(A \cap E_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \cap E_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j). \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple para n .

- Veamos que la unión numerable de elementos de \mathcal{A}^* también pertenece a \mathcal{A}^* . Para ello, comencemos demostrando que la unión numerable de elementos disjuntos de \mathcal{A}^* es un elemento de \mathcal{A}^* . Sea entonces $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, y denotemos por

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Nuestro objetivo será ver que, dado un conjunto $A \subseteq X$, se cumple que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Por el punto anterior tenemos que $F_n = \bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y, dado cualquier conjunto $A \subseteq X$, se cumple que

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \setminus F_n) \\ &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right)\right) + \mu^*(A \setminus F_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus F_n) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus E), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que si $F_n \subseteq E$, entonces $A \setminus E \subseteq A \setminus F_n$ y de la monotonía de la medida exterior. Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos que

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus E). \quad (3.6)$$

Por otro lado, gracias a que la medida exterior es numerablemente subaditiva,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j). \end{aligned}$$

De donde, si sustituimos en (3.6),

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A \setminus E) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lo cual, gracias a la observación 3.5, nos lleva a que $E \in \mathcal{A}^*$ (E cumple la condición de Carathéodory).

Para completar este punto tenemos que ver que \mathcal{A}^* es cerrada para las uniones numerables de elementos de \mathcal{A}^* no necesariamente disjuntos dos a dos. Sea entonces $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ y denotemos por:

$$\begin{aligned} E_1 &= F_1, \\ E_n &= F_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k\right), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Resulta claro que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Además, por las propiedades que hemos visto anteriormente en esta demostración, $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$. Concluimos entonces que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{A}^*.$$

- Para ver que la medida exterior restringida a \mathcal{A}^* es una medida, basta con comprobar que μ^* es numerablemente aditiva. Sea entonces $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ una colección disjunta. Si tomamos

$$A = E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

en (3.6), se tendrá que:

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^* \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \cap E_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j). \end{aligned}$$

De donde, gracias a la Proposición 3.3, obtenemos el resultado.

- Finalmente, veamos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}^*$. Para ello, sea $E \in \mathcal{X}$ y probemos que $E \in \mathcal{A}^*$. En efecto, dado un conjunto arbitrario $A \subseteq X$, por el cuarto punto de la Proposición 3.3 y por las relaciones de descomposición entre conjuntos se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) \\ &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \end{aligned}$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, por la propia definición de medida exterior, existe una colección $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$, con

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

de manera que

$$\sum_{j=1}^n \mu(B_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ahora, como $A \cap E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \cap E)$ y $A \setminus E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \setminus E)$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) &\leq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \cap E) \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap E) \end{aligned}$$

de donde las desigualdades anteriores se deducen, respectivamente, de los apartados 3, 5 y 4 de la Proposición 3.3 y del hecho de que $B_j \cap E \in \mathcal{X}$. De manera análoga razonamos que

$$\begin{aligned} \mu^*(A \setminus E) &\leq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \setminus E) \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j \setminus E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \setminus E) \end{aligned}$$

siendo, en este caso, $B_j \setminus E \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(B_j \cap E) + \mu(B_j \setminus E)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ considerado es arbitrario,

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A).$$

Con lo cual, $E \in \mathcal{A}^*$.

□

En lo sucesivo demostraremos un resultado muy importante ligado al espacio de medida que hemos construido a partir del Teorema de extensión de Carathéodory.

Proposición 3.7. *Todo conjunto de medida nula es μ^* -medible.*

Demostración. Sea E un conjunto de medida nula. Por un lado, dado cualquier conjunto $A \subseteq X$, resulta claro que

$$A \cap E \subseteq E \text{ y } A \setminus E \subseteq A.$$

Por lo tanto, por el tercer punto de la Proposición 3.3 se tiene que

$$\mu^*(A) = 0 + \mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

de donde se deduce que E es μ^* -medible por la Observación 3.5.

□

Corolario 3.8. *El espacio de medida generado por el Teorema de extensión de Carathéodory es completo.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{A}^*$ tal que $\mu^*(E) = 0$. Dado cualquier subconjunto $F \subseteq E$, por la monotonía de la medida exterior, $\mu^*(F) \leq \mu^*(E) = 0$, de donde, gracias a la proposición anterior, $F \in \mathcal{A}^*$.

□

A continuación, veremos un resultado muy interesante que nos va a permitir establecer cuándo se tiene la unicidad en la extensión de una medida. Para ello, supongamos que estamos en las condiciones del Teorema de Carathéodory.

Teorema 3.9 (de Hahn). *Si μ es una medida σ -finita en un álgebra \mathcal{X} , entonces la extensión de μ a una medida en \mathcal{A}^* es única.*

Demostración. Ya sabemos, por el teorema anterior, que dada una medida μ en \mathcal{X} (no necesariamente σ -finita), existe una extensión de esta, μ^* , que da lugar a una medida en la σ -álgebra \mathcal{A}^* . Veamos ahora la unicidad de tal extensión. Para ello, supongamos que existe otra extensión ν definida en \mathcal{A}^* que coincide con μ sobre \mathcal{X} y veamos que $\nu = \mu^*$ sobre \mathcal{A}^* .

