FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Sara Raposeiras Mariño

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Sara Raposeiras Mariño

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Transformadas integrais
Breve descrición do contido
Este traballo centrarase no estudo das transformadas integrais, como poden ser as transformadas de Fourier e de Laplace. Definiranse tanto as transformadas coma as súas inversas e estudaranse as súas propiedades básicas. Incluiranse tamén algunhas aplicacións das mencionadas transformadas no marco das ecuacións diferenciais.

Índice

Resumo **VI**

Introdución **IX**

1. Transformada de Laplace **1**

1.1. Propiedades da transformada de Laplace 4

1.2. Convolución 8

1.3. Transformada de Laplace inversa 11

1.4. Aplicacións ás ecuacións diferenciais 14

1.4.1. EDOs lineais con coeficientes constantes 14

1.4.2. Sistemas de EDOs lineais con coeficientes constantes 17

1.4.3. Problema mecánico de Abel 19

2. Transformada de Fourier **25**

2.1. Propiedades da transformada de Fourier 28

2.2. Transformada de Fourier inversa 34

2.3. Transformada de Fourier multivariable 37

2.4. Aplicacións ás ecuacións diferenciais 41

2.4.1. Ecuación da calor 41

2.4.2. Ecuación de Laplace 45

Resumo

Este traballo céntrase no estudo das transformadas de Laplace e Fourier, destacando a súa importancia na resolución de ecuacións diferenciais. Defínense ambas transformadas e as súas respectivas inversas, e analízanse as súas propiedades principais, incluíndo a súa relación co produto de convolución. Inclúense exemplos prácticos que amosan a súa utilidade na resolución tanto de ecuacións diferenciais ordinarias como de ecuacións en derivadas parciais, ilustrando a súa aplicabilidade en problemas reais.

Abstract

This work focuses on the study of Laplace and Fourier transforms, highlighting their importance in solving differential equations. Both transforms and their respective inverses are defined, and their main properties are analyzed, including their relationship with the convolution product. Practical examples are included to demonstrate their utility in solving both ordinary differential equations and partial differential equations, illustrating their applicability in real-world problems.

Introdución

As transformadas integrais son operadores que actúan sobre funcións e, mediante a integración, lles asocian novas funcións. Para ser máis precisos, consideraremos funcións dunha variable real, $f(x)$, definidas nun certo intervalo $[a, b]$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Entón, a transformada integral xeral vén dada pola seguinte expresión:

$$T[f(x)] = \int_a^b K(p, x) f(x)\, dx = F(p),$$

onde $K(p, x)$, coñecida como núcleo da transformada T, denota unha función fixa da variable x e de certo parámetro p.

En particular, se tomamos $a = 0$, $b = +\infty$ e $K(p, x) = e^{-px}$, temos a coñecida como transformada de Laplace, definida como

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx,$$

e nomeada en honor do matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827) quen a publicou na súa obra *Théorie analytique des probabilités*. Trátase dunha transfromada integral que converte unha función de variable real x nunha función de variable complexa p e que permite converter ecuacións diferenciais en ecuacións alxébricas, polo que é unha ferramenta moi útil para a resolución de ecuacións diferenciais, en especial, de ecuacións diferenciais ordinarias.

Por outra banda, tomando $a = -\infty$, $b = +\infty$ e $K(p, x) = e^{-ipx}$, obtemos a transformada de Fourier, que vén dada por

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx.$$

Recibe o seu nome en honor do matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), pola súa estreita relación coas series de Fourier. A transformada de Fourier é un recurso moi útil para a resolución de ecuacións en derivadas parciais, polo que resulta de gran utilidade para a comprensión de fenómenos como a difusión da calor ou as ondas electromagnéticas.

Ao longo deste traballo estudaremos en profundidade tanto a transformada de Laplace como a de Fourier. Comezaremos cun primeiro capítulo centrado na transformada de Laplace. Veremos, en primeiro lugar, como se define a transformada de Laplace e para que funcións está definida. Despois estudaremos as súas principais propiedades e definiremos a súa inversa que serán ferramentas esenciais á hora de aplicar a transformada de Laplace á resolución de EDOs. Para isto definiremos tamén o produto de convolución, desenvolveremos as súas propiedades e veremos o papel que xoga na transformada. Remataremos vendo algúns exemplos de aplicacións da transformada de Laplace á resolución de ecuacións diferenciais e, entre eles, veremos a resolución dun problema clásico de mecánica como é o problema de Abel.

No segundo capítulo centrarémonos na transformada de Fourier. Comezaremos, igual que no caso da transformada de Laplace, vendo a súa definición e para que funcións existe. Despois enunciaremos e probaremos as súas principais propiedades e definiremos a transformada de Fourier inversa. Ademais, veremos que todos estes resultados poden estenderse para funcións de varias variables reais. Acabaremos vendo algúns exemplos onde se utiliza a transformada para resolver ecuacións en derivadas parciais.

Capítulo 1

Transformada de Laplace

Neste capítulo estudaremos a transformada de Laplace, así como algunhas das súas propiedades e aplicacións á resolución de ecuacións difereniciais ordinarias. Seguiremos as referencias [2], [4], [6] e [9].

Definición 1.1. Sexa $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ unha función. A súa transformada de Laplace defínese como

$$\mathcal{L}[f](x) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx,$$

sempre que esta exista, é dicir, sempre que exista o límite

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-px} f(x)\, dx.$$

Observación 1.2. A transformada de Laplace de f, $F(p)$, é unha función do parámetro $p \in \mathbb{C}$.

No caso de que f sexa continua a cachos, o único problema que podemos atopar para que exista a súa transformada de Laplace radica no comportamento do integrando $e^{-px}f(x)$ para valores grandes de x. Para garantir a converxencia da integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx$$

suporemos que f é de orde exponencial, é dicir, que existen dúas constantes $M > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ de xeito que

$$|f(x)| \leq Me^{cx}, \text{ para todo } x \in [0, +\infty). \tag{1.1}$$

En efecto, se se cumpre (1.1), tense que

$$|e^{-px} f(x)| \leq Me^{cx}|e^{-px}| = Me^{-(\mathrm{Re}(p)-c)x},$$

onde $\mathrm{Re}(p)$ denota a parte real de p. E posto que para $\mathrm{Re}(p) > c$ a integral da función da dereita é converxente, temos que para $\mathrm{Re}(p) > c$ a transformada de Laplace de f converxe absolutamente.

Nestas condicións, para $\mathrm{Re}(p) > c$ tense que

$$|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|e^{-px} f(x)\right|\,dx \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}(p)-c)x}\,dx = \frac{M}{\mathrm{Re}(p) - c},$$

e entón $F(p) \to 0$ cando $\mathrm{Re}(p) \to \infty$.

Observación 1.3. Ser continua a cachos e de orde exponencial é unha condición suficiente para a existencia da transformada de Laplace dunha función, pero non é unha condición necesaria.

Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conxunto das funcións definidas no semieixo positivo $[0, +\infty)$ que sexan continuas a cachos e de orde exponencial. Ás veces, poden aparecer valores negativos de x, polo que, por convenio, os elementos de $\mathcal{E}$ esténdense para ser cero en todo o semieixo negativo. Noutras palabras, consideramos os elementos de $\mathcal{E}$ ou ben como funcións en $[0, +\infty)$ ou como funcións en $\mathbb{R}$ que satisfán $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. A partir de agora e no que resta de capítulo, suporemos, salvo que se indique o contrario, que a función f pertence a $\mathcal{E}$.

Vexamos agora algúns exemplos de transformadas de Laplace habituais. No Cadro 1.1 temos as transformadas de Laplace dalgunhas funcións elementais que aparecen con frecuencia e que serán de utilidade posteriormente para o cálculo das transformadas doutras funcións máis complexas.

Cadro 1.1: Pares de transformadas de Laplace.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(p) = \mathcal{L}[f(x)]}$
1	$\frac{1}{p}$, se $\mathrm{Re}(p) > 0$
x	$\frac{1}{p^2}$, se $\mathrm{Re}(p) > 0$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$, se $\mathrm{Re}(p) > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$, se $\mathrm{Re}(p) > a$
$\mathrm{sen}(ax)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$, se $\mathrm{Re}(p) > 0$
$\cos(ax)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$, se $\mathrm{Re}(p) > 0$
$\mathrm{senh}(ax)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$, se $\mathrm{Re}(p) > \lvert a\rvert$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$, se $\mathrm{Re}(p) > \lvert a\rvert$

Desenvolvamos os detalles dos cálculos para algunhas delas. En primeiro lugar, vexamos que

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^{+\infty} e^{-px} e^{ax}\, dx = \frac{1}{p-a}, \tag{1.2}$$

para calquera p tal que $\mathrm{Re}(p) > a$, $a \in \mathbb{R}$. Aplicando a definición de transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^{+\infty} e^{-px} e^{ax}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-(p-a)x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{e^{-(p-a)x}}{p-a} \Big|_0^b \right] = \frac{1}{p-a}.$$

Tamén é sinxelo ver que

$$\mathcal{L}[x] = \int_0^{+\infty} e^{-px} x\, dx = \frac{1}{p^2}, \tag{1.3}$$

sempre que $\mathrm{Re}(p) > 0$. Facendo integración por partes dúas veces obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x] &= \int_0^{+\infty} e^{-px} x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px} x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-e^{-px}x}{p} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{-1}{p} e^{-px}\, dx \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-e^{-px}x}{p} \Big|_0^b \right] + \frac{1}{p} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px}\, dx = \frac{1}{p} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px}\, dx \\
&= \frac{1}{p} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-e^{-px}}{p} \Big|_0^b \right] = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

Por último, para probar que

$$\mathcal{L}[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-px} x^n\, dx = \frac{n!}{p^{n+1}}, \tag{1.4}$$

sempre que $\mathrm{Re}(p) > 0$, procedemos por indución en n. Xa temos visto que $\mathcal{L}[x^1] = 1/p^2$. Pola hipótese de indución, supoñemos que

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

e calculamos a transformada de Laplace de x^{n+1}:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x^{n+1}] &= \int_0^{+\infty} e^{-px} x^{n+1}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px} x^{n+1}\, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{n+1}e^{-px}}{-p} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{(n+1)x^n e^{-px}}{-p}\, dx \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{n+1}e^{-px}}{-p} \Big|_0^b \right] + \frac{n+1}{p} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x^n e^{-px}\, dx \\
&= \frac{n+1}{p} \int_0^{+\infty} x^n e^{-px}\, dx = \frac{n+1}{p} \mathcal{L}[x^n] \\
&= \frac{n+1}{p} \cdot \frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{p^{n+2}}.
\end{aligned}$$

1.1. Propiedades da transformada de Laplace

Probaremos a continuación algunhas das propiedades da transformada de Laplace, que posteriormente serán útiles para a súa aplicación á resolución de ecuacións diferenciais.

En primeiro lugar, probaremos a linearidade da transformada de Laplace.

Proposición 1.4. *Para calquera par de funcións f, g para as cales existan $\mathcal{L}[f(x)]$ e $\mathcal{L}[g(x)]$, respectivamente, e calquera par de constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, cúmprese*

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{L}[f(x)] + \beta \mathcal{L}[g(x)].$$

Demostración. Este resultado dedúcese directamente da linearidade da integral, pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \int_0^{+\infty} \left(\alpha e^{-px} f(x) + \beta e^{-px} g(x)\right)\, dx \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx + \beta \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\, dx \\
&= \alpha \mathcal{L}[f(x)] + \beta \mathcal{L}[g(x)].
\end{aligned}$$

□

Esta propiedade facilita moito o cálculo das transformadas de Laplace dalgunhas funcións. Calculemos por exemplo a transformada de $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[3x^2 - 5x + 1] = 3\mathcal{L}[x^2] - 5\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[1] = 3\,\frac{2}{p^3} - 5\,\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{6}{p^3} - \frac{5}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Grazas a linearidade da transformada de Laplace podemos calcular tamén de xeito sinxelo as transformadas do seno e o coseno. Tendo en conta que

$$\operatorname{sen}(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \qquad \text{e} \qquad \cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2},$$

temos que as súas respectivas transformadas de Laplace son:

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(ax)] = \frac{1}{2\,i}\left(\mathcal{L}[e^{iax}] - \mathcal{L}[e^{-iax}]\right) = \frac{1}{2\,i}\left(\frac{1}{p - ia} - \frac{1}{p + ia}\right) = \frac{a}{p^2 + a^2}, \text{ se } \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{iax}] + \mathcal{L}[e^{-iax}]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - ia} + \frac{1}{p + ia}\right) = \frac{p}{p^2 + a^2}, \text{ se } \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (1.6)$$

É interesante tamén o comportamento da transformada de Laplace fronte á derivación e a integración. Debemos ter en conta que estamos a tratar con funcións definidas como 0 no semieixo negativo, o cal probablemente cause que aparezan discontinuidades en f ou nas súas derivadas en $x = 0$.

