

# Módulos Cruzados de Álgebras Conmutativas, Homología y HAP

Fdo.: Pablo Fernández Ascariz

Memoria para optar al grado de Doctor realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Santiago de Compostela bajo la dirección del Profesor D. Manuel Ladra González.

Santiago de Compostela, a 8 de Enero de 2007.

Fdo.: Prof. Dr. Manuel Ladra González



# Agradecimientos

*Decidirse a dirigir una tesis no debe de ser, desde mi punto de vista, una cuestión nada sencilla, pues implica comprometerse con un proyecto que requerirá dedicación y tiempo, y durante el cual se encontrarán diversas dificultades y preocupaciones. Además, y al menos desde el punto de vista material, las satisfacciones recibidas no son ni mucho menos proporcionales al esfuerzo realizado.*

*Sin embargo, para el alumno que comienza a adentrarse en el ámbito de la investigación, es fundamental encontrar a alguien que confíe en él y le preste su ayuda, en una etapa en la que la dependencia para solventar los problemas a los que se irá enfrentando es todavía acusada.*

*Cuando además, la relación entre el profesor y el alumno se convierte en algo más personal, esto supone una motivación añadida a lo largo del doctorado. Por todo esto, me gustaría agradecer a Manuel Ladra González toda su ayuda, imprescindible en la realización de esta tesis.*

*Muchas gracias Manolo.*



# Contenidos

<i>Introducción</i>	VII
<b>1. Propiedades categóricas de <math>X\text{Mod}_K</math></b>	<b>1</b>
1.1. La categoría $X\text{Mod}_K$	1
1.2. Definiciones equivalentes de módulo cruzado	19
1.3. Tripleabilidad	25
1.4. Propiedades categóricas	38
1.4.1. Categorías semiabelianas	38
1.4.2. Categorías de interés	44
1.4.3. Categorías cartesianas cerradas	45
1.4.4. Categorías de modelos	46
<b>2. Construcciones en la categoría</b>	<b>51</b>
2.1. El actor de un módulo cruzado	51
2.2. Módulos cruzados singulares	58
2.3. Producto tensor de módulos cruzados	64
2.4. Producto semidirecto de módulos cruzados	68
2.5. La categoría de $(C, R, \nu)$ -módulos	71
2.6. Derivaciones	91
<b>3. Álgebra homológica de módulos cruzados</b>	<b>99</b>
3.1. (Co)Homología de módulos cruzados	99
3.2. Extensiones de módulos cruzados y sucesiones exactas	115
3.3. (Co)Homología de módulos cruzados esféricos	124
3.4. (Co)Homología con coeficientes $(0, A, 0)$	128
<b>4. Cálculo efectivo de homología con HAP</b>	<b>139</b>



# Introducción

El concepto de módulo cruzado en la categoría de grupos surgió en el trabajo de Whitehead [53] en topología algebraica. Este concepto, además de en la topología algebraica, ha jugado roles importantes en otras áreas de las matemáticas como son la teoría de representaciones de grupos,  $K$ -teoría algebraica, homología cíclica, teoría combinatoria de grupos, álgebra homológica y geometría diferencial. Posiblemente los módulos cruzados son considerados hoy en día una de las estructuras algebraicas fundamentales. Los módulos cruzados de álgebras conmutativas han sido usados, en esencia más que en nombre, por Lichtenbaum y Schlessinger [36] y Gerstenhaber [27]. Además, algunos resultados categóricos fueron dados por Porter [45, 46].

En [43], Norrie desarrolló el trabajo de Lue [39] e introdujo la noción de actor de módulos cruzados de grupos donde prueba que es el análogo del grupo de automorfismos de un grupo. Usando la noción de actor de módulo cruzado generaliza conceptos de grupos a módulos cruzados como el centro, módulos cruzados completos y perfectos, submódulos cruzados característicos y estudia las conexiones entre estos. Parte del trabajo de Norrie surge de analogías entre grupos y álgebras.

Casas y Ladra [14] introducen el concepto de actor en la categoría de módulos cruzados de álgebras de Lie generalizando la noción de álgebra de Lie de las derivaciones. Usando este concepto prueban que un cuadrado cruzado de álgebras de Lie es equivalente a un módulo cruzado en la categoría de módulos cruzados de álgebras de Lie.

Porter en [45] utiliza los módulos cruzados de álgebras conmutativas para identificar un invariante de Simis y Vasconcelos con el segundo grupo de homología de André-Quillen y en [46] plantea cuestiones categóricas en la categoría de módulos cruzados de álgebras conmutativas  $XMod_K/R$  con el anillo  $R$  fijo. En particular, da la construcción del  $R$ -módulo cruzado libre sobre una aplicación  $X \rightarrow R$ , es decir, construye una adjunción entre  $Set/UR$  y  $XMod_K/R$ .

Carrasco, Cegarra y R.-Grandjeán [13] construyen una teoría de homología y cohomología de módulos cruzados que generaliza de algún modo la teoría de homología de Eilenberg-Mac Lane. Para ello utilizan la teoría general de homología del cotriple de Barr y Beck [8] y para desarrollarla usan el resultado fundamental de que la categoría de módulos cruzados de grupos es algebraica [9] sobre conjuntos, es decir, existe un funtor de olvido tripleable sobre conjuntos.

Janelidze, Márki y Tholen [33] introducen el concepto de categoría semiabeliana como marco adecuado donde se capturan las propiedades algebraicas válidas para grupos, anillos y álgebras, del mismo modo que las categorías abelianas son el marco para el tratamiento generalizado de grupos abelianos y módulos. Muestran cómo este concepto es el apropiado para establecer teoremas de isomorfía, de exactitud y herramientas necesarias para desarrollar el álgebra homológica.

La investigación de propiedades categóricas de estructuras algebraicas ha alcanzado grandes logros en los últimos cincuenta años y se sigue profundizando en varias direcciones diferentes relacionadas con muchas aplicaciones importantes.

Comenzamos en el primer capítulo estudiando las características fundamentales de la categoría de módulos cruzados de álgebras conmutativas,  $XMod_K$ . Se recopilan nociones elementales como ideal y cociente de un módulo cruzado y se construyen algunos límites y colímites finitos en la categoría. Además, la categoría de álgebras conmutativas es una de las pocas categorías algebraicas donde los conceptos de sobreyección y epimorfismo no coinciden. De hecho, no es una categoría equilibrada, es decir, monomorfismo y epimorfismo no implica isomorfismo. Se verá que la categoría  $XMod_K$  tampoco es equilibrada,

mostrando un morfismo mónico y épico que no es un isomorfismo, se probará que las sobreyecciones son los epimorfismos regulares y se dará una condición suficiente para que un morfismo sea epimorfismo.

A continuación se analizan conceptos equivalentes al de módulo cruzado. Se comprueba que los conceptos de  $\text{cat}^1$ -álgebra [37], 1-cubo [19], categoría interna en la categoría de  $K$ -álgebras conmutativas y módulo cruzado son equivalentes.

Además, estudiamos la tripleabilidad sobre conjuntos de la categoría de módulos cruzados de álgebras conmutativas. Aplicamos el criterio de Linton para probar que el funtor de olvido  $U : XMod_K \rightarrow Set$  es tripleable.

Posteriormente vemos que la categoría  $XMod_K$  es semiabeliana, es decir, es exacta en el sentido de Barr, protomodular en el sentido de Bourn y tiene objeto cero y coproductos finitos. Este es el marco idóneo para desarrollar una teoría de homología y cohomología de módulos cruzados de álgebras conmutativas ya que en este tipo de categorías se verifica el lema de los cinco roto. También se prueba en la misma sección que  $XMod_K$  no es una categoría de interés [44]. Este hecho justifica que el estudio de módulos cruzados de álgebras conmutativas tenga diferencias fundamentales con respecto a módulos cruzados de grupos, ya que esta sí es una categoría de interés. Además, se muestra que  $XMod_K$  es una categoría cartesiana cerrada, al igual que otras categorías con objeto terminal y productos como  $Set$  o  $Cat$  y, finalmente, se describe la estructura de categoría de modelos de  $XMod_K$  mostrando cuales son las fibraciones, las cofibraciones y las equivalencias débiles.

El segundo capítulo se inicia introduciendo los conceptos de actor y aniquilador de un módulo cruzado de álgebras conmutativas, que generalizan los conceptos de las multiplicaciones y aniquilador, respectivamente, de álgebras conmutativas. El concepto de actor nos permite definir una acción de un módulo cruzado sobre otro módulo cruzado y así podremos hablar posteriormente del producto semidirecto de módulos cruzados, de la categoría  $(C, R, \nu)$ -módulos o de las derivaciones.

En las siguientes secciones del mismo capítulo se estudian los módulos cruzados singulares, y se relacionan estos con el aniquilador definido anteriormente. También se define el conmutador y se prueba que proporciona un

objeto singular al cocientar un módulo cruzado. A continuación, se define un producto tensor de módulos cruzados que generaliza el producto tensor en la categoría de álgebras conmutativas. Más adelante se verá que el funtor definido por el producto tensor tiene un adjunto por la derecha.

Se trata también el producto semidirecto de módulos cruzados, relacionándolo con el de álgebras conmutativas. Además, se definen los  $(C, R, \nu)$ -módulos como aquellos módulos cruzados singulares  $(A, B, \sigma)$  tales que existe una sucesión exacta corta rota a la derecha:

$$0 \longrightarrow (A, B, \sigma) \xrightarrow{(\mu_1, \mu_2)} (G, H, \omega) \begin{array}{c} \xrightarrow{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \\ \xleftarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} \end{array} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

y se prueba que los  $(C, R, \nu)$ -módulos son equivalentes a los objetos grupo abeliano en la categoría  $XMod_K/(C, R, \nu)$ . Después de esto, además de definir la categoría de  $(C, R, \nu)$ -módulos,  $XMod_{(C, R, \nu)}$ , se prueban ciertos resultados de exactitud relativos a los morfismos de  $(C, R, \nu)$ -módulos y al producto tensor.

Para finalizar el capítulo se describen las derivaciones de módulos cruzados y se prueba el teorema de representabilidad; como consecuencia de este se tiene que las derivaciones están en correspondencia biyectiva con cierta clase de morfismos de módulos cruzados.

En el tercer capítulo se define una teoría de (co)homología de módulos cruzados con coeficientes del tipo  $(A, 0, 0)$ . Para ello, se considera un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(A, 0, 0)$  y se definen las derivaciones  $Der((C, R, \nu), A)$  y las diferenciales  $Diff((C, R, \nu), A)$ . Si  $FU$  denota el cotriple dado por la adjunción entre las categorías como  $XMod/(C, R, \nu)$  y  $Set/U(C, R, \nu)$  la (co)homología se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_n((C, R, \nu), A) &= H_n Diff(FU_*(C, R, \nu), A). \\ H^n((C, R, \nu), A) &= H^n Der(FU_*(C, R, \nu), A). \end{aligned}$$

A continuación se muestran algunos resultados sobre la (co)homología definida, como por ejemplo su relación con el producto tensor o con la localización

de módulos. Además, se definen las extensiones centrales de módulos cruzados y se identifican las extensiones de  $(C, R, \nu)$  por  $(A, 0, 0)$  con  $H^1$ . También se caracterizan los módulos cruzados  $(C, R, \nu)$  tales que  $H^1((C, R, \nu), A) = 0$  para todo  $(C, R, \nu)$ -módulo  $A$  y se dan sucesiones exactas relativas a las diferenciales.

Por otro lado, dado un morfismo de álgebras conmutativas se define una (co)homología relativa y se relaciona esta con la (co)homología de módulos cruzados esféricos, que son aquellos módulos cruzados  $(C, R, \nu)$  tales que el morfismo  $\nu$  es inyectivo.

Finalmente, y por analogía con la (co)homología definida, se define la (co)homología de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  con coeficientes en un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(0, A, 0)$ . Esta teoría generaliza la (co)homología de álgebras conmutativas.

En el cuarto y último capítulo se calcula de forma efectiva la homología de ciertos grupos y se proporciona un método para realizar estos cálculos de forma más rápida y con menor necesidad de recursos computacionales que si se realizasen directamente por medio de una resolución del grupo.

Dado un grupo, por medio de su serie central descendente se le puede asociar un álgebra de Lie. En [34] se prueba que si se tiene un grupo nilpotente libre de clase 2 su homología coincide con la homología de su álgebra de Lie asociada. Por esto, se programan funciones para calcular el álgebra de Lie asociada a un grupo nilpotente y el complejo de Chevalley-Eilenberg de un álgebra de Lie, que permite calcular su homología. Estas funciones se han incluido en HAP, uno de los paquetes de GAP enfocado hacia la (co)homología de grupos. GAP (Groups, Algorithms, Programming) es un sistema distribuido gratuitamente orientado hacia el álgebra computacional y que proporciona un lenguaje de programación y numerosas librerías, organizadas en módulos y paquetes, en las que se encuentran implementados una gran cantidad de algoritmos y de objetos algebraicos.

Empíricamente se observa que este método es mucho más rápido y eficiente, y así se pueden calcular algunas homologías que no habían podido ser computadas hasta ahora, como por ejemplo la cuarta homología de un grupo nilpotente libre de clase 2 y rango 6.

También se conjetura, a la vista de los cálculos que se realizan, que el resultado mencionado es cierto para cualquier grupo nilpotente libre, y no sólo para aquellos de clase 2, y se prueba esto para las dos primeras homologías.

Finalmente, se prueban algunos resultados relativos al funtor que aplica un grupo en su álgebra de Lie asociada y se listan las funciones programadas.

# Capítulo 1

## Propiedades categóricas de módulos cruzados de álgebras conmutativas

### 1.1. La categoría $\mathbf{XMod}_K$

**Definición 1** Sea  $K$  un anillo conmutativo y  $R$  una  $K$ -álgebra. Un  $R$ -módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  [5, 45, 46] es una  $R$ -álgebra  $C$ , junto con una acción de  $R$  sobre  $C$  y un morfismo de  $R$ -álgebras  $\nu : C \rightarrow R$  tal que para todo  $c, c' \in C$  y  $r \in R$  verifica:

- $\nu(rc) = r\nu(c)$ .
- $\nu(c)c' = cc'$  (identidad de Peiffer).

Si solo se verifica la primera de las dos condiciones, lo que se tiene es un módulo precruzado. Se llama a  $R$  álgebra base.

**Observación 2** Los anillos y las álgebras que se consideran no tienen por qué tener unidad.

**Ejemplo 3** Sea  $I$  un ideal de  $R$ . Si consideramos la inclusión  $i : I \hookrightarrow R$ , entonces  $(I, R, i)$  es un módulo cruzado.

Recíprocamente, dado un  $R$ -módulo cruzado  $\nu : C \rightarrow R$ , la identidad de Peiffer implica que  $\nu(C)$  es un ideal de  $R$ .

**Ejemplo 4** A un  $R$ -módulo  $M$  se le puede dar una estructura de álgebra con la multiplicación cero. Si denotamos por  $0 : M \rightarrow R$  el morfismo cero,  $(M, R, 0)$  es un  $R$ -módulo cruzado.

**Ejemplo 5** Sea  $\theta : L \rightarrow M$  un morfismo de  $R$ -módulos y  $M \rtimes R$  el producto semidirecto con la multiplicación usual  $(m, r)(m', r') = (rm' + r'm, rr')$ . Dándole a  $L$  la multiplicación cero y estructura de  $M \rtimes R$ -módulo vía la proyección de  $M \rtimes R$  sobre  $R$ , se obtiene un  $(M \rtimes R)$ -módulo cruzado definiendo:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} : L &\rightarrow M \rtimes R \\ \tilde{\theta}(l) &= (\theta(l), 0)\end{aligned}$$

Se verifican las dos condiciones de módulo cruzado:

- $\tilde{\theta}((m, r)l) = \tilde{\theta}(rl) = (\theta(rl), 0) = (r\theta(l), 0) = (m, r)(\theta(l), 0) = (m, r)\tilde{\theta}(l)$ .
- $\tilde{\theta}(l)l' = (\theta(l), 0)l' = 0l' = 0 = ll'$ .

**Ejemplo 6** Hay módulos precruzados que no son cruzados [3].

Sea  $A$  una  $R$ -álgebra. Consideramos  $A \rtimes R$  con el producto  $(a, r)(a', r') = (aa' + ra' + r'a, rr')$ .  $R$  actúa sobre  $A \rtimes R$  de la siguiente manera:  $r' \cdot (a, r) := (r' \cdot a, rr')$ .

$(A \rtimes R, R, \pi)$  es un módulo precruzado, siendo  $\pi$  la proyección:

$$\pi : A \rtimes R \rightarrow R, \pi(a, r) = r.$$

- $\pi(r'(a, r)) = \pi((r'a, rr')) = rr' = r\pi(a, r)$ .
- $\pi(a, r)(a'r') = r(a', r') = (ra', rr') \neq (a, r)(a', r') = (aa' + ra' + r'a, rr')$ .

Si tomamos  $R = 0$  (y por tanto  $\pi = 0$ ), el módulo que se obtiene es cruzado si y solo si  $A^2 = 0$ .

**Definición 7** Si  $(C, R, \nu)$  es un módulo cruzado, un submódulo cruzado es un módulo cruzado  $(C', R', \nu')$  tal que:

- $C'$  es una subálgebra de  $C$ .
- $R'$  es una subálgebra de  $R$ .
- La acción de  $R'$  sobre  $C'$  es la restricción de la acción de  $R$  sobre  $C$ .

**Ejemplo 8** Si  $M$  es un  $R$ -módulo y  $N$  es un  $R$ -submódulo de  $M$ , entonces  $(N, R, 0)$  es un submódulo cruzado de  $(M, R, 0)$ .

**Definición 9** Un submódulo cruzado  $(C', R', \nu')$  de  $(C, R, \nu)$  se dice que es un ideal cruzado si:

- $C'$  es un ideal de  $C$  y  $R'$  es un ideal de  $R$ .
- Si  $r \in R$  y  $c' \in C'$ , entonces  $rc' \in C'$ .
- Si  $r' \in R'$  y  $c \in C$ , entonces  $r'c \in C'$ .

El ejemplo dado de submódulo cruzado no es un ideal cruzado.

**Ejemplo 10** Sea  $I$  un ideal de  $R$  tal que  $R^2 \subseteq I$ , entonces  $(I, R, i)$  es un ideal cruzado de  $(R, R, id_R)$ .

**Definición 11** Sea  $(C', R', \nu')$  un ideal cruzado de  $(C, R, \nu)$ . El módulo cruzado cociente es  $(C/C', R/R', \bar{\nu})$ , donde  $\bar{\nu} : C/C' \rightarrow R/R'$  viene dada por  $\bar{\nu}(c + C') = \nu(c) + R'$  y la acción de  $R/R'$  sobre  $C/C'$  viene inducida por la de  $R$  sobre  $C$ :

$$\begin{aligned} R/R' \times C/C' &\rightarrow C/C' \\ (r + R') \cdot (c + C') &= r \cdot c + C' \end{aligned}$$

Vamos a comprobar que  $\bar{\nu}$  está bien definida: sean  $c, d \in C$  tales que  $c + C' = d + C'$ , es decir,  $c - d \in C' \Rightarrow \bar{\nu}(c - d) \in R' \Rightarrow \bar{\nu}(c) - \bar{\nu}(d) \in R' \Rightarrow \bar{\nu}(c) = \bar{\nu}(d)$ .

Veamos que  $(C/C', R/R', \bar{\nu})$  es, efectivamente, un módulo cruzado:

- $\bar{\nu}((r + R')(c + C')) = \bar{\nu}(rc + C') = \nu(rc) + C' = r\nu(c) + C' = (r + R')(\nu(c) + C')$ .
- $(\bar{\nu}(c + C'))(c' + C') = (\nu(c) + R')(c' + C') = \nu(c)c' + C' = cc' + C' = (c + C')(c' + C')$ .

**Proposición 12** Sean  $(C'', R'', \nu'')$  y  $(C', R', \nu')$  dos submódulos cruzados de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ . El submódulo cruzado intersección es  $(C'' \cap C', R'' \cap R', \nu|_{C'' \cap C'})$ .

**Demostración:**

La prueba es directa. □

**Ejemplo 13** Sean  $I$  y  $J$  dos  $R$ -módulos. La intersección de los módulos cruzados  $(I, R, 0)$  y  $(J, R, 0)$  es el módulo cruzado  $(I \cap J, R, 0)$ .

**Proposición 14** Sean  $(C'', R'', \nu'')$  y  $(C', R', \nu')$  dos ideales cruzados de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ . El submódulo cruzado intersección  $(C'' \cap C', R'' \cap R', \nu|_{C'' \cap C'})$  es un ideal cruzado de  $(C, R, \nu)$ .

**Demostración:**

$C'' \cap C'$  y  $R'' \cap R'$  son ideales de  $C$  y  $R$  respectivamente. Además,  $(R'' \cap R')C$  está contenido en  $C'' \cap C'$  ya que  $R''C$  y  $R'C$  están contenidos en  $C''$  y  $C'$  respectivamente. Análogamente  $R(C'' \cap C')$  está contenido en  $C'' \cap C'$ . □

**Definición 15** Un morfismo de módulos cruzados de  $(C, R, \nu)$  a  $(C', R', \nu')$  es un par de morfismos de  $K$ -álgebras:

$$\phi : C \rightarrow C' \quad \psi : R \rightarrow R'$$

tales que  $\phi(rc) = \psi(r)\phi(c)$  y  $\nu' \circ \phi = \psi \circ \nu$ .

Se dice que el morfismo de módulos cruzados  $(\phi, \psi)$  es *inyectivo* (sobreyectivo) cuando tanto  $\phi$  como  $\psi$  son *inyectivas* (sobreyectivas).

**Ejemplo 16** Sea  $(C, R, in)$  un módulo cruzado en el que  $C$  es una subálgebra de  $R$ . Consideramos un morfismo de álgebras arbitrario  $f : R \rightarrow R$  y  $f|_C : C \rightarrow C$ ; entonces  $(f|_C, f) : (C, R, in) \rightarrow (C, R, in)$  es un morfismo de módulos cruzados:

- $in(f(c)) = f(c) = f|_C(c) = f|_C(in(c))$ , donde  $c \in C$ .
- $f|_C(rc) = f(rc) = f(r)f(c) = f(r)f|_C(c)$ , donde  $c \in C, r \in R$ .

La composición está definida componente a componente. El morfismo identidad es  $id_{(C, R, \nu)} = (id_C, id_R)$ .

Se tiene entonces una categoría  $X\text{Mod}_K$  de módulos cruzados. Si se fija el álgebra base  $R$ , se obtiene la subcategoría  $X\text{Mod}_K/R$ .

**Observación 17** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado.

- $\ker \nu$  es un ideal de  $C$ , ya que si  $c \in \ker \nu$  y  $c' \in C$  se tiene que  $\nu(cc') = \nu(\nu(c)c') = 0$ .
- $\text{Im } \nu$  es un ideal de  $R$ , porque si  $r \in R$  y  $\nu(c) \in \text{Im } \nu \Rightarrow r\nu(c) = \nu(rc) \in \text{Im } \nu$ .
- $0 \rightarrow \ker \nu \rightarrow C \rightarrow \text{Im } \nu \rightarrow 0$  es una extensión central de álgebras conmutativas, es decir,  $\ker \nu$  es un ideal de cuadrado cero  $(\ker \nu)^2 = 0 : c, c' \in \ker \nu \Rightarrow cc' = \nu(c)c' = 0$ .

**Definición 18** Sea  $\{(C_i, R_i, \nu_i)\}_I$  una familia de módulos cruzados. Se define el producto directo de la siguiente manera:  $\prod_I (C_i, R_i, \nu_i) = (\prod_I C_i, \prod_I R_i, \prod_I \nu_i)$ , donde  $\prod_I C_i, \prod_I R_i$  son los productos directos en la categoría de álgebras conmutativas y  $\prod_I \nu_i$  es la aplicación inducida entre ellos.

Las proyecciones vienen dadas de la siguiente manera:

$p_j \equiv (p_j^1, p_j^2) : (\prod_I C_i, \prod_I R_i, \prod_I \nu_i) \rightarrow (C_j, R_j, \nu_j)$ , donde  $p_j^1, p_j^2$  son las proyecciones de álgebras. Vamos a ver que  $p_j$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_I C_i & \xrightarrow{\Pi \nu_i} & \Pi_I R_i \\
p_j^1 \downarrow & & \downarrow p_j^2 \\
C_j & \longrightarrow & R_j
\end{array}$$

- $p_j^2(\Pi_I \nu_i((c_i)_I)) = p_j^2((\nu_i(c_i))_I) = \nu_j(c_j) = \nu_j(p_j^1(c_i)_I)$ , donde  $(c_i)_I \in \Pi_I C_i$ .
- $p_j^1((r_i)_I(c_i)_I) = r_j c_j = p_j^2((r_i)_I) p_j^1((c_i)_I)$ , donde  $(c_i)_I \in \Pi_I C_i, (r_i)_I \in \Pi_I R_i$ .

El producto directo verifica la siguiente propiedad universal: sea  $(G, H, \omega)$  un módulo cruzado y  $\{(f_i, g_i) : (G, H, \omega) \rightarrow (C_i, R_i, \nu_i)\}_I$  una familia de morfismos. Existe un único morfismo  $(\varphi, \varphi') : (G, H, \omega) \rightarrow \Pi_I (C_i, R_i, \nu_i)$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
(G, H, \omega) & & \\
\downarrow (\varphi, \varphi') & \searrow (f_j, g_j) & \\
\Pi_I (C_i, R_i, \nu_i) & \xrightarrow{p_j} & (C_j, R_j, \nu_j)
\end{array}$$

Este hecho se comprueba trivialmente teniendo en cuenta que  $\varphi : G \rightarrow \Pi_I C_i$  y  $\varphi' : H \rightarrow \Pi_I R_i$  son las aplicaciones dadas por la misma propiedad universal en la categoría de álgebras conmutativas.

**Proposición 19** *Dados dos morfismos de módulos cruzados  $(\phi, \psi)$  y  $(\phi', \psi')$  entre  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$ , su igualador  $Ig((\phi, \psi), (\phi', \psi'))$  es el submódulo cruzado  $(A, B, \bar{\nu})$  junto con el morfismo de módulos cruzados  $(f, g)$ , siendo  $Ig(\phi, \psi) = (A, f)$ ,  $Ig(\phi', \psi') = (B, g)$  y  $\bar{\nu}$  la aplicación inducida por  $\nu$ .*

**Demostración:**

Vamos a comprobar que ese es efectivamente el igualador en la categoría  $XMod_K$ :

$$\begin{array}{ccc}
A & & B \\
f \downarrow & & \downarrow g \\
C & \xrightarrow{\nu} & R \\
\phi \downarrow \downarrow \psi & & \phi' \downarrow \downarrow \psi' \\
C' & \xrightarrow{\nu'} & R'
\end{array}$$

$$\bullet (\phi, \psi)(f, g) = (\phi f, \psi g) = (\phi' f, \psi' g) = (\phi', \psi')(f, g).$$

• Sea  $(h, i) : (D, P, \delta) \rightarrow (C, R, \nu)$  un morfismo de módulos cruzados tal que  $\phi h = \phi' h$  y  $\psi i = \psi' i$ ; entonces existen  $m : D \rightarrow A$  y  $n : P \rightarrow B$  tales que  $f m = h$  y  $g n = i$ . Es decir,  $(h, i)$  se factoriza por  $(f, g)$ .

Sólo queda por comprobar que  $(m, n)$  es un morfismo de módulos cruzados:

• Sea  $d \in D$ ; para ver que  $n\delta(d) = \bar{\nu}m(d)$  compondremos con un monomorfismo y comprobaremos que  $gn\delta(d) = g\bar{\nu}m(d)$  :

$$g\bar{\nu}m(d) = \nu f m(d) = \nu h(d) = i\delta(d) = gn\delta(d)$$

• Sean  $p \in P, d \in D$ ; para ver que  $m(pd) = n(p)m(d)$  comprobaremos que  $f(m(pd)) = f(n(p)m(d))$  :

$$f(n(p)m(d)) = g(n(p))f(m(d)) = i(p)h(d) = h(pd) = f(m(pd)). \quad \square$$

**Proposición 20** Sea  $(\phi, \psi)$  un morfismo de módulos cruzados entre  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$ . Entonces  $(\phi, \psi)$  es mónica si y sólo si  $(\phi, \psi)$  es inyectiva.

**Demostración:**

“  $\Leftarrow$  ”

Sean  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  morfismos entre los módulos cruzados  $(C'', R'', \nu'')$  y  $(C, R, \nu)$  tales que  $(\phi, \psi)(\alpha_1, \beta_1) = (\phi, \psi)(\alpha_2, \beta_2)$ .

$$\begin{array}{ccc}
C'' & \xrightarrow{\nu''} & R'' \\
\alpha_1 \downarrow \downarrow \alpha_2 & & \beta_1 \downarrow \downarrow \beta_2 \\
C & \xrightarrow{\nu} & R \\
\phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
C' & \xrightarrow{\nu'} & R'
\end{array}$$

Entonces tenemos que  $(\phi\alpha_1, \psi\beta_1) = (\phi\alpha_2, \psi\beta_2) \Rightarrow \phi\alpha_1 = \phi\alpha_2$ , y como  $\phi$  es inyectiva se verifica que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Análogamente, como  $\psi$  es también inyectiva se tiene que  $\beta_1 = \beta_2$ .

“ $\Rightarrow$ ”

Supongamos que  $(\phi, \psi)$  es mónica; primero vamos a comprobar que  $\psi$  es mónica (y por tanto inyectiva, ya que es un morfismo en la categoría de álgebras conmutativas).

Sean  $\beta_1, \beta_2 : R'' \rightarrow R$  tales que  $\psi\beta_1 = \psi\beta_2$ . Consideramos el módulo cruzado  $(0, R'', 0)$ .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & R'' \\ \downarrow 0 & & \downarrow \beta_1 \\ C & \xrightarrow{\nu} & R \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \end{array}$$

Se tiene que  $(\phi, \psi)(0, \beta_1) = (\phi, \psi)(0, \beta_2) \Rightarrow (0, \beta_1) = (0, \beta_2) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$ , y por tanto  $\psi$  es mónica.

Veamos ahora que  $\phi$  es mónica. Sean  $\alpha_1, \alpha_2 : C'' \rightarrow C$  tales que  $\phi\alpha_1 = \phi\alpha_2$ . Consideramos el módulo cruzado  $(C'', C'', id)$ .

$$\begin{array}{ccc} C'' & \xrightarrow{id} & C'' \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \nu\alpha_1 \\ C & \xrightarrow{\nu} & R \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \end{array}$$

Tenemos que  $(\alpha_1, \nu\alpha_1)(\phi, \psi) = (\alpha_2, \nu\alpha_2)(\phi, \psi) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ . □

**Proposición 21** *Sea  $(\phi, \psi)$  un morfismo de módulos cruzados entre  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$ . Entonces  $(\phi, \psi)$  es un epimorfismo  $\Rightarrow \psi$  es un epimorfismo.*

**Demostración:**

Consideremos un módulo cruzado  $(R'', R'', id)$  y sean  $\beta_1, \beta_2 : R' \rightarrow R''$  morfismos tales que  $\beta_1\psi = \beta_2\psi$ .

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\nu} & R \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \\
 \beta_1\nu' \downarrow \parallel \beta_2\nu' & & \beta_1 \downarrow \parallel \beta_2 \\
 R'' & \xrightarrow{id} & R''
 \end{array}$$

Se tiene que  $(\beta_1\nu', \beta_1)(\phi, \psi) = (\beta_2\nu', \beta_2)(\phi, \psi) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$  y por tanto  $\psi$  es épica.  $\square$

Es trivial comprobar que si  $(\phi, \psi)$  es sobreyectiva entonces también es épica. Sin embargo, la implicación inversa no se da. A continuación veremos un contraejemplo.

Tomamos un álgebra  $C \neq 0$  tal que  $C^2 = C$  y consideramos el morfismo  $(0, id)$  entre los módulos cruzados  $(0, C, 0)$  y  $(C, C, id)$ . Este morfismo no es sobreyectivo, pero sí es un epimorfismo: sean  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  tales que  $(\alpha_1, \beta_1)(0, id) = (\alpha_2, \beta_2)(0, id)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{0} & C \\
 0 \downarrow & & \downarrow id \\
 C & \xrightarrow{id} & C \\
 \alpha_1 \downarrow \parallel \alpha_2 & & \beta_1 \downarrow \parallel \beta_2 \\
 C' & \xrightarrow{\nu} & R'
 \end{array}$$

Se tiene directamente que  $\beta_1 = \beta_2 (\Rightarrow \nu\alpha_1(x) = \nu\alpha_2(x))$ . Falta comprobar que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Como  $C^2 = C$  basta ver que  $\alpha_1(xy) = \alpha_2(xy)$  para  $x, y \in C$ .

$$\alpha_1(xy) = \alpha_1(x)\alpha_1(y) = \nu(\alpha_1(x))\alpha_1(y) = \nu(\alpha_2(x))\alpha_1(y) = \alpha_2(x)\alpha_1(y) = \alpha_2(x)\nu(\alpha_1(y)) = \alpha_2(x)\nu(\alpha_2(y)) = \alpha_2(x)\alpha_2(y) = \alpha_2(xy).$$

Además,  $(0, id)$  es también un monomorfismo.

En la categoría  $XMod_K$  no es sencillo caracterizar los epimorfismos. De hecho, ya en la categoría de álgebras conmutativas resulta complicado: sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo de  $K$ -álgebras;  $\varphi$  es un epimorfismo si y solo si toda aplicación  $A$ -lineal  $f : M \rightarrow N$  entre dos  $B$ -módulos  $M$  y  $N$  es  $B$ -lineal [24].

En el caso de anillos con unidad la caracterización tampoco es fácil:

- $\varphi : A \rightarrow B$  es un epimorfismo si y solo si la aplicación canónica  $B \otimes_A B \rightarrow B$  inducida por la multiplicación en  $B$  es un isomorfismo [50].
- $\varphi : A \rightarrow B$  es un epimorfismo si y solo si el morfismo  $B \rightarrow B \otimes_A B$  es sobreyectivo [12].

Vamos a ver a continuación una condición suficiente para que un morfismo de módulos cruzados sea epimorfismo.

**Lema 22** Sean  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  módulos cruzados y  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  un morfismo entre ellos. Se verifica que  $(f, g)$  es un epimorfismo regular si y solo si es sobreyectivo.

**Demostración:**

Sea  $U : XMod_K \rightarrow Set$  el funtor de olvido. Como  $XMod_K$  es algebraica (esto se probará en una sección posterior) se tiene que  $(f, g)$  es un epimorfismo regular en  $XMod_K$  si y sólo si  $U(f, g)$  es un epimorfismo regular en  $Set$ . Como en la categoría de conjuntos los conceptos de epimorfismo regular y sobreyección coinciden, se obtiene la proposición enunciada.  $\square$

**Corolario 23** Los conceptos de epimorfismo regular, epimorfismo extremo, epimorfismo fuerte y morfismo sobreyectivo son equivalentes en  $XMod_K$  [1].

**Proposición 24** Sean  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  dos módulos cruzados y  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  un morfismo entre ellos verificando:

- $g$  es un morfismo sobreyectivo de álgebras conmutativas.
- $f(C)$  es un ideal de  $C'$ .
- $C'/f(C)$  coincide con su cuadrado.

Entonces,  $(f, g)$  es un epimorfismo.

**Demostración:**

Por ser  $XMod_K$  una categoría semiabeliana (como se verá en una sección posterior) se tiene que  $(f, g)$  se puede factorizar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & R \\ f_e \downarrow & & \downarrow g_e \\ S & \longrightarrow & S' \\ f_m \downarrow & & \downarrow g_m \\ C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \end{array}$$

donde  $f_e$  y  $g_e$  son epimorfismos regulares y  $f_m$  y  $g_m$  son monomorfismos. Como  $g$  es sobreyectiva se tiene que  $g_e = g, g_m = id$  y el diagrama se reduce al siguiente:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & R \\ f_e \downarrow & & \downarrow g \\ S & \xrightarrow{\nu' f_m} & R' \\ f_m \downarrow & & \downarrow id \\ C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \end{array}$$

Se verifica que  $(S, R', \nu' f_m)$  es un módulo cruzado. La acción de  $R'$  sobre  $S$  viene dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R' \times S &\rightarrow S \\ (r', s) &\mapsto r' f_m(s) \end{aligned}$$

Esta acción está bien definida ya que  $r'f_m(s) = g(r)f_m(f_e(c)) = g(r)f(c) = f(rc) = f_e(rc) \in S$ , donde  $c \in C, r \in R$ . Además, es trivial comprobar que se verifican los axiomas de módulo cruzado.

Por otro lado  $(f_e, g)$  y  $(f_m, id)$  son morfismos de módulos cruzados:

- $\nu'f_m f_e(c) = \nu'f(c) = g\nu(c)$ , donde  $c \in C$ .
- $f_e(rc) = f(rc) = g(r)f(c) = g(r)f_e(c)$ , donde  $c \in C, r \in R$ .
- $f_m(r's) = f_m(g(r)f_e(c)) = f_m(f_e(rc)) = f(rc) = g(r)f(c) = g(r)f_m(f_e(c)) = r'f_m(s)$ , donde  $c \in C, s \in S, r, r' \in R$ .

Se tiene que  $(f_e, g)$  es épica trivialmente. Veamos que  $(f_m, id)$  también lo es. Para ello tomamos  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  tales que  $(\alpha_1, \beta_1) \circ (f_m, id) = (\alpha_2, \beta_2) \circ (f_m, id)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\nu'f_m} & R \\
 f_m \downarrow & & \downarrow id \\
 C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \\
 \alpha_1 \downarrow & \alpha_2 & \beta_1 \downarrow \beta_2 \\
 G & \xrightarrow{\omega} & H
 \end{array}$$

Se verifica entonces que  $\beta_1 = \beta_2$  y  $\alpha_1 = \alpha_2$  en  $f_m(S)$ . Como  $C'/f_m(S)$  coincide con su cuadrado basta comprobar que  $\alpha_1(cc') = \alpha_2(cc')$  para  $c, c' \in C'$ . Como  $\omega\alpha_1 = \beta_1\nu' = \beta_2\nu' = \omega\alpha_2$  tenemos las siguientes igualdades:

- $\alpha_1(cc') = \alpha_1(c)\alpha_1(c') = \omega(\alpha_1(c))\alpha_1(c') = \omega(\alpha_2(c))\alpha_1(c') = \alpha_2(c)\alpha_1(c') = \omega(\alpha_1(c'))\alpha_2(c)$ .

- $\alpha_2(cc') = \alpha_2(c)\alpha_2(c') = \alpha_2(c')\alpha_2(c) = \omega(\alpha_2(c'))\alpha_2(c) = \omega(\alpha_1(c'))\alpha_2(c)$ . □

**Observación 25** Como añadido a la proposición anterior se verifica que si  $(f, g)$  es un morfismo de módulos cruzados tal que  $g$  es sobreyectiva, entonces  $f(C)$  es un ideal de  $C'$  y  $R'/f(C)$  coincide con su cuadrado. Comprobaremos esto a continuación.

Por ser  $g$  sobreyectiva se tiene, al igual que en la demostración anterior, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\nu} & R \\
 f_e \downarrow & & \downarrow g \\
 S & \xrightarrow{\nu' f_m} & R' \\
 f_m \downarrow & & \downarrow id \\
 C' & \xrightarrow{\nu'} & R'
 \end{array}$$

donde  $f_e$  es un epimorfismo regular y  $f_m$  un monomorfismo.

Supongamos que  $C'/f_m(S)$  no coincide con su cuadrado. Se tiene que  $M = (C'/C'^2)/f_m(S)$  es distinto de cero y por tanto existe  $h : C' \rightarrow M$  no nula tal que  $hf_m = 0$ .

Se verifica que  $(M, 0, 0)$  es un módulo cruzado ya que se tiene  $\overline{(c + f_m(S))} = \overline{c' + f_m(S)} = \bar{0}$  y por tanto se satisface la identidad de Peiffer.

Como  $(h, 0) = (f_m, id) = (0, 0)(f_m, id)$  se tiene que  $(f_m, id)$  no es un epimorfismo y por tanto  $(f, g)$  tampoco lo es.

Para ver que  $f(C)$  es un ideal de  $C'$  consideremos  $c \in C$  y  $c' \in C'$ . Debemos comprobar que existe  $d \in C$  tal que  $f(d) = f(c)c'$ :

$$f(c)c' = f_m(f_e(c))c' = f_m(f_e(c))f_e(d) = f_e(c)f_e(d) = f_e(cd) = f_m(f_e(cd)) = f(cd), \text{ donde } d \in C.$$

**Definición 26** Se dice que un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  es proyectivo si verifica que dado un epimorfismo regular  $(G, H, \omega) \twoheadrightarrow (G', H', \omega')$  y otro morfismo  $(C, R, \nu) \rightarrow (G', H', \omega')$ , entonces existe un único morfismo  $(C, R, \nu) \rightarrow (G, H, \omega)$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (C, R, \nu) & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 (G, H, \omega) & \twoheadrightarrow & (G', H', \omega')
 \end{array}$$

Análogamente se dirá que  $(C, R, \nu)$  es *inyectivo* si verifica que dado un monomorfismo de módulos cruzados  $(G, H, \omega) \rightarrow (G', H', \omega')$  y otro morfismo  $(G', H', \omega') \rightarrow (C, R, \nu)$ , entonces existe un único morfismo  $(G, H, \omega) \rightarrow (C, R, \nu)$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (G, H, \omega) & \xrightarrow{\quad} & (G', H', \omega') \\ & \searrow \text{---} & \downarrow \\ & & (C, R, \nu) \end{array}$$

**Proposición 27** *Dados dos módulos cruzados  $(C, R, \nu)$ ,  $(C', R', \nu')$  y un morfismo  $(\phi, \psi)$  entre ellos, el núcleo  $\ker(\phi, \psi)$  es el ideal cruzado  $(\ker \phi, \ker \psi, \bar{\nu})$ , donde  $\bar{\nu}$  es la restricción del morfismo  $\nu$  a  $\ker \phi$ ,  $\bar{\nu} : \ker \phi \rightarrow \ker \psi$ .*

**Demostración:**

Sea  $c \in \ker \phi$ , entonces  $\bar{\nu}(c) \in \ker \psi$  ya que  $\psi \bar{\nu}(c) = \nu \phi(c) = 0$ . Además,  $(\ker \phi, \ker \psi, \bar{\nu})$  es un módulo cruzado:

- $\bar{\nu}(rc) = \nu(rc) = r\nu(c) = r\bar{\nu}(c)$ , donde  $r \in \ker \psi \subseteq R, c \in \ker \phi \subseteq C$ .
- $\bar{\nu}(c)c' = \nu(c)c' = cc'$ , donde  $c \in \ker \phi \subseteq C, c' \in \ker \phi \subseteq C$ .

Además,  $(\ker \phi, \ker \psi, \bar{\nu})$  es un ideal:

- Trivialmente  $\ker \phi$  es un ideal de  $C'$  y  $\ker \psi$  es un ideal de  $R'$ .
- Dados  $r \in R$  y  $c \in \ker \phi \subseteq C$ , entonces  $rc \in \ker \phi$  ya que  $\phi(rc) = \psi(r)\phi(c) = \psi(r)0 = 0$ .
- Dados  $r \in \ker \psi \subseteq R, c \in C$ , entonces  $rc \in \ker \psi$  ya que  $\psi(rc) = \psi(r)\phi(c) = 0\phi(c) = 0$ . □

**Observación 28** *Un ideal cruzado  $(C', R', \nu')$  de  $(C, R, \nu)$  es el núcleo del morfismo de módulos cruzados  $(p, q) : (C, R, \nu) \rightarrow (C/C', R/R', \bar{\nu})$ , dado de forma natural por las aplicaciones cociente  $p : C \rightarrow C/C'$  y  $q : R \rightarrow R/R'$ .*

**Proposición 29** *Dados dos módulos cruzados  $(C, R, \nu)$ ,  $(C', R', \nu')$  y un morfismo  $(\phi, \psi)$  entre ellos, el conúcleo  $\text{coker}(\phi, \psi)$  es el módulo cruzado:*

$$(C'/(\phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')), \text{coker } \psi = R'/\psi(R)_{R'}, \bar{\nu})$$

donde  $\psi(R)_{R'} \equiv \langle \psi(R) \rangle$  denota el menor ideal de  $R'$  que contiene a  $\psi(R)$ ,  $\phi(C)_{R'}$  la menor  $R'$ -subálgebra que contiene a  $\phi(C)$  en  $C'$ , y  $\bar{\nu}$  es la aplicación que induce  $\nu'$  en el cociente.

**Demostración:**

$(C'/(\phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')), \text{coker } \psi = R'/\psi(R)_{R'}, \bar{\nu})$  es efectivamente un módulo cruzado:

$$\begin{aligned} \bullet \bar{\nu}((r + \psi(R)_{R'})(c + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C'))) &= \bar{\nu}(rc + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')) = \\ \nu(rc) + \psi(R)_{R'} &= r\nu(c) + \psi(R)_{R'} = (r + \psi(R)_{R'})(\nu(c) + \psi(R)_{R'}) = (r + \\ \psi(R)_{R'})\bar{\nu}(c + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \bar{\nu}(c + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C'))(c' + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')) &= (\nu(c) + \psi(R)_{R'})(c' + \\ \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')) &= \nu(c)c' + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C') = cc' + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot \\ C') &= (c + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C'))(c' + \phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C')). \end{aligned}$$

La comprobación de que cumple la propiedad universal de conúcleo es directa.  $\square$

Una construcción análoga para el caso de módulos cruzados en la categoría de grupos se puede ver en [52].

**Definición 30** Una sucesión exacta de módulos cruzados es una familia ordenada de módulos cruzados  $\{(C_i, R_i, \nu_i)\}_{i \in I}$  y morfismos  $\{(f_i, g_i) : (C_i, R_i, \nu_i) \rightarrow (C_{i+1}, R_{i+1}, \nu_{i+1})\}_{i \in I}$  tales que  $\text{Im}(f_i, g_i) = \ker(f_{i+1}, g_{i+1})$  para todo  $i \in I$ .

**Definición 31** Una sucesión exacta corta de módulos cruzados es una sucesión exacta del tipo siguiente:

$$0 \longrightarrow (C', R', \nu') \xrightarrow{(\mu_1, \mu_2)} (C, R, \nu) \xrightarrow{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} (C'', R'', \nu'') \longrightarrow 0$$

Se dice que esta sucesión es rota a la derecha si existe un morfismo  $(\gamma_1, \gamma_2) : (C'', R'', \nu'') \rightarrow (C, R, \nu)$  tal que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \circ (\gamma_1, \gamma_2) = \text{id}_{(C'', R'', \nu'')}$ .

Se dice que la sucesión es rota a la izquierda si existe un morfismo  $(\lambda_1, \lambda_2) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  tal que  $(\lambda_1, \lambda_2) \circ (\mu_1, \mu_2) = \text{id}_{(C', R', \nu')}$ .

**Lema 32** *Sea el siguiente un diagrama conmutativo de módulos cruzados con filas exactas:*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (C', R', \nu') & \xrightarrow{(\mu_1, \mu_2)} & (C, R, \nu) & \xrightarrow{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} & (C'', R'', \nu'') \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \text{id} & & \downarrow (\phi_1, \phi_2) & & \downarrow \text{id} \\
0 & \longrightarrow & (C', R', \nu') & \xrightarrow{(\mu'_1, \mu'_2)} & (A, B, \sigma) & \xrightarrow{(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)} & (C'', R'', \nu'') \longrightarrow 0
\end{array}$$

*Se verifica que  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  es un isomorfismo.*

**Demostración:**

- $\phi$  es sobreyectiva:

Sean  $a \in A, b \in B$ . Como  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  es sobreyectiva existen  $c \in C, r \in R$  tales que  $\varepsilon'(a, b) = \varepsilon(c, r) = \varepsilon'\phi(c, r)$ .