- Comencemos analizando el caso en el que $\mu(X) < +\infty$. Sean $E \in \mathcal{A}^*$ y $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}^*$ una colección de elementos tal que

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Como consecuencia del tercer y quinto punto de la Proposición 3.3 y del hecho de que ν coincide con μ en \mathcal{X} , se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \nu(E) &\leq \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j). \end{aligned}$$

Ahora, de la definición de medida exterior podemos deducir que, como lo anterior se cumple para cualquier colección de conjuntos de \mathcal{X} cuya unión contiene a E , se tiene $\nu(E) \leq \mu^*(E)$, para cualquier $E \in \mathcal{A}^*$.

Por otro lado, como μ es una medida finita, también lo serán ν y μ^* . Tomando cualquier conjunto $E \in \mathcal{A}^*$, se tiene que $X = E \cup (X \setminus E)$ pertenece a \mathcal{X} por ser \mathcal{X} un álgebra de

subconjuntos de X . Como la unión anterior es disjunta, por el Teorema 3.6 se cumple que:

$$\begin{aligned}\nu(X) &= \nu(E \cup (X \setminus E)) = \nu(E) + \nu(X \setminus E) \\ &= \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E) = \mu^*(E \cup (X \setminus E)) = \mu^*(X).\end{aligned}$$

La igualdad anterior es consecuencia del hecho de que ν y μ^* coinciden con μ en \mathcal{X} .

Ahora, la única posibilidad para que se verifique lo anterior es que

$$\nu(E) = \mu^*(E) \quad \text{y} \quad \nu(X \setminus E) = \mu^*(X \setminus E), \quad \forall E \in \mathcal{A}^*,$$

pues, en caso contrario, ocurriría $\nu(E) > \mu^*(E)$ o bien $\nu(X \setminus E) > \mu^*(X \setminus E)$, contradiciendo la desigualdad vista anteriormente.

- Consideremos ahora el caso en el que μ es σ -finita. Sean $E \in \mathcal{A}^*$ y $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos de \mathcal{X} (que también están en \mathcal{A}^*) cumpliendo que

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \quad \text{con} \quad \mu(F_j) < +\infty, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dado que $E \cap F_j \subseteq F_j$, tenemos que

$$\mu^*(E \cap F_j) \leq \mu^*(F_j) = \mu(F_j) < +\infty$$

y

$$\nu(E \cap F_j) \leq \nu(F_j) = \mu(F_j) < +\infty$$

por definición de medida σ -finita, por lo tanto, como $E \cap F_j \in \mathcal{A}^*$ podemos aplicar el razonamiento anterior y obtenemos que $\mu^*(E \cap F_j) = \nu(E \cap F_j)$, para cada $E \in \mathcal{A}^*$.

Finalmente, de lo anterior y de la Proposición 1.10 deducimos que:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap X) = \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu^*(E \cap F_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \nu(E \cap F_j) \\ &= \nu \left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \right) = \nu(E \cap X) = \nu(E).\end{aligned}$$

Con lo que $\mu^*(E) = \nu(E)$, para todo $E \in \mathcal{A}^*$ y queda probado que la medida μ^* considerada es única. □

Notación 3.10. Con la finalidad de simplificar la notación, denotaremos por $\mu = \mu|_{\mathcal{A}^*}$. Además, en lugar de emplear el término μ^* -medible, diremos simplemente medible.

Nota 3.11. Es importante destacar que la condición de que μ sea σ -finita en el Teorema 3.9 es crucial para garantizar la unicidad de la extensión a la σ -álgebra generada por el Teorema de extensión de Carathéodory. En el ejemplo siguiente veremos cómo es posible encontrar dos extensiones si la medida no es σ -finita.

Ejemplo 3.12. En este ejemplo veremos que la hipótesis de que la medida sea σ -finita es imprescindible si queremos garantizar la unicidad de la extensión. Para ello, consideremos la siguiente aplicación sobre los conjuntos básicos dados en la Definición 2.3:

$$\tilde{l}: E \in \mathcal{C} \rightarrow \tilde{l}(E) = \begin{cases} l(E), & \text{si } E \subseteq [-1, 1], \\ +\infty, & \text{si } E \cap (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Su correspondiente extensión al álgebra \mathcal{A} dada en la Definición 2.14 no es una medida σ -finita. Denotemos ahora por $(\mathbb{R}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ a la extensión que nos proporciona el Teorema de Carathéodory y definamos la siguiente aplicación:

$$\hat{\mu}: E \in \tilde{\Sigma} \rightarrow \hat{\mu}(E) = \begin{cases} \tilde{\mu}(E), & \text{si } E \subseteq [-1, 1], \\ 0, & \text{si } E \cap (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \text{ es finito y no vacío,} \\ +\infty, & \text{si } E \cap (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \text{ es infinito y no vacío.} \end{cases}$$

Resulta inmediato comprobar que la aplicación $\hat{\mu}$ es una medida que coincide con $\tilde{\mu}$ en el álgebra \mathcal{A} . Sin embargo, no son iguales. Veamos que, en efecto, coinciden.

