AGORA —Papeles de Filosofía— (1999), 18/2: 117-129 *ISSN 0211-6642*

EL CONCEPTO INTUICIONISTA DE PRUEBA CANÓNICA*

Gustavo Fernández Díez
Universidad de Murcia

1. Introducción

Empecemos citando a Dummett:

> «La noción de prueba canónica está sumida por tanto en cierta oscuridad; y este estado de cosas no es indefinidamente tolerable, porque, mientras que no sea posible encontrar una explicación coherente y relativamente precisa de esta noción, la viabilidad de las explicaciones intuicionistas de las constantes lógicas debe permanecer en duda» (1975, p. 124).

> «(...) nadie puede en la actualidad ofrecer un concepto detallado de prueba canónica, ni siquiera para los enunciados de la aritmética de primer orden» (1977, p. 400).

Ni qué decir tiene que la situación hoy día no ha cambiado mucho con respecto al diagnóstico de Dummett: la noción de prueba canónica sigue siendo oscura, y las principales dificultades que existen para precisarla y clarificarla (dificultades que tendremos ocasión de repasar aquí) continúan pendientes de resolver. Ahora bien: ¿es en verdad tan urgente e indispensable disponer de un análisis satisfactorio de esta noción? ¿Hasta qué punto es cierto que las explicaciones intuicionistas de las constantes lógicas (fundamentales para la elaboración de una semántica intuicionista, y piedra angular de toda la filosofía intuicionista de la matemática), dependen enteramente de la posibilidad de efectuar ese análisis? Estas son las preguntas que trataré de contestar en el presente artículo.

La necesidad de establecer una distinción, dentro del concepto intuicionista de prueba matemática, entre las pruebas canónicas y las no canónicas, ha sido defendida como respuesta a cuatro motivaciones bien distintas. La más inmediata de las cuatro, y de la que trataré en primer lugar, es la existencia de pruebas indirectas, en las cuales, en vez de exhibirse todos los ingredientes que de acuerdo con la estructura lógica del enunciado en cues-

* El presente artículo ha sido extraído, tras leves modificaciones, de mi tesis de doctorado leída en la *London School of Economics*, y escrita bajo la dirección de los profesores Colin Howson y Moshé Machover. La investigación conducente a la misma fue financiada, en diferentes etapas, por el *British Council*, la *British Academy*, el Ministerio de Educación y la Caja de Ahorros del Mediterráneo.

 Aceptación: VII/2000

tión vayan exigidos por la definición semántica intuicionista, se ofrece en su puesto tan sólo un procedimiento efectivo para encontrar o construir esos ingredientes. (Una exposición completa de la definición al uso de las constantes lógicas intuicionistas puede encontrarse por ejemplo en Troelstra y van Dalen [1988], pp. 9-10).

Las otras tres motivaciones, por el orden en que las discutiré aquí, conciernen a la impredicatividad de la definición del condicional («una prueba de $A \rightarrow B$ es una construcción que transforma cualquier prueba de A en una prueba de B», donde alguna de las pruebas de A podría estar construida a partir del propio $A \rightarrow B$), al uso exhaustivo de esta definición sugerido por Brouwer (y el concepto de «prueba completamente analizada»), y a la definición no redundante de la negación. Pero vayamos por partes.

2. Pruebas indirectas

La existencia de pruebas indirectas es especialmente clara en el caso de las disyunciones y de los enunciados existenciales cuando, en lugar de incluir una prueba de uno de los disyuntos, o un elemento del dominio que instancie el enunciado existencial, se indica simplemente un procedimiento efectivo para producirlos. El propio Brouwer era ya plenamente consciente de esta posibilidad:

> «El caso en que no se ha probado ni que A sea verdadero ni que sea absurdo, pero en que conocemos un algoritmo finito que conduce o bien al enunciado de que A es verdadero o bien al de que A es absurdo, es reducible obviamente a los dos primeros casos» (1981, p. 92, nota al pie).

Algo muy parecido ocurre con los enunciados atómicos. Por ejemplo, una prueba de $(10^{10})\ (10^{20}) = 10^{30}$ consistirá, no en llevar a cabo el cálculo, lo cual es imposible en la práctica, sino en mostrar-por inducción-la validez general de la ecuación $(x^y)\ (x^z) = x^{y+z}$. Lo cual equivale a su vez, en términos intuicionistas, a proporcionar un método general que cuando se aplique a cualquier triplo de números naturales (x, y, z), nos dé como resultado una prueba de que ese triplo satisface la ecuación mencionada.