Veremos en primeiro lugar a relación entre a transformada de Laplace dunha función e as transformadas da súa derivada e da súa integral.

Proposición 1.5. *Sexa $f \in \mathcal{E}$ unha función continua en $[0,+\infty)$ e de clase $\mathcal{C}^1$ a cachos en $[0,+\infty)$, e tal que $f' \in \mathcal{E}$, e sexa $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$ a súa transformada de Laplace. Entón*

$$\mathcal{L}[f'(x)] = p\,\mathcal{L}[f(x)] - f(0). \tag{1.7}$$

Demostración. Por definición,

$$\mathcal{L}[f'(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px} f'(x)\,dx.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px} f'(x)\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-px} f(x) \Big|_0^b + p \int_0^b f(x) e^{-px}\,dx \right)\\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-pb} f(b)\right) - e^0 f(0) + p \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x) e^{-px}\,dx\\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-pb} f(b)\right) - f(0) + p\mathcal{L}[f(x)].\end{aligned}$$

Finalmente, como f é de orde exponencial, digamos $|f(x)| \le M e^{cx}$,

$$\lim_{b\to+\infty} \left(e^{-pb} f(b)\right) = 0, \text{ para calquera } p \text{ tal que } \operatorname{Re}(p) > c.$$

Polo tanto obtemos que

$$\mathcal{L}[f'(x)] = p\,\mathcal{L}[f(x)] - f(0). \tag{1.8}$$

□

Baixo as condicións anteriores, se f é de clase $\mathcal{C}^\infty$ a cachos en $[0,+\infty)$, repetindo o proceso de integración por partes, obtemos unha fórmula xeral para a transformada da derivada n-ésima da función f, sempre que $f^{n)} \in \mathcal{E}$, dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{n)}(x)] &= p^n \mathcal{L}[f(x)] - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'_+(0) - \dots - p f_+^{n-2)}(0) - f_+^{n-1)}(0)\\ &= p^n \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k}\, f_+^{k-1)}(0),\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde $f_+^{k)}(0)$ son as sucesivas derivadas k-ésimas pola dereita en $x = 0$, é dicir

$$f_+^{k)}(0) = \lim_{h\to0^+} \frac{f^{k-1)}(h) - f^{k-1)}(0)}{h}.$$

Proposición 1.6. *Sexan f unha función e g a función definida a partir de f como*

$$g(x) = \int_0^x f(s)\,ds,$$

de xeito que $f, g \in \mathcal{E}$. Entón, cúmprese que

$$\mathcal{L}[g(x)] = \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{p}.$$

Demostración. Por definición,

$$\mathcal{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left[e^{-px} \int_0^x f(s)\,ds \right] dx.$$

Operando e cambiando a orde de integración chegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g(x)] &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^x e^{-px} f(s)\,ds \right] dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} e^{-px} f(s)\,dx \right] ds \\
&= \int_0^{+\infty} \left[f(s) \int_s^{+\infty} e^{-px}\,dx \right] ds = \int_0^{+\infty} \left[f(s) \frac{1}{p} e^{-ps} \right] ds \\
&= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} f(s) e^{-ps}\,ds = \frac{1}{p}\, \mathcal{L}[f(x)],
\end{aligned}$$

onde $\mathrm{Re}(p)$ é suficientemente grande para garantir a converxencia de todas as integrais. □

Reciprocamente, veremos agora que obtemos ao derivar ou integrar a propia transformada de Laplace. Se consideramos a fórmula xeral da transformada de Laplace

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx$$

e derivamos respecto do parámetro p, obtemos

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} (-x) f(x)\,dx = \mathcal{L}[-x f(x)]. \tag{1.10}$$

Derivando unha segunda vez,

$$F''(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} (x^2) f(x)\,dx = \mathcal{L}[x^2 f(x)].$$

Procedendo por indución, obtense a seguinte fórmula xeral para a derivada n-ésima:

$$F^{n)}(p) = \mathcal{L}[(-1)^n x^n f(x)].$$

Analogamente, para a integración da transformada de Laplace temos o seguinte resultado.

Proposición 1.7. *Sexa $f \in \mathcal{E}$ e $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$ a súa transformada de Laplace. Entón, se $\dfrac{f(x)}{x} \in \mathcal{E}$, tense que*

$$\int_p^{+\infty} F(s)\,ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x} \right].$$

Demostración. Denotemos $G(p) = \mathcal{L}[f(x)/x]$. Aplicamos (1.10) a G e obtemos

$$G'(p) = \mathcal{L}\left[-x\, \frac{f(x)}{x} \right] = \mathcal{L}[-f(x)] = -\mathcal{L}[f(x)] = -F(p).$$

Entón, integrando ambas expresións, tense que

$$G(p) = G(a) - \int_a^p F(p)\, dp,$$

para certo a.

Como queremos que $G(p) \to 0$ cando $p \to +\infty$, tomamos $a = +\infty$, co que chegamos a

$$G(p) = \int_p^{+\infty} F(p)\, dp,$$

como queriamos demostrar. □

Por último, veremos que tamén se poden facer traslacións coa transformada de Laplace. Temos os seguintes dous resultados:

Proposición 1.8. *Sexan $f \in \mathcal{E}$ unha función, $\mathcal{L}[f(x)]$ a súa transformada de Laplace e $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Entón*

$$\mathcal{L}[f(x-b)] = e^{-pb}\mathcal{L}[f(x)].$$

Demostración. Aplicando o cambio de variable $t = x - b$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x-b)] &= \int_b^{+\infty} e^{-px} f(x-b)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-p(t+b)} f(t)\, dt \\ &= e^{-pb} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = e^{-pb}\mathcal{L}[f(x)].\end{aligned}$$

□

Proposición 1.9. *Sexan f unha función, $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$ a súa transformada de Laplace e $a \in \mathbb{C}$, tal que Re(p) $> \mathrm{Re}(a)$. Entón*

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(p-a).$$

Demostración.

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} e^{ax} f(t)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)x} f(t)\, dx = F(p-a).$$

□

Por exemplo, se consideramos $f(x) = \mathrm{sen}(bx)$, empregando (1.5) temos que

$$F(p) = \mathcal{L}[f(x)] = \frac{b}{p^2 + b^2},$$

co cal deducimos que

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = \mathcal{L}[e^{ax}\ \mathrm{sen}(bx)] = \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}.$$

Finalmente, a modo de resumo recóllense no Cadro 1.2 todas as propiedades vistas nesta sección.

Cadro 1.2: Propiedades da transformada de Laplace.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(p) = \mathcal{L}[f(x)]}$
$f(x)$	$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx$
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha \mathcal{L}[f(x)] + \beta \mathcal{L}[g(x)]$
$f'(x)$	$p\, \mathcal{L}[f(x)] - f(0)$
$f^{n)}(x)$	$p^n\, \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k}\, f_+^{k-1)}(0)$
$\int_0^x f(s)\, ds$	$\dfrac{\mathcal{L}[f(x)]}{p}$
$x\, f(x)$	$F'(p)$
$(-1)^n\, x^n\, f(x)$	$F^{n)}(p)$
$\dfrac{f(x)}{x}$	$\int_p^{+\infty} F(s)\, ds$
$f(x-b)$	$e^{-pb}\, \mathcal{L}[f(x)]$
$e^{ax} f(x)$	$F(p-a)$

1.2. Convolución

Xa vimos que a suma de dúas transformadas de Laplace é igual a transformada da suma. Para o produto, isto non se cumpre. Co fin de dar sentido a esta propiedade, defínese un "produto xeneralizado" de dúas funcións, chamado convolución.

Definición 1.10. Sexan dúas funcións f e g. Defínese a convolución de f e g como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(x-s)\, ds, \tag{1.11}$$

sempre que dita integral exista.

Veremos agora algunhas das propiedades da convolución. En primeiro lugar, probaremos que, ao igual que o produto usual, o produto de convolución é conmutativo, asociativo e distributivo.

Proposición 1.11. *Sexan f, g e h tres funcións, e $a, b \in \mathbb{C}$ dúas constantes. Cúmprense as seguintes propiedades:*

(a) $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$.

(b) $f * g = g * f$.

(c) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Demostración. Demostraremos cada unha das propiedades por separado.

(a) Dedúcese directamente da linearidade da integral:

$$\begin{aligned} f * (ag + bh) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)(ag + bh)(x - s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(af(s)g(x - s) + bf(s)h(x - s)\right) ds \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x - s)\, ds + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(x - s)\, ds = a(f * g) + b(f * h). \end{aligned}$$

(b) Basta con facer o cambio e variable $y = x - s$:

$$(f{*}g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x{-}s)\, ds = \int_{+\infty}^{-\infty} -g(y)f(x{-}y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(x{-}y)\, dy = (g{*}f)(x).$$

(c) Para demostrar esta propiedade, utilizamos (b):

$$\begin{aligned} (f * g) * h\,(x) = h * (f * g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)(f * g)(x - s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(s) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x - s - y)\, dy \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\, f(y)\, g(x - s - y)\, dy\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\, g(x - y - s)\, ds \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)(h * g)(x - y)\, dy \\ &= f * (h * g)(x) = f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

□

Estudaremos agora o comportamento da convolución respecto da derivación.

Teorema 1.12. *Sexan f e g dúas funcións tales que f é derivable e as convolucións $f*g$ e $f'*g$ están ben definidas. Entón $f*g$ é derivable e $(f*g)'=f'*g$. Ademais, se g tamén é derivable, entón*

$$(f*g)'=f'*g=f*g'. \tag{1.12}$$

Demostración. Se f é derivable, derivando baixo o signo integral obtemos

$$(f*g)'(x)=\frac{d}{dx}(f*g)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-s)g(s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x-s)g(s)\,ds=f'*g(x).$$

Tendo en conta que $f*g=g*f$, se g é derivable, o mesmo argumento serve para probar que

$$(f*g)'=f'*g=f*g'.$$

□

Observación 1.13. Nótese que neste capítulo estamos a traballar únicamente con funcións pertencentes ao conxunto $\mathcal{E}$, é dicir, definidas como 0 fóra do intervalo $[0,+\infty)$, polo que

$$(f*g)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)g(x-s)\,ds=\int_{0}^{+\infty}f(s)g(x-s)\,ds.$$

Para rematar veremos que a transformada de Laplace do produto de convolución de dúas funcións é o produto das transformadas de Laplace de ditas funcións.

Teorema 1.14. *Sexan $f_1,f_2\in\mathcal{E}$ dúas funcións tales que o seu produto de convolución, f_1*f_2, estea ben definido. Se $f_1*f_2\in\mathcal{E}$, cúmprese que*

$$\mathcal{L}[f_1*f_2]=\mathcal{L}[f_1]\mathcal{L}[f_2].$$

Demostración. Por definición,

$$\mathcal{L}[f_1*f_2]=\int_0^{+\infty}e^{-px}\left[\int_0^{+\infty}f_1(s)f_2(x-s)\,ds\right]dx.$$

Operando e cambiando a orde de integración chegamos a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1*f_2]&=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-ps}f_1(s)e^{-p(x-s)}f_2(x-s)\,ds\right]dx\\&=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-ps}f_1(s)e^{-p(x-s)}f_2(x-s)\,dx\right]ds\\&=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-p(x-s)}f_2(x-s)\,dx\right]e^{-ps}f_1(s)\,ds\\&=\int_0^{+\infty}\mathcal{L}[f_2]e^{-ps}f_1(s)\,ds=\mathcal{L}[f_2]\int_0^{+\infty}e^{-ps}f_1(s)\,ds\\&=\mathcal{L}[f_2]\mathcal{L}[f_1].\end{aligned}$$

□

1.3. Transformada de Laplace inversa

Ata agora vimos como calcular a transformada de Laplace a partir dunha función dada. Plantexámonos agora o problema inverso, é dicir, dada unha transformada de Laplace, $\mathcal{L}[f(x)]$, recuperar a función f orixinal. Definiremos con dito fin a transformada inversa de Laplace, a cal será de gran utilidade para a resolución dalgunhas ecuacións diferenciais ordinarias. Guiarémonos polas referencias [2] e [10].