Por tanto  $(a, b) - \phi(c, r) \in \ker \varepsilon' = \text{Im } \mu' \Rightarrow$  existen  $c' \in C', r' \in R' \mid (a, b) - \phi(c, r) = \mu'(c', r') = \phi\mu(c', r')$ .

Es decir,  $(a, b) = \phi\mu(c', r') + \phi(c, r)$ .

- $\phi$  es inyectiva:

Sean  $c \in C, r \in R \mid \phi(c, r) = (0, 0) \Rightarrow \varepsilon(c, r) = \varepsilon'\phi(c, r) = (0, 0)$ .

Por tanto  $(c, r) \in \ker \varepsilon = \text{Im } \mu \Rightarrow$  existen  $c' \in C', r' \in R' \mid \mu(c', r') = (c, r)$ .

Es decir,  $(0, 0) = \phi(c, r) = \phi\mu(c', r') = \mu'(c', r')$ . Como  $\mu'$  es inyectiva se tiene que  $(c', r') = (0, 0)$  y entonces  $(c, r) = \mu(c', r') = (0, 0)$ .  $\square$

**Observación 33** *El lema anterior también se podría obtener directamente por ser  $X\text{Mod}_K$  una categoría semiabeliana, como se verá en un capítulo posterior.*

**Lema 34** *Si  $(C, R, \nu)$  es un  $R$ -módulo cruzado, entonces  $C/C^2$  y  $\ker \nu$  tienen estructura de  $R/I$ -módulos (y por tanto de  $R$ -módulos), donde  $I$  denota  $\nu(C)$ .*

**Demostración:**

Primero veamos que  $I$  actúa de forma trivial sobre  $C/C^2$  y sobre  $\ker \nu$ :

- Si  $a \in \ker \nu$ ,  $\nu(c)a = ca = c\nu(a) = c0 = 0$ .
- Si  $c' + C \in C/C^2$ ,  $\nu(c)(c' + C^2) = \nu(c)c' + C^2 = cc' + C^2 = 0$ .

Entonces podemos definir aplicaciones:

$$\begin{aligned} R/\nu C \times \ker \nu &\rightarrow \ker \nu \\ (r + \nu c, a) &\longmapsto ra \\ \\ R/\nu C \times C/C^2 &\rightarrow C/C^2 \\ (r + \nu c, c + C^2) &\longmapsto rc + C^2 \end{aligned}$$

que trivialmente inducen en los grupos abelianos  $C/C^2$  y  $\ker \nu$  estructura de  $R/I$ -módulos.  $\square$

**Observación 35**  $I/I^2$  es también un  $R/I$ -módulo.

Relaciones funtoriales con otras categorías:

- $p : XMod_K \rightarrow K-Alg$ , que lleva  $(C, R, \nu)$  en el álgebra base  $R$ .
- Varios funtores de olvido de  $XMod_K$  a la categoría de morfismos de  $K$ -álgebras, o a la categoría de morfismos de  $K$ -módulos ( $C \xrightarrow{\nu} R$  donde  $\nu$  es una aplicación de  $R$ -módulos).
- El funtor núcleo  $T : XMod_K \rightarrow Mod_K$ , de módulos cruzados a la categoría de módulos sobre  $K$ , dado por  $T(C, R, \nu) = \ker \nu$ .
- El funtor  $q : XMod_K \rightarrow K-Alg$ .  
 $(C, R, \nu) \longmapsto R/\nu C$

**Proposición 36** La siguiente sucesión de  $R/I$ -módulos es exacta:

$$\ker \nu \longrightarrow C/C^2 \xrightarrow{\bar{\nu}} I/I^2 \longrightarrow 0$$

**Demostración:**

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker \nu & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\nu} & I \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & C/C^2 & \xrightarrow{\bar{\nu}} & I/I^2 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Como  $\nu$  es sobreyectiva,  $\bar{\nu}$  también lo es, y la imagen del morfismo  $\ker \nu \rightarrow C/C^2$  está contenida en  $\ker \bar{\nu}$ . Queda por comprobar la inclusión inversa.

Sea  $c + C^2 \in \ker \bar{\nu}$ . Tenemos  $I^2 = \bar{\nu}(c + C^2) = \nu(c) + I^2$ , es decir,  $\nu(c) \in I^2$ . Por tanto existen  $b, b' \in C$  tales que  $\nu(c) = \nu(b)\nu(b')$  y entonces  $k = (c - bb')$  es la preimagen de  $c + C^2$  ya que  $k \in \ker \nu$  y  $c + C^2 = k + C^2$ .  $\square$

## 1.2. Definiciones equivalentes de módulo cruzado

**Definición 37** Una  $\text{cat}^n$ -álgebra [6] es un álgebra  $A$  junto con  $2n$  endomorfismos  $s_i, t_i : A \rightarrow A$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tales que:

- $t_i s_i = s_i, s_i t_i = t_i$ .
- $s_i s_j = s_j s_i, t_i t_j = t_j t_i, s_i t_j = t_j s_i$  si  $i \neq j$ .
- Si  $a \in \ker s_i$  y  $a' \in \ker t_i$  entonces  $aa' = 0$ .

Un morfismo de  $\text{cat}^n$ -álgebras  $A \rightarrow A'$  es un homomorfismo de álgebras que conserva las  $s_i$  y  $t_i$ .

**Definición 38** Un  $n$ -cubo cruzado de álgebras conmutativas es una familia de  $K$ -álgebras conmutativas  $M_I, I \subseteq \langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$  junto con homomorfismos  $\mu_i : M_I \rightarrow M_{I-\{i\}}, i \in \langle n \rangle$  y funciones para  $I, J \subseteq \langle n \rangle, h : M_I \times M_J \rightarrow M_{I \cup J}$  tales que para  $k \in K, a, a' \in M_I, b, b' \in M_J, c \in M_L, i, j \in \langle n \rangle$  y  $M_I \subseteq M_J$  se verifica:

- $\mu_i a = a$  si  $i \notin I$ .
- $\mu_i \mu_j a = \mu_j \mu_i a$ .
- $\mu_i h(a, b) = h(\mu_i a, \mu_i b)$ .
- $h(a, b) = h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b)$  si  $i \in A \cap B$ .
- $h(a, a') = aa'$ .
- $h(a, b) = h(b, a)$ .
- $h(a + a', b) = h(a, b) + h(a', b)$ .
- $h(a, b + b') = h(a, b) + h(a, b')$ .
- $k \cdot h(a, b) = h(k \cdot a, b) = h(a, k \cdot b)$ .
- $h(h(a, b), c) = h(a, h(b, c)) = h(b, h(a, c))$ .

Un morfismo de  $n$ -cubos cruzados es una familia de homomorfismos de álgebras conmutativas, para  $I \subseteq \langle n \rangle$   $f_I : M_I \rightarrow M'_I$ , que conmutan con las  $\mu_i, \mu'_i$  y  $h, h'$ . Se tiene entonces una categoría de  $n$ -cubos cruzados, denotada por  $\text{Crs}^n$ .

**Definición 39** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con cuadrados cartesianos. Una categoría interna en  $\mathcal{C}$  es una séxtupla  $(A, O, s, t, e, m)$  donde  $A$  y  $O$  son objetos de  $\mathcal{C}$  y  $s, t, m, e$  son morfismos,  $s, t : A \rightarrow O, e : O \rightarrow A, m : A \times_O A \rightarrow A$  ( $A \times_O A$  denota el objeto que aparece al construir el cuadrado cartesiano relativo a los morfismos  $t$  y  $s$ ), satisfaciendo que los siguientes diagramas sean conmutativos:

( $A$  proporciona los morfismos de la categoría interna,  $O$  los objetos,  $m$  la composición,  $e$  la flecha identidad para cada morfismo y  $s$  y  $t$  los objetos dominio y rango para cada morfismo.)

$$\begin{array}{ccc} A \times_O A \times_O A & \xrightarrow{m \times id_A} & A \times_O A \\ id_A \times m \downarrow & & \downarrow m \\ A \times_O A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

(asociatividad de la composición)

$$\begin{array}{ccccc} O \times_O A & \xrightarrow{e \times id_A} & A \times A & \xrightarrow{id_A \times e} & A \times_O O \\ & \searrow p & \downarrow m & \swarrow q & \\ & & A & & \end{array}$$

(aplicación identidad)

donde  $p$  y  $q$  son las proyecciones obvias  $p(x, f) = f, q(f, y) = f$ . Además  $e$  debe ser una sección de  $s$  y  $t$ , es decir,  $se = te = id_O$  [23].

**Teorema 40** Los siguientes conceptos son equivalentes:

- i) Módulo cruzado.
- ii)  $cat^1$ -álgebra.

iii) 1-cubo.

iv) Categoría interna en la categoría de  $K$ -álgebras conmutativas.

**Demostración:**

A continuación se muestran las construcciones que dan lugar a equivalencias de categorías.

$i) \Rightarrow ii)$

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Tenemos el siguiente objeto simplicial truncado:

$C \times R \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{matrix} R$  donde las degeneraciones son  $d_0(c, r) = r$ ,  $d_1(c, r) = r + \nu(c)$  y la cara es  $s(r) = (0, r)$ .

Si definimos  $s_1, t_1 : C \times R \rightarrow C \times R$ ,  $s_1 = s \circ d_0$  y  $t_1 = s \circ d_1$  tenemos un  $\text{cat}^1$ -álgebra:

- $t_1 s_1 = s d_1 s d_0 = s d_0 = s_1$  (usando las identidades simpliciales).
- $s_1 t_1 = s d_0 s d_1 = s d_1 = t_1$ .
- Sean  $(c, r) \in \ker s_1$ ,  $(c', r') \in \ker t_1$  :
  - $(c, r) \in \ker s_1 \Rightarrow s_1(c, r) = (0, r) = 0 \Rightarrow r = 0$ .
  - $(c', r') \in \ker t_1 \Rightarrow r' + \nu(c') = 0 \Rightarrow r' = -\nu(c')$ .
  - $(c, r)(c', r') = (cc' + rc' + r'c, rr') = (cc' - \nu(c')c, 0) = (cc' - c'c, 0) = 0$ .

$ii) \Rightarrow i)$

Tenemos  $A \begin{matrix} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{t_1} \end{matrix} A$  un  $\text{cat}^1$ -álgebra. Definimos  $C = \ker t_1$  y  $R = \text{Im } s_1$ .  $(C, R, s_1)$  es un módulo cruzado:

- $R$  actúa sobre  $C$  definiendo la acción de forma natural: si  $r \in \text{Im } s_1$  y  $c \in \ker t_1$ ,  $r \cdot c = s_1(r') \cdot c = s_1(r')c \in \ker t_1$ .
- $s_1(rc) = r s_1(c)$  ya que se verifica  $s_1(rc) = s_1(r) s_1(c) = s_1(s_1(r')) s_1(c) = s_1(t_1(s_1(r')) s_1(c)) = t_1(s_1(r')) s_1(c) = s_1(r') s_1(c) = r s_1(c)$ .
- $s_1(c)c' = cc' \Leftrightarrow (s_1(c) - c)c' = 0$ . Como  $c' \in \ker t_1$ , por la última condición de  $\text{cat}^n$ -grupo, basta ver que  $s_1(c) - c \in \ker s_1$  :

$$s_1(s_1(c) - c) = s_1s_1(c) - s_1(c) = s_1(c) - s_1(c) = 0.$$

*i*)  $\Rightarrow$  *iii*)

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Definimos  $M_{\{1\}} = C$  y  $M_\emptyset = R$ , que junto con el morfismo del módulo cruzado verifican trivialmente que constituyen un 1-cubo.

*iii*)  $\Rightarrow$  *i*)

Dado un 1-cubo tenemos el siguiente módulo cruzado:  $(M_{\{1\}}, M_\emptyset, \mu_1)$ . Vamos a comprobarlo:

- $M_\emptyset$  actúa sobre  $M_{\{1\}}$  mediante  $h$ .
- $\mu_1(ra) = \mu_1(h(r, a)) = h(\mu_1(r), \mu_1(a)) = h(r, \mu_1(a)) = r\mu_1(a)$ .
- $\mu_1(a)a' = h(\mu_1(a), a') = h(a, a') = aa$ .

*i*)  $\Rightarrow$  *iv*)

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Consideramos  $C \rtimes R$  y definimos las aplicaciones  $s, t : C \rtimes R \rightarrow R$  y  $e : R \rightarrow C \rtimes R$  mediante  $s(c, r) := r, t(c, r) := r + \nu(c)$  y  $e(r) := (0, r)$ . Se tiene que  $s, t$  y  $e$  son claramente homomorfismos:

- $s((c, r) + (c', r')) = s(c + c', r + r') = r + r' = s(c, r) + s(c', r')$ .
- $s((c, r)(c', r')) = s(r'c + rc' + cc', rr') = rr' = s(c, r)s(c', r')$ .
- $s(\lambda(c, r)) = s(\lambda c, \lambda r) = \lambda r = \lambda s(c, r)$ .
- $t((c, r) + (c', r')) = t(c + c', r + r') = r + r' + \nu(c + c') = r + \nu(c) + r' + \nu(c') = t(c, r) + t(c', r')$ .
- $t((c, r)(c', r')) = t(r'c + rc' + cc', rr') = rr' + \nu(r'c + rc' + cc') = rr' + r\nu(c') + r'\nu(c) + \nu(c)\nu(c') = (r + \nu(c))(r' + \nu(c')) = t(c, r)t(c', r')$ .
- $t(\lambda(c, r)) = t(\lambda c, \lambda r) = \lambda r + \nu(\lambda c) = \lambda r + \lambda\nu(c) = \lambda(r + \nu(c)) = \lambda t(c, r)$ .
- $e(r + r') = (0, r + r') = (0, r) + (0, r') = e(r) + e(r')$ .
- $e(rr') = (0, rr') = (0, r)(0, r') = e(r)e(r')$ .
- $e(\lambda r) = (0, \lambda r) = \lambda(0, r) = \lambda e(r)$ .

Además  $e$  es una sección de  $s$  y de  $t$  :  $se(r) = s(0, r) = r$ ;  $te(r) = t(0, r) = r + \nu(0) = r$ .

Sólo falta definir una composición. Para ello debemos tener en cuenta que los objetos vienen dados por los elementos de  $R$  y los morfismos por los elementos de  $C \rtimes R$ . Además,  $s$  y  $t$  proporcionan los objetos dominio y rango respectivamente. Por tanto, se puede definir la composición de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} r & \xrightarrow{(c,r)} & r + \nu(c) \\ & \searrow & \downarrow (c', r + \nu(c)) \\ & (c+c', r) & r + \nu(c') + \nu(c) \end{array}$$

es decir,  $(c', r + \nu(c)) \circ (c, r) := (c + c', r)$ . Esta composición tiene sentido ya que  $s(c', r + \nu(c)) = r + \nu(c) = t(c, r)$  y, además, como  $\nu$  es un homomorfismo se tiene que  $\nu(c + c') = \nu(c) + \nu(c')$ . Comprobar la asociatividad y que  $\circ$  es un homomorfismo es inmediato.

$iv) \Rightarrow i)$

Sea  $(A \xrightarrow{s} O, O \xrightarrow{e} A, \circ)$  una categoría interna. Se puede definir una acción de  $O$  sobre  $\ker s$  mediante  $o \cdot k = e(o)k$  para  $o \in O, k \in \ker s$ .

Además, cada  $a \in A$  se puede escribir  $a = k + e(o)$ , donde  $k = a - (es(a)) \in \ker s, o = s(a)$ . Hay una aplicación  $\phi : A \rightarrow \ker s \times O, \phi(k + e(o)) = (k, o)$ .

Esta aplicación es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi(aa') &= \phi((k + e(o))(k' + e(o'))) = \phi(ke(o') + k'e(o) + kk' + e(o)e(o')) = \\ &= \phi(ko' + k'o + kk' + e(oo')) = (ko' + k'o + kk', oo') = (k, o)(k', o') = \phi(a)\phi(a'). \end{aligned}$$

Además,  $\phi$  tiene una inversa,  $\phi^{-1} : \ker s \times O \rightarrow A, \phi^{-1}(k, o) := k + e(o)$ , que también es un homomorfismo.

Por tanto  $\phi$  es un isomorfismo y  $A \cong \ker s \times O$ .

Definimos  $\nu : \ker s \rightarrow O$  como la restricción de  $t$  a  $\ker s$ , es decir,  $\nu = t|_{\ker s}$ .  $\nu$  es un homomorfismo ya que  $t$  lo es.

Tenemos que  $\nu(ok) = t(ok) = t(e(o)k) = t(e(o))t(k) = ot(k) = o\nu(k)$ .

Solo falta comprobar la identidad de Peiffer para tener un módulo cruzado  $(\ker s, O, \nu)$ . Sabemos que  $((k', \nu(k) + o) \cdot (l', \nu(l) + p)) \circ ((k, o) \cdot (l, p)) = ((k', \nu(k) + o) \circ (k, o)) \cdot ((l', \nu(l) + p) \circ (l, p))$ .

Desarrollando ambos términos tenemos :

$$\text{LD: } (k' + k, o) \cdot (l' + l, p) = ((k' + k)(l' + l) + p(k' + k) + o(l' + l), op) = (k'l' + k'l + kl' + kl + pk' + pk + ol' + ol, op).$$

$$\begin{aligned} \text{LI: } & (k'l' + (\nu(l) + p)k' + (\nu(k) + o)l', (\nu(k) + o)(\nu(l) + p)) \circ (kl + pk + ol, op) = \\ & (k'l' + (\nu(l) + p)k' + (\nu(k) + o)l', (\nu(k)\nu(l) + \nu(k)p + o\nu(l) + op)) \circ (kl + pk + ol, op) = \\ & (k'l' + (\nu(l) + p)k' + (\nu(k) + o)l' + kl + pk + ol, op) = (k'l' + \nu(l)k' + pk' + \\ & \nu(k)l' + ol' + kl + pk + ol, op). \end{aligned}$$

Así tenemos la igualdad  $k'l + kl' = \nu(l)k' + \nu(k)l'$  y tomando  $k = 0$  se tiene la identidad de Peiffer:  $k'l = \nu(l)k'$ .  $\square$

### 1.3. Tripleabilidad

En una categoría  $\mathcal{C}$  un triple es una terna  $T = (T, \eta, \mu)$  formada por un endofunctor  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  y dos transformaciones naturales, la unidad  $\eta : id_{\mathcal{C}} \rightarrow T$  y la multiplicación  $\mu : TT \rightarrow T$ , satisfaciendo las siguientes igualdades:

- $\mu(\eta T) = \mu(T\eta) = id_T$ .
- $\mu(\mu T) = \mu(T\mu)$ .

Un cotriple en  $\mathcal{C}$ ,  $G = (G, \varepsilon, \mu)$ , es un triple en  $\mathcal{C}^{op}$ .

Además, si tenemos un par de funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}, U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  tales que  $F$  es adjunto por la izquierda de  $U$ , entonces se tiene un triple  $T = (UF, \eta, U\varepsilon F)$  en  $\mathcal{C}$  y un cotriple  $G = (FU, \varepsilon, F\eta U)$  en  $\mathcal{B}$ , donde  $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow UF, \varepsilon : FU \Rightarrow id_{\mathcal{B}}$  son la unidad y counidad de adjunción.

Hilton conjeturó que todo triple proviene de una adjunción, y esto fue probado casi simultáneamente por Eilenberg y Moore y por Kleisli. Dado un triple  $T = (T, \eta, \mu)$  Eilenberg y Moore construyeron la categoría de  $T$ -álgebras  $\mathcal{C}^T$ . Una  $T$ -álgebra es un par  $(A, a)$  donde  $A$  es un objeto de  $\mathcal{C}$  y  $a : T(A) \rightarrow A$  es una flecha verificando que  $a\eta_A = id_A$  y  $aT(a) = a\mu_A$ .

Se dice que  $A$  tiene estructura de  $T$ -álgebra mediante la aplicación  $a$ . Si  $A$  y  $A'$  tiene estructura de  $T$ -álgebras dadas por  $a$  y  $a'$  entonces, una flecha  $f : A \rightarrow A'$  en  $\mathcal{C}$  se dice que es un morfismo de  $T$ -álgebras si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \\ \downarrow a & & \downarrow a' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

La categoría  $\mathcal{C}^T$  de  $T$ -álgebras tiene a las  $T$ -álgebras como objetos y a los morfismos de  $T$ -álgebras como flechas.

Definimos  $U^T : \mathcal{C}^T \rightarrow \mathcal{C}$  por  $U^T(A, a) = A, U^T f = f$  y  $F^T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^T$  por  $F^T A = (TA, \mu A), F^T f = Tf$  donde  $\mu = U\varepsilon F$ . Esos dos funtores son también adjuntos.

La categoría  $\mathcal{C}^T$  es final entre todas las posibles adjunciones cuyo triple asociado sea  $T$ . Así, el par de funtores  $F^T, U^T$  es universal en el sentido de que, si tenemos cualquier otro par de funtores adjuntos  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}, U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  tales que el triple que inducen es también  $T$ , entonces existe un único functor  $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}^T$  tal que  $U^T \circ \phi = U$  y  $\phi \circ F = F^T$ . El functor  $\phi$  se llama functor de comparación de Eilenberg-Moore.

Un functor  $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  se dice que es tripleable cuando tiene un adjunto por la izquierda para el cual el correspondiente functor de comparación de Eilenberg-Moore es una equivalencia de categorías. Si  $U$  es functor “*natural*” entre  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  también se dice que  $\mathcal{B}$  es tripleable sobre  $\mathcal{C}$ . Lo que queremos demostrar es que  $X\text{Mod}_K$  es tripleable sobre  $\text{Set}$ .

La categoría que construye Kleisli [40], que se denota por  $\mathcal{K}(T)$  o  $\mathcal{C}_T$ , tiene como objetos los mismos que  $\mathcal{C}$ . Para las flechas definimos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A, A') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, TA')$ . Si tenemos  $f : A \rightarrow TA' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A, A')$  y  $g : A' \rightarrow TA'' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A', A'')$ , entonces  $g \circ f$  es la composición:

$$A \xrightarrow{f} TA' \xrightarrow{Tg} T^2 A'' \xrightarrow{\mu A''} TA''$$

Definimos  $U_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}$  por  $U_T(A) = T(A)$  y si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(A, A')$ , entonces  $U_T f$  es la composición:

$$TA \xrightarrow{Tf} T^2 A' \xrightarrow{\mu A'} TA'$$

Definimos  $F_T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_T$  por  $F_T(A) = A$  y si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ , entonces  $F_T f$  es la composición:

$$A \xrightarrow{\eta A} TA' \xrightarrow{Tf'} TA'$$

o lo que es lo mismo:

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{\eta A'} TA'$$

Estos dos funtores son adjuntos y el triple que inducen es  $T$ . Además, la categoría  $\mathcal{C}_T$  es inicial entre aquellas adjunciones cuyo triple asociado es  $T$ . Se verifica que si tenemos un par de funtores adjuntos  $U$  y  $F$  que inducen un triple  $T = (UF, \eta, U\varepsilon F)$ , entonces existe un único funtor  $\psi : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $U \circ \psi = U_T$  y  $\psi \circ F_T = F$ ; dicho funtor se llama funtor de comparación de Kleisli.

$\mathcal{C}_T$  se encaja en  $\mathcal{C}^T$ . De hecho  $\mathcal{C}_T$  es equivalente a una subcategoría completa de  $\mathcal{C}^T$  generada por las álgebras libres,  $\mathcal{F}_T$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_T & \longrightarrow & \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{C}^T \\ A \vdash & \longrightarrow & (T(A), \mu_A) \\ \downarrow f & & \downarrow \mu_{A'} \circ T(f) \\ A' \vdash & \longrightarrow & (T(A'), \mu_{A'}) \end{array}$$

**Definición 41** Un par  $(p, q)$  se dice que es una relación de congruencia o par-núcleo si existe un morfismo  $f$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{p} & \bullet \\ \downarrow q & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \end{array}$$

es un cuadrado cartesiano.

**Definición 42** Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor y  $B$  un objeto de  $\mathcal{B}$ . Una reflexión de  $B$  a lo largo de  $F$  es un par  $(R_B, \eta_B)$  tal que:

- $R_B$  es un objeto de  $\mathcal{A}$  y  $\eta_B : B \rightarrow F(R_B)$  es un morfismo de  $\mathcal{B}$ .
- Si  $R'_B$  es otro objeto de  $\mathcal{A}$  y  $b : B \rightarrow F(R'_B)$  es un morfismo de  $\mathcal{B}$ , entonces existe un único morfismo  $a : R_B \rightarrow R'_B$  y  $a' : R'_B \rightarrow R_B$  tal que  $F(a) \circ \eta_B = b$ .

**Teorema 43** Consideramos dos funtores  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .  $G$  es adjunto por la izquierda de  $F$  si, y solo si, existe una transformación natural  $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ G$  tal que para cada  $B \in \mathcal{B}$ ,  $(R_B, \eta_B)$  es una reflexión de  $B$  a lo largo de  $F$  [10].

**Teorema 44** (Linton) [9]

Un funtor  $U : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$  es tripleable si, y solo si,  $U$  tiene un adjunto por la izquierda y se satisfacen las tres condiciones siguientes:

a)  $\mathcal{D}$  posee pares-núcleo y coigualadores.

b)  $p : Y \rightarrow Z$  morfismo en  $\mathcal{D}$  es un coigualador  $\Leftrightarrow Up : UY \rightarrow UZ$  es un coigualador.

c)  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y$  es un par-núcleo  $\Leftrightarrow UX \begin{array}{c} \xrightarrow{Us} \\ \xrightarrow{Ut} \end{array} UY$  es un par-núcleo, donde  $s$  y  $t$  denotan morfismos en  $\mathcal{D}$ .

Si tenemos un álgebra  $H$ , consideramos su aumentación  $H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ . En la categoría de álgebras conmutativas con unidad,  $\text{Conm}_1$ , el coproducto es el producto tensor,  $H * I = H \otimes I$ . Para ver quien es el coproducto en la categoría de álgebras conmutativas sin unidad,  $\text{Conm}$ , utilizaremos una adjunción entre esta categoría y la de álgebras conmutativas con unidad aumentadas,  $\text{Conm}_1\text{au}$  :

$$\begin{aligned} F : \text{Conm} &\rightarrow \text{Conm}_1\text{au} \\ H &\rightsquigarrow H \oplus \mathbb{Z} \\ G : \text{Conm}_1\text{au} &\rightarrow \text{Conm} \\ (H, \varepsilon) &\rightsquigarrow \ker \varepsilon \end{aligned}$$

$$G \circ F(H) = \ker(H \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) = H.$$

$$G \circ F(H * I) = G((H \oplus \mathbb{Z}) * (I \oplus \mathbb{Z})) = G((H \oplus \mathbb{Z}) \otimes (I \oplus \mathbb{Z})) = G((H \otimes \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes I) \oplus (H \otimes I) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})) = G(H \oplus I \oplus (H \otimes I) \oplus \mathbb{Z}) = H \oplus I \oplus (H \otimes I).$$

Vamos a ver como es el producto en  $H \oplus I \oplus (H \otimes I)$ . Tomamos  $(a, b, a' \otimes b'), (c, d, c' \otimes d') \in H \oplus I \oplus (H \otimes I)$  :

$$(a, b, a' \otimes b')(c, d, c' \otimes d') \equiv (a, b, a' \otimes b', 0)(c, d, c' \otimes d', 0) = ((a, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (b, 0) + (a', 0) \otimes (b', 0))(c, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (d, 0) + (c', 0) \otimes (d', 0));$$

vamos a descomponer este producto en nueve sumandos:

$$i) ((a, 0) \otimes (0, 1))((c, 0) \otimes (0, 1)) = (ac, 0) \otimes (0, 1) = (ac \otimes 1, 0, 0, 0).$$

$$ii) ((a, 0) \otimes (0, 1))((0, 1) \otimes (d, 0)) = (a, 0) \otimes (d, 0) = (0, 0, a \otimes d, 0).$$

$$iii) ((a, 0) \otimes (0, 1))((c', 0) \otimes (d', 0)) = (ac', 0) \otimes (d', 0) = (0, 0, ac' \otimes d', 0).$$

$$iv) ((0, 1) \otimes (b, 0))((c, 0) \otimes (0, 1)) = (c, 0) \otimes (b, 0) = (0, 0, c \otimes b, 0).$$

$$v) ((0, 1) \otimes (b, 0))((0, 1) \otimes (d, 0)) = (0, 1) \otimes (bd, 0) = (0, 1 \otimes bd, 0, 0).$$

$$vi) ((0, 1) \otimes (b, 0))((c', 0) \otimes (d', 0)) = (c', 0) \otimes (bd', 0) = (0, 0, c' \otimes bd', 0).$$

$$vii) ((a', 0) \otimes (b', 0))((c, 0) \otimes (0, 1)) = (a'c, 0) \otimes (b', 0) = (0, 0, a'c \otimes b', 0).$$

$$viii) ((a', 0) \otimes (b', 0))((0, 1) \otimes (d, 0)) = (a', 0) \otimes (b'd, 0) = (0, 0, a' \otimes b'd, 0).$$

$$ix) ((a', 0) \otimes (b', 0))((c', 0) \otimes (d', 0)) = (a'c', 0) \otimes (b'd', 0) = (0, 0, a'c' \otimes b'd', 0).$$

Por tanto,  $(a, b, a' \otimes b')(c, d, c' \otimes d') = (ac, 0, 0) + (0, 0, a \otimes d) + (0, 0, ac' \otimes d') + (0, 0, c \otimes b) + (0, bd, 0) + (0, 0, c' \otimes bd') + (0, 0, a'c \otimes b') + (0, 0, a' \otimes b'd) + (0, 0, a'c' \otimes b'd') = (ac, bd, a \otimes d + ac' \otimes d' + c \otimes b + c' \otimes bd' + a'c \otimes b' + a' \otimes b'd + a'c' \otimes b'd').$

Consideremos  $H_1 \subseteq H * H = H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ , formado por los elementos de la forma  $(h, 0, 0)$ .  $H_1$  no es un ideal de  $H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ . Si denotamos por  $\overline{H}$  el menor ideal que contiene a  $H_1$ , se puede comprobar que éste es el núcleo de la aplicación  $\pi^2 : H \oplus H \oplus (H \otimes H) \rightarrow H$ ,  $\pi^2(a, b, c \otimes d) = b$ :

“ $\subseteq$ ”

Como  $\ker \pi^2$  es un ideal de  $H \oplus H \oplus (H \otimes H)$  basta comprobar que  $H_1 \subseteq \ker \pi^2$ , lo cual es trivial ya que  $\pi^2(h, 0, 0) = 0$ .

“ $\supseteq$ ”

Sea  $(a, b, c \otimes d) \in \ker \pi^2 \Rightarrow b = 0$ .  $(a, 0, c \otimes d) \in \overline{H}$  ya que  $(a, 0, c \otimes d) = (a, 0, 0) + (0, 0, c \otimes d)$ .

Además, como  $\overline{H}$  es un ideal de  $H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ , si consideramos la inclusión  $in : \overline{H} \hookrightarrow H \oplus H \oplus (H \otimes H)$  tenemos que  $(\overline{H}, H \oplus H \oplus (H \otimes H), in)$  es un módulo cruzado.

Sean  $u_1 : H \hookrightarrow H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ ,  $u_2 : H \hookrightarrow H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ ,  $u_3 : H \otimes H \hookrightarrow H \oplus H \oplus (H \otimes H)$  las inyecciones,  $u_1(h) = (h, 0, 0)$ ,  $u_2(h) = (0, h, 0)$ ,  $u_3(h \otimes h') = (0, 0, h \otimes h')$ . Como  $\pi^2 \circ u_1 = 0$ ,  $u_1$  se factoriza por  $\overline{H}$ ; es decir, existe  $u : H \rightarrow \overline{H}$  tal que  $in \circ u = u_1$ . Como  $u_1$  es inyectiva,  $u$  también lo es.

**Teorema 45** *El functor de olvido  $U : XMod_K \rightarrow K-Alg$ ,  $U(C, R, \nu) = C \times R$ , tiene un adjunto por la izquierda,  $F : K-Alg \rightarrow XMod_K$ ,  $F(H) = (\overline{H}, H \oplus H \oplus (H \otimes H), in)$ .*

**Demostración:**

Sea  $H$  una  $K$ -álgebra. Consideramos el morfismo de módulos cruzados  $(u, u_2) : H \rightarrow \overline{H} \times (H \oplus H \oplus (H \otimes H))$ .

Vamos a ver que  $(H, (u, u_2))$  es una reflexión de  $H$  a lo largo de  $F$ ; es decir, tenemos que comprobar que dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y dos homomorfismos  $i : H \rightarrow C$ ,  $j : H \rightarrow R$ , que inducen  $(i, j) : H \rightarrow C \times R = U(C, R, \nu)$ , entonces, existe un único morfismo de módulos cruzados  $(f, g) : (\overline{H}, (H \oplus H \oplus (H \otimes H), in)) \rightarrow (C, R, \nu)$  tal que  $U(f, g) \circ (u, u_2) = (f \times g) \circ (u, u_2) = (i, j)$ .

Primero vamos a definir  $g$ . Tenemos los morfismos  $\nu \circ i : H \rightarrow R$ ,  $j : H \rightarrow R$ ,  $(\nu \circ i) \otimes j : H \otimes H \rightarrow R$ .

Por tanto, existe una aplicación  $g = \nu \circ i + j + (\nu \circ i) \otimes j : H \oplus H \oplus (H \otimes H) \rightarrow R$  tal que  $g \circ u_1 = (\nu \circ i)$ ,  $g \circ u_2 = j$ ,  $g \circ u_3 = (\nu \circ i) \otimes j$ .

$$g(a, b, a' \otimes b') = \nu \circ i(a) + j(b) + (\nu \circ i)(a')j(b').$$

Ahora definiremos  $f$ . Consideramos los morfismos:

$$\begin{aligned} H &\rightarrow C \times R \\ a &\rightsquigarrow (i(a), 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &\rightarrow C \times R \\ b &\rightsquigarrow (0, j(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H \otimes H &\rightarrow C \times R \\ a' \otimes b' &\rightsquigarrow (i(a'), 0)(0, j(b')) = (i(a')j(b'), 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces tenemos } \overline{f} : H \oplus H \oplus (H \otimes H) &\rightarrow C \times R \\ (a, b, a' \otimes b') &\rightsquigarrow (i(a) + i(a')j(b'), j(b)) \end{aligned}$$

que compuesto con las inyecciones conmuta con los tres morfismos anteriores.

Además, se verifica que  $\overline{f}(\overline{H}) \subseteq C$  : sea  $(a, b, a' \otimes b') \in \overline{H} \Rightarrow b = 0$ ,  $\overline{f}(a, 0, a' \otimes b') = (i(a) + i(a')j(b'), j(0)) = (i(a) + i(a')j(b'), 0) \in C$ .

Definimos  $f = \overline{f}|_{\overline{H}}$ .

Vamos a comprobar que  $(f, g) : (\overline{H}, H \oplus H \oplus (H \otimes H), in) \rightarrow (C, R, \nu)$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc}
\overline{H} & \xrightarrow{in} & H \oplus H \oplus (H \otimes H) \\
f \downarrow & & \downarrow g \\
C & \xrightarrow{\nu} & R
\end{array}$$

•  $\overline{H}$  está generado por elementos de la forma  $wh$ , donde  $w \in H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ ,  $h \in H$ .

$$\nu(f(wh)) = \nu(f((a, b, a' \otimes b')(h, 0, 0)) = \nu(f(ha, 0, ha' \otimes b' + h \otimes b)) = \nu(f(ha, 0, ha' \otimes b')) + \nu(f(0, 0, h \otimes b)) = \nu(i(ha) + i(ha')j(b')) + \nu(i(h)j(b)) = \nu(i(ha)) + \nu(i(ha'))j(b') + \nu(i(h))j(b).$$

$$g(in(wh)) = g((ha, 0, ha' \otimes b' + h \otimes b)) = g(ha, 0, ha' \otimes b') + g(0, 0, h \otimes b) = \nu \circ i(ha) + j(0) + (\nu \circ i)(ha')j(b') + \nu \circ i(0) + j(0) + (\nu \circ i)(h)j(b) = \nu(i(ha)) + \nu(i(ha'))j(b') + \nu(i(h))j(b).$$

• Sean  $(a, b, a' \otimes b') \in H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ ,  $(c, 0, c' \otimes d') \in \overline{H}$ .

$$f((a, b, a' \otimes b')(c, 0, c' \otimes d')) = f(ac, 0, ac' \otimes d' + c \otimes b + c' \otimes bd' + a'c \otimes b' + a'c' \otimes b'd') = i(ac) + i(ac')j(d') + i(c)j(b) + i(c')j(bd') + i(a'c)j(b') + i(a'c')j(b'd').$$

$$g(a, b, a' \otimes b')f(c, 0, c' \otimes d') = (\nu \circ i(a) + j(b) + (\nu \circ i)(a')j(b'))(i(c) + i(c')j(d')) = \nu(i(a))i(c) + \nu(i(a))i(c')j(d') + j(b)i(c) + j(b)i(c')j(d') + \nu(i(a'))j(b')i(c) + \nu(i(a'))j(b')i(c')j(d').$$

Aplicando la identidad de Peiffer esto es igual a:

$$i(a)i(c) + i(a)i(c')j(d') + j(b)i(c) + j(b)i(c')j(d') + i(a')i(c)j(b') + i(a')i(c')j(b')j(d') = i(ac) + i(ac')j(d') + i(c)j(b) + i(c')j(bd') + i(a'c)j(b') + i(a'c')j(b'd').$$

Veamos que  $(f \times g) \circ (u, u_2) = (i, j)$ :

$$(f \times g)((u, u_2)(h)) = (f \times g)(u(h), u_2(h)) = (f(u(h)), g(u_2(h))) = (f(h, 0, 0), j(h)) = (i(h), j(h)) = (i, j)(h).$$

Además, supongamos que tenemos otro morfismo de módulos cruzados  $(f', g') : (\overline{H}, (H \oplus H \oplus (H \otimes H), in)) \rightarrow (C, R, \nu)$  tal que  $U(f', g') \circ (u, u_2) = (f' \times g') \circ (u, u_2) = (i, j)$ . Entonces tendríamos que  $f' \circ u = i = f \circ u$ ; como  $u$  es inyectiva, y por tanto mónica,  $f' = f$ . Análogamente  $g' \circ u_2 = j = g \circ u_2 \Rightarrow g' = g$ .

□

**Teorema 46** *El funtor de olvido  $U : K-Alg \rightarrow Set$  tiene adjunto por la izquierda,  $F' : Set \rightarrow K-Alg$ ,  $F(S) = K^+[x_1, \dots, x_s]$ , parte graduada positiva del álgebra de polinomios sobre  $K$  [49].*

**Observación 47** *Por los dos teoremas anteriores el funtor de olvido  $U : XMod_K \rightarrow Set$  tiene como adjunto por la izquierda a  $H : Set \rightarrow K-Alg$ ,  $H(S) = (\overline{K^+[x_1, \dots, x_s]}, K^+[x_1, \dots, x_s] \oplus K^+[x_1, \dots, x_s] \oplus (K^+[x_1, \dots, x_s] \otimes K^+[x_1, \dots, x_s]), in)$ .*

**Teorema 48** *El funtor  $U : XMod_K \rightarrow Set$  es tripleable.*

**Demostración:**

Ya hemos visto que  $U$  tiene adjunto por la izquierda. Vamos a ver que cumple el resto de hipótesis del teorema de Linton:

a)  $XMod_K$  posee pares-núcleo: si tenemos un morfismo de módulos cruzados  $(\varphi, \psi) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  su par núcleo se construye de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} (C \times_{C'} C, R \times_{R'} R, \nu \times \nu) & \xrightarrow{(\pi_{C \times C}^2, \pi_{R \times R}^2)} & (C, R, \nu) \\ \downarrow (\pi_{C \times C}^1, \pi_{R \times R}^1) & & \downarrow (\varphi, \psi) \\ (C, R, \nu) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (C', R', \nu') \end{array}$$

donde  $C \times_{C'} C = \{(c_1, c_2) \in (C, C) / \varphi(c_1) = \varphi(c_2)\}$ ,  $R \times_{R'} R = \{(r_1, r_2) \in (R, R) / \psi(r_1) = \psi(r_2)\}$ .

$(C \times_{C'} C, R \times_{R'} R, \nu \times \nu)$  es un módulo cruzado:

- $(\nu \times \nu)((r, r')(c, c')) = (\nu \times \nu)(rc, r'c') = (\nu(rc), \nu(r'c')) = (r\nu(c), r'\nu(c')) = (r, r')(\nu(c), \nu(c')) = (r, r')((\nu \times \nu)(c, c'))$ .

- $((\nu \times \nu)(c, c'))(d, d') = (\nu(c), \nu(c'))(d, d') = (\nu(c)d, \nu(c')d') = (cd, c'd') = (c, c')(d, d')$ .

Falta ver que el diagrama definido es un cuadrado cartesiano; dicho diagrama es conmutativo:

$$(\varphi, \psi)(\pi_{C \times C}^2, \pi_{R \times R}^2)((c, c'), (d, d')) = (\varphi(c'), \psi(d')) = (\varphi(c), \psi(d)) = (\varphi, \psi)(c, d) = (\varphi, \psi)(\pi_{C \times C}^1, \pi_{R \times R}^1)((c, c'), (d, d')).$$

Ahora, dado  $(A, B, \gamma)$  un módulo cruzado y un par de aplicaciones  $(\alpha, \alpha') : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu'), (\beta, \beta') : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  tales que  $(\varphi, \psi) \circ (\alpha, \alpha') = (\varphi, \psi) \circ (\beta, \beta')$ , entonces, existen  $x : A \rightarrow C \times C$  e  $y : B \rightarrow R \times R$  tales que  $\pi_{C \times C}^1 \circ x = \alpha, \pi_{C \times C}^2 \circ x = \beta, \pi_{R \times R}^1 \circ y = \alpha', \pi_{R \times R}^2 \circ y = \beta'$ .

Vamos a ver que el rango de  $x$  está contenido en  $C \times_{C'} C$ : sea  $x(a) = (a_1, a_2); \varphi(a_1) = \varphi(\pi^1 x(a)) = \varphi(\alpha(a)) = \varphi(\beta(a)) = \varphi(\pi^2 x(a)) = \varphi(a_2)$ .

Análogamente el rango de  $y$  está contenido en  $R \times_{R'} R$ .

Lo único que queda por comprobar es que  $(x, y)$  es un morfismo de módulos cruzados.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ C \times_{C'} C & \xrightarrow{\nu \times \nu} & R \times_{R'} R \end{array}$$

• Tenemos que demostrar que  $y\gamma(a) = (\nu \times \nu)(x(a))$ . Basta ver que se tiene esta igualdad al componer con las dos proyecciones:

$$\pi^1(y\gamma(a)) = \alpha'\gamma(a) = \nu\alpha(a) = \nu(\pi^1 x(a)) = \pi^1(\nu \times \nu)(x(a)).$$

$$\pi^2(y\gamma(a)) = \beta'\gamma(a) = \nu\beta(a) = \nu(\pi^2 x(a)) = \pi^2(\nu \times \nu)(x(a)).$$

• Hay que ver que  $x((a, a')(b, b')) = y(b, b')x(a, a')$ :

$$\pi^1 x((a, a')(b, b')) = \alpha((a, a')(b, b')) = \alpha'(b, b')\alpha(a, a') = (\pi^1 y(b, b'))(\pi^1 x(a, a')) = \pi^1(y(b, b')x(a, a')).$$

$$\pi^2 x((a, a')(b, b')) = \beta((a, a')(b, b')) = \beta'(b, b')\alpha(a, a') = (\pi^2 y(b, b'))(\pi^2 x(a, a')) = \pi^2(y(b, b')x(a, a')).$$

Además,  $XMod_K$  tiene coigualadores:

Llamaremos congruencia de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  a un submódulo cruzado  $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \nu \times \nu)$  del producto  $(C, R, \nu) \times (C, R, \nu) = (C \times C, R \times R, \nu \times \nu)$  tal que  $\mathcal{G} \subseteq C \times C, \mathcal{H} \subseteq R \times R$  son relaciones de equivalencia. La intersección de congruencias es una congruencia, ya que la intersección de módulos cruzados

es un módulo cruzado, y la intersección de relaciones de equivalencia es una relación de equivalencia:

- $a\mathcal{G}a, a\mathcal{H}a \Rightarrow a\mathcal{G} \cap \mathcal{H}a$ .
- $a\mathcal{G} \cap \mathcal{H}b \Rightarrow a\mathcal{G}b, a\mathcal{H}b \Rightarrow b\mathcal{G}a, b\mathcal{H}a \Rightarrow b\mathcal{G} \cap \mathcal{H}a$ .
- $a\mathcal{G} \cap \mathcal{H}b, b\mathcal{G} \cap \mathcal{H}c \Rightarrow a\mathcal{G}b, b\mathcal{H}c, a\mathcal{G}b, b\mathcal{H}c \Rightarrow a\mathcal{G}c, a\mathcal{H}c \Rightarrow a\mathcal{G} \cap \mathcal{H}c$ .

Consideramos morfismos de módulos cruzados  $(f, f'), (g, g') : (C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu)$ . Estos, inducen el morfismo  $(f, f') \times (g, g') : (C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu) \times (C, R, \nu)$ ; si intersecamos todas las congruencias que contienen a la imagen (entre las que está  $(C \times C, R \times R, \nu \times \nu)$ ) obtenemos  $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \nu \times \nu)$ ; es decir,  $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \nu \times \nu)$  es la menor congruencia que contiene a la imagen de  $(f, f') \times (g, g')$ .

Tenemos los cocientes  $C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}$  y el homomorfismo inducido entre ellos  $\bar{\nu} : C/\mathcal{G} \rightarrow R/\mathcal{H}, \bar{\nu}([c]) = [\nu(c)]$ . Esta aplicación está bien definida trivialmente: si  $c\mathcal{G}c'$  tenemos que ver que  $\nu(c)\mathcal{H}\nu(c') : (c, c') \in \mathcal{G} \Rightarrow (\nu(c), \nu(c')) = (\nu \times \nu)(c, c') \in \mathcal{H} \Rightarrow \nu(c)\mathcal{H}\nu(c')$ . Entonces se tiene el módulo cruzado  $(C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}, \bar{\nu})$ , módulo cruzado cociente de  $(C, R, \nu)$  por  $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \nu \times \nu)$ .

Las proyecciones canónicas  $p^1 : C \rightarrow C/\mathcal{G}, p^2 : R \rightarrow R/\mathcal{H}$  definen un morfismo de módulos cruzados  $(p^1, p^2) : (C, R, \nu) \rightarrow (C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}, \bar{\nu})$ :

- $p^1\nu(c) = \nu(c) + \mathcal{H} = \bar{\nu}(c + \mathcal{G}) = \bar{\nu}p^2(c)$ .
- $p^1(rc) = rc + \mathcal{G} = (r + \mathcal{G})(c + \mathcal{H}) = p^2(r)p^1(c)$ .

Este es el coigualador de  $(f, f')$  y  $(g, g') : (p^1, p^2) \circ (f, f')(c, r) = (f(c) + \mathcal{G}, f(c') + \mathcal{H}) = (g(c) + \mathcal{G}, g(c') + \mathcal{H})$  ya que  $f(c)\mathcal{G}g(c)$  y  $g(c)\mathcal{H}f(c')$ . Por tanto,  $(p^1, p^2) \circ (f, f') = (p^1, p^2) \circ (g, g')$ .