Tenemos que probar que para todo $E \in \mathcal{A}$, se tiene que $\hat{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E)$. Comencemos viendo el caso en el que E es un conjunto básico.

- Si $E \subseteq [-1, 1]$, entonces $\hat{\mu}(E) = \tilde{\mu}(E)$.
- Si $E \not\subseteq [-1, 1]$, entonces $E \cap (\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ es siempre un conjunto infinito y no vacío, por lo que $\hat{\mu}(E) = +\infty = \tilde{\mu}(E)$. Veamos esto.

Pongamos $E = [a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tenemos que ver que $[a, b) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$ es infinito.

- Si $b \leq -1$ o $a > 1$, entonces la intersección es $[a, b)$, que es infinito.
- Si $-1 < b \leq 1$ y $a < -1$, entonces la intersección es $[a, -1)$ que es infinito.
- Si $-1 \leq a \leq 1$ y $b > 1$, entonces la intersección es $(1, b)$ que es infinito.
- Por último, si $a < -1$ y $b > 1$, entonces la intersección es $[a, -1) \cup (1, b)$ que también es infinito.

Si siguiendo un razonamiento análogo al anterior llegamos a que $E \cap (\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ es, también, infinito si $E = [a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ o $E = (-\infty, b)$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ahora, como todo conjunto de \mathcal{A} es unión finita y disjunta de elementos básicos y la intersección de todo elemento básico con $((-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$ es un conjunto infinito, se deduce lo que buscamos.

3.3. El espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes

A lo largo de este capítulo hemos visto cómo, a partir de un álgebra de conjuntos y una medida σ -aditiva definida sobre el álgebra de conjuntos, somos capaces de construir un espacio de medida basándonos en los teoremas de extensión de Carathéodory y Hahn. El objetivo de esta sección es aplicar dichos teoremas para obtener el espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes a partir del álgebra de conjuntos y medida (\mathcal{A}, μ_g) que hemos definido en el segundo capítulo.

Comencemos estableciendo algunas definiciones necesarias para el desarrollo de esta sección.

Definición 3.13 (Medida exterior μ_g^*). Sean \mathcal{A} el álgebra de conjuntos establecido en el capítulo anterior y μ_g la medida sobre \mathcal{A} definida en 2.14. Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, definimos la *medida exterior* μ_g^* como sigue

$$\mu_g^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g(B_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, B_j \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 3.14 (Conjuntos g -medibles). Sea μ_g^* la medida exterior que acabamos de definir. Denotamos por Σ_g a la colección de todos los subconjuntos de \mathbb{R} que cumplen la condición de Carathéodory para μ_g^* , es decir, aquellos $E \subseteq \mathbb{R}$ que satisfacen:

$$\mu_g^*(A) = \mu_g^*(A \cap E) + \mu_g^*(A \setminus E),$$

para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$.

Llamaremos *conjuntos g -medibles* a los elementos de Σ_g .

Una vez definidos los conceptos anteriores, los emplearemos para construir el espacio de medida buscado.

Definición 3.15 (Espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes). Sea Σ_g la colección de los conjuntos g -medibles y μ_g la restricción de la medida exterior μ_g^* a dicha colección, esto es, $\mu_g = \mu_g^*|_{\Sigma_g}$. Llamaremos *espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes* a la terna $(\mathbb{R}, \Sigma_g, \mu_g)$.

Notación 3.16. En lo que sigue, con el fin de simplificar la notación, llamaremos medida de Lebesgue-Stieltjes a la medida μ_g de la definición anterior. Con esta notación estamos indicando que, sobre los conjuntos de $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_g$, la medida de Lebesgue-Stieltjes que construimos en el segundo capítulo y la que acabamos de definir son la misma.

Ejemplo 3.17. Teniendo en cuenta la notación que acabamos de introducir, será interesante ver un ejemplo de un conjunto g -medible que no esté en el álgebra, esto es, un elemento de $\Sigma_g \setminus \mathcal{A}$. Pongamos

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k, 2k + 1).$$

Claramente, E no está en \mathcal{A} por la propia definición de \mathcal{A} , pero sí que pertenece a Σ_g por ser unión numerable de elementos de $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \Sigma_g$, y ser Σ_g una σ -álgebra.

Observación 3.18. Si consideramos $g = id$ como función de referencia estamos ante el espacio de medida de Lebesgue, que denotamos habitualmente como la terna $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu) = (\mathbb{R}, \Sigma_{id}, \mu_{id})$.

En el siguiente resultado veremos que existe el espacio de medida que acabamos de definir en 3.15 y que es único. La demostración es una consecuencia inmediata de los Teoremas de Carathéodory y Hahn.