Definición 1.15. Consideremos unha función localmente integrable $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f é nula en case todo punto (c.t.p.) se é nula en todos os seus puntos menos nun conxunto de medida nula, ou equivalentemente, se para todo $b \in (0, +\infty)$ verifícase

$$\int_0^b |f(x)|\, dx = 0.$$

Definición 1.16. Dicimos que dúas funcións $f, g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente integrables son iguales en case todo punto se $f - g$ é unha función nula en case todo punto.

Proposición 1.17. *Sexan $f, g \in \mathcal{E}$ dúas funcións iguais en case todo punto. Entón*

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[g(x)].$$

Demostración. Consideremos a integral

$$\int_0^b |e^{-px} f(x) - e^{-px} g(x)|\, dx.$$

Polo teorema do valor medio do cálculo integral, existe un $c \in (0, b)$, tal que

$$\int_0^b |e^{-px} f(x) - e^{-px} g(x)|\, dx = e^{-c\,\mathrm{Re}(p)} \int_0^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0,$$

pois f e g son iguais en case todo punto. Entón,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(x)] - \mathcal{L}[g(x)]| &= \lim_{b \to +\infty} \left| \int_0^b e^{-px} f(x)\, dx - \int_0^b e^{-px} f(x)\, dx \right| \\ &\leq \lim_{b \to +\infty} \int_0^b |e^{-px} f(x) - e^{-px} g(x)|\, dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-c\,\mathrm{Re}(p)} \int_0^b |f(x) - g(x)|\, dx \right) = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, temos probado que $\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[g(x)]$. □

Por outra banda, temos o seguinte resultado, coñecido como teorema de Lerch, que establece unha especie de resultado recíproco ao anterior. Non probaremos o teorema, non obstante a demostración pódese atopar en [3].

Teorema 1.18 (de Lerch). *Sexan $f, g \in \mathcal{E}$ e supoñamos que*

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[g(x)].$$

Entón $f(x) = g(x)$ en todo punto $x \in [0, +\infty)$ no que tanto f coma g sexan continuas.

Observación 1.19. Se dada unha función $F(p)$, existe unha función continua $f(x)$ tal que

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(p),$$

sabemos que esta é a única función que cumpre tales condicións. Como a solución dunha ecuación diferencial é continua, a transformada de Laplace serve para determinar a solución de ecuacións diferenciais de xeito unívoco.

Deste xeito, podemos definir a transformada inversa de Laplace como segue:

Definición 1.20. Dada unha función F do parámetro $p \in \mathbb{C}$, chamamos transformada inversa de Laplace de F a calquera función $f \in \mathcal{E}$ tal que

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(p).$$

No caso de que algunha destas funcións sexa continua en $[0, +\infty)$, referirémonos a ela como a transformada inversa de Laplace de F, e denotarémola por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(x),$$

onde f denota á única función continua que cumpre $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$.

Vexamos algún exemplo de transformadas inversas sinxelas de calcular:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] &= 1, & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] &= x, \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{p^4}\right] &= x^3, & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right] &= e^x, \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right] &= \cos(2x), & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right] &= \operatorname{sen}(2x). \end{aligned}$$

Para rematar, probaremos un resultado que nos proporciona unha fórmula para calcular a transformada inversa de Laplace baixo certas condicións.

Teorema 1.21. *Sexa $F(p)$ unha función holomorfa, e por tanto analítica, en $\mathbb{C} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e tal que existe unha constante $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que F é holomorfa en $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \sigma\}$. Supoñamos ademáis que existen M, R e c constantes positivas tales que*

$$|F(p)| \leq \frac{M}{|p|^c}, \text{ se } |p| \geq R.$$

Para $t \geq 0$, *sexa*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(e^{px}F(p), p_k),$$

onde $\mathrm{Res}\,(e^{px}F(p), p_k)$ *denota o residuo da función* $e^{px}F(p)$ *na singularidade illada* p_k. *Entón*

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(p) \ \textit{se} \ \mathrm{Re}(p) > \sigma.$$

Demostración. Sexa $\alpha > \sigma$ e sexa Γ un rectángulo suficientemente grande como para que todas as singularidades de F estean contidas no seu interior e tal que todo $p \in \Gamma$ cumpra que $|p| > R$, como se ilustra na Figura 1.1.

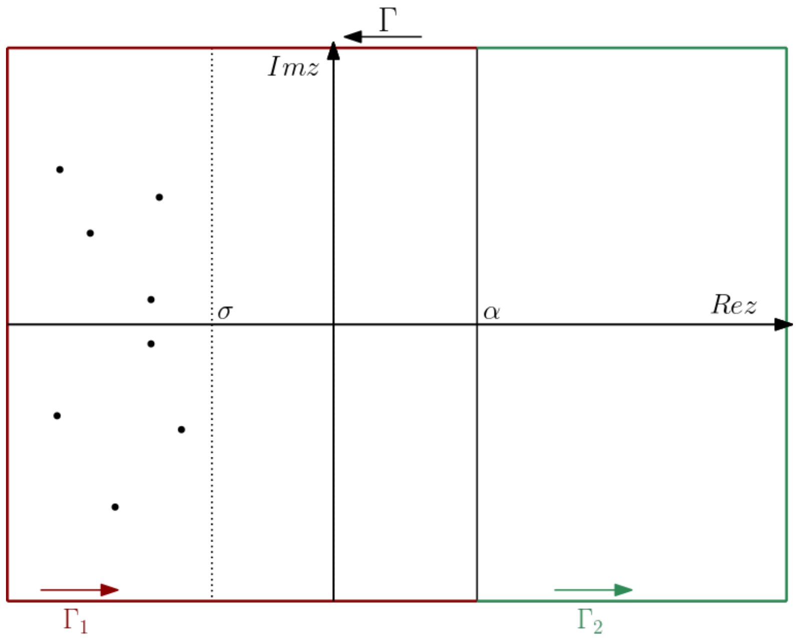

Figura 1.1: Rectángulo Γ.

Separamos Γ na suma de dous camiños pechados Γ_1, Γ_2 divididos pola recta $\mathrm{Re}(p) = \alpha$, de xeito que todas as singularidades de F estean contidas no interior de Γ_1.
Por definición de f temos que

$$\int_{\Gamma_1} e^{px}F(p)\,dp = 2\pi i\, f(x).$$

Entón

$$2\pi i\,\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[2\pi i f(x)] = \mathcal{L}\left[\int_{\Gamma_1} e^{wx}F(w)\,dw\right] = \int_0^{+\infty} e^{-px}\left[\int_{\Gamma_1} e^{wx}F(w)\,dw\right]dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-px}\left[\int_{\Gamma_1} e^{wx}F(w)\,dw\right]dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\Gamma_1}\left[\int_0^b e^{(w-p)x}F(w)\,dx\right]dw.$$

Integrando respecto de x obtemos entón

$$2\pi i\,\mathcal{L}[f(x)] = \lim_{b\to+\infty}\int_{\Gamma_1}(e^{(w-p)b}-1)\,\frac{F(w)}{w-p}\,dw.$$

Fixado un p no semiplano $\mathrm{Re}(p) > \alpha$, $e^{(w-p)b}$ converxe a 0 cando $b \to +\infty$. En consecuencia chegamos a que

$$2\pi i\,\mathcal{L}[f(x)] = -\int_{\Gamma_1}\frac{F(w)}{w-p}\,dw = \int_{\Gamma_2}\frac{F(w)}{w-p}\,dw - \int_{\Gamma}\frac{F(w)}{w-p}\,dw = 2\pi i\,F(p) - \int_{\Gamma}\frac{F(w)}{w-p}\,dw.$$

Por outra banda, consideramos unha circunferencia de raio $\rho > R$,

$$\tau(x) = \rho e^{ix}, \qquad x \in [0, 2\pi],$$

que conteña a Γ. Entón

$$\int_{\Gamma}\frac{F(w)}{w-p}\,dw = \int_{\tau}\frac{F(w)}{w-p}\,dw,$$

polo cal

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{F(w)}{w-p}\,dw\right| \leq \frac{M}{|\rho|^c\,(\rho-R)}\,2\pi\rho \longrightarrow 0, \text{ se } \rho \longrightarrow +\infty.$$

Polo tanto, polo teorema de compresión, temos que

$$\int_{\Gamma}\frac{F(w)}{w-p}\,dw = 0,$$

e como α era arbitrario, tense que $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$ para todo $Re(p) > \sigma$.

□

1.4. Aplicacións ás ecuacións diferenciais

Nesta sección veremos algúns exemplos de casos nos que o uso da transformada de Laplace resulta útil para a resolver ecuacións diferenciais ordinarias. Seguiremos as referencias [6] e [9].

1.4.1. EDOs lineais con coeficientes constantes

Supoñamos que queremos atopar unha solución da seguinte ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{1.13}$$

satisfacendo as condicións iniciais

$$y(0) = y_0 \qquad \text{e} \qquad y'(0) = y_0'.$$

Aplicamos a transformada de Laplace a ambos lados da igualdade (1.13), e utilizamos a linearidade da transformada

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[y'' + ay' + by] = \mathcal{L}[y''] + a\mathcal{L}[y'] + b\mathcal{L}[y]. \tag{1.14}$$

Queremos agora expresar $\mathcal{L}[y'']$ e $\mathcal{L}[y']$ en función de $\mathcal{L}[y]$. Aplicando a fórmula (1.9) para a transformada da derivada n-ésima,

$$\mathcal{L}[y'] = p\mathcal{L}[y] - y(0) \tag{1.15}$$

e

$$\mathcal{L}[y''] = p^2\mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0). \tag{1.16}$$

Insertando as condicións iniciais en (1.15) e (1.16) obtemos

$$\mathcal{L}[y'] = p\mathcal{L}[y] - y_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[y''] = p^2\mathcal{L}[y] - py_0 - y_0',$$

e substituíndo ditas expresións en (1.14) chegamos a

$$\mathcal{L}[f(x)] = p^2\mathcal{L}[y] - py_0 - y_0' + ap\mathcal{L}[y] - ay_0 + b\mathcal{L}[y].$$

Despexando $\mathcal{L}[y]$ nesta ecuación chegamos a

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[f(x)] + (p+a)y_0 + y_0'}{p^2 + ap + b},$$

que é unha función completamente coñecida de p, pois $f(x)$, a, b, y_0 e y_0' son coñecidos. Basta entón atopar que función $y(x)$ ten ao membro da dereita como a súa transformada de Laplace, que será a solución que buscabamos.

Exemplo 1.22. Buscaremos a solución de

$$y'' + 4y = 4x$$

satisfacendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$.