Supongamos ahora que existe otro morfismo de módulos cruzados  $(\alpha, \beta) : (C, R, \nu) \rightarrow (C'', R'', \nu'')$  que iguala a  $(f, f')$  y  $(g, g')$ . Definimos la siguiente relación:

$$(a, a') \sim (b, b') \Leftrightarrow a - b \in \ker(\alpha), a' - b' \in \ker(\beta).$$

Esta es trivialmente una relación de equivalencia. Además, esta relación contiene a la imagen de  $(f, f') \times (g, g')$ :

Sean  $(x, x'), (y, y') \in (C, R, \nu)$  tales que  $(x, x') = (f, f')(m, m'), (y, y') = (g, g')(m, m')$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)((f, f')(m, m')) &= (\alpha, \beta)((g, g')(m, m')) \Rightarrow (\alpha, \beta)((f, f') - (g, g'))(m, m') \\ &= 0 \Rightarrow ((f, f') - (g, g'))(m, m') \in \ker(\alpha, \beta) \Rightarrow (f, f')(m, m') \sim (g, g')(m, m') \Rightarrow \\ &(x, x') \sim (y, y'). \end{aligned}$$

Por tanto la relación de equivalencia dada por  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  está contenida en la que acabamos de definir.

$$\begin{array}{ccc} (C, R, \nu) & \xrightarrow{(p^1, p^2)} & (C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}, \bar{\nu}) \\ (\alpha, \beta) \downarrow & \swarrow & \\ (C'', R'', \nu'') & & \end{array}$$

Definimos  $(\lambda, \gamma)([a], [b]) = (\alpha(a), \beta(b))$ . Esta aplicación está bien definida porque si tomamos otros representantes cualesquiera  $a\mathcal{G}a', b\mathcal{H}b' \Rightarrow a \sim a', b \sim b' \Rightarrow (\alpha(a), \beta(b)) = (\alpha(a'), \beta(b'))$ . Además, por construcción, esta es la única aplicación que hace conmutativo el diagrama.

Lo único que queda por comprobar es que  $(\lambda, \gamma)$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$\bullet \gamma\bar{\nu}(c+\mathcal{G}) = \gamma(\nu(c)+\mathcal{H}) = \gamma(p^2\nu(c)) = \beta(\nu(c)) = \nu''(\alpha(c)) = \nu''(\lambda p^1(c)) = \nu''\lambda(c+\mathcal{G}).$$

$$\bullet \lambda((r+\mathcal{H})(c+\mathcal{G})) = \lambda(rc+\mathcal{G}) = \lambda(p^1(rc)) = \alpha(rc) = \beta(r)\alpha(c) = \gamma(p^2(r))\lambda(p^1(c)) = \gamma(r+\mathcal{H})\lambda(c+\mathcal{G}).$$

b) En *Set* los coigualadores son las aplicaciones sobreyectivas; como en  $XMod_K$  un coigualador siempre es sobreyectivo, entonces es claro que  $U$  conserva coigualadores.

Sea  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  un morfismo de módulos cruzados tal que  $U(f, g) = f \times g$  es sobreyectiva. Entonces,  $f$  y  $g$  son epimorfismos. Tenemos el morfismo inducido:

$(\bar{f}, \bar{g}) : (C/C \times_{C'} C, R/R \times_{R'} R, \bar{\nu}) \rightarrow (C', R', \nu')$  definido por  $(\bar{f}, \bar{g})([c], [r]) = (f(c), g(r))$ . Sigue siendo un epimorfismo y trivialmente  $(\bar{f}, \bar{g})$  es inyectiva; por tanto es un monomorfismo. Es decir, que  $(\bar{f}, \bar{g})$  es un isomorfismo.

$(p^1, p^2) : (C, R, \nu) \rightarrow (C/C \times_{C'} C, R/R \times_{R'} R, \bar{\nu})$  es el coigualador de los morfismos  $(\pi_C^1, \pi_R^1), (\pi_C^2, \pi_R^2) : (C \times_{C'} C, R \times_{R'} R, \nu \times \nu) \rightarrow (C, R, \nu) :$

La comprobación de que los iguala es trivial. Supongamos que existe otro morfismo  $(\varphi, \psi) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  que los iguala; entonces, definimos  $(i, j) : (C \times_{C'} C, R \times_{R'} R, \nu \times \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  mediante  $i([c]) = \varphi(c), j([r]) = \psi(r)$ , que está bien definida ya que si  $c, c'$  son dos representantes de la misma clase  $i([c]) = \varphi(\pi_C^1(c, c')) = \varphi(\pi_C^2(c, c')) = i(c')$ .

Por construcción,  $(i, j)$  es el único morfismo que verifica que  $(i, j) \circ (p^1, p^2) = (\varphi, \psi)$ . Solo queda por comprobar que  $(i, j)$  es un morfismo de módulos cruzados, pero esto se tiene a partir de que  $(\varphi, \psi)$  lo es.

Además,  $(\bar{f}, \bar{g}) \circ (p^1, p^2) = (f, g)$  y por tanto  $(f, g)$  también es el coigualador de  $(\pi_C^1, \pi_R^1), (\pi_C^2, \pi_R^2)$ .

Con esto hemos demostrado no sólo que  $U$  refleja coigualadores, si no también que toda morfismo de módulos cruzados sobre yectivo es un coigualador.

c)  $U$  tiene adjunto por la izquierda  $\Rightarrow$  conserva cuadrados cartesianos  $\Rightarrow$  conserva pares-núcleo.

Vamos a ver que  $U$  refleja pares-núcleo. Supongamos que dos morfismos  $(f, g), (f', g') : (C'', R'', \nu'') \rightarrow (C, R, \nu)$  son un par núcleo en  $Set$ .

Esto significa que  $(f \times g, f' \times g') : C'' \times R'' \rightarrow (C \times R) \times (C \times R)$  es una aplicación inyectiva y su imagen es una relación de equivalencia en  $C \times R$ ; es decir,  $(f, f') : C'' \rightarrow C \times C$  y  $(g, g') : R'' \rightarrow R \times R$  son inyectivas y sus imágenes son relaciones de equivalencia en  $C$  y  $R$  respectivamente.

Denotamos  $\mathcal{G} = im(f, f'), \mathcal{H} = im(g, g')$ ; tenemos la congruencia  $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \nu \times \nu)$  y consideramos la aplicación cociente:

$$(p^1, p^2) : (C, R, \nu) \rightarrow (C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}, \nu).$$

Además, se tiene un isomorfismo de módulos cruzados:

$$((f, f'), (g, g')) : (C'', R'', \nu'') \rightarrow (C \times_{C/\mathcal{G}} C, R \times_{R/\mathcal{H}} R, \nu \times \nu).$$

Es inyectivo porque  $(f, f')$  y  $(g, g')$  lo son, y es sobre yectivo por la definición de  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ ;  $C \times_{C/\mathcal{G}} C = \{(c, c') \in C \times C / c\mathcal{G}c'\} = \{(c, c') \in C \times C / (c, c') \in Im(f, f')\}$ ,  $R \times_{R/\mathcal{H}} R = \{(r, r') \in R \times R / r\mathcal{H}r'\} = \{(r, r') \in R \times R / (r, r') \in Im(g, g')\}$ .

Como el siguiente cuadrado es cartesiano (debido a que  $C \times_{C/\mathcal{G}} C \equiv C/\mathcal{G} \times C/\mathcal{G}, R \times_{R/\mathcal{H}} R \equiv R/\mathcal{H} \times R/\mathcal{H}$ ):

$$\begin{array}{ccc} (C \times_{C/\mathcal{G}} C, R \times_{R/\mathcal{H}} R, \nu \times \nu) \xrightarrow{(f', g')} & & (C, R, \nu) \\ (f, g) \downarrow & & \downarrow (p^1, p^2) \\ (C, R, \nu) \xrightarrow{(p^1, p^2)} & & (C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}, \nu) \end{array}$$

---

$(f, g), (f', g') : (C'', R'', \nu'') \rightarrow (C, R, \nu)$  es el par-núcleo del morfismo  $(p^1, p^2) : (C, R, \nu) \rightarrow (C/\mathcal{G}, R/\mathcal{H}, \nu)$ .  $\square$

## 1.4. Propiedades categóricas

### 1.4.1. Categorías semiabelianas

Una categoría  $\mathcal{C}$  se dice que es abeliana si:

- $\mathcal{C}$  tiene productos finitos y objeto cero.
- Todo morfismo de  $\mathcal{C}$  se factoriza en un conúcleo seguido de un núcleo, es decir, tiene factorizaciones en epimorfismo normal-monomorfismo normal.

Estas dos condiciones implican que  $\mathcal{C}$  sea aditiva.

La noción de categoría abeliana refleja las propiedades algebraicas típicas de grupos abelianos y módulos. Como analogía a este concepto se intenta buscar una noción de categoría semiabeliana que refleje las propiedades de grupos, anillos y álgebras. Éste será el marco adecuado para un tratamiento categórico de la teoría del radical y conmutador, la teoría de homología de estructuras no abelianas y el desarrollo de teoremas de isomorfía y descomposición.

Con este finalidad surge el concepto de categoría Barr-exacta: una categoría  $\mathcal{C}$  se dice que es Barr-exacta o regular efectiva si verifica que:

- $\mathcal{C}$  tiene límites finitos.
- $\mathcal{C}$  tiene un sistema de factorización en epimorfismo regular-monomorfismo estable por cuadrados cartesianos.
- Todas las relaciones de equivalencia son efectivas.

Una relación de equivalencia en un objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  viene dada por un par de morfismos  $r, r' : R \rightarrow A$  para los cuales las aplicaciones  $Hom(X, r), Hom(X, r')$  son las proyecciones de una relación de equivalencia en el conjunto  $Hom(X, A)$  para todo objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Se dice que es efectiva si está inducida por un morfismo  $f : A \rightarrow B$ , es decir, si es el par núcleo de algún  $f$  [11].

**Proposición 49** Sea  $r, r' : R \rightarrow A$  una relación de equivalencia. Si hay una estructura en el cociente  $A/R$  tal que  $p : A \rightarrow A/R$  es un morfismo, entonces la relación de equivalencia es efectiva.

**Demostración:**

Como  $R = A \times_{A/R} A$ , si  $p$  es un morfismo, entonces la relación de equivalencia es un morfismo.  $\square$

Para una factorización en epimorfismo regular-monomorfismo  $f = me$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , el morfismo  $e$  es necesariamente el coigualador del par núcleo de  $f$ , siempre que este exista. Recíprocamente, si  $e$  es el coigualador del par núcleo de  $f$  y  $m$  el morfismo tal que  $f = me$ , entonces  $m$  es un monomorfismo si todos los cuadrados cartesianos de  $e$  son épicos, ya que el par núcleo de  $m$  debe ser trivial. Usando esto y el hecho de que los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \times B & \\ & \downarrow (1_A, g) \times 1_B & \\ A \times B & \xrightarrow{(1_A, f) \times 1_B} & A \times C \times B \end{array}$$

tienen límites isomorfos, las dos primeras condiciones se pueden reformular de la siguiente manera:

- $\mathcal{C}$  tiene productos finitos.
- $\mathcal{C}$  tiene cuadrados cartesianos de pares de monomorfismos rotos.
- $\mathcal{C}$  tiene coigualadores de pares núcleo.
- Los epimorfismos regulares son estables por cuadrados cartesianos.

Se verifica que las categorías Barr-exactas y aditivas son las categorías abelianas. Sin embargo, su generalidad, conduce a que este concepto no sea

suficientemente restrictivo para capturar las propiedades típicas que distinguen a grupos, anillo y álgebras de conjuntos con punto, monoides o retículos.

La noción de categoría semiabeliana combina la condición de Barr-exacta con la siguiente propiedad:

**Lema 50** (*corto de los cinco*)

*Para todo diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{l} & F & \xrightarrow{q} & C \\ u \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow v \\ K & \xrightarrow{k} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

*con epimorfismos regulares  $p$ ,  $q$  y  $k$ ,  $l$  sus núcleos,  $w$  es un isomorfismo si  $u$  y  $v$  son isomorfismos.*

En el caso de categorías Barr-exactas es suficiente pedir esta propiedad para epimorfismos rotos, y se puede formular sin hacer referencia al objeto cero y a núcleos, usando simplemente cuadrados cartesianos. Esta es la noción de categoría protomodular en el sentido de Bourn.

**Lema 51** (*corto roto de los cinco*)

*Para todo diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{l} & F & \xrightarrow{q} & C \\ u \downarrow & & w \downarrow & & \downarrow v \\ K & \xrightarrow{k} & E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

*en  $\mathcal{C}$  con  $k = \ker p$  y  $l = \ker q$ ; entonces  $w$  es un isomorfismo si  $u$  y  $v$  son isomorfismos y  $p$  y  $q$  son epimorfismos rotos.*

**Definición 52** *Una categoría es semiabeliana si es Barr-exacta, protomodular en el sentido de Bourn, con coproductos finitos y objeto cero. O lo que es lo mismo, si verifica que [33]:*

- i)  $\mathcal{C}$  tiene productos y coproductos binarios y objeto cero.*
- ii)  $\mathcal{C}$  tiene cuadrados cartesianos de monomorfismos rotos.*
- iii)  $\mathcal{C}$  tiene coigualadores de pares núcleo.*
- iv) Se verifica el lema corto roto de los cinco en  $\mathcal{C}$ .*
- v) Los epimorfismos regulares en  $\mathcal{C}$  son estables por cuadrados cartesianos.*
- vi) Las relaciones de equivalencia en  $\mathcal{C}$  son efectivas.*

Se verifica que las categorías Barr-exactas y semiaditivas son las categorías semiabelianas, en el caso de categorías con punto. Al contrario que ocurre con la abelianidad, la semiabelianidad no es autodual, pero se verifica que:

$$(\text{semiabeliana}) + (\text{semiabeliana})^{op} = (\text{abeliana}).$$

**Ejemplo 53** *Las categorías abelianas son semiabelianas, ya que las categorías abelianas son las Barr-exactas aditivas. La categoría de grupos es un ejemplo de categoría semiabeliana, pero que no es abeliana.*

**Ejemplo 54**  *$\Omega$ -grupos. Toda variedad de álgebras universales, para una teoría  $\mathcal{T}$ , induce una categoría Barr-exacta  $\mathcal{T}\text{-Alg}(\text{Set})$ . Además, cada variedad de  $\Omega$ -grupos (es decir, una variedad de álgebras universales con estructura subyacente de grupo tal que el subgrupo trivial es una subálgebra) es protomodular, y por tanto semiabeliana.*

*Tenemos entonces que muchas categorías algebraicas clásicas tales como anillos (no necesariamente unitarios), álgebras de Lie o álgebras de Jordan, son semiabelianas.*

**Ejemplo 55**  $X\text{Mod}_K$  es una categoría semiabeliana; vamos a ver que verifica los seis axiomas:

i) Hemos visto en la primera sección que  $X\text{Mod}_K$  tiene productos binarios. Además, por ser esta una categoría algebraica es completa y cocompleta y por tanto tiene coproductos binarios [30]. El objeto cero es el módulo cruzado  $(0, 0, 0)$ .

ii)  $X\text{Mod}_K$  tiene cuadrados cartesianos; en particular, los tiene de monomorfismos rotos.

iii)  $X\text{Mod}_K$  tiene coigualadores; en particular, los tiene de pares núcleo.

iv) Consideremos el diagrama conmutativo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccccc} \ker(f, f') & \xrightarrow{(f, f')^k} & (C, R, \nu) & \xrightarrow{(f, f')} & (C', R', \nu') \\ (u'', v'') \downarrow & & \downarrow (u', v') & & \downarrow (u, v) \\ \ker(g, g') & \xrightarrow{(g, g')^k} & (D, S, \mu) & \xrightarrow{(g, g')} & (D', S', \mu') \end{array}$$

con  $(u'', v''), (u, v)$  isomorfismos y  $(f, f'), (g, g')$  epimorfismos rotos. Para ver que  $(u', v')$  es un isomorfismo basta aplicar el lema de los cinco corto roto en la categoría de álgebras conmutativas a los diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{f^k} & C & \xrightarrow{f} & C' \\ u'' \downarrow & & \downarrow u' & & \downarrow u \\ \ker g & \xrightarrow{g^k} & D & \xrightarrow{g} & D' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \ker f' & \xrightarrow{f'^k} & R & \xrightarrow{f'} & R' \\ v'' \downarrow & & \downarrow v' & & \downarrow v \\ \ker g' & \xrightarrow{g'^k} & S & \xrightarrow{g'} & S' \end{array}$$

v) Consideremos los módulos cruzados y morfismos siguientes:

$$(f, f') : (C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu), (g, g') : (C'', R'', \nu'') \rightarrow (C, R, \nu).$$

El cuadrado cartesiano de  $(f, f')$  y  $(g, g')$  :

$$\begin{array}{ccc} (X, Y, \mu) & \xrightarrow{(i, i')} & (C'', R'', \nu'') \\ (j, j') \downarrow \blacksquare & & \downarrow (g, g') \\ (C', R', \nu') & \xrightarrow{(f, f')} & (C, R, \nu) \end{array}$$

viene dado por los siguientes cuadrados cartesianos de álgebras conmutativas:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & C'' \\ j \downarrow \blacksquare & & \downarrow g \\ C' & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i'} & R'' \\ j' \downarrow \blacksquare & & \downarrow g' \\ R' & \xrightarrow{f'} & R \end{array}$$

El morfismo  $\mu : X \rightarrow Y$  actúa de la forma  $\mu(x, y) = (\nu'(x), \nu(y))$ , para  $(x, y) \in X \subseteq C' \times C''$ .

Si  $(f, f')$  es un epimorfismo regular,  $f$  y  $f'$  lo son en álgebras conmutativas. Como en esta categoría se conservan los epimorfismos regulares por cuadrados cartesianos  $i, i'$  también lo son y, por tanto,  $(i, i')$  es un epimorfismo regular en  $X\text{Mod}_K$ .

vi) En  $X\text{Mod}_K$  la proyección en el cociente es un morfismo de módulos cruzados y entonces, por la última proposición, todas las relaciones de  $X\text{Mod}_K$  son efectivas.

### 1.4.2. Categorías de interés

Orzech define el concepto de categoría de interés [44] y estudia propiedades de este tipo de categorías. La categoría  $XMod_K$  no es una categoría de interés ya que no cumple uno de sus axiomas:

- Si  $w \in \Omega_1 \setminus \{-\}$  y  $* \in \Omega_2 \setminus \{+\}$ , entonces

$$w(a * b) = w(a) * b,$$

donde  $\Omega_i$  denota las operaciones  $i$ -arias para  $i = 1, 2$ .

Veamos que efectivamente  $XMod_K$  no cumple este axioma. Para ello se debe tener en cuenta la equivalencia existente entre módulos cruzados sobre álgebras conmutativas y  $cat^1$ -álgebras.

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. La  $cat^1$ -álgebra inducida es el álgebra  $C \rtimes R$  con los morfismos  $s, t : C \rtimes R \rightarrow C \rtimes R$  que actúan de la manera siguiente sobre  $(c, r) \in C \rtimes R$ :

$$\begin{aligned} s(c, r) &= (0, r). \\ t(c, r) &= (0, r + \nu(c)). \end{aligned}$$

Estas aplicaciones  $s$  y  $t$  son las operaciones 1-arias, mientras que la suma y el producto de  $C \rtimes R$  como álgebra son las operaciones 2-arias.

$$\begin{aligned} s((c_1, r_1) * (c_2, r_2)) &= s(c_1 c_2 + r_2 c_1 + r_1 c_2, r_1 r_2) = (0, r_1 r_2). \\ s(c_1, r_1) * (c_2, r_2) &= (0, r_1) * (c_2, r_2) = (r_1 c_2, r_1 r_2). \end{aligned}$$

Por tanto, tomando  $r_1 \in R$  y  $c_2 \in C$  tales que  $r_1 c_2 \neq 0$  no se verifica el axioma.

La categoría de módulos cruzados de grupos sí es una categoría de interés. Este hecho motiva que el estudio de  $XMod_K$  tenga diferencias fundamentales con el estudio de módulos cruzados de grupos.

### 1.4.3. Categorías cartesianas cerradas

El hecho de que una categoría  $\mathcal{C}$  tenga productos y coproductos finitos es equivalente a que tenga productos, coproductos, objeto terminal y objeto inicial. El objeto inicial y el coproducto dan, respectivamente, los adjuntos por la izquierda de los funtores:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{0} & \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ C \mapsto 0 & C \mapsto (C, C) \end{array}$$

mientras que el objeto terminal y el producto proporcionan sus adjuntos por la derecha.

**Definición 56** Una categoría  $\mathcal{C}$  con productos finitos se dice que es *cartesiana cerrada* cuando los funtores:

$$\begin{array}{lll} \phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{0} & \theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \eta : \mathcal{C} \xrightarrow{\times B} \mathcal{C} \\ C \mapsto 0 & C \mapsto (C, C) & C \mapsto C \times B \end{array}$$

tienen un adjunto a la derecha.

**Teorema 57** La categoría  $XMod_K$  es una categoría cartesiana cerrada.

**Demostración:**

*i)* Consideramos el funtor  $\phi' : \mathbf{0} \rightarrow XMod_K$  tal que  $\phi'(0) = (0, 0, 0)$ . Este funtor es trivialmente adjunto de  $\phi$  a la derecha. Debe notarse que  $(0, 0, 0)$  es el objeto terminal de  $XMod_K$ .

*ii)* Consideramos el funtor  $\theta' : XMod_K \times XMod_K \rightarrow XMod_K$  dado por  $\theta'((C, R, \nu), (C', R', \nu')) = (C, R, \nu) \times (C', R', \nu')$ . Este funtor es adjunto de  $\theta$  a la derecha ya que dado otro módulo cruzado  $(G, H, \omega)$ , existe un isomorfismo:

$$\begin{aligned} Hom(((G, H, \omega), (G, H, \omega)), ((C, R, \nu), (C, R, \nu), (C', R', \nu'))) &\cong \\ Hom((G, H, \omega), (C, R, \nu) \times (C, R, \nu), (C', R', \nu')) & \end{aligned}$$

natural en  $(C, R, \nu)$  y en  $((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$ .

iii) Si  $\eta : XMod_K \rightarrow XMod_K$  es el funtor tal que  $\eta(C, R, \nu) = (C, R, \nu) \times (C', R', \nu')$ , consideramos el funtor  $\eta' : XMod_K \rightarrow XMod_K$ ,  $\eta'(G, H, \omega) = Hom((C', R', \nu'), (G, H, \omega))$ .

Este funtor es adjunto de  $\eta$  a la derecha ya existe un isomorfismo:

$$\begin{aligned} Hom((C, R, \nu) \times (C', R', \nu'), (G, H, \omega)) &\cong \\ Hom((C, R, \nu), Hom((C', R', \nu'), (G, H, \omega))) & \end{aligned}$$

natural en  $(C, R, \nu)$  y en  $(G, H, \omega)$ .

□

#### 1.4.4. Categorías de modelos

**Definición 58** Una categoría de modelos [15] es una categoría  $\mathcal{C}$  junto con tres clases de aplicaciones distinguidas: equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones. Estas aplicaciones deben cumplir los siguientes axiomas:

1. La categoría  $\mathcal{C}$  es cerrada por límites y colímites.

2. Las tres clases de morfismos distinguidos son cerrados bajo retracts, es decir, dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A' \\ i' \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i' \\ B' & \xrightarrow{f'} & B & \xrightarrow{g'} & B' \end{array}$$

tal que  $g \circ f = id, g' \circ f' = id$ , si  $i$  es una fibración/cofibración/equivalencia débil, entonces  $i'$  es una fibración/cofibración/equivalencia débil.

3. *Dados dos morfismos  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  tales que dos cualesquiera de  $f, g, g \circ f$  son equivalencias débiles, entonces los tres morfismos lo son. A este axioma se le suele llamar “2 de 3”.*

4. *Dado un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ j \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

*en el que  $j$  es una cofibración y  $q$  es una fibración, si uno de los dos es además una equivalencia, entonces existe un levantamiento  $h : B \rightarrow C$  tal que  $h \circ j = f, q \circ h = g$ . A este axioma se le suele llamar axioma de levantamiento.*

5. *Cualquier morfismo  $f : A \rightarrow B$  se puede factorizar de dos maneras:*

*i)  $A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{q} B$ , donde  $i$  es una cofibración y  $q$  es a la vez fibración y equivalencia débil.*

*ii)  $A \xrightarrow{j} C \xrightarrow{p} B$ , donde  $j$  es a la vez cofibración y equivalencia débil y  $p$  es una fibración.*

*A este axioma se le suele llamar axioma de factorización.*

Vamos a hacer a continuación varias observaciones:

- Las fibraciones que son a la vez equivalencias débiles se llamarán fibraciones acíclicas, mientras que las cofibraciones que también sean equivalencias débiles serán llamadas cofibraciones acíclicas.

- Los axiomas referentes a las fibraciones y a las cofibraciones son completamente simétricos; por eso, una categoría de modelos  $\mathcal{C}$  induce una estructura de categoría modelos en  $\mathcal{C}^{op}$ .

- En la definición original de categoría de modelos dada por Quillen se pedía una versión más débil del primer axioma, ya que éste sólo se debía cumplir para límites y colímites finitos.

• Las tres clases de morfismos distinguidos no son independientes. Por ejemplo, las cofibraciones son los morfismos  $f : A \rightarrow B$  que tienen la propiedad de levantamiento por la izquierda con respecto a las fibraciones acíclicas, es decir, dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ f \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{i'} & D \end{array}$$

donde  $q$  es una fibración acíclica,  $f$  es una cofibración si y solo si existe un morfismo  $h : B \rightarrow C$  tal que  $h \circ f = i$ ,  $q \circ h = i'$ . Análogamente, las fibraciones son los morfismos que tienen la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a las cofibraciones acíclicas.

• Las cofibraciones son cerradas bajo varios colímites como por ejemplo coproductos o colímites secuenciales. También se verifican propiedades similares para fibraciones usando límites.

• Un objeto  $A$  se dice que es cofibrante si el morfismo desde el objeto inicial es una cofibración y fibrante si el morfismo al objeto final es una fibración.

**Teorema 59** *La categoría de módulos cruzados de álgebras conmutativas tiene estructura de categoría de modelos, donde los morfismos distinguidos son los siguientes:*

• *Equivalencias débiles:* morfismos  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  que inducen isomorfismos en homotopía, es decir, que  $f|_{\ker \nu} : \ker \nu \rightarrow \ker \nu'$  y  $\bar{g} : R/\nu(C) \rightarrow R'/\nu'(C')$  son isomorfismos.

• *Fibraciones:* morfismos  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  tales que  $g$  es un epimorfismo regular, es decir, sobreyectiva.

• *Cofibraciones:* morfismos  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  tales que  $f$  tiene la propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a cualquier morfismo sobreyectivo, es decir, dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{i'} & D \end{array}$$

donde  $f'$  es un morfismo sobreyectivo, existe un morfismo  $h : B \rightarrow C$  tal que  $f \circ h = i', h \circ f' = i$ .

**Demostración:**

Se deduce directamente de [22, 6.7].

□

**Observación 60** *De este teorema se deduce que todo módulo cruzado es fibrante.*



## Capítulo 2

# Construcciones en la categoría

### 2.1. El actor de un módulo cruzado

**Definición 61** Si  $A$  es una  $K$ -álgebra se definen las multiplicaciones de  $A, M(A)$  como la  $K$ -álgebra formada por los morfismos:

$$\lambda : A \longrightarrow A \text{ morfismo de } K\text{-álgebras tal que } \lambda(a_1a_2) = \lambda(a_1)a_2.$$

**Lema 62** Si  $\text{Ann}_A(A) = 0$  ó  $A^2 = A$  entonces  $M(A)$  es una  $K$ -álgebra conmutativa.

**Demostración:**

• Si  $\text{Ann}(A) = 0$ , se tiene  $\lambda_1\lambda_2(a) = \lambda_2\lambda_1(a) \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2(a) - \lambda_2\lambda_1(a) = 0 \Leftrightarrow a'(\lambda_1\lambda_2(a) - \lambda_2\lambda_1(a)) = 0$  para todo  $a' \in A$ , y esta igualdad es cierta:

$$a'(\lambda_1\lambda_2(a) - \lambda_2\lambda_1(a)) = a'\lambda_1\lambda_2(a) - a'\lambda_2\lambda_1(a) = \lambda_1(a'\lambda_2(a)) - \lambda_2(a'\lambda_1(a)) = \lambda_1(a')\lambda_2(a) - \lambda_2(a')\lambda_1(a) = 0.$$

• Si  $A^2 = A$ , se tiene que  $\lambda_1\lambda_2(a) = \lambda_1\lambda_2(a_1a_2) = \lambda_1(a_1)\lambda_2(a_2) = \lambda_2(a_2)\lambda_1(a_1) = \lambda_2\lambda_1(a_2a_1) = \lambda_2\lambda_1(a)$ .  $\square$

Además,  $A$  es un  $M(A)$ -módulo, con la acción dada por:

$$\begin{aligned} M(A) \times A &\rightarrow A \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda(a) \end{aligned}$$

Consideramos ahora el morfismo  $A \xrightarrow{\gamma} M(A)$   
 $a \mapsto \gamma_a$  donde  $\gamma_a(a') = aa'$ .

$\ker \gamma = \{a \mid aa' = 0 \text{ para todo } a' \in A\} = \text{Ann}(A)$ .

$\text{Im } \gamma = \text{Multiplicaciones interiores de } A$ .

$(A, M(A), \gamma)$  es un módulo cruzado:

- $\gamma(\lambda a) = \gamma(\lambda(a)) = \gamma_{\lambda(a)} \in M(A)$ , y esta multiplicación coincide con  $\lambda\gamma(a) = \lambda\gamma_a$  ya que dado  $a' \in A$  se tiene  $\gamma_{\lambda(a)}(a') = \lambda(a)a' = \lambda(aa') = \lambda\gamma_a(a')$ .
- $\gamma(a)a' = \gamma_a a' = \gamma_a(a') = aa'$ .

**Definición 63** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado dado. Una multiplicación de  $(C, R, \nu)$  es un par  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C, R, \nu)$  tal que:

- i)  $f \in M(C), g \in M(R)$ .
- ii)  $g\nu = \nu f$ .
- iii)  $f(rc) = rf(c) = g(r)c$  para todo  $c \in C, r \in R$ .

El conjunto de las multiplicaciones de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  se denota por  $M(C, R, \nu)$ . Este conjunto tiene estructura de  $K$ -álgebra con las operaciones [4]:

- $(f, g) + (f', g') = (f + f', g + g')$ .
- $k(f, g) = (kf, kg)$ .
- $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$ .

**Definición 64** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se denota por  $U(R, C)$  el conjunto de todas las aplicaciones lineales  $d : R \rightarrow C$  tales que  $d(rr') = rd(r')$  si  $r, r' \in R$ .

Si  $d \in U(R, C)$  se tienen multiplicaciones  $\sigma_d \in M(R), \theta_d \in M(C)$  dadas por:

$$\sigma_d(r) = \nu d(r), \theta_d(c) = d\nu(c).$$

La comprobación de que son multiplicaciones es trivial.

**Proposición 65** *Las multiplicaciones  $\sigma_d, \theta_d$  verifican:*

- i)  $\theta_d d = d\sigma_d$ .*
- ii)  $\sigma_d \nu = \nu \theta_d$ .*
- iii)  $(\theta_d, \sigma_d) \in M(C, R, \nu)$ .*

**Demostración:**

Sean  $r \in R, c \in C$  :

$$i) \theta_d d(r) = (d\nu)d(r) = d(\nu d(r)) = d\sigma_d(r).$$

$$ii) \sigma_d \nu(c) = (\nu d)\nu(c) = \nu(d\nu(c)) = \nu \theta_d(c).$$

$$iii) \theta_d(rc) = d\nu(rc) = d(r\nu(c)) = r d\nu(c) = r\theta_d(c), \text{ por tanto } (\theta_d, \sigma_d) \in M(C, R, \nu). \quad \square$$

**Proposición 66** *Sean  $\sigma_{d_i}, \theta_{d_i}$  las multiplicaciones asociadas a  $d_i \in U(R, C), i = 1, 2$ .*

- i) Si  $d = d_1 + d_2$  entonces  $\sigma_d = \sigma_{d_1} + \sigma_{d_2}$  y  $\theta_d = \theta_{d_1} + \theta_{d_2}$ .*
- ii) Si  $d = kd_1$  entonces  $\sigma_d = k\sigma_{d_1}$  y  $\theta_d = k\theta_{d_1}$ .*
- iii) Si  $d = (d_1 \circ d_2)$  entonces  $\sigma_d = (\sigma_{d_1} \circ \sigma_{d_2})$  y  $\theta_d = (\theta_{d_1} \circ \theta_{d_2})$ .*

**Demostración:**

$$i) \text{ Si } d = d_1 + d_2, \text{ entonces } \sigma_d(r) = \nu(d_1 + d_2)(r) = \nu(d_1(r) + d_2(r)) = \nu(d_1(r)) + \nu(d_2(r)) = \sigma_{d_1}(r) + \sigma_{d_2}(r).$$

$$\text{Y análogamente } \theta_d(c) = \theta_{d_1}(c) + \theta_{d_2}(c).$$

$$ii) \text{ Si } d = kd_1, \text{ entonces } \sigma_d(r) = \sigma_{kd_1}(r) = \nu(kd_1)(r) = \nu(k(d_1(r))) = k\nu(d_1(r)) = k\sigma_{d_1}(r).$$

Y análogamente  $\theta_d(c) = k\theta_{d_1}(c)$ .

iii) Si  $d = (d_1 \circ d_2)$  entonces  $\sigma_d(r) = \sigma_{(d_1 \circ d_2)}(r) = \nu(d_1 \circ d_2)(r) = \nu(d_1\nu d_2)(r) = \nu d_1(\nu d_2(r)) = \sigma_{d_1}(\nu d_2(r)) = \sigma_{d_1}(\sigma_{d_2}(r)) = (\sigma_{d_1} \circ \sigma_{d_2})(r)$ .

Y análogamente  $\theta_d(c) = (\theta_{d_1} \circ \theta_{d_2})(c)$ .  $\square$

Por tanto, tenemos una  $K$ -álgebra  $(U(R, C), +, \cdot, \circ)$  y homomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : U(R, C) \rightarrow M(R) & \Phi : U(R, C) \rightarrow M(C) \\ d \mapsto \sigma_d & d \mapsto \theta_d \end{array}$$

**Teorema 67** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Consideramos el morfismo  $\Delta : U(R, C) \rightarrow M(C, R, \nu)$  dado por  $\Delta(d) = (\theta_d, \sigma_d)$ . Entonces,  $\mathcal{A}(C, R, \nu) = (U(R, C), M(C, R, \nu), \Delta)$  es un módulo cruzado llamado módulo cruzado actor.*

**Demostración:**

Una acción de  $M(C, R, \nu)$  sobre  $U(R, C)$  viene dada por  $(f, g) \cdot d = fd$  ya que  $fd(r_1 r_2) = f(r_1 \cdot d(r_2)) = d_1 \nu(r_1 \cdot d(r_2)) = d_1(r_1 \nu d(r_2)) = r_1 \cdot d_1 \nu d(r_2) = r_1 \cdot fd(r_2)$ . Por tanto  $fd \in U(R, C)$ .

Ahora, sean  $(f, g) \in M(C, R, \nu), d \in U(R, C)$  :

- $\Delta((f, g)d) = \Delta(fd) = (\theta_{fd}, \sigma_{fd}) = ((fd)\nu, \nu(fd)) = (fd\nu, g\nu d) = (f, g) \circ (d\nu, \nu d) = (f, g) \circ (\theta_d, \sigma_d) = (f, g) \circ \Delta(d)$ .

- $\Delta(d_1)d_2 = (\theta_{d_1}, \sigma_{d_2}) = \theta_{d_1}d_2 = d_1\nu d_2 = d_1 \circ d_2$ .  $\square$

**Observación 68** *El actor de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  sólo existe cuando  $M(C)$  y  $M(R)$  tienen estructura de  $K$ -álgebra conmutativa.*

**Proposición 69** *El morfismo  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(C, R, \nu)$ , donde  $f : C \rightarrow U(R, C)$  viene dado por  $f(c) = f_c : R \rightarrow C$ ,  $f_c(r) = rc$  y  $g : R \rightarrow M(C, R, \nu)$  viene dado por  $g(r) = (i_r, j_r), i_r(c) = rc, j_r(r') = rr'$ , es un morfismo de módulos cruzados.*

**Demostración:**

Tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & U(R, C) \\ \nu \downarrow & & \downarrow \Delta \\ R & \xrightarrow{g} & M(C, R, \nu) \end{array}$$

Además:

- $\Delta f(c) = \Delta f_c(r) = (\theta_{f_c}(c'), \sigma_{f_c}(r)) = (f_c \nu(c'), \nu f_c(r)) = (\nu(c')c, \nu(rc)) = (c'c, r\nu(c)) = (\nu(c)c', \nu(c)r) = (i_{\nu(c)}(c'), j_{\nu(c)}(r)) = g\nu(c)$ .
- $g(r) \circ f(c)(r') = (i_r, j_r)f_c(r') = i_r f_c(r') = i_r(r'c) = r(r'c) = r'(rc) = f_{rc}(r') = f(rc)(r')$ .  $\square$

Las imágenes de  $f$  y  $g$  se denotan por  $E(R, C)$  y  $\overline{R}$  respectivamente. La acción de  $M(C, R, \nu)$  sobre  $U(R, C)$  induce una acción de  $M(C, R, \nu)$  sobre  $E(R, C)$  dada por  $(f, g) \cdot i_c = i_{f(c)}$ . Se puede comprobar fácilmente que  $E(R, C)$  es un ideal de  $U(R, C)$  y  $\overline{R}$  es un ideal de  $M(C, R, \nu)$ .

**Proposición 70** *La imagen del morfismo de módulos cruzados  $(f, g)$ ,  $\text{Im}(f, g) = (E(R, C), \overline{R}, \Delta)$  es un ideal de  $(U(R, C), M(C, R, \nu), \Delta)$ .*

**Demostración:**

Primero veamos que  $E(R, C)$  es un ideal de  $U(R, C)$  y que  $\overline{R}$  es un ideal de  $M(C, R, \nu)$ :

Sean  $d \in U(R, C)$  y  $f_c \in E(R, C)$ . Entonces,  $(d \circ f_c)(r) = d\nu f_c(r) = d\nu(rc) = d(r\nu(c)) = r(d\nu(c)) = f_{d\nu(c)}(r) \in E(R, C)$ .

Ahora sean  $(i, j) \in M(C, R, \nu)$  e  $(i_r, j_r) \in \overline{R}$ .

Tenemos que  $ii_r(c) = i(rc) = d\nu(rc) = d(r\nu(c)) = d(\nu(c)r) = \nu(c)d(r) = cd(r) = d(r)c = \nu(d(r))c = j(r)c = i_{j(r)}(c)$  y  $jj_r(r') = j(rr') = j(r)r' = j_{j(r)}(r')$ .

Por tanto,  $((i, j) \circ (i_r, j_r)) = (ii_r, jj_r) = (i_{j(r)}, j_{j(r)}) \in \overline{R}$ .

Quedan por comprobar otras dos cosas:

- Sean  $(i, j) \in M(C, R, \nu)$  y  $f_c \in E(R, C)$ . Tenemos que  $(i, j)f_c(r) = fi_c(r) = f(rc) = d\nu(rc) = d(r\nu(c)) = rd\nu(c) = ri(c) = f_{i(c)}(r) \in E(R, C)$ .
- Sean  $(i_r, j_r) \in \overline{R}$  y  $d \in U(R, C)$ . Tenemos que  $(i_r, j_r)d(r') = i_r d(r') = rd(r') = d(rr') = d(r'r) = r'd(r) = f_{d(r)}(r') \in E(R, C)$ .  $\square$

El módulo cruzado  $(E(R, C), \overline{R}, \Delta)$  se llama actor interior del módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y se denota por  $I(C, R, \nu)$ . Este objeto es el análogo a las multiplicaciones interiores en la categoría de álgebras conmutativas.

Como  $I(C, R, \nu)$  es un ideal de  $\mathcal{A}(C, R, \nu)$ , se puede considerar el módulo cruzado cociente  $\mathcal{A}(C, R, \nu)/I(C, R, \nu)$  que se llama actor exterior del módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y se denota  $O(C, R, \nu)$ .

**Ejemplo 71** Si  $I$  es un ideal de  $R$  con la inclusión  $i : I \hookrightarrow R$ , entonces  $\mathcal{A}(I, R, i)$  es el módulo cruzado  $(U(R, C), X, \Delta)$  donde  $X$  es isomorfo a la subálgebra de  $M(C)$  consistente en las multiplicaciones que se restringen a multiplicaciones de  $I$ .

**Ejemplo 72** Casos especiales del ejemplo anterior son que  $\mathcal{A}(0, R, i)$  es isomorfo a  $(0, M(R), i)$  y  $\mathcal{A}(R, R, id)$  es isomorfo a  $(M(R), M(R), id)$ .

**Definición 73** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. El aniquilador del módulo cruzado de álgebras conmutativas es el núcleo del homomorfismo  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(C, R, \nu)$ , y se denota por  $Ann(C, R, \nu)$ .

$Ann(C, R, \nu) = \ker(f, g) = (Ann_C(R), Ann_R(C) \cap Ann_R(R), \nu)$  ya que:

- $\ker(f) = \{c \in C \mid f_c(r) = 0 \text{ para todo } r \in R\} = \{c \in C \mid rc = 0 \text{ para todo } r \in R\} = Ann_C(R)$ .
- $\ker(g) = \{r \in R \mid g(r) = (i_r, j_r) = 0\} = \{r \in R \mid rc = 0, rr' = 0 \text{ para todo } c \in C \text{ y } r' \in R\} = Ann_R(C) \cap Ann_R(R)$ .

Como  $Ann(C, R, \nu)$  es el núcleo de un morfismo de módulos cruzados, es un ideal del módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ .

**Ejemplo 74** Si  $I$  es un ideal de  $R$  con la inclusión  $i : I \hookrightarrow R$  entonces  $\text{Ann}(I, R, i) = (I \cap \text{Ann}_R(R), \text{Ann}_R(R), i)$ .

Si consideramos el caso particular en el que  $I = R, i = \text{id}$ , entonces  $\text{Ann}(I, R, i) = (R \cap \text{Ann}_R(R), \text{Ann}_R(R), \text{id}) = (\text{Ann}_R(R), \text{Ann}_R(R), \text{id})$ .

Si  $I = 0, \text{Ann}(0, R, i) = (0, \text{Ann}_R(R), i)$ .

**Ejemplo 75** Consideramos el módulo cruzado  $(R, M(R), \nu)$ ; se tiene entonces que  $\text{Ann}(R, M(R), \nu) = (\text{Ann}_R(R), 0 \cap \text{Ann}_{M(R)}(M(R)), \nu) = (\text{Ann}_R(R), 0, 0)$ .

En la categoría de álgebras conmutativas se tiene la siguiente estructura:

Sea  $R$  una  $K$ -álgebra y  $M(R)$  sus multiplicaciones. Existe un homomorfismo de álgebras  $\nu : R \rightarrow M(R)$  cuya imagen son las multiplicaciones interiores  $I(R)$  y su núcleo es el aniquilador de  $R$ . El cociente  $M(R)/I(R)$  es el álgebra de multiplicaciones exteriores de  $R$  y se denota por  $O(R)$ .

Si tenemos una sucesión exacta corta de álgebras:

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

existe un homomorfismo  $\theta : R \rightarrow M(J)$  que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & R & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I(J) & \longrightarrow & M(J) & \longrightarrow & O(J) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En módulos cruzados se tiene la misma situación. Dada una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow (C', R', \nu') \longrightarrow (C, R, \nu) \longrightarrow (C'', R'', \nu'') \longrightarrow 0$$

existe un morfismo de módulos cruzados  $(\varepsilon, \theta) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(C', R', \nu')$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo [4]:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (C', R', \nu') & \longrightarrow & (C, R, \nu) & \longrightarrow & (C'', R'', \nu'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow (\varepsilon, \theta) & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I(C', R', \nu') & \longrightarrow & \mathcal{A}(C', R', \nu') & \longrightarrow & O(C', R', \nu') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

## 2.2. Módulos cruzados singulares

**Definición 76** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se dirá que es singular cuando  $R^2 = 0$  y la acción de  $R$  sobre  $C$  sea la acción trivial, es decir, para todo  $c \in C, r \in R$  se verifica  $rc = 0$ .

**Ejemplo 77** Sea  $C$  un álgebra tal que  $C^2 = 0$ ; entonces  $(C, C, id)$  es un módulo cruzado singular.

**Ejemplo 78** Sea  $R$  un álgebra tal que  $R^2 = 0$  e  $I$  un ideal de  $R$ ; entonces  $(I, R, in)$  es un módulo cruzado singular.

**Observación 79** El hecho de que la acción de  $R$  sobre  $C$  sea trivial implica, utilizando la identidad de Peiffer, que  $C^2 = 0$ , ya que  $cc' = \nu(c)c' = 0$ , donde  $c, c' \in C$ .

Este concepto es análogo al que se tiene en otras estructuras; por ejemplo, se dice que un álgebra conmutativa  $A$  es singular o abeliana cuando  $A^2 = 0$ . Esto significa que la multiplicación sea trivial, o dicho de otra manera, que el morfismo natural:

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (a, a') &\mapsto aa' \end{aligned}$$

sea trivial. En módulos cruzados este concepto corresponde a decir que el morfismo:

$$\begin{aligned} (C, R, \nu) \times (C, R, \nu) &\rightarrow (C, R, \nu) \\ ((c, r), (c', r')) &\mapsto (cc' + rc' + r'c, rr') \end{aligned}$$

sea trivial. Desarrollando esta condición se llega a la definición dada.

**Observación 80** Si  $(C, R, \nu)$  es un módulo cruzado singular, entonces existe el módulo cruzado actor  $\mathcal{A}(C, R, \nu)$ . Como  $C^2 = 0$  se tiene que  $\text{Ann}_C(C) = C$  y entonces  $M(C)$  tiene estructura de  $K$ -álgebra conmutativa. Análogamente,  $M(R)$  también tiene estructura de  $K$ -álgebra conmutativa.

**Lema 81** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado singular. Cualquier submódulo cruzado  $(C', R', \nu')$  es también singular.

**Demostración:**

La prueba es directa. □

**Proposición 82** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Si  $(C, R, \nu)$  es singular, entonces es un objeto grupo abeliano.

**Demostración:**

Para realizar la demostración es necesario recordar que dada una categoría  $\mathcal{C}$  con productos finitos, un objeto  $C \in \mathcal{C}$  es un objeto grupo abeliano si y sólo si  $\text{Hom}(C', C)$  es un grupo abeliano para todo objeto  $C'$  de la categoría [40].

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado singular. Veremos a continuación que  $\text{Hom}((C', R', \nu'), (C, R, \nu))$  es un grupo abeliano para cualquier  $(C', R', \nu')$ .

Consideremos dos morfismos  $(f, g), (f', g') : (C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu)$ . La suma viene inducida de forma natural por la suma de morfismos en la categoría de álgebras conmutativas, es decir,  $((f, g) + (f', g'))(c', r') = (f + f', g + g')(c', r') = ((f + f')(c'), (g + g')(r')) = (f(c') + f'(c'), g(r') + g'(r'))$ , donde  $c' \in C, r' \in R'$ . Se puede comprobar fácilmente que tanto  $f + f'$  como  $g + g'$  son morfismos de álgebras.

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \\ f+f' \downarrow & & \downarrow g+g' \\ C & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

Primero, se debe comprobar que  $(f, g) + (f', g')$  es un morfismo de módulos cruzados:

• Si  $c' \in C', r' \in R'$  se tiene que  $(f + f')(r'c') = f(r'c') + f'(r'c') = g(r')f(c) + g'(r')f'(c') = 0$  ya que como  $(C, R, \nu)$  es singular, la acción de  $R$  sobre  $C$  es la acción trivial. Por el mismo motivo  $((g + g')(r'))((f + f')(c')) = 0$ .

• Si  $c' \in C'$  se tiene que  $((g + g') \circ \nu')(c') = g(\nu'(c')) + g'(\nu'(c')) = \nu(f(c') + \nu(f'(c'))) = (\nu \circ (f + f'))(c')$ .