En la práctica cotidiana de la matemática intuicionista, este tipo de prueba es no sólo habitual —empezando por el propio Brouwer— sino a veces, como acabamos de ver, y debido a limitaciones de orden práctico, el único tipo de prueba a nuestro alcance.

Por lo demás, estas pruebas tienen un punto en común con las de los condicionales, negaciones y cuantificaciones universales, y es que con frecuencia pueden dar lugar a la necesidad de una *prueba de enjuiciamiento* (*judgement proof*): prueba adicional que resulta necesaria para garantizar que la prueba ofrecida en primer lugar tiene en efecto el comportamiento que se requiere. Por ejemplo, en aquellos casos en que se ofrezca un procedimiento efectivo como prueba de $A \vee B$, pero no resulte obvio que la aplicación del mismo dé lugar a una prueba de A o a una prueba de B, habrá que acompañar ese procedimiento efectivo de una prueba de enjuiciamiento que demuestre que el resultado de ejecutar el procedimiento completamente es en efecto una prueba de A o una prueba de B.

Pues bien, hay esencialmente dos formas distintas de afrontar este problema (Cfr. Dummett, 1977, p. 20). La primera de ellas, que es la que Dummett recomienda, es dejar la definición de las constantes tal cual, sin modificación alguna, pero estipulando que al interpretar cualquier enunciado proferido por un matemático intuicionista, se entienda no que posea necesariamente una prueba detallada del mismo, sino que quizá lo único que posee es un procedimiento que le permitiría, en principio, encontrar tal prueba, más la prueba de enjuiciamiento correspondiente, si procede. En otras palabras, que habría que distinguir entre las *pruebas canónicas*, que serían aquellas definidas por las cláusulas habituales de la definición intuicionista de las constantes lógicas (de modo que, por ejemplo, la definición de $\vee$ quedara: «una *prueba canónica* de $A \vee B$ es una *prueba canónica* de A o una *prueba canónica* de B»), y cualquier otro tipo de argumento general en el cual se indique un procedimiento para encontrar una prueba canónica. Dummett llama a este segundo tipo de argumento, «demostración» (*demonstration*, Dummett, 1975, p. 122, y 1977, p. 392).

Prawitz ha puesto en relación las pruebas canónicas en este sentido con las pruebas en forma normal de un sistema de deducción natural, es decir, con las pruebas sin rodeos o «cortes»: sin picos locales de complejidad lógica. De hecho, la primera vez que la expresión «prueba canónica» fue usada en este contexto lo fue precisamente por Prawitz, y lo fue para compararlas con las pruebas en forma normal de un sistema deductivo (Prawitz, 1974, p. 71; 1973, pp. 232-233, y 1985, nota 1, p. 171).

Naturalmente, una prueba en forma normal siempre será canónica en el sentido tratado hasta aquí: por ejemplo, una prueba normal de una disyunción $A \vee B$ no puede proceder por ninguna otra vía más que a través de una prueba previa de A o de B. Lo que sí puede ocurrir es que, al contrario, una prueba de $A \vee B$ contenga un rodeo innecesario, y sin embargo tenga como conclusión aislada a A o a B.

En cualquier caso, hay una segunda forma, bastante distinta, de afrontar este problema, y que consiste en reformular directamente las cláusulas de la definición intuicionista de las constantes lógicas correspondientes a $\vee$, $\exists$, y a los enunciados atómicos, estipulando que cuentan como pruebas de este tipo de enunciados, no sólo las pruebas concretas que satisfagan las condiciones respectivas, sino también cualquier procedimiento efectivo para encontrar tales pruebas, conjuntamente con una prueba de enjuiciamiento, si procede. De este modo, la misma definición del concepto intuicionista de prueba de una disyunción $A \vee B$ haría posible que la prueba en cuestión fuese: o bien una prueba de A, o bien una prueba de B, o bien un procedimiento efectivo que permitiese, al menos en principio, encontrar alguna de las dos (Cfr. otra vez Dummett, 1977, p. 20).

Nótese que en este último caso la necesidad de disponer de una noción de prueba canónica simplemente desaparece. Y si bien es cierto que la conversión propuesta de las cláusulas para $\vee$, $\exists$ y para los enunciados atómicos atrae hacia estas cláusulas los problemas bien conocidos que suscitan las otras tres ($\rightarrow$, $\neg$ y $\forall$), y que son problemas relativos precisamente a la naturaleza de las pruebas de enjuiciamiento (Cfr. por ejemplo Troelstra y van Dalen, pp. 9-10), no lo es menos que estos problemas eran de todos modos ineludibles, y que cualquier solución que quepa aplicar sobre ellos valdrá también para estas nuevas cláusulas.