Aplicamos a transformada de Laplace e obtemos

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = 4\mathcal{L}[x]. \tag{1.17}$$

Por (1.3), sabemos que

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p^2}.$$

Usando (1.16) e as condicións iniciais e substituíndo o valor de $\mathcal{L}[x]$ en (1.17), chegamos a

$$p^2\mathcal{L}[y] - p - 5 + 4\mathcal{L}[y] = \frac{4}{p^2},$$

onde, despexando $\mathcal{L}[y]$, resulta

$$\mathcal{L}[y] = \frac{p^3+5p^2+4}{p^2(p^2+4)} = \frac{p}{p^2+4} + \frac{5}{p^2+4} + \frac{4}{p^2(p^2+4)} = \frac{p}{p^2+4} + \frac{4}{p^2+4} + \frac{1}{p^2}.$$

Empregando (1.6), (1.5) e (1.3) temos entón que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\ \cos 2x] + \mathcal{L}[2\ \mathrm{sen} 2x] + \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\cos 2x + 2\ \mathrm{sen} 2x + x],$$

e en consecuencia chegamos a que a solución que buscabamos é

$$y = \cos 2x + 2\ \mathrm{sen} 2x + x.$$

Exemplo 1.23. Atoparemos a solución de

$$y'' + y = \cos x$$

satisfacendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Aplicamos a transformada de Laplace e obtemos

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos\ x]. \tag{1.18}$$

Por (1.6), sabemos que

$$\mathcal{L}[\cos x] = \frac{p}{p^2+1}.$$

Usando (1.16) e as condicións iniciais e substituíndo o valor de $\mathcal{L}[\cos x]$ en (1.18), chegamos á expresión

$$p^2\mathcal{L}[y] - 1 + \mathcal{L}[y] = \frac{p}{p^2+1},$$

onde, despexando $\mathcal{L}[y]$, e empregando (1.5) e (1.6), resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \frac{p^2+p+1}{(p^2+1)^2} = \frac{p^2+1}{(p^2+1)^2} + \frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \\ &= \mathcal{L}[\ \mathrm{sen} x] + \mathcal{L}[\cos x]\mathcal{L}[\ \mathrm{sen} x] = \mathcal{L}[\ \mathrm{sen} x + \ \cos x * \ \mathrm{sen} x],\end{aligned}$$

onde $\cos x * \ \mathrm{sen}\, x$ denota a convolución destas dúas funcións, definida como en (1.11).

Calculamos $\cos x * \ \mathrm{sen}\, x$:

$$\begin{aligned}\cos x * \ \mathrm{sen}\, x &= \int_0^x \cos(s)\ \mathrm{sen}(x-s)\, ds = \left[\frac{1}{4}\cos(2s-x) + \frac{1}{2}s\ \ \mathrm{sen}(x)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{2}x\ \mathrm{sen}(x) - \frac{1}{4}\cos(-x) = \frac{x\ \mathrm{sen}(x)}{2}.\end{aligned}$$

En consecuencia chegamos a que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(x) + \frac{x\ \mathrm{sen}(x)}{2}\right] = \mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\right],$$

e polo tanto a solución que buscabamos é

$$y(x) = \mathrm{sen}(x)\left(1+\frac{x}{2}\right).$$

1.4.2. Sistemas de EDOs lineais con coeficientes constantes

De igual xeito, a transformada de Laplace permítenos tamén resolver algúns sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias. Supoñamos que queremos atopar unha solución do seguinte sistema de primeira orde

$$\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{c}, \tag{1.19}$$

onde $A = (A_{ij})$ é unha matriz de coeficientes constantes de dimensión $k \times k$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_k)$ un vector constante, e $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_k)$ e $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots f_k)$ son vectores (columna) de funcións de x, tales que $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}$, e en consecuencia $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{E}$. Aplicando a transformada de Laplace á expresión (1.19), obtemos

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x})] = A\,\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})],$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})]$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$ e $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x})]$ son vectores que conteñen as transformadas de Laplace de cada unha das compoñentes de $\boldsymbol{y}$, de $\boldsymbol{f}$ e de $\boldsymbol{y}'$ respectivamente, é dicir

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1(x)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[y_k(x)] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[f_1(x)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[f_k(x)] \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x})] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1'(x)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[y_k'(x)] \end{pmatrix}.$$

Utilizando a fórmula da transformada de Laplace da derivada (1.7), e tendo en conta a condición inicial $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{c}$ obtemos

$$p\,\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] - \boldsymbol{c} = A\,\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})],$$

ou equivalentemente

$$(p\,I - A)\,\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{c}, \tag{1.20}$$

onde I denota a matriz identidade de orde k.

Para obter a solución que buscamos precisamos invertir a matriz $(p\,I - A)$. Os elementos da matriz inversa, $(p\,I - A)^{-1}$, serán funcións racionais do parámetro p, cuxo denominador será o polinomio característico $\det(p\,I - A)$.

Podemos entón construír a seguinte matriz

$$\Phi = (\phi_{ij}) = \mathcal{L}^{-1}\left[(p\,I - A)^{-1}\right],$$

cuxos elementos son as transformadas inversas de Laplace dos elementos de $(p\,I - A)^{-1}$.

Despexando entón $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})]$ na ecuación (1.20) chegamos a

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] = (p\,I - A)^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] + (p\,I - A)^{-1}\boldsymbol{c},$$

e aplicando a transformada de Laplace inversa obtemos finalmente que

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{c},$$

onde $\boldsymbol{\Phi} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{c}$ son dous vectores cuxas compoñentes i-ésimas veñen dadas por

$$(\boldsymbol{\Phi} * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))_i = \sum_j \phi_{ij} * f_j \quad \text{e} \quad (\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{c})_i = \sum_j \phi_{ij}\, c_j,$$

respectivamente.

Exemplo 1.24. Resolveremos o sistema

$$\begin{cases} y_1' &= -8y_1 - 9u_2 + e^{-x}, \\ y_2' &= 4u_1 + 4u_2, \end{cases}$$

con condicións iniciais

$$y_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(0) = 0.$$

Temos neste caso particular que

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

polo que

$$pI - A = \begin{pmatrix} p+8 & 9 \\ -4 & p-4 \end{pmatrix},$$

e como

$$\det(pI - A) = (p+8)(p-4) + 36 = p^2 + 4p + 4 = (p+2)^2,$$

temos que

$$(pI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p-4}{(p+2)^2} & \frac{-9}{(p+2)^2} \\ \frac{4}{(p+2)^2} & \frac{p+8}{(p+2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+2} - \frac{6}{(p+2)^2} & \frac{-9}{(p+2)^2} \\ \frac{4}{(p+2)^2} & \frac{1}{p+2} + \frac{6}{(p+2)^2} \end{pmatrix}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace obtemos a matriz

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} - 6\,x\,e^{-2x} & -9\,x\,e^{-2x} \\ 4\,x\,e^{-2x} & e^{-2x} - 6\,x\,e^{-2x} \end{pmatrix},$$

e en consecuencia, a nosa solución é

$$\boldsymbol{y(x)} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} * f_1 + \phi_{12} * f_2 \\ \\ \phi_{21} * f_1 + \phi_{22} * f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{-2x} - 6\,x\,e^{-2x}) * e^{-x} \\ \\ (4\,x\,e^{-2x}) * e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Desenvolvemos cada unha das expresións por separado. En primeiro lugar

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (e^{-2x} - 6\,x\,e^{-2x}) * e^{-x} = \int_0^x \left(e^{-2s} - 6\,s\,e^{-2s}\right) e^{-x+s}\,ds \\ &= \int_0^x \left(e^{-s-x} - 6\,s\,e^{-s-x}\right)\,ds = \int_0^x e^{-s-x}\,ds - \int_0^x 6\,s\,e^{-s-x}\,ds. \end{aligned}$$

Utilizando integración por partes para resolver a segunda integral, chegamos a

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x e^{-s-x}\,ds - \int_0^x 6\,s\,e^{-s-x}\,ds = \left[-e^{-s-x}\right]_0^x - \left(\left[-6\,s\,e^{-s-x}\right]_0^x + \int_0^x 6\,e^{-s-x}\,ds\right) \\ &= e^{-x} - e^{-2x} - \left(-6\,x\,e^{-2x} - \left[\,6\,e^{-s-x}\right]_0^x\right) = e^{-x} - e^{-2x} - \left(-6\,x\,e^{-2x} - 6\,e^{-2x} + 6\,e^{-x}\right) \\ &= e^{-2x}\,(-1 + 6x + 6) + e^{-x}\,(1-6) = (6x+5)e^{-2x} - 5e^{-x}. \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (4\,x\,e^{-2x}) * e^{-x} = \int_0^x 4\,s\,e^{-2s}e^{-x+s}\,ds = \int_0^x 4\,s\,e^{-x-s}\,ds \\ &= -4xe^{-2x} - 4e^{-2x} + 4e^{-x} = (-4x-4)e^{-2x} + 4e^{-x}. \end{aligned}$$

Co que a solución obtida é

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6x+5)e^{-2x} - 5e^{-x} \\ \\ (-4x-4)e^{-2x} + 4e^{-x} \end{pmatrix}.$$

1.4.3. Problema mecánico de Abel

Para rematar coas aplicacións da transformada de Laplace veremos un problema clásico de mecánica, resolto por Niels Henrik Abel en 1823.

Consideramos un fío en forma de curva suave e un abelorio de masa m que parte do repouso e descende sen rozamento polo fío cara a orixe baixo a acción do seu propio peso como se amosa na Figura 1.2.

Sexan (x, y) o punto de partida e (u, v) calquera punto intermedio.

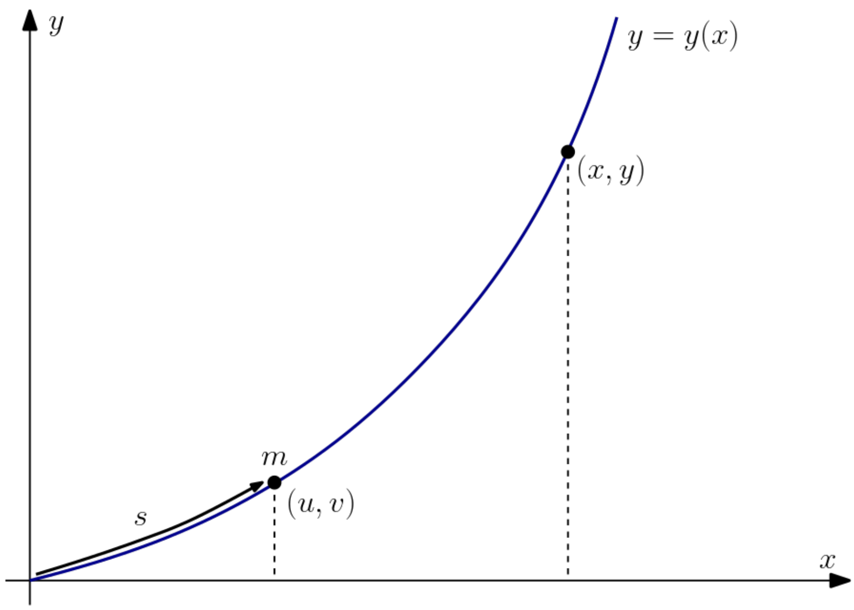

Figura 1.2: Problema mecánico de Abel.

Supoñamos que a forma do fío vén dada por unha función $y = y(x)$. Se coñecemos a función $y(x)$, non é difícil calcular o tempo total do descenso do abelorio, que será unha función $T(y)$ da altura inicial. O problema mecánico de Abel é o problema inverso ao anterior: coñecendo a función $T(y)$, atopar a forma do fío que dá lugar a un tempo de descenso igual a $T(y)$.

Vexamos a formulación matemática do problema de Abel. Partimos do principio de conservación da enerxía mecánica:

$$E_{c_{(x,y)}} + E_{p_{(x,y)}} = E_{c_{(u,v)}} + E_{p_{(u,v)}}, \tag{1.21}$$

onde E_c denota a enerxía cinética e E_p a enerxía potencial en cada punto. Como

$$E_{c_{(x,y)}} = 0, \qquad E_{c_{(u,v)}} = \frac{1}{2}\, m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$
$$E_{p_{(x,y)}} = m\, g\, y \qquad \text{e} \qquad E_{p_{(u,v)}} = m\, g\, v,$$

a expresión (1.21) queda en

$$\frac{1}{2}\, m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = m\, g\, (y - v),$$

sendo g a acelaración gravitatoria e s a lonxitude de arco da curva definida pola función y dende a orixe ata o punto (u, v). Tendo en conta que s é unha función decrecente, sabemos que a súa derivada será negativa, polo que despexando $\frac{ds}{dt}$ na ecuación anterior obtemos

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2\, g\, (y - v)}$$

ou, equivalentemente

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2\,g\,(y-v)}}.$$

Integramos agora a expresión dende $v = y$ ata $v = 0$, obtendo

$$\begin{aligned} T(y) &= \int_y^0 dt = \int_y^0 \frac{-1}{\sqrt{2\,g\,(y-v)}}\,ds = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\,g\,(y-v)}}\,ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-v}}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int_0^y \frac{s'(v)}{\sqrt{y-v}}\,dv. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por outra parte, a lonxitude de arco da curva

$$s = s(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

é coñecida sempre que o sexa $y = y(x)$, polo que

$$f(y) = s'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \tag{1.23}$$

tamén é coñecida.