Es trivial comprobar que la operación definida cumple las propiedades asociativa y conmutativa. Además, el elemento neutro es la aplicación  $(0, 0) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$ .

Solo queda por comprobar que todo  $(f, g) \in \text{Hom}((C', R', \nu'), (C, R, \nu))$  tiene inverso. Su inverso será el morfismo  $(-f, -g)$  definido de la siguiente manera:  $(-f, -g)(c', r') = (-(f(c')), -(g(r')))$ , donde  $c' \in C', r' \in R'$ . Veamos que así definido  $(-f, -g)$  es un morfismo de módulos cruzados:

•  $(-f)(r'c') = -(f(r'c')) = -(g(r')f(c')) = 0 = (-(g(r')))(-(f(c'))) = (-g(r'))(-f(c'))$ , donde  $c' \in C', r' \in R'$ .

•  $((-g) \circ \nu')(c') = -(g(\nu'(c'))) = -(\nu(f(c'))) = \nu((-f(c'))) = (\nu \circ (-f))(c')$ , donde  $c' \in C'$ .

Finalmente comprobaremos que  $(-f, -g)$  es efectivamente el inverso de  $(f, g) : ((f, g) + (-f, -g))(c', r') = (f(c') - f(c'), g(r') - g'(r')) = (0, 0)$ , donde  $c' \in C', r' \in R'$ .  $\square$

**Observación 83** *En la demostración anterior se muestra que dados dos módulos cruzados  $\text{Hom}((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$  tiene estructura de grupo abeliano. Además, se le puede dar estructura de  $K$ -álgebra con las siguientes operaciones:*

•  $((f, g) \cdot (f', g'))(c, r) = ((f \cdot f')(c), (g \cdot g')(r)) = (f(c)f'(c), g(r)g'(r))$ , donde  $f, g \in \text{Hom}((C, R, \nu), (C', R', \nu')), c \in C, r \in R$ .

•  $(k \cdot (f, g))(c, r) = (k \cdot f(c), k \cdot g(r))$ , donde  $f, g \in \text{Hom}((C, R, \nu), (C', R', \nu')), k \in K$ .

**Proposición 84** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se verifica que  $(C, R, \nu)$  es singular si y sólo si  $\text{Ann}(C, R, \nu) = (C, R, \nu)$ .*

**Demostración:**“ $\Rightarrow$ ”

$Ann(C, R, \nu) = (Ann_C(R), Ann_R(C) \cap Ann_R(R), \nu) = \ker(f, g)$ , donde  $(f, g)$  es el morfismo anteriormente descrito  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(C, R, \nu)$ .

•  $Ann_C(R) = \{c \in C \mid rc = 0 \forall r, r \in R\}$ . Como la acción de  $R$  sobre  $C$  es la trivial  $Ann_C(R) = C$ .

•  $Ann_R(R) = \{r' \in R \mid rr' = 0 \forall r, r \in R\}$ . Como  $R^2 = 0$ , se tiene que  $Ann_R(R) = R$ .

•  $Ann_R(C) = \{r \in R \mid rc = 0 \forall c, c \in C\}$ . Como la acción de  $R$  sobre  $C$  es la trivial  $Ann_R(C) = R$ .

Por tanto  $Ann(C, R, \nu) = (Ann_C(R), Ann_R(C) \cap Ann_R(R), \nu) = (C, R \cap R, \nu) = (C, R, \nu)$ .

“ $\Leftarrow$ ”

•  $Ann_C(R) = \{c \in C \mid rc = 0 \forall r, r \in R\} = C \Rightarrow$  la acción de  $R$  sobre  $C$  es la trivial.

•  $Ann_R(C) \cap Ann_R(R) = R \Rightarrow R \subseteq Ann_R(R) = \{r \in R \mid rr' = 0 \forall r, r' \in R\} \Rightarrow R^2 = 0$ .  $\square$

**Observación 85** *La proposición anterior muestra que el aniquilador de módulos cruzados presenta un carácter análogo con respecto al concepto de aniquilador en la categoría de álgebras conmutativas ya que se verifica que dada  $A$  un álgebra,  $A$  es singular si y sólo si  $A^2 = 0$  (es decir, si el aniquilador de  $A$  es todo  $A$ ).*

**Definición 86** *Dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ , el conmutador será el submódulo cruzado  $[(C, R, \nu), (C, R, \nu)] = (RC, R^2, \nu)$ .*

**Lema 87** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se verifica que el módulo cruzado  $[(C, R, \nu), (C, R, \nu)]$  es un ideal cruzado de  $(C, R, \nu)$ .*

**Demostración:**

- $RC$  es un ideal de  $C$  : sean  $c, c' \in C, r \in R$ ; entonces  $c'(rc) = \nu(c')(rc) = (\nu(c')r)c = r'c$ .
- $R^2$  es un ideal de  $R$  trivialmente.
- Sean  $rc \in RC, r' \in R$ ; entonces  $r'(rc) = (r'r)c \in RC$ .
- Sean  $rr' \in R^2, c \in C$ ; entonces  $(rr')c \in RC$ . □

**Observación 88** Cuando se considera un álgebra conmutativa  $R$  como un módulo cruzado, lo que se obtiene al calcular su conmutador es el álgebra  $R^2$ , que es el objeto que juega el papel de conmutador en la categoría de álgebras conmutativas:

- Consideremos el módulo cruzado  $(0, R, 0) \equiv R$ ; se verifica que:

$$[(0, R, 0), (0, R, 0)] = (0, R^2, 0) \equiv R^2 \equiv [R, R].$$

- Consideremos el módulo cruzado  $(C, C, id) \equiv C$ ; se verifica que:

$$[(C, C, id), (C, C, id)] = (C^2, C^2, id) \equiv C^2 \equiv [C, C].$$

Además, la definición dada es la que se tendría si  $XMod_K$  fuese una categoría de interés: dado  $(C, R, \nu)$  su correspondiente  $cat^1$ -álgebra es  $(C \rtimes R, s, t)$ , donde  $t(c, r) = (0, r)$ ,  $s(c, r) = (0, r + \nu(c))$ .

El conmutador de esta  $cat^1$ -álgebra sería  $[(C \rtimes R, s, t), (C \rtimes R, s, t)] = ([C \rtimes R, C \rtimes R], s, t) = (\langle (cc' + rc' + r'c, rr') \mid c, c' \in C, r, r' \in R \rangle, s, t) = (RC \rtimes R^2, s, t)$ .

Ahora, el módulo cruzado correspondiente sería  $(\ker t, \text{Im } s, s)$  y se puede comprobar fácilmente que este módulo cruzado coincide con  $(RC, R^2, \nu)$  :

- $\ker t = \{(rc, r'r'') \in RC \rtimes R^2 \mid t(rc, r'r'') = (0, r'r'') = 0\} = RC$ .
- $\text{Im } s = \{s(rc, r'r'') \mid (rc, r'r'') \in RC \rtimes R^2\} = \{(0, r'r'' + \nu(rc) \mid (rc, r'r'') \in RC \rtimes R^2\} = R^2$ .

- $s(rc) \equiv s(0, rc) = (0, \nu(rc)) \equiv \nu(rc)$ , donde  $c \in C, r \in R$ .

Las demás comprobaciones son también inmediatas.

Por otro lado, esta definición de conmutador se ajusta a la definición categórica dada por Huq [32], para el cual el conmutador de un objeto  $A \in \mathcal{A}$  es el menor  $A'$ , subobjeto de  $A$ , tal que  $A/A'$  es abeliano (singular, si la categoría que se está considerando es módulos cruzados de álgebras conmutativas).

**Lema 89** *Dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ , se verifica que el módulo cruzado  $(C, R, \nu)/[(C, R, \nu), (C, R, \nu)] = (C/RC, R/R^2, \nu)$  es singular.*

**Demostración:**

- Sean  $\bar{r}, \bar{s} \in R/R^2$ . Como  $rs \in R^2$  se tiene que  $\bar{r}\bar{s} \equiv 0$ .
- Sean  $\bar{c} \in C/RC, \bar{r} \in R/R^2$ . Como  $rc \in RC$  se tiene que  $\bar{r}\bar{c} \equiv 0$ . □

### 2.3. Producto tensor de módulos cruzados

A continuación se verá cómo funciona el producto tensor en módulos cruzados. Para ello, debemos hacer unas consideraciones previas.

Sean  $(C, R, \nu), (C', R', \nu'), (A, B, \sigma)$  módulos cruzados que verifican que  $C, C', R, R'$  son  $B$ -álgebras (y por tanto también son  $A$ -álgebras). En este caso se pueden construir los productos tensores de álgebras  $C \otimes_A C', C \otimes_B R', C' \otimes_B R, R \otimes_B R'$ . A continuación vamos a definir dos aplicaciones: sean  $c \in C, c' \in C', r \in R, r' \in R'$  :

$$\begin{aligned} \alpha : C \otimes_A C' &\rightarrow (C \otimes_B R') \oplus (R \otimes_B C') \\ (c, c') &\mapsto \nu(c) \otimes c' - c \otimes \nu'(c') \equiv (-c \otimes \nu'(c'), \nu(c) \otimes c') \\ \beta : (C \otimes_B R') \oplus (R \otimes_B C') &\rightarrow R \otimes_B R' \\ c \otimes r' &\mapsto \nu(c) \otimes r \\ r \otimes c' &\mapsto r \otimes \nu(c') \end{aligned}$$

Se verifica que  $\beta \circ \alpha = 0$  :

$$(\beta \circ \alpha)(c, c') = \beta(\nu(c) \otimes c' - c \otimes \nu'(c')) = \beta((\nu(c) \otimes c') - \beta(c \otimes \nu'(c')) = \nu(c) \otimes \nu'(c') - \nu(c) \otimes \nu'(c') = 0.$$

Este hecho permite definir una aplicación  $\sigma \equiv \nu \otimes \nu'$  :

$$\begin{aligned} \sigma \equiv \nu \otimes \nu' : \text{coker } \alpha &= ((C \otimes_B R') \oplus (R \otimes_B C')) / \text{Im } \alpha \rightarrow R \otimes_B R' \\ (c \otimes r') \text{ Im } \alpha &\mapsto \nu(c) \otimes r' \\ (r \otimes c') \text{ Im } \alpha &\mapsto r \otimes \nu'(c) \end{aligned}$$

Éste será el módulo cruzado tensor de  $(C, R, \nu), (C', R', \nu')$  sobre  $(A, B, \sigma)$ :

$$(C, R, \nu) \otimes_{(A, B, \sigma)} (C', R', \nu') := (((C \otimes_B R') \oplus (R \otimes_B C')) / \text{Im } \alpha, R \otimes_B R', \nu \otimes \nu').$$

Veamos que así definido es efectivamente un módulo cruzado:

- $\sigma(rc) = r\sigma(c)$ .

$$- \sigma((r \otimes r')(c \otimes r'')) \operatorname{Im} \alpha = \sigma((rc \otimes r'r'')) \operatorname{Im} \alpha = \nu(rc) \otimes r'r'' = r\nu(c) \otimes r'r'' = (r \otimes r')(\nu(c) \otimes r'') = (r \otimes r')\sigma((c \otimes r'') \operatorname{Im} \alpha), \text{ donde } c \in C, r \in R, r', r'' \in R'.$$

$$- \sigma((r \otimes r')(r'' \otimes c')) \operatorname{Im} \alpha = \sigma((rr'' \otimes r'c')) \operatorname{Im} \alpha = rr'' \otimes \nu'(r'c') = rr'' \otimes r'\nu'(c') = (r \otimes r')(r'' \otimes \nu'(c')) = (r \otimes r')\sigma((r'' \otimes c') \operatorname{Im} \alpha), \text{ donde } c' \in C', r' \in R', r, r'' \in R.$$

- $\sigma(c)c' = cc'$ .

$$- \sigma(c \otimes r')(d \otimes s') = (\nu(c) \otimes r')(d \otimes s') = \nu(c)d \otimes r's' = cd \otimes r's' = (c \otimes r')(d \otimes s'), \text{ donde } c, d \in C, r', s' \in R'.$$

$$- \sigma(r \otimes c')(s \otimes d') = (r \otimes \nu'(c'))(s \otimes d') = rs \otimes \nu'(c')d' = rs \otimes c'd' = (r \otimes c')(s \otimes d'), \text{ donde } c', d' \in C', r, s \in R.$$

Un caso particular se encuentra al considerar la misma estructura como álgebras para  $C, C', R, R'$ ; es decir, si  $R, R'$  son  $K$ -álgebras, como  $C, C'$  heredan esta estructura, se puede considerar el producto tensor de  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  sobre el módulo cruzado  $(K, K, id)$ :

$$(C, R, \nu) \otimes_{(K, K, id)} (C', R', \nu') = ((C \otimes_K R') \oplus (R \otimes_K C'), R \otimes_K R', \nu \otimes \nu').$$

**Definición 90** Se definen las  $K$ -álgebras de homotopía de un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  de la siguiente manera:

$$\pi_0(\nu) = \operatorname{coker}(\nu).$$

$$\pi_1(\nu) = \operatorname{ker}(\nu).$$

$$\pi_n(\nu) = 0 \text{ para todo } n > 1.$$

**Proposición 91** Dados dos módulos cruzados  $(C, R, \nu), (C', R', \nu')$  se verifica:

- 1)  $\pi_0(\sigma) = \pi_0(\nu) \otimes \pi_0(\nu')$ .
- 2)  $\pi_1(\sigma) = (\pi_0(\nu) \otimes \pi_1(\nu')) \oplus (\pi_1(\nu) \otimes \pi_0(\nu'))$ .

donde  $\sigma$  denota el morfismo del módulo cruzado  $(C, R, \nu) \otimes (C', R', \nu')$ .

**Demostración:**

1) Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : \pi_0(\sigma) = (R \otimes R') / \text{Im } \sigma &\rightarrow \pi_0(\nu) \otimes \pi_0(\nu') = (R / \text{Im } \nu) \otimes (R' / \text{Im } \nu') \\ (r \otimes r') \text{Im } \sigma &\longmapsto r \text{Im } \nu \otimes r' \text{Im } \nu' \end{aligned}$$

Veremos que es un isomorfismo:

- $\phi$  está bien definida: sean  $r \otimes r', s \otimes s' \in R \otimes R'$  tales que  $r \otimes r' - s \otimes s' \in \text{Im } \sigma$ .

Por tanto,  $r \otimes r' - s \otimes s' \in \text{Im}(\nu \otimes \nu')$  será combinación lineal de elementos del tipo  $\nu(a) \otimes b, a \otimes \nu'(b)$  con  $a \in R, b \in R'$ . Pero  $\phi(\nu(a) \otimes b) = (\nu(a) \text{Im } \nu) \otimes (b \text{Im } \nu') = \bar{0}$  y  $\phi(a \otimes \nu'(b)) = \bar{0}$ . Es decir, se tiene que  $\phi(r \otimes r' - s \otimes s') = \bar{0} \Rightarrow \phi(r \otimes r') = \phi(s \otimes s')$ .

- $\phi$  es sobreyectiva: sea  $(r \text{Im } \nu) \otimes (r' \text{Im } \nu')$  un elemento generador de  $(R / \text{Im } \nu) \otimes (R' / \text{Im } \nu')$ . La preimagen de este elemento es  $(r \otimes r') \text{Im } \sigma \in (R \otimes R') / \text{Im } \sigma$ .

- $\phi$  es inyectiva: sean  $r \in R, r', s' \in R'$  tales que  $\phi((r \otimes r') \text{Im } \sigma) = \phi((r \otimes s') \text{Im } \sigma) \Rightarrow (r \text{Im } \nu) \otimes (r' \text{Im } \nu') = (r \text{Im } \nu) \otimes (s' \text{Im } \nu')$ .  $\Rightarrow$  Por tanto, existe  $c \in C \mid r \otimes r' - r \otimes s' = \nu(c) \otimes (r' - s') \in \text{Im}(\sigma) \Rightarrow \bar{r} \otimes \bar{r}' = \bar{r} \otimes \bar{s}'$ .

- El resto de las comprobaciones es trivial.

2) Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : (\text{coker}(\nu) \otimes \ker(\nu')) \oplus (\ker(\nu) \otimes \text{coker}(\nu')) &\rightarrow \pi_1(\sigma) = \ker \sigma \\ (r \text{Im } \nu) \otimes c' &\longmapsto (r \otimes c') \text{Im } \alpha \\ c \otimes (r' \text{Im } \nu') &\longmapsto (c \otimes r') \text{Im } \alpha \end{aligned}$$

Veremos que es un isomorfismo:

- $\phi$  está bien definida en el sentido de que  $\text{Im } \phi \subseteq \ker \sigma$  :

$$-\sigma((r \otimes c') \text{Im } \alpha) = r \otimes \nu'(c') = r \otimes 0 = 0, \text{ donde } r \in R, c' \in \ker \nu'.$$

$$-\sigma((c \otimes r') \text{Im } \alpha) = \nu(c) \otimes r = 0 \otimes r' = 0, \text{ donde } c \in \ker \nu, r' \in R'.$$

- $\phi$  está bien definida en el sentido de que no depende del representante elegido: sean  $r, r' \in R \mid r - r' \in \text{Im } \nu, c \in C'$ . Tenemos que comprobar que  $\phi((r \text{Im } \nu) \otimes c') = \phi((r' \text{Im } \nu) \otimes c')$ .

$$\left. \begin{aligned} \phi((r \operatorname{Im} \nu) \otimes c') &= (r \otimes c') \operatorname{Im} \alpha \\ \phi((r' \operatorname{Im} \nu) \otimes c') &= (r' \otimes c') \operatorname{Im} \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$r \otimes c' - r' \otimes c' = (r - r') \otimes c' = \nu(a) \otimes c' \in \operatorname{Im} \alpha.$$

El razonamiento es análogo para comprobar que, dados  $r, r' \in R' \mid r - r' \in \operatorname{Im} \nu', c \in C$ , se verifica  $\phi((r \operatorname{Im} \nu) \otimes c') = \phi((r' \operatorname{Im} \nu) \otimes c')$ .

- $\phi$  es sobreyectiva: dados  $c \in C, c' \in C', r \in R, r' \in R'$ , consideramos  $(c \otimes r') \operatorname{Im} \alpha, (r \otimes c') \operatorname{Im} \alpha \in \ker \sigma$ . Sus preimágenes son respectivamente  $c \otimes (r' \operatorname{Im} \nu')$  y  $(r \operatorname{Im} \nu) \otimes c'$ .

- $\phi$  es inyectiva: sean  $r \in R, c \in C'$  tales que  $\phi((r \operatorname{Im} \alpha) \otimes c') = \overline{r \otimes c'}$ , con  $r \otimes c' \in \operatorname{Im} \alpha \Rightarrow$  existe  $(a, b) \in C \otimes C' \mid \nu(a) \otimes b = r \otimes c' \Rightarrow r \in \operatorname{Im} \alpha \Rightarrow (r \operatorname{Im} \alpha) \otimes c' = \overline{0}$ .

El razonamiento considerando  $c \in C, r' \in R'$  tales que  $\phi(c \otimes (r' \operatorname{Im} \nu')) = \overline{r \otimes c'}$ , con  $r \otimes c' \in \operatorname{Im} \alpha$  es análogo.

- Las demás comprobaciones son triviales. □

**Observación 92** *El producto tensor definido para módulos cruzados generaliza el producto tensor existente en álgebras:*

- Sean  $C$  y  $C'$  dos  $R$ -álgebras conmutativas y consideremos los módulos cruzados  $(C, C, id)$  y  $(C', C', id)$ . Se tiene que  $(C, C, id) \otimes_{(R, R, id)} (C', C', id) = (((C \otimes_R C') \oplus (C' \otimes_R C)) / \operatorname{Im} \alpha, C \otimes_R C', \sigma)$ , pero los generadores de  $\operatorname{Im} \alpha$  serán de la forma  $(-c \otimes c', c \otimes c')$  con lo que  $(C, C, id) \otimes_{(R, R, id)} (C', C', id) = (C \otimes_R C', C \otimes_R C', id)$  que representa el producto tensor de álgebras.

- Sean  $R$  y  $R'$  dos  $K$ -álgebras conmutativas y consideremos los módulos cruzados  $(0, R, 0)$  y  $(0, R', 0)$ . En este caso las aplicaciones  $\alpha$  y  $\sigma$  definidas en la construcción del producto tensor son ambas la aplicación cero. Por tanto se tiene que  $(0, R, 0) \otimes_{(K, K, id)} (0, R', 0) = ((0 \otimes_K R') \oplus (R \otimes_K 0), R \otimes_K R', 0) = (0, R \otimes_K R', 0)$  que representa el producto tensor de álgebras.

## 2.4. Producto semidirecto de módulos cruzados

Vamos a introducir ahora el concepto de producto semidirecto de dos módulos cruzados  $(C', R', \nu')$  y  $(C, R, \nu)$ . Para ello es necesario que  $(C, R, \nu)$  sea singular y  $(C', R', \nu')$  actúe sobre  $(C, R, \nu)$ , es decir, debe existir un morfismo  $(\alpha, \beta) : (C', R', \nu') \rightarrow \mathcal{A}(C, R, \nu) = (U(R, C), M(C, R, \nu), \Delta = (\theta, \sigma))$ .

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta = (\beta_1, \beta_2) \\ U(R, C) & \xrightarrow{\Delta} & M(C, R, \nu) \end{array}$$

Vamos a hacer las siguientes consideraciones:

- $C'$  actúa sobre  $C$  : sean  $c \in C, c' \in C'$ . Se tiene que  $\alpha(c') \in U(R, C)$  induce  $\theta_{\alpha(c')} \in M(C)$  definida de la siguiente manera:  $\theta_{\alpha(c')}(c) = \alpha(c')(\nu(c))$ , es decir,  $c' * c = \alpha(c')(\nu(c))$ . Por tanto, se puede construir  $C \rtimes C'$ .
- $R'$  actúa sobre  $R$  : sean  $r \in R, r' \in R'$ .  $\beta_2(r') \in M(R)$  y permite definir  $r' * r = \beta_2(r')(r)$ . Por tanto, se puede construir  $R \rtimes R'$ .
- $R \rtimes R'$  actúa sobre  $C \rtimes C'$  de la siguiente manera: sean  $(c, c') \in C \rtimes C', (r, r') \in R \rtimes R', (r, r') * (c, c') = (\alpha(c')(r) + \beta_1(r')(c) + rc, r'c') \in C \rtimes C'$ .

Así definida es una acción ya que induce una aplicación:

$$\begin{aligned} \lambda : R \rtimes R' &\rightarrow \text{Mult}(C \rtimes C') \\ (r, r') &\longmapsto (r, r') * \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que  $(r, r') * \in \text{Mult}(C \rtimes C')$ ; para ello deberemos tener en cuenta la siguiente igualdad:  $f(r\nu(c)) = f(r)\nu(c) = f(r)c$ , donde  $f \in U(R, C), c \in C, r \in R$ .

Sean  $(c, c'), (d, d') \in C \rtimes C'$ ,  $(r, r') * ((c, c')(d, d')) = (r, r') * (cd + \alpha(d')\nu(c) + \alpha(c')\nu(d), c'd') = (rcd + r\alpha(d')\nu(c) + r\alpha(c')\nu(d) + \alpha(c'd')(r) + \beta_1(r')(cd) + \beta_1(r')(\alpha(d')\nu(c)) + \beta_1(r')(\alpha(c)\nu(d')), r'c'd')$ .

Por otro lado se tiene que  $((r, r') * (c, c'))(d, d') = (\alpha(c')(r) + \beta_1(r')(c) + rc, r'c')(d, d') = (rcd + \alpha(c')(r)(d) + \beta_1(r')(c)d + \alpha(r'c')(d) + \alpha(c')(r)d' + \alpha(d')(\nu(rc)) + d'\beta_1(r')(c), r'c'd')$ .

Vamos a ver que ambos desarrollos son iguales término a término:

- $r\alpha(d')(\nu(c)) = \alpha(d')(r\nu(c)) = \alpha(d')(\nu(rc))$ .
- $r\alpha(c')(\nu(d)) = \alpha(c)(r\nu(d')) = \alpha(c)(\nu(rd'))$ .
- $\alpha(c'd')(r) = \alpha(d')(\nu(\alpha(c')(r))) = d'(\nu(\alpha(c')(r)))$ .
- $\beta_1(r')(cd) = \beta_1(r')(c)d$ .
- $\beta_1(r')(\alpha(d')\nu(c)) = \beta_1(r')(\beta_1(\nu'(d))(c)) = \beta_1(r'(\nu'(d)))(c) = \beta_1((\nu'(d)r')(c)) = \beta_1(\nu'(d))(\beta_1(r')(c)) = \alpha(d')(\nu(\beta_1(r')(c))) = d'(\beta_1(r')(c))$ .
- $\beta_1(r')(\alpha(c)\nu(d')) = (\beta_1(r')\alpha(c))\nu(d') = \alpha(r'c')(\nu(d))$ .

Por tanto  $(r, r') * ((c, c')(d, d')) = ((r, r') * (c, c'))(d, d')$ .

**Definición 93** Sean  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  dos módulos cruzados tales que  $(C, R, \nu)$  es singular y  $(C', R', \nu')$  actúa sobre  $(C, R, \nu)$ . Se define:

$$(C, R, \nu) \rtimes (C', R', \nu') := (C \rtimes C', R \rtimes R', \nu \rtimes \nu')$$

donde  $(\nu \rtimes \nu')(c, c') = (\nu(c), \nu'(c'))$ .

Veamos que efectivamente  $(C \rtimes C', R \rtimes R', \nu \rtimes \nu')$  es un módulo cruzado:

i)  $(\nu \rtimes \nu')((r, r')(c, c')) = (\nu \rtimes \nu')(\alpha(c')(r) + \beta_1(r')(c) + rc, r'c') = (\nu(\alpha(c')(r)) + \nu(\beta_1(r')(c)) + \nu(rc), \nu'(r'c')) = (\beta_2(\nu'(c'))(r) + \beta_2(r')(\nu(c)) + r\nu(c), r'\nu'(c')) = (\nu'(c') * r + r' * \nu(c) + r\nu(c), r'\nu'(c')) = (r, r')(\nu \rtimes \nu')(c, c')$ , donde  $(c, c') \in (C, C')$ ,  $(r, r') \in (R, R')$ .

ii)  $((\nu \rtimes \nu')(c, c'))(d, d') = (\nu(c), \nu'(c'))(d, d') = (\alpha(d')(\nu(c)) + \beta_1(\nu'(c'))(d) + \nu(c)d, \nu'(c')d') = (\alpha(d')(\nu(c)) + \theta_{\alpha(c')}(d) + \nu(c)d, \nu'(c')d') = (\alpha(d')(\nu(c)) + \alpha(c')(\nu(d)) + \nu(c)d, \nu'(c')d') = (d' * c + c' * d + cd, c'd') = (c, c')(d, d')$ , donde  $(c, c'), (d', d) \in C \rtimes C'$ .

**Observación 94** *La definición anterior generaliza el producto semidirecto de álgebras:*

- Consideremos los módulos cruzados  $(0, R, 0), (0, R', 0)$  donde  $R^2 = 0$  y  $(0, R', 0)$  actúa sobre  $(0, R, 0)$ , es decir, existe un morfismo de módulos cruzados  $(\alpha, \beta) : (0, R', 0) \rightarrow (U(R, 0), M(0, R, 0), \Delta)$ .

En este caso  $U(R, 0)$  sólo contiene al morfismo trivial  $0 : R \rightarrow 0$  y además  $M(0, R, 0) = (M(0), M(R), 0) \equiv M(R)$ . Por tanto la acción de  $(0, R', 0)$  sobre  $(0, R, 0)$  es un morfismo  $\beta_2 : R' \rightarrow M(R)$ , es decir, una acción de  $R'$  sobre  $R$ .

Finalmente  $(0, R, 0) \rtimes (0, R', 0) = (0, R \rtimes R', 0) \equiv R \rtimes R'$ .

- Sean ahora  $(C, C, id)$  y  $(C', C', id)$  módulos cruzados tales que  $(C, C, id)$  es singular y  $(C', C', id)$  actúa sobre  $(C, C, id)$ , es decir, existe un morfismo de módulos cruzados  $(\alpha, \beta) : (C', C', id) \rightarrow (U(C, C), M(C, C, id), \Delta)$ .

En este caso se tiene que  $U(C, C) \equiv M(C)$  y  $M(C, C, id) \equiv M(C)$ . Por tanto  $\Delta = id_{M(C)}$  y  $\alpha = \beta$  representa la acción de  $C'$  sobre  $C$ .

Finalmente  $(C, C, id) \rtimes (C', C', id) = (C \rtimes C', C \rtimes C', id) \equiv C \rtimes C'$ .

Hay además un punto de vista sobre el producto semidirecto análogo al de álgebras. Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado con submódulos  $(C', R', \nu')$  y  $(C'', R'', \nu'')$  satisfaciendo:

- $(C', R', \nu')$  es singular.
- $(C', R', \nu')$  es un ideal de  $(C, R, \nu)$ .
- $C = C' + C'', R = R' + R''$ .
- $C' \cap C'' = 0, R' \cap R'' = 0$ .

Entonces, hay un morfismo  $(\varepsilon, \rho) : (C'', R'', \nu'') \rightarrow \mathcal{A}(C', R', \nu')$  definido de la siguiente manera:

$\varepsilon : C'' \rightarrow U(R', C')$  viene dado por  $\varepsilon(d) = \varepsilon_d$ , donde  $\varepsilon_d(r) = rd$  para  $r \in R$ .

$\rho : R'' \rightarrow M(C', R', \nu')$  viene dado por  $\rho(s) = (i_s, j_s)$ , donde  $i_s(c) = sc, j_s(r) = rs$  para  $c \in C, r \in R$ .

El producto semidirecto resultante  $(C', R', \nu') \rtimes_{(\varepsilon, \rho)} (C'', R'', \nu'')$  es isomorfo al módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  [4].

## 2.5. La categoría de $(C, R, \nu)$ -módulos

**Definición 95** Sean  $(A, B, \sigma)$  y  $(C, R, \nu)$  dos módulos cruzados. Se dirá que  $(A, B, \sigma)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo si es singular y existe otro módulo cruzado  $(G, H, \omega)$  y una sucesión exacta corta rota a la derecha:

$$0 \longrightarrow (A, B, \sigma) \xrightarrow{(\mu_1, \mu_2)} (G, H, \omega) \begin{array}{c} \xleftarrow{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \\ \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} \end{array} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

**Ejemplo 96** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado singular. Se tiene la sucesión exacta corta rota:

$$0 \longrightarrow (C, R, \nu) \xrightarrow{(id, i_1)} (C, R \times R, \nu) \begin{array}{c} \xleftarrow{(0, p_2)} \\ \xrightarrow{(0, i_2)} \end{array} (0, R, 0) \longrightarrow 0$$

con lo que se verifica que  $(C, R, \nu)$  es un  $(0, R, 0)$ -módulo.

**Teorema 97** Sean  $(A, B, \sigma)$  y  $(C, R, \nu)$  módulos cruzados con  $(A, B, \sigma)$  singular. Entonces  $(A, B, \sigma)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo si y sólo si existe un morfismo de módulos cruzados  $(\alpha, \beta) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(A, B, \sigma)$ .

**Demostración:**

“ $\Leftarrow$ ”

Como  $(C, R, \nu)$  actúa sobre  $(A, B, \sigma)$  podemos tomar  $(G, H, \omega) = (A, B, \sigma) \times (C, R, \nu)$  y consideramos la sucesión:

$$0 \longrightarrow (A, B, \sigma) \xrightarrow{(i_1, i_2)} (A, B, \sigma) \times (C, R, \nu) \begin{array}{c} \xleftarrow{(p_1, p_2)} \\ \xrightarrow{(j_1, j_2)} \end{array} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

donde dados  $a \in A, b \in B, c \in C, r \in R$  se definen:

- $(i_1, i_2)(a, b) = ((a, b), (0, 0))$ .
- $(p_1, p_2)((a, b), (c, r)) = (c, r)$ .
- $(j_1, j_2)(c, r) = ((0, 0), (c, r))$ .

Es trivial comprobar que estas aplicaciones son morfismos de módulos cruzados.

Veamos ahora que la sucesión definida es exacta y rota:

- Es trivial comprobar que  $(i_1, i_2)$  es inyectiva y  $(p_1, p_2)$  sobreyectiva.
- $\ker(p_1, p_2) \subseteq \text{Im}(i_1, i_2)$  : sean  $a \in A, b \in B, c \in C, r \in R$  tales que  $(p_1, p_2)((a, b), (c, r)) = (0, 0) \Rightarrow (c, r) = (0, 0) \Rightarrow (a, b)$  es la preimagen de  $((a, b), (c, r))$ .
- $\text{Im}(i_1, i_2) \subseteq \ker(p_1, p_2)$  trivialmente.
- $(p_1, p_2)((j_1, j_2)(c, r)) = (p_1, p_2)((0, 0), (c, r)) = (c, r)$ . Por tanto  $(j_1, j_2)$  es una sección de  $(p_1, p_2)$ .

“ $\Rightarrow$ ”

Como  $(A, B, \sigma)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo se tiene un módulo cruzado  $(G, H, \omega)$  y el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas y rotas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & G & \xrightleftharpoons[\gamma_1]{\varepsilon_1} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \sigma \downarrow & & \sigma' \downarrow & & \nu \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i_2} & H & \xrightleftharpoons[\gamma_2]{\varepsilon_1} & R & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Se define:

$$\begin{aligned}
 \alpha : C &\rightarrow U(B, A) \\
 c &\longmapsto \alpha(c) \quad \text{donde dado } b \in B, \alpha(c)(b) = i_2(b)\gamma_1(c).
 \end{aligned}$$

Veamos que  $i_2(b)\gamma_1(c) \in A$  :  $\varepsilon_1(i_2(b)\gamma_1(c)) = \varepsilon_2(i_2(b))\varepsilon_1(\gamma_1(c)) = 0 \Rightarrow i_2(b)\gamma_1(c) \in \ker \varepsilon_1 = \text{Im } i_1$  y como  $i_1$  es inyectiva  $A$  se identifica con  $\text{Im } i_1$ .

- $\alpha : C \rightarrow U(B, A)$  es un morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}
 - \alpha(c + c')(b) &= i_2(b)\gamma_1(c + c') = i_2(b)\gamma_1(c) + i_2(b)\gamma_1(c') = \alpha(c)(b) + \\
 &\alpha(c')(b), \text{ donde } c, c' \in C, b \in B.
 \end{aligned}$$

–  $\alpha(kc)(b) = i_2(b)\gamma_1(kc) = ki_2(b)\gamma_1(c) = k\alpha(c)(b)$ , donde  $k \in K, c \in C, b \in B$ .

–  $\alpha(cc')(b) = i_2(b)\gamma_1(cc') = i_2(b)\gamma_1(c)\gamma_1(c') = i_2(b)(\sigma'(\gamma_1(c'))\gamma_1(c)) = (\sigma'(\gamma_1(c'))i_2(b)\gamma_1(c)) = (\sigma'(\gamma_1(c'))(b)\gamma_1(c)) = ((\sigma'(\gamma_1(c'))b)\gamma_1(c)) = \sigma'(\gamma_1(c'))b\gamma_1(c) = \sigma(b\gamma_1(c'))\gamma_1(c) = \sigma(i_2(b)\gamma_1(c'))\gamma_1(c) = \alpha(c)(\sigma(i_2(b)\gamma_1(c'))) = \alpha(c)(\sigma(\alpha(c')(b))) = (\alpha(c)\alpha(c'))(b)$ , donde  $c, c' \in C, b \in B$ .

- Dado  $c \in C$  se verifica que  $\alpha(c)$  es lineal:

–  $\alpha(c)(b + b') = i_2(b + b')\gamma_1(c) = (i_2(b) + i_2(b'))\gamma_1(c) = i_2(b)\gamma_1(c) + i_2(b')\gamma_1(c) = \alpha(c)(b) + \alpha(c)(b')$ , donde  $b, b' \in B$ .

–  $\alpha(c)(kb) = i_2(kb)\gamma_1(c) = ki_2(b)\gamma_1(c) = k\alpha(c)(b)$ , donde  $k \in K$ .

- Dado  $c \in C, \alpha(c) \in U(B, A)$  :

$\alpha(c)(bb') = i_2(bb')\gamma_1(c) = (i_2(b)i_2(b'))(\gamma_1(c)) = i_2(b)(i_2(b')\gamma_1(c)) = i_2(b)(\alpha(c)(b')) \equiv b(\alpha(c)(b'))$ , donde  $b, b' \in B$ .

Por otro lado definimos:

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta_1, \beta_2) : R \rightarrow M(A, B, \sigma) \\ r &\longmapsto (\beta_1(r), \beta_2(r)) \end{aligned}$$

donde dados  $a \in A, b \in B, \beta_1(r)(a) = \gamma_2(r)i_1(a), \beta_2(r)(b) = \gamma_2(r)i_2(b)$ .

Vamos a comprobar que pertenecen a  $A$  y  $B$  respectivamente:

$\varepsilon_1(\gamma_2(r)i_1(a)) = \varepsilon_2(\gamma_2(r))\varepsilon_1(i_1(a)) = 0 \Rightarrow \beta_1(r)(a) \in \ker \varepsilon_1 = \text{Im } i_1$ . Como  $i_1$  es inyectiva se puede identificar  $A$  con  $\text{Im } i_1$ .

$\varepsilon_2(\gamma_2(r)i_2(b)) = 0 \Rightarrow \beta_2(r)(b) \in \ker \varepsilon_2 = \text{Im } i_2$ . Como  $i_2$  es inyectiva se puede identificar  $B$  con  $\text{Im } i_2$ .

- $\beta_1 : R \rightarrow M(A)$  y  $\beta_2 : R \rightarrow M(B)$  son morfismos de álgebras. Vamos a comprobarlo para  $\beta_1$  (el razonamiento para  $\beta_2$  es similar):

–  $\beta_1(r + r')(a) = \gamma_2(r + r')i_1(a) = \gamma_2(r)i_1(a) + \gamma_2(r')i_1(a) = \beta_1(r)(a) + \beta_1(r')(a)$ , donde  $r, r' \in R, a \in A$ .

–  $\beta_1(kr)(a) = \gamma_2(kr)i_1(a) = k\gamma_2(r)i_1(a) = k\beta_1(r)(a)$ , donde  $k \in K, r \in R, a \in A$ .

–  $\beta_1(rr')(a) = \gamma_2(rr')i_1(a) = (\gamma_2(r)\gamma_2(r'))i_1(a) = \gamma_2(r)(\gamma_2(r')i_1(a)) = \beta_1(r)(\beta_1(r')(a)) = (\beta_1(r)\beta_1(r'))(a)$ , donde  $r, r' \in R, a \in A$ .

• Dado  $r \in R, \beta_1(r) \in M(A)$  (de forma totalmente análoga se puede probar que  $\beta_2(r) \in M(A)$ ):

–  $\beta_1(r)(ka) = \gamma_2(r)i_1(ka) = k\gamma_2(r)i_1(a) = k\beta_1(r)(a)$ , donde  $k \in K, r \in R, a \in A$ .

–  $\beta_1(r)(a+a') = \gamma_2(r)i_1(a+a') = \gamma_2(r)i_1(a) + \gamma_2(r)i_1(a') = \beta_1(r)(a) + \beta_1(r)(a')$ , donde  $r \in R, a, a' \in A$ .

–  $\beta_1(r)(aa') = \gamma_2(r)i_1(aa') = (\gamma_2(r))(i_1(a)i_1(a')) = (\gamma_2(r)i_1(a))i_1(a') = (\beta_1(r)(a))a'$ , donde  $r \in R, a, a' \in A$ .

Finalmente veremos que  $(\alpha, \beta) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(A, B, \sigma)$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & R \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ U(B, A) & \xrightarrow{\Delta=(\Delta_1, \Delta_2)} & M(A, B, \sigma) \end{array}$$

• Veamos que  $\Delta\alpha = \beta\nu$  :

–  $(\Delta_1\alpha(c))(a) = \alpha(c)(\sigma(a)) = i_2(\sigma(a))\gamma_1(c) = (\sigma'i_1(a))\gamma_1(c) = i_1(a)\gamma_1(c) = \sigma'(\gamma_1(c))i_1(a) = \gamma_2(\nu(c))i_1(a) = (\beta_1\nu(c))(a)$ , donde  $c \in C, a \in A$ .

–  $(\Delta\alpha(c))(a) = \sigma(\alpha(c)(b)) = \sigma(i_2(b)\gamma_1(c)) = \sigma'(i_2(b)\gamma_1(c)) = \sigma'(\gamma_1(c))i_2(b) = \gamma_2(\nu(c))i_2(b) = (\beta_2\nu(c))(b)$ , donde  $c \in C, b \in B$ .

•  $\alpha(rc)(b) = i_2(b)\gamma_1(rc) = b\gamma_2(r)\gamma_1(c) = \gamma_2(r)b\gamma_1(c) = \gamma_2(r)i_1(b\gamma_1(c)) = \beta_1(r)(b\gamma_1(c)) = \beta_1(r)(i_2(b)\gamma_1(c)) = \beta_1(r)(\alpha(c)(b)) = (\beta(r)\alpha(c))(b)$ , donde  $c \in C, r \in R, b \in B$ .  $\square$

**Corolario 98** Sean  $(C, R, \nu), (A, B, \sigma)$  módulos cruzados tales que  $(A, B, \sigma)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo, es decir, existe un módulo cruzado  $(G, H, \omega)$  y una sucesión exacta corta rota a la derecha del siguiente tipo:

$$0 \longrightarrow (A, B, \sigma) \xrightarrow{(\mu_1, \mu_2)} (G, H, \omega) \begin{array}{c} \xleftarrow{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \\ \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} \end{array} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

Dicha sucesión es equivalente a la sucesión exacta corta rota a la derecha:

$$0 \longrightarrow (A, B, \sigma) \xrightarrow{(i_1, i_2)} (A, B, \sigma) \times (C, R, \nu) \begin{array}{c} \xleftarrow{(p_1, p_2)} \\ \xrightarrow{(j_1, j_2)} \end{array} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

en el sentido de que existe un isomorfismo de módulos cruzados  $(\phi_1, \phi_2) : (A, B, \sigma) \times (C, R, \nu) \rightarrow (G, H, \omega)$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (A, B, \sigma) & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & (A, B, \sigma) \times (C, R, \nu) & \begin{array}{c} \xleftarrow{(p_1, p_2)} \\ \xrightarrow{(j_1, j_2)} \end{array} & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & (\phi_1, \phi_2) \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (A, B, \sigma) & \xrightarrow{(\mu_1, \mu_2)} & (G, H, \omega) & \begin{array}{c} \xleftarrow{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \\ \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} \end{array} & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \end{array}$$

### Demostración:

En la demostración del anterior teorema se describe cómo es la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(A, B, \sigma)$ . Además, basta demostrar que existe un morfismo de módulos cruzados:

$$(\phi_1, \phi_2) : (A, B, \sigma) \times (C, R, \nu) \rightarrow (G, H, \omega)$$

que hace conmutativo el diagrama, ya que por el lema 32 éste será automáticamente un isomorfismo.

Sean  $a \in A, b \in B, c \in C, r \in R$ ; definimos  $(\phi_1, \phi_2)((a, b), (c, r)) = (\mu_1(a) + \gamma_1(c), \mu_2(b) + \gamma_2(r))$ . Así definido  $(\phi_1, \phi_2)$  hace el diagrama conmutativo:

- $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(\phi_1, \phi_2)((a, b), (c, r)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)(\mu_1(a) + \gamma_1(c), \mu_2(b) + \gamma_2(r)) = (\varepsilon_1 \mu_1(a) + \varepsilon_1 \gamma_1(c), \varepsilon_2 \mu_2(b) + \varepsilon_2 \gamma_2(r)) = (c, r) = (p_1, p_2)((a, b), (c, r))$ .
- $(\phi_1, \phi_2)(i_1, i_2)(a, b) = (\phi_1, \phi_2)((a, b), (0, 0)) = (\mu_1(a), \mu_2(b))$ .

Es trivial comprobar que tanto  $\phi_1$  como  $\phi_2$  son morfismos de álgebras. Veremos a continuación que  $(\phi_1, \phi_2)$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc} A \rtimes C & \xrightarrow{\sigma \times \nu} & B \rtimes R \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\ G & \xrightarrow{\omega} & H \end{array}$$

i)  $\phi_2(\sigma \times \nu)(a, c) = \phi_2(\sigma(a), \nu(c)) = \mu_2(\sigma(a)) + \gamma_2(\nu(c)) = \omega\mu_1(a) + \gamma_1(c) = \omega\phi_1(a, c)$ , donde  $a \in A, c \in C$ .

ii)  $\phi_1((b, r)(a, c)) = \phi_1(ba + \alpha(c)(b) + \beta_1(r)(a), rc) = \phi_1(ba + \mu_2(b)\gamma_1(c) + \gamma_2(r)\mu_1(a), rc) = \mu_1(ba) + \mu_1(\mu_2(b)\gamma_1(c)) + \mu_1(\gamma_2(r)\mu_1(a)) + \gamma_1(rc)$ , donde  $a \in A, b \in B, c \in C, r \in R$ .

Por otro lado  $\phi_2(b, r)\phi_1(a, c) = (\mu_1(a) + \gamma_1(c))(\mu_2(b) + \gamma_2(r)) = \mu_1(a)\mu_2(b) + \gamma_2(r)\mu_1(a) + \gamma_1(c)\mu_2(b) + \gamma_1(c)\gamma_2(r)$ , y teniendo en cuenta que  $\mu$  es un monomorfismo y estamos identificando  $A$  con  $\mu(A)$ , se verifica la igualdad de ambos términos.  $\square$

**Observación 99** Este teorema muestra que un  $(C, R, \nu)$ -módulo es un módulo cruzado singular  $(A, B, \sigma)$  sobre el que actúa  $(C, R, \nu)$  mediante un morfismo  $(\alpha, \beta) : (C, R, \nu) \rightarrow (U(B, A), M(A, B, \sigma), \Delta)$ . Por esto, cuando se quiera explicitar dicha acción se dirá que  $(A, B, \sigma)$  es un  $(C, R, \nu)_{(\alpha, \beta)}$ -módulo.

**Observación 100** El teorema y el corolario que se acaban de enunciar ponen de manifiesto que los  $(C, R, \nu)$ -módulos son los objetos grupo abeliano en la categoría  $XMod_K/(C, R, \nu)$ , que es la definición clásica. Así, dado  $(A, B, \sigma)$ , un  $(C, R, \nu)$ -módulo, el objeto grupo abeliano que define en la categoría  $XMod_K/(C, R, \nu)$  viene dado por la proyección natural  $(A, B, \sigma) \rtimes (C, R, \nu) \rightarrow (C, R, \nu)$ .

**Lema 101** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Consideremos ahora un  $(C, R, \nu)$ -módulo,  $(C', R', \nu')$ . Entonces  $(C', R', \nu')$  verifica que es también un  $(C' \rtimes C, R' \rtimes R, \nu' \rtimes \nu)$ -módulo.

**Demostración:**

Sólo hace falta comprobar que  $(C' \rtimes C, R' \rtimes R, \nu' \rtimes \nu)$  actúa sobre  $(C', R', \nu')$ , y esta acción vendrá dada vía las proyecciones  $p_1 : C' \rtimes C \rightarrow C, p_2 : R' \rtimes R \rightarrow R$ , donde  $p_1(c', c) = c, p_2(r', r) = r$ .

$$\begin{array}{ccc}
 C' \rtimes C & \xrightarrow{\nu' \rtimes \nu} & R' \rtimes R \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\
 C & \xrightarrow{\nu} & R \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 U(R', C') & \xrightarrow{\Delta} & M(C', R', \nu')
 \end{array}$$

□

**Lema 102** Consideremos el complejo de cadenas:

$$\cdots \longrightarrow (G_{n-1}, H_{n-1}, \omega_{n-1}) \xrightarrow{(f, f')} (G_n, H_n, \omega_n) \xrightarrow{(g, g')} (G_{n+1}, H_{n+1}, \omega_{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

de  $(C, R, \nu)$ -módulos. La homología en el punto  $n$ -ésimo de este complejo es también un  $(C, R, \nu)$ -módulo.