3. La impredicatividad de $\rightarrow$

Una segunda razón para introducir la noción de prueba canónica concierne exclusivamente a la definición del condicional (y del negador, que se reduce a su vez a un caso particular suyo). La definición en cuestión, «una prueba de $A \rightarrow B$ es una construcción que transforma cualquier prueba de A en una prueba de B», es altamente impredicativa como puede verse, ya que se refiere a la totalidad de pruebas del antecedente A, totalidad que bien podría incluir pruebas que hubiesen sido construidas a partir del propio $A \rightarrow B$ de un modo u otro.

Esta impredicatividad resultaría notablemente reducida si la cláusula se refiriese, no a cualquier prueba arbitraria del antecedente, sino sólo a algún tipo de prueba restringido, particularmente sencillo. En otras palabras: si la base de la prueba de $A \rightarrow B$ fuese una construcción que transformase cualquier prueba *canónica* de A en una prueba de B. Y para ello necesitaríamos, otra vez, un concepto apropiado de prueba canónica.

En esta ocasión es indispensable conseguir que, una vez definido ese concepto, cualquier prueba arbitraria de un enunciado A pueda ser automáticamente reducida a una que tenga la forma canónica en cuestión. Sólo así quedaría garantizado el uso universal e indiscriminado del *modus ponens* en la matemática intuicionista, permitiéndonos inferir libremente el consecuente B cada vez que reunamos un par de pruebas de los enunciados A y $A \rightarrow B$, sean estas pruebas del tipo que sean.

Ello presupone una *hipótesis de reducibilidad*, de acuerdo con la cual para cualquier enunciado intuicionista A existe un límite o cota superior *a priori* sobre la complejidad necesaria que se precisa para construir una prueba de A. Conociendo ese límite, la hipótesis de reducibilidad nos diría que si existe una prueba de A, entonces ha de existir, en particular, una prueba cuya complejidad esté por debajo del límite.

Esta hipótesis fue formulada —simplemente como hipótesis, no como afirmación— por Kreisel (1965, pp. 126-127). Después, Nicolas Goodman la suscribió con firmeza:

> «Nos parece esencial a la posición intuicionista que dado un enunciado concreto

> A sobre un dominio bien definido, hay siempre una cota superior *a priori* con respecto a la complejidad de las posibles pruebas de A. En el caso en que A sea una implicación, este principio garantiza de antemano la existencia de algún tipo de operador de reducibilidad» (1970, p. 111).

Dummett ha ido todavía más lejos, al argumentar que sin una distinción entre pruebas canónicas y no canónicas la definición de $\rightarrow$ sería vacua. En concreto, Dummett teme que:

> «Podríamos admitir cualquier cosa que quisiéramos como constituyendo una prueba de $A \rightarrow B$, y seguiría siendo el caso que, dada esa prueba, tendríamos un método efectivo para convertir cualquier prueba de A en una prueba de B, a saber, añadir la prueba de $A \rightarrow B$ y ejecutar una simple inferencia por *modus ponens*. Obviamente, esto no era lo que se pretendía» (1975, p. 123).

Por ello llega a la conclusión de que

> «(...) si la explicación intuicionista de la implicación ha de escapar, no ya a la circularidad, sino a la vacuidad más absoluta, debe existir algún tipo restringido de prueba —prueba canónica— en cuyos términos se efectúe la explicación, y que no admita el *modus ponens* excepto en deducciones subordinadas» (1975, p. 123).

No es difícil ver que un argumento similar a éste se podría aplicar también a la definición de $\forall$. En particular, cualquier construcción arbitraria c podría usarse, de acuerdo con esto, para construir una prueba vacua de $\forall x P(x)$, simplemente considerando que c es ya de hecho una prueba de $\forall xP(x)$, y usándola para generar, por eliminación del universal, la oración $P(u)$ para cualquier elemento u del dominio.

Yo creo, sin embargo, que Dummett está equivocado en este extremo. En efecto, supongamos que admitiéramos una construcción cualquiera como una prueba de A $\rightarrow$ B, e inmediatamente después hiciéramos uso de ella para obtener B desde A por *modus ponens*. En ese caso, ¿sería la construcción resultante una prueba de B de acuerdo con la definición inductiva? No necesariamente. Por ejemplo, si B es un enunciado existencial $\forall xP(x)$, entonces la prueba del mismo deberá exhibir un objeto u del dominio más una prueba de $P(u)$, o al menos un procedimiento para encontrarlos; pero la construcción vacua que sugiere Dummett y que se acaba de describir no hará, en general, nada de esto.