Xuntando (1.22) e (1.23), chegamos a

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int_0^y \frac{f(v)}{\sqrt{y-v}}\,dv,$$

co que podemos calcular $T(y)$ sempre que coñezamos $y(x)$.

No problema mecánico de Abel o que queremos facer é o contrario. Queremos achar a forma da curva, $y(x)$, a partir de certa $T(y)$ dada. Entón, voltamos á coñecida como a ecuación integral de Abel

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int_0^y \frac{f(v)}{\sqrt{y-v}}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \left(f(y) * \frac{1}{\sqrt{y}} \right), \tag{1.24}$$

onde agora $y(x)$ é a incógnita.

Para resolver a ecuación, aplicamos a transformada de Laplace en ambos membros da igualdade (1.24):

$$\mathcal{L}[T(y)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathcal{L}\left[f(y) * \frac{1}{\sqrt{y}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}} \right] \mathcal{L}[f(y)]. \tag{1.25}$$

Calculamos $\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}} \right]$:

$$\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-py} y^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Facendo o cambio de variable $py = t$,

$$\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{p}\,dt = p^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Finalmente, facendo un segundo cambio de variable, $t = s^2$, obtemos

$$\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}}\right] = p^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\left(s^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2\,s\,ds = 2\,p^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = 2\,p^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \qquad (1.26)$$

Substituíndo isto en (1.25) e despexando $\mathcal{L}[f(y)]$ chegamos a

$$\mathcal{L}[f(y)] = \sqrt{2\,g}\,\frac{\mathcal{L}[T(y)]}{\sqrt{\frac{\pi}{p}}} = \sqrt{\frac{2g}{\pi p}}\,\mathcal{L}[T(y)]. \qquad (1.27)$$

Baixo as condicións do problema mecánico de Abel, é dicir, cando $T(y)$ é coñecida, o membro da dereita é unha función de p coñecida, de xeito que, en principio, aplicando a transformada inversa de Laplace poderiamos achar $f(y)$. Unha vez coñecida $f(y)$, para obter a curva basta con resolver a ecuación diferencial plantexada en (1.23), co cal estaría resolto o problema.

Estudaremos o caso particular no que $T(y) = T_0$ é constante, é dicir, o caso no que o tempo de descenso non depende do punto de partida. A curva definida por esta propiedade coñécese como curva tautócrona. O noso problema é, polo tanto, achar a curva tautócrona.

Se $T(y) = T_0$, a ecuación (1.27) convértese en

$$\mathcal{L}[f(y)] = \sqrt{\frac{2g}{\pi p}}\,\mathcal{L}[T_0] = \frac{T_0}{p}\sqrt{\frac{2g}{\pi p}} = \sqrt{\frac{\pi b}{p}}, \qquad (1.28)$$

onde

$$b = \frac{2g\,T_0^2}{\pi^2}.$$

De (1.26), deducimos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right] = y^{-\frac{1}{2}},$$

polo que aplicando a transformada inversa de Laplace en (1.28) chegamos a

$$f(y) = b^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{b}{y}}.$$

Como

$$f(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

chegamos a que a ecuación diferencial da curva é

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{b}{y},$$

e polo tanto

$$x=\int\sqrt{\frac{b-y}{y}}\,dy.$$

Resolvendo esta integral, obteremos a forma da curva que buscabamos. Para isto, facemos o cambio de variable $y=b\,\mathrm{sen}^2\phi$, co que

$$x=2\,b\int\cos^2\phi\,d\phi=b\int\left(1+\cos(2\,\phi)\right)\,d\phi=\frac{b}{2}\left(2\,\phi+\mathrm{sen}(2\,\phi)\right)+c,$$

e

$$y=b\,\mathrm{sen}^2\phi=b\left(1-\cos^2\phi\right)=b\left(1-\frac{\cos(2\,\phi)+1}{2}\right)=\frac{b}{2}\left(1-\cos(2\,\phi)\right).$$

Chegamos entón a que

$$x=\frac{b}{2}\left(2\,\phi+\mathrm{sen}(2\,\phi)\right)+c \quad \text{e} \quad y=\frac{b}{2}\left(1-\cos(2\,\phi)\right). \tag{1.29}$$

Como a curva ten que pasar pola orixe, necesariamente $c=0$. Para simplificar a expresión, denotamos

$$a=\frac{b}{2} \qquad \text{e} \qquad \theta=2\,\phi,$$

co que (1.29) redúcese a

$$x=a\left(\theta+\mathrm{sen}\,\theta\right) \quad \text{e} \quad y=a\left(1-\cos\,\theta\right), \tag{1.30}$$

que son as ecuacións paramétricas dunha cicloide como a da Figura 1.3.

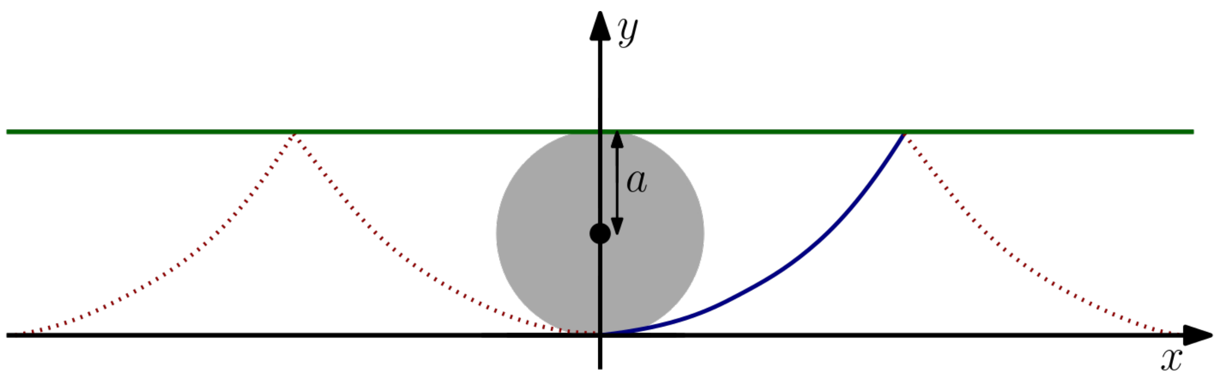

Figura 1.3: Curva tautócrona.

Polo tanto, a curva tautócrona é unha cicloide, xerada polo movemento dun punto fixo dun círculo de raio a que roda baixo a liña verde $y = 2a$. Como

$$b = \frac{2g\,T_0^2}{\pi^2},$$

o diámetro do círculo vén determinado polo tempo de descenso do abelorio polo fío, T_0.

Capítulo 2

Transformada de Fourier

Neste capítulo estudaremos a transformada de Fourier e a súa inversa, as súas propiedades e algunhas das súas aplicacións á resolución de ecuacións en derivadas parciais. Seguiremos as referencias [5], [6] e [8].

Comezamos vendo como se define a transformada de Fourier:

Definición 2.1. Dada unha función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, defínese a transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx \equiv \hat{f}(\xi)$$

no caso de que exista, é dicir, no caso de que a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

sexa converxente.

Observación 2.2. En diferentes referencias atópanse outras definicións distintas da transformada de Fourier, como por exemplo

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx, \quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx, \quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}\,dx,$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx.$$

Así, os resultados que expoñeremos ao longo do capítulo poden variar segundo onde se consulten.

Observación 2.3. A transformada de Fourier de f, $\hat{f}(\xi)$, é unha función do parámetro $\xi \in \mathbb{R}$.

Verificar a converxencia de dita integral impropia é máis complexo ca no caso da transformada de Laplace. En moitos casos non existe. Por exemplo, se consideramos a función definida por

$f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, dx.$$

Se $\xi = 0$,

$$\mathcal{F}[f(x)](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\, dx = +\infty.$$

Se $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left[\frac{-1}{i\xi} e^{-i\xi x}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to+\infty} \frac{-e^{-R\xi i} + e^{R\xi i}}{i\xi} \\
&= \frac{2}{\xi} \lim_{R\to+\infty} \operatorname{sen}(R\xi),
\end{aligned}$$

que non existe.

No caso de que a función f sexa unha función real, unha condición suficiente para garantir a existencia da transformada de Fourier é que $f \in L^1(\mathbb{R})$, é dicir, que f cumpra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

xa que entón

$$|\mathcal{F}[f(x)]| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)e^{-i\xi x}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-i\xi x}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty, \tag{2.1}$$

pois $|e^{-i\xi x}| = 1$. Imporemos a miúdo dita condición ao longo deste capítulo.

Observación 2.4. Para simplificar a notación, escribiremos L^1 para denotar $L^1(\mathbb{R})$, onde

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Veremos agora algúns exemplos de transformadas de Fourier sinxelas de calcular. Comecemos considerando a función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Temos neste caso que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\, dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\xi x}\, dx = \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-i\xi)x}\, dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} e^{(-1-i\xi)x} = \lim_{R\to+\infty} \frac{e^{(-1-i\xi)x}}{-1-i\xi} \Bigg|_{0}^{R} = -\frac{1}{-1-i\xi} = \frac{1}{1+i\xi},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

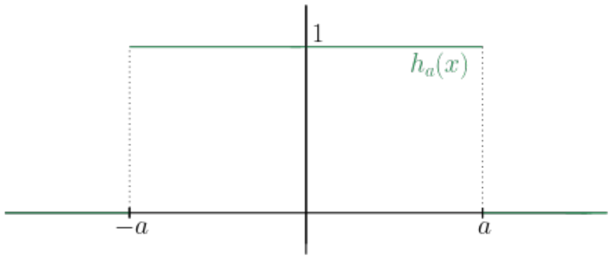

Figura 2.1: Gráfica da función h_a.

co que observamos que a transformada de Fourier dunha función real pode tomar valores complexos.

Podemos calcular tamén a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\xi x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\xi x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\xi x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-i\xi x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-i\xi)x}\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{0} e^{(1-i\xi)x}\,dx + \lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R} e^{(-1-i\xi)x}\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{e^{(1-i\xi)}}{1-i\xi}\Bigg|_{-R}^{0} + \frac{e^{(-1-i\xi)}}{-1-i\xi}\Bigg|_{0}^{R}\right) \\
&= \frac{1}{1-i\xi} - \frac{1}{-1-i\xi} = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{1+i\xi+1-i\xi}{1-(i\xi)^2} \\
&= \frac{2}{1+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Por último, consideramos a función representada na Figura 2.1, h_a, definida como:

$$h_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| \le a, \\ 0 & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

sendo a calquera número real positivo. Temos que a súa transformada de Fourier é

$$\mathcal{F}[h_a] = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(x)e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}\,dx = \frac{e^{-i\xi a}-e^{i\xi a}}{-i\xi} = \frac{2}{\xi}\,\text{sen}(a\xi). \tag{2.3}$$

2.1. Propiedades da transformada de Fourier

A continuación probaremos algunhas das propiedades da transformada de Fourier, que igual que no caso da transformada de Laplace, serán útiles posteriormente para a súa aplicación á resolución de ecuacións diferenciais.

En primeiro lugar, probaremos a linearidade da transformada de Fourier.

Proposición 2.5. *Dadas dúas funcións f, g para as cales existan $\mathcal{F}[f(x)]$ e $\mathcal{F}[g(x)]$, respectivamente, e dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, cúmprese*

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)]. \tag{2.4}$$

Demostración. Igual que no caso da linearidade da transformada de Laplace, este resultado dedúcese directamente da linearidade da integral, pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\alpha e^{-i\xi x} f(x) + \beta e^{-i\xi x} g(x)\right) dx \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} g(x)\, dx \\
&= \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)].
\end{aligned}$$

□

Probaremos agora que a transformada de Fourier dunha función integrable é continua. Para demostrar este resultado, precisaremos o teorema da converxencia dominada, que enunciamos a continuación e cuxa demostración pódese atopar en [1].