**Demostración:**

Se tiene que  $\ker(g, g')$  e  $\text{Im}(f, f')$  son singulares porque  $\ker(g, g'), \text{Im}(f, f') \subseteq (G_n, H_n, \omega_n)$ . Además, la sucesión exacta corta rota:

$$0 \longrightarrow (G_n, H_n, \omega_n) \longrightarrow (G_n, H_n, \omega_n) \rtimes (C, R, \nu) \rightleftarrows (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

induce las sucesiones exactas cortas rotas:

$$0 \longrightarrow \ker(g, g') \longrightarrow \ker(g, g') \rtimes (C, R, \nu) \rightleftarrows (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Im}(f, f') \longrightarrow \text{Im}(f, f') \rtimes (C, R, \nu) \rightleftarrows (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

que a su vez inducen la sucesión exacta corta rota:

$$\ker(g, g') / \text{Im}(f, f') \twoheadrightarrow \ker(g, g') / \text{Im}(f, f') \rtimes (C, R, \nu) \xleftarrow{\cong} (C, R, \nu)$$

□

**Lema 103** Sean  $(A, B, \sigma)$  y  $(G, H, \omega)$  dos  $(C, R, \nu)$ -módulos. Su producto tensor  $(A, B, \sigma) \otimes_{(C, R, \nu)} (G, H, \omega)$  es un  $(G, H, \omega)$ -módulo.

**Demostración:**

Por ser  $(A, B, \sigma)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo, existe un morfismo  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(A, B, \sigma) = (U(B, A), M(A, B, \sigma), \Delta)$ . Se tienen entonces morfismos  $R \rightarrow M(A), R \rightarrow M(B)$  y por tanto  $A$  y  $B$  son  $R$ -álgebras.

El mismo razonamiento muestra que  $G$  y  $H$  son también  $R$ -álgebras y por tanto se puede considerar el tensor  $(A, B, \sigma) \otimes_{(C, R, \nu)} (G, H, \omega)$ .

Se tienen también morfismos  $(G, H, \omega) \rightarrow (A, B, \sigma) \otimes_{(C, R, \nu)} (G, H, \omega) \rightarrow \mathcal{A}((A, B, \sigma) \otimes_{(C, R, \nu)} (G, H, \omega))$  y además  $(A, B, \sigma) \otimes_{(C, R, \nu)} (G, H, \omega) = (((B \otimes G) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha, B \otimes H, \sigma \otimes \omega)$  es singular porque tanto  $(A, B, \sigma)$  como  $(G, H, \omega)$  lo son:

- $(b \otimes h)(b' \otimes h') = bb' \otimes hh' = 0$ , donde  $b \otimes h, b' \otimes h' \in B \otimes H$ .
- $(b \otimes h)(b' \otimes g) = bb' \otimes hg = 0$ , donde  $b \otimes h \in B \otimes H, b' \otimes g \in B \otimes G$ .
- $(b \otimes h)(h' \otimes a) = bh' \otimes ha = 0$ , donde  $b \otimes h \in B \otimes H, h' \otimes a \in H \otimes A$ . □

**Definición 104** Consideremos  $(A, B, \sigma)$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha, \beta)}$ -módulo y  $(A', B', \sigma')$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha', \beta')}$ -módulo. Se define un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos  $(f, g) : (A, B, \sigma) \rightarrow (A', B', \sigma')$  como un morfismo de módulos cruzados que además conserva la acción, es decir:

- i)  $f(r * a) = f(\beta_1(r)(a)) = \beta'_1(r)(f(a)) = r * f(a)$ , donde  $a \in A, r \in R$ .
- ii)  $g(r * b) = g(\beta_2(r)(b)) = \beta'_1(r)(g(b)) = r * g(b)$ , donde  $b \in B, r \in R$ .
- iii)  $f(\alpha(c)(b)) = \alpha'(c)(g(b))$ , donde  $b \in B, c \in C$ .

Al conjunto de todos los morfismos de  $(C, R, \nu)$ -módulos entre  $(A, B, \sigma)$  y  $(A', B', \sigma')$  lo denotaremos por  $Hom_{(C, R, \nu)}((A, B, \sigma), (A', B', \sigma'))$ . Este conjunto tiene estructura de grupo abeliano con la operación definida de la siguiente manera:

$((f, f') + (g, g'))(a, b) := (f + g, f' + g')(a, b) = ((f + g)(a), (f' + g')(b)) = (f(a) + g(a), f'(b) + g'(b))$ , donde  $(f, f'), (g, g') \in Hom_{(C, R, \nu)}((A, B, \sigma), (A', B', \sigma'))$ ,  $a \in A, b \in B$ . La aplicación  $(f, f') + (g, g')$  así definida es un morfismo de módulos cruzados:

$$\bullet \sigma'(f + g)(a) = \sigma'(f(a) + g(a)) = \sigma'(f(a)) + \sigma'(g(a)) = f'(\sigma(a)) + g'(\sigma(a)) = (f' + g')(\sigma(a)).$$

• La segunda condición se tiene automáticamente ya que la acción de  $B$  sobre  $A$  y la de  $B'$  sobre  $A'$  son singulares, por ser  $(A, B, \sigma)$  y  $(A', B', \sigma')$  singulares.

Además  $(f, f') + (g, g')$  conserva la acción ya que cada uno de los sumandos la conserva; por tanto es un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos. Por otro lado, es trivial comprobar que el morfismo  $(0, 0)$  es el elemento neutro de la operación y que, dado un morfismo  $(f, f')$ , se tiene que  $(-f, -f')$  es su inverso.

Hemos definido una categoría  $XMod_{(C, R, \nu)}$  cuyos objetos son los  $(C, R, \nu)$ -módulos y las flechas los morfismos de  $(C, R, \nu)$ -módulos. Dado  $(A, B, \sigma)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo podemos también definir funtores partiendo de esta categoría:

$$\begin{aligned} Hom_{(C, R, \nu)}((A, B, \sigma), -) : XMod_{(C, R, \nu)} &\rightarrow Ab \\ (G, H, \omega) &\longmapsto Hom_{(C, R, \nu)}((A, B, \sigma), (G, H, \omega)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hom_{(C, R, \nu)}(-, (A, B, \sigma)) : XMod_{(C, R, \nu)} &\rightarrow Ab \\ (G, H, \omega) &\longmapsto Hom_{(C, R, \nu)}((G, H, \omega), (A, B, \sigma)) \end{aligned}$$

El primero de ellos es covariante mientras que el segundo es contravariante. Vamos a comprobar el carácter funtorial para el contravariante; para ello primero se debe estudiar cómo funciona sobre los morfismos: sean  $(G, H, \omega), (G', H', \omega')$  dos  $(C, R, \nu)$ -módulos y  $(f, f') : (G, H, \omega) \rightarrow (G', H', \omega')$  un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos entre ellos:

$$\begin{array}{ccc}
(G, H, \omega) & \longmapsto & \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((G, H, \omega), (A, B, \sigma)) \\
(f, f') \downarrow & & \uparrow \circ(f, f') \\
(G', H', \omega') & \longmapsto & ((G', H', \omega'), (A, B, \sigma))
\end{array}$$

Dado  $(h, h') \in \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((G', H', \omega'), (A, B, \sigma))$ ,  $(\circ(f, f'))(h, h') = (h, h') \circ (f, f') = (h \circ f, h' \circ f')$ . Así definida  $\circ(f, f')$  es claramente un homomorfismo de grupos abelianos. El carácter functorial es entonces trivial:

- Dado  $(G'', H'', \omega'')$  otro  $(C, R, \nu)$ -módulo y otro morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos,  $(g, g') : (G', H', \omega') \rightarrow (G'', H'', \omega'')$ , entonces  $(\circ(f, f')) \circ (\circ(g, g')) = \circ((g, g') \circ (f, f'))$ , ya que si  $(h, h') \in \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((G'', H'', \omega''), (A, B, \sigma))$  se tiene  $(\circ(f, f')) \circ (\circ(g, g'))(h, h') = (\circ(f, f'))((h, h') \circ (g, g')) = (h, h') \circ (g, g') \circ (f, f') = (\circ((g, g') \circ (f, f')))(h, h')$ .

- Tomando  $(id_G, id_H) : (G, H, \omega) \rightarrow (G, H, \omega)$  entonces  $\circ(id_G, id_H) = id_{\text{Hom}_{(C, R, \nu)}((G', H', \omega'), (A, B, \sigma))}$ .

**Teorema 105** Dado un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(G, H, \omega)$  el funtor contravariante  $\text{Hom}_{(C, R, \nu)}(-, (G, H, \omega)) : X\text{Mod}_{(C, R, \nu)} \rightarrow Ab$  verifica:

i) es exacto a la izquierda.

ii) es también exacto a la derecha cuando  $(G, H, \omega)$  es inyectivo.

**Demostración:**

Consideremos una sucesión exacta de  $(C, R, \nu)$ -módulos,

$$0 \longrightarrow (A', B', \sigma') \xrightarrow{(f, f')} (A, B, \sigma) \xrightarrow{(g, g')} (A'', B'', \sigma'') \longrightarrow 0$$

Aplicándole  $\text{Hom}_{(C, R, \nu)}(-, (G, H, \omega))$  obtenemos la sucesión

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((A'', B'', \sigma''), (G, H, \omega)) \xrightarrow{\circ(g, g')} \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((A, B, \sigma), (G, H, \omega)) \\
\circ(f, f') \xrightarrow{\rightarrow} \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((A', B', \sigma'), (G, H, \omega))
\end{array}$$

donde dado  $(\alpha, \alpha') \in \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((A'', B'', \sigma''), (G, H, \omega))$ :

- $(\circ(g, g'))(\alpha, \alpha') = (\alpha \circ g, \alpha' \circ g')$ .
- $(\circ(f, f'))(\alpha \circ g, \alpha' \circ g') = (\alpha \circ g \circ f, \alpha' \circ g' \circ f')$ .

Veamos que es una sucesión exacta a la izquierda:

•  $\text{Im}(\circ(g, g')) \subseteq \ker(\circ(f, f'))$  : sea  $(\beta, \beta') \in \text{Im}(\circ(g, g')) \Rightarrow$  existe  $(\alpha, \alpha') \in \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((A'', B'', \sigma''), (G, H, \omega)) \mid (\alpha, \alpha') \circ (g, g') = (\beta, \beta')$  y por tanto se tiene que  $(\circ(f, f'))(\beta, \beta') = (\circ(f, f'))((\circ(g, g'))(\alpha, \alpha')) = (\alpha \circ g \circ f, \alpha' \circ g' \circ f') \equiv (0, 0)$ .

•  $\ker(\circ(f, f')) \subseteq \text{Im}(\circ(g, g'))$  : en este caso, tomando un morfismo  $(\beta, \beta') \in \text{Hom}_{(C, R, \nu)}((A, B, \sigma), (G, H, \omega)) \mid (\beta, \beta') \circ (f, f') \equiv (0, 0) \Rightarrow \beta \circ f(a') = 0, \beta' \circ f'(b') = 0$  para todo  $a' \in A', b' \in B'$ . Es decir  $\beta(x) = 0, \beta'(x') = 0$  para todo  $x \in \text{Im } f, x' \in \text{Im } f' \Rightarrow \beta(x) = 0, \beta'(x') = 0$  para todo  $x \in \ker g, x' \in \ker g'$ . Se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \ker(\beta, \beta') & \xrightarrow{(i, i')} & (A, B, \sigma) \xrightarrow{(g, g')} (A'', B'', \sigma'') \\ & & \downarrow (\beta, \beta') \\ & & (G, H, \omega) \end{array}$$

Como, por lo dicho anteriormente  $(\beta, \beta') \circ (i, i') \equiv (0, 0)$ , por la propiedad universal del núcleo existe  $(k, k') : (A'', B'', \sigma'') \rightarrow (G, H, \omega) \mid (k, k') \circ (g, g') = (\beta, \beta')$ .

El morfismo  $(k, k')$  es la preimagen de  $(\beta, \beta')$ . Para que esto sea cierto se debe comprobar que  $(k, k')$  es un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos, es decir, que conserva la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(A'', B'', \sigma'')$  :

a) Sean  $r \in R, a'' \in A''$ . Se debe comprobar que  $k(ra'') = rk(a'')$ . Como  $g$  es sobreyectiva existe  $a \in A \mid g(a) = a'' \Rightarrow g(ra) = rg(a) = ra'' \Rightarrow k(ra) = k(g(ra)) = \beta(ra) = r\beta(a) = rk(g(a)) = rk(a'')$ .

b) Sean  $r \in R, b'' \in B''$ . Como  $g'$  es sobreyectiva existe  $b \in B \mid g'(b) = b'' \Rightarrow g'(rb) = rg'(b) = rb'' \Rightarrow k'(rb) = k'(g'(rb)) = \beta'(rb) = r\beta'(b) = rk'(g'(b)) = rk'(b'')$ .

c) Sean  $c \in C, b'' \in B''$ . Como  $g'$  es sobreyectiva existe  $b \in B \mid g(b) = b'' \Rightarrow g'(cb) = cg'(b) = cb'' \Rightarrow k'(cb) = k'(g'(cb)) = \beta'(cb) = c\beta'(b) = ck'(g'(b)) = ck'(b'')$ .

•  $\circ(g, g')$  es inyectiva: sea  $(\alpha, \alpha') \in Hom_{(C, R, \nu)}((A'', B'', \sigma''), (G, H, \omega)) \mid (\circ(g, g'))(\alpha, \alpha') \equiv (0, 0) \Rightarrow (\alpha \circ g(a), \alpha' \circ g'(b)) \equiv (0, 0)$  para todo  $a \in A, b \in B$ . Como  $g$  y  $g'$  son sobreyectivas se tiene necesariamente que  $\alpha \equiv 0, \alpha' \equiv 0$ .

Así se ha probado *i*). Para probar *ii*) veremos que  $\circ(f, f')$  es sobreyectiva si  $(G, H, \omega)$  es inyectivo: sea  $(\rho, \rho') \in Hom_{(C, R, \nu)}((A', B', \sigma'), (G, H, \omega))$ . Se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (A', B', \sigma') & \xrightarrow{(f, f')} & (A, B, \sigma) \\ (\rho, \rho') \downarrow & & \\ (G, H, \omega) & & \end{array}$$

Como  $(f, f')$  es inyectiva existe  $(\beta, \beta') : (A, B, \sigma) \rightarrow (G, H, \omega)$  haciendo el diagrama conmutativo. Esta será la preimagen de  $(\rho, \rho')$ ; se comprueba de una manera similar a la anterior que  $(\rho, \rho')$  es un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos.  $\square$

**Teorema 106** Considerando un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(G, H, \omega)$ , el funtor covariante  $Hom_{(C, R, \nu)}((G, H, \omega), -) : XMod_{(C, R, \nu)} \rightarrow Ab$  verifica:

*i*) es exacto a la derecha.

*ii*) es también exacto a la izquierda cuando  $(G, H, \omega)$  es proyectivo.

**Demostración:**

La demostración es dual de la anterior.  $\square$

Consideremos ahora un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(G, H, \omega)$ ; el producto tensor da lugar al siguiente funtor:

$$\begin{aligned} (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} - : XMod_{(C, R, \nu)} &\rightarrow XMod_{(C, R, \nu)} \\ (A, B, \sigma) &\longmapsto (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma) \end{aligned}$$

Al ser  $(A, B, \sigma)$  y  $(G, H, \omega)$   $(C, R, \nu)$ -módulos, tiene sentido considerar su producto tensor sobre  $(C, R, \nu)$ . Además, por un lema enunciado anteriormente  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma)$  es un  $(A, B, \sigma)$ -módulo, y por tanto un  $(C, R, \nu)$ -módulo.

Antes de comprobar el carácter funtorial de  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} -$ , veamos cómo funciona éste sobre los morfismos de  $XMod_{(C, R, \nu)}$ .

Sea  $(A', B', \sigma')$  otro  $(C, R, \nu)$ -módulo y  $(f, f') : (A, B, \sigma) \rightarrow (A', B', \sigma')$  un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos, entonces el morfismo  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (f, f') : (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma) \rightarrow (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A', B', \sigma')$  actúa de la siguiente manera: sean  $a \in A, b \in B, g \in G, h \in H$  :

- $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f)([(h \otimes a), (b \otimes g)]) = [((h \otimes f(a)), (f'(b) \otimes g))].$
- $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(h \otimes b) = h \otimes f'(b).$

Así definida  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (f, f')$  es de  $(C, R, \nu)$ -módulos:

Es trivial comprobar que es de módulos cruzados. Veamos que además conserva la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma)$  : sean  $r \in R, c \in C, a \in A, b \in B, g \in G, h \in H$ . Como  $(f, f')$  es un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos y por tanto conserva la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(A, B, \sigma)$  se tiene:

- $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f)(r * [(h \otimes a), (b \otimes g)]) = ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f)([(h \otimes r * a), (r * b \otimes g)]) = ([h \otimes f(r * a), f'(r * b) \otimes g]) = ([h \otimes r * f(a), r * f'(b) \otimes g]) = r * ([h \otimes f(a), f'(b) \otimes g]) = r * ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f)([(h \otimes a), (b \otimes g)]).$
- $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(r * (h \otimes b)) = ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(h \otimes r * b) = h \otimes f'(r * b) = h \otimes r * f'(b) = r * (h \otimes f'(b)) = r * ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(h \otimes b).$
- $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(c * (h \otimes b)) = ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(h \otimes c * b) = h \otimes f'(c * b) = h \otimes c * f'(b) = c * (h \otimes f'(b)) = c * ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} f')(h \otimes b).$

A continuación veremos el carácter funtorial de  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} -$ . Para esto debemos considerar otro  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(A'', B'', \sigma'')$  y otro morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos  $(j, j') : (A', B', \sigma') \rightarrow (A'', B'', \sigma'')$ .

$$\begin{array}{ccc}
(A, B, \sigma) \longmapsto & (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma) & \\
(f, f') \downarrow & & \downarrow (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (f, f') \\
(A', B', \sigma') \longmapsto & (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A', B', \sigma') & \\
(j, j') \downarrow & & \downarrow (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (j, j') \\
(A'', B'', \sigma'') \longmapsto & (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A'', B'', \sigma'') & 
\end{array}$$

Debemos comprobar que  $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (j, j')) \circ ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (f, f')) = (G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (j \circ f, j' \circ f')$ . Sean  $a \in A, b, b' \in B, g \in G, h, h' \in H$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
& ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (j, j')) \circ ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (f, f'))([(h \otimes a), (b \otimes g)], h' \otimes b') \\
&= ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (j, j'))([(h \otimes f(a)), (f'(b) \otimes g)], h' \otimes f'(b')) = ([(h \otimes jf(a)), (j'f'(b) \otimes g)], h' \otimes j'f'(b')) \\
&= ((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (j \circ f, j' \circ f'))([(h \otimes a), (b \otimes g)], h' \otimes b').
\end{aligned}$$

Ahora, si consideramos  $(id_A, id_B) : (A, B, \sigma) \rightarrow (A, B, \sigma)$  se tiene trivialmente que  $((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (id_A, id_B))([(h \otimes a), (b \otimes g)], h' \otimes b') = ([(h \otimes a), (b \otimes g)], h' \otimes b')$ .

Veamos ahora una proposición relativa a este funtor.

**Proposición 107** *El funtor  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} - : XMod_{(C, R, \nu)} \rightarrow XMod_{(C, R, \nu)}$  es exacto a la derecha.*

**Demostración:**

Consideremos una sucesión exacta de  $(C, R, \nu)$ -módulos,

$$0 \longrightarrow (A', B', \sigma') \xrightarrow{(f, f')} (A, B, \sigma) \xrightarrow{(g, g')} (A'', B'', \sigma'') \longrightarrow 0$$

Al tensorizar obtenemos la sucesión:

$$\begin{aligned}
& (((G \otimes B') \oplus (H \otimes A')) / \text{Im } \alpha', H \otimes B', \sigma' \otimes \omega) \rightarrow (((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha, H \otimes B, \sigma \otimes \omega) \\
& \rightarrow (((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A'')) / \text{Im } \alpha'', H \otimes B'', \sigma'' \otimes \omega).
\end{aligned}$$

Como el tensor en la categoría de álgebras conmutativas es exacto a la derecha tenemos la exactitud a la derecha en las segundas componentes de esta sucesión:

$$H \otimes B' \longrightarrow H \otimes B \longrightarrow H \otimes B'' \longrightarrow 0$$

Veamos ahora qué ocurre en la sucesión relativa a la primera componente:

$$((G \otimes B') \oplus (H \otimes A')) / \text{Im } \alpha' \rightarrow ((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha \rightarrow ((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A'')) / \text{Im } \alpha''.$$

La aplicación inducida entre  $((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha$  y  $((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A'')) / \text{Im } \alpha''$  es  $(id \otimes g, id \otimes g')$ .

$$\begin{aligned} ((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha &\rightarrow ((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A'')) / \text{Im } \alpha'' \\ [(k \otimes b, 0)] &\mapsto [(k \otimes g'(b), 0)] \\ [(0, h \otimes a)] &\mapsto [(0, h \otimes g(a))] \end{aligned}$$

Veamos que esta aplicación está bien definida: supongamos que  $(d \otimes d', c \otimes c')$  es un representante de la misma clase que  $(k \otimes d', 0)$ . Se tiene entonces que  $((k - d) \otimes d', c \otimes c') \in \text{Im } \alpha$ . Tenemos que existen  $(u, v) \in G \otimes A \mid \omega(u) \otimes v - u \otimes \sigma(v) = ((k - d) \otimes d', c \otimes c')$ .

Las imágenes de  $(k \otimes d', 0)$  y  $(d \otimes d', c \otimes c')$  por  $(id \otimes g', id \otimes g)$  son  $(k \otimes g'(d'), 0)$  y  $(d \otimes g'(d'), c \otimes g(c'))$  respectivamente. Lo que se debe comprobar es que  $((k - d) \otimes g'(d'), -c \otimes (-g(c'))) \in \text{Im } \alpha''$ , pero teniendo en cuenta la igualdad anterior es inmediato verificar que  $\alpha''(u, g(v)) = ((k - d) \otimes g'(d'), -c \otimes (-g(c')))$ .

De la misma manera se puede ver que la aplicación está bien definida en los generadores de tipo  $(d \otimes b, 0)$ ,  $(0, h \otimes c')$ ,  $(0, c \otimes a)$ . Queda por comprobar que es un morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc} ((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha & \xrightarrow{(id \otimes g', id \otimes g)} & ((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A'')) / \text{Im } \alpha'' \\ \sigma' \otimes \omega \downarrow & & \downarrow \sigma'' \otimes \omega \\ H \otimes B & \xrightarrow{(id \otimes g)'} & H \otimes B'' \end{array}$$

donde  $(id \otimes g)'$  denota  $id_H \otimes g'$ .

*i.i)*  $(\sigma'' \otimes \omega)((id \otimes g', id \otimes g)[k \otimes b, 0]) = (\sigma'' \otimes \omega)([k \otimes g'(b), 0]) = \sigma''(k) \otimes g'(b) = (id \otimes g)'(\sigma''(k) \otimes b) = (\sigma' \otimes \omega)((id \otimes g)'([k \otimes b, 0]))$ , donde  $k \otimes b \in G \otimes B$ .

*ii.i)*  $(\sigma'' \otimes \omega)((id \otimes g', id \otimes g)[0, h \otimes a]) = (\sigma'' \otimes \omega)([0, h \otimes g(a)]) = h \otimes \sigma'' g(a) = h \otimes g' \sigma(a) = (id \otimes g)'(h \otimes \sigma(a)) = (\sigma' \otimes \omega)((id \otimes g)'([0, h \otimes a, ]))$ , donde  $h \otimes a \in H \otimes A$ .

*ii.ii)*  $(id \otimes g', id \otimes g)((h \otimes b')[k \otimes b, 0]) = (id \otimes g', id \otimes g)[hk \otimes b'b, 0] = [hk \otimes g'(b'b), 0] = [hk \otimes g'(b')g'(b), 0] = (h \otimes g'(b'))[k \otimes g'(b), 0] = ((id \otimes g)'(h \otimes b'))(id \otimes g', id \otimes g)([k \otimes b, 0])$ , donde  $k \otimes b \in G \otimes B, h \otimes b' \in H \otimes B$ .

*ii.ii)*  $(id \otimes g', id \otimes g)((h' \otimes b)[0, h \otimes a]) = (id \otimes g', id \otimes g)[0, h'h \otimes ba] = [0, h'h \otimes g(ba)] = [0, h'h \otimes g'(b)g(a)] = (h' \otimes g'(b))[0, h \otimes g(a)] = ((id \otimes g)'(h' \otimes b))(id \otimes g', id \otimes g)([0, h \otimes a])$ , donde  $h \otimes a \in H \otimes A, h' \otimes b \in H \otimes B$ .

Análogamente, la aplicación inducida entre  $((G \otimes B') \oplus (H \otimes A'))/\text{Im } \alpha'$  y  $((G \otimes B) \oplus (H \otimes A))/\text{Im } \alpha$  es  $(id \otimes f, id \otimes f')$ . Faltan por realizar varias comprobaciones:

- $(id \otimes g, id \otimes g')$  es sobreyectiva. Sea  $[(g \otimes b'', h \otimes a'')]$  un elemento generador de  $((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A''))/\text{Im } \alpha''$ . Como  $g$  y  $g'$  son sobreyectivas, existen  $b \in B, a \in A \mid g(b) = b'', g'(a) = a''$ . Por tanto, la preimagen de  $[(g \otimes b'', h \otimes a'')]$  es  $[(g \otimes b, h \otimes a)]$ .

- $\text{Im}(id \otimes f, id \otimes f') \subseteq \ker(id \otimes g, id \otimes g')$ . Como  $gf \equiv 0, g'f' \equiv 0$ , este contenido se tiene trivialmente.

- $\text{Im}(id \otimes f, id \otimes f') \supseteq \ker(id \otimes g, id \otimes g')$ . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 ((G \otimes B) \oplus (H \otimes A))/\text{Im } \alpha & \longrightarrow & ((G \otimes B'') \oplus (H \otimes A''))/\text{Im } \alpha'' \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 (((G \otimes B) \oplus (H \otimes A))/\text{Im } \alpha)/\text{Im}(id \otimes f, id \otimes f') & \xrightarrow{(j, j')} & 
 \end{array}$$

Este diagrama, en el que  $(j, j')$  actúa como  $(id \otimes g, id \otimes g')$ , es conmutativo debido a que  $\text{Im}(id \otimes f, id \otimes f') \subseteq \ker(id \otimes g, id \otimes g')$ . Lo único que resta por hacer es encontrar una inversa de  $(j, j')$ . Para construirla definimos:

$$(G, H) \times (B'', A'') \xrightarrow{(\varphi, \varphi')} (((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha) / \text{Im}(id \otimes f, id \otimes f')$$

$$((g, h), (b'', a'')) \mapsto [(g \otimes b), (h \otimes a)]$$

donde  $b$  y  $a$  son preimágenes de  $b''$  y  $a''$  por  $g$  y  $g'$  respectivamente.

Este morfismo está bien definido: sean  $c, c'$  otras preimágenes de  $b''$  y  $a''$ . Se debe comprobar que  $(g \otimes (b - c), h \otimes (a - c')) \in \text{Im}(id \otimes f, id \otimes f')$ . Se tiene que  $g(b - c) = g(b) - g(c) = b'' - b'' = 0 \Rightarrow b - c \in \ker g = \text{Im } f$ . Análogamente  $a - c' \in \text{Im } f'$ . Por tanto se verifica que  $(g \otimes (b - c), h \otimes (a - c')) \in \text{Im}(id \otimes f, id \otimes f')$ .

Se tienen aplicaciones en la categoría de álgebras conmutativas:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : G \times B'' &\rightarrow G \otimes B \\ (g, b'') &\mapsto g \otimes b \\ \bar{\varphi}' : H \times A'' &\rightarrow H \otimes A \\ (h, a'') &\mapsto h \otimes a \end{aligned}$$

Estas aplicaciones inducen los morfismos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : G \otimes B'' &\rightarrow G \otimes B \\ g \otimes b'' &\mapsto g \otimes b \\ \bar{\alpha}' : H \otimes A'' &\rightarrow H \otimes A \\ h \otimes a'' &\mapsto h \otimes a \end{aligned}$$

Si consideramos el morfismo

$$(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}') : (G \otimes B'') \oplus (H \otimes A'') \rightarrow (G \otimes B) \oplus (H \otimes A)$$

pasando al cociente se obtiene la inversa de  $(j, j')$ . □

A continuación se verá que el funtor  $(G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)}$  — tiene un adjunto por la derecha. Consideremos dos módulos cruzados  $(C, R, \nu)$  y  $(G, H, \omega)$ . Podemos definir el morfismo de  $K$ -álgebras siguiente:

$$\begin{aligned}\delta : \text{Hom}(R, G) &\longrightarrow \text{Hom}((C, R, \nu), (G, H, \omega)) \\ f &\longmapsto (f \circ \nu, \omega \circ f)\end{aligned}$$

Además,  $\text{Hom}(R, G)$  tiene estructura de  $\text{Hom}((C, R, \nu), (G, H, \omega))$ -álgebra con la siguiente acción:

$$((f, f') * g)(r) = f'(r) * g(r)$$

donde  $(f, f') \in \text{Hom}((C, R, \nu), (G, H, \omega))$ ,  $g \in \text{Hom}(R, G)$ ,  $r \in R$ . Se verifica que  $(\text{Hom}(R, G), \text{Hom}((C, R, \nu), (G, H, \omega)), \delta)$  es un módulo cruzado:

- $(\delta(f) * f')(r) = ((f\nu, \omega f) * f')(r) = (\omega f(r)) * (f'(r)) = f(r)f'(r) = (ff')(r)$ , donde  $r \in R$ ,  $f, f' \in \text{Hom}(R, G)$ .

- $\delta((g, g') * f)(c, r) = \delta(g'f)(c, r) = ((g'f)\nu(c), \omega(g'f)(r)) = (g'\nu(c) * f\nu(c), \omega(g'(r)f(r))) = (\omega g(c) * f\nu(c), g'(r)\omega f(r)) = (g(c)f\nu(c), g'(r)\omega f(r)) = (g(f\nu)(c), g'(r)\omega f(r)) = (g(f\nu), g'(\omega f))(c, r) = (g, g')(f\nu, \omega f)(c, r) = (g, g')\delta(f)(c, r)$ , donde  $f \in \text{Hom}(R, G)$ ,  $(g, g') \in \text{Hom}((C, R, \nu), (G, H, \omega))$ ,  $c \in C$  y  $r \in R$ .

Este módulo cruzado lo denotaremos por  $\text{HOM}((C, R, \nu), (G, H, \omega))$ . Es inmediato comprobar que esta construcción induce un funtor:

$$\text{HOM}((C, R, \nu), -) : \text{XMod}_{(C, R, \nu)} \longrightarrow \text{XMod}_{(C, R, \nu)}$$

**Proposición 108** *Dados dos  $(C, R, \nu)$ -módulos  $(G, H, \omega)$ ,  $(A, B, \sigma)$  y un módulo cruzado  $(M, N, \mu)$  existe un isomorfismo natural:*

$$\begin{aligned}\text{Hom}((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma), (M, N, \mu)) &\cong \\ \text{Hom}((G, H, \omega), \text{HOM}((A, B, \sigma), (M, N, \mu))) &.\end{aligned}$$

Es decir, el funtor  $\text{HOM}((A, B, \sigma), -)$  es adjunto por la izquierda de  $- \otimes (A, B, \sigma)$ .

**Demostración:**

Sea  $((f, f'), j) \in \text{Hom}((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} (A, B, \sigma), (M, N, \mu))$ . El isomorfismo lleva este elemento al morfismo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\omega} & H \\ s \downarrow & & \downarrow (t, t') \\ \text{Hom}(B, M) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}((A, B, \sigma), (M, N, \mu)) \end{array}$$

donde:

- $s(g) = s_g$  es el morfismo tal que  $s_g(b) = f([g \otimes b]) \in M$ .
- $t(h) = t_h$  es el morfismo tal que  $t_h(a) = f'([h \otimes a]) \in M$ .
- $t'(h) = t'_h$  es el morfismo tal que  $t'_h(b) = j(h \otimes b) \in N$ .

Así definido,  $(s, (t, t'))$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$i.1) \delta(s(g))(a) = s_g(\sigma(a)) = f([g \otimes \sigma(a)]) = f'([\omega(g) \otimes a]) = t(\omega(g))(a).$$

$$i.2) \delta(s(g))(b) = \mu(s_g(b)) = \mu(f([g \otimes b])) = j(\omega(g) \otimes b) = t'(\omega(g))(b).$$

$$ii) s(hg)(b) = f([hg \otimes b]) = f((h \otimes b)[g \otimes b]) = j(h \otimes b)f([g \otimes b]) = (t'(h)(b))(s(g)(b)) = \{(t, t')(h)(s(g))\}(b).$$

Recíprocamente, el isomorfismo enunciado aplica un morfismo  $(s, (t, t')) \in \text{Hom}((G, H, \omega), \text{Hom}((A, B, \sigma), (M, N, \mu)))$  en:

$$\begin{array}{ccc} ((G \otimes B) \oplus (H \otimes A)) / \text{Im } \alpha & \xrightarrow{\rho} & H \otimes B \\ (f, f') \downarrow & & \downarrow j \\ M & \xrightarrow{\mu} & N \end{array}$$

donde:

- $f([g \otimes b]) = s(g)(b) \in M$ .
- $f'([h \otimes a]) = t(h)(a) \in M$ .
- $j(h \otimes b) = t'(h)(b) \in N$ .

Estos morfismos están bien definidos, ya que si tomamos  $x \in G$  e  $y \in A$  se tiene que  $(f, f')([x \otimes \sigma(y), -\omega(x) \otimes y]) = s(x)(\sigma(y)) - t(\omega(x))(y) = 0$ , porque  $s(x)(\sigma(y)) = \delta(s(x))(y) = t(\omega(x))(y)$ .

Es trivial comprobar que así definido  $((f, f'), j)$  es un morfismo de módulos cruzados. Las comprobaciones restantes son también inmediatas. □

## 2.6. Derivaciones

**Definición 109** Dado un anillo  $H$ , sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado tal que  $C$  y  $R$  son  $H$ -módulos y  $(C', R', \nu')$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha, \beta)}$ -módulo. Una  $H$ -derivación son dos aplicaciones lineales  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  verificando:

i)  $f \in \text{Der}_H(C, C')$ , es decir,  $f$  es un morfismo de  $H$ -módulos tal que  $f(cc') = c * f(c') + c' * f(c) = \alpha(c)(\nu'(f(c'))) + \alpha(c')(\nu'f(c))$  para  $c, c' \in C$  y  $g \in \text{Der}_H(R, R')$ .

ii)  $\nu'f = g\nu$ .

iii)  $f(rc) = (\beta_1(r))(f(c)) + (\alpha(c))(g(r))$ , donde  $c \in C, r \in R$ .

El conjunto de las  $H$ -derivaciones entre  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  lo denotaremos por  $\text{Der}_H((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$ .

En general  $H$  coincidirá con  $K$ , y cuando el contexto sea claro se hablará de una derivación, en lugar de una  $H$ -derivación.

**Observación 110** Esta definición generaliza las derivaciones de álgebras:

- Consideremos los módulos cruzados  $(0, R, 0), (0, R', 0)$ , donde  $R$  actúa sobre  $R'$  y sea el morfismo  $(0, g) : (0, R, 0) \rightarrow (0, R', 0)$ . Para que  $(f, g)$  sea derivación debe verificar:

i)  $g \in \text{Der}(R, R')$ .

ii) Sea  $r \in R, \beta_1(r)(0) + \alpha(0)(g(r)) = 0 + 0 = 0$ , con lo cual la igualdad enunciada en iii) se verifica siempre.

Por tanto,  $(0, R, 0) \xrightarrow{(0, g)} (0, R', 0)$  como derivación de módulos cruzados se identifica con  $R \xrightarrow{g} R'$  como derivación de álgebras.

• Consideremos los módulos cruzados  $(C, C, id)$ ,  $(C', C', id)$ , donde  $C$  actúa sobre  $C'$ ; esta acción induce de forma trivial una acción de  $(C, C, id)$  sobre  $(C', C', id)$  de la siguiente manera:  $(c, d) * (c', d') = (c * c', d * d')$ , donde  $c, d \in C, c', d' \in C'$ .

Sea la aplicación  $(f, g) : (C, C, id) \rightarrow (C', C', id)$ . Por ser un morfismo de módulos cruzados se tiene que  $f = g$ . Para que  $(f, f)$  sea derivación debe verificar:

$$i) f \in Der(C, C').$$

$$ii) f(dc) = \beta_1(d)(f(c)) + \alpha(c)(f(d)) = d * f(c) + c * f(d) = df(c) + cf(d),$$

donde  $c, d \in C$ .

Por tanto  $(C, C, id) \xrightarrow{(f, f)} (C', C', id)$  como derivación de módulos cruzados se identifica con  $C \xrightarrow{f} C'$  como derivación de álgebras.

**Observación 111** Los módulos cruzados  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  son equivalentes a las  $cat^1$ -álgebras  $(C \rtimes R, s, t)$ ,  $(C' \rtimes R', s', t')$ . Una derivación entre estas  $cat^1$ -álgebras es una derivación de álgebras  $h : C \rtimes R \rightarrow C' \rtimes R'$  que además conmuta con  $s$  y  $t$ , es decir,  $hs = s'h, ht = t'h$ .

Dada una derivación  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$ , la derivación inducida es:

$$h : (C \rtimes R, s, t) \rightarrow (C' \rtimes R', s', t')$$

$$(c, r) \mapsto (f(c), g(r))$$

La condición *i*) en la definición de las derivaciones implica que  $h \in Der(C \rtimes R, C' \rtimes R')$ , mientras que *ii*) y *iii*) implican que  $h$  conmuta con  $s$  y  $t$ .

**Ejemplo 112** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(C', R', \nu')$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha, \beta)}$ -módulo (por tanto un  $(C' \rtimes C, R' \rtimes R, \nu' \rtimes \nu)_{(\alpha p_1, \beta p_2)}$ -módulo). Entonces  $(q_1, q_2) : (C' \rtimes C, R' \rtimes R, \nu' \rtimes \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$ , donde  $(q_1, q_2)((c', c), (r', r)) = (c', r')$ , es una derivación. Vamos a comprobarlo:

$$i) q_1 \in Der(C' \rtimes C, C') : q_1((c', c), (d', d)) = q_1(c'd' + dc' + cd', cd) = c'd' + dc' + cd' = dc' + cd' = (d', d)c' + (c', c)d' = (d', d)q_1(c', c) + (c', c)q_1(d', d),$$

donde  $(c', c), (d', d) \in C' \rtimes C$ .

Análogamente  $q_2 \in \text{Der}(R' \times R, R')$ .

ii)  $\nu q_1(c', c) = \nu'(c') = q_2((\nu' \times \nu)(c', c))$ , donde  $c' \in C', c \in C$ .

iii)  $q_1((r', r)(c', c)) = q_1(\alpha(c)(r') + \beta_1(r)(c') + r'c', rc) = \alpha(c)(r') + \beta_1(r)(c') = \alpha p_1(c', c)(q_2(r', r)) + \beta_1 p_2(r', r)(q_1(c', c))$ , donde  $c' \in C', r' \in R', c \in C, r \in R$ .

**Lema 113** Sean  $(C, R, \nu)$  y  $(C', R', \nu')$  dos módulos cruzados y  $(C'', R'', \nu'')$  un  $(C', R', \nu')_{(\alpha, \beta)}$ -módulo. Dados un morfismo de módulos cruzados  $(f, g) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  y una derivación  $(f', g') : (C', R', \nu') \rightarrow (C'', R'', \nu'')$ , se verifica que  $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$  es una derivación.

**Demostración:**

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & R \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \\ f' \downarrow & & \downarrow g' \\ C'' & \xrightarrow{\nu''} & R'' \end{array}$$

Primero se debe observar que  $(C, R, \nu)$  actúa sobre  $(C'', R'', \nu'')$  vía  $(f, g)$ . Vamos ahora a comprobar que  $(f' \circ f, g' \circ g)$  es efectivamente una derivación:

i)  $f'f(cd) = f(c) * f'(f(d)) + f(d) * f'(f(c)) = \alpha(f(c))(\nu''(f'f(d))) + \alpha(f(d))(\nu''(f'f(c))) = c * f'f(d) + d * f'f(c)$ , donde  $c, d \in C$ .

Por tanto  $f'f \in \text{Der}(C, C'')$  y análogamente  $g'g \in \text{Der}(R, R'')$ .

ii)  $(g' \circ g) \circ \nu = g' \circ (g \circ \nu) = g' \circ (\nu' \circ f) = (g' \circ \nu') \circ f = (\nu'' \circ f') \circ f = \nu'' \circ (f' \circ f)$ .

iii)  $f'f(rc) = f'(g(r)f(c)) = \beta_1(g(r))(f'f(c)) + \alpha(f(c))(g'g(r)) = (\beta_1 g(r))(f'f(c)) + (\alpha f(c))(g'g(r))$ , donde  $c \in C, r \in R$ .  $\square$

**Lema 114** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $(A, B, \sigma)$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha, \beta)}$ -módulo y  $(A', B', \sigma')$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha', \beta')}$ -módulo. Dada una derivación  $(f, g): (C, R, \nu) \rightarrow (A, B, \sigma)$  y un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos  $(f', g'): (A, B, \sigma) \rightarrow (A', B', \sigma')$ , entonces  $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$  es una derivación.

**Demostración:**

i)  $f'f(cd) = f'(\alpha(c)(\sigma f(d)) + \alpha(d)(\sigma(f(c)))) = f'(\alpha(c)(\sigma f(d))) + f'(\alpha(d)(\sigma f(c)))$ , donde  $c, d \in C$ .

Como  $(f', g')$  es un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos se tiene que esto es  $\alpha'(c)(g'\sigma f(d)) + \alpha'(c)(g'(\sigma f(d))) = \alpha'(c)(\sigma' f' f(d)) + \alpha'(d)(\sigma' f' f(d)) = c(f' f(d)) + d(f' f(c))$ .

Por tanto  $f' \circ f \in \text{Der}(C, C')$  y análogamente  $g' \circ g \in \text{Der}(R, R')$ .

ii) Trivial.

iii)  $f'f(rc) = f'(\beta_1(r)f(c) + \alpha(c)g(r)) = f'(\beta_1(r)f(c)) + f'(\alpha(c)g(r)) = \beta'_1(r)(f'f(c)) + \alpha'(c)(g'g(r))$ , donde  $c \in C, r \in R$ .  $\square$

Es trivial comprobar que las derivaciones inducen un funtor. Para ello se deben hacer ciertas consideraciones:

Dados un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(C', R', \nu')$  se verifica que el conjunto  $\text{Der}((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$  es un subgrupo abeliano de  $\text{Hom}((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$ :

- El morfismo  $(0, 0): (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  es una derivación.

- Dada una derivación  $(f, g): (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$ , el morfismo inverso  $(-f, -g)$  es también una derivación:

i)  $f \in \text{Der}(C, C') \Rightarrow -f \in \text{Der}(C, C')$ . Análogamente  $-g \in \text{Der}(R, R')$ .

ii)  $\nu'f = g\nu \Rightarrow \nu'(-f) = (-g)\nu$ .

iii) Sean  $c \in C, r \in R$ . Se tiene  $f(rc) = (\beta_1(r))(f(c)) + (\alpha(c))(g(r)) \Rightarrow -f(rc) = (\beta_1(r))(-f(c)) + (\alpha(c))(-g(r))$ . Como  $\beta_1(r) \in M(C')$  y  $\alpha(c)$  es una

aplicación lineal tenemos  $(\beta_1(r))(-f(c)) = -(\beta_1(r))(f(c))$  y  $(\alpha(c))(-g(r)) = -(\alpha(c))(g(r))$ . Por tanto  $-f(rc) = -(\beta_1(r))(f(c)) + (\alpha(c))(-g(r))$ .

- La suma de derivaciones es trivialmente una derivación.

Así, dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  se tiene un funtor  $Der((C, R, \nu), -) : XMod_{(C, R, \nu)} \rightarrow Ab$ , que a cada  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(C', R', \nu')$  le asigna el grupo abeliano  $Der((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$ .

Dado un morfismo de  $(C, R, \nu)$ -módulos  $(f, g) : (C', R', \nu') \rightarrow (C'', R'', \nu'')$ , se tiene el morfismo de grupos abelianos  $Der((C, R, \nu), (f, g)) = (f, g) \circ :$

$$(f, g) \circ : Der((C, R, \nu), (C', R', \nu')) \rightarrow Der((C', R', \nu'), (C'', R'', \nu''))$$

$$(f', g') \mapsto (f, g) \circ (f', g')$$

**Lema 115** Sean  $A, C, C'$   $K$ -álgebras conmutativas tales que  $C'$  es singular y  $C$  actúa sobre  $C'$ . Dados un morfismo de álgebras  $f : A \rightarrow C$  y una derivación  $d : A \rightarrow C'$ , existe un único morfismo de álgebras  $h : A \rightarrow C' \times C$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & d \swarrow & \downarrow h & \searrow f & \\ C' & \xleftarrow{q} & C' \times C & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

### Demostración:

Primero debemos observar que, como  $C$  actúa sobre  $C'$ ,  $A$  actúa sobre  $C'$  vía  $f$ .

Ahora definimos:

$$h : A \rightarrow C' \times C$$

$$a \mapsto (d(a), f(a))$$

Es obvio que así definida hace el diagrama conmutativo, y que además es la única que verifica esta condición. A continuación vamos a comprobar que  $h$  es un morfismo de álgebras:

•  $h(a + a') = (d(a + a'), f(a + a')) = (d(a) + d(a'), f(a) + f(a')) = (d(a), f(a)) + (d(a'), f(a')) = h(a) + h(a')$ , donde  $a, a' \in A$ .

•  $h(ka) = (d(ka), f(ka)) = (kd(a), kf(a)) = k(d(a), f(a)) = kh(a)$ , donde  $k \in K, a \in A$ .

•  $h(aa') = (d(aa'), f(aa')) = (a*d(a') + a'*d(a), f(a)f(a')) = (f(a)d(a') + f(a')d(a), f(a)f(a'))$ , donde  $a, a' \in A$ . Como  $C'$  es singular esto coincide con  $(d(a)d(a') + f(a)d(a') + f(a')d(a), f(a)f(a')) = (d(a), f(a))(d(a'), f(a')) = h(a)h(a')$ .  $\square$

**Teorema 116** (de representabilidad)

Sean  $(C, R, \nu)$  y  $(A, B, \sigma)$  módulos cruzados y  $(C', R', \nu')$  un  $(C, R, \nu)_{(\alpha, \beta)}$ -módulo. Dados un morfismo de módulos cruzados  $(f_1, f_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C, R, \nu)$  y una derivación  $(d_1, d_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C', R', \nu')$ , existe un único morfismo de módulos cruzados  $(h_1, h_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C', R', \nu') \times (C, R, \nu)$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (A, B, \sigma) & & \\
 & \swarrow (d_1, d_2) & \downarrow (h_1, h_2) & \searrow (f_1, f_2) & \\
 (C', R', \nu') & \xleftarrow{(q_1, q_2)} & (C', R', \nu') \times (C, R, \nu) & \xrightarrow{(p_1, p_2)} & (C, R, \nu)
 \end{array}$$

Recíprocamente, dado un homomorfismo de módulos cruzados  $(h_1, h_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C', R', \nu') \times (C, R, \nu)$  determina:

- i) Un morfismo de módulos cruzados  $(f_1, f_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C, R, \nu)$ .
- ii) Una derivación vía  $(f_1, f_2), (d_1, d_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C', R', \nu')$ .