En 1977 Dummett refinó su argumento ligeramente, tomando como base de la presunta prueba (la prueba vacua), no ya cualquier construcción arbitraria, sino sólo aquellas pruebas previas del condicional $A \rightarrow B$ que resultaran intuitivamente válidas desde un punto de vista informal:

> «(...) cualquier cosa que quisiésemos aceptar como siendo una prueba de $A \rightarrow B$, y supuesto que estuviera conforme con los cánones de la prueba informal ordinaria, podría proporcionarnos un método efectivo de transformar cualquier prueba de A en una prueba de B, a saber, adjuntando a la prueba de A, la prueba dada de $A \rightarrow B$ y añadiendo entonces una simple aplicación del *modus ponens*» (1977, p. 393).

Por todo lo cual concluye que

> «Las restricciones sobre lo que constituye una prueba de algún enunciado de estos tipos vendrían todas ellas de cualquier noción intuitiva previa de prueba informal a la que estuviéramos apelando (...).
>
> Obviamente, sin embargo, no es eso lo que se pretende cuando se da estas explicaciones de las constantes lógicas» (1977, p. 393).

Pues bien, una vez más se le escapa a Dummett el punto de que, al igual que antes, lo que importa es que el método en cuestión produzca pruebas de B que cumplan con el resto de la definición inductiva; y eso es algo independiente de cualquier noción informal previa de validez.

Para ver esto con claridad, consideremos el siguiente ejemplo. Sea c una prueba de $A \rightarrow B$, y supongamos por mor del argumento que c es canónica y perfectamente válida en todos los aspectos. Entonces procedemos a aplicar la construcción sugerida por Dummett: tomamos cualquier prueba dada de A, la adjuntamos a c, y obtenemos B por *modus ponens*. Sea d la construcción que consiste en efectuar esta operación.

En presencia de una prueba de A, no hay duda de que d será suficiente para convencernos de la verdad de B, al menos en la misma medida en que son convincentes a su vez las pruebas de A y de $A \rightarrow B$. Sin embargo, aunque pueda resultar sorprendente d *no será*, en general, una prueba de B de acuerdo con la definición inductiva.

En efecto, consideremos por ejemplo el enunciado condicional $\exists$xP(x) $\rightarrow$ $\exists$xQ(x), y supongamos que c proporciona un procedimiento para transformar cualquier objeto del dominio que satisfaga *P(x)* en otro que satisfaga *Q(x)*. Por mor del argumento, suponemos que c incluye también: una prueba de que ese procedimiento tiene la propiedad requerida, un procedimiento de decisión para comprobar *Q(x)*, y cualquier otra cosa que se necesite.

Entonces, dada una prueba de $\exists$xP(x), la cuestión sería aplicar la construcción c para obtener o bien un objeto v del dominio más una prueba de *Q(v)*, o al menos un procedimiento efectivo que nos permitiera en principio encontrar ambas cosas. Pero la construcción d, por su parte, sólo proporcionará un argumento en favor de que sucede $\exists xQ(x)$: un argumento que será suficiente para convencernos de que es cierto, y de que se puede probar por medios constructivos, pero que aún así no cumplirá con los requisitos de la noción de prueba impuestos en él por la definición inductiva.

En particular, en el caso de que la prueba de $\exists xP(x)$ proporcione un objeto determinado u tal que *P(u)*, el resultado de aplicar d a ese objeto no será la construcción de un segundo objeto v que satisfaga *Q(x)*; y en el caso en que la prueba de $\exists xP(x)$ simplemente apunte a un procedimiento efectivo para encontrar un objeto que satisfaga *P(x)*, la construcción d tampoco consistirá en apuntar a un procedimiento efectivo para encontrar a otro objeto que satisfaga a su vez *Q(x)*. En lugar de esto, todo lo que d proporciona en ambos casos es una inferencia por *modus ponens*.

Por esta razón, tenemos que concluir que el resultado de aplicar la construcción d a una prueba de $\exists x P(x)$, a pesar de ser un buen y definitivo argumento en favor de $\exists x Q(x)$, no constituye sin embargo una prueba suya de acuerdo con la definición inductiva.

La verdadera prueba está contenida en d de alguna manera (sería «deducible» de d), pero d en sí misma no reviste la forma apropiada, y por eso no pasa el criterio de la definición inductiva. Como vemos, por tanto, la situación no es aquella en que todas las restricciones sobre lo que constituya una prueba vengan dadas por una noción intuitiva previa de prueba informal, que es lo que Dummett temía, sino más bien lo contrario.

4. Pruebas en forma normal

Cuando la necesidad de introducir una noción de prueba canónica responde al deseo de evitar la impredicatividad en la definición del condicional intuicionista, es innegable que, al menos a primera vista, la noción más adecuada para satisfacer ese deseo es, esta vez sí, la noción de prueba en forma normal. Una prueba en formal normal de un enunciado $A \to B$, estando libre de rodeos («cortes»), tendrá que proceder de un modo gradual, y por lo tanto no podrá estar en absoluto basada en el propio $A \to B$. Si la definición del condicional intuicionista hiciera referencia exclusivamente a pruebas en forma normal, la impredicatividad desaparecería por completo.

Por desgracia, la correspondiente hipótesis de reducibilidad para este tipo de pruebas no es en absoluto obvia. Para ser exactos, los teoremas de las pruebas en forma normal, para sistemas intuicionistas de secuentes (Gentzen, 1935), y de deducción natural (Prawitz, 1965), establecen que, dentro de esos sistemas, cualquier prueba puede ser reducida a una prueba en forma normal. Pero no está nada claro que un resultado análogo se pueda extrapolar fuera de la lógica de primer orden.

Prawitz (1977) apunta que

> «(...) la presencia de $\to$ y $\forall$ tiene el efecto de que en general las condiciones para aseverar una oración no pueden ser agotadas por ningún sistema formal; (...) no hay un sistema formal que genere todos los procedimientos para transformar pruebas canónicas de A en pruebas canónicas de B, y queda abierta la posibilidad de que otras oraciones más complicadas puedan estar involucradas en esos procedimientos. Por ejemplo, uno de esos procedimientos puede ser definible en una extensión de cierto lenguaje sin serlo en el lenguaje mismo, y por tanto, en este aspecto, la extensión del lenguaje obtenida mediante la introducción de nuevas constantes lógicas puede no ser una extensión conservadora del lenguaje original. En consecuencia, mientras que las operaciones para formar pruebas canónicas vayan paralelas a las reglas de introducción del sistema de deducción natural de Gentzen, es claro que las reglas para aseverar una oración no equivalen a las reglas de inferencia de ningún sistema formal» (p. 29).

En 1987, razonando a partir del primer teorema de incompletud de Gödel, Prawitz concluye que no podemos restringir la complejidad de los métodos de prueba, pues siempre habrá algún enunciado que se pueda probar, pero que sólo se pueda probar por métodos más complejos que los restringidos:

> «Por el teorema de incompletud de Gödel sabemos que, al contrario de lo que ocurre en la lógica de predicados de primer orden, una oración $\forall x P(x)$ o $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ con $P(x)$ y $Q(x)$ recursivos, aunque no se pueda probar en la aritmética elemental, quizá sí pueda probarse introduciendo nuevos conceptos y principios fuera de la aritmética elemental, y que, en conjunto, no podemos en absoluto poner ninguna restricción formal acerca de cómo una oración puede ser probada» (p. 159).

Dummett ha incidido también en una observación parecida:

> «(...) no se sigue, del teorema de normalización para la lógica de primer orden, que un teorema similar se aplique a cualquier teoría formal de primer orden para una parte específica de la matemática intuicionista. Lo que muestran nuestras consideraciones es que resulta a la vez plausible y necesario que una propiedad de normalización se aplique a esas pruebas intuitivas canónicas que constituyen el principal tipo de construcciones mentales en cuyos términos se atribuye significado a cualquier teoría intuicionista» (1977, pp. 396-397).

Más en general, Dummett ha puesto en duda que los métodos de prueba matemática puedan ser definitivamente anticipados y, por lo tanto, que podamos poner algún límite al nivel de complejidad que se necesita para probar un enunciado determinado. En 1977 Dummett también menciona el primer teorema de incompletud de Gödel y concluye que «la totalidad de métodos de prueba, dentro de una teoría matemática dada, parece ser extensible indefinidamente» (p. 401).

Esto le lleva a la sorprendente conclusión de que un teorema matemático como $A \rightarrow B$ podría ser falible. En efecto, el argumento de Dummett es el siguiente. Supongamos que tenemos una construcción c tal que, para cualquier prueba de A que pueda ser elaborada con nuestros métodos actuales de prueba, c sea capaz de transformar esa prueba en una prueba de B. De acuerdo con Dummett, esto debería ser suficiente para aceptar c como una prueba de $A \rightarrow B$; pero entonces bien pudiera suceder que, un tiempo más tarde, descubriésemos una manera completamente nueva de probar A, y que la aplicación de c a la nueva prueba descubierta no diese como resultado una prueba de B:

> «Cuando esto ocurre, una prueba, relacionada con un condicional $A \rightarrow B$, que hubiese parecido aceptable con anterioridad, podría resultar invalidada. Por lo tanto, debido a las peculiaridades de la interpretación intuicionista de $\rightarrow$, el «estar probado» (*provability*) no es una propiedad estable (...); la matemática se convierte así en una disciplina cuyos resultados son falibles y están expuestos a la revisión, como los de otras ciencias» (1977, pp. 401-402).

Prawitz encuentra esta última conclusión de Dummett algo extrema, y no es para menos:

> «Estas consecuencias son desde luego muy extrañas, creo yo. Que el desarrollo de la matemática mediante la aparición de nuevas formas de razonamiento deba poner en cuestión todas las pruebas previas de implicaciones y nos fuerce a reconsiderarlas parece ser contrario a nuestra experiencia histórica» (1987, p. 185).

A lo cual Dummett replica a su vez:

> «Me siento tan incómodo como él [Prawitz] con la conclusión de que la prueba matemática, y por consiguiente la verdad matemática, sea inestable; que él haya encontrado la manera de evitar esta conclusión sería muy largo de discutir» (1987, p. 285).

A pesar de todo esto, debemos notar que si el significado de un enunciado A es claramente percibido o entendido, entonces no podrá haber nada en una hipotética prueba de A que traiga consigo un cambio en ese significado. Si entendemos bien A, entonces sabemos qué es lo que *cualquier* posible prueba de A está obligada a proporcionar: la manera de efectuar las transformaciones constructivas indicadas en A. Es por ello que nos podríamos contentar con usar un condicional intuicionista más débil o «modesto», en el cual la única propiedad de las pruebas del antecedente que pudiera ser tenida en cuenta para la transformación en pruebas del consecuente fuera precisamente la de *ser una prueba del antecedente*, es decir: la de establecer la afirmación intuicionista contenida en ese enunciado.

Si adoptásemos este punto de vista, para que una construcción fuese considerada una prueba de un enunciado $A \rightarrow B$ tendría simplemente que proporcionar un procedimiento para *extender* las posibles pruebas de A para construir a partir de ellas pruebas de B, pero sin entrar en la naturaleza de esas posibles pruebas de A, o de su estructura interna, fuera de los requisitos que la misma definición inductiva les impusiese de acuerdo con la forma lógica del propio A. Y en ese caso nuestro análisis subsiguiente del condicional se simplificaría notablemente, y la impredicatividad quedaría asimismo significativamente disminuida.

Una vez más, por tanto, encontramos una alternativa que nos permite al menos abordar el problema en cuestión sin pasar por la adopción de la noción de prueba canónica, con las enormes dificultades que, como estamos viendo, ello plantea.

5. Pruebas completamente analizadas

El tercer motivo por el que se ha intentado trazar una distinción entre las pruebas intuicionistas en general y las pruebas de una forma predeterminada o canónica, es el deseo de hacer un uso exhaustivo del condicional de Brouwer en todo su alcance. Esta fue la motivación del mismo Brouwer tras la introducción de su propia noción de prueba canónica —que Dummett ha rebautizado después como «prueba completamente analizada»—, y que aparece en su intento fallido de probar el «teorema de bloqueo» (*bar theorem*, Cfr. por ejemplo Brouwer, 1927, y para un análisis pormenorizado, Dummett, 1977, pp. 94-104).

La idea básica es que una prueba completamente analizada no debe contener enunciados lógicamente complejos, sino que debe operar directamente con aquellos enunciados atómicos a los cuales esos enunciados lógicamente complejos corresponderían. En particular, en lugar de cuantificaciones universales, una prueba completamente analizada contendría todos aquellos enunciados que fuesen instancias suyas —y que normalmente serían infinitos, claro:

> «Ahora, si las relaciones empleadas en una prueba cualquiera pueden descomponerse en relaciones básicas, su forma «canónica» (esto es, aquella que ha sido desgranada en inferencias elementales) emplea sólo relaciones básicas (...).
>
> Estas pruebas matemáticas *mentales* que en general contienen infinitos términos no deben ser confundidas con sus correlatos lingüísticos, que son finitos y necesariamente inadecuados, y por tanto no pertenecen a la matemática» (Brouwer, 1927, p. 460 y nota 8 en la misma página).

Dummett ha señalado al respecto que

> «(...) bajo la concepción intuicionista del infinito, la única forma en la que podemos construir una inferencia desde una infinidad de premisas es reconociendo *que* cada una de esas premisas puede ser probada; y esto, a su vez, puede ser llevado a cabo sólo mediante el reconocimiento, con respecto a algún procedimiento general, de que ese procedimiento producirá una prueba de cada una de las premisas. Así el único modo de entender la idea de una inferencia desde una infinidad enumerable de premisas $P(0), P(1), \ldots$ que es consistente con una posición constructiva, resulta coincidir exactamente con la interpretación intuicionista de una inferencia desde $\forall n P(n)$» (1977, pp. 96-97).

Sin embargo, esto parece eliminar la diferencia entre las pruebas completamente analizadas de Brouwer y las pruebas corrientes. En efecto, para admitir la existencia actual de una prueba completamente analizada e infinita tendríamos que adoptar un punto de vista fuertemente anticonstructivo; pero si no queremos admitir esa existencia actual infinita, la idea de una prueba completamente analizada viene a coincidir precisamente con la del procedimiento (en sí mismo finito) que sería capaz en principio de generarla.

Es por ello sorprendente que Dummett termine por darle la razón a Brouwer:

> «Una prueba intuicionista que involucre inferencias desde enunciados universalmente cuantificados realmente es, por lo tanto, lo que Brouwer mantiene, una representación de una prueba más completamente analizada conteniendo inferencias desde una infinidad de premisas» (Dummett, 1977, p. 97).

A mí me parece más bien que, por el contrario, lo que Dummett ha mostrado es que es imposible dotar de sentido, dentro de la perspectiva constructiva, a la noción de prueba completamente analizada como algo esencialmente diferente de una prueba ordinaria. En otras palabras: que una prueba relativa a un dominio infinito no puede ser nunca «completamente analizada», porque la única forma de entender constructivamente tal análisis es a través de su representación finita.

En cualquier caso, aún tenemos que encontrar dificultades si cabe más serias en la definición de este concepto de prueba completamente analizada, y estas se encuentran justamente en la interpretación del condicional. En efecto, sucede que $\rightarrow$ (y por tanto $\neg$) constituyen las únicas constantes lógicas para las que no es fácil imaginar cómo serían eliminadas, dentro de una prueba completamente analizada, en favor de enunciados más elementales.

En particular, un enunciado $A \vee B$ sería reemplazado por cualquiera de los dos disyuntos A o B, dependiendo de cuál de ellos es el que se haya establecido realmente en la prueba; un enunciado $A \wedge B$ sería reemplazado por la pareja de conyuntos A y B; un enunciado $\exists xP(x)$ sería reemplazado por otro enunciado de la forma $P(u)$ para algún u en el dominio; y finalmente un enunciado $\forall xP(x)$ sería reemplazado, como ya hemos visto, por todas sus instancias, posiblemente infinitas. A su vez, los enunciados resultantes de todos estos reemplazos serían a su vez sustituidos por otros más elementales siguiendo el mismo procedimiento, y así sucesivamente hasta obtener exclusivamente enunciados atómicos, que no admiten ulterior análisis.

Pues bien, el idear un procedimiento análogo para reducir un enunciado $A \rightarrow B$ plantea de nuevo enormes dificultades:

> «Dada una prueba de $A \rightarrow B$, ello significaría generar una por una cada presunta prueba de A, y o bien demostrar que no era de hecho tal prueba de A o bien aplicarle las transformaciones que la convirtieran en una prueba de B. Sin embargo, parece claramente opuesto a la insistencia intuicionista sobre la imposibilidad de anticipar las pruebas posibles de un enunciado matemático dado, el suponer que podemos, de tal manera, generar sistemáticamente una clase de construcciones que deba incluir a todas las pruebas de un enunciado determinado A» (Dummett, 1977, p. 102).

Esto guarda relación, naturalmente, con los comentarios de Dummett sobre la hipótesis de reducibilidad con respecto a las pruebas en forma normal que hemos discutido antes. La conclusión de Dummett es que no será posible hacer un uso exhaustivo y completo del condicional de Brouwer hasta que hayamos encontrado una solución a este problema, solución que parece especialmente difícil (1977, pp. 103-104).

Ante todo esto yo me pregunto si es en verdad tan importante como dummett parece creer el que estemos en disposición de hacer ese uso exhaustivo y completo del condicional de Brouwer. Al fin y al cabo, el único intento serio de hacerlo —cosa que admite el propio Dummett— ha sido la prueba de Brouwer del teorema de bloqueo (*bar theorem*), que como bien sabemos es incorrecta, y hasta la fecha no se ha encontrado un modo de corregirla que preserve su forma original, ni parece probable que se encuentre ya.

Por lo tanto podríamos contentarnos sencillamente con el uso del condicional «modesto» que he descrito antes, y el problema de las pruebas completamente analizadas desaparecería por completo.

6. La definición de la negación

La cuarta y última razón que se ha esgrimido en favor de la introducción del concepto intuicionista de prueba canónica concierne a la definición de la negación $\neg A$, habitualmente formulada como $A \to \perp$ donde $\perp$ es un enunciado atómico evidentemente falso, como $0 = 1$ u otro similar. Puesto que es imposible producir una prueba de $0 = 1$, se sigue que tampoco se puede probar el enunciado A.

De acuerdo con Dummett, «decir que no se puede probar $0 = 1$» es hacer una afirmación de muy amplio alcance, a saber que la matemática intuicionista es en conjunto consistente» (1977, p. 397). Por lo tanto, cada vez que aseveramos la negación de un enunciado estaríamos apoyándonos en el hecho de que la matemática constructiva es consistente.

Sin embargo, argumenta Dummett, la reducción a pruebas canónicas disolvería este problema: «las ecuaciones numéricas requieren para ser probadas o refutadas, la clase de construcción más simple que se pueda imaginar, y es evidente que no existe, entre estas, una que pruebe $0 = 1$» (1977, p. 397). Por lo tanto, de acuerdo con Dummett podríamos definir una prueba de $\neg A$ no como una construcción que transforme pruebas de A en pruebas de $0 = 1$ *cualesquiera*, sino como una que transforme pruebas de A en pruebas *canónicas* de $0 = 1$. Y ello obviamente resolvería el problema.

Una vez más, sin embargo, no creo que este problema tenga demasiada importancia, o al menos no la importancia suficiente como para obligar a la introducción de un concepto que tantas dificultades trae consigo. En efecto, hay que partir del hecho de que existen más bien pocas dudas sobre la consistencia de la matemática constructiva en su conjunto. Dummett dice en un momento dado que la consistencia de la matemática intuicionista es trivial para un intuicionista sólo en la misma medida en que lo es la matemática clásica para un platónico (1977, pp. 397-398); pero esto no es justo, ya que la mayoría de los matemáticos clásicos son bien receptivos a la mayor «sensación de consistencia» de los resultados constructivos (y los buscan, receptivos a su mayor atractivo), mientras que, por el contrario, un intuicionista estricto no tiene ninguna razón en principio para creer en la consistencia de una teoría clásica no constructiva.

Referencias

[1] L. E. J. Brouwer, «On the domains of definition of functions», en J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1967, pp. 457-463 (publicado por primera vez en 1927).

[2] L. E. J. Brouwer, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, ed. por D. van Dalen, Cambridge, Cambridge University Press, 1981. (Procedente de cursos impartidos en Cambridge entre 1946 y 1951).

[3] M. A. E. Dummett, «The philosophical basis of intuitionistic logic», en P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2ª ed. rev.), Nueva York, Cambridge University Press, 1983, pp. 97-129 (publicado por primera vez en 1975).

[4] M. A. E. Dummett, *Elements of Intuitionism*, Oxford, Clarendon Press, 1977.

[5] M. A. E. Dummett, «Reply to Prawitz», en B. M. Taylor (ed.), *Michael Dummett*, Dordrecht, Martinus Nijhoff, 1987, pp. 281-286.

[6] G. Gentzen, «Investigations into logical deduction», en *Collected Papers*, ed. por M. E. Szabo, Amsterdam, North-Holland, 1969, pp. 69-131 (publicado por primera vez en 1935).

[7] N. Goodman, «A theory of constructions equivalent to arithmetic», en J. Myhill, A. Kino and R. E. Vesley (eds.), *Intuitionism and Proof Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1970, pp. 101-120.

[8] G. Kreisel, «Mathematical logic», en T. L. Saaty (ed.), *Lectures on Modern Mathematics*, Vol. 3, Nueva York, Wiley and Sons, 1965, pp. 95-195.

[9] D. Prawitz, *Natural Deduction: a Proof-theoretic Study*, Estocolomo, Almqvist and Wiksell, 1965.

[10] D. Prawitz, «Towards a foundation of a general proof theory», en P. Suppes, L. Henkin, A. Joja and Gr. C. Moisil (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Vol. 4, Amsterdam, North-Holland, 1973, pp. 225-250.

[11] D. Prawitz, «On the idea of a general proof theory», *Synthese* 27, (1974), 63-77.

[12] D. Prawitz, «Meaning and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic», *Theoria* 43, (1977), 1-40.

[13] D. Prawitz, «Remarks on some approaches to the concept of logical consequence», *Synthese* 62, (1985), 153-171.

[14] D. Prawitz, «Dummett on a theory of meaning and its impact on logic», en B. M. Taylor (ed.), *Michael Dummett*, Dordrecht, Martinus Nijhoff, 1987, pp. 117-165.

[15] A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics: an Introduction*, Amsterdam, North-Holland, 1988.