Teorema 2.6 (da converxencia dominada)**.** *Sexa $\{f_n\}$ unha sucesión de funcións integrables que converxe puntualmente (c.t.p.) a unha función real medible f. Se existe unha función integrable g, tal que*

$$|f_n| \leq g, \text{ para todo } n,$$

entón f é integrable, e ademais

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Podemos probar entón o resultado sobre a continuidade da transformada de Fourier citado anteriormente:

Proposición 2.7. *Sexa $f \in L^1$. A súa transformada de Fourier, $\mathcal{F}[f(x)]$ é unha función continua.*

Demostración. Consideremos unha función $h \in L^1$. Como $|e^{-i\xi x}| = 1$, para calquera $\tilde{\xi}$ pertencente ao dominio de h tense que

$$|e^{-i\xi x}h(x) - e^{-i\tilde{\xi}x}h(x)| \leq |e^{-i\xi x}h(x)| + |e^{-i\tilde{\xi}x}h(x)| = 2|h(x)|.$$

Considerando $f_\xi(x) = e^{-i\xi x}h(x) - e^{-i\tilde{\xi}x}h(x)$, temos que

$$f_\xi \longrightarrow f, \text{ cando } \xi \longrightarrow \tilde{\xi},$$

sendo f a función idénticamente nula. Ademais, tomando $g(x) = 2|h(x)|$, temos que

$$|f_\xi| \leq g, \text{ para todo } \xi.$$

Así, polo teorema da converxencia dominada,

$$\lim_{\xi \to \tilde{\xi}} \left(\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\tilde{\xi}) \right) = \lim_{\xi \to \tilde{\xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 0,$$

é dicir, $\hat{f} = \mathcal{F}[f(x)]$ é continua. □

É interesante tamén ver como se comporta a transformada de Fourier fronte a traslacións ou cambios de escala.

Proposición 2.8. *Sexa $f \in L^1$. Para calquera $a \in \mathbb{R}$ tense que*

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi) \qquad e \qquad \mathcal{F}[e^{iax}f(x)] = \hat{f}(\xi - a). \tag{2.5}$$

Demostración. En primeiro lugar, para probar que $\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$ basta con aplicar a definición de transformada de Fourier e o cambio de variable $y = x - a$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x-a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\xi(y+a)}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\xi y}e^{-i\xi a}\, dy = e^{-i\xi a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\xi y}\, dy \\
&= e^{-i\xi a}\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

No caso da segunda igualdade,

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi-a)x}f(x)\, dx = \hat{f}(\xi - a).$$

□

Proposición 2.9. *Sexa $f \in L^1$, e sexa $\delta > 0$. Definimos a función f_δ como*

$$f_\delta(x) = \frac{f(\frac{x}{\delta})}{\delta}.$$

Entón

$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \hat{f}(\delta\xi) \qquad e \qquad \mathcal{F}[f(\delta x)] = \hat{f_\delta}(\xi).$$

Observación 2.10. Nótese que $\widehat{f_\delta}$ e $\hat{f}_\delta$ denotan cousas distintas: $\widehat{f_\delta}(\xi) = \mathcal{F}[f_\delta(x)]$, mentres que $\hat{f}_\delta(\xi) = \frac{1}{\delta}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$.

Demostración. Para demostrar a primeira igualdade utilizamos o cambio de variable $y = \dfrac{x}{\delta}$, co que obtemos

$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\delta} f(y) e^{-i\xi\delta y} \delta\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i(\delta\xi)y}\, dy = \hat{f}(\delta\xi).$$

Por outra banda, para probar a segunda igualdade aplicamos o cambio de variable $y = \delta x$ e obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\delta x)]) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\xi\frac{y}{\delta}} \frac{1}{\delta}\, dy \\ &= \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\frac{\xi}{\delta}y}\, dy = \frac{1}{\delta}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right) = \hat{f}_\delta(\xi).\end{aligned}$$

□

Vexamos agora un resultado que relaciona a transformada de Fourier dunha función coa da súa derivada.

Proposición 2.11. *Sexa $f \in L^1$ unha función continua, de clase $\mathcal{C}^\infty$ a cachos e tal que $f' \in L^1$. Entón*

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\hat{f}(\xi). \tag{2.6}$$

Demostración. Como $f' \in L^1$, por definición tense que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < \infty,$$

e polo tanto

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(0) < \infty,$$

é dicir, o límite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$$

existe, e ademais, como $f \in L^1$, necesariamente vale 0. Cun razoamento análogo chegamos a que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Tendo isto en conta, calculamos $\mathcal{F}[f'](\xi)$ integrando por partes:

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f'(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x}\, dx = i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

□

Analogamente, vexamos agora que obtemos ao derivar unha transformada de Fourier.

Proposición 2.12. *Sexa $f \in L^1$ unha función que cumpre que $xf(x)$ é integrable. Entón,*

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i[\hat{f}]'(\xi). \tag{2.7}$$

Demostración. Basta ter en conta que

$$xe^{-i\xi x} = i\frac{d}{d\xi}e^{-i\xi x},$$

pois entón

$$\mathcal{F}[xf(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)i\frac{d}{d\xi}e^{-i\xi x}\,dx = i\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = i[\hat{f}]'(\xi).$$

□

Vexamos un exemplo no que utilizamos as propiedades anteriores para calcular unha transformada de Fourier.

Exemplo 2.13. Calcularemos a transformada de Fourier dunha función $f(x) = e^{-a\frac{x^2}{2}}$, con $a > 0$. Para iso, teremos en conta que f satisfai a ecuación diferencial $f'(x) + axf(x) = 0$.

Aplicamos a transformada de Fourier á ecuación $f'(x) + axf(x) = 0$. Por (2.4),

$$\mathcal{F}[f'(x) + axf(x)] = \mathcal{F}[f'(x)] + a\mathcal{F}[xf(x)] = 0.$$

Utilizando (2.6) e (2.7), a ecuación anterior convértese en

$$i\xi\hat{f}(\xi) + ai(\hat{f})'(\xi) = 0$$

ou, equivalentemente, en

$$(\hat{f})'(\xi) + \frac{\xi}{a}\hat{f}(\xi) = 0. \tag{2.8}$$

Resolvemos a ecuación diferencial obtida. Despexando en (2.8), chegamos a que

$$\frac{(\hat{f})'(\xi)}{\hat{f}(\xi)} = -\frac{\xi}{a}.$$

Integrando a ambos lados da igualdade obtemos

$$\log\left(\hat{f}(\xi)\right) = -\frac{\xi^2}{2a} + \log C,$$

co que

$$\hat{f}(\xi) = C\,e^{\frac{-\xi^2}{2a}}.$$

Para evaluar a constante C, tomamos $\xi = 0$:

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx.$$

Facendo o cambio de variable $y = \sqrt{\frac{a}{2}}\, x$,

$$C = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Así, chegamos a que a transformada de Fourier que buscabamos é

$$\mathcal{F}\left[e^{-a\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{\frac{-\xi^2}{2a}}. \tag{2.9}$$

Igual ca no caso da transformada de Laplace, a suma das transformadas de Fourier de dúas funcións é igual á transformada da suma de ditas funcións, pero o produto de dúas transformadas de Fourier non é igual á transformada do produto. Porén, probaremos que o produto das transformadas de Fourier de dúas funcións é igual á transformada de Fourier da súa convolución.

Proposición 2.14. *Sexan $f_1, f_2 \in L^1$, e sexa $f_1 * f_2$ a súa convolución. Tense que*

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1]\mathcal{F}[f_2]. \tag{2.10}$$

Demostración. Tal e como o definimos en (1.11),

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(x-s)\, ds,$$

polo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(f_1 * f_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(x) e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(x-s)\, ds \right) e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f_1(s) f_2(x-s)\, ds\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} f_1(s) e^{i\xi(x-s)} f_2(x-s)\, dx\, ds.
\end{aligned}$$

Facendo o cambio de variable $y = x - s$ chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(f_1 * f_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} f_1(s) e^{-i\xi(x-s)} f_2(x-s)\, dx\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} f_1(s) e^{-i\xi y} f_2(y)\, dy\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} f_1(s)\, ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y} f_2(y)\, dy \\
&= \mathcal{F}[f_1]\mathcal{F}[f_2].
\end{aligned}$$

□

Para rematar coas propiedades da transformada de Fourier, veremos un importante resultado, coñecido como o lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 2.15 (de Riemann-Lebesgue)**.** *Sexa $f \in L^1$. A súa transformada de Fourier, $\hat{f}$, cumpre que*

$$\hat{f}(t) \to 0 \text{ cando } \xi \to \pm\infty.$$

Demostración. En primeiro lugar, supoñamos que f é unha función escalonada, é dicir,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \phi_j(x),$$

onde para cada $1 \leq j \leq k$, $c_j \in \mathbb{R}$ é unha constante e ϕ_j é unha función definida por

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x - x_j| \leq a_j, \\ 0 & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$ representa a metade da lonxitude do intervalo centrado en x_j no que ϕ_j non se anula.

Por (2.3) e (2.5),

$$\mathcal{F}[\phi_j(x)] = \frac{2}{\xi} e^{-i\xi x_j} \operatorname{sen}(a_j \xi),$$

polo tanto, temos que

$$\mathcal{F}[\phi_j(x)] \to 0, \text{ cando } \xi \to \pm\infty.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{F}[f(x)] \to 0, \text{ cando } \xi \to \pm\infty.$$

En segundo lugar, analizamos o caso xeral. Como $f \in L^1$, é posible atopar unha sucesión de funcións escalonadas, $\{f_n\}$, tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \longrightarrow 0 \text{ cando } n \to \infty.$$

Se f é Riemann integrable, isto dedúcese do feito de que a integral de f é o límite de sumas de Riemann. Tamén é certo se f é Lebesgue integrable, pero a proba require dalgúns resultados da teoría da integración de Lebesgue, que se poden atopar en [7], pero que non detallaremos.

Entón,

$$\sup_{\xi} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0, \text{ cando } n \to \infty,$$

é dicir, $\hat{f}_n$ converxe uniformemente a $\hat{f}$.

Como ademais $\hat{f}_n \to 0$ cando $n \to \infty$, pola converxencia uniforme dedúcese tamén que

$$\hat{f} \to 0 \text{ cando } n \to \infty.$$

□

A modo de resumo, no Cadro 2.1 recóllense as principais propiedades da transformada de Fourier expostas anteriormente.

Cadro 2.1: Propiedades da transformada de Fourier.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]}$
$f(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,dx$
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha\mathcal{F}[f(x)] + \beta\mathcal{F}[g(x)]$
$f(x-a)$	$e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\xi - a)$
$\dfrac{f\left(\frac{x}{\delta}\right)}{\delta}$	$\hat{f}(\delta\xi)$
$f(\delta x)$	$\dfrac{1}{\delta}\hat{f}\left(\dfrac{\xi}{\delta}\right)$
$f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
$xf(x)$	$i[\hat{f}]'(\xi)$
$(f * g)(x)$	$\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$

2.2. Transformada de Fourier inversa

Unha vez visto como calcular a transformada de Fourier dunha función dada, buscamos agora como resolver o problema inverso, é dicir, buscamos unha fórmula que nos permita recuperar, a partir dunha transformada de Fourier, $\hat{f}$, a función f.

Veremos un resultado que nos proporciona dita fórmula de inversión da transformada de Fourier, pero para demostralo precisaremos o seguinte teorema, cuxa demostración pódese atopar en [6].

Teorema 2.16. *Consideramos unha función* $g \in L^1$ *tal que* $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy = 1$ *e definimos*

$$a = \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy \qquad e \qquad b = \int_{0}^{+\infty} g(y)\,dy.$$

Sexa f *unha función continua a cachos en* $\mathbb{R}$ *e supoñamos que ou ben* f *é unha función limitada ou ben* g *anúlase fóra dun certo intervalo finito, de xeito que* $(f * g)(x)$ *estea ben definida para todo* x. *Se* g_ε *é a función definida por*

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

entón

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * g_\varepsilon)(x) = a f(x^+) + b f(x^-), \quad \text{para todo } x.$$

Estamos agora en condicións de enunciar e probar o teorema de inversión de Fourier.