**Demostración:**

“ $\Rightarrow$ ”

Como  $(C, R, \nu)$  actúa sobre  $(C', R', \nu')$  mediante  $(\alpha, \beta)$ ,  $(A, B, \sigma)$  actúa sobre  $(C', R', \nu')$  vía  $(\alpha f_1, \beta f_2)$ .

De las hipótesis se tienen los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & d_1 \swarrow & & \searrow f_1 & \\
 C' & \xleftarrow{q_1} & C' \times C & \xrightarrow{p_1} & C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B & & \\
 & d_2 \swarrow & & \searrow f_2 & \\
 R' & \xleftarrow{q_2} & R' \times R & \xrightarrow{p_2} & R
 \end{array}$$

Por tanto existen:

$$\begin{array}{ll}
 h_1 : A \rightarrow C' \times C & h_2 : B \rightarrow R' \times R \\
 a \mapsto (d_1(a), f_1(a)) & b \mapsto (d_2(b), f_2(b))
 \end{array}$$

que son morfismos de álgebras y son los únicos que hacen los diagramas conmutativos.

Queda por demostrar que  $(h_1, h_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C', R', \nu') \times (C, R, \nu)$  es un morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\sigma} & B \\
 h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\
 C' \times C & \xrightarrow{\nu' \times \nu} & R' \times R
 \end{array}$$

*i)* Sea  $a \in A$ ;  $(\nu' \times \nu)(h_1(a)) = (\nu' \times \nu)(d_1(a), f_1(a)) = (\nu'd_1(a), \nu f_1(a)) = (d_2\sigma(a), f_2\sigma(a)) = h_2(\sigma(a))$ .

*ii)* Sean  $a \in A, b \in B$ ;  $h_1(ba) = (d_1(ba), f_1(ba)) = (\beta_1 f_2(b)(d_1(a)) + \alpha f_1(a)(d_2(b)), f_2(b)f_1(a))$ .

Por otro lado  $h_2(b)h_1(a) = (d_2(b), f_2(b))(d_1(a), f_1(a)) = (\alpha f_1(a)(d_2(b)) + \beta_1(f_2(b))(d_1(a)) + d_2(b)d_1(a), f_2(b)f_1(a))$ , pero como  $(C', R', \nu')$  es singular se tiene  $h_2(b)h_1(a) = \alpha f_1(a)(d_2(b)) + \beta_1(f_2(b))(d_1(a)), f_2(b)f_1(a) = h_2(b)h_1(a)$ .

“ $\Leftarrow$ ”

i) Como  $(p_1, p_2)$  es un morfismo de módulos cruzados, basta tomar  $(f_1, f_2) = (p_1, p_2) \circ (h_1, h_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C, R, \nu)$ .

ii)  $(C, R, \nu)$  actúa sobre  $(C', R', \nu')$  por medio del morfismo de módulos cruzados  $(\alpha, \beta) : (C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(C', R', \nu')$ . Esto permite definir una acción de  $(A, B, \sigma)$  sobre  $(C', R', \nu')$  mediante el morfismo  $(\alpha f_1, \beta f_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow \mathcal{A}(C', R', \nu')$ .

Además,  $(q_1, q_2)$  es una derivación y por tanto  $(d_1, d_2) = (q_1, q_2) \circ (h_1, h_2) : (A, B, \sigma) \rightarrow (C', R', \nu')$  también lo es.  $\square$

**Corolario 117** Sean  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(C', R', \nu')$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. El grupo abeliano  $Der((C, R, \nu), (C', R', \nu'))$  está en correspondencia biyectiva con los morfismos de módulos cruzados  $(h_1, h_2) : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu') \rtimes (C, R, \nu)$  tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (C, R, \nu) & & \\
 (h_1, h_2) \downarrow & \searrow^{(id_C, id_R)} & \\
 (C', R', \nu') \rtimes (C, R, \nu) & \xrightarrow{(p_1, p_2)} & (C, R, \nu)
 \end{array}$$

## Capítulo 3

# Álgebra homológica de módulos cruzados

### 3.1. (Co)Homología de módulos cruzados

El siguiente objetivo es desarrollar una teoría de (co)homología de módulos cruzados con coeficientes de la forma  $(A, 0, 0)$ . Para ello, ahora consideraremos módulos cruzados de álgebras conmutativas unitarias (Módulos cruzados con 1). Por medio de la adjunción dada para estudiar la tripleabilidad, se puede encontrar otra adjunción entre *Set* y Módulos cruzados con 1. Esta se obtiene como resultado de componer tres adjunciones:

$$\begin{array}{l} \text{Set} \rightleftarrows K\text{-álgebras} \\ S \longmapsto K^+[x_1, \dots, x_s] \end{array}$$

que es una de las dos adjunciones usadas en el capítulo relativo a la tripleabilidad.

$$\begin{array}{l} K\text{-álgebras} \rightleftarrows K\text{-álgebras con } 1 \\ K^+[x_1, \dots, x_s] \longmapsto K[x_1, \dots, x_s] \end{array}$$

que es una adjunción conocida, construida a partir de la adjunción de anillos [47]:

$$\begin{array}{ccc} \ker \varepsilon & \longleftarrow & (H, \varepsilon) \\ \text{Anillos} & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Anillos con 1} \\ A & \longmapsto & A \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

donde  $\varepsilon$  es el morfismo aumentación de  $H$ ,  $H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ . Y finalmente:

$$\begin{array}{ccc} C \times R & \longleftarrow & (C, R, \nu) \\ K\text{-álgebras con 1} & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Módulos cruzados con 1} \\ H & \longmapsto & (\overline{H}, H \otimes H, in) \end{array}$$

donde  $\overline{H}$  denota el menor ideal de  $H \otimes H$  que contiene a todos los elementos de la forma  $(h, 0)$ . La comprobación de que esta es una adjunción es completamente análoga al caso de álgebras sin unidad descrito para probar la tripleabilidad, con la única diferencia de que el coproducto de dos álgebras unitarias es su producto tensor.

De ahora en adelante, para definir la teoría de (co)homología, consideraremos un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y un  $(C, R, \nu)$ -módulo,  $(A, 0, 0)$ . Esta estructura de  $(C, R, \nu)$ -módulo induce una acción de  $0 \rtimes R$  sobre  $A \rtimes C$  y, por tanto, de  $R$  sobre  $A \rtimes C$  (en particular, induce una acción de  $R$  sobre  $A$ ) de la siguiente manera:

•  $(0, r) * (a, c) \equiv r * (a, c) = (\beta_1(r)(a), rc)$ , donde  $c \in C, r \in R, a \in A$  y  $(\alpha, \beta)$  es la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(A, 0, 0)$ .

Además,  $A$  tiene estructura de  $R/\nu(C)$ -módulo, es decir, de  $\pi_1$ -módulo: acabamos de ver que  $R$  actúa sobre  $A$ ; ahora, aplicando la identidad de Peiffer al módulo cruzado  $(A \rtimes C, 0 \rtimes R, 0 \rtimes \nu) \equiv (A \rtimes C, 0 \rtimes R, \overline{\nu})$  se tiene que han de coincidir:

- $(\overline{\nu}(a, c))(a'c') = (0, \nu(c))(a', c') = (\nu(c)a, \nu(c)c')$
- $(a, c)(a', c') = (aa' + c'a + ca', cc') = (c'a + ca', cc')$

donde  $(a, c), (a', c') \in A \rtimes C$ .

Por tanto debe verificarse  $\nu(c)a = c'a + ca'$ . Tomando  $a = a'$  y  $c' = 0$  se tiene que  $0 = ca = \nu(c)a$ . Por tanto  $A$  tiene estructura de  $R/\nu(C)$ -módulo.

**Observación 118** *El módulo cruzado  $(A, 0, 0)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $\Leftrightarrow A$  es un  $C$ -módulo ya que una sucesión exacta corta rota a la derecha:*

$$0 \longrightarrow (A, 0, 0) \longrightarrow (A, 0, 0) \times (C, R, \nu) \xrightleftharpoons{\quad} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

o escrita de otra manera:

$$0 \longrightarrow (A, 0, 0) \longrightarrow (A \rtimes C, 0 \rtimes R, 0 \rtimes \nu) \xrightleftharpoons{\quad} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

que induce una sucesión exacta corta rota a la derecha:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \rtimes C \xrightleftharpoons{\quad} C \longrightarrow 0$$

Recíprocamente, si  $A$  es un  $C$ -módulo se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \rtimes C \xrightleftharpoons[\quad]{f} C \longrightarrow 0$$

que induce la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (A, 0, 0) \longrightarrow (A \rtimes C, 0 \rtimes R, 0 \rtimes \nu) \xrightleftharpoons[\quad]{(f, pr_2)} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

$(g, (0, id))$

donde  $(g, (0, id))(c, r) = (g(c), r)$  para  $c \in C, r \in R$ , es claramente una sección de  $(f, pr_2)$ .

Es un hecho conocido que existe un isomorfismo  $Der((C, R, \nu), (A, 0, 0)) \cong Hom_{XMod/(C, R, \nu)}((C, R, \nu), (A, 0, 0) \times (C, R, \nu))$ . Además, es trivial comprobar que  $Hom_{XMod/(C, R, \nu)}((C, R, \nu), (A, 0, 0) \times (C, R, \nu)) \cong Hom_R(C, A)$ ; basta tener en cuenta que dado un morfismo de álgebras  $f : C \rightarrow A$ , el morfismo que induce en  $Hom_{XMod/(C, R, \nu)}((C, R, \nu), (A, 0, 0) \times (C, R, \nu))$  es:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & R \\ (0, f) \downarrow & & \downarrow id \\ A \rtimes C & \xrightarrow{0 \rtimes \nu} & R \end{array}$$

y para que esto sea un morfismo de módulos cruzados debe verificarse que dados  $c \in C, r \in R$ , se tenga  $(0, f)(rc) = id(r)(0, f)(c)$ ; es decir,  $f(rc) = rf(c) \Rightarrow f \in Hom_R(C, A)$ .

A continuación vamos a interpretar estas derivaciones y el isomorfismo con  $Hom_R(C, A)$  desde el punto de vista de  $cat^1$ -álgebras. Para ello previamente debemos considerar que la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(A, 0, 0)$  induce una acción de  $C \rtimes R$  sobre  $A \times 0$ , es decir, sobre  $A$ , de la siguiente manera:

- $(c, r) * a \equiv (c, r) * (a, 0) = (r * a + c * a, 0) = (\beta_1(r)(a) + \alpha(c)0(a), 0) = (\beta_1(r)(a), 0) \equiv \beta_1(r)(a)$ , donde  $c \in C, r \in R, a \in A$  y  $(\alpha, \beta)$  es la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $(A, 0, 0)$ .

Además, como  $A$  es singular, es un  $C \rtimes R$ -módulo.  $A$  también es un  $\pi_1$ -módulo, ya que  $C \times 0$  y  $0 \times \nu(C)$  actúan de manera trivial sobre  $A$ .

Una derivación en  $cat^1$ -álgebras es, según [44], una derivación de álgebras que conmuta con las operaciones 1-arias  $\omega \in \Omega_1 \setminus \{-\}$ . En nuestro caso debemos interpretar  $Der((C \rtimes R, s, t), (A, 0, 0))$ . Por construcción, dado  $(c, r) \in C \rtimes R, s(c, r) = (0, r), t(c, r) = (0, r + \nu(c))$ . Si consideremos  $d \in Der((C \rtimes R, s, t), (A, 0, 0))$ , para cumplir las conmutatividades con las operaciones 1-arias se debe verificar  $d(s(c, r)) = d(t(c, r)) = 0(d(c, r)) = 0$ . Es decir,  $d(0, r) = 0$  para todo  $r \in R$ .

Con todo esto se tiene que  $Der((C \rtimes R, s, t), (A, 0, 0)) \cong \{d \in Der(C \rtimes R, A) \mid d(0, R) = 0\}$ ; este conjunto se denotará por  $Der((C, R, \nu), A)$ . Vamos a comprobar que  $\{d \in Der(C \rtimes R, A) \mid d(0, R) = 0\}$  es isomorfo a  $Hom_R(C, A)$ , con lo cual las dos maneras de ver las derivaciones son equivalentes.

$$\begin{aligned} \text{Definimos } \alpha : \{d \in Der(C \rtimes R, A) \mid d(0, R) = 0\} &\rightarrow Hom_R(C, A) \\ d &\longmapsto \alpha(d) \end{aligned}$$

donde  $\alpha(d)(c) = d(c, 0)$ . Esta aplicación es un isomorfismo:

- $\alpha$  es inyectiva trivialmente.

•  $\alpha$  es sobreyectiva ya que dado  $f \in \text{Hom}_R(C, A)$  su preimagen es  $d \mid d(c, r) = f(c)$ . Así definida  $d$  pertenece al dominio; claramente  $d(0, R) = 0$  y además es una derivación ya que dados  $(c, r), (c', r') \in C \rtimes R$  tenemos que  $d((c, r), (c', r')) = d(cc' + rc' + r'c, rr') = f(cc' + rc' + r'c) = f(cc') + f(rc') + f(r'c) = f(c)f(c') + rf(c') + r'f(c)$ . Como  $A$  es singular, se tiene que esto es igual a  $(c, r)f(c') + (c', r')f(c) = (c, r)d(c', r') + (c', r')d(c, r)$ .

Si pasamos a la categoría coma sobre  $(C, R, \nu)$  se tiene un funtor contravariante  $\text{Der}(-, A) : X\text{Mod}/(C, R, \nu) \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$ ; de hecho, dado un objeto  $(C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu)$  la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $A$  induce una acción de  $(C', R', \nu')$  sobre  $A$ .

La comprobación del carácter funtorial es inmediata.  $\text{Der}((C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu), A)$  (que denotaremos por  $\text{Der}((C', R', \nu'), A)$  cuando el contexto sea claro) es isomorfo a  $\text{Hom}_R(C' \rightarrow C, A)$  que es un grupo abeliano. La estructura de  $C \rtimes R\text{-Mod}$  es la inducida por la estructura de  $C \rtimes R\text{-Mod}$  de  $A$ ; es decir, dados  $(c, r) \in C \rtimes R, (c', r') \in C' \rtimes R'$  y  $d \in \text{Der}((C', R', \nu'), A)$  se tiene  $((c, r)d)(c', r') = (c, r)(d(c', r'))$ . Claramente,  $(c, r)d(0, R) = 0$ .

**Observación 119** *Las derivaciones  $\text{Der}((C, R, \nu), A)$  que se acaban de definir son una particularización de las derivaciones que se definieron para el caso de dos módulos cruzados generales  $\text{Der}((C, R, \nu), (A, B, \sigma))$  donde, en el caso que acabamos de tratar,  $B = 0, \sigma = 0$ .*

**Observación 120** *Cuando se quiera explicitar sobre qué anillo  $H$  se consideren las derivaciones se hablará de una  $H$ -derivación y se usará la notación  $\text{Der}_H((C, R, \nu), A) = \{d \in \text{Der}_H(C \rtimes R, A) \mid d(0, R) = 0\}$ .*

A continuación vamos a estudiar el objeto análogo a las diferenciales en la categoría de álgebras conmutativas, esto es, un objeto que proporcionará un funtor que representa a las derivaciones.

Sabemos que  $\text{Der}(C \rtimes R, A) \cong \text{Hom}_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R}, A)$ , siendo  $\Omega_{C \rtimes R}$  las diferenciales definidas en álgebras conmutativas [2], es decir,  $\Omega_{C \rtimes R} = I/I^2$ , donde  $I = \ker((C \rtimes R) \otimes (C \rtimes R) \rightarrow (C \rtimes R))$ .

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R}, A) &\rightarrow \text{Der}(C \rtimes R, A) \\ f &\longmapsto f \circ \delta \end{aligned}$$

donde  $\delta \in \text{Der}(C \rtimes R, \Omega_{C \rtimes R})$ ,  $\delta(c, r) = (c, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (c, r)$ .

El objeto que interesa estudiar es  $\text{Der}((C, R, \nu), A) = \{d \in \text{Der}(C \rtimes R, A) \mid d(0, R) = 0\}$ ; para ello se debe imponer la restricción  $f \circ \delta(0, r) = 0$ , es decir,  $f((0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r)) = 0$ .

Además, dada  $d \in \text{Der}((C, R, \nu), A)$ , el morfismo  $f \in \text{Hom}_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R}, A)$  al que corresponde se anula en:

- $\langle (0, r) \otimes (0, 1) \rangle$ :  $f((0, r) \otimes (0, 1)) = (0, r)d(0, 1) = 0$ .
- $\langle (0, 1) \otimes (0, r) \rangle$ :  $f((0, 1) \otimes (0, r)) = (0, 1)d(0, r) = 0$ .

Por tanto se tiene el isomorfismo  $\text{Hom}_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R} / \langle (0, r-1) \otimes (0, 1-r) \rangle, A) \cong \text{Der}((C, R, \nu), A)$ . Este isomorfismo motiva la siguiente definición.

**Definición 121** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se definen las diferenciales  $\text{Diff}(C, R, \nu) = \Omega_{C \rtimes R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle$ .

**Observación 122**  $C, R$  y  $C \rtimes R$  son  $K$ -álgebras; los tensores intervinientes en la definición de  $\text{Diff}(C, R, \nu)$  se realizan, en este caso, sobre  $K$ . Cuando se quiera explicitar sobre qué anillo se realizan estos tensores, se usará la notación  $\text{Diff}((C, R, \nu)/K) = \Omega_{(C \rtimes R)/K} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle$ .

**Observación 123** Se puede comprobar trivialmente que se tienen dos funtores  $\text{Der}((C, R, \nu), -)$ ,  $\text{Diff}(C, R, \nu) \otimes - : C \rtimes R\text{-Mod} \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$ . El isomorfismo señalado antes de la definición muestra que  $\text{Der}((C, R, \nu), -)$  es adjunto por la derecha de  $\text{Diff}(C, R, \nu) \otimes -$ .

**Observación 124**  $\text{Diff}(C, R, \nu)$  tiene estructura de  $C \rtimes R$ -módulo, que hereda de  $\Omega_{C \rtimes R}$ . Además, y por analogía con el caso de álgebras conmutativas, dado un  $C \rtimes R$ -módulo  $A$  se usará  $\text{Diff}((C, R, \nu), A)$  o  $\text{Diff}((C, R, \nu), (A, 0, 0))$  para denotar  $(\Omega_{C \rtimes R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle) \otimes_{C \rtimes R} A$ .

Las diferenciales verifican cierto tipo de propiedad universal, como se verá en la siguiente proposición.

**Proposición 125** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(A, 0, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Dada una derivación  $h \in \text{Der}((C, R, \nu), A)$  existe un único morfismo de  $C \times R$ -módulos  $f : \text{Diff}(C, R, \nu) \rightarrow A$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} C \times R & \xrightarrow{D} & \text{Diff}(C, R, \nu) \\ h \downarrow & \swarrow f & \\ A & & \end{array}$$

donde  $D$  es la composición de la derivación  $d : C \times R \rightarrow \Omega_{C \times R}$  y la proyección en el cociente  $\Omega_{C \times R} \rightarrow \text{Diff}(C, R, \nu)$ .

**Demostración:**

Utilizando la propiedad universal que verifica  $d$  se tiene un morfismo  $g : \Omega_{C \times R} \rightarrow A$  que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C \times R & \xrightarrow{d} & \Omega_{C \times R} \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ A & & \end{array}$$

Además, dado  $r \in R$  se tiene que  $g((0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r)) = g(d(0, r)) = h(0, r) = 0$ . Por tanto, el morfismo  $g$  se puede extender, obteniendo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I \hookrightarrow \Omega_{C \times R} & \xrightarrow{p} & \text{Diff}(C, R, \nu) \\ g \downarrow & \swarrow f & \\ A & & \end{array}$$

donde  $I$  denota el ideal  $\langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle$ . Además,  $f \circ D = f \circ p \circ d = g \circ d = h$ .  $\square$

Considerando la categoría coma sobre  $(C, R, \nu)$  obtenemos un functor covariante  $\text{Diff}(-, A) : X\text{Mod}/(C, R, \nu) \rightarrow C \times R\text{-Mod}$ ; al igual que para las

derivaciones dado un objeto  $(C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu)$  la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $A$  induce una acción de  $(C', R', \nu')$  sobre  $A$ .

El carácter funtorial es de comprobación trivial. La estructura de  $C \rtimes R\text{-Mod}$  de  $\text{Diff}((C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu), A)$  es la inducida por la estructura de  $C \rtimes R\text{-Mod}$  de  $A$ ; por tanto, sería inmediato dotar de más estructura a  $\text{Diff}((C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu), A)$  si a  $A$  se le pide también una mayor estructura (en el caso de las derivaciones habría que hacer también alguna consideración sobre los módulos cruzados intervinientes). Cuando el contexto sea claro se usará la notación  $\text{Diff}((C', R', \nu'), A)$ .

Antes de definir la (co)homología veremos algunos lemas referentes a las propiedades de las derivaciones y las diferenciales.

**Lema 126** *Sea un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  tal que  $C$  es libre,  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra y  $W$  un  $A$ -módulo. Si  $K$  es una familia de generadores independientes de  $C$  y a cada  $k \in K$  se le asocia una copia  $W_k$  del  $A$ -módulo  $W$ , se tienen los isomorfismos naturales de  $A$ -módulos:*

$$\begin{aligned} \text{Der}((C, R, \nu), W) &\cong \prod_K W_k \\ \text{Diff}((C, R, \nu), W) &\cong \sum_K W_k \end{aligned}$$

**Demostración:**

Una derivación  $d \in \text{Der}((C, R, \nu), W)$  viene determinada por los valores que toma en los elementos  $(c, 0)$ , donde  $c \in C$ , ya que dado  $r \in R$  se tiene que  $d(c, r) = d(c, 0) + d(0, r) = d(c, 0)$ .

Por tanto, dada una familia de elementos  $w_k \in W, k \in K$ , existe una sola derivación  $d \in \text{Der}((C, R, \nu), W)$  tal que  $d(k) = w_k$ , donde  $k \in K$  y entonces se tiene que  $\text{Der}((C, R, \nu), W) \cong \prod_K W_k$ .

Para probar el isomorfismo relativo a las diferenciales consideramos otro  $A$ -módulo  $W'$ . Se tienen los isomorfismos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(\text{Diff}((C, R, \nu), W), W') &= \text{Hom}_A(\text{Diff}(C, R, \nu) \otimes W, W') \cong \text{Hom}_A(W, \\ \text{Hom}_A(\text{Diff}(C, R, \nu), W')) &\cong \text{Hom}_A(W, \text{Der}((C, R, \nu), W')) \cong \text{Hom}_A(W, \prod W'_k) \\ &= \prod \text{Hom}_A(W, W'_k) \cong \text{Hom}_A(\sum W_k, W'). \end{aligned}$$

Como esto se ha probado para cualquier  $A$ -módulo  $W'$  se verifica que  $\text{Diff}((C, R, \nu), W) \cong \sum_K W_k$ .  $\square$

**Lema 127** *Sea un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  tal que  $C$  es libre. Sean  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra y  $W, M$   $A$ -módulos. Se tiene un isomorfismo natural de  $A$ -módulos:*

$$\text{Diff}((C, R, \nu), W) \otimes_A M \cong \text{Diff}((C, R, \nu), W \otimes_A M).$$

*Además, si  $C$  es de tipo finito se tiene un isomorfismo natural de  $A$ -módulos:*

$$\text{Der}((C, R, \nu), W) \otimes_A M \cong \text{Der}((C, R, \nu), W \otimes_A M).$$

**Demostración:**

Basta tener en cuenta el lema anterior, que el tensor conmuta con las sumas directas y que en el caso de que  $C$  sea de tipo finito el producto directo y la suma directa coinciden.  $\square$

**Lema 128** *Sea un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  tal que  $C$  es libre. Sean  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra,  $I$  un sistema filtrante y  $(W_i, f_{ij})$  un sistema inductivo de  $A$ -módulos. Existe un isomorfismo natural de  $A$ -módulos:*

$$\varinjlim \text{Diff}((C, R, \nu), W_i) \cong \text{Diff}((C, R, \nu), \varinjlim W_i).$$

*Además, si  $C$  es de tipo finito existe un isomorfismo natural de  $A$ -módulos*

$$\varinjlim \text{Der}((C, R, \nu), W_i) \cong \text{Der}((C, R, \nu), \varinjlim W_i).$$

**Demostración:**

Basta tener en cuenta que las sumas directas y los límites inductivos conmutan.  $\square$

**Lema 129** *Sea un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  tal que  $C$  es libre. Sean  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra y  $W$  un  $A$ -módulo plano/libre/proyectivo. Se verifica que el  $A$ -módulo  $\text{Diff}((C, R, \nu), W)$  es plano/libre/proyectivo respectivamente.*

Además, si  $C$  es un álgebra de tipo finito se verifica que el  $A$ -módulo  $Der((C, R, \nu), W)$  es plano/libre/proyectivo respectivamente.

**Demostración:**

Basta tener en cuenta que las sumas directas de módulos libres, planos o proyectivos son también módulos libres, planos o proyectivos, respectivamente.  $\square$

**Lema 130** *Sea un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  tal que  $C$  es libre. Sean  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra y  $W$  un  $A$ -módulo inyectivo. El  $A$ -módulo  $Der((C, R, \nu), W)$  es inyectivo.*

Además, si  $C$  es un álgebra de tipo finito se verifica que el  $A$ -módulo  $Diff((C, R, \nu), W)$  es inyectivo.

**Demostración:**

Basta tener en cuenta que el producto directo de módulos inyectivos es también inyectivo.  $\square$

**Lema 131** *Sea un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  tal que  $C$  es libre y  $A$  es una  $C \rtimes R$ -álgebra. Sea:*

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de  $A$ -módulos. Entonces existen dos sucesiones exactas de  $C$ -módulos:

$$0 \rightarrow Diff((C, R, \nu), W') \rightarrow Diff((C, R, \nu), W) \rightarrow Diff((C, R, \nu), W'') \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Der((C, R, \nu), W') \rightarrow Der((C, R, \nu), W) \rightarrow Der((C, R, \nu), W'') \rightarrow 0$$

**Demostración:**

Basta tener en cuenta que las sumas directas y los productos directos de sucesiones exactas son sucesiones exactas.  $\square$

La adjunción previamente mencionada entre  $Set$  y Módulos cruzados con 1 induce una adjunción entre las categorías  $XMod/(C, R, \nu)$  y  $Set/U(C, R,$

$\nu$ ). Denotando por  $FU$  el cotriple correspondiente, para construir la (co)homología de  $(C, R, \nu)$  con coeficientes en el  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(A, 0, 0)$ , se derivarán los funtores  $Diff(-, A)$  y  $Der(-, A)$  respecto al cotriple  $FU$ .

**Definición 132** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(A, 0, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Se define, para cada  $n \geq 0$ :

$$H_n((C, R, \nu), A) = H_n Diff(FU_*(C, R, \nu), A).$$

$$H^n((C, R, \nu), A) = H^n Der(FU_*(C, R, \nu), A).$$

**Observación 133** Dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ , para calcular su (co)homología, también se pueden usar algunas resoluciones no estándar, como por ejemplo, una resolución simplicial proyectiva, es decir, un complejo simplicial aumentado de módulos cruzados  $(C, R, \nu)_* \rightarrow (C, R, \nu)$  tal que  $(C, R, \nu)_n$  es proyectivo para todo  $n \geq 0$  y la aplicación simplicial inducida entre  $U(C, R, \nu)_*$  y el complejo simplicial constante  $U(C, R, \nu)$ , es una equivalencia de homotopía.

Como la resolución obtenida utilizando la adjunción  $FU$  es una resolución simplicial proyectiva, se tiene que para cualquier otra resolución de este tipo  $(C, R, \nu)_*$  y un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $A$  se verifican los isomorfismos [8]:

$$H_n((C, R, \nu), A) \cong H_n(Diff((C, R, \nu)_*, A)).$$

$$H^n((C, R, \nu), A) \cong H^n(Der((C, R, \nu)_*, A)).$$

$U((C, R, \nu)_*)$  es el conjunto simplicial  $C_* \times R_*$  y por tanto  $U((C, R, \nu)_*)$  es siempre un conjunto simplicial de Kan. Por ello,  $U(C, R, \nu)_* \rightarrow U(C, R, \nu)$  es una equivalencia de homotopía si y solo si los morfismos simpliciales  $C_* \rightarrow C, R_* \rightarrow R$  son equivalencias débiles, es decir, si  $\pi_0(C_*) = C, \pi_0(R_*) = R$  y  $\pi_i(C_*) = \pi_i(R_*) = 0$  para todo  $i > 0$ .

**Observación 134** *La (co)homología definida generaliza la (co)homología de álgebras conmutativas singulares.*

*Dada un álgebra singular  $C$  se tiene el módulo cruzado  $(C, 0, 0)$ ; sea  $(A, 0, 0)$  un  $C$ -módulo. En este caso  $Der((C, 0, 0), A) = \{d \in Der(C \rtimes 0, A) \mid d(0, 0) = 0\} \cong Der(C, A)$  y por tanto  $H^n((C, 0, 0), (A, 0, 0)) \cong H^n(C, A)$ .*

*Por otro lado  $Diff((C, 0, 0)) = \Omega_{C \rtimes 0} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle \cong \Omega_C$  y por tanto  $H_n((C, 0, 0), (A, 0, 0)) \cong H_n(C, A)$ .*

La homología induce un funtor

$$H_n((C, R, \nu), -) : C \rtimes R\text{-Mod} \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$$

Además, este funtor puede verse como un funtor covariante en ambas variables, ya que si se tiene  $f : (C, R, \nu) \rightarrow (C', R', \nu')$  un morfismo de módulos cruzados,  $A$  un  $C \rtimes R$ -módulo,  $A'$  un  $C' \rtimes R'$ -módulo y un morfismo entre ellos  $g : A \rightarrow A'$ , estos inducen morfismos  $\alpha : C \rtimes R \rightarrow C' \rtimes R', \alpha : \Omega_{C \rtimes R} \rightarrow \Omega_{C' \rtimes R'}, \alpha : Diff(C, R, \nu) \rightarrow Diff(C', R', \nu'), \alpha : Diff((C, R, \nu), A) \rightarrow Diff((C', R', \nu'), A')$  y por tanto tenemos un morfismo  $\omega : H_n((C, R, \nu), A) \rightarrow H_n((C', R', \nu'), A')$ .

Análogamente, la cohomología también induce un funtor  $H^n((C, R, \nu), -) : C \rtimes R\text{-Mod} \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$ , pero en este caso, si lo consideramos como funtor en dos variables, es contravariante en la primera.

**Proposición 135** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(A, 0, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Se verifica:*

i)  $H_0((C, R, \nu), A) \cong Diff((C, R, \nu), A)$ .

$$H^0((C, R, \nu), A) \cong Der((C, R, \nu), A).$$

ii) *Si  $(C, R, \nu)$  es un módulo cruzado proyectivo se verifica que:*

$$H_n(C, R, \nu), A) = 0 \quad H^n((C, R, \nu), A) = 0 \quad \text{para todo } n > 0.$$

iii) *Dada una sucesión exacta corta de  $(C, R, \nu)$ -módulos:*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

se tienen sucesiones exactas largas en (co)homología:

$$\dots \rightarrow H_n((C, R, \nu), A') \rightarrow H_n((C, R, \nu), A) \rightarrow H_n((C, R, \nu), A'') \rightarrow H_{n-1}((C, R, \nu), A') \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^n((C, R, \nu), A') \rightarrow H^n((C, R, \nu), A) \rightarrow H^n((C, R, \nu), A'') \rightarrow H^{n+1}((C, R, \nu), A') \rightarrow \dots$$

**Demostración:**

Esta proposición es consecuencia de la teoría general del cotriple.  $\square$

**Proposición 136** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $\{(A_j, 0, 0)\}_J$  una familia de  $(C, R, \nu)$ -módulos. Se verifica que:

$$H_n((C, R, \nu), \Sigma A_j) \cong \Sigma H_n((C, R, \nu), A_j).$$

**Demostración:**

La prueba es consecuencia de los dos isomorfismos siguientes:

$$a) (C, R, \nu) \otimes \Sigma A_j \cong \Sigma((C, R, \nu) \otimes (A_j, 0, 0)).$$

$$b) \text{Diff}((C, R, \nu), \Sigma A_j) = \Omega_{C \times R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle \otimes \Sigma(A_j, 0, 0) \cong \Sigma(\Omega_{C \times R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle \otimes (A_j, 0, 0)) = \Sigma \text{Diff}((C, R, \nu), A_j).$$

La prueba del segundo isomorfismo es trivial, así que vamos a ver el primero:

$$(C, R, \nu) \otimes \Sigma A_j = ((R \otimes \Sigma A_j) / \text{Im } \alpha, 0, 0) \cong (\Sigma(R \otimes A_j) / \text{Im } \alpha, 0, 0) \cong \Sigma((R \otimes A_j) / \text{Im } \alpha, 0, 0) = \Sigma((C, R, \nu) \otimes (A_j, 0, 0)). \quad \square$$

**Proposición 137** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $\{(A_j, 0, 0)\}_J$  una familia de  $(C, R, \nu)$ -módulos. Se verifica que:

$$H^n((C, R, \nu), \Pi A_j) \cong \Pi H^n((C, R, \nu), A_j).$$

**Demostración:**

$Der((C, R, \nu), \prod_j A_j) \cong Hom_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle, \prod_j A_j)$ , pero esto es isomorfo [31] a  $\prod_j Hom_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle, A_j) \cong \prod_j Der(\Omega_{C \rtimes R} / \langle (0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r) \rangle, A_j)$ .  $\square$

**Teorema 138** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $(A, 0, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo y  $(W, 0, 0)$  un  $(A, 0, 0)$ -módulo (es decir,  $W$  un  $A$ -módulo). Existe un isomorfismo de  $A$ -módulos:*

$$H_n((C, R, \nu), A) \otimes_A W \cong H_n((C, R, \nu), W)$$

si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

- $W$  es un módulo plano.
- El funtor  $H_n((C, R, \nu), -) : C \rtimes R\text{-Mod} \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$  es exacto a la derecha.

**Demostración:**

$$H_n((C, R, \nu), A) \otimes_A W \cong H_n((C, R, \nu), A \otimes_A W) \cong H_n((C, R, \nu), W).$$

El primero de los isomorfismos consiste en aplicar el lema 2.18 de [2]; es posible aplicar este lema ya que  $H_n((C, R, \nu), A) = H_n \text{Diff}(FU_*(C, R, \nu), A)$  y  $\text{Diff}(FU_*(C, R, \nu), A)$  es un complejo de cadenas en la categoría de álgebras conmutativas.  $\square$

**Observación 139** *La segunda hipótesis se puede cambiar por la condición de que el funtor  $H_{n-1}((C, R, \nu), -) : C \rtimes R\text{-Mod} \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$  sea exacto a la izquierda: Sea:*

$$0 \longrightarrow (A', 0, 0) \longrightarrow (A, 0, 0) \longrightarrow (A'', 0, 0) \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de  $(C, R, \nu)$ -módulos; Podemos entonces escribir la sucesión exacta larga de homología:

$$\cdots \rightarrow H_n((C, R, \nu), A) \xrightarrow{\alpha} H_n((G, H, \omega), A'') \xrightarrow{\omega} H_{n-1}((C, R, \nu), A') \xrightarrow{\beta} H_{n-1}((C, R, \nu), A) \rightarrow \cdots$$

Como  $H_{n-1}((C, R, \nu), -)$  es exacto a la izquierda se tiene que:

$\ker \beta = 0 \Rightarrow \text{Im } \omega = 0 \Rightarrow \ker \omega = H_n((G, H, \omega), A'') \Rightarrow \text{Im } \alpha = H_n((G, H, \omega), A'') \Rightarrow \alpha$  es sobreyectiva.

**Teorema 140** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $(A, 0, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo y  $(W, 0, 0)$  un  $(A, 0, 0)$ -módulo (es decir,  $W$  un  $A$ -módulo). Existe un isomorfismo de  $A$ -módulos:

$$H^n((C, R, \nu), W) \cong \text{Hom}_A(H_n((C, R, \nu), A), W)$$

si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

- $W$  es un módulo inyectivo.
- El funtor  $H^n((C, R, \nu), -) : C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}$  es exacto a la izquierda.

**Demostración:**

La demostración es dual a la del teorema anterior, teniendo en cuenta que, al ser  $\text{Hom}_A(-, W)$  un funtor contravariante,  $\text{Hom}_A((C, R, \nu)_*, W)$  es un complejo de cocadenas.  $\square$

**Observación 141** La segunda hipótesis se puede cambiar por la condición de que el funtor  $H^{n-1}((C, R, \nu), -) : C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}$  sea exacto a la derecha.

**Proposición 142** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $A$  una  $C \times R$ -álgebra,  $W$  un  $A$ -módulo y  $M$  un  $A$ -módulo plano. Entonces existen isomorfismos naturales:

$$H_n((C, R, \nu), W) \otimes_A M \cong H_n((C, R, \nu), W \otimes_A M).$$

Además, si  $K$  es noetheriano y el álgebra  $C \times R$  es de tipo finito se tienen los isomorfismos naturales:

$$H^n((C, R, \nu), W) \otimes_A M \cong H^n((C, R, \nu), W \otimes_A M).$$

**Demostración:**

Este resultado se obtiene aplicando el lema 4.58 de [2], que puede ser utilizado ya que tanto  $Diff(FU_*(C, R, \nu), A)$  como  $Der(FU_*(C, R, \nu), A)$  son complejos en la categoría de álgebras conmutativas.  $\square$

**Corolario 143** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra,  $W$  un  $A$ -módulo y  $S$  un subconjunto de  $A$  multiplicativamente cerrado. Se tienen isomorfismos naturales:*

$$S^{-1}H_n((C, R, \nu), W) \cong H_n((C, R, \nu), S^{-1}W).$$

*Además, si  $K$  es noetheriano y  $C \rtimes R$  es de tipo finito, se tienen los isomorfismos naturales:*

$$S^{-1}H^n((C, R, \nu), W) \cong H^n((C, R, \nu), S^{-1}W).$$

**Demostración:**

Es un caso particular de la proposición anterior considerando el  $A$ -módulo plano  $S^{-1}C$ , ya que  $W \otimes_C S^{-1}C \cong S^{-1}W$ .  $\square$

### 3.2. Extensiones de módulos cruzados y sucesiones exactas

**Definición 144** Sean  $(C, R, \nu)$  y  $(G, H, \omega)$  dos módulos cruzados tales que existe un morfismo  $(C, R, \nu) \rightarrow \mathcal{A}(G, H, \omega)$ . Una extensión central de  $(C, R, \nu)$  por  $(G, H, \omega)$  es una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow (G, H, \omega) \xrightarrow{I=(i, i')} (A, B, \sigma) \xrightarrow{F=(f, f')} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

tal que dados  $g \in G, h \in H, a \in A, b \in B$  se verifica la igualdad  $(a, b)I(g, h) = I(F(a, b)(g, h))$ .

**Observación 145** Debido a esta igualdad se tiene que  $(G, H, \omega)$  debe ser singular (y por tanto, un  $(C, R, \nu)$ -módulo):

- Sean  $h, h' \in H$ ; consideremos los elementos  $h$  e  $i'(h') \in B$ . Se tiene que  $(0, i'(h'))I(0, h) = (0, i'(h'))(0, i'(h)) = (0, i'(h')i(h)) = (0, i'(hh'))$ . Pero esto, a su vez, debe coincidir con  $I(F((0, i'(h'))(0, h))) = I((0, f'i'(h'))(0, h)) = I(0) = 0$ . Luego  $hh' \equiv i'(hh') = 0$ .

- Sean  $g \in G, h \in H$ ; consideremos los elementos  $g$  e  $i'(h) \in B$ . Se tiene que  $(0, i'(h))I(g, 0) = (0, i'(h))(i(g), 0) = (i'(h)i(g), 0) = (i(hg), 0)$ . Pero esto, a su vez, debe coincidir con  $I(F((0, i'(h))(g, 0))) = I((0, f'i'(h))(g, 0)) = I(0) = 0$ . Luego  $hg \equiv i(hg) = 0$ .

**Observación 146** Dado  $(G, H, \omega)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo siempre se tiene la extensión trivial:

$$0 \longrightarrow (G, H, \omega) \xrightarrow{I=(id, 0)} (G, H, \omega) \times (C, R, \nu) \xrightarrow{F=pr_2} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

o escrito de otra manera:

$$0 \longrightarrow (G, H, \omega) \xrightarrow{I=(id,0)} (G \rtimes C, H \rtimes R, \omega \rtimes \nu) \xrightarrow{F=pr_2} (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

Esta es una extensión central ya que coinciden:

- $I((F((g, h), (c, r)))(g', h')) = I((c, r)(g', h')) = I(cg', rh') = ((cg', rh'), (0, 0)).$
- $((g, c), (h, r))I(g', h') = ((g, h), (c, r))((g', h'), (0, 0)) = ((gg'+cg', rh'), (0, 0)) = ((cg', rh'), (0, 0)),$

donde  $c \in C, r \in R, g, g' \in G, h, h' \in H.$

**Definición 147** Dos extensiones centrales  $(A, B, \sigma), (A', B', \sigma')$  de  $(C, R, \nu)$  por  $(G, H, \omega)$  se dice que son congruentes si existe un morfismo (es decir, un isomorfismo)  $f : (A, B, \sigma) \rightarrow (A', B', \sigma')$  tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (G, H, \omega) & \longrightarrow & (A, B, \sigma) & \longrightarrow & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow f & & \uparrow \\ & & & & (A', B', \sigma') & & \end{array}$$

es conmutativo.

Esta relación de congruencia, que denotaremos por  $(A, B, \sigma) \equiv (A', B', \sigma')$ , es una relación de equivalencia. Se denotará por  $Ex((C, R, \nu), (G, H, \omega))$  el conjunto de todas las clases de equivalencia de extensiones centrales de  $(C, R, \nu)$  por  $(G, H, \omega).$

**Lema 148** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado tal que  $C$  es un cociente de  $K$ ,  $C = K/I$ . Consideremos un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(A, 0, 0)$ . Se tiene entonces que  $Ex((C, R, \nu), A) \equiv Ex((C, R, \nu), (A, 0, 0)) = Ex(C, A).$

**Demostración:**

Consideremos un elemento de  $Ex(C, A):$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} C' \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

donde  $f$  es un morfismo de  $K$ -álgebras, y en particular de  $K$ -módulos. Como  $C'$  es un  $C$ -módulo y existe un morfismo sobreyectivo  $K \rightarrow K/I = C$  se tiene que  $f$  es de  $C$ -módulos [48], y también de  $R$ -módulos.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & C' & \xrightarrow{f} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \nu \circ f & & \downarrow \nu & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{id} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se verifica que  $C' \xrightarrow{\nu \circ f} R$  es un módulo cruzado:

- $((\nu \circ f)(c))c' = \nu(f(c))c' = f(c)c' \equiv cc'$ , donde  $c, c' \in C'$ .
- $(\nu \circ f)(rc) = \nu(f(rc)) = \nu(rf(c)) = r\nu(f(c))$ , donde  $c \in C', r \in R'$ .

Además, se verifica trivialmente que  $(f, id)$  es un morfismo de módulos cruzados. Finalmente veremos que este diagrama cumple la igualdad necesaria para que sea una extensión de  $(C, R, \nu)$  por  $(A, 0, 0)$  :

Usaremos la notación  $I = (i, 0), F = (f, id)$  para los morfismos de módulos cruzados. Se tiene que  $(c, r)I(a, 0) = (c, r)(i(a), 0) = (ci(a) + ri(a), 0) = (i(f(c)a) + i(f(r))a, 0) = I(f(c)a + f(r)a, 0) = I((f(c), f(r)), (a, 0))$ , donde  $a \in A, c \in C', r \in R$ .

El resto de comprobaciones son inmediatas. □

**Teorema 149** *(de clasificación)*

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado tal que  $C$  es un cociente de  $K$ ,  $C = K/I$ . Dado  $(A, 0, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo se tiene un isomorfismo:

$$Ex((C, R, \nu), A) \cong H^1((C, R, \nu), A).$$

**Demostración:**

Consideremos la resolución usada para calcular la cohomología de  $(C, R, \nu)$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightrightarrows & (\bar{J}, J \otimes J, in) & \rightrightarrows & (\bar{H}, H \otimes H, in) & \rightrightarrows & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & & & (C, R, \nu) & & \end{array}$$

donde  $H = K[C \times R]$  y  $J = K[\bar{H} \times (H \otimes H)]$ . Aplicando los coeficientes correspondientes y considerando el complejo asociado se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Der((C, R, \nu), A) & \longrightarrow & Der((\bar{H}, H \otimes H, in), A) & \longrightarrow & Der((\bar{J}, J \otimes J, in), A) & \cdots \\ & \searrow & & \downarrow & & \swarrow & \\ & & & Der((C, R, \nu), A) & & & \end{array}$$

Utilizando el isomorfismo entre las derivaciones y los homomorfismos se tiene el complejo:

$$0 \longrightarrow Hom_R(C, A) \longrightarrow Hom_{H \otimes H}(\bar{H}, A) \longrightarrow Hom_{J \otimes J}(\bar{J}, A) \longrightarrow \cdots$$

Tanto  $H$  como  $J$  son álgebras de polinomios sobre  $K$ ; debido a esto, existen morfismos sobreyectivos de  $H \otimes H$  y  $J \otimes J$  a  $K$ , y por tanto a  $C = K/I$ ; además  $\bar{H}$  y  $\bar{J}$  son  $C$ -módulos. Con todo esto, el complejo cadena se puede sustituir por otro complejo isomorfo [48]:

$$0 \longrightarrow Hom_C(C, A) \longrightarrow Hom_C(\bar{H}, A) \longrightarrow Hom_C(\bar{J}, A) \longrightarrow \cdots$$

Este complejo nos permite calcular la cohomología de  $C$  con coeficientes en  $A$  y por tanto  $H^1((C, R, \nu), A) \cong Ex(C, A) = Ex((C, R, \nu), A)$ .  $\square$

**Definición 150** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se dice que  $(C, R, \nu)$  es débilmente liso (sobre  $K$ ) si para cualquier extensión central de un módulo cruzado  $(A, B, \sigma)$  por otro del tipo  $(A', 0, 0)$  :

$$0 \longrightarrow (A', 0, 0) \longrightarrow (A'', B, \sigma'') \xrightarrow{f} (A, B, \sigma) \longrightarrow 0$$

y para cualquier morfismo  $g : (C, R, \nu) \rightarrow (A, B, \sigma)$  existe un morfismo  $h : (C, R, \nu) \rightarrow (A'', B, \sigma'')$  tal que  $f \circ h = g$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & (K, K, id) & \longrightarrow & (C, R, \nu) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow g & & \\ & & & \swarrow h & & & \\ 0 & \longrightarrow & (A', 0, 0) & \longrightarrow & (A'', B, \sigma'') & \xrightarrow{f} & (A, B, \sigma) \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Ejemplo 151** Cualquier módulo cruzado del tipo  $(K[x_1, \dots, x_n], K[x_1, \dots, x_n], id)$  es débilmente liso.

**Teorema 152** En las condiciones del teorema de clasificación, un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  es débilmente liso si y sólo si  $H^1((C, R, \nu), A) = 0$  para todo  $(C, R, \nu)$ -módulo  $A$ .

**Demostración:**

“ $\Rightarrow$ ”

Como  $(C, R, \nu)$  es débilmente liso dado un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(A, 0, 0)$  se tiene diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (C, R, \nu) & & \\ & & & & \downarrow id & & \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (A, 0, 0) & \longrightarrow & (A', R, \nu') & \xrightarrow{f} & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \end{array}$$

es decir, se tiene una sección de  $f$ ,  $f \circ g = id$ . Por tanto  $(A', R, \nu')$  es isomorfo a  $(A, 0, 0) \times (C, R, \nu)$  y la extensión es la trivial; con esto  $H^1((C, R, \nu), A) = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ”

Consideremos una extensión central:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow 0 & & \downarrow \sigma' & & \downarrow \sigma \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f'} & B \longrightarrow 0
\end{array}$$

y un morfismo  $(g, g') : (C, R, \nu) \longrightarrow (A, B, \sigma)$ . Construimos ahora el cuadrado cartesiano relativo a los morfismos  $(g, g') : (C, R, \nu) \longrightarrow (A, B, \sigma), (f, f') : (A', B, \sigma') \longrightarrow (A, B, \sigma)$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & (G, H, \omega) & \xrightarrow{(h, h')} & (C, R, \nu) & & \\
& & \downarrow \blacksquare & & \downarrow (g, g') & & \\
0 & \longrightarrow & (A'', 0, 0) & \longrightarrow & (A', B, \sigma) & \xrightarrow{(f, f')} & (A, B, \sigma) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Este cuadrado cartesiano se construye a partir de los dos cuadrados cartesianos siguientes en la categoría de álgebras conmutativas:

$$\begin{array}{ccc}
G & \longrightarrow & C \\
\downarrow \blacksquare & & \downarrow \\
A' & \longrightarrow & A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H & \longrightarrow & R \\
\downarrow \blacksquare & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & B
\end{array}$$

Se tiene por ello que  $H = R$  y además el núcleo de  $G \rightarrow C$  es  $A''$ . Por tanto se puede reescribir el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (A'', 0, 0) & \longrightarrow & (G, H, \omega) & \xrightarrow{(h, h')} & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \blacksquare & & \downarrow (g, g') \\
0 & \longrightarrow & (A'', 0, 0) & \longrightarrow & (A', B, \sigma) & \xrightarrow{(f, f')} & (A, B, \sigma) \longrightarrow 0
\end{array}$$

donde la fila superior es una extensión central. Esta extensión debe ser trivial ya que  $H^1((C, R, \nu), A'') = 0$  y por tanto existe una sección de  $(h, h')$ , es decir,  $(j, j') : (C, R, \nu) \rightarrow (G, H, \omega)$  tal que  $(j, j') \circ (h, h') = id_{(G, H, \omega)}$ . De esta manera  $(i, i') \circ (j, j')$  es el levantamiento de  $(g, g')$ .  $\square$

**Teorema 153** (*Primera sucesión exacta fundamental*)

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $H$  un anillo tal que existe un morfismo de anillos  $j : H \rightarrow K$ . Entonces hay una sucesión exacta:

$$\text{Diff}((K, K, id)/H) \otimes_K (C \rtimes R) \xrightarrow{\alpha} \text{Diff}((C, R, \nu)/H) \xrightarrow{\beta} \text{Diff}((C, R, \nu)/K) \rightarrow 0$$

Los morfismos  $\alpha$  y  $\beta$  vienen dados por las expresiones:

$$\alpha(D(k, k') \otimes (c, r)) = (c, r)D'(f(k), g(k'))$$

$$\beta(D'(c, r)) = D''(c, r)$$

donde  $f$  y  $g$  son los morfismos  $f : K \rightarrow C, g : K \rightarrow R$  que existen por ser  $C$  y  $R$   $K$ -álgebras y  $D, D'$  y  $D''$  representan los morfismos naturales  $D : K \rtimes K \rightarrow \text{Diff}(K, K, id), D' : C \rtimes R \rightarrow \text{Diff}((C, R, \nu)/H), D'' : C \rtimes R \rightarrow \text{Diff}((C, R, \nu)/K)$ .

**Demostración:**

De la misma forma que en el enunciado del teorema, en la demostración vamos a realizar un abuso de notación omitiendo las clases de equivalencia para que esta sea más clara.

Los morfismos  $\alpha$  y  $\beta$  están bien definidos ya que  $\alpha(((0, k) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, k)) \otimes (c, r)) = \alpha(D(0, k) \otimes (c, r)) = (c, r)D'((f, g)(0, k)) = (c, r)D'(0, g(k)) = 0$  y  $\beta((0, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, r)) = \beta(D'(0, r)) = D''(0, r) = 0$ .

El módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  es un objeto de  $XMod_K$ , pero por medio del morfismo  $j : H \rightarrow K$  es también un objeto de  $XMod_H$ .

El morfismo  $\beta$  es claramente sobreyectivo. Para comprobar la exactitud de la serie se aplicará el lema de Yoneda [51] en la categoría de  $C \rtimes R$ -módulos; con esto se tiene que es suficiente comprobar la exactitud de:

$$\text{Hom}_{C \rtimes R}(\text{Diff}((K, K, id)/H) \otimes_K (C \rtimes R), A) \xleftarrow{\alpha^*} \text{Hom}_{C \rtimes R}(\text{Diff}((C, R, \nu)/H), A) \xleftarrow{\beta^*} \text{Hom}_{C \rtimes R}(\text{Diff}((C, R, \nu)/K), A)$$

para cualquier  $C \rtimes R$ -módulo  $A$ . A su vez, y teniendo en cuenta el isomorfismo  $(C \rtimes R) \otimes_{(C \rtimes R)} A \cong A$ , esta sucesión es equivalente a:

$$Der_H((K, K, id), A) \xleftarrow{\alpha^*} Der_H((C, R, \nu), A) \xleftarrow{\beta^*} Der_K((C, R, \nu), A).$$

•  $\text{Im } \beta^* \subseteq \ker \alpha^*$  ya que cualquier  $K$ -derivación  $d : (C, R, \nu) \rightarrow (A, 0, 0)$  se anula sobre  $K \rtimes K$ .

•  $\ker \alpha^* \subseteq \text{Im } \beta^*$  : sea  $d$  una  $H$ -derivación  $d : (C, R, \nu) \rightarrow (A, 0, 0)$  tal que  $d(K \rtimes K) = 0$ . Como además  $d(0, K) = 0$ , se tiene que  $d(K, 0) = 0$  y por tanto  $d$  es una  $K$ -derivación [29].  $\square$

**Teorema 154** (*Segunda sucesión exacta fundamental*)

Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado e  $(I, J, \varphi)$  un ideal cruzado. Entonces se tiene una sucesión exacta:

$$(I \rtimes J) / [I \rtimes J, I \rtimes J] \xrightarrow{\alpha} \text{Diff}(C, R, \nu) \otimes_K ((C \rtimes R) / (I \rtimes J)) \xrightarrow{\beta} \text{Diff}((C, R, \nu) / (I, J, \varphi)) \rightarrow 0$$

donde  $\alpha$  es el morfismo  $\alpha(i, j) = D(i, j) \otimes (0, 1)$ , con  $D$  la composición  $C \rtimes R \xrightarrow{d} \Omega_{C \rtimes R} \rightarrow \text{Diff}(C, R, \nu)$ .

**Demostración:**

Como ya se ha hecho en el anterior teorema, en este también se van a omitir las clases de equivalencia en la notación.

Sean  $(i, j) \in I \rtimes J, (c, r) \in C \rtimes R$ ; se tiene que  $\alpha((c, r)(i, j)) = d((i, j)(c, r)) \otimes (0, 1) = (c, r)d(i, j) \otimes (0, 1) + (i, j)d(c, r) \otimes (0, 1) = d(i, j) \otimes (c, r)$ . Por tanto,  $\alpha$  es  $C \rtimes R$ -lineal.

Además, dado  $(i', j') \in I \rtimes J$  se tiene que  $\alpha((i', j')(i, j)) = 0$  y el morfismo está bien definido.

Aplicando el lema de Yoneda, la exactitud de la sucesión propuesta es equivalente a la exactitud de:

$$\text{Hom}_{C \rtimes R / I \rtimes J}((I \rtimes J) / [I \rtimes J, I \rtimes J], A) \xleftarrow{\alpha^*} \text{Hom}_{C \rtimes R / I \rtimes J}(\text{Diff}(C, R, \nu) \otimes_K ((C \rtimes R) / (I \rtimes J)), A) \xleftarrow{\beta^*} \text{Hom}_{C \rtimes R / I \rtimes J}(\text{Diff}((C, R, \nu) / (I, J, \varphi)), A) \leftarrow 0$$

para cualquier  $(C \rtimes R)/(I \rtimes J)$ -módulo  $A$ . Además, esta sucesión la podemos sustituir por:

$$\text{Hom}_{C \rtimes R/I \rtimes J}((I \rtimes J)/[I \rtimes J, I \rtimes J], A) \xleftarrow{\alpha^*} \text{Der}_K((C, R, \nu), A) \xleftarrow{\beta^*} \text{Der}_K((C, R, \nu)/(I, J, \varphi), A) \leftarrow 0.$$

- $\beta^*$  es inyectiva trivialmente.
- $\text{Im } \beta^* \subseteq \ker \alpha^*$  : sea  $d \in \text{Im } \beta^* \Rightarrow d(I \rtimes J) = 0 \Rightarrow d \in \ker \alpha^*$ .
- $\ker \alpha^* \subseteq \text{Im } \beta^*$  : sea  $d : C \rtimes R \rightarrow A$  una  $K$ -derivación tal que  $d(0, R) = 0$ ;  $(\alpha^* d)(i, j) = d(i, j)$ . Si  $\alpha^*(d) = 0 \Rightarrow d(I \rtimes J) = 0$  y  $d$  se puede ver como una  $K$ -derivación de  $C \rtimes R/I \rtimes J$  en  $A$  que además verifica  $d(0, R) = 0$ .  $\square$

### 3.3. (Co)Homología de módulos cruzados esféricos

**Definición 155** *Se dice que un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  es esférico si el morfismo  $\nu$  es inyectivo.*

Los módulos cruzados esféricos forman una subcategoría dentro de los módulos cruzados, que además es isomorfa a la categoría de morfismos de álgebras sobreyectivos:

$$\begin{aligned} \text{Morfismos sobreyectivos} &\rightarrow \text{Módulos cruzados esféricos} \\ f : R \rightarrow R' &\mapsto (\ker f, R, \text{in}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Módulos cruzados esféricos} &\rightarrow \text{Morfismos sobreyectivos} \\ (C, R, \nu) &\mapsto R \rightarrow R/\nu(C) \end{aligned}$$

Además, sean  $R, R'$  dos  $K$ -álgebras y  $f : R \rightarrow R'$  un morfismo sobreyectivo entre ellas.  $(\ker f, R, \text{in})$  es claramente un módulo cruzado esférico. Además, a este módulo cruzado le corresponde el morfismo  $f : R \rightarrow R/\ker f \cong R'$ . La comprobación recíproca es también inmediata. Al módulo cruzado esférico inducido por un morfismo sobreyectivo lo denotaremos por  $XM(f)$ .

Ahora, sea  $A$  un álgebra singular tal que existe una acción de  $XM(f)$  sobre ella, es decir,  $(A, 0, 0)$  es un  $XM(f)$ -módulo. En este caso,  $A$  es un  $R'$ -módulo y también un  $R$ -módulo vía  $f$ .

**Lema 156** *Sean  $f : R \rightarrow R', f' : R' \rightarrow R$  morfismos de álgebras tales que  $ff' = \text{id}$ . Sea  $A$  un  $XC(f)$ -módulo. Se verifica que hay una sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow \text{Der}(R', A) \longrightarrow \text{Der}(R, A) \longrightarrow \text{Der}(XC(f), A) \longrightarrow 0$$

**Demostración:**

Definimos:

$$\begin{aligned}\alpha : Der(R, A) &\rightarrow Der(XC(f), A) \\ d &\mapsto (\alpha(d))(i, j) = d(i)\end{aligned}$$

Se verifica que:

$$i)(\alpha(d))(0, j) = 0$$

$$ii)(\alpha(d))((i, j)(i', j')) = (\alpha(d))(ii' + j'i + j'i', jj') = d(ii' + j'i + j'i') = d(ii') + d(j'i) + d(j'i') = id(i') + i'd(i) + j'd(i) + id(j') + jd(i') + i'd(j) = j'd(i) + jd(i').$$

Esta última igualdad se tiene porque la acción de  $\ker f$  sobre  $A$  es trivial.

$$\text{Por otro lado } (i, j)(\alpha(d)(i', j')) + (i', j')(\alpha(d)(i, j)) = (i, j)d(i') + (i', j')d(i) \equiv jd(i') + j'd(i).$$

Los dos puntos anteriores prueban que  $\alpha(d) \in Der(XC(f), A)$ . Además, dada  $d \in Der(XC(f), A)$ , se verifica que  $d(i) = d'(i + f'f(i), 0)$  es la preimagen de  $d$  ya que  $(\alpha(d))(i, i) = d(i) = d'(i, 0) = d'(i, j)$ .

La exactitud en los otros términos es inmediata.  $\square$

Consideremos un morfismo de álgebras sobreyectivo  $f : R \rightarrow R'$  y sea  $A$  un  $XC(f)$ -módulo. Denotaremos por  $T_*(R, A), T^*(R, A)$  los complejos estándar utilizados para computar la (co)homología de  $R$  con coeficientes en  $A$ .

El morfismo  $f$  induce un morfismo inyectivo de cadenas  $T_*(R, A) \rightarrow T_*(R', A)$  y un morfismo sobreyectivo de cocadenas  $T^*(R', A) \rightarrow T^*(R, A)$ . Esto nos permite definir la siguiente (co)homología relativa:

$$\begin{aligned}H_n(R', R; A) &= H_n \ker(T_*(R, A) \rightarrow T_*(R', A)). \\ H^n(R', R; A) &= H^n \text{coker}(T^*(R', A) \rightarrow T^*(R, A)).\end{aligned}$$

**Teorema 157** *Sea  $f : R \rightarrow R'$  un morfismo sobreyectivo de álgebras y  $A$  un  $XC(f)$ -módulo. Entonces:*

$$\begin{aligned}H^n(XC(f), A) &\cong \begin{cases} Der(XC(f), A) & \text{si } n = 0. \\ H^n(R', R; A) & \text{si } n > 0. \end{cases} \\ H_n(XC(f), A) &\cong \begin{cases} Diff(XC(f), A) & \text{si } n = 0. \\ H_n(R', R; A) & \text{si } n > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

**Demostración:**

Sea  $FU$  el cotriple que se utiliza para computar la (co)homología de módulos cruzados; usaremos las notaciones  $FU_*(XC(f)) = (\ker f_*, R_*, in_*)$ ,  $S_* = R_*/\ker f_*$ ,  $g_* : R_* \rightarrow S_*$ .

Se tienen resoluciones simpliciales libres  $C_* \rightarrow \ker f$ ,  $R_* \rightarrow R$ ,  $S_* \rightarrow R/\ker f$  ya que  $XC(f)$  es asférico y toda subálgebra de un álgebra libre, también es libre. Hay entonces una sucesión exacta corta de complejos simpliciales:

$$0 \longrightarrow C_* \longrightarrow R_* \longrightarrow S_* \longrightarrow 0$$

Consideremos ahora  $\Gamma$  el cotriple libre en álgebras; se tiene un morfismo de complejos simpliciales  $\Gamma_*f : \Gamma_*R \rightarrow \Gamma_*R'$  y como  $\Gamma_n f$  y  $g_n$  tienen una sección para todo  $n$  se tiene, aplicando el lema anterior, el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Der(S_*, A) & \longrightarrow & Der(R_*, A) & \longrightarrow & Der((\ker g_*, R_*, in_*), A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Der(\Gamma_*R', A) & \longrightarrow & Der(\Gamma_*R, A) & \longrightarrow & Der((\ker \Gamma_*f, \Gamma_*R, in_*), A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Los dos primeros morfismos verticales son equivalencias de homotopía. Tomando las sucesiones exactas largas en cohomología en cada una de las filas y aplicando el lema de los cinco se obtiene, para  $n \geq 0$ :

$$H^n Der((\ker \Gamma_*f, \Gamma_*R, in_*), A) \cong H^n Der((\ker g_*, R_*, in_*), A) = H^n Der((in(C_*), R_*, in_*), A) \cong H^n Der((\ker f, R, in), A).$$

También se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Der(\Gamma_*R', A) & \longrightarrow & Der(\Gamma_*R, A) & \longrightarrow & Der((\ker \Gamma_*f, \Gamma_*R, in_*), A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T^*(R', A) & \longrightarrow & T^*(R, A) & \longrightarrow & \text{coker}(T^*(R', A) \rightarrow T^*(R, A)) \rightarrow 0 \end{array}$$

donde los dos primeros morfismos verticales inducen isomorfismos en cohomología [7]. Tomando las sucesiones exactas largas en cohomología en cada una de las filas se tiene para cada  $n \geq 0$ :

$$H^n Der((\ker \Gamma_*f, \Gamma_*R, in_*), A) \cong H^n(\text{coker}(T^*(R', A) \rightarrow T^*(R, A)))$$

y el miembro de la derecha es  $H^n(R', R; A)$ .

El argumento para la homología es similar y más sencillo; basta tener en cuenta que se verifica el análogo al lema previo ya el morfismo  $\Omega_{\ker f \rtimes R_*} \otimes A \rightarrow \Omega_{R_*} \otimes A$  es inyectivo [2] y este, a su vez, induce un morfismo inyectivo  $\text{Diff}((\ker f, R, in), A) \rightarrow \Omega_{R_*} \otimes A$ .  $\square$

### 3.4. (Co)Homología con coeficientes $(0, A, 0)$

El objetivo de esta sección es, procediendo de manera análoga a como se ha hecho para definir la (co)homología de módulos cruzados con coeficientes de la forma  $(A, 0, 0)$ , definir una teoría de (co)homología de módulos cruzados diferente con coeficientes de la forma  $(0, A, 0)$ . Esta teoría será más general, pues generalizará la (co)homología de álgebras conmutativas (y no sólo la de álgebras conmutativas singulares).

Para esto, consideraremos un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(0, A, 0)$  (es decir, un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $A$ ). Se tiene entonces una acción de  $C \rtimes R$  sobre  $A$ .

**Observación 158** *El módulo cruzado  $(0, A, 0)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $\Leftrightarrow A$  es un  $R/\nu(C)$ -módulo:*

*Supongamos que  $(0, A, 0)$  es un  $(C, R, \nu)$ -módulo; entonces existe una sucesión exacta corta rota a la derecha:*

$$0 \longrightarrow (0, A, 0) \longrightarrow (0, A, 0) \rtimes (C, R, \nu) \rightleftarrows (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

*o escrita de otra manera:*

$$0 \longrightarrow (0, A, 0) \longrightarrow (C, A \rtimes R, 0 \rtimes \nu) \rightleftarrows (C, R, \nu) \longrightarrow 0$$

*que induce una sucesión exacta corta rota a la derecha:*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \rtimes R \rightleftarrows R \longrightarrow 0$$

*Por tanto se tiene que  $A$  es un  $R$ -módulo. Falta por comprobar que la acción de  $R$  sobre  $A$  restringida a  $\nu(C)$  es la trivial. Para comprobarlo consideremos  $c \in C, a \in A, r \in R$ . Aplicando una de las identidades del módulo cruzado  $(0 \rtimes C, A \rtimes R, 0 \rtimes \nu)$  se tiene que han de coincidir:*

- $(0 \rtimes \nu)((a, r) \cdot (0, c)) = (a, r)((0 \rtimes \nu)(0, c)) = (a, r)(0, \nu(c)) = (\nu(c) \cdot a, r\nu(c))$ .
- $(0 \rtimes \nu)((a, r) \cdot (0, c)) = (0 \rtimes \nu)(ca, rc) = (0, \nu(rc)) = (0, r\nu(c))$ .

Por tanto, se tiene que  $\nu(c) \cdot a = 0$  y entonces  $A$  es un  $R/\nu(C)$ -módulo.

Ahora, supongamos que  $A$  es un  $R/\nu(C)$ -módulo. Entonces  $A$  tiene estructura de  $R$ -módulo inducida por el morfismo canónico  $R \rightarrow R/\nu(C)$  y por tanto  $(0, A, 0)$  tiene estructura de  $(C, R, \nu)$ -módulo.

A continuación, vamos a identificar las derivaciones  $\text{Der}((C, R, \nu), (0, A, 0))$ . Por la correspondencia con las  $\text{cat}^1$ -álgebras esto es lo mismo que las  $\text{Der}((C \rtimes R, s, t), (A, s', t'))$ , donde:

$$\begin{aligned} s, t : C \rtimes R &\rightarrow C \rtimes R \\ (c, r) &\mapsto s(c, r) = (0, r) \\ (c, r) &\mapsto t(c, r) = (0, r + \nu(c)) \\ \\ s', t' : 0 \rtimes A &\rightarrow 0 \rtimes A \\ (0, a) &\mapsto s'(0, a) = (0, a) \\ (0, a) &\mapsto t'(0, a) = (0, a) \end{aligned}$$

Por tanto para que  $d \in \text{Der}((C \rtimes R, s, t), (A, s', t'))$ , dados  $c \in C, r \in C$  y si  $d(c, r) = (0, a)$ , se deben verificar las siguientes igualdades:

- $d(s(c, r)) = d(0, r) = s'd(c, r) = s'(0, a) = (0, a) \Rightarrow d(0, r) = d(c, r)$  para todo  $c \in C, r \in R \Rightarrow d(c, 0) = 0$  para todo  $c \in C \Rightarrow d(C, 0) = 0$ .
- $d(t(c, r)) = d(0, r + \nu(c)) = d(0, r) + d(0, \nu(c)) = t'd(c, r) = t'd(0, r) \Leftrightarrow (0, a) + d(0, \nu(c)) = t(0, a) = (0, a) \Leftrightarrow d(0, \nu(c)) = 0$  para todo  $c \in C \Rightarrow d(0, \nu(C)) = 0$ .

Por tanto se tiene  $\text{Der}((C \rtimes R, s, t), (A, s', t')) = \{\text{Der}(C \rtimes R, A) \mid d(C, 0) = 0, d(0, \nu(C)) = 0\}$ . Además, se puede definir el siguiente morfismo:

$$\begin{aligned} \{\text{Der}(C \rtimes R, A) \mid d(C, 0) = 0, d(0, \nu(C)) = 0\} &\rightarrow \text{Der}(R/\nu(C), A) \\ d &\mapsto d', \text{ donde } d'(\bar{r}) = d(0, r) \end{aligned}$$

que es trivialmente un isomorfismo.

Ahora, pasando de nuevo a la categoría coma sobre  $(C, R, \nu)$ , se tiene un funtor contravariante  $\mathcal{D}er(-, A) : XMod/(C, R, \nu) \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$ . Estas derivaciones en la categoría coma  $\mathcal{D}er((C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu), A)$  se denotarán por  $\mathcal{D}er((C', R', \nu'), A)$  cuando el contexto sea claro.

**Observación 159** *Las derivaciones  $\mathcal{D}er((C, R, \nu), A)$  que se acaban de definir son una particularización de las derivaciones que se definieron para el caso de dos módulos cruzados generales  $\mathcal{D}er((C, R, \nu), (A, B, \sigma))$  donde, en el caso que acabamos de tratar,  $A = 0, \sigma \equiv 0$ .*

A continuación, para estudiar las diferenciales debemos recordar que se tiene el isomorfismo:

$$\begin{aligned} Hom_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R}, A) &\rightarrow \mathcal{D}er(C \rtimes R, A) \\ f &\longmapsto f \circ \delta \end{aligned}$$

donde  $\delta \in \mathcal{D}er(C \rtimes R, \Omega_{C \rtimes R}), \delta(c, r) = (c, r) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (c, r)$ .

El objeto que interesa estudiar es  $\mathcal{D}er((C, R, \nu), A) = \{d \in \mathcal{D}er(C \rtimes R, A) \mid d(0, \nu(C)) = 0 \text{ y } d(C, 0) = 0\}$ ; para ello, se deben imponer las restricciones  $(f \circ \delta)(c, 0) = 0$  y  $(f \circ \delta)(0, \nu(c)) = 0$ , es decir,  $f((c, 0) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (c, 0)) = 0$  y  $f((0, \nu(c)) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (0, \nu(c))) = 0$ .

Además, dada  $d \in \mathcal{D}er((C, R, \nu), A)$ , el morfismo  $f \in Hom_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R}, A)$  al que corresponde se anula en:

- $\langle (c, 0) \otimes (0, 1) \rangle: f((c, 0) \otimes (0, 1)) = (c, 0)d(0, 1) = 0$ .
- $\langle (0, 1) \otimes (c, 0) \rangle: f((0, 1) \otimes (c, 0)) = (0, 1)d(c, 0) = 0$ .
- $\langle (0, \nu(c)) \otimes (0, 1) \rangle: f((0, \nu(c)) \otimes (0, 1)) = (0, \nu(c))d(0, 1) = 0$ .
- $\langle (0, 1) \otimes (0, \nu(c)) \rangle: f((0, 1) \otimes (0, \nu(c))) = (0, 1)d(0, \nu(c)) = 0$ .

Por tanto se tiene el isomorfismo  $Hom_{C \rtimes R}(\Omega_{C \rtimes R} / \langle ((c-1, 0) \otimes (1-c, 0)), ((0, \nu(c)-1) \otimes (0, 1-\nu(c))) \rangle, A) \cong \mathcal{D}er((C, R, \nu), A)$ . Este isomorfismo motiva la siguiente definición.

**Definición 160** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado. Se definen las diferenciales  $\mathcal{D}iff(C, R, \nu) = \Omega_{C \times R} / \langle ((c-1, 0) \otimes (1-c, 0)), ((0, \nu(c)-1) \otimes (0, 1-\nu(c))) \rangle$ .

**Observación 161** Esta definición generaliza la de las diferenciales de álgebras conmutativas, pues si consideramos el módulo cruzado  $(0, R, 0)$  se tiene que  $\mathcal{D}iff(0, R, 0) = \Omega_{0 \times R} / \langle 0 \rangle = \Omega_R$ .

**Observación 162** Se puede comprobar trivialmente que se tienen dos funtores  $\mathcal{D}er((C, R, \nu), -)$ ,  $\mathcal{D}iff(C, R, \nu) \otimes - : C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}$ . El isomorfismo señalado antes de la definición muestra que  $\mathcal{D}er((C, R, \nu), -)$  es adjunto por la derecha de  $\mathcal{D}iff(C, R, \nu) \otimes -$ .

Considerando la categoría como sobre el módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  obtenemos un functor covariante  $\mathcal{D}iff(-, A) : X\text{Mod}/(C, R, \nu) \rightarrow C \times R\text{-Mod}$ ; dado un objeto  $(C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu)$  la acción de  $(C, R, \nu)$  sobre  $A$  induce una acción de  $(C', R', \nu')$  sobre  $A$ . El carácter functorial es de comprobación trivial. La estructura de  $C \times R$ -módulo de  $\mathcal{D}iff((C', R', \nu') \rightarrow (C, R, \nu), A)$  es la inducida por la estructura de  $C \times R$ -módulo de  $A$ .

**Proposición 163** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(0, A, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Dada una derivación  $h \in \mathcal{D}er((C, R, \nu), A)$  existe un único morfismo de  $C \times R$ -módulos  $f : \mathcal{D}iff(C, R, \nu) \rightarrow A$  que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C \times R & \xrightarrow{D} & \mathcal{D}iff(C, R, \nu) \\ h \downarrow & \swarrow f & \\ A & & \end{array}$$

donde  $D$  es la composición de la derivación  $d : C \times R \rightarrow \Omega_{C \times R}$  y la proyección en el cociente  $\Omega_{C \times R} \rightarrow \mathcal{D}iff(C, R, \nu)$ .

**Observación 164** Todos los lemas referentes a las derivaciones y a las diferenciales enunciados para la teoría de (co)homología previamente definida, se verifican también para las derivaciones y diferenciales que se han definido en esta sección, sustituyendo la hipótesis de que  $C$  sea libre (de tipo finito) por que lo sea  $R/\nu(C)$ . Los argumentos para probarlos son exactamente los mismos.

Para construir la (co)homología de  $(C, R, \nu)$  con coeficientes en el  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(0, A, 0)$  se derivarán los funtores  $\mathcal{D}iff(-, A)$  y  $\mathcal{D}er(-, A)$  respecto al cotriple  $FU$  proporcionado por la adjunción existente entre las categorías coma  $Set/(C, R, \nu)$  y  $XMod/U(C, R, \nu)$ .

**Definición 165** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(0, A, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Se define, para cada  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n((C, R, \nu), A) &= \mathcal{H}_n \mathcal{D}iff(FU_*(C, R, \nu), A). \\ \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A) &= \mathcal{H}^n \mathcal{D}er(FU_*(C, R, \nu), A).\end{aligned}$$

**Observación 166** Dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$ , para calcular su (co)homología también se pueden usar algunas resoluciones no estándar, como por ejemplo, una resolución simplicial proyectiva, es decir, un complejo simplicial aumentado de módulos cruzados  $(C, R, \nu)_* \rightarrow (C, R, \nu)$  tal que  $(C, R, \nu)_n$  es proyectivo para todo  $n \geq 0$  y la aplicación simplicial inducida entre  $U(C, R, \nu)_*$  y el complejo simplicial constante  $U(C, R, \nu)$ , es una equivalencia de homotopía.

Como la resolución obtenida utilizando la adjunción  $FU$  es una resolución simplicial proyectiva, se tiene que para cualquier otra resolución de este tipo  $(C, R, \nu)_*$  y un  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(0, A, 0)$  se verifican los isomorfismos [8]:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n((C, R, \nu), A) &\cong \mathcal{H}_n(\mathcal{D}iff((C, R, \nu)_*, A)). \\ \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A) &\cong \mathcal{H}^n(\mathcal{D}er((C, R, \nu)_*, A)).\end{aligned}$$

**Observación 167** La (co)homología definida generaliza la (co)homología de álgebras conmutativas.

Consideremos un módulo cruzado  $(0, R, 0)$  y un  $(0, R, 0)$ -módulo  $(0, A, 0)$ . En este caso  $\mathcal{D}er((0, R, 0), A) = \{d \in \mathcal{D}er(0 \rtimes R, A) \mid d(0, 0) = 0\} \cong \mathcal{D}er(R, A)$  y por tanto  $\mathcal{H}^n((0, R, 0), (0, A, 0)) \cong H^n(R, A)$ .

Por otro lado  $\mathcal{D}iff(0, R, 0) = \Omega_{0 \rtimes R} / \langle 0 \rangle \cong \Omega_R$  y por tanto se tiene que  $\mathcal{H}_n((0, R, 0), (0, A, 0)) \cong H_n(R, A)$ .

La homología y cohomología inducen funtores:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n(-, -) &: C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod} \\ \mathcal{H}^n(-, -) &: C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}\end{aligned}$$

el primero de los cuales es covariante y el segundo es contravariante en la primera variable.

A continuación, se describen diversos resultados sobre la (co)homología que se acaba de definir. No se recogen sus demostraciones ya que estas son completamente análogas a las realizadas para la teoría de (co)homología definida previamente.

**Proposición 168** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $(0, A, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Se verifica:*

$$\begin{aligned}i) \quad \mathcal{H}_0((C, R, \nu), A) &\cong \text{Diff}((C, R, \nu), A). \\ \mathcal{H}^0((C, R, \nu), A) &\cong \mathcal{H}^n \text{Der}((C, R, \nu), A).\end{aligned}$$

ii) *Si  $(C, R, \nu)$  es un módulo cruzado proyectivo se verifica que:*

$$\mathcal{H}_n(C, R, \nu), A) = 0 \quad \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A) = 0 \quad \text{para todo } n > 0.$$

iii) *Dada una sucesión exacta corta de  $(C, R, \nu)$ -módulos:*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

*se tienen sucesiones exactas largas en (co)homología:*

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}_n((C, R, \nu), A') \rightarrow \mathcal{H}_n((C, R, \nu), A) \rightarrow \mathcal{H}_n((C, R, \nu), A'') \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}((C, R, \nu), A') \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A') \rightarrow \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A) \rightarrow \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A'') \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}((C, R, \nu), A') \rightarrow \cdots$$

**Proposición 169** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $\{(0, A_j, 0)\}_J$  una familia de  $(C, R, \nu)$ -módulos. Se verifica que:*

$$\mathcal{H}_n((C, R, \nu), \Sigma_J A_j) \cong \Sigma_J \mathcal{H}_n((C, R, \nu), A_j).$$

**Proposición 170** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado y  $\{(0, A_j, 0)\}_J$  una familia de  $(C, R, \nu)$ -módulos. Se verifica que:

$$\mathcal{H}^n((C, R, \nu), \prod_J A_j) \cong \prod_J \mathcal{H}^n((C, R, \nu), A_j).$$

**Teorema 171** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $(0, A, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo y  $(0, W, 0)$  un  $(0, A, 0)$ -módulo (es decir,  $W$  un  $A$ -módulo). Existe un isomorfismo de  $A$ -módulos:

$$\mathcal{H}_n((C, R, \nu), A) \otimes_A W \cong \mathcal{H}_n((C, R, \nu), W)$$

si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

- $W$  es un módulo plano.
- El funtor  $\mathcal{H}_n((C, R, \nu), -) : C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}$  es exacto a la derecha.

**Observación 172** La segunda hipótesis se puede cambiar por la condición de que el funtor  $\mathcal{H}_{n-1}((C, R, \nu), -) : C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}$  sea exacto a la izquierda.

**Teorema 173** Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $(0, A, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo y  $(W, 0, 0)$  un  $(0, A, 0)$ -módulo (es decir,  $W$  un  $A$ -módulo). Existe un isomorfismo de  $A$ -módulos:

$$\mathcal{H}^n((C, R, \nu), W) \cong \text{Hom}_A(\mathcal{H}_n((C, R, \nu), A), W)$$

si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

- $W$  es un módulo inyectivo.
- El funtor  $\mathcal{H}^n((C, R, \nu), -) : C \times R\text{-Mod} \rightarrow C \times R\text{-Mod}$  es exacto a la derecha.

**Observación 174** *La segunda hipótesis se puede cambiar por la condición de que el funtor  $\mathcal{H}^{n-1}((C, R, \nu), -) : C \rtimes R\text{-Mod} \rightarrow C \rtimes R\text{-Mod}$  sea exacto a la derecha.*

**Proposición 175** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $A$  una  $C \rtimes R$ -álgebra,  $W$  un  $A$ -módulo y  $M$  un  $A$ -módulo plano. Entonces existen isomorfismos naturales:*

$$\mathcal{H}_n((C, R, \nu), W) \otimes_A M \cong \mathcal{H}_n((C, R, \nu), W \otimes_A M).$$

*Además, si  $K$  es noetheriano y el álgebra  $C \rtimes R$  es de tipo finito se tienen los isomorfismos naturales:*

$$\mathcal{H}^n((C, R, \nu), W) \otimes_A M \cong \mathcal{H}^n((C, R, \nu), W \otimes_A M).$$

**Corolario 176** *Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado,  $A$  un  $C \rtimes R$ -módulo,  $W$  un  $A$ -módulo y  $S$  un subconjunto multiplicativamente cerrado de  $A$ . Se tienen isomorfismos naturales:*

$$S^{-1}\mathcal{H}_n((C, R, \nu), W) \cong \mathcal{H}_n((C, R, \nu), S^{-1}W).$$

*Además, si  $K$  es noetheriano y  $C \rtimes R$  es de tipo finito, se tienen los isomorfismos naturales:*

$$S^{-1}\mathcal{H}^n((C, R, \nu), W) \cong \mathcal{H}^n((C, R, \nu), S^{-1}W).$$

Por otra parte,  $\mathcal{H}^1$  también se puede identificar con cierta clase de extensiones, como veremos a continuación.

**Teorema 177** *(de clasificación)*

*Sea  $(C, R, \nu)$  un módulo cruzado tal que  $R$  es un cociente de  $K$ , y sea  $(0, A, 0)$  un  $(C, R, \nu)$ -módulo. Entonces, se tiene un isomorfismo:*

$$Ex(R/\nu(C), A) \cong \mathcal{H}^1((C, R, \nu), A).$$

**Demostración:**

Consideremos la resolución usada para calcular la cohomología de  $(C, R, \nu)$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightrightarrows & (\bar{J}, J \otimes J, in) & \rightrightarrows & (\bar{H}, H \otimes H, in) & \rightrightarrows & (C, R, \nu) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & & & (C, R, \nu) & & \end{array}$$

donde  $H = K[C \times R]$  y  $J = K[\bar{H} \times (H \otimes H)]$ . Aplicando los coeficientes correspondientes y considerando el complejo asociado se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \mathcal{D}er((C, R, \nu), A) & \rightarrow & \mathcal{D}er((\bar{H}, H \otimes H, in), A) & \rightarrow & \mathcal{D}er((\bar{J}, J \otimes J, in), A) & \cdots \\ & \searrow & & \downarrow & & \swarrow & \\ & & & \mathcal{D}er((C, R, \nu), A) & & & \end{array}$$

o escrito de otra forma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \mathcal{D}er(R/\nu(C), A) & \rightarrow & \mathcal{D}er((H \otimes H)/\bar{H}, A) & \rightarrow & \mathcal{D}er((J \otimes J)/\bar{J}, A) & \cdots \\ & \searrow & & \downarrow & & \swarrow & \\ & & & \mathcal{D}er(R/\nu(C), A) & & & \end{array}$$

y como este complejo proporciona la cohomología de  $R/\nu(C)$  con coeficientes en  $\mathcal{D}er(-, A)$ , tenemos que  $\mathcal{H}^1((C, R, \nu), A) \cong \mathcal{H}^1(R/\nu(C), A) \cong Ex(R/\nu(C), A)$ .  $\square$

En las condiciones del teorema que se acaba de enunciar, si se define un concepto análogo al de módulo cruzado débilmente liso pero con respecto a extensiones centrales del tipo:

$$0 \longrightarrow (0, B', 0) \longrightarrow (A, B'', \sigma'') \xrightarrow{f} (A, B, \sigma) \longrightarrow 0$$

se tiene que  $\mathcal{H}^1((C, R, \nu), A) = 0$  para todo  $(C, R, \nu)$ -módulo  $(0, A, 0)$  si y solo si  $(C, R, \nu)$  es débilmente liso.

Además, dado un módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  y un anillo  $H$  tal que existe un morfismo de anillos  $j : H \rightarrow K$ , entonces se tiene una sucesión exacta:

$$\mathcal{D}iff((K, K, id)/H) \otimes_K (C \rtimes R) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D}iff((C, R, \nu)/H) \xrightarrow{\beta} \mathcal{D}iff((C, R, \nu)/K) \rightarrow 0$$

y si  $(I, J, \varphi)$  un ideal cruzado de  $(C, R, \nu)$ , existe una sucesión exacta:

$$(I \rtimes J)/[I \rtimes J, I \rtimes J] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{D}iff(C, R, \nu) \otimes_K ((C \rtimes R)/(I \rtimes J)) \xrightarrow{\beta} \mathcal{D}iff((C, R, \nu)/(I, J, \varphi)) \rightarrow 0$$

Las demostraciones son análogas a las previamente realizadas.



## Capítulo 4

# Cálculo efectivo de homología con HAP

GAP (Groups, Algorithms, Programming) [25] es un programa de código libre orientado hacia el álgebra computacional discreta. Proporciona un lenguaje de programación, una gran librería de funciones con algoritmos algebraicos implementados escritos en lenguaje GAP y una librería con datos de numerosos objetos algebraicos. Este sistema y toda la documentación y manuales relacionados se pueden encontrar en:

<http://www.gap-system.org/gap.html>

GAP empezó a ser desarrollado en 1986 en Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen. Más tarde, en 1997, el desarrollo de GAP comenzó a ser coordinado en St. Andrews y, actualmente, hay cuatro centros que colaboran en continuar desarrollando y manteniendo GAP. Estos cuatro centros se encuentran localizados en Aachen, Braunschweig, Fort Collins y St. Andrews.

Durante todos estos años GAP ha experimentado muchos cambios y ha tenido diferentes versiones. Desde 2001 está constituido por un núcleo (escrito en C), en el que se agrupan las estructuras y utilidades básicas, y una gran librería dividida en módulos, cada uno de los cuales tiene funcionalidades en

distintas áreas. Además, hay una larga lista de paquetes aceptados programados por gente que colabora en el desarrollo de GAP. Cada uno de estos paquetes tiene que ser instalado de forma adicional y suelen estar orientados hacia funcionalidades más específicas.

Entre las utilidades proporcionadas por GAP y sus paquetes algunos ejemplos son: diversos cálculos con módulos cruzados y  $cat^1$ -grupos tales como derivaciones o morfismos (paquete XMod), funciones relacionadas con la (co)homología de grupos (paquete HAP), cálculos con grupos nilpotentes (paquete nq), funcionalidades para manejar álgebras de Lie y sus representaciones (módulo Lie álgebra)... Además, algunos paquetes proporcionan nexos con otros sistemas:

- Una interfaz al sistema KANT/KASH para teoría algebraica de números.
- Una interfaz al sistema SINGULAR para geometría algebraica (que permite, en particular, realizar cálculos con bases de Gröbner).
- Una interfaz de GAP a Maple que se está desarrollando actualmente.
- Una interfaz al programa DISCRETA.

GAP está programado de tal manera que puede ser usado con diferentes sistemas operativos: UNIX/Linux, Windows o Macintosh. Sin embargo, algunos de los paquetes no funcionan completamente con Windows.

La versión actual de GAP es la 4.4.9, que fue publicada durante Noviembre de 2006 e incluye más de sesenta paquetes. Desde 1995 existe un Consejo formado por varios matemáticos e ingenieros informáticos de distintas áreas dentro de la teoría computacional de grupos. Los miembros de este Consejo ejercen de editores y coordinan el proceso mediante el cual los paquetes presentados son revisados para su admisión. Otra de sus funciones fundamentales es aconsejar sobre las futuras líneas de desarrollo de GAP.

GAP ha demostrado ser una útil herramienta de investigación y, de hecho, se han encontrado muchas aplicaciones en diversas áreas, incluso en algunas bastante sorprendentes. Así, GAP se ha usado para estudiar y encontrar resultados sobre superficies de Riemann compactas, técnicas de condensación,

espectroscopia molecular o teoría de invariantes para grupos finitos. Algunos de estos ejemplos se pueden encontrar en:

<http://www.gap-system.org/Doc/applications.html>

Como prueba de esto cabe destacar el hecho de que GAP ha acumulado un gran número de citas en diversa bibliografía; desde 1997 el número de citas por año ha estado normalmente en torno a 80 ó 90, llegando a 116 durante 2004.

El objetivo de este capítulo es, usando GAP, comparar la homología entera de un grupo nilpotente libre con la de su álgebra de Lie asociada y proporcionar un método que permita computar algunas homologías enteras de grupos que todavía no han sido calculadas. Para ello, se usará en particular el paquete HAP (Homological algebra programming) que está especialmente enfocado hacia los cálculos relacionados con la (co)homología de grupos [26]. También he programado algunas funciones nuevas que han sido incluidas en este paquete.

**Definición 178** *Dado un grupo  $G$ , se define la serie de subgrupos  $G_n, n > 0$  como sigue:*

$$G_1 = G, \quad G_n = [G_{n-1}, G] = [[[[G, G], G], \dots, G],$$

donde  $[G_{n-1}, G]$  denota el subgrupo de  $G$  generado por los elementos de la forma  $x^{-1}y^{-1}xy, x \in G_{n-1}, y \in G$ .

*Esta, se llama serie central descendente de  $G$ . Además, si existe un  $n$  tal que  $G_{n+1} = \{e\}$ , entonces se dice que  $G$  es nilpotente de clase a lo sumo  $n$ . Si  $m$  es el menor número natural que satisface dicha propiedad se dice que  $G$  es nilpotente de clase  $m$ .*

**Observación 179** *La serie central descendente de un álgebra de Lie se define de forma análoga a la de grupos.*

Para el  $n$ -ésimo término de la serie central descendente también es habitual utilizar la notación  $\gamma_n(G)$ .

**Definición 180** *Se dice que un grupo (álgebra de Lie)  $G$  es nilpotente libre de rango  $n$  y clase  $c$  si  $G \cong F/F_c$ , donde  $F$  es un grupo libre (álgebra de Lie libre) de rango  $n$ .*

Dado un grupo  $G$ , a partir de él se puede construir un álgebra de Lie  $L(G)$ . Consideremos su serie central descendente; como  $G_{n+1}$  es normal en  $G_n$ , podemos tomar los cocientes  $L_n(G) = G_n/G_{n+1}$  que son abelianos [31].

Tomando ahora la suma directa  $L(G) = L_1(G) \oplus L_2(G) \oplus L_3(G) \oplus \dots$  la podemos considerar un álgebra de Lie ya que el conmutador de  $G$  induce funciones  $L_i(G) \times L_j(G) \rightarrow L_{i+j}(G)$  que proporcionan una operación corchete bilineal  $[\ , \ ] : L(G) \times L(G) \rightarrow L(G)$  que satisface la identidad de Jacobi [21].

Tomando ahora un homomorfismo de grupos  $f : G \rightarrow G'$ , se tiene que este induce homomorfismos  $f_n : L_n(G) \rightarrow L_n(G')$  que definen un morfismo de álgebras de Lie  $L(f) : L(G) \rightarrow L(G')$ . Es inmediato comprobar que entonces se tiene un funtor:

$$L : \text{Grupos} \rightarrow \text{Álgebras de Lie sobre } \mathbb{Z}$$

Se tienen varios resultados sobre este funtor:

**Teorema 181** *Sea  $G$  un grupo libre (nilpotente libre de clase  $c$ ). Entonces, el álgebra de Lie asociada  $L(G)$  es también libre (nilpotente libre de clase  $c$ ) [41].*

También hay resultados que relacionan la homología de ciertos grupos con la de su álgebra de Lie asociada [34]:

**Teorema 182** *Sea  $G$  un grupo nilpotente libre de clase 2. Entonces, la homología entera del grupo  $H_n(G, \mathbb{Z})$  es isomorfa a la homología entera del álgebra de Lie asociada  $H_n(L(G), \mathbb{Z})$  para cualquier  $n \geq 0$ .*

Debido a este resultado, la homología de algunos grupos puede ser calculada por medio de su álgebra de Lie asociada. Para ello, hemos escrito varias funciones que realizan los siguientes cálculos:

- 
- Computar el álgebra de Lie asociada a un grupo por medio de su serie central descendente.
  - Computar el morfismo inducido por un morfismo de grupos entre sus álgebras de Lie asociadas.
  - Construir el complejo de Chevalley-Eilenberg asociado a un álgebra de Lie.
  - Construir el morfismo inducido por un morfismo de álgebras de Lie entre sus complejos de Chevalley-Eilenberg asociados.
  - Comprobar si un morfismo dado es un morfismo de álgebras de Lie.

El código de estas funciones se puede encontrar al final de este capítulo.

**Observación 183** *La primera función no se puede utilizar con cualquier grupo; se puede aplicar a grupos  $G$  para los que cada  $L_n(G)$  es abeliano libre (en este caso se tomaría al anillo de los enteros como el anillo base de  $L(G)$ ) o cada  $L_n(G)$  es un  $p$ -grupo abeliano elemental (en este caso se tomará como anillo base el cuerpo con  $p$  elementos).*

*Esto no supondrá una restricción para el objetivo que se había marcado, pues sólo necesitaremos utilizar esta función con grupos nilpotentes libres, y para estos se tiene que cada  $L_n(G)$  es abeliano libre.*

La primera observación que se puede realizar es que calcular el álgebra de Lie asociada a un grupo y su homología es computacionalmente mucho más rápido y menos exigente con respecto a los recursos que se necesitan que calcular la homología del grupo directamente.

Por ejemplo, si consideramos un grupo nilpotente libre de clase 2 y rango 4, calcular su cuarta homología lleva más de cuarenta segundos. Sin embargo, computar el álgebra de Lie asociada y calcular su cuarta homología lleva menos de medio segundo.