Proposición 3.19. *La extensión $(\mathbb{R}, \Sigma_g, \mu_g)$ existe y es única.*

Demostración. Gracias al Teorema de Carathéodory deducimos que Σ_g es una σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{R} y que la restricción μ_g es una medida sobre Σ_g , es decir, la terna $(\mathbb{R}, \Sigma_g, \mu_g)$ es un espacio de medida .

Por el Teorema de Hahn se prueba la unicidad de dicha medida μ_g , lo que implica la unicidad de todo el espacio de medida.

□

A continuación, veamos qué ocurre si, en lugar de trabajar con la σ -álgebra Σ_g , lo hacemos con la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los abiertos de \mathbb{R} . Para ello, será necesario introducir el concepto de conjunto de Borel.

Definición 3.20 (σ -álgebra de Borel). Definimos la σ -álgebra de Borel, \mathcal{B} , como la menor σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{R} que contiene a todos los abiertos de \mathbb{R} .

Definición 3.21 (Conjuntos de Borel). Llamaremos *conjuntos de Borel* a los elementos de la σ -álgebra \mathcal{B} .

En lo que sigue, veamos que los conjuntos de Borel que acabamos de definir son conjuntos g -medibles. Para ello, comencemos probando dos resultados. En ellos se afirma, por un lado, que todo intervalo abierto de \mathbb{R} se puede expresar como una unión numerable de elementos básicos y, por otro, que todo abierto es unión numerable de intervalos abiertos.

Lema 3.22. *Cualquier abierto de \mathbb{R} se puede expresar como unión numerable de intervalos abiertos.*

Demostración. Sea $G \subset \mathbb{R}$ un abierto arbitrario y consideremos $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una numeración del conjunto de elementos de \mathbb{Q} que pertenecen a G . Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos un elemento z_k de la colección anterior y definamos los siguientes intervalos abiertos:

$$I\left(z_k, \frac{1}{n_k}\right) := \left(z_k - \frac{1}{n_k}, z_k + \frac{1}{n_k}\right),$$

donde $n_k \in \mathbb{N}$ es el menor número natural para el que se tiene que $I(z_k, 1/n_k) \subseteq G$. Ahora, sea

$$G_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I\left(z_k, \frac{1}{n_k}\right)$$

un abierto y veamos que, en efecto, $G = G_0$.

- Resulta claro que $G_0 \subseteq G$ por ser G_0 unión numerable de intervalos abiertos que están contenidos en G .
- Para ver que $G \subseteq G_0$ razonamos de la siguiente forma. Sea $y \in G$ un punto arbitrario. Como G es abierto, existe $n_y \in \mathbb{N}$ de manera que $I(y, 1/n_y) \subseteq G$. Ahora, consideremos el intervalo centrado en el mismo punto pero cuyo lado mide la mitad del anterior, esto es, $I(y, 1/2n_y)$. Por ser \mathbb{Q} denso en \mathbb{R} , habrá una cantidad infinita de elementos de $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en el conjunto $I(y, 1/2n_y)$.

Sea w el primero de dichos elementos, que será de la forma

$$w = z_j, \quad j = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : z_k \in I\left(y, \frac{1}{2n_y}\right) \right\}.$$

Por un lado, se cumple que

$$y \in I\left(z_j, \frac{1}{2n_y}\right) \subset I\left(y, \frac{1}{n_y}\right) \subseteq G.$$

Esto es consecuencia de que la distancia entre y y z_j es menor que $1/2n_y$ y de que $1/n_y$ es el doble que $1/2n_y$.

Por otro lado, por definición, $n_j \in \mathbb{N}$ es el menor número natural para el que se cumple que $I(z_j, 1/n_j) \subseteq G$, por lo tanto $1/n_j \geq 1/2n_y$ y se tiene que

$$y \in I\left(z_j, \frac{1}{2n_y}\right) \subseteq I\left(z_j, \frac{1}{n_j}\right) \subseteq G_0.$$

Como el punto $y \in G$ escogido es arbitrario, se deduce que $G \subseteq G_0$.

□

Lema 3.23. *Cualquier intervalo abierto de \mathbb{R} se puede expresar como la unión numerable de elementos de \mathcal{C} . En particular, los intervalos abiertos son g -medibles.*

Demostración. Lo probaremos por casos.

- Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pongamos

$$(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{k}, b \right), \quad (3.8)$$

con lo que I se puede escribir como unión numerable de elementos de \mathcal{C} .

- Sea $I = (a, +\infty) \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. De forma análoga al caso anterior, pongamos

$$(a, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{k}, +\infty \right),$$

con lo que, de nuevo, I es unión numerable de conjuntos básicos.

- Sea $I = (-\infty, b) \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, es claro que $I \in \mathcal{C}$, con lo que se concluye trivialmente.
- Para los conjuntos $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{C}$ ocurre lo mismo que en el punto anterior.