Teorema 2.17 (de inversión de Fourier)**.** *Sexa* $f \in L^1$ *unha función continua a cachos en* $\mathbb{R}$*, definida nos seus puntos de discontinuidade de xeito que para todo* x *se cumpra que*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right].$$

Entón

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} \hat{f}(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Ademais, se $\hat{f} \in L^1$*, entón* f *é continua e*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Demostración. Comezamos probando a igualdade (2.11). Por definición de $\hat{f}$, tense que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} \hat{f}(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y} f(y)\,dy\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} f(y)\,dy\,d\xi.
\end{aligned}$$

A integral dobre é absolutamente converxente e podemos intercambiar a orde de integración, así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} \hat{f}(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} f(y)\,d\xi\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}}\,d\xi \right) f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left[e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}}\right](y - x)\, f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Como, por (2.9), sabemos que

$$\mathcal{F}\left[e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}}\right](y - x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}},$$

chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\hat{f}(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}\,f(y)\,dy\\ &= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}\,dy\\ &= (f*\phi_\varepsilon)(x),\end{aligned}$$

onde

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2\varepsilon^2}},$$

sendo ϕ a función definida por

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Como f é continua a cachos en $\mathbb{R}$ e

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right],$$

polo Teorema 2.16, tense que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}(f*\phi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right] = f(x).$$

Fáltanos só probar (2.12). Supoñemos agora que $\hat{f}\in L^1$. Como $\left|e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\right| \leq 1$, temos que

$$\left|e^{i\xi x}\,e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\hat{f}(\xi)\right| = \left|e^{i\xi x}\right|\,\left|e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\right|\,\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \left|\hat{f}(\xi)\right|.$$

Podemos entón usar o teorema da converxencia dominada para calcular o límite (2.11).

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right] = f(x).$$

O termo da esquerda,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\,d\xi,$$

é a transformada de Fourier de $\hat{f}\in L^1$ avaliada en $-x$, multiplicada por $\frac{1}{2\pi}$, e xa vimos que as transformadas de Fourier de funcións integrables son funcións continuas, polo tanto, f é continua. □

Podemos entón definir a transformada inversa de Fourier como segue:

Definición 2.18. Dada unha función $\hat{f}$ do parámetro $\xi\in\mathbb{R}$, defínese a súa transformada inversa de Fourier como a función $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$, que para cada $x\in\mathbb{R}$ vén dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Como consecuencia directa do teorema anterior, temos o seguinte corolario que afirma que a transformada inversa de Fourier é única:

Corolario 2.19. *Sexan $\hat{f}$ e $\hat{g}$ dúas funcións do parámetro $\xi \in \mathbb{R}$, e sexan f e g as súas respectivas transformadas inversas de Fourier. Se $\hat{f} = \hat{g}$, entón $f = g$.*

Demostración. Se $\hat{f} = \hat{g}$, entón pola linearidade da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f - g] = \hat{f} - \hat{g} = 0.$$

Tendo en conta a igualdade (2.12), temos que necesariamente $f - g = 0$, e polo tanto, $f = g$. □

2.3. Transformada de Fourier multivariable

Neste apartado veremos que os resultados sobre a transformada de Fourier de funcións dunha variable real vistos nas seccións anteriores poden adaptarse facilmente para funcións de n variables reais, é dicir, funcións definidas no espazo $\mathbb{R}^n$.

Ao longo da sección denotaremos os puntos de $\mathbb{R}^n$ por

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

o produto escalar en $\mathbb{R}^n$ por

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

e a norma en $\mathbb{R}^n$ por

$$|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ademais, para simplificar a escritura, para denotar a integración en todo $\mathbb{R}^n$ usaremos

$$\int f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Aclarada a notación, comezamos vendo como se define a transformada de Fourier dunha función f de n variables reais:

$$\mathcal{F}[f(\boldsymbol{x})] = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Igual que no caso univariable, para calquera función integrable f, a súa transformada, $\hat{f}(\boldsymbol{\xi})$, cumpre as seguintes propiedades:

(a) $\left|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})\right| \leq \int |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x}$,

(b) $\hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ é continua,

(c) $\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \to 0$ cando $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$.

Estudaremos agora as propiedades da transformada de Fourier multivariable. Comezaremos enunciando unha serie de proposicións análogas ás vistas anteriormente para funcións dunha única variable. Non desenvolveremos as súas probas pois non son significativamente distintas ás vistas no caso univariable.

Proposición 2.20. *Dadas dúas funcións f, g para as cales existan $\mathcal{F}[f(\boldsymbol{x})]$ e $\mathcal{F}[g(\boldsymbol{x})]$, respectivamente, e dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, cúmprese que*

$$\mathcal{F}[\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})] = \alpha \mathcal{F}[f(\boldsymbol{x})] + \beta \mathcal{F}[g(\boldsymbol{x})].$$

Proposición 2.21. *Sexa $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para calquera $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tense que*

$$\mathcal{F}[f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})] = e^{-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\xi}} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \qquad e \qquad \mathcal{F}[e^{i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})] = \hat{f}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}).$$

Proposición 2.22. *Sexa $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sexa $\delta > 0$. Definimos a función f_δ como*

$$f_\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)}{\delta^n}.$$

Entón,

$$\widehat{f_\delta}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(\delta\boldsymbol{\xi}) \qquad e \qquad \mathcal{F}[f(\delta\boldsymbol{x})] = \hat{f}_\delta(\boldsymbol{\xi}).$$

Proposición 2.23. *Sexa $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal que a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ existe e pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Entón,*

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right](\boldsymbol{\xi}) = i\xi_j \hat{f}(\boldsymbol{\xi}). \tag{2.13}$$

Proposición 2.24. *Sexa $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ unha función tal que $x_j f(\boldsymbol{x})$ é integrable. Entón,*

$$\mathcal{F}[x_j f(\boldsymbol{x})] = i\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}.$$

Respecto do produto de convolución, este defínese igual que no caso univariable, é dicir

$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y},$$

e mantén as propiedades que enunciamos na Proposición 1.11 e no Teorema 1.12:

(a) $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$,

(b) $f * g = g * f$,

(c) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(d) $\dfrac{\partial (f * g)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$.

Como cabía esperar, cúmprese tamén que a transformada da convolución é igual ao produto das transformadas, é dicir, tense o seguinte resultado:

Proposición 2.25. *Sexan $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dúas funcións tales que $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entón*

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2](\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}_1(\boldsymbol{\xi})\hat{f}_2(\boldsymbol{\xi}).$$

Ademais, a transformada de Fourier multivariable conmuta coas rotacións, é dicir, tense o seguinte resultado:

Proposición 2.26. *Sexa $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sexa R unha rotación de $\mathbb{R}^n$. Entón*

$$\mathcal{F}[f(R\boldsymbol{x})] = \hat{f}(R\boldsymbol{\xi}).$$

Demostración. Para probar isto, basta ter en conta que as rotacións preservan as distancias e os ángulos, e en consecuencia, preservan os produtos escalares e os volumes, é dicir

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x} = R\boldsymbol{\xi} \cdot R\boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad d(R\boldsymbol{x}) = d\boldsymbol{x}.$$

Así, tomando $\boldsymbol{y} = R\boldsymbol{x}$,

$$\mathcal{F}[f(R\boldsymbol{x})] = \int e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} f(R\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int e^{-iR\boldsymbol{\xi}\cdot R\boldsymbol{x}} f(R\boldsymbol{x})\, d(R\boldsymbol{x}) = \int e^{-iR\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \hat{f}(R\boldsymbol{\xi}).$$

□

O cálculo da transformada de Fourier dunha función de n variables pode resultar complicado. Non obstante, nalgúns casos particulares, o cálculo da transformada de Fourier multivariable pódese simplificar, reducíndoa ao cálculo de n transformadas de funcións dunha soa variable.

Proposición 2.27. *Sexa f unha función definida en $\mathbb{R}^n$ que se poida expresar como un produto de n funcións f_i dunha variable, é dicir,*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

Entón, a transformada de Fourier de f é

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}_1(\xi_1)\hat{f}_2(\xi_2) \cdots \hat{f}_n(\xi_n).$$

Demostración. Por definición, a transformada de Fourier de f vén dada por

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n.$$

Desenvolvendo a expresión de $e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}$, temos que

$$e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} = e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n)} = e^{-i\xi_1 x_1} e^{-i\xi_2 x_2} \dots e^{-i\xi_n x_n},$$

polo que, como $f(\boldsymbol{x}) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, e^{-i\xi_1 x_1} e^{-i\xi_2 x_2} \dots e^{-i\xi_n x_n}\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)\, e^{-i\xi_1 x_1}\, f_2(x_2)\, e^{-i\xi_2 x_2} \cdots f_n(x_n)\, e^{-i\xi_n x_n}\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)\, e^{-i\xi_1 x_1}\,dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2)\, e^{-i\xi_2 x_2}\,dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x_n)\, e^{-i\xi_n x_n}\,dx_n \\
&= \hat{f}_1(\xi_1)\, \hat{f}_2(\xi_2) \cdots \hat{f}_n(\xi_n).
\end{aligned}$$

□

Vexamos un exemplo no que a propiedade anterior permite calcular a transformada de Fourier de xeito sinxelo.

Exemplo 2.28. Calculemos a transformada de Fourier da función $e^{\frac{-a|\boldsymbol{x}|^2}{2}}$, con $a > 0$.

En primeiro lugar, temos que

$$e^{\frac{-a|\boldsymbol{x}|^2}{2}} = e^{-\frac{a}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = e^{-\frac{a}{2}x_1^2}\, e^{-\frac{a}{2}x_2^2} \cdots e^{-\frac{a}{2}x_n^2}.$$

Así, pola Proposición 2.27 e por (2.9), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{\frac{-a|\boldsymbol{x}|^2}{2}}\right] &= \mathcal{F}\left[e^{\frac{-a x_1^2}{2}}\right] \mathcal{F}\left[e^{\frac{-a x_2^2}{2}}\right] \cdots \mathcal{F}\left[e^{\frac{-a x_n^2}{2}}\right] \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi_1^2}{2a}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi_2^2}{2a}} \dots \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi_n^2}{2a}} \\
&= \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{2a}},
\end{aligned}$$

é dicir,

$$\mathcal{F}\left[e^{\frac{-a|\boldsymbol{x}|^2}{2}}\right] = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n e^{\frac{-|\boldsymbol{\xi}|^2}{2a}}. \tag{2.14}$$

Xa para rematar, veremos como se reformula o teorema de inversión de Fourier no caso de funcións de varias variables.

Teorema 2.29 (de inversión de Fourier). *Sexa f unha función integrable e continua en $\mathbb{R}^n$, entón*

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, e^{-\frac{\varepsilon^2|\boldsymbol{\xi}|^2}{2}}\, \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Ademais, se $\hat{f}$ tamén é integrable,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

2.4. Aplicacións ás ecuacións diferenciais

Neste apartado veremos algúns exemplos de aplicacións da transformada de Fourier á resolución de ecuacións en derivadas parciais. En cada un dos exemplos que imos estudar, suporemos en todo momento que as funcións que interveñen nos cálculos que realicemos cumpren todas as hipóteses necesarias para que estes teñan sentido.

2.4.1. Ecuación da calor

Caso univariable

Consideramos o problema de difusión de calor nunha barra infinita, da que se coñece a temperatura inicial en cada punto:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $u_t(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t)$, e $u_{xx}(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$.