Veamos a continuación los resultados que se obtienen al calcular la homología entera de un álgebra de Lie nilpotente libre de clase 2, es decir, la homología de un grupo  $G$  nilpotente libre de clase 2:

- Rango de  $G$ : 2

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = H_4(G, \mathbb{Z}) = \cdots = \mathbb{Z}.$$

- Rango de  $G$ : 3

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{8)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{12)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{8)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_5(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_6(G, \mathbb{Z}) = H_7(G, \mathbb{Z}) = \cdots = \mathbb{Z}.$$

- Rango de  $G$ : 4

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{20)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{56)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{84)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_5(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{90)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_6(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{84)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_7(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{56)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_8(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{20)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_9(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_{10}(G, \mathbb{Z}) = H_{11}(G, \mathbb{Z}) = \cdots = \mathbb{Z}.$$

- Rango de  $G$ : 5

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{5)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{40)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{176)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \overset{30)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{440)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

...

- Rango de  $G$ : 6

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{6)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{70)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{441)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \overset{126)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{1616)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_5(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \overset{490)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{4600)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_6(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \overset{651)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{11984)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

...

**Observación 184** *Algunos de estos cálculos no se podrían haber hecho directamente usando una resolución del grupo, pues la dimensión de los cálculos necesarios para ello es demasiado grande, así que deben ser hechos usando este método.*

Además de esto, y teniendo en cuenta más cálculos realizados con grupos nilpotentes libres de clase mayor que 2, parece que el último resultado enunciado también es verdadero para cualquier grupo nilpotente libre, es decir, la hipótesis del teorema “de clase 2” podría ser eliminada. Como ejemplo, consideremos el grupo  $G$  nilpotente libre de clase 3 y rango 3. Usando HAP para realizar los cálculos, obtenemos:

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .
- $H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{18)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$ .
- $H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{73)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$ .
- $H_4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{171)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$ .
- ...

Si tomamos el álgebra de Lie asociada  $L(G)$  y calculamos su homología, obtenemos los mismos resultados.

De hecho, esto puede ser probado para los dos primeros grupos de homología.

**Proposición 185** *Sea  $G$  un grupo nilpotente libre de clase  $n > 2$ . Entonces, se tienen isomorfismos:*

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \cong H_1(L(G), \mathbb{Z}).$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \cong H_2(L(G), \mathbb{Z}).$$

**Demostración:**

Dado  $G$  un grupo nilpotente libre de clase  $c$  tenemos que  $G \cong F/\gamma_c(F)$ , donde  $F$  es libre. El álgebra de Lie asociada a  $G$  es:

$$L(G) \cong F/\gamma_2(F) \oplus \cdots \oplus \gamma_{c-1}(F)/\gamma_c(F).$$

Ahora, calculando la primera homología, obtenemos:

- $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G] \cong (F/\gamma_c(F))/[F, F] = F/[F, F]$ .
- $H_1(L(G), \mathbb{Z}) \cong L(G)/[L(G), L(G)] \cong F/[F, F]$ .

Para calcular la segunda homología tenemos que considerar el álgebra de Lie  $L(F)$ , que también es libre.

$$L(F) = F/\gamma_2(F) \oplus \cdots \oplus \gamma_{c-1}(F)/\gamma_c(F) \oplus \gamma_c(F)/\gamma_{c+1}(F) \oplus \cdots$$

Tenemos la siguiente presentación libre:

$$K \twoheadrightarrow L(F) \twoheadrightarrow L(G)$$

donde  $K = \gamma_c(F)/\gamma_{c+1}(F) \oplus \gamma_{c+1}(F)/\gamma_{c+2}(F) \oplus \cdots$

Ahora podemos calcular la segunda homología [31]:

- $H_2(G, \mathbb{Z}) \cong \gamma_c(F) \cap [F, F]/[\gamma_c(F), F] = \gamma_c(F)/\gamma_{c+1}(F)$ .
- $H_2(L(G), \mathbb{Z}) \cong K \cap [L(F), L(F)]/[K, L(F)] = \gamma_c(L(F))/\gamma_{c+1}(L(F)) = \gamma_c(F)/\gamma_{c+1}(F)$ .

□

Además de esto, también hay ejemplos que sugieren que la hipótesis “nilpotente libre” no puede ser debilitada. Si tomamos como  $G$  el grupo de Heisenberg con 3 generadores, tenemos que  $G$  es un grupo nilpotente de clase 2 libre de torsión. Si calculamos su homología entera obtenemos:

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{14)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, si calculamos la homología de su álgebra de Lie asociada  $L(G)$  se comprueba que esta no es isomorfa a  $H_3(G, \mathbb{Z})$ :

$$H_3(L(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{19)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}.$$

Se tienen algunos otros resultados sobre el funtor que lleva un grupo a su álgebra de Lie asociada, pero antes de verlos recordaremos algunas definiciones.

**Definición 186** Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , un  $cat^n$ -objeto es un objeto  $C \in \mathcal{C}$  junto con  $2n$  endomorfismos  $s_i, t_i : C \rightarrow C$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tales que:

- $t_i s_i = s_i, s_i t_i = t_i$ .
- $s_i s_j = s_j s_i, t_i t_j = t_j t_i, s_i t_j = t_j s_i$  si  $i \neq j$ .

•  $[\text{Ker } s_i, \text{Ker } t_i] = 0$  y el subobjeto generado por los elementos de la forma  $c * c'$ , donde  $c \in \text{Ker } s_i$  y  $c' \in \text{Ker } t_i$ , es el trivial.

**Definición 187** Un  $n$ -cubo cruzado de grupos es una familia de grupos  $M_I$  ( $I \subseteq \langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ ) junto con homomorfismos  $\mu_i : M_I \rightarrow M_{I-\{i\}}$ ,  $i \in \langle n \rangle$  y funciones para  $I, J \subseteq \langle n \rangle$ ,  $h : M_I \times M_J \rightarrow M_{I \cup J}$  tales que para  $a, a' \in M_I$ ,  $b, b' \in M_J$ ,  $c \in M_L$ ,  $i, j \in \langle n \rangle$  con  $M_I \subseteq M_J$  y denotando  ${}^a b = h(a, b)b$ , se verifica:

- $\mu_i a = a$  si  $i \notin I$ .
- $\mu_i \mu_j a = \mu_j \mu_i a$ .
- $\mu_i h(a, b) = h(\mu_i a, \mu_i b)$ .
- $h(a, b) = h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b)$  si  $i \in A \cap B$ .
- $h(a, a') = [a, a']$ .
- $h(a, b) = h(b, a)^{-1}$ .
- $h(a, b) = 1$  si  $a = 1$  ó  $b = 1$ .
- $h(aa', b) = {}^a h(a', b)h(a, b)$ .
- $h(a, bb') = h(a, b) {}^b h(a, b')$ .
- ${}^a h(h(a^{-1}, b), c) {}^c h(h(c^{-1}, a), b) {}^b h(h(b^{-1}, c), a) = 1$ .
- ${}^a h(b, c) = h({}^a b, {}^a c)$  si  $I \subseteq J$  y  $I \subseteq L$ .

**Definición 188** Un  $n$ -cubo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie es una familia de  $K$ -álgebras de Lie  $M_I$ ,  $I \subseteq \langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$  junto con morfismos de  $K$ -álgebras de Lie  $\mu_i : M_I \rightarrow M_{I-\{i\}}$ ,  $i \in \langle n \rangle$  y funciones para  $I, J \subseteq \langle n \rangle$ ,  $h : M_I \times M_J \rightarrow M_{I \cup J}$  tales que para  $k \in K$ ,  $a, a' \in M_I$ ,  $b, b' \in M_J$ ,  $c \in M_L$ ,  $i, j \in \langle n \rangle$  se verifica:

- $\mu_i a = a$  si  $i \notin I$ .
- $\mu_i \mu_j a = \mu_j \mu_i a$ .
- $\mu_i h(a, b) = h(\mu_i a, \mu_i b)$ .
- $h(a, b) = h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b)$  si  $i \in A \cap B$ .

- $h(a, a') = [a, a']$ .
- $h(a + a', b) = h(a, b) + h(a', b)$ .
- $h(a, b + b') = h(a, b) + h(a, b')$ .
- $k \cdot h(a, b) = h(k \cdot a, b) = h(a, k \cdot b)$ .
- $h(a, a) = 0$ .
- $h(h(a, b), c) = h(a, h(b, c)) = h(b, h(a, c))$ .

**Observación 189** *El concepto de  $\text{cat}^n$ -grupo ( $\text{cat}^n$ -álgebra de Lie) es equivalente al concepto de  $n$ -cubo cruzado de grupos ( $n$ -cubo cruzado de álgebras de Lie) [19]. Además, un 1-cubo cruzado de grupos (álgebras de Lie) es un módulo cruzado de grupos (álgebras de Lie).*

**Definición 190** *Dados dos grupos  $G, G'$ , el producto tensor no abeliano  $G \otimes G'$  [17] es el grupo generado por los elementos  $g \otimes g', g \in G, g' \in G'$  sujetos a las relaciones:*

- $(gh) \otimes g' = {}^g(h \otimes g')(g \otimes g')$ , donde  $h \in G$ .
- $g \otimes (g'h') = (g \otimes g') {}^{g'}(g \otimes h')$ , donde  $g' \in G'$ .

*Además, si los grupos  $G$  y  $G'$  se obtienen de los módulos cruzados de grupos  $(G, H, \omega), (G', H, \omega')$ , el producto exterior no abeliano  $G \wedge G'$  se obtiene a partir de  $G \otimes G'$  añadiendo la relación:*

- $g \otimes g' = 1$ , cuando  $\omega(g) = \omega'(g')$ .

**Definición 191** *Dadas dos álgebras de Lie  $L, L'$  (sobre  $A$ ) tales que hay una acción de  $G$  sobre  $G'$ , el producto tensor no abeliano  $G \otimes G'$  [16] es el álgebra cociente generada por los elementos  $l \otimes l', l \in L, l' \in L'$  sujetos a las relaciones:*

- $a(l \otimes l') = al \otimes l' = l \otimes al'$ .
- $(l + m) \otimes l' = l \otimes l' + m \otimes l'$  y  $l \otimes (l' + m') = l \otimes l' + l \otimes m'$ .
- $[l, m] \otimes l' = l \otimes {}^m l' - m \otimes {}^l l'$  y  $l \otimes [l', m'] = {}^{m'} l \otimes l' - {}^{l'} l \otimes m'$ .
- $[(l \otimes l'), (m \otimes m')] = -{}^{l'} l \otimes {}^{m'} m$ .

donde  $a \in A, m \in L, m' \in L'$ .

Además, si las álgebras de Lie  $L$  y  $L'$  y sus acciones se obtienen de los módulos cruzados de álgebras de Lie  $(L, M, \omega), (L', M, \omega')$ , el producto exterior no abeliano  $L \wedge L'$  [18, 20] se obtiene a partir de  $L \otimes L'$  añadiendo la relación:

- $l \otimes l' = 0$ , cuando  $\omega(l) = \omega'(l')$ .

Dado un grupo  $G$ , se puede construir un módulo cruzado de grupos  $(G \wedge G, G, \nu)$  definiendo  $\nu(g \wedge g') = g g' g^{-1}$ .

Análogamente, dada un álgebra de Lie  $L$ , se puede construir un módulo cruzado de álgebras de Lie  $(L \wedge L, L, \nu)$  definiendo  $\nu(l \wedge l') = l' l$ .

**Proposición 192** Sea  $(G, s, t)$  un  $cat^n$ -grupo. Entonces,  $(L(G), L(s), L(t))$  es una  $cat^n$ -álgebra de Lie.

**Demostración:**

Sea  $\bar{x}$  un generador de  $L(G)$ ; hay un  $n$  tal que  $\bar{x} \in L_n(G)/L_{n+1}(G)$ . Entonces:

$$L(s)(L(s)(\bar{x})) = L(s)(L(s)(x + L_{n+1}(G))) = L(s)(s(x) + L_{n+1}(G)) = ss(x) + L_{n+1}(G) = s(x) + L_{n+1}(G) = L(s)(x + L_{n+1}(G)) = L(s)(\bar{x}).$$

El resto de las igualdades relativas a  $L(s)$  y  $L(t)$  se comprueban de manera análoga. Todavía hemos de probar que dados  $\bar{x} \in \text{Ker}(L(s))$  e  $\bar{y} \in \text{Ker}(L(t))$  entonces  $[\bar{x}, \bar{y}] = \bar{0}$ . Es suficiente probarlo para dos generadores.

Sean  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  dos generadores de  $L(G)$  tales que  $\bar{x} \in \text{Ker}(L(s))$  e  $\bar{y} \in \text{Ker}(L(t))$ . Entonces, existen  $m$  y  $n$  tales que  $\bar{x} \in L_m(G)/L_{m+1}(G)$  e  $\bar{y} \in L_n(G)/L_{n+1}(G)$ . Tenemos:

$$[\bar{x}, \bar{y}] = [x, y] + L_{m+n}(G) = [xs(x)^{-1}s(x), yt(y)^{-1}t(y)] + L_{m+n}(G) = {}^{xs(x)^{-1}}[s(x), {}^{yt(y)^{-1}}[s(x), t(y)]] + L_{m+n}(G) = [xs(x)^{-1}, {}^{yt(y)^{-1}}[s(x), t(y)]] + L_{m+n}(G) = [xs(x)^{-1}, t(y)] + L_{m+n}(G).$$

Como  $\bar{x} \in \text{Ker}(L(s))$  e  $\bar{y} \in \text{Ker}(L(t))$  tenemos que  $s(x) \in L_{m+1}(G)$  y  $t(y) \in L_{n+1}(G)$ . También se tiene que  $xs(x)^{-1} \in \text{Ker}(s)$  e  $yt(y)^{-1} \in \text{Ker}(t)$ . Por tanto obtenemos:

- $[xs(x)^{-1}, yt(y)^{-1}] = 0$ , ya que  $xs(x)^{-1} \in \text{Ker}(s), yt(y)^{-1} \in \text{Ker}(t)$  y  $(G, s, t)$  es un  $cat^n$ -grupo.
- $[xs(x)^{-1}, t(y)] \in L_{m+n+1}(G) \subseteq L_{m+n}(G)$  ya que  $xs(x)^{-1} \in L_m(G)$  y  $t(y) \in L_{n+1}(G)$ .
- $[s(x), yt(y)^{-1}] \in L_{m+n+1}(G) \subseteq L_{m+n}(G)$  ya que  $s(x) \in L_{m+1}(G)$  e  $yt(y)^{-1} \in L_n(G)$ .
- $[s(x), s(y)] \in L_{m+n+2}(G) \subseteq L_{m+n}(G)$ .

Como consecuencia se tiene que  $[x, y] \in L_{m+n}(G)$  y entonces  $[\bar{x}, \bar{y}] = \bar{0}$ .  $\square$

Por tanto, podemos considerar a  $L$  como un funtor  $L : cat^n\text{-grupos} \rightarrow cat^n\text{-álgebras de Lie sobre } \mathbb{Z}$ , es decir, como un funtor entre las categorías de  $n$ -cubos cruzados de grupos y  $n$ -cubos cruzados de álgebras de Lie.

**Proposición 193** *Sea  $F$  un grupo libre y consideremos el módulo cruzado  $\nu : F \wedge F \rightarrow F$ . Entonces,  $L(F \wedge F \xrightarrow{\nu} F) \cong L(F) \wedge L(F) \xrightarrow{\bar{\nu}} L(F)$ .*

**Demostración:**

Como  $F$  es libre, entonces  $H_2(F, \mathbb{Z}) = 0$  y esto implica que el morfismo  $\nu : F \wedge F \rightarrow F$  es inyectivo. Por tanto  $F \wedge F = [F, F]$ .

Ahora, si consideramos  $F \wedge F \rightarrow F$  como un  $cat^1$ -grupo, obtenemos  $([F, F] \rtimes F, s, t)$ , donde  $s(a, b) = b, t(a, b) = b\nu(a)$ . Aplicando el funtor  $L$  a la primera componente de este  $cat^1$ -grupo obtenemos:

$$(F/[F, F] \oplus [F, F]/[[F, F], F]) \oplus ([F, F]/[[F, F], F] \oplus [[F, F], F]/[[[F, F], F], F]) \oplus \dots$$

Reordenando los términos, esto es igual a:

$$(F/[F, F] \oplus [F, F]/[[F, F], F] \oplus \dots) \oplus ([F, F]/[[F, F], F] \oplus [[F, F], F]/[[[F, F], F], F] \oplus \dots) = (F/\gamma_2(F) \oplus \gamma_2(F)/\gamma_3(F) \oplus \dots) \oplus (\gamma_2(F)/\gamma_3(F) \oplus \gamma_3(F)/\gamma_4(F) \oplus \dots) = L(F) \oplus [L(F), L(F)].$$

Por tanto tenemos  $L([F, F] \rtimes F, s, t) = ([L(F), L(F)] \oplus L(F), L(s), L(t))$ , pero como  $L(F)$  es libre esto coincide con  $((L(F) \wedge L(F)) \oplus L(F), L(s), L(t))$ .

Dados  $\bar{x}$  un generador de  $[L(F), L(F)]$  e  $\bar{y}$  un generador de  $L(F)$ , entonces  $\bar{x} = x + \gamma_i(F), \bar{y} = y + \gamma_j(F)$  para algunos  $i$  y  $j$ , donde  $x \in \gamma_{i-1}(F), y \in \gamma_{j-1}(F)$ .  $L(s)$  y  $L(t)$  actúan de la siguiente manera:

- $L(s)(\bar{x}, \bar{y}) = L(s)(x + \gamma_i(F), y + \gamma_j(F)) = s(x, y) + \gamma_j(F) = \bar{y}$ .
- $L(t)(\bar{x}, \bar{y}) = L(t)(x + \gamma_i(F), y + \gamma_j(F)) = t(x, y) + \gamma_j(F) = \overline{\nu(x)y}$ .

Si calculamos el módulo cruzado asociado a esta  $cat^1$ -álgebra de Lie, como  $\text{Ker}(L(s)) = L(F) \wedge L(F)$  e  $\text{Im}(L(s)) = L(F)$ , obtenemos  $L(F) \wedge L(F) \xrightarrow{\bar{\nu}} L(F)$ , donde  $\bar{\nu}(\bar{x}) = L(t)(\bar{x}, \bar{e}) = \overline{\nu(x)}$ .  $\square$

**Proposición 194** *Sea  $G$  un grupo nilpotente libre y consideremos el módulo cruzado  $\nu : G \wedge G \rightarrow G$ . Entonces,  $L(G \wedge G) \xrightarrow{\nu} L(G) \cong L(G) \wedge L(G) \xrightarrow{\bar{\nu}} L(G)$ .*

**Demostración:**

Tenemos que  $G \cong F/\gamma_c(F)$ , donde  $F$  es un grupo libre y también se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\gamma_c(F) \wedge F \xrightarrow{f} F \wedge F \rightarrow G \wedge G$$

y por tanto  $G \wedge G \xrightarrow{\nu} G$  es isomorfo a  $(F \wedge F)/\text{Im}(f) \xrightarrow{\nu} F/\gamma_c(F)$ . Además, como  $F$  es libre, tenemos que esto coincide con  $[F, F]/\gamma_{c+1}(F) \xrightarrow{\nu} F/\gamma_c(F)$ .

Ahora, viéndolo desde el punto de vista de  $cat^1$ -grupos, lo que obtenemos es  $(([F, F]/\gamma_{c+1}(F)) \rtimes (F/\gamma_c(F)), s, t)$ , donde  $s(a, b) = b, t(a, b) = b\nu(a)$ . Si aplicamos el functor  $L$  a la primera componente de este  $cat^1$ -grupo obtenemos:

$$(F/\gamma_2(F) \oplus F/\gamma_2(F)) \oplus (\gamma_2(F)/\gamma_3(F) \oplus \gamma_3(F)/\gamma_4(F)) \oplus \cdots \oplus (\gamma_{c-1}(F)/\gamma_c(F) \oplus \gamma_{c-2}(F)/\gamma_{c-1}(F)) \oplus (\gamma_{c-1}(F)/\gamma_c(F)) \oplus (\gamma_c(F)/\gamma_{c+1}(F)).$$

Reordenando los términos, esto es igual a:

$$(F/\gamma_2(F) \oplus \gamma_2(F)/\gamma_3(F) \oplus \cdots \oplus \gamma_{c-1}(F)/\gamma_c(F)) \oplus (\gamma_2(F)/\gamma_3(F) \oplus \gamma_3(F)/\gamma_4(F) \oplus \cdots \oplus \gamma_c(F)/\gamma_{c+1}(F)) = (L(F)/\gamma_{c+1}(L(F)) \oplus ([L(F), L(F)]/\gamma_c(L(F)))).$$

Por tanto la imagen de  $(([F, F]/\gamma_{c+1}(F)) \times (F/\gamma_c(F)), s, t)$  mediante  $L$  es  $([L(F), L(F)]/\gamma_{c+1}(L(F)) \oplus L(F)/\gamma_c(L(F)), L(s), L(t))$ , y como  $L(F)$  es libre, esto coincide con  $((L(F) \wedge L(F))/\gamma_{c+1}(L(F)) \oplus L(F)/\gamma_c(L(F)), L(s), L(t))$ .

Procediendo de manera análoga a como se hizo en la proposición previa se obtiene que el módulo cruzado de álgebras de Lie asociado a esta  $cat^1$ -álgebra de Lie es  $(L(F) \wedge L(F))/\gamma_{c+1}(L(F)) \xrightarrow{\bar{v}} L(F)/\gamma_c(L(F))$ , que es isomorfo a  $L(G) \wedge L(G) \xrightarrow{\bar{v}} L(G)$ .  $\square$

Para terminar, y como se mencionó anteriormente, a continuación se recogen las funciones programadas. Además de las que ya se comentaron hay otras dos funciones cuya finalidad es computar el complejo asociado a un álgebra de Leibniz para calcular su homología y el morfismo inducido por un morfismo de álgebras de Leibniz entre sus complejos asociados.

---

```

InstallGlobalFunction(LowerCentralSeriesLieAlgebra, function(G)

local LCSeries, Lgth, i, AbInvariants, j, aux, QuotLCS, Dim, DimLieAlgebra,
Generat, n, ITPair, Bracket, SCTabl, L, NatHom, Homs;

if not IsPcpGroup(G) then
    Print("The group must be a pcp group.");
    return fail;
fi;

```

---

```

NatHom:=function(i)

local NH;

if IsPolycyclicGroup(G) then
    NH:=NaturalHomomorphism(LCSeries[i],LCSeries[i+1]);
else
    NH:=NaturalHomomorphismByNormalSubgroupNC(LCSeries[i],LCSeries
[i+1]);
fi;

return NH;
end;

```

---

```

LCSeries:=LowerCentralSeries(G);
Lgth:=Length(LCSeries);
Dim:=[];
Generat:=[];
Homs:=List([1..Lgth-1],i->NatHom(i));
QuotLCS:=List([1..Lgth-1],i->Range(Homs[i]));
aux:=AbelianInvariants(QuotLCS[1])[1];

for i in [1..Lgth-1] do
    AbInvariants:=AbelianInvariants(QuotLCS[i]);
    Dim[i]:=Length(AbInvariants);

```

```

for j in [1..Length(AbInvariants)] do;
  if not AbInvariants[j]=aux then
    return "The abelian invariants are not all the same";
  fi;
od;

Generat[i]:=GeneratorsOfGroup(QuotLCS[i]);
if not Length(Generat[i])=Dim[i] then
  return "Error finding generators of abelian group";
fi;
od;

DimLieAlgebra:=Sum([1..Lgth-1],i->Dim[i]);

```

---

```

ITPair:=function(n)
local s, suma, Term, BasisEl;

if n>DimLieAlgebra then
  return [Lgth,1];
fi;

suma:=0;

for s in [1..Lgth-1] do
  suma:=suma+Dim[s];
  if n<=suma then
    Term:=s;
    break;
  fi;
od;

suma:=suma-Dim[Term];

for s in [1..Dim[Term]] do
  if n=suma+s then
    BasisEl:=s;
    break;
  fi;

```

```

od;

return [Term,BasisEl];
end;

```

---

```

SCTabl:=function(i,j)

local x, y, Bracket, Commut, k, aux, F, Homomor, a, b;

Bracket:=[];

for k in [1..2*DimLieAlgebra] do
  if IsOddInt(k)=true then
    Bracket[k]:=0;
  else
    Bracket[k]:=1;
  fi; od;

if ITPair(i)[1]+ITPair(j)[1]>Lgth-1 then
  return Bracket;
fi;

if ITPair(i+j)[1]>Lgth-1 then
  return Bracket;
fi;

aux:=Sum([1..ITPair(i)[1]+ITPair(j)[1]-1],k->Dim[k]);
x:=ITPair(i); y:=ITPair(j);
a:=PreImagesRepresentative(Homs[x[1]],Generat[x[1]][x[2]]);
b:=PreImagesRepresentative(Homs[y[1]],Generat[y[1]][y[2]]);
Commut:=a*b*Inverse(a)*Inverse(b);
Commut:=Image(Homs[ITPair(i)[1]+ITPair(j)[1]],Commut);
F:=FreeGroup(Length(Generat[ITPair(i)[1]+ITPair(j)[1]]));
Homomor:=GroupHomomorphismByImagesNC(F,QuotLCS[ITPair(i)[1]+
ITPair(j)[1]],GeneratorsOfGroup(F),Generat[ITPair(i)[1]+ITPair(j)[1]]);
Commut:=PreImagesRepresentative(Homomor,Commut);
Commut:=LetterRepAssocWord(Commut);

```

```

for k in [1..Length(Commut)] do
  Bracket[2*(aux+AbsInt(Commut[k]))-1]:=Bracket[2*(aux+AbsInt(Commut
    [k]))-1]+SignInt(Commut[k]);
  Bracket[2*(aux+AbsInt(Commut[k]))]:=aux+AbsInt(Commut[k]);
od;

return Bracket;
end;

```

---

```

L:=EmptySCTable(DimLieAlgebra,0,"antisymmetric");

for i in [1..DimLieAlgebra] do for j in [i..DimLieAlgebra] do
  SetEntrySCTable(L,i,j,SCTabl(i,j));
od;od;

if aux=0 then
  L:=LieAlgebraByStructureConstants(Integers,L);
else
  L:=LieAlgebraByStructureConstants(GF(aux),L);
fi;

return L;
end);

```

---

---

```

InstallGlobalFunction(LowerCentralSeriesLieMap,function(f)

local Map, Sour, Ran, BasisSour, i, LCSeriesSour, LgthSour, HomsSour, QuotLC-
SSour, GeneratSour, DimSour, ITPairSour, Imag, LCSeriesRan, LgthRan, Hom-
sRan, QuotLCSRan, GeneratRan, DimRan, BasisRan;

Sour:=LowerCentralSeriesLieAlgebra(Source(f));
Ran:=LowerCentralSeriesLieAlgebra(Range(f));
BasisSour:=Basis(Sour);
BasisRan:=Basis(Ran);
LCSeriesSour:=LowerCentralSeries(Source(f));
LCSeriesRan:=LowerCentralSeries(Range(f));
LgthSour:=Length(LCSeriesSour);
LgthRan:=Length(LCSeriesRan);
HomsSour:=List([1..LgthSour-1],i->(NaturalHomomorphism(LCSeriesSour[i],
LCSeriesSour[i+1])));
HomsRan:=List([1..LgthRan-1],i->(NaturalHomomorphism(LCSeriesRan[i],LC
SeriesRan[i+1])));
QuotLCSSour:=List([1..LgthSour-1],i->Range(HomsSour[i]));
QuotLCSRan:=List([1..LgthRan-1],i->Range(HomsRan[i]));
GeneratSour:=[];
GeneratRan:=[];
DimSour:=[];
DimRan:=[];
Imag:=[];

for i in [1..LgthSour-1] do
    GeneratSour[i]:=GeneratorsOfGroup(QuotLCSSour[i]);
    DimSour[i]:=Length(GeneratSour[i]);
od;

for i in [1..LgthRan-1] do
    GeneratRan[i]:=GeneratorsOfGroup(QuotLCSRan[i]);
    DimRan[i]:=Length(GeneratRan[i]);
od;

```

---

```

ITPairSour:=function(n)
local s, suma, Term, BasisEl;
suma:=0;
for s in [1..LgthSour-1] do
  suma:=suma+DimSour[s];
  if n<=suma then
    Term:=s;
    break;
  fi;
od;
suma:=suma-DimSour[Term];
for s in [1..DimSour[Term]] do
  if n=suma+s then
    BasisEl:=s;
    break;
  fi;
od;
return [Term,BasisEl];
end;

```

---



---

```

Map:=function(n) local Preim, Img, aux, F, Homomor, k, coef, map, sum, j;
if ITPairSour(n)[1]>LgthRan-1 then
  return 0*BasisRan[1];
fi;
sum:=0;
aux:=ITPairSour(n);
map:=One(Ran!.LeftActingDomain);
coef:=List([1..DimRan[aux[1]]],i->0);
Preim:=PreImagesRepresentative(HomsSour[aux[1]],GeneratSour[aux[1]][aux[2]]);
Img:=Image(f,Preim);

```

```

Img:=Image(HomsRan[aux[1]],Img);
F:=FreeGroup(DimRan[aux[1]]);
Homomor:=GroupHomomorphismByImagesNC(F,QuotLCSRan[aux[1]],Generators
OfGroup(F),GeneratRan[aux[1]]);
Img:=PreImagesRepresentative(Homomor,Img);
Img:=LetterRepAssocWord(Img);

if Img=[] then
  return 0*BasisRan[1];
fi;

for k in [1..Length(Img)] do
  coef[AbsInt(Img[k])]:=coef[AbsInt(Img[k])+SignInt(Img[k]);
od;

for k in [1..aux[1]-1] do
  sum:=sum+DimRan[k];
od;

for k in [1..DimRan[aux[1]]] do
if not coef[k]=0 then
for j in [1..coef[k]] do
  map:=map*BasisRan[sum+k];
od;fi;od;

return map;
end;



---


for i in [1..Length(Basis(Sour))] do
  Imag[i]:=Map(i);
od;

return LeftModuleHomomorphismByImagesNC(Sour,Ran,BasisSour,Imag);
end);



---



```

---



---

```

InstallGlobalFunction(ChevalleyEilenbergComplex, function(A,s)
local Setab, B, Dim, n, i, d, j, Boundary, bound, r, Comb, ITT, TTI, ONE,
Charact;

B:=Basis(A);
Setab:=StructureConstantsTable(B); d:=Length(B);
Comb:=List([1..s],r->Combinations([1..d],r));

```

---

```

Charact:=function(M)
if not IsFinite(M!.LeftActingDomain) then
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Integers) then
    return 0;
  fi;
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Rationals) then
    return -(1/2);
  fi;
else
  ONE:=One(M!.LeftActingDomain);
  return Characteristic(M!.LeftActingDomain);
fi;
end;

```

---



---

```

ITT:=function(j,n);
return StructuralCopy(Comb[n][j]);
end;

```

---



---

```

TTI:=function(n);
return Position(Comb[Length(n)],SSortedList(n));

```

end;

---

---

```
Dim:=function(n);
if n>s then
  return fail;
else
  return Binomial( d, n );
fi;
end;
```

---

---

```
Boundary:=function(n,j)
local a, b, x, p, q, R, m, Q;
if n>s then
  return fail;
fi;
if j>Binomial(d,n) then
  return fail;
fi;
bound:=List([1..Binomial(d,n-1)], i->0);
Q:=ITT(j,n);
for a in [1..n-1] do
for b in [a+1..n] do
  p:=Length(Sctab[Q[a]][Q[b]][1]);
  for m in [1..p] do
    R:=StructuralCopy(Q);
    Add(R,Sctab[Q[a]][Q[b]][1][m],1);
    Remove(R,a+1);
    Remove(R,b);
    if IsSSortedList(SortedList(R))=true then
      q:=Position(SortedList(R),R[1]);
```

```

bound[TTI(R)]:=bound[TTI(R)]+(-1)^(a+b+q-1)*Sctab[Q[a]][Q[b]][2][m];
    fi;
    od;
od; od;

if IsPrimeInt(Character(A)) then
    return bound*ONE;
else
    return bound;
fi;
end;

```

---

```

return Objectify(HapChainComplex,rec(dimension:=Dim,
    boundary:=Boundary,
    properties:=
    [{"length",s},
    {"reduced",true},
    {"type","chainComplex"},
    {"characteristic",Character(A)}]);
end;)

```

---



---

---



---

```

InstallGlobalFunction(ChevalleyEilenbergMap, function(A,s)

local Sour, Ran, DimSour, DimRan, Charact, Map, Comb, CombSour, ITT,
TTI, j, n, r, BasisSour, a, BasisRan, Applicat, SourComp, RanComp, Chara,
ONE, Arr;

Sour:=Source(A);
Ran:=Range(A);
BasisSour:=Basis(Sour);
BasisRan:=Basis(Ran); DimSour:=Length(BasisSour);
DimRan:=Length(BasisRan);
CombSour:=List([1..s],r->Combinations([1..DimSour],r));
Comb:=List([1..s],r->Combinations([1..DimRan],r));
SourComp:=ChevalleyEilenbergComplex(Sour,s);
RanComp:=ChevalleyEilenbergComplex(Ran,s);
Arr:=List([1..s],r->Arrangements([1..DimRan],r));

```

---

```

Chara:=function(M)

if not IsFinite(M!.LeftActingDomain) then
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Integers) then
    return 0;
  fi;
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Rationals) then
    return -(1/2);
  fi;
else
  ONE:=One(M!.LeftActingDomain);
  return Characteristic(M!.LeftActingDomain);
fi;
end;

```

---



---

```

ITT:=function(j,n);

```

```

return StructuralCopy(CombSour[n][j]);
end;

```

---



---

```

TTI:=function(n);
return Position(Comb[Length(n)],SSortedList(n));
end;

```

---



---

```

Map:=function(n,i)
local Mapping, j, k, coef, count, perm;
if n>s then
    return fail;
fi;
Mapping:=List([1..Binomial(DimRan,n)], i->0);
for j in Arr[n] do
    coef:=1;
    count:=0;
    for k in j do
        count:=count+1;
        a:=BasisSour[ITT(i,n)[count]];
        coef:=Coefficients(BasisRan,Image(A,a))[k]*coef;
    od;
    perm:=SortingPerm(j);
    Mapping[TTI(SortedList(j))]:=Mapping[TTI(SortedList(j))]+SignPerm
    (perm)*coef;
od;
return Mapping;
end;

```

---



---

```

Applicat:=function(v,n)
local w;
if not Length(v)=SourComp!.dimension(n) then
  return fail;
fi;
w:=Sum([1..SourComp!.dimension(n)], i->v[i]*Map(n,i));
return w;
end;

```

---

```

return Objectify(HapChainMap,rec(source:=SourComp,
  target:=RanComp,
  mapping:=Applicat,
  properties:=
    [{"type","chainMap"},
    ["characteristic",Chara(Sour)]));
end;

```

---



---

---

```

InstallGlobalFunction(IsLieAlgebraHomomorphism, function(f)

local BasSour, BasRan, i, j, k, m, n, l, a, b, DimSour, DimRan, Vector1, Vec-
tor2, TabSour, TabRan, count, Vec;

if not IsMapping(f) then
    return false;
fi;

if not IsLieAlgebra(Source(f)) then
    return false;
fi;

if not IsLieAlgebra(Range(f)) then
    return false;
fi;

BasSour:=Basis(Source(f));
BasRan:=Basis(Range(f));
DimSour:=Length(BasSour);
DimRan:=Length(Basis(Range(f)));
TabSour:=StructureConstantsTable(BasSour);
TabRan:=StructureConstantsTable(BasRan);

if not IsLeftModuleHomomorphism(f) then
    return false;
else
    count:=0;

    for i in [1..DimSour-1] do
    for j in [i+1..DimSour] do
        Vector1:=0*BasSour[i];
        Vector2:=List([1..DimRan], r->0);

        for k in [1..Length(TabSour[i][j][1])] do
            Vector1:=Vector1+BasSour[TabSour[i][j][1][k]]*TabSour[i][j][2][k];
        od;

        Vector1:=Image(f,Vector1);

```

```

Vector1:=Coefficients(BasRan,Vector1);
a:=Coefficients(BasRan,Image(f,BasSour[i]));
b:=Coefficients(BasRan,Image(f,BasSour[j]));

for m in [1..DimRan] do
for n in [1..DimRan] do
  Vec:=List([1..DimRan], r->0);
  for l in [1..Length(TabRan[m][n][1])] do
    Vec[TabRan[m][n][1][l]]:=TabRan[m][n][2][l];
  od;
  Vector2:=Vector2+a[m]*b[n]*Vec;
od;od;

if not Vector1=Vector2 then
  count:=1;
fi;
od;od;

if count=1 then
  return false;
else
  return true;
fi; fi;
end);

```

---

---



---

```

InstallGlobalFunction(LeibnizComplex, function(A,s)
local Sctab, B, Dim, n, i, d, j, Boundary, bound, r, Tup, ITT, TTI, ONE,
Charact;

B:=Basis(A);
Sctab:=StructureConstantsTable(B);
d:=Length(B);
Tup:=List([1..s],r->Tuples([1..d],r));

```

---

```

Charact:=function(M)
if not IsFinite(M!.LeftActingDomain) then
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Integers) then
    return 0;
  fi;
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Rationals) then
    return -(1/2);
  fi;
else
  ONE:=One(M!.LeftActingDomain);
  return Characteristic(M!.LeftActingDomain);
fi;
end;

```

---



---

```

ITT:=function(j,n);
return StructuralCopy(Tup[n][j]);
end;

```

---



---

```

TTI:=function(n);

```

```

return Position(Tup[Length(n)],n);
end;

```

---



---

```

Dim:=function(n);
if n>s then
  return fail;
else
  return d^n;
fi;
end;

```

---



---

```

Boundary:=function(n,j)
local a, b, x, p, q, R, m, Q;
if n>s then
  return fail;
fi;
if j>d^n then
  return fail;
fi;
bound:=List([1..d^(n-1)], i->0); Q:=ITT(j,n);
for a in [1..n-1] do
for b in [a+1..n] do
  p:=Length(Sctab[Q[a]][Q[b]][1]);
  for m in [1..p] do
    R:=StructuralCopy(Q);
    Add(R,Sctab[Q[a]][Q[b]][1][m],a);
    Remove(R,a+1);
    Remove(R,b);
    bound[TTI(R)]:=bound[TTI(R)]+((-1)^b)*Sctab[Q[a]][Q[b]][2][m];
  end;
end;
end;

```

```

    od;
od; od;
if IsPrimeInt(Charact(A)) then
    return bound*ONE;
else
    return bound;
fi;
end;



---


return Objectify(HapChainComplex,rec(dimension:=Dim,
    boundary:=Boundary,
    properties:=
    [{"length",s},
    ["reduced",true],
    ["type","chainComplex"],
    ["characteristic",Charact(A)]]));
end);



---




---



```

---



---

```

InstallGlobalFunction(LeibnizMap, function(A,s)

local Sour, Ran, DimSour, DimRan, Charact, Map, Tup, TupSour, ITT, TTI,
j, n, r, BasisSour, a, BasisRan, Applicat, SourComp, RanComp, Chara, ONE,
Arr;

Sour:=Source(A);
Ran:=Range(A);
BasisSour:=Basis(Sour);
BasisRan:=Basis(Ran);
DimSour:=Length(BasisSour);
DimRan:=Length(BasisRan);
TupSour:=List([1..s],r->Tuples([1..DimSour],r));
Tup:=List([1..s],r->Tuples([1..DimRan],r));
SourComp:=LeibnizComplex(Sour,s);
RanComp:=LeibnizComplex(Ran,s);

```

---

```

Chara:=function(M)

if not IsFinite(M!.LeftActingDomain) then
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Integers) then
    return 0;
  fi;
  if Name(M!.LeftActingDomain)=Name(Rationals) then
    return -(1/2);
  fi;
else
  ONE:=One(M!.LeftActingDomain);
  return Characteristic(M!.LeftActingDomain);
fi;

end;

```

---



---

```

ITT:=function(j,n);

```

```

return StructuralCopy(TupSour[n][j]);
end;

```

---



---

```

TTI:=function(n);
return Position(Tup[Length(n)],n);
end;

```

---



---

```

Map:=function(n,i)
local Mapping, j, k, coef, count, perm;
if n>s then
    return fail;
fi;
Mapping:=List([1..DimRan^n], i->0);
for j in Tup[n] do
    coef:=1;
    count:=0;
    for k in j do
        count:=count+1;
        a:=BasisSour[ITT(i,n)[count]];
        coef:=Coefficients(BasisRan,Image(A,a))[k]*coef;
    od;
    Mapping[TTI(j)]:=Mapping[TTI(j)]+coef;
od;
return Mapping;
end;

```

---



---

```

Applicat:=function(v,n)

```

```

local w;
if not Length(v)=SourComp!.dimension(n) then
  return fail;
fi;
w:=Sum([1..SourComp!.dimension(n)], i->v[i]*Map(n,i));
return w;
end;

```

---

```

return Objectify(HapChainMap,rec(source:=SourComp,
  target:=RanComp,
  mapping:=Applicat,
  properties:=
    [{"type","chainMap"}, {"characteristic",Chara(Sour)}]));
end);

```

---

# Bibliografía

- [1] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and concrete categories*, (Series in Pure and Applied Mathematics), John Wiley and Sons, 1990.
- [2] M. André, *Homologie des algèbres commutatives*, Springer, 1974.
- [3] D. Arias Mosquera, *(Co)Homología de módulos precruzados*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago, 2003.
- [4] Z. Arvasi, *Annihilators, multipliers and crossed modules*, Appl. Categorical Structures **11** (2003) 487-506.
- [5] Z. Arvasi, *Crossed modules of algebras*, Preprint, 2003.
- [6] Z. Arvasi, M. Koçak, M. Alp, *A combinatorial definition of  $n$ -types of simplicial commutative algebras*. Turkish J. Math. **22** (1998) 243-271.
- [7] M. Barr y J. Beck, *Acyclic models and triples*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla), Springer, 1966.
- [8] M. Barr y J. Beck, *Homology and standard constructions*, en "Seminar on Triples and Categorical Homology Theory" (B. Eckmann, ed.). Lecture Notes in Mathematics, vol. 80. Springer, 1969, pp. 245-335.
- [9] M. Barr y C. Wells, *Toposes, triples and theories*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 278, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [10] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1*, Cambridge University Press, 1994.
- [11] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 2*, Cambridge University Press, 1994.

- [12] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 3*, Cambridge University Press, 1994.
- [13] P. Carrasco, A. M. Cegarra y A. R.-Grandjeán, *(Co)Homology of crossed modules*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002) 147-176.
- [14] J.M. Casas y M. Ladra, *The actor of a crossed module in Lie algebras*, Communications in Algebra **26** (1998) 2065-2089.
- [15] W. G. Dwyer y J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, Elsevier (1995) 73-126.
- [16] G.J. Ellis, *Crossed modules and their higher dimensional analogues*, Tesis doctoral, University of Wales, 1984.
- [17] G.J. Ellis, *Non-abelian exterior products of groups and exact sequences in the homology of groups*, Glasgow Math. J. **29** (1987) 13-19.
- [18] G.J. Ellis, *Non-abelian exterior products of Lie algebras and an exact sequenc in the homology of Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra **46** (1987) 111-115.
- [19] G. J. Ellis, *Higher dimensional crossed modules of algebras*, J. Pure Appl. Algebra **52** (1988) 277-282.
- [20] G.J. Ellis, *A non-abelian tensor product of Lie algebras*, Glasgow Math. J. **33** (1991) 101-120.
- [21] Erdmann K. and Wildon M., *Introduction to Lie algebras*, Springer, 2006.
- [22] T. Evereaert, R. W. Kieboom y T. Van der Linden, *Model structures for homotopy of internal categories*, Theory and Appl. of Categories **15 (3)** (2005) 66-94.
- [23] M. Forrester-Barker, *Group objects and internal categories*, Preprint, 2002.
- [24] P. Gabriel, J. A. de la Peña, *Quotients of representation-finite algebras*, Communications in Algebra **15** (1987) 279-307.
- [25] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, (2006) <http://www.gap-system.org>.

- [26] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4, package HAP 1.6*, (2006) <http://www.gap-system.org>.
- [27] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras. II*, Ann. Math. **84** (1966) 1-19.
- [28] P. Goers, *Model categories and simplicial methods*, Notes from lectures given at the University of Chicago (2004).
- [29] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV: Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Première partie)*, Publications Mathématiques **20**, 1964.
- [30] H. Herrlich, G. E. Strecker, *Category theory, Allyn and Bacon series in advanced mathematics*, 1972.
- [31] P.J. Hilton, U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, 1971.
- [32] S. A. Huq, *Commutator, nilpotency, and solvability in categories*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **19** (1953) 363-389.
- [33] G. Janelidze, L. Márki y W. Tholen, *Semi-abelian categories*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002) 367–386.
- [34] Yu. V. Kuz'min and Yu. S. Semenov, *On the homology of a free nilpotent group of class 2*, Sbornik: Mathematics **189:4** (1998) 527-560.
- [35] R. Lavendhome y Th. Lucas, *On modules and crossed modules*, J. Algebra **179** (1996) 936–963.
- [36] S. Lichtenbaum y M. Schlessinger, *The cotangent complex of a morphism*, Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967) 41–70.
- [37] J.-L. Loday, *Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups*, J. Pure Appl. Algebra **24** (1982) 179-202.
- [38] A.S.-T. Lue, *Non-abelian cohomology of associative algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **19** (1968) 159–180.
- [39] A.S.-T. Lue, *Semicomplete crossed modules and holomorphs of groups*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979) 8-16.

- [40] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1998.
- [41] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Interscience Publishers, 1966.
- [42] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1980.
- [43] K.J. Norrie, *Actions and automorphisms of crossed modules*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990) 129-146.
- [44] G. Orzech, *Obstruction theory in algebraic categories I*, J. Pure Appl. Algebra **2** (1972) 287-314.
- [45] T. Porter, *Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconcelos*, J. Algebra **99** (1986) 458-465.
- [46] T. Porter, *Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras*, J. Algebra **109** (1987) 415-429.
- [47] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Springer-Verlag, 1994.
- [48] J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Academic Press, Inc., 1979.
- [49] H. Schubert, *Categories*, Springer-Verlag, 1972.
- [50] L. Silver, *Noncommutative localizations and applications*, J. Algebra **7** (1967) 44-76.
- [51] B. Stenstrom, *Rings of quotients (An introduction to methods of ring theory)*, Springer, 1975.
- [52] A. M. Vieites Rodríguez, *Extensiones abelianas cruzadas y extensiones cruzadas de módulos cruzados*, Tesis Doctoral, Universidad de Vigo, 1999.
- [53] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy II*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949) 453-496.

# Índice alfabético

- actor, 54
  - interior, 56
  - exterior, 56
- álgebra de Lie asociada, 142
- aniquilador, 56
- categoría
  - cartesiana cerrada, 45
  - de modelos, 46
  - interna, 20
  - semiabeliana, 41
  - tripleable, 26
  - $XMod_K$ , 5
- $cat^n$ -álgebra, 19
- (co)homología de un módulo cruzado,
  - 109, 132
- conmutador, 61
- $(C, R, \nu)$ -módulo, 71
- derivación, 91, 102, 129
- diferenciales, 104, 131
- extensión central, 115
  - congruente, 116
- GAP, 139
- grupo nilpotente libre, 142
- HAP, 140
- ideal cruzado, 3
- identidad de Peiffer, 1
- morfismo
  - de  $(C, R, \nu)$ -módulos, 78
  - de módulos cruzados, 4
  - multiplicación de un módulo cruzado, 52
- $n$ -cubo cruzado de álgebras conmutativas, 19
- par-núcleo, 27
- producto exterior no abeliano
  - de álgebras de Lie, 150
  - de grupos, 149
- producto semidirecto, 77
- producto tensor de módulos cruzados, 64
- producto tensor no abeliano
  - de álgebras de Lie, 150
  - de grupos, 150
- $R$ -módulo cruzado de álgebras conmutativas, 1
  - asférico, 124
  - inyectivo, 14
  - proyectivo, 13
  - singular, 58
- serie central descendente, 141
- submódulo cruzado, 3