Por lo tanto, acabamos de probar que todo intervalo abierto se puede expresar como unión numerable de conjuntos básicos. Ahora bien, por cumplirse que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \Sigma_g$ y ser Σ_g una σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{R} , deducimos que los intervalos abiertos son g -medibles. □

Ya estamos en condiciones de probar que los elementos de la σ -álgebra \mathcal{B} son g -medibles.

Proposición 3.24. *Los conjuntos de Borel son g -medibles.*

Demostración. Como consecuencia de los dos lemas anteriores se deduce que todo abierto se puede expresar como unión numerable de conjuntos g -medibles (elementos de \mathcal{C}), por lo que todo conjunto abierto pertenece a Σ_g . Ahora, como la σ -álgebra de Borel es la menor σ -álgebra que contiene a los abiertos de \mathbb{R} , se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \Sigma_g$. □

Observación 3.25. Los conjuntos cerrados en \mathbb{R} son g -medibles por ser complementarios de abiertos en \mathbb{R} (g -medibles).

Así, si tomamos la σ -álgebra \mathcal{B} en lugar de Σ_g , estaremos trabajando en una colección más pequeña de conjuntos que también cumplen la condición de Carathéodory para μ_g^* , y cuya medida exterior restringida a dicha colección es, de nuevo, $\mu_{g|\mathcal{B}}^* = \mu_{g|\Sigma_g}^* = \mu_g$.

Notación 3.26. Estaremos cometiendo un abuso de notación en el caso de que usemos lo anterior, esto es, $\mu_{g|\mathcal{B}}^* = \mu_{g|\Sigma_g}^* = \mu_g$, ya que se restringe la aplicación μ_g a familias de conjuntos distintas.

En el siguiente resultado veremos una propiedad que caracteriza al espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes. Para probarla, haremos uso de dos lemas previos, cuyas demostraciones encontramos en [Bartle, 1995].

Lema 3.27. *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es g -medible si y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto U con $E \subseteq U$ cumpliendo que $\mu_g(U \setminus E) < \varepsilon$.*

Lema 3.28. *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es g -medible si y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F con $F \subseteq E$ cumpliendo que $\mu_g(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Ya estamos en condiciones de ver la propiedad mencionada anteriormente, que asegura que todo conjunto g -medible se puede aproximar por un abierto por fuera y por un cerrado por dentro.

Proposición 3.29. *El espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes cumple las siguientes propiedades:*

- *Es regular exterior. Para todo conjunto g -medible E , se tiene, dado $\epsilon > 0$, que existe un conjunto abierto U tal que $E \subseteq U$ y $\mu_g(U) \leq \mu_g(E) + \epsilon$. En particular,*

$$\mu_g(E) = \inf \{ \mu_g(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto} \}.$$

- *Es regular interior. Para todo conjunto g -medible E , se tiene, dado $\epsilon > 0$, que existe un conjunto cerrado F tal que $F \subseteq E$ y $\mu_g(E) \leq \mu_g(F) + \epsilon$. En particular,*

$$\mu_g(E) = \sup \{ \mu_g(F) : F \subseteq E, F \text{ cerrado} \}.$$

Demostración. Probaremos ambas propiedades.

- Dado que $E \subseteq U$ se tiene que $U = E \cup (U \setminus E)$. De esta forma, como U es g -medible (por ser abierto), por el Lema 3.27 se cumple que

$$\mu_g(U) = \mu_g(E) + \mu_g(U \setminus E) \leq \mu_g(E) + \epsilon.$$

Por lo tanto, tomando ínfimos llegamos a que $\mu_g(E) = \inf \{ \mu_g(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto} \}$.

- Razonando de manera análoga al punto anterior, como $F \subseteq E$ tenemos $E = F \cup (E \setminus F)$. Además, por ser F cerrado es g -medible y, por el Lema 3.28 se cumple que

$$\mu_g(E) = \mu_g(F) + \mu_g(E \setminus F) \leq \mu_g(F) + \epsilon,$$

de donde, tomando supremos, se concluye que $\mu_g(E) = \sup \{ \mu_g(F) : F \subseteq E, F \text{ cerrado} \}$.

□

En lo sucesivo, veremos algunas propiedades interesantes del espacio de medida de Lebesgue-Stieltjes, como el hecho de que la medida de un punto puede ser distinta de cero o que μ_g puede ser descompuesta en una parte continua y otra de saltos.

Para ello, comencemos definiendo algunos conjuntos relacionados con la función g utilizada en el capítulo anterior y veamos qué propiedades encontramos con respecto a su medida de Lebesgue-Stieltjes.

Notación 3.30. En lo que queda de capítulo trabajaremos siempre con una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua por la izquierda. Además, usaremos la siguiente notación

$$g(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} g(y), \quad g(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} g(y).$$

Ya estamos en disposición de construir los conjuntos mencionados.

Definición 3.31 (Conjunto D_g). Dada la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos *conjunto de discontinuidades de g* a

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : g(x^+) - g(x) > 0\}.$$

Definición 3.32 (Conjuntos C_g y N_g). Dada la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos *conjunto de puntos alrededor de los cuales g es constante* a

$$C_g = \{x \in \mathbb{R} : g \text{ es constante en } (x - \varepsilon, x + \varepsilon), \text{ para algún } \varepsilon > 0\}.$$

Podemos reescribir el conjunto anterior como unión numerable y disjunta de abiertos, por ser C_g un conjunto abierto en \mathbb{R} con la topología usual, que es segundo numerable. En efecto, sean $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, se tiene que

$$C_g = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j). \quad (3.9)$$

Usando la notación que acabamos de emplear, definimos

$$N_g^- = \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \setminus D_g, \quad N_g^+ = \{b_j : j \in \mathbb{N}\} \setminus D_g, \quad N_g = N_g^- \cup N_g^+.$$

A continuación, veamos un ejemplo que nos va a permitir visualizar mejor estos conjuntos.

Ejemplo 3.33. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la siguiente función definida a trozos

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{3}{2}, & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ x - \frac{3}{2}, & \text{si } 3 < x \leq 4, \\ \frac{7}{2}, & \text{si } 4 < x \leq 5, \\ x - \frac{3}{2}, & \text{si } 5 < x. \end{cases}$$

Veamos si algún valor del intervalo $[-1, 6]$ pertenece a alguno de los conjuntos que acabamos de definir.

Para ello, nos acompañaremos de una representación gráfica de dicha función monótona creciente y continua por la izquierda (ver Figura 3.1).

En primer lugar, observemos que hay un único punto en el cual g presenta una discontinuidad (de salto finito), por lo que $D_g = \{4\}$. Por otro lado, el conjunto de puntos alrededor de los cuales g es constante será, claramente, $C_g = (1, 3) \cup (4, 5)$. Por último, teniendo en cuenta los dos anteriores, observemos que $N_g = \{1, 3, 4, 5\} \setminus D_g = \{1, 3, 5\}$.

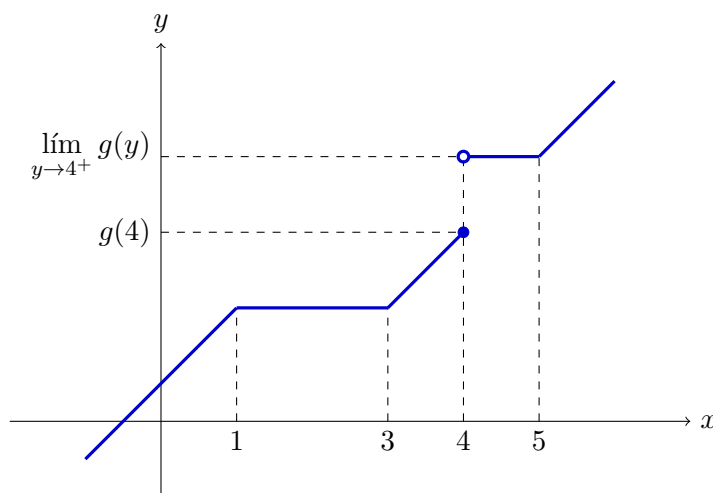


Figura 3.1: Representación gráfica de puntos de D_g , C_g y N_g .

Para poder desarrollar algunas de las propiedades de estos conjuntos, veamos cómo se comporta la medida de Lebesgue-Stieltjes sobre un único punto.

Proposición 3.34. *Dada la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para cualquier elemento $\{x\} \in \mathbb{R}$, se tendrá que $x \in \Sigma_g$, y , además, que $\mu_g(\{x\}) = g(x^+) - g(x)$. En particular, si $x \in D_g$, $\mu_g(\{x\}) > 0$.*

Demostración. En primer lugar, debemos garantizar que todo punto $\{x\} \in \mathbb{R}$ es g -medible. Es suficiente con tener en cuenta que $\{x\}$ se puede escribir como intersección numerable de conjuntos abiertos (que son elementos de la σ -álgebra de Borel), como sigue

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k} \right).$$

Así, como toda σ -álgebra es cerrada para intersecciones numerables y $\mathcal{B} \subseteq \Sigma_g$, se concluye.

Ahora, podemos definir la medida de un punto $\{x\} \in \mathbb{R}$. Usando el segundo punto de la Proposición 1.10, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_g(\{x\}) &= \mu_g \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[x, x + \frac{1}{k} \right) \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_g \left(\left[x, x + \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(g \left(x + \frac{1}{k} \right) - g(x) \right) = g(x^+) - g(x), \end{aligned}$$

por ser $\{[x, x + \frac{1}{k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos de Σ_g . Con esto concluimos que la medida sobre $\{x\}$ tiene la siguiente forma

$$\mu_g(\{x\}) = g(x^+) - g(x). \quad (3.10)$$

□

Observación 3.35. Tal y como hemos visto en la proposición anterior, la medida del conjunto de puntos de discontinuidades de g es distinta de cero. Comprobemos de una manera más intuitiva que se cumple lo anterior. En efecto, como μ_g mide distancias en el eje de ordenadas, esto es, sobre las imágenes de la función g , y g es monótona creciente, continua por la izquierda y presenta en cada punto de D_g una discontinuidad inevitable de salto finito, la diferencia entre el límite de la imagen de g por la derecha del punto y su imagen será distinta de cero.

Ejemplo 3.36. A modo ilustrativo, veamos cómo se comporta la medida μ_g si tomamos como $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la siguiente función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2, & \text{si } x \leq 3, \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

que presenta una discontinuidad en el punto $x = 3$, esto es, $\{3\} \in D_g$.

Claramente se tiene que $\mu_g(\{3\}) = g(3^+) - g(3) = \lim_{y \rightarrow 3^+} g(y) - g(3) = 4 - 7/2 = 1/2 > 0$, como podemos ver en la Figura 3.2.

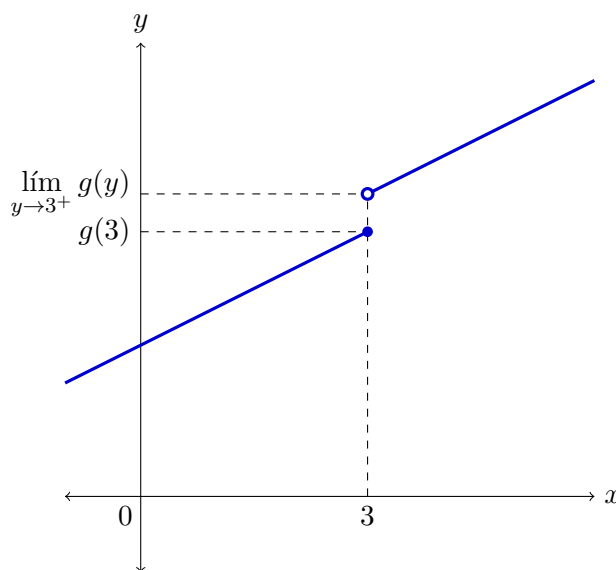


Figura 3.2: Representación gráfica de un punto $x \in D_g$.

Proposición 3.37. *Dados C_g y N_g los conjuntos definidos en 3.32, se tiene que*

$$\mu_g(C_g) = \mu_g(N_g) = 0.$$

Demostración. Probaremos cada igualdad por separado.

- En primer lugar, C_g es g -medible puesto que, como vimos en (3.9), es unión numerable de intervalos de la σ -álgebra Σ_g (por ser éstos conjuntos abiertos).

Ahora, tomando $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $F_k = [a_j + \frac{1}{k}, b_j)$ una sucesión creciente de elementos de la σ -álgebra Σ_g , podemos escribir

$$\begin{aligned} \mu_g(C_g) &= \mu_g \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g((a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a_j + \frac{1}{k}, b_j \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_g \left(\left[a_j + \frac{1}{k}, b_j \right) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(g(b_j) - g \left(a_j + \frac{1}{k} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se deduce de la aditividad numerable de la medida sobre una σ -álgebra y la tercera de (3.8). Además, la cuarta igualdad es consecuencia del primer punto de la Proposición 1.10 tomando como sucesión $\{F_k\}$ y, la última igualdad, de que la función g es constante en los puntos de C_g .

- En segundo lugar, N_g es g -medible por ser unión numerable de puntos de \mathbb{R} (g -medibles). Pongamos que $N_g = (\{a_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{b_j : j \in \mathbb{N}\}) \setminus D_g = \{c_j : j \in \mathbb{N}\} \setminus D_g$, donde, en cada c_j , la función g es constante y no presenta ninguna discontinuidad. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_g(N_g) &= \mu_g \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{c_j\} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g(\{c_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (g(c_j^+) - g(c_j)) = 0 \end{aligned}$$

como consecuencia de la aditividad numerable de la medida y de cómo definimos la medida sobre un punto en la igualdad (3.10).

□

Una vez analizada la medida de Lebesgue-Stieltjes sobre los conjuntos anteriores, vemos que hay dos partes claramente diferenciadas, una en la cual la función g es continua, y otra en la que presenta alguna discontinuidad. Veamos cómo podemos descomponer μ_g en su parte continua y de saltos. Para ello, nos basaremos en la segunda sección de [Fernández et al., 2022].

Definición 3.38 (Parte continua y de saltos de la medida μ_g). Dadas la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que g es continua en a y que $g(a) = 0$. Definimos:

- La *parte de saltos de g* como la siguiente función $g^B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua por la izquierda:

$$g^B(x) = \begin{cases} \sum_{s \in [a, x) \cap D_g} (g(s^+) - g(s)), & \text{si } x > a, \\ - \sum_{s \in [x, a) \cap D_g} (g(s^+) - g(s)), & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

- La *parte continua de g* es la función $g^C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g^C(x) = g(x) - g^B(x),$$

también monótona creciente y continua.

Observemos que tanto g^B como g^C son continuas en $x = a$ y cumplen que $g^B(a) = g^C(a) = 0$.

Proposición 3.39. *Supongamos que estamos en las condiciones de la definición anterior. Dado un conjunto $E \in \Sigma_g$ se cumple que*

$$\mu_g(E) = \mu_{g^C}(E) + \sum_{s \in E \cap D_g} (g(s^+) - g(s)).$$

Demostración. La demostración es consecuencia de [Fernández et al., 2022, Lemma 2.3], tomando $f = \chi_E$. En efecto, por [Fernández et al., 2022, Lemma 2.3], dada una función Lebesgue-Stieltjes integrable en un intervalo $[a, b)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{[a, b)} f d\mu_g &= \int_{[a, b)} f d\mu_{g^C} + \int_{[a, b)} f d\mu_{g^B} \\ &= \int_{[a, b)} f d\mu_{g^C} + \sum_{s \in [a, b) \cap D_g} f(s)(g(s^+) - g(s)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sea ahora $E \in \Sigma_g$, analicemos los siguientes casos:

- En el caso en el que E sea acotado, existirá un intervalo $[a, b)$ tal que $E \subseteq [a, b)$. Por lo tanto, considerando la función característica del conjunto E , χ_E , en (3.11),

$$\mu_g(E) = \mu_{g^C}(E) + \sum_{s \in E \cap D_g} (g(s^+) - g(s)).$$

- Supongamos ahora que $E \in \Sigma_g$ es un conjunto arbitrario y denotemos por $E_n = E \cap [-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Resulta claro que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, además, $f_n = \chi_{E_n}$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de funciones medibles, no negativas, monótona creciente y convergente a $f = \chi_E$. Por el

Teorema de la convergencia monótona y la Proposición 1.10,

$$\begin{aligned}
\mu_g(E) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\mu_g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-n,n]} \chi_{E_n} d\mu_g \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{[-n,n]} \chi_{E_n} d\mu_{g^C} + \int_{[-n,n]} \chi_{E_n} d\mu_{g^B} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu_{g^C}(E_n) + \mu_{g^B}(E_n)] \\
&= \mu_{g^C}(E) + \mu_{g^B}(E) \\
&= \mu_{g^C}(E) + \sum_{s \in E \cap D_g} (g(s^+) - g(s)),
\end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. □

Conjuntos no g -medibles

Para finalizar este capítulo, será interesante estudiar si existen conjuntos que no son g -medibles. La prueba de la existencia de tales conjuntos no parece una cuestión trivial y requiere cierto trabajo, por lo que, simplemente, veremos algunos puntos a tener en cuenta para identificarlos. Para ello, veamos qué propiedades debe cumplir, o no cumplir, una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para que existan conjuntos no g -medibles.

1. Si la función g es constante a trozos (esto es, no presenta ninguna parte estrictamente monótona creciente y continua), entonces todo subconjunto de \mathbb{R} es g -medible.
2. Si tomamos como función de referencia $g = id$, un ejemplo de conjunto no id -medible (es decir, no Lebesgue-medible) es el conjunto de Vitali.

Para una g arbitraria, no podemos afirmar que el conjunto de Vitali no sea g -medible. Esto se debe a que la medida de Lebesgue-Stieltjes, a diferencia de la medida de Lebesgue, no es invariante por traslaciones. Veamos esto.

Definición 3.40 (Traslación de E por a). Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, definimos la traslación de E por a como sigue:

$$a \oplus E = \{a + x : x \in E\}.$$

Se tiene que si $E \in \mathcal{A}$, entonces $a \oplus E \in \mathcal{A}$, por lo que ambos conjuntos son g -medibles.

Ahora bien, la medida de Lebesgue-Stieltjes no se conserva necesariamente por traslaciones. Por ejemplo, si tomamos una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que toma un valor constante para los

negativos y es estrictamente creciente para los positivos, vemos, claramente, que un intervalo en el semieje negativo de abscisas tendrá medida cero, mientras que si lo trasladamos al semieje positivo, su medida será positiva.

3. Tras haber demostrado el Teorema de Carathéodory en la sección anterior, resulta interesante ver algún ejemplo en el cual no se cumpla la aditividad numerable para la medida exterior. De nuevo esto nos llevaría a la búsqueda de conjuntos no g -medibles por ser siempre la medida exterior restringida a la colección de conjuntos g -medibles numerablemente aditiva.

Bibliografía

- [Bartle, 1995] Bartle, R. G. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York. Containing a corrected reprint of the 1966 original [*The elements of integration*, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.
- [Fernández et al., 2022] Fernández, F. J., Marquéz Albés, I., and Tojo, F. A. F. (2022). On first and second order linear stieltjes differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 511(1):126010.
- [Gentili, 2020] Gentili, S. (2020). *Measure, integration and a primer on probability theory*, volume 1. Springer.
- [Márquez Albés, 2021] Márquez Albés, I. (2021). *Differential problems with Stieltjes derivatives and applications*. Tesis doctoral, Universidade de Santiago de Compostela.