Aplicamos a transformada de Fourier respecto da variable x a (2.15). Temos que

$$\mathcal{F}[u(x,t)](\xi) = \hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Por unha banda, aplicando dúas veces (2.6), sabemos que

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = i\xi \mathcal{F}[u_x(x,t)] = i^2\xi^2 \mathcal{F}[u(x,t)] = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t).$$

Por outra banda, como estamos a aplicar a transformada respecto da variable x,

$$\mathcal{F}[u_t(x,t)] = (\mathcal{F}[u(x,t)])_t = \hat{u}_t(x,t).$$

Así, obtemos un novo sistema

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Fixado un $\xi \in \mathbb{R}$, a ecuación en derivadas parciais (2.16), pódese resolver como unha EDO linear de primeira orde. Entón, integrando $\hat{u}_t(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t)$ respecto de t e tendo en conta a condición inicial, obtemos que

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}.$$

Queremos agora aplicar a transformada inversa para obter a solución do problema inicial (2.15). Polo Teorema 2.17 sabemos que

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

polo que

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}\, d\xi.$$

Nalgúns casos, pódese calcular a integral anterior. Non obstante, no caso xeral, para obter a transformada inversa de $\hat{u}(\xi, t)$ temos en conta que, por (2.9), tomando $a = \frac{1}{2t}$:

$$e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4t}}\right](\xi).$$

Polo tanto,

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}[f](\xi)\, \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4t}}\right](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\, \mathcal{F}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\xi).$$

Utilizando agora a igualdade (2.10),

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}\left[f(x) * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right]$$

e en consecuencia chegamos a que

$$u(x, t) = f(x) * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - s) e^{-\frac{s^2}{4t}}\, ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, ds.$$

É dicir, a solución que procurabamos é

$$u(x, t) = f(x) * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}. \tag{2.17}$$

Observación 2.30. A función $E(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$ coñécese como núcleo gaussiano ou solución fundamental da ecuación da calor.

Comprobemos que, en efecto, $u(x, t)$ é solución do problema (2.15). É sinxelo verificar que $E(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$ satisfai a ecuación da calor. Por unha banda

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} &= \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}} \frac{x^2}{4t^2}\, 2\sqrt{\pi t} - e^{\frac{-x^2}{4t}} \sqrt{\frac{\pi}{t}}}{4\pi t} = \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}} \left(\frac{x^2}{2t}\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)}{4\pi t} \\ &= \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left(\frac{x^2}{2t} - 1\right)}{4\pi t} = \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}} \left(\frac{x^2}{2t} - 1\right)}{4t\sqrt{\pi t}}. \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \frac{-x}{2t},$$

e en consecuencia,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(e^{\frac{-x^2}{4t}} \left(\frac{-x}{2t}\right)^2 + e^{\frac{-x^2}{4t}} \frac{-1}{2t}\right) = \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)}{2\sqrt{\pi t}} \\ &= \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}\left(\frac{\frac{x^2}{2t}-1}{2t}\right)}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}\left(\frac{x^2}{2t} - 1\right)}{4t\sqrt{\pi t}} = \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Temos visto entón que $E(x,t)$ cumpre a ecuación da calor. Como

$$u(x,t) = f(x) * E(x,t),$$

por (1.12), deducimos que $u(x,t)$ tamén a satisfai. Finalmente, que

$$u(x,t) \to f(x) \text{ cando } t \to 0$$

dedúcese do Teorema 2.16, asumindo que f é unha función continua.

Observación 2.31. $u(x,t)$ non é a única solución de (2.15). Non obstante, o que si que é certo é que se $f(x)$ é unha función limitada, entón $u(x,t)$ é a única solución limitada de (2.15).

Exemplo 2.32. Vexamos o caso particular no que $f(x) = e^{-x^2}$, é dicir, calculemos a solución de

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Aplicando a transformada de Fourier respecto da variable x, e tendo en conta novamente a igualdade (2.9), obtemos

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{-\xi^2}{4}}, & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Polo Teorema 2.17 sabemos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\sqrt{\pi}\, e^{\frac{-\xi^2}{4}} e^{-\xi^2 t}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 (t+\frac{1}{4})} e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathcal{F}\left[e^{-\xi^2(t+\frac{1}{4})}\right](-x). \end{aligned}$$

Utilizando novamente (2.9), esta vez con $a = \sqrt{t + \frac{1}{4}}$, obtemos finalmente que a solución de (2.18) é

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}.$$

Caso multivariable

Analogamente podemos resolver o problema de valor inicial para a ecuación do calor en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t(\boldsymbol{x},t) - \Delta u(\boldsymbol{x},t) = 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.19}$$

Igual ca no caso unidimensional aplicamos a transformada de Fourier respecto da variable x. Por (2.13), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Delta u(\boldsymbol{x},t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(\boldsymbol{x},t) + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u(\boldsymbol{x},t)\right] \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(\boldsymbol{x},t)\right] + \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(\boldsymbol{x},t)\right] + \ldots + \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}u(\boldsymbol{x},t)\right] \\ &= -\xi_1^2\, u(\boldsymbol{x},t) - \xi_2^2\, u(\boldsymbol{x},t) - \ldots - \xi_n^2\, u(\boldsymbol{x},t) \\ &= -|\boldsymbol{\xi}|^2 u(\boldsymbol{x},t). \end{aligned}$$

Obtemos así o problema transformado:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\boldsymbol{\xi},t) + |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(\boldsymbol{\xi},t) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.20}$$

Fixado $\boldsymbol{\xi}$, quédanos unha EDO de primeira orde, cuxa solución é

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\, e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t}.$$

Para obter a solución do problema inicial, aplicamos a transformada inversa. Botando man de (2.14), tomando $a = \dfrac{1}{2t}$, chegamos a que

$$e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}\left[e^{\frac{-|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}\right](\boldsymbol{\xi}),$$

co cal temos que

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t) = \mathcal{F}[f(\boldsymbol{x})](\boldsymbol{\xi})\, \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, \mathcal{F}\left[e^{\frac{-|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}\right](\boldsymbol{\xi}).$$

Finalmente, utilizando (2.25),

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t) = \mathcal{F}\left[f(\boldsymbol{x}) * \frac{e^{\frac{-|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right],$$

e en consecuencia, chegamos a que a solución que buscabamos é

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x}) * \frac{e^{\frac{-|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(f(\boldsymbol{x}) * e^{\frac{-|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})\, e^{\frac{-|\boldsymbol{s}|^2}{4t}}\, d\boldsymbol{s} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int f(\boldsymbol{s})\, e^{\frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}|^2}{4t}}\, d\boldsymbol{s}. \end{aligned}$$

2.4.2. Ecuación de Laplace

Consideramos agora o seguinte problema elíptico, constituído pola Ecuación de Laplace e unha condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.21}$$

onde $u_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)$ e $u_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)$.

Observación 2.33. Cabe resaltar que se $u(x,y)$ é solución do problema (2.21), $u(x,y) + Cy$, con $C \in \mathbb{R}$ tamén o é. Para quedarnos cunha única solución, tomaremos aquela que estea limitada cando $y \to \infty$.

Aplicamos entón a transformada de Fourier respecto de x a (2.21). Por definición, temos que

$$\mathcal{F}[u(x,y)](\xi) = \hat{u}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Aplicando dúas veces (2.6),

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x,y)] = -\xi^2 \hat{u}(\xi,y),$$

e como estamos aplicando a transformada respecto da variable x temos que

$$\mathcal{F}[u_{yy}(x,y)] = \hat{u}_{yy}(x,y),$$

e obtemos o problema

$$\begin{cases} \xi^2 \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0, & \xi \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \mathcal{F}[f(x)](\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Fixando ξ, a ecuación en derivadas parciais anterior podemos resolvela como unha EDO linear de segunda orde, cuxa solución é

$$\hat{u}(\xi,y) = C_1(\xi) e^{|\xi| y} + C_2(\xi) e^{-|\xi| y}.$$

Para que $u(x,y)$ estea limitada cando $y \to \infty$, precisamos que $\hat{u}(\xi,y)$ tamén o estea. Con este fin, tomamos

$$C_1(\xi) = 0,$$

co que chegamos a que

$$\hat{u}(\xi,y) = C_2(\xi) e^{-|\xi| y}.$$

Utilizando agora a condición inicial, $\hat{u}(\xi,0) = \mathcal{F}[f(x)](\xi)$, concluimos que

$$C_2(\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\xi),$$

co que finalmente obtemos

$$\hat{u}(\xi, y) = \mathcal{F}[f(x)](\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Por outra parte, xa vimos que

$$\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right] = \frac{2}{1+\xi^2},$$

polo que, utilizando o teorema de inversión de Fourier, chegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^2+1} e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left[e^{-|\xi|}\right](x) e^{-i\xi x}\, dx \\
&= \pi\, \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[e^{-|\xi|}\right]\right](-\xi) \\
&= \pi e^{|-\xi|}.
\end{aligned}$$

Así, pola Proposición 2.9, con $\delta = \dfrac{1}{y}$, temos que

$$e^{|-\xi|y} = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](\xi y) = \frac{1}{\pi y}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\right](\xi) = \mathcal{F}\left[\frac{y}{\pi\,(x^2+y^2)}\right](\xi).$$

Polo tanto,

$$\hat{u}(\xi, y) = \mathcal{F}[f(x)](\xi)\,\mathcal{F}\left[\frac{y}{\pi\,(x^2+y^2)}\right](\xi)$$

e entón, novamente por (2.10),

$$u(x,y) = f(x) * P_y(x) = f(x) * \frac{y}{\pi\,(x^2+y^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)\frac{y}{\pi(s^2+y^2)}\, ds, \tag{2.23}$$

onde denotamos $P_y(x) = \dfrac{y}{\pi\,(x^2+y^2)}$.

Observación 2.34. A expresión (2.23) coñécese como fórmula integral de Poisson da solución de (2.21).

Comprobemos que esta é a solución que procurabamos. A función $P_y \in L^1$, polo tanto, para calquera función limitada f, digamos $|f| \leq M$ para certo $M \in \mathbb{R}$, u é unha función limitada pois

$$|u(x,y)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi(s^2+y^2)}\, ds = M,$$

xa que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi(s^2+y^2)}\, ds = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+y^2}\, ds = \frac{y}{\pi}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{y}\right]_{-b}^{b} = \frac{y}{\pi}\frac{\pi}{y} = 1.$$

Por outra banda, é sinxelo comprobar que $u(x,y)$ satisfai a ecuación de Laplace,

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0.$$

En primeiro lugar,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)=\frac{y}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=\frac{y}{\pi}\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2},$$

polo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\pi}\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{-2y}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\right)\\&=\frac{-2y}{\pi}\frac{(x^2+y^2)^2-4x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-2y}{\pi}\frac{x^2+y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^3}\\&=\frac{-2y}{\pi}\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{-2y^3+6x^2y}{\pi(x^2+y^2)^3}.\end{aligned}$$

En segundo lugar,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

polo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\frac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\,4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\\&=\frac{1}{\pi}\frac{-2x^2y-2y^3-4x^2y+4y^3}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2y^3-6x^2y}{\pi(x^2+y^2)^3}\\&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right).\end{aligned}$$

Temos visto entón que $P_y(x)=\dfrac{y}{\pi\,(x^2+y^2)}$ cumpre a ecuación de Laplace. Como

$$u(x,t)=f(x)*P_y(x),$$

por (1.12), deducimos que $u(x,t)$ tamén o fai. Ademais, supoñendo que f é continua, polo Teorema 2.16, temos que

$$u(x,y)\to f(x)\ \text{ cando } y\to 0,$$

co cal queda comprobado que $u(x,y)$ é, en efecto, solución de (2.21).

Bibliografía

[1] Bartle, R. G. (1995). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure* (Wiley classics library ed). John Wiley and Sons.

[2] Cánovas Peña, J. S. (02 de octubre de 2014). *Transformadas integrales.* https://www.dmae.upct.es/~jose/mate2ele/transformadas.pdf

[3] Cohen, A. M. (2007). *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion* (1st ed. 2007). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-68855-8

[4] Davies, B. (Brian). (1985). *Integral transforms and their applications* (Second edition). Springer-Science+Business Media, LLC. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2691-3

[5] Fernández, L. A. (febrero, 2022). *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales.* https://personales.unican.es/lafernandez/Intro-EDP.pdf

[6] Folland, G. B. (1992). *Fourier analysis and its applications.* Wadsworth and Brooks/Cole Publishing Company.

[7] Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications* (2nd ed.). John Wiley and Sons.

[8] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis* (3rd ed). McGraw-Hill.

[9] Simmons, G. F. (1993). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* (2a ed.). McGraw-Hill.

[10] Vázquez Méndez, M. E. (2013). *A transformada de Laplace.* Universidade de Santiago de Compostela. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico.