FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Optimización y reparto de costes en problemas de inventario centralizados

Martín Brañas Rey

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Optimización y reparto de costes en problemas de inventario centralizados

Martín Brañas Rey

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Estadística e Investigación Operativa
Título: Optimización y reparto de costes en problemas de inventario centralizados
Breve descrición do contido
Este traballo fin de grao consiste nunha revisión bibliográfica das principais situacións de cooperación multi-axente en problemas de inventario centralizados. A análise desta clase de problemas considera dous obxectivos como fundamentais. Tras a formulación do modelo matemático axeitado, identifícase a política óptima de inventario a seguir e que minimiza os costes conxuntos da cooperación para os posibles grupos de individuos. Unha vez determinada, cómpre repartir os costes resultantes desa colaboración entre os axentes involucrados no problema, usando para este fin resultados propios da teoría de xogos
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen

Este trabajo de fin de grado es una revisión bibliográfica de las principales situaciones de cooperación multi-agente en problemas de inventario centralizados. El análisis de esta clase de problemas tiene dos objetivos fundamentales. Tras la formulación del modelo matemático adecuado, se identifica la política óptima de inventario a seguir y que minimiza los costes conjuntos da cooperación para los posibles grupos de individuos. Una vez determinada, se deben repartir los costes resultantes de esa colaboración entre los agentes involucrados en el problema, usando para este fin resultados propios de la teoría de juegos.

Abstract

This thesis is a literature review of the main situations multi-agent cooperation in centralized inventory problems. The analysis of this kind of problems has two fundamental objectives. After the formulation of the appropriate mathematical model, the optimal inventory policy, that minimizes the joint costs of cooperation for the possible groups of individuals, is identified. Once determined, the costs resulting from that cooperationtion have to be allocated among the agents involved in the problem, using for this purpose results from game theory.

Introducción

En el desarrollo de este trabajo se utilizan conceptos de la teoría de inventarios y de la teoría de juegos. Comenzaré describiendo brevemente lo que es la teoría de juegos y explicare algunas características de la teoría de inventarios centrándome en los problemas de inventario centralizados.

La teoría de juegos es una disciplina matemática que se ocupa del estudio de situaciones conflictivas en las que la toma de las decisiones adecuadas constituye la solución del problema. La teoría de juegos se ha convertido en una herramienta importante para la teoría económica. Sus investigaciones estudian las estrategias óptimas, así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos. Los juegos son problemas de decisión interactivos en los cuales un grupo de agentes participan y se toman ciertas decisiones. La teoría de inventarios se centra en el diseño, estudio y optimizan de sistemas producción con el fin de minimizar sus costes. Para alcanzar dicha gestión de inventario óptima primero se formula un modelo matemático que describe el comportamiento del problema y después se busca una política óptima de inventario bajo dicho modelo. Dicha política óptima de inventario esta determinada por un modelo matemático que esta definido por los siguientes elementos que conforman un modelo matemático:

- Un agente (o empresa) que desea planificar su inventario.
- La demanda de uno o varios productos, que es la cantidad de bienes necesaria para cubrir las necesidades del agente.
- Un proveedor que suministra la demanda al agente.
- El tamaño de cada pedido, que debe ser decidido por el agente.

El objetivo principal de los modelos de inventario es determinar la cantidad de pedido óptima y el momento de su solicitud. Distinguimos dos tipos de modelos de inventario según la naturaleza de sus demandas: Los modelos deterministas, en los que la demanda puede determinarse de antemano y modelos probabilistas en los cuales la demanda puede describirse en términos probabilistas. En este trabajo nos centraremos en los sistemas de inventario centralizados con demanda determinista.

Los problemas de inventario centralizados son un tipo de problema de inventario en el cual varios agentes con problemas de inventario individuales alcanzan un acuerdo para realizar un pedido conjunto y así reducir costes. La resolución de un problema de inventario centralizado sigue los siguientes pasos:

- Elaboración de un modelo matemático que describe el comportamiento en sistemas de inventario.
- Determinar cual es la política óptima de inventario de los agentes del grupo bajo dicho modelo.
- Asignación del reparto de costes entre los distintos agentes.

En este trabajo consideraremos modelos de inventario centralizados basados en la formulación EOQ (cantidad económica de pedido). El modelo EOQ es uno de los planteamientos más sencillos para el control de inventarios. Es un método que, tomando en cuenta la demanda determinista de un producto, el coste de mantener el inventario, y el coste de solicitar un pedido, produce como salida la cantidad óptima de unidades a pedir para minimizar costes por mantenimiento del producto. El principio del EOQ es simple, y se basa en encontrar el punto en el que los costos por pedir un producto y los costos por mantenerlo en inventario son iguales.

En el primer capítulo empezaremos introduciendo un modelo básico de inventario con un agente y un artículo y lo extenderemos a una modelo con múltiples agentes y un único artículo. En el segundo capítulo abordaremos el problema de la asignación de los costes que surge en un sistema de transporte de inventario con un único artículo y múltiples agentes que hace un pedido conjunto usando un sistema EOQ. En el tercer capítulo trataremos una variación del problema presentado en el segundo capítulo, al asumir que los costes por transporte de pedidos queda determinado por una función general. En este capítulo extenderemos el problema de asignación de costes para un sistema de inventario centralizado con varios artículos (multi-item) y varios agentes y analizaremos una situación en la cual los costes de transporte vienen dados por una función general. En el último capítulo concluiremos.

Capítulo 1

Los juegos de inventario

1.1. Introducción

En general, las tiendas o empresas comercian con varios tipos de bienes, y para mantener el servicio a sus clientes a un nivel alto, intentan satisfacer la demanda de todos los bienes a tiempo. Para obtener este objetivo, las tiendas o empresas podrán guardar sus inventarios en almacenes privados. Estos inventarios tienen unos costes asociados, para mantenerlos bajos es necesario una buena gestión del inventario. El principal objetivo de la gestión de inventarios es minimizar la media del coste por unidad de tiempo (a largo plazo) del inventario, garantizando un nivel mínimo de servicio preestablecido.

En este capítulo estudiaremos un modelo extremadamente simple de inventarios. Empezaremos con una única empresa que almacene un único bien. La demanda de este bien es continua y ocurre a un ritmo constante . El tiempo de espera del bien es determinista, y sin perdida de generalidad se asume que es cero. El coste de inventario relacionado se asume que no varia en el tiempo y que no existen limites en las cantidades de pedido ni de almacenamiento. Dicho coste de inventario consta de dos partes, el coste de pedido, que se asume independiente de la cantidad pedida y el coste de almacenamiento, que se asume lineal a la cantidad almacenada.

Para dar respuestas adecuadas a las dos preguntas formuladas, debemos especificar la estructura de información exacta que queremos considerar. La demanda y los costes de almacenaje se asume que son información privada, unicamente el coste por pedido, que sera el mismo para todas las empresas sera información pública. Asumiremos que la única información que una empresa revela es el numero de pedidos por unidad de tiempo que la empresa realizaría si actuara de manera óptima e independiente. De hecho, mostraremos que esa es la única información necesaria para determinar una óptima política de pedidos conjunta. Si toda la información fuera pública llegaríamos al mismo resultado.

En este capítulo se exponen los sistemas de inventario descritos en Meca et al. (2004), así como los resultados más relevantes al respecto.

Nuevos aspectos y matices aparecen cuando tenemos en cuenta situaciones con varias empresas y un único bien. En situaciones con varias empresas surgen dos preguntas interesantes, ¿cual seria la política de pedidos óptima para un grupo de empresas? y cuando la coordinación entre empresas provoca un ahorro, ¿como se deberían repartir el ahorro entre las diferentes empresas? Esta sección responde a estas dos preguntas.

La primera sección empezara con el análisis de la política de pedidos óptima para varias empresas con un único bien y un único proveedor. En la segunda sección consideraremos el primer modelo descrito y los correspondientes costes de los juegos de inventario. En la tercera sección analizaremos las situación en la cual tendremos revelación total de la información por parte de todas las empresas. En la cuarta sección expondremos un ejemplo que ilustra todas las situaciones de las secciones anteriores.

1.2. El modelo básico de inventario

En el modelo básico de inventario una única empresa, tiene que suplir la demanda de un único bien. Para cumplir con dicha demanda, la empresa mantiene el almacenamiento a mano. Asumimos que la empresa tiene o alquila un almacén, con capacidad ilimitada y hay un único proveedor que entrega todas los pedidos. La demanda se asume que es conocida, constante e igual a d unidades por unidad de tiempo. La empresa no se puede quedar sin existencias. El tiempo de espera entre que se realiza un pedido y ese pedido llega se asume que es determinista y constante, y sin perdida de generalidad igual a cero. Hay dos tipos de coste involucrados:

- $a > 0$, el coste fijo que paga el agente cada vez que realiza un pedido, el cual asumimos que no depende de la cantidad pedida.
- $h > 0$, el coste de almacenamiento, i.e., el coste por mantener un artículo almacenado por una unidad de tiempo, se asume que es constante.

Como la demanda es determinista y constante, y el tiempo de espera es cero, la empresa que quiera minimizar su coste medio por unidad de tiempo pedirá la misma cantidad cada vez que haga un pedido y el almacén estará siempre vació cuando se haga un pedido. La empresa quiere determinar cuantos pedidos debe realizar por unidad de tiempo y el volumen de dichos pedidos para obtener la meta de minimizar costes. El siguiente análisis sigue las líneas establecidas por Hadley y Whitin (1963) para el estudio de la política óptima de un único agente.

Denotaremos por Q el volumen de cada pedido realizado por la empresa (igual para todos los pedidos). Entonces, el tiempo entre dos pedidos sucesivos es Q/d unidades de tiempo. Un ciclo sera definido como el intervalo de tiempo de longitud Q/d empezando en el momento que se realiza un pedido. Denotaremos por m el numero de pedidos realizados por unidad de tiempo, esto es, $m = d/Q$.

Echemos un vistazo a lo que ocurre en una unidad de tiempo. En este periodo, la demanda para el bien es d. La empresa quiere satisfacer la demanda a tiempo, por tanto, si la cantidad pedida es Q, entonces la media de pedidos por unidad de tiempo es d/Q y la media del coste por unidad de tiempo es ad/Q. Como el pedido se realiza cuando el stock es igual a cero entonces la cantidad almacenada media sera $Q/2$. Entonces la media del coste de almacenaje sera $hQ/2$. La media del coste de la empresa por unidad de tiempo, *AC(Q)*, es igual a la suma de la media del coste de pedido y el coste de almacenaje por unidad de tiempo:

$$AC(Q) = a\frac{d}{Q} + h\frac{Q}{2}\sqrt{2ad/h}.$$

EL coste mínimo se obtiene en $\dot{Q}$ con $AC'(\dot{Q}) = 0$ y $AC''(\dot{Q}) > 0$. Por lo tanto $\dot{Q} = \sqrt{2ad/h}$. Por lo tanto, la longitud óptima del ciclo es $\dot{Q}/d = \sqrt{2a/(dh)}$, el numero óptimo de pedidos realizados es $\dot{m} = d/\dot{Q}. = \sqrt{dh/(2a)}$ y el coste mínimo medio por unidad de tiempo es $AC(\dot{Q}) = \sqrt{2adh} = 2a\dot{m}$.

En una situación con n-empresas existe un conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ de empresas. Denotaremos la demanda, el coste de almacenaje y el tamaño de cada pedido de la empresa i, con $i \in N$ como, d_i ,h_i y Q_i, respectivamente. Las empresas trabajan con un único bien y cada una tiene su almacén privado. Cuando las empresas trabajan conjuntamente, minimizan los costes al hacer un pedido conjunto, reduciendo así el numero de pedidos y por lo tanto los costes. Entonces en un ciclo óptimo las longitudes de los ciclos son iguales para todas las empresas. La longitud del ciclo de la empresa $i \in N$ es Q_i/d_i , por lo tanto, debería cumplirse que $Q_i/d_i = Q_j/d_j$ para todo $i, j \in N$. Si tomamos $j = 1$ podemos expresar Q_i, como una función de Q_1 : $Q_i = \frac{d_i}{d_1}Q_1$.

El coste medio por unidad de tiempo de las empresas en N es la suma de los costes de almacenaje y pedido. Se hace un pedido por ciclo, por lo tanto el coste medio por unidad de tiempo es ad_1/Q_1. Como cada empresa almacena bienes en su propio almacén, el coste de almacenaje sera la suma de los costes individuales. Entonces el coste medio por unidad de tiempo de cada empresa en N es:

$$a\frac{d_1}{Q_1} + \sum_{i \in N} h_i \frac{Q_i}{2}.$$

Comparando esto con la media del coste por unidad de tiempo de una empresa individualmente $ad_i/Q_i + h_iQ_i/2$. Expresando este coste como una función de Q_1 unicamente, tenemos:

$$a\frac{d_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{2d_1}\sum_{i\in N} h_i d_i.$$

Minimizando respecto de Q_1 da como resultado la cantidad óptima de los pedidos de la empresa i, $\widehat{Q_i}$:

$$\widehat{Q_i} = \sqrt{\frac{2ad_i^2}{\sum_{j\in N} h_j d_j}}.$$

La longitud óptima del ciclo es :

$$\frac{\widehat{Q_i}}{d_i} = \sqrt{\frac{2a}{\sum_{j\in N} h_j d_j}}, \forall i \in N.$$

Por lo tanto, el número óptimo de pedidos que la empresa debe realizar es :

$$m_N = \frac{d_i}{\widehat{Q_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{j\in N} h_j d_j}{2a}} = \sqrt{\sum_{j\in N} m_j^2}.$$

Aquí $m_i = d_i/\dot{Q}_i = \sqrt{d_i h_i/(2a)}$ representa el número de pedidos que una empresa i debería hacer para minimizar costes. El coste medio mínimo es igual a $2am_N$. Como en el caso de una única empresa, el coste de pedido y de almacenaje son iguales ambos a am_N. Es relevante recalcar que el mínimo del coste depende unicamente de a, que es información pública, y de m_N, que depende de m_i. Por lo tanto, para calcular el coste mínimo, es suficiente con que cada empresa revele el número óptimo de pedidos que haría si trabajara individualmente, m_i. Las empresas no tendrán que revelar sus costes de almacenaje ni su demanda, no es necesario la revelación total de la información. Aunque es posible, que la cantidad de información revelada influya el almacenaje conjunto de la mercancía. En las siguientes secciones discutiremos diferentes resoluciones a este problema.

1.3. Coste de pedido

En esta sección consideraremos situaciones en las cuales cada empresa revela unicamente el número óptimo de pedidos por unidad de tiempo si trabajara de manera individual, m_i. Por lo tanto, se mantendrá como información privada d_i, h_i y $\dot{Q}_i$.

Hemos visto que cuando todas las empresas trabajan de manera conjunta, el número óptimo de pedidos para la empresa $i \in N$ es $\widehat{Q_i} = d_i/m_N$. Esta cantidad es menor que la cantidad óptima individual de pedidos, $\dot{Q}_i = d_i/m_i$, dado que, $m_N = \sqrt{\sum_{j\in N} m_j^2} > m_i$ para todo $i \in N$. Entonces, el nivel de inventario medio sera menor para cada firma: $\widehat{Q_i}/2 < \dot{Q}_i/2$. Todas las empresas ahorran en costes de almacenaje. Como el coste de almacenaje es información privada ,no podemos considerar como dividir el coste total de almacenaje entre las empresas. Por lo tanto, asumimos que cada empresa paga sus costes de almacenaje.

El tamaño óptimo de los pedidos de la empresa i es $\widehat{Q_i} = d_i/m_N$, el cual es información privada ya que d_i es información privada. Para que exista la posibilidad de hacer un pedido conjunto sin revelar información privada necesitamos un intermediario que haga todos los pedidos. Cada empresa le comunica al intermediario su tamaño óptimo de pedido $\widehat{Q_i}$, y el intermediario hará un pedido de tamaño $\sum_{i\in N} \widehat{Q_i}$. El intermediario conoce m_i pero el proveedor no, por lo tanto, el proveedor solo conoce $\sum_{i\in N} \widehat{Q_i}$. Es mas, el intermediario no revelará de una empresa a otra empresa, asegurándose así de que toda la información privada permanece privada.

Solo nos interesa el coste óptimo de pedido am_N, el cual esta descrito por la 3-tupla $\{N, a, \{m_i\}_{i\epsilon N}\}$. Si una coalición S de empresas coopera entonces el coste óptimo de pedido es

$$a\sqrt{\sum_{i\in S} m_i^2}. \tag{1.1}$$

Consecuentemente, se puede definir el juego del coste de pedido correspondiente (N, c_o) como sigue. Para todas las coaliciones $S \subset N$, el coste $c_o(S)$ es igual al coste óptimo anterior y $c_o(\emptyset) = 0$.

$$c_o(S) = a\sqrt{\sum_{i\in S} m_i^2} \text{ y } c_o(\emptyset) = 0.$$

Consideremos algunas propiedades de los juegos de coste de pedido. Un juego de coste (N, c) es cóncavo si para todo $i \in N$ y para todo $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$ tenemos que $c(S\cup\{i\}) - c(S) \geq c(T\cup\{i\}) - c(T)$ y es monótono si para todo $S \subset T \subset N$ se tiene que $c(S) \leq c(T)$. La siguiente proposición prueba las propiedades de monotonía y la concavidad del juego de coste asociado

Proposición 1.1. *Sea $\{N, a, \{m_i\}_{i\epsilon N}\}$ una situación de costes de pedidos y sea (N, c_o) el juego de coste de pedidos asociado. Entonces el juego (N, c_o) es cóncavo y monótono.*
Demostración: Sea (N, c_o) el juego de coste de pedidos correspondiente. Como $\sum_{i\in S} m_i^2$ es creciente en el numero de elementos de S y como $\sqrt{x}$ es una función monotonamente creciente y cóncava, tenemos que (N, c_o) es monótono y cóncavo. □

Uno de los mayores problemas de la teoría de juegos cooperativos es como dividir los beneficios de la cooperación si la coalición N se ha formado. Una forma de compartir estos beneficios es siguiendo una asignación en el núcleo. El núcleo del juego de costes (N, c) es el conjunto

$$C(c) = \left\{ x \ \in \ R^N \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N), \ \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \ \forall \ S \subset N, S \neq \emptyset \right\}.$$

Cuando un elemento del núcleo $x \in C(c)$ se propone como distribución del coste total *c(N)*, donde la empresa i tiene que pagar x_i, entonces una coalición S de empresas pagará como máximo su propio coste ya que $\sum_{i \in S} x_i < c(S)$. Por lo tanto, ninguna coalición tiene incentivos para abandonar la coalición grande. Un juego esta balanceado si su núcleo es no vacío, y es totalmente balanceado si para cada subjuego (S, c_S) esta balanceado, donde $c_S(T) := c(T)$ para todo $T \subset S$.

Otra propiedad de los juegos de coste de pedidos es que un múltiplo no negativo de dicho juego es otro juego de coste de pedidos. Sea λ un número no negativo, para toda coalición S de empresas en N se tiene que: $\lambda c_o(S) = a \sqrt{\sum_{i \in S} (\lambda m_i)^2}$, y esto describe el valor de la coalición S en el juego de coste de pedidos correspondiente a la situación $\{N, a, \{\lambda m_i\}_{i \epsilon N}\}$. Dicha situación se da cuando todos las demandas individuales y los costes de almacenaje aumenta en λ unidades. Por lo tanto, $(N, \lambda c_o)$ es un juego de coste de pedidos. Sin embargo, la suma de dos juegos de coste de pedido no tiene porque ser otro juego de coste de pedido.

Los juegos de coste de pedidos son una clase especial de juegos de producción, como introdujeron Shapley y Shubik (1967). Un juego de producción es un juego cooperativo con un conjunto de jugadores N y el valor de una coalición de jugadores es *g(b(S))*, siendo g una función de producción (cóncava) y $b(S) = \sum_{i \in S} b_i$ los recursos de la coalición S. En el caso especifico del juego de coste de pedidos fijamos $c_o(S) = g(b(S))$ con $g(x) = a\sqrt{x} y b(S) = \sum_{i \in S} m_i^2$. Si cada unidad de producción cuesta una unidad monetaria entonces *g(b(S))* no denota unicamente cuanto produce la coalición si no que también denota el coste de los bienes producidos. La cantidad de recursos retenida por la empresa i es $b(\{i\}) = m_i^2$. Una solución interesante para estos juegos es la regla proporcional. Definiremos la regla proporcional $\pi(c_o)$ como la regla que divide el coste total $c_o(N)$ proporcionalmente a los recursos individuales. Esto implica que la empresa $i \in N$ tiene que pagar

$$\pi_i(c_o) = \frac{b(\{i\})}{\sum_{j \in N} b(\{j\})} = \frac{m_i^2}{\sum_{j \in N} m_j^2} c_o(N) = \frac{a m_i^2}{\sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}} \tag{1.2}$$

donde la ultima igualdad se sigue de (1.1) para $S = N$. Otra interpretación de esta regla proporcional se sigue de que $c_o(\{i\}) = am_i$ para todas las empresas $i \in N$. Si dividimos el coste total $c_o(N)$ por la raíz cuadrada del coste individual proporcionalmente entonces la empresa i tiene que pagar :

$$\frac{c_o^2(\{i\})}{\sum\limits_{j\in N} c_o^2(\{j\})} c_o(N) = \frac{a^2 m_i^2}{\sum\limits_{j\in N} a^2 m_j^2} c_o(N) = \frac{m_i^2}{\sum\limits_{j\in N} m_j^2} c_o(N)$$

acabando con la misma regla proporcional. Esta regla tiene algunas propiedades interesantes que veremos a continuación.

Primero, para todos los juegos de coste de pedidos (N, c_o) se tiene que $\pi(c_o)$ es un elemento del núcleo $C(c_o)$. Esto es fácil de probar, por (1.2) se sigue que $\sum\limits_{i\in N} \pi(c_o) = c_o(N)$ y para todas las coaliciones no vacías $S \subseteq N$ tenemos que:

$$\sum_{i\in S} \pi_i(c_o) = \sum_{i\in S} \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j\in N} m_j^2}} \leq \sum_{i\in S} \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j\in S} m_j^2}} = a\sqrt{\sum_{j\in S} m_j^2} = c_o(S).$$

A esta regla proporcional se puede llegar a través de un esquema monótono de asignación de población (PMAS). Estos esquemas fueron introducidos en Sprumont (1990) y se definen como sigue. Un vector $y = \{y_{iS}\}, i{\in}S, S \subset N, S \neq \emptyset$ es un esquema monótono de asignación de población del juego de costes (N, c) sí y solo sí, satisface las dos condiciones siguientes:

- $\sum\limits_{i\in S} y_{iS} = c(S)$, para todas las coaliciones no vacías S de N.
- para todas las coaliciones no vacías $S, T \subseteq N$ y para todo $i \in S$ se tiene que cumplir que $S \subset T \implies y_{iS} \geq y_{iT}$.

También se tiene que, como cada juego de coste de pedidos (N, c_o) es cóncavo y como $\pi(c_o) \in C(c_o)$ existe un PMAS $y = \{y_{iS}\}, i{\in}S, S \subset N, S \neq \emptyset$ del juego (N, c_o) tal que $y_{iN} = \pi_i(c_o)$ para todo $i \in N$. Definimos para todo $i \in S,\ S \subset N,\ S \neq \emptyset$

$$y_{iS} = \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j\in S} m_j^2}}.$$

Entonces para todo $S \subset N,\ S \neq \emptyset$

$$\sum_{i\in S} y_{iS} = \sum_{i\in S} \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j\in S} m_j^2}} = a\sqrt{\sum_{j\in S} m_j^2} = c_o(S)$$

y para todos $S, U \subset N;\ S, U \neq \emptyset$ tales que $S \subset U$ y para todo $i \in S$

$$y_{iS} = \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j\in S} m_j^2}} \geq \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j\in U} m_j^2}} = y_{iU}.$$

Finalmente, se tiene que $y_{iN} = \pi_i(c_o)$ para todo $i \in N$. Por lo tanto, se puede llegar a la regla $\pi(c_o)$ a través del PMAS y.

Ahora introduciremos una propiedad de la monotonía de las reglas de solución de la clase de los juegos de coste de pedidos, la cual se parece a la monotonía fuerte de Young (1985). Sea f una regla de solución de la clase de los juegos de coste de pedidos. Entonces $f_i(c_o) \in \mathbb{R}$ denota el coste asignado al jugador $i \in N$ según esta regla en el juego c_0 y $f(c_o) = (f_i(c_o))_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$. Sea (N, c_o) y $(N, \bar{c}_o)$ dos juegos de coste de pedidos. La regla f satisface la eficiencia si $\sum\limits_{i\in N} f_i(c_o) = c_o(N)$ y satisface la monotonía si para todo $i \in N$ tal que $c_o(\{i\}) \geq \bar{c}_o(\{i\})$ se tiene que $c_o(N)f_i(c_o) \geq \bar{c}_o(N)f_i(\bar{c}_o)$.

Esta propiedad de la monotonía empieza por la siguiente suposición: "si $c_o(\{i\}) \geq \bar{c}_o(\{i\})$ y $c_o(N) = \bar{c}_o(N)$ entonces $f_i(c_o) \geq f_i(\bar{c}_o)$", sin embargo, queremos llegar más lejos, si $c_o(\{i\}) \geq \bar{c}_o(\{i\})$ y $c_o(N) \neq \bar{c}_o(N)$ entonces exijimos que se mantenga la desigualdad anterior y por lo tanto $f_i(c_o) \geq f_i(\bar{c}_o)$ exceptuando una corrección en relación a otros jugadores.

Juntando eficiencia y monotonía se caracteriza la regla proporcional de la clase de los juegos de coste de pedidos, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Existe una única regla que satisfaga la monotonía y la eficiencia de la clase de los juegos de coste de pedidos, y es la regla proporcional.*

Demostración: Es trivial que la regla proporcional satisface la eficiencia y la monotonía. Para probar el inverso, tomamos la regla f de la clase de los juegos de coste de pedidos que satisface monotonía y eficiencia. Debemos tener en cuenta que la monotonía implica que para todos los juegos de coste de pedidos (N, c'_o) y (N, c''_o) se tiene que:

$$c'_o(\{i\}) = c''_o(\{i\}) \Rightarrow c'_o(N)f_i(c'_o) = c''_o(N)f_i(c''_o). \tag{1.3}$$

Definiendo el juego de coste de pedidos (N, c^0_o) como $c^0_o(S) = 0$ para todo $S \subset N$ y tomando un juego de coste de pedidos (N, c_o). Si para algún $i \in N$ se tiene que $c_o(\{i\}) = 0$ entonces $c_o(\{i\}) = c^0_o(\{i\})$. De (1.3) se sigue que $c^0_o(N)f_i(c^0_o) = c^0_o(N)f_i(c^0_o) = 0$ y por lo tanto:

$$c_o(\{i\}) = 0 \Rightarrow f_i(c_o) = 0. \tag{1.4}$$

Definiendo el número $I(c_o)$ como el número de jugadores $i \in N$ con $c_o(\{i\}) > 0$. Tenemos que $f_i(c_o) = \pi_i(c_o)$ para todo $i \in N$ aplicando inducción en $I(c_o)$ tenemos que:

- Si $I(c_o) = 0$ entonces por (1.4), $f_i(c_o) = 0$ para todo $i \in N$.

- Si $I(c_o) = 1$ entonces existe un único jugador $k \in N$ con $c_o(\{k\}) > 0$. Para todo $i \in N \setminus \{k\}, c_o(\{i\}) = 0$, por (1.4), $f_i(c_o) = 0 = \pi_i(c_o)$. Por la eficiencia se sigue que $f_k(c_o) = c_o(N) - \sum\limits_{i \neq k} f_i(c_o) = c_o(N) - \sum\limits_{i \neq k} \pi_i(c_o) = \pi_k(c_o)$.

Asumiendo ahora que $f(c_o) = \pi(c_o)$ para todos los juegos de coste de pedidos (N, c_o) con $I(c_o) \leq I$, $I \leq n-1$. Considerando un juego de coste de pedidos $(N, \bar{c}_o)$ correspondiente a $\left\{N, \bar{a}, \{\bar{m}_i\}_{i \in N}\right\}$ con $I(\bar{c}_o) = I + 1$. Podemos asumir sin perdida de generalidad que $c_o(\{i\}) > 0$ para los jugadores i = *1, 2,..., I + 1*. Definiendo el juego (N, c_o) para ser correspondiente con $\left\{N, a, \{m_i\}_{i \in N}\right\}$ donde $a = \bar{a}, m_j = \bar{m}_j$ para todo $j \in N \setminus \{I+1\}$ y $m_{I+1} = 0$. Entonces $I(c_o) = I$ y $f(c_o) = \pi(c_o)$. Como $c_o(\{k\}) = \bar{c}_o(\{i\}) > 0$ para todo k=*1, 2,...,*I se sigue por (1.3) que $\bar{c}_o(N) f_k(\bar{c}_o) = c_o(N) f_k(c_o) = c_o(N) \pi_k(c_o)$. Por lo tanto,

$$\pi_k(c_o) = a m_k^2 \sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2} = \frac{c_o^2(\{k\})}{c_o(N)}$$

entonces, usando inducción se tiene que:

$$\bar{c}_o(N) f_k(\bar{c}_o) = c_o(N) \pi_k(c_o) = c_o(N) \frac{c_o^2(\{k\})}{c_o(N)} = c_o^2(\{k\}) = \bar{c}_o^2(\{k\}).$$

Se sigue que $f_k(\bar{c}_o) = \frac{\bar{c}_o^2(\{k\})}{\bar{c}_o(N)} = \pi_k(\bar{c}_o)$, también se tiene que $c_o(\{j\}) = \bar{c}_o(\{j\}) = 0$ para todo j = *I+2,..., n-1, n* por lo tanto por (1.4) $f_j(c_o) = 0 = \pi_j(c_o)$. Finalmente, la eficiencia implica que:

$$f_{I+1}(\bar{c}_o) = \bar{c}_o(N) - \sum_{j \neq I+1} f_k(\bar{c}_o) = \bar{c}_o(N) - \sum_{j \neq I+1} \pi_k(\bar{c}_o) = \pi_{I+1}(\bar{c}_o).$$

Lo cual concluye la demostración. □

El coste mínimo de la coalición N, incluyendo coste de almacenaje, es igual a $2am_N = 2a\sqrt{\sum\limits_{i \in N} m_i^2}$. Definimos el juego de coste de inventario correspondiente (N, c_v) para que sea el juego con el coste de la coalición S igual al mínimo coste que puedo obtener por si mismo, esto es, $c_v(S) = 2a\sqrt{\sum\limits_{i \in S} m_i^2}$ *y* $c_v(\emptyset) = 0$. Entonces, $c_v = 2c_o$. Las propiedades de los juegos de coste de pedidos se mantienen en los juegos de coste de inventario, así que, estos juegos son cóncavos. Es más, basándonos en la regla proporcional para los juegos de coste de pedidos podemos encontrar una asignación del núcleo del juego de coste de inventario.

En el juego de coste de pedidos, la regla proporcional divide el coste total de los pedidos de la coalición mayor entre los jugadores. En un juego de coste de inventario, tenemos que dividir coste de pedido y almacenaje. Definimos la regla de distribución $r(c_v)$ como sigue. La empresa i tiene que pagar el coste de pedido siguiendo la regla proporcional y sus costes de almacenaje privados, por lo tanto, $r_i(c_v) = \pi_i(c_o) + h_i\widehat{Q}_i/2$, donde $\widehat{Q}_i$ es el tamaño óptimo de pedido para la empresa i cuando coopera con el resto de empresas.

Teorema 1.3. *Si* (N, c_v) *es un juego de coste de inventario, entonces* $r(c_v) \in C(c_v)$ *y se puede llegar a* $r(c_v)$ *a través de un PMAS.*

Demostración: Sea (N, c_v) un juego de coste de inventario. Primero, tenemos que ver que $\pi_i(c_o) = h_i \widehat{Q}_i/2$. Resolviendo el problema de minimización del coste para la coalición N, tenemos que

$$\widehat{Q}_i = \frac{d_i}{m_N} = \frac{2am_i^2}{h_i m_N} = \frac{2am_i^2}{h_i \sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}}.$$

Entonces, el coste de almacenaje para la empresa i es

$$h_i \frac{\widehat{Q_i}}{2} = \frac{h_i}{2} \frac{2am_i^2}{h_i \sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}} = \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}} = \pi_i(c_o)$$

para todo $i \in N$. Después tenemos que ver que r(c_v) es un elemento del núcleo. De la primera parte de esta demostración se sigue que, $r_i(c_v) = 2\pi_i(c_o)$ para todo $i \in N$. Es más, se tiene que:

$$\sum_{i \in N} 2\pi_i(c_o) = 2 \sum_{i \in N} \pi_i(c_o) = 2c_o(N) = c_v(N)$$

y para todo $S \subset N,\ S \neq \emptyset$, se tiene que:

$$\sum_{i \in S} 2\pi_i(c_o) = 2 \sum_{i \in S} \pi_i(c_o) \leq 2c_o(S) = c_v(S)$$

entonces, $r(c_v) \in C(c_v)$.

Igual que en el caso de los juegos de coste de pedidos, se puede ver que es posible llegar a la regla $r(c_v)$ a través de un PMAS de la forma *2y* donde y esta definido como se definió anteriormente. □

1.4. Coste de almacenaje y pedido

En esta sección consideraremos situaciones en las que la revelación de la información es total. Cada empresa $i \in N$ revela su demanda d_i, su coste de almacenamiento h_i, su numero óptimo de pedidos individuales m_i y su tamaño de pedido individual óptimo $\dot{Q}_i$. Si asumimos que no existen limites en la capacidad de almacenamiento, el coste del transporte es 0 y el tiempo del transporte es determinista, entonces podemos considerar coordinación en los costes de almacenamiento. Si el miembro de una coalición tiene unos costes de almacenaje muy bajos, entonces la coalición puede reducir sus costes si guarda su inventario en el almacén de este miembro.

El coste medio por unidad de tiempo de una coalición es la suma de los costes de almacenamiento y pedido. Igual que antes, el coste total se minimiza si todos los ciclos tienen la misma longitud, por lo tanto se tiene que $Q_i/d_i = Q_j/d_j$ para todo $i, j \in S$. Sin pérdida de generalidad asumimos que la empresa *1* es miembro de la coalición S. Ahora podemos expresar Q_i como función de Q_1 para todo $i \in S : Q_i = d_i Q_1/d_1$. En cada ciclo la coalición realiza un pedido conjunto a un coste a, entonces el coste de pedido medio por unidad de tiempo es ad_1/Q_1. Todos los bienes serán guardados en el almacén de la empresa con menor coste de almacenamiento. Definimos $h_S := \underset{i\in S}{min}\ h_i$. El nivel medio de inventario de la empresa $i \in S$ es $Q_i/2$ por unidad de tiempo y $h_S Q_i/2$ denota el coste medio de almacenamiento por unidad de tiempo. Tenemos entonces que el coste medio por unidad de tiempo para las empresas en S es:

$$a\frac{d_1}{Q_1} + \sum_{i\in S} h_S \frac{Q_i}{2}.$$

Substituyendo $Q_i = d_i Q_1/d_1$ se expresa el coste como una función de Q_1 y tenemos:

$$a\frac{d_1}{Q_1} + \sum_{i\in S} h_S \frac{d_i Q_1}{2d_1}.$$

El mínimo del coste se alcanzará si:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2ad_1^2}{h_S \sum_{j\in S} d_j}}$$

por lo tanto,

$$Q_i = \frac{d_i}{d_1} Q_1 = \sqrt{\frac{2ad_i^2}{h_S \sum_{j\in S} d_j}}$$

para todo $i \in S$. El coste mínimo por unidad de tiempo de la coalición S es

$$\sqrt{2ah_S \sum_{i\in S} d_i}.$$

Una situación de coste de almacenamiento esta descrita por la tupla $\{N, a, \{h_i, d_i\}_{i\in N}\}$. Dada una situación de coste de almacenaje, podemos definir el correspondiente juego de coste de almacenaje (N, c_h) como el juego que asigna a la coalición su coste mínimo $S \subset N$ *y* $c_h(\emptyset) = 0$. Estos juegos son subaditivos, i.e., para todas las coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$ se tiene que $c_h(S) + c_h(T) \geq c_h(S + T)$.

Como en el caso de los juegos de coste de almacenaje, podemos definir una regla para asignar el coste a la coalición mayor. La regla $p(c_h)$ divide el coste de la coalición mayor proporcionalmente a las demandas. Esto significa que para $i \in N$,

$$p_i(c_h) = \frac{d_i}{\sum\limits_{j \in N} d_j} c_h(N) = \frac{d_i}{\sum\limits_{j \in N} d_j} \sqrt{2ah_N \sum_{j \in N} d_j}.$$

Teorema 1.4. *Sea $\{N, a, \{h_i, d_i\}_{i \in N}\}$ una situación de coste de almacenaje. Entonces la regla proporcional $p(c_h)$ es una asignación del núcleo del correspondiente juego de coste de almacenaje y se puede llegar a ella a través de un PMAS.*

Demostración: Por definición de la regla $p(c_h)$ tenemos que $\sum\limits_{i \in N} p_i(c_h) = c_h(N)$. También se tiene que

$$\sum_{i \in S} p_i(c_h) = \frac{\sum\limits_{i \in S} d_i}{\sum\limits_{j \in N} d_j} \sqrt{2ah_N \sum_{j \in N} d_j} = \sum_{i \in S} d_i \sqrt{\frac{2ah_N}{\sum\limits_{j \in N} d_j}}$$

$$\leq \sum_{i \in S} d_i \sqrt{\frac{2ah_N}{\sum\limits_{j \in S} d_j}} = \sqrt{2ah_N \sum_{j \in S} d_j} \leq \sqrt{2ah_S \sum_{j \in S} d_j} = c_h(S).$$

Por lo tanto, $p(c_h) \in C(c_h)$. De forma similar a como hicimos en el párrafo anterior podemos definir un PMAS y tal que $y_{iN} = p_i(c_h)$ para todo $i \in N$. $\square$

Si un juego de coste es cóncavo entonces todos sus vectores marginales pertenecen al núcleo. Como los juegos de costes de almacenaje no son necesariamente cóncavos, podría haber vectores marginales que no están en el núcleo. Sin embargo, veremos que los juegos de coste de almacenaje son permutacionalmente cóncavos, lo que implica que al menos un vector marginal esta en el núcleo.

Para demostrar la implicación anterior antes debemos definir el siguiente concepto, que fue introducido en Granot y Huberman(1982) y estudiado en Driessen(1988). Sea $\Pi(N)$ un conjunto de permutaciones del conjunto de jugadores N. Para todo $\sigma \in \Pi(N)$, $\sigma(i)$ denota la posición del jugador $i \in N$ en el pedido σ. Sea P_i^σ el conjunto de jugadores que van antes que el jugador i con respecto al pedido σ. El conjunto $\bar{P}_i^\sigma$ se obtiene de P_i^σ al añadir el jugador i. Por lo tanto $P_i^\sigma = \{j \in N \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$ y $\bar{P}_i^\sigma = \{j \in N \mid \sigma(j) \leq \sigma(i)\} = P_i^\sigma \cup \{i\}$. Definiendo para todo $\sigma \in \Pi(N), \sigma(0) = 0$ *y* $P_0^\sigma = \emptyset$.

Se dice que un juego de coste (N, c) es permutacionalmente cóncavo respecto de un pedido $\sigma \in \Pi(N)$ si satisface $c(\bar{P}_i^\sigma \cup R) - c(\bar{P}_i^\sigma) \geq c(\bar{P}_j^\sigma \cup R) - c(\bar{P}_j^\sigma)$ para todo $i, j \in N \cup \{0\}$ y todo $R \subset$ N tal que $\sigma(i) \leq \sigma(j)$ y $R \subset N \setminus \bar{P}_j^\sigma$. Un juego se dice que es permutacionalmente cóncavo si existe un pedido $\sigma \in \Pi(N)$ tal que el juego es permutacionlmente cóncavo respecto del pedido σ. El vector marginal $x^\sigma(c) \in \mathbb{R}^N$ respecto del pedido σ en el juego de coste (N, c) viene dado por $x_i^\sigma(c) = c(\bar{P_i^\sigma}) - c(P_i^\sigma)$ para todo $i \in N$. Granot y Huberman(1982) mostraron que si el juego (N, c) es permutacionalmente cóncavo con respecto al pedido $\sigma \in \Pi(N)$ entonces $x^\sigma(c) \in C(c)$. En el siguiente teorema veremos que los juegos de coste de almacenaje son permtacionalmente cóncavos entonces a partir de este resultado, sabremos que existe al menos un vector marginal en el núcleo.

Teorema 1.5. *Los juegos de coste de almacenaje son permutacionalmente cóncavos.*
Demostración: Sea (N, c_h) un juego de coste de almacenaje. Sin perdida de generalidad enumeramos los jugadores desde 1 hasta n, $N = \{1, 2, ..., n\}$,de modo que el coste de almacenaje por unidad de tiempo de todos los jugadores forma una secuencia no decreciente, i.e., $h_1 \leq h_2 \leq ... \leq h_n$. Tomemos $\sigma \in \Pi(N)$ tal que $\sigma(i) = i$ para todo $i \in N$.

Mostraremos que (N, c_h) es permutacionalmente cóncavo respecto de este pedido y por lo tanto (N, c_h) es permutacionalmente cóncavo.

Sea $i, j \in N \cup \{0\}$, $\sigma(i) \leq \sigma(j)$ *y* $R \subset N \setminus \bar{P_j^\sigma}$. Entonces $i \leq j$ ya que $\sigma(k) = k$ para todo $k \in N \cup \{0\}$. El juego $(N, \bar{c})$ donde $\bar{c}(S) = \sqrt{\sum_{j \in S} d_j}$ para todo $S \subset N$, es un juego cóncavo, es decir, $\bar{c}(S \cup U) - \bar{c}(S) \geq \bar{c}(T \cup U) - \bar{c}(T)$ para todo $S \subset T \subset N$ y para todo $U \subset N \setminus T$. Tomamos $S = \bar{P_i^\sigma}, T = \bar{P_j^\sigma}, U = R$. Entonces tenemos que $S \subset T$ como $\sigma(i) \leq \sigma(j)$, $U \subset N \setminus T$ y

$$\sqrt{\sum_{k \in \bar{P_i^\sigma} \cup R} d_k} - \sqrt{\sum_{k \in \bar{P_i^\sigma}} d_k} \geq \sqrt{\sum_{k \in \bar{P_j^\sigma} \cup R} d_k} - \sqrt{\sum_{k \in \bar{P_j^\sigma}} d_k}. \tag{1.5}$$

Tenemos que ver que $c_h(\bar{P_i^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_i^\sigma}) \geq c_h(\bar{P_j^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_j^\sigma})$. Distinguimos tres casos:

Caso 1: *i=0, j=0* entonces $\bar{P_i^\sigma} = \bar{P_j^\sigma} = \emptyset$ y

$$c_h(\bar{P_i^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_i^\sigma}) = c_h(R) - c_h(\emptyset) = c_h(\bar{P_j^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_j^\sigma}).$$

Caso 2: *i=0, j>0* entonces $\bar{P_i^\sigma} = \emptyset$ y $\bar{P_j^\sigma} = \{1, 2, ..., j\}$. Como $1 \in \bar{P_j^\sigma}$ y $1 \notin R$ tenemos que $h_{\bar{P_j^\sigma}} = h_{\bar{P_j^\sigma} \cup R} = h_1$ *y* $h_R \geq h_1$. Multiplicando ambos lados de (1.5) por $\sqrt{2ah_R}$ tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{2ah_R \sum_{k \in R} d_k} &\geq \sqrt{2ah_R \sum_{k \in \bar{P_j^\sigma} \cup R} d_k} - \sqrt{2ah_R \sum_{k \in \bar{P_j^\sigma}} d_k} \\ &\geq \sqrt{2ah_1 \sum_{k \in \bar{P_j^\sigma} \cup R} d_k} - \sqrt{2ah_1 \sum_{k \in \bar{P_j^\sigma}} d_k}\end{aligned}$$

y esto es igual a $c_h(R) - c_h(\emptyset) \geq c_h(\bar{P_j^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_j^\sigma})$.

Caso 3: $0 < i \leq j$ entonces $1 \in \bar{P_i^\sigma}$ y $1 \in \bar{P_j^\sigma}$ entonces, $h_{\bar{P_i^\sigma}} = h_{\bar{P_i^\sigma}\cup R} = h_{\bar{P_j^\sigma}} = h_{\bar{P_j^\sigma}\cup R} = h_1$. Multiplicando ambos lados de (1.5) por $\sqrt{2ah_1}$ tenemos

$$\sqrt{2ah_1 \sum_{k\in\ \bar{P_i^\sigma}\ \cup R} d_k} - \sqrt{2ah_1 \sum_{k\in\ \bar{P_i^\sigma}} d_k} \geq \sqrt{2ah_1 \sum_{k\in\ \bar{P_j^\sigma}\ \cup R} d_k} - \sqrt{2ah_1 \sum_{k\in\ \bar{P_j^\sigma}} d_k}$$

que es $c_h(\bar{P_i^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_i^\sigma}) \geq c_h(\bar{P_j^\sigma} \cup R) - c_h(\bar{P_j^\sigma})$.

Esto muestra que se satisface la condición para que un juego de coste sea permutacionalmente cóncavo. □

Ejemplo 1.6. En este ejemplo, consideraremos tres restaurantes, *restaurante A*, *restaurante B* y *restaurante C*, de forma abreviada (A,B,C) que están en el mismo barrio de una ciudad. Todos los restaurantes usan patatas para preparar alguno de sus platos y tienen que tener siempre patatas disponibles en su despensa, para que en caso de que un cliente pida un plato que lleve patatas poder servirlo. Para obtener esta meta, cada restaurante tiene una despensa o almacén en el que guarda todos sus productos entre los que se encuentran las patatas. A lo largo del tiempo los restaurantes han aprendido cuantas patatas necesitan de media a lo largo de un mes. A necesita 250 kg al mes, B necesita 180 kg al mes y C necesita 360 kg al mes . Las patatas ocupan un porcentaje de la despensa de la que disponen los restaurantes y por lo tanto tienen un coste de almacenaje que supone 10€, 20€ y 10€ respectivamente. La demanda individual y los costes de almacenaje son información privada. El coste de hacer un pedido de patatas es de 2€. Haré un modelo de esta situación como un juego de inventarios. Si los restaurantes trabajan de forma individual, A pedirá $\dot{Q}_A = \sqrt{2ad_A/h_A} = 10$ kg de patatas por ciclo de longitud $\dot{Q}_A/d_A = 0.04$ meses y hacen $m_A = d_A/\dot{Q}_A = 25$ pedidos al mes. Su coste mensual es igual a 60€. B pedirá $\dot{Q}_B = \sqrt{2ad_B/h_B} = 6$ kg de patatas por ciclo de longitud $\dot{Q}_B/d_B = 0.0\overline{3}$ meses y hacen $m_B = d_B/\dot{Q}_B = 30$ pedidos al mes. Su coste mensual es igual a 80€. C pedirá $\dot{Q}_C = \sqrt{2ad_C/h_C} = 12$ kg de patatas por ciclo de longitud $\dot{Q}_C/d_C = 0.0\overline{3}$ meses y hacen $m_C = d_C/\dot{Q}_C = 30$ pedidos al mes. Su coste mensual es igual a 70€. La función característica del juego (N, c_0) es:

$$\begin{aligned}
c_0(\{A\}) &= 60 & c_0(\{A,B\}) &= 100 & c_0(\{A,B,C\}) &= 122.06\\
c_0(\{B\}) &= 80 & c_0(\{A,C\}) &= 92.19 & &\\
c_0(\{C\}) &= 70 & c_0(\{B,C\}) &= 106.30 & &
\end{aligned}$$

Si todos los restaurantes trabajan de manera conjunta, la longitud del ciclo es igual a 0,02 meses, que es más pequeña que cualquier otra longitud individual óptima del ciclo. La regla $r(c_0)$ asigna el coste total $c_v(N)$ de forma proporcional al cuadrado del coste individual, por lo tanto asigna (29.49, 52.43, 40.14) respectivamente a cada restaurante. Si hubiera revelación total de la información, estos valores no cambiarían. Todos los cálculos se basan en el en el numero óptimo de veces que se hace un pedido, m_i, para todas las empresas $i \in N$. Cada m_i depende de la demanda y el coste de almacenaje de cada empresa ya que $m_i = \sqrt{d_i h_i/(2a)}$.

Capítulo 2

Los sistemas de inventario y transporte

2.1. Introducción

En el contexto del comercio moderno, el franquiciamiento es el proceso de expandir un negocio donde una empresa (franquiciador) otorga una licencia a una empresa independiente (franquiciado) para vender sus productos o prestar sus servicios. Cada parte de la franquicia renuncia a algunos derechos legales para ganar otros derechos y obtener beneficios. El franquiciador aumenta su número de puntos de venta y recibe ingresos adicionales y el franquiciado abre un negocio establecido con una alta probabilidad de éxito. El franquiciamiento ha demostrado ser una forma poderosa y eficiente de construir un negocio y de crear empleo tanto a nivel local como a nivel internacional.

Un problema importante a la hora de establecer un franquiciamiento es la distribución de productos desde el franquiciador al franquiciado. En este contexto, son especialmente interesantes los modelos de inventario centralizados. Consideremos un conjunto finito de franquiciados que distribuyen un único producto fabricado por el franquiciador. Los franquiciados realizan sus pedidos según modelos EOQ (ver mas detalles en Zipkin (2000). En modelos EOQ, las empresas (franquiciados en este caso) hacen frente a dos tipos de coste principales: costes fijos por pedido y costes de almacenaje. Cuando hay dos o más empresas, y sus costes fijos se pueden escribir como la suma de sus componentes, una debido a los costes comunes de instalación y otra dependiente de los costes de transporte de la empresa, entonces tenemos lo que llamamos un sistema de transporte de inventarios. Con el objetivo de estudiar uno de esos sistemas y proponer políticas óptimas para los franquiciados, debemos usar un modelo de inventario. Si permitimos cooperación entre los franquiciados y la realización de pedidos conjuntos, entonces debemos usar un sistema de inventario centralizado. En este caso también debemos establecer una regla de asignación de costes entre los franquiciados. En esta sección introduciremos y analizaremos un modelo de inventario centralizado y una regla para abordar el problema del sistema de transporte de inventarios. Obviamente, aunque vayamos a basar nuestro problema en el ámbito de los franquiciados, sus posibles aplicaciones pueden ser extendidas a otras áreas.

Para ser más precisos, en este capítulo abordaremos el problema de la asignación de los costes que surge en un sistema de transporte de inventario con un único artículo y múltiples agentes que hace un pedido conjunto usando un sistema EOQ que aparece en Fiestras-Janeiro et al. (2011). En nuestro problema, el coste fijado de pedido de cada agente es una suma de la primera componente (común para todos los agentes), que refleja el coste de instalación, sumado a una segunda componente que depende de la distancia entre el agente y el proveedor. Asumimos que los agentes están ubicados en una ruta lineal, en el sentido de que, si algún subgrupo de agentes hace un pedido conjunto, su coste fijado es la suma de la primera componente y la segunda componente del agente del grupo más alejado del proveedor. Para este sistema de transporte de inventarios, introduciremos y caracterizaremos una regla que nos permita asignar el coste generado por el pedido conjunto.

Para analizar nuestro problema de asignación de costes, usaremos teoría de juegos cooperativos. En particular, modelaremos nuestro problema como un juego de costes y estudiaremos cuando es beneficiosa la cooperación y cuando es no vacío el núcleo del juego. También propondremos una regla de asignación de costes que siempre proveerá asignaciones en el núcleo del juego de costes.

En la primera sección introduciremos el sistema de transporte de inventarios y estudiaremos condiciones bajo las cuales la cooperación entre agentes es beneficiosa. Después analizaremos las correspondientes clases de juegos de costes cooperativos y daremos una condición suficiente para que los núcleos de los juegos de esta clase sean no vacíos. En la segunda sección estudiaremos y caracterizaremos las reglas de asignación de costes en este marco.

2.2. Sistemas de transporte de inventario

Un sistema de transporte de inventario es una situación multi-agente donde cada agente se enfrenta a un problema EOQ básico y donde el coste fijo por pedido de cada agente es la suma de dos componentes, la primera es común a todos los agentes y la segunda es proporcional a la distancia entre el agente y el proveedor. n denota el conjunto finito de agentes. Los parámetros asociados a cada agente $i \in N$ en uno de estos sistemas son:

- $a > 0$, la primera componente, común a todos los agentes, del coste fijo por pedido.
- $a_i > 0$,la segunda componente del coste fijado, que es la distancia de i al proveedor.
- $d_i > 0$, la demanda ,determinista por unidad de tiempo.
- $h_i > 0$, el coste de almacenaje por artículo y por unidad de tiempo.

Cada agente $i \in N$ tiene que satisfacer la demanda a tiempo. Para obtener este objetivo, i matiene su stock haciendo pedidos de tamaño $Q_i > 0$. Como hemos visto en la capítulo anterior el tamaño óptimo de pedido y el coste mínimo por agente i son:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2(a+a_i)d_i}{h_i}}$$

$$C^i(Q_i^*) = \sqrt{2(a+a_i)d_i h_i}.$$

Sin embargo, en una situación multi-agente de inventario como esta, los agentes de todas las coaliciones $S \subseteq N$ pueden cooperar haciendo pedidos conjuntos. En este punto haremos dos suposiciones.

1. Todos los agentes se colocan en la misma ruta lineal. Con esto nos referimos a que si un grupo de agentes S realiza un pedido común, su coste fijo es la suma de la primera componente a y la segunda componente del agente de S cuya distancia sea máxima respecto del proveedor.

2. El proveedor acepta e incluso fomenta que los agentes formen coaliciones al inicio de cada trimestre. Pero, por razones de organización, una vez se forma una coalición S, el coste fijo que el proveedor cobra a esta coalición por cada pedido es $a + a_S$. Esto significa que aunque en un pedido particular un agente $i \in S$ no compre ninguna unidad del artículo, el proveedor seguirá cobrando $a + a_S$ a la coalición S.

Queremos responder a dos preguntas: A) bajo qué circunstancias puede ser razonable que los agentes en N formen una coalición y B) en el caso de que la coalición se forme, como se deberían repartir el coste total los miembros de la coalición.

Tomemos ahora un sistema de transporte de inventarios $(N, I) = \big(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i\in N}\big)$. Como hemos visto en el capítulo anterior y como consecuencia de la segunda suposición si se forma una coalición S para obtener el coste medio total óptimo por unidad de tiempo todos los miembros de la coalición deberán coordinar sus ciclos, i.e. $Q_i/d_i = Q_j/d_j \ \forall\ i,j \in S$. El coste medio por unidad de tiempo para S y el tamaño de pedido Q_i viene dado por

$$\begin{aligned} C(S, Q_i) &= \frac{(a + a_S)d_i}{Q_i} + \sum_{j \in S} h_j \frac{Q_j}{2} \\ &= \frac{(a + a_S)d_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2d_i} \sum_{j \in S} h_j d_j. \end{aligned}$$

El tamaño óptimo del pedido del agente $i \in S$ es

$$\hat{Q}_i = \sqrt{\frac{2(a + a_S)d_i^2}{\sum\limits_{j \in S} h_j d_j}}.$$

El número óptimo de pedidos por unidad de timepo es

$$\hat{m}_s = \frac{d_i}{Q_i} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j \in S} h_j d_j}{2(a + a_S)}},$$

y el coste total medio óptimo por unidad de tiempo es

$$C(S, \hat{Q}_i) = \sqrt{2(a + a_S) \sum_{j \in S} h_j d_j} = 2(a + a_S)\hat{m}_s.$$

Estos cálculos nos permiten asociar un juego de costes a cada sistema de transporte de inventario. Tenemos que para cada coalición $S \subseteq N$, *c(S)* es el coste mínimo de coste del proyecto que cubre las necesidades de los agentes de S. Para un sistema de transporte de inventarios $(N, I) = \big(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N}\big)$, se puede construir el juego de costes (N, c) que viene dado por:

$$c(S) := C(S, \hat{Q}_i) = \sqrt{2(a + a_S) \sum_{j \in S} h_j d_j} = 2(a + a_S)\hat{m}_s.$$

Entonces se dice que el juego de costes (N, c) es un juego de transporte de inventario si existe un sistema de transporte de inventario (N, I) cuyo juego de coste asociado es (N, c). Un juego de inventario es cualquier juego de coste (N, c) que satisfaga que para todo $S \subset N$,$c(S) \geq 0$ y , además, $c(S)^2 = \sum\limits_{i \in S} c(i)^2$.

Un juego de coste es subaditivo si nunca es beneficioso que una coalición se divida en varias coaliciones más pequeñas. Formalmente, para cada $S, T \subset N$ tal que $S \cap T = \emptyset$, se tiene que $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$. Este concepto nos ayudara a responder a la primera de las preguntas que nos planteábamos ya que cuando el juego de coste correspondiente sea subaditivo será razonable que se forme la gran coalición N.

El siguiente teorema proporciona una condición necesaria y suficiente para la subaditividad de un juego de transporte de inventario.

Teorema 2.1. *Consideremos un juego de transporte de inventario (N, c) asociado a un sistema de transporte de inventario $(N, I) = \big(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i\in N}\big)$. (N, c) es subaditivo sí y solo sí*

$$\hat{m}_t \geq \frac{1}{2}\frac{a_T - a_S}{a + a_T}\hat{m}_S$$

para todo $S, T \subset N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ y $a_S \leq a_T$.

Demostración: Sea $S, T \subset N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ y $a_S \leq a_T$. Tenemos que probar que

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) \Longleftrightarrow \hat{m}_t \geq \frac{1}{2}\frac{a_T - a_S}{a + a_T}\hat{m}_S.$$

Como $c(S) \geq 0$,

$$\begin{aligned} c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) &\Longleftrightarrow c(S)^2 + c(T)^2 + 2c(S)c(T) \geq c(S \cup T)^2 \\ &\Longleftrightarrow 2c(S)c(T) \geq c(S \cup T)^2 - c(S)^2 - c(T)^2. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} c(S \cup T)^2 - c(S)^2 - c(T)^2 &= 2(a + a_{S\cup T})\sum_{j\in S\cup T} h_j d_j - 2(a + a_S)\sum_{j\in S} h_j d_j - 2(a + a_T)\sum_{j\in T} h_j d_j \\ &= 2(a + a_T)\sum_{j\in T} h_j d_j - 2(a + a_S)\sum_{j\in S} h_j d_j \\ &= 2(a_T - a_S)\sum_{j\in S} h_j d_j. \end{aligned}$$

Entonces,

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) \Longleftrightarrow c(S)c(T) \geq (a_T - a_S)\sum_{j\in S} h_j d_j.$$

Reescribiendo el lado derecho de la equivalencia tenemos que

$$4(a + a_S)(a + a_T)\hat{m}_s\hat{m}_T \geq (a_T - a_S)2(a + a_S)\hat{m}_s^2 \Longleftrightarrow \hat{m}_t \geq \frac{1}{2}\frac{a_T - a_S}{a + a_T}\hat{m}_S.$$

□

Más o menos, esta condición quiere decir que la cooperación es beneficiosa cuando los agentes remotos no son "clientes raros" en el sentido de que sus números óptimos de pedidos individuales no son muy pequeños en comparación con el numero óptimo de pedidos individuales de otros agentes.

En la siguiente sección responderemos a la segunda cuestión: si tenemos un sistema de transporte de inventarios cuyo juego asociado (N, c) es subaditivo, i.e., un sistema de transporte de inventario en el cual es razonable que los agentes de N formen una coalición, ¿Como debería asignarse $c(N)$ entre los miembros de N?

2.3. Una regla de asignación de costes

Empezaremos esta sección con un resultado del núcleo de un juego de transporte de inventario. Tomemos un juego de transporte de inventario (N, c) y asumamos que los agentes de N forman una coalición para los pedidos. Al igual que con los juegos de coste de pedidos, queremos asignar $c(N)$ a los miembros de N sería conveniente que la asignación pertenezca al núcleo de (N, c) que como ya hemos visto para juegos de coste de pedidos viene dado por:

$$C(N,c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N),\ \sum_{i \in S} x_i \leq c(S)\ \forall S \subset N \right\}.$$

Para realizar la demostración del siguiente resultado relacionado con el carácter no vacío de juegos de inventario subaditivos, es necesario introducir algunos conceptos previamente. Sea (N, c) un juego de transporte de inventario subaditivo asociado a un sistema de transporte de inventarios $(N, I) = \big(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N}\big)$. Diremos que $i \in N$ es un agente extremo de (N, I) si $a_i = a_N$, i.e., si la distancia al proveedor es mayor o igual que la distancia del proveedor al resto de agentes. Denotaremos a $\Pi(N)$ un conjunto de permutaciones del conjunto de jugadores N. Para todo $\sigma \in \Pi(N)$, $\sigma(i)$ denota la posición del jugador $i \in N$ en el pedido σ. Sea P_i^σ el conjunto de jugadores que van antes que el jugador i con respecto al pedido σ, es decir, $P_i^\sigma = \{j \in N \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$. Denotaremos por σ^{-1} la inversa de σ. El vector marginal respecto del pedido σen el juego de coste (N, c) viene dado por $m^\sigma(N, c) = (m_i^\sigma(N, c))_{i \in N}$ donde $m_i^\sigma(N, c) = c(P_i^\sigma \cup \{i\}) - c(P_i^\sigma)$ para todo $i \in N$. Para cada vector marginal $m^\sigma(N, c)$ se tiene que $\sum_{i \in N} m_i^\sigma(N, c) = c(N)$. Entonces cada vector marginal de (N, c) es una asignación de $c(N)$ que asigna a cada i su contribución a su predecesor siguiendo un orden particular.

Teorema 2.2. *Consideremos un juego de transporte de inventario subaditivo (N, c). Entonces (N, c) es no vacío.*

Demostración Esta demostración consiste en probar que $m^\sigma(N, c)$ es un vector marginal y su orden σ satisface que $\sigma^{-1}(1)$ es un agente extremo de (N, I), y por lo tanto $m^\sigma(N, c)$ pertenece al núcleo de (N, c).

Tomemos un juego de transporte de inventario (N, c) asociado a un sistema de transporte de inventarios $(N, I) = \big(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N}\big)$. Tomemos ahora un vector marginal $m^\sigma(N, c)$ tal que σ satisface que $\sigma^{-1}(1)$ es un agente extremo de (N, I). Tenemos que probar que $m^\sigma(N, c)$ pertenece al núcleo de (N, c). Para hacer esto, es suficiente ver que para cada coalición no vacía $S \subset N$, se tiene que $\sum_{i \in S} m_i^\sigma(N, c) \leq c(S)$. Distinguiremos dos casos :

(a) S contiene al agente extremo $\sigma^{-1}(1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in S} m_i^{\sigma}(N,c) &= c(\sigma^{-1}(1)) + \sum_{j\in S\setminus\{\sigma^{-1}(1)\}} c(P_j^{\sigma}\cup\{j\}) - c(P_j^{\sigma}) \\
&= c(\sigma^{-1}(1)) + \sum_{j\in S\setminus\{\sigma^{-1}(1)\}} \left(\sqrt{2(a+a_N)\sum_{i\in P_j^{\sigma}\cup\{j\}} h_i d_i} - \sqrt{2(a+a_N)\sum_{i\in P_j^{\sigma}} h_i d_i}\right) \\
&= \sum_{j\in S}\sqrt{2(a+a_N)}\left(\sqrt{\sum_{i\in P_j^{\sigma}\cup\{j\}} h_i d_i} - \sqrt{\sum_{i\in P_j^{\sigma}} h_i d_i}\right) \\
&\leq \sum_{j\in S}\sqrt{2(a+a_N)}\left(\sqrt{\sum_{i\in (P_j^{\sigma}\cup\{j\})\cap S} h_i d_i} - \sqrt{\sum_{i\in P_j^{\sigma}\cap S} h_i d_i}\right) = c(S)
\end{aligned}$$

donde la desigualdad implica que $\sqrt{x+y}-\sqrt{x}$ es decreciente en x para todo $y \in [0,\infty)$

(b) S no contiene al agente extremo $\sigma^{-1}(1)$. En este caso denotaremos $\bar{S} = S \cup \{\sigma^{-1}(1)\}$ .Usando el mismo razonamiento que en (a), tenemos que

$$\sum_{i\in \bar{S}} m_i^{\sigma}(N,c) \leq c(\bar{S}).$$

Ahora teniendo en cuenta que $m_{\sigma^{-1}(1)}^{\sigma}(N,c) = c(\sigma^{-1}(1))$ y que c es subaditivo, se tiene que

$$\sum_{i\in S} m_i^{\sigma}(N,c) + c(\sigma^{-1}(1)) = \sum_{i\in \bar{S}} m_i^{\sigma}(N,c) \leq c(\bar{S}) \leq c(S) + c(\sigma^{-1}(1))$$

lo que implica que $\sum_{i\in S} m_i^{\sigma}(N,c) \leq c(S)$. $\square$

Por la demostración anterior sabemos que todos los vectores marginales son asignaciones en el núcleo, usaremos esto para definir nuestra regla de asignación.

Primero, veamos a lo que nos referimos por regla de asignación. Nuestro objetivo es proponer para cada sistema de transporte de inventario cuyo juego asociado (N, c) es subaditivo una asignación de $c(N)$ a través de los agentes de N. Una regla de asignación es un mecanismo con el que logramos dicho objetivo. Formalmente, una regla de asignación para un sistema de transporte de inventarios es una aplicación Φ que se asocia a cada sistema de transporte de inventario (N, I), con un juego de costes asociado (N, c) un vector $\Phi(N, I) = (\Phi_i(N, I))_{i\in N}$ que satisface que $\sum_{i\in N} \Phi_i(N, I) = c(N)$. Ahora definiremos una regla de asignación que propone siempre asignaciones en el núcleo del correspondiente juego de transporte de inventario cuando este es subaditivo. Tomemos un sistema de transporte de inventario (N, I) y consideremos todos los pedidos $\sigma \in \Pi(N)$ que inviertan el orden dado por las distancias de los agentes al proveedor, i.e., todos los pedidos $\sigma \in \Pi(N)$ tales que $\sigma(i) \leq \sigma(j)$ implica que a_i es mayor o igual que a_i (siendo a_i, a_j las distancias de i, j al proveedor respectivamente) para todo $i, j \in N$. Denotamos por $\Pi(N, I)$ al conjuntos de estos pedidos en (N, I). Definiremos nuestra regla de asignación como la regla que propone para cada sistema de transporte de inventario (N, I) la media de los vectores marginales asociados a los pedidos de $\Pi(N, I)$. A esta regla la llamaremos la regla de la línea y su definición formal es:

La regla de la línea es la regla de asignación que asocia a cada sistema de transporte de inventarios (N, I), con juego de costes asociado (N, c), la asignación $L(N, I) = (L_i(N, I)_{i\ \in\ N})$ dada por

$$L_i(N, I) = \frac{1}{\Pi(N, I)} \sum_{\sigma \in \Pi(N,I)} m_i^{\sigma}(N, c) \tag{2.1}$$

para todo $i \in\ N$. Obsérvese que todos los pedidos $\sigma \in \Pi(N, I)$ satisfacen que $\sigma^{-1}(1)$ es un agente extremo de (N, I), y entonces $m^{\sigma}(N, c) \in\ C(N, c)$ cuando (N, c) es un juego subaditivo. Como $C(N, c)$ es un conjunto convexo, entonces $L(N, I) \in\ C(N, c)$ cuando (N, c) es subaditivo. Ahora veremos dos propiedades que están relacionas con la regla de la línea, en el sentido de que la caracterizan dentro del conjunto de posibles reglas para sistema de transporte de inventarios. Las dos propiedades se refieren a las distancias entre los agentes y el proveedor. Estas distancias son la característica que distingue a este modelo de otros modelos de inventario centralizado. La primera propiedad de equidad que dice que si dos agentes están a la misma distancia del proveedor entonces tiene que ser tratados de la misma manera.

Tratamiento equilibrado para agentes igualmente distantes (BT). Una regla de asignación ϕ para sistemas de transporte de inventario satisface BT si se verifica lo siguiente. Sea $(N, I) = \left(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N}\right)$ un sistema de transporte de inventario y sean $j, k \in N$ con $a_j = a_k$. Para cada $l \in N$, denotemos por $(N \backslash \{l\}, I)$ el sistema de transporte de inventario $\left(N \backslash \{l\}, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N\ \backslash \{l\}}\right)$. Entonces:

$$\phi_j(N, I) - \phi_j(N \backslash \{k\}, I) = \phi_k(N, I) - \phi_k(N \backslash \{j\}, I).$$

La segunda propiedad, Participación Gratuita de Agentes Sin Coste (FP), dice que si se ha formado un grupo y un conjunto de nuevos agentes entra al grupo, esta incorporación no afectara la asignación de los agentes en el grupo original si los nuevos agentes están más cerca del proveedor que todos los demás agentes. La idea bajo esta propiedad es que estos nuevos agentes se pueden considerar como agentes con coste cero, porque no producen ningún cambio ni al grupo original o ni a ningún subgrupo de esta, en el sentido de que la ruta de transporte se mantiene sin variación después de su incorporación. Procedemos a dar una definición más rigurosa de la propiedad.

Participación Gratuita de Agentes Sin Coste (FP). Una regla de asignación ϕ para un sistema de transporte de inventario satisface FP si se verifica la siguiente condición. Sea $(N \cup N', I_{N \cup N'}) = \big(N \cup N', a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N \cup N'}\big)$ un sistema de transporte de inventario tal que $N \cap N' = \emptyset$ y $a_{N'} < a_i$ para todo $i \in N$. Denotemos por (N, I) el sistema de transporte de inventario $\big(N, a, \{a_i, d_i, h_i\}_{i \in N}\big)$. Entonces:

$$\phi_j(N \cup N', I_{N \cup N'}) = \phi_j(N, I) \tag{2.2}$$

para todo $j \in N$ Estas dos propiedades caracterizan a la regla de la línea. Como dice el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *La regla de la linea es la unica regla para sistemas de transporte de inventario que satisface BF y FP*
Demostración: Para más detalles, ver el Apéndice en Fiestras-Janeiro et al. (2011).

Capítulo 3

Los problemas de inventario multi-producto

3.1. Introducción

El análisis del comportamiento cooperativo en situaciones de inventario ha sido estudiado durante los últimos años. Formalmente, el inventario es la cantidad de bienes almacenados por una empresa en un instante de tiempo. En términos económicos, representa una inversión para la compra y mantenimiento del producto en stock. Cada empresa debe tener el nivel de inventario adecuado de producto para satisfacer las necesidades de sus clientes y, por lo tanto, debe manejarse de manera óptima. Los modelos de problemas de inventario se aplican con el objetivo de mantener el nivel de inventario óptimo y así reducir los costes.

Los modelos más básicos de problemas de inventario, la cantidad económica de pedido (EOQ) y el lote económico de producción (EPQ) aparecen en Meca et al. (2003). Sin embargo, cuando se consideran los costes de transporte de los pedidos surgen nuevos sistemas de inventario. Por ejemplo en Dror et al. (1985) usan líneas de transporte comunes y en Fiestras-Janeiro et al. (2011) se incluyen los costes de transporte por pedido nuevo en un modelo básico EOQ. En este capítulo se exponen los resultados que aparecen en Saavedra-Nieves (2020) que expanden el modelo descrito en Fiestras-Janeiro et al. (2011) a una situación con varios artículos. En el capítulo anterior describimos sistemas de inventario en los cuales múltiples agentes realizan un pedido conjunto de un único articulo usando una política EOQ. En ese caso el coste fijo de pedido se divide en dos partes, una que es común para todos los agentes involucrados y otra que depende de la distancia del proveedor al agente. Una suposición principal en el capítulo anterior era que los agentes están situados a lo largo de una ruta lineal. Sin embargo, esta suposición no es realista para la mayoría de las situaciones en el mundo real. Para rutas circulares o cuando los agentes y el proveedor están situados siguiendo un gráfico irregular, la idea de linealidad de la ruta introducida en el capítulo anterior no tiene sentido. En particular, consideraremos la existencia de una función general para determinar el coste de transporte de un nuevo pedido.

En este capítulo trataremos una variación del problema presentado en el capítulo anterior. Primero, abandonamos el enfoque de la variación de los costes de transporte en pedidos nuevos. Cada agente tiene una demanda determinista, un almacén con costes de almacenaje, los agentes no se pueden quedar sin inventario y el tiempo de espera es constante. Ahora analizaremos una situación en la cual los costes de transporte vienen dados por una función general. Por otro lado, parece natural que los agentes tengan un único proveedor para todos sus artículos. Esto no cambia substancialmente el análisis de este tipo de problemas, aunque abre la puerta a la generalización de modelos de inventario previamente mencionados bajo este nuevo enfoque.

El capítulo se estructura como sigue. La segunda sección describe el sistema EOQ multi-item con coste de transporte generales. La tercera sección establece la política óptima de inventario cuando los agentes cooperan. Estudiamos los costes asociados a este problema en la cuarta sección. Las secciones quinta se centra en como se comparten los costes en este escenario y en la sexta analizaremos los escenarios en los cuales se debe formar una coalición.

3.2. Problemas EOQ multi-item de inventario

Un sistema EOQ multi-item con costes de transporte generales es un modelo multi-agente de inventario donde cada agente enfrenta un problema de revisión continua de inventario que también involucra los siguientes supuestos:

- Cada agente tiene una demanda determinista y lineal de varios artículos.
- Los pedidos se realizan cuando el nivel de inventario es cero, y quedarse sin inventario no está permitido.
- Cada agente guarda sus pedidos en un almacén de capacidad ilimitada con un coste extra.
- Todos los agentes están ubicados en una ruta que no es necesariamente lineal. De hecho, el coste por realizar un nuevo pedido tiene dos componentes: una fija y otra variable, que depende de la distancia del agente al proveedor.

- Cada agente tiene que satisfacer la demanda de un conjunto M=*1,...,*m de m artículos diferentes. Con este objetivo los pedidos nuevos están compuestos de varios artículos que tienen un único proveedor.

Asumimos como en los capítulos anteriores que el tiempo de espera es constante (o incluso cero). Denotamos al conjunto finito de agentes por N. Adicionalmente asociamos los siguientes parámetros a cada agente $i \in N$:

- $a > 0$, el coste fijo de realizar un pedido.
- $h_i > 0$, el coste de almacenaje por artículo almacenado.
- $d_{ki} > 0$, la demanda del artículo $k \in M$ que necesita el agente i.
- $p_{ki} > 0$, el coste por unidad del artículo $k \in M$ para el agente i.

Diferenciaremos dos componentes en los costes de pedido cuando un nuevo pedido se realiza. Además de considerar un coste fijo $a > 0$ por cada pedido, también debemos incluir una segunda componente que se refiera a un coste variable. El proveedor cobra una tarifa igual a $a + A(S)$ cuando una coalición $S \subset N$ realiza un pedido. Como en Saavedra-Nieves et al. (2018) asumimos también la existencia de una aplicación A, de 2^N a $\mathbb{R}$. Esta aplicación asigna a cada $S \subseteq N$ el coste $A(S) \geq 0$. Denotamos a esta clase de problemas de inventario por la tupla $\left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i\in N}, \{d_{ki}\}_{k\in M, i\in N}, \{p_{ki}\}_{k\in M, i\in N}\right\}$. Cada agente $i \in N$ tiene que satisfacer las demandas de los artículos a tiempo. Con este objetivo, el agente i almacena pedidos por valor de $\overline{Q}_i > 0$. Utilizando el precio de una unidad k para el agente i, consideramos:

- $\overline{d}_{ki} > 0$, el valor de la demanda del producto $k \in M$ para el agente i.
- $\overline{D}_i > 0$, el valor total de la demanda para el agente i.
- $\overline{Q}_{ki} > 0$, el valor del producto $k \in M$ para el agente i.
- $\overline{Q}_i > 0$, el valor total del pedido para el agente i.

Analizaremos esta clase de problemas en términos del valor de la cantidad de cada artículo en un pedido óptimo.

Análogamente a como se hizo en el modelo EOQ básico, definimos un ciclo como el intervalo de tiempo entre dos pedidos consecutivos, i.e. $\overline{Q}_i/\overline{D}_i$. Además, el valor de $m_i = \overline{D}_i/\overline{Q}_i = \overline{d}_{ki}/\overline{Q}_{ki}$ denota el número de pedidos óptimo por unidad de tiempo. Entonces, el coste medido de pedido por unidad de tiempo viene dado por $\overline{D}_i/\overline{Q}_i(a + A(i))$. Ya que el nivel medio de inventario es $\overline{Q}_i/2$, el coste medio de almacenaje es $h_i\overline{Q}_i/2$. Por lo tanto, el coste medio por unidad de tiempo para el agente i es:

$$C(i, \overline{Q}_i) = \overline{D}_i/\overline{Q}_i(a + A(i)) + h_i\overline{Q}_i/2.$$

Entonces el numero óptimo de pedidos que minimiza los costes de inventario en la expresión anterior es:

$$\overline{Q}_i^* = \sqrt{\frac{2(a + A(i)\overline{D}_i}{h_i}}.$$

Por lo tanto, la longitud óptima del ciclo para el agente i viene dado por

$$\frac{\overline{Q}_i^*}{\overline{D}_i} = \sqrt{\frac{2(a + A(i)}{h_i\overline{D}_i}},$$

el numero óptimo de pedidos por unidad de tiempo es igual a

$$\hat{m}_i = \frac{\overline{D}_i}{\overline{Q}_i^*} = \sqrt{\frac{h_i\overline{D}_i}{2(a + A(i)}}$$

y el coste medio mínimo por unidad de tiempo es:

$$C(i, \overline{Q}_i^*) = \sqrt{h_i\overline{D}_i 2(a + A(i)} = 2(a + A(i))\hat{m}_i.$$

Una vez hemos obtenido el valor óptimo de los pedidos conjuntos para i, determinaremos el numero óptimo de unidades requeridas de cada tipo de artículo k. Considerando que $\frac{\overline{D}_i}{\overline{Q}_i^*} = \frac{\overline{d}_{ki}}{\overline{Q}_{ki}^*}$, el valor de las unidades de k, k=*1,...,m* del agente i vienen dados por:

$$\overline{Q}_{ki}^* = \sqrt{\frac{2\overline{d}_{ki}^2(a + A(i))}{\overline{D}_i h_i}}.$$

Teniendo en cuenta que el coste por unidad del tipo k para i es $p_{ki} = \frac{\overline{d}_{ki}}{q_{ki}}$, se tiene que:

$$Q_{ki}^* = \frac{\overline{Q}_{ki}^*}{p_{ki}} = \sqrt{\frac{2\overline{d}_{ki}^2((a + A(i))}{\overline{D}_i h_i p_{ki}^2}}$$

denota el número de unidades del artículo k pedidas por el agente i al proveedor externo.

3.3. Problemas EOQ multi-item de inventario bajo cooperación

En esta sección asumimos que los agentes involucrados en el problema EOQ multi-item con costes de transporte generales deciden cooperar realizando un pedido conjunto de los artículos a un proveedor externo. Asumimos la formación de una coalición de agentes S, con $S \subseteq N$. La cooperación de los agentes está basada en la siguiente condición impuesta en Meca et al. (2003). Si $\overline{Q}_i/\overline{D}_i$ denota la longitud del ciclo para cada $i \in S$, se satisface que $\overline{Q}_i/\overline{D}_i = \overline{Q}_j/\overline{D}_j$ para cada par de agentes $i, j \in S$. Tomando $j = 1$ para todo $i \in S$, podemos expresar $\overline{Q}_i$ en términos de $\overline{Q}_1$. Esto es

$$\overline{Q}_i = \frac{\overline{D}_i}{\overline{D}_1}\overline{Q}_1.$$

Los pedidos óptimos $\overline{Q}_i^*$ y $\overline{Q}_j^*$ para $i, j \in S$ bajo cooperación satisfacen la condición anterior. El coste medio por unidad de tiempo para los agentes en S se obtiene como la suma de los costes por hacer nuevos pedidos más los costes de almacenaje. Entonces, cuando se realiza un nuevo pedido, el coste medio por unidad de tiempo es $(a + A(S))\overline{D}_1/\overline{Q}_1$. Cada agente almacena sus pedidos en su propio almacén lo cual supone un gasto. La media de los costes de almacenaje es la suma de los costes de almacenaje individuales. Definimos el coste total como:

$$C(\overline{Q}_1, ..., \overline{Q}_s) = (a + A(S))\frac{\overline{D}_1}{\overline{Q}_1} + \sum_{i\in S} h_i \frac{\overline{Q}_i}{2}.$$

Por lo tanto aplicando que $\overline{Q}_i = \frac{\overline{D}_i}{\overline{D}_1}\overline{Q}_1$ se tiene que:

$$C(S, \overline{Q}_1) = (a + A(i))\frac{\overline{D}_1}{\overline{Q}_1} + \frac{\overline{Q}_1}{2\overline{D}_1}\sum_{i\in S} h_i \overline{D}_i.$$

Usando las técnicas de derivación adecuadas, la expresión anterior llega a un mínimo en:

$$\overline{Q}_i^* = \sqrt{\frac{2(a + A(S))\overline{D}_1^2}{\sum_{i\in S} h_i \overline{D}_i}}.$$

Entonces el número óptimo de pedidos para cada agente $i \in S$ es:

$$\overline{Q}_i^* = \sqrt{\frac{2(a + A(S))\overline{D}_i^2}{\sum_{l\in S} h_l \overline{D}_l}},$$

y la longitud del ciclo para cada agente $i \in S$ es:

$$\frac{\overline{Q}_i^*}{\overline{D}_i} = \sqrt{\frac{2(a + A(S))}{\sum_{l\in S} h_l \overline{D}_l}}.$$

El valor de cada uno de los artículos $k \in M$ también satisface que $\frac{\overline{D}_i}{\overline{Q}_i^*} = \frac{\overline{d}_{ki}}{\overline{Q}_{ki}^*}$. Por lo tanto, el valor de cada artículo $k \in M$ para el agente i viene dada por:

$$\overline{Q}_{ki}^* = \sqrt{\frac{2(a + A(S))\overline{d}_{ki}^2}{\sum_{l\in S} h_l \overline{D}_l}}$$

	agente 1	agente 2	agente 3
artículo 1	5	10	8
artículo 2	0	2	4
artículo 3	8	2	40

Tabla 3.1: Coste de los tres tipos de artículo para cada agente.

y la cantidad de cada artículo $k \in M$ para el agente i viene dada por:

$$Q^*_{ki} = \sqrt{\frac{2(a + A(S))\overline{d}^2_{ki}}{p^2_{ki} \sum_{l \in S} h_l \overline{D}_l}}$$

respectivamente. Además el número óptimo de pedidos para la coalición S es

$$\hat{m}_s = \frac{\overline{D}^*_i}{\overline{Q}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{l \in S} h_l \overline{D}_l}{2(a + A(S))}}$$

de tal forma que $C(S, \overline{Q}^*_i) = (a + A(S))\frac{\overline{D}_1}{\overline{Q}^*_1} + \sum_{i \in S} h_i \frac{\overline{Q}_i}{2}$ denota el coste medio de inventario por unidad de tiempo. Como $\overline{Q}^*_i = \sqrt{\frac{2(a+A(S))\overline{D}^2_i}{\sum_{l \in S} h_l \overline{D}_l}}$ para todo $i \in S$, el coste se puede reescribir como

$$C(S, \overline{Q}^*_i) = \sqrt{2(a + A(S)) \sum_{i \in S} h_i \overline{D}_i} = 2(a + A(S))\hat{m}_s.$$

El siguiente ejemplo ilustra como funciona este modelo en una situación con 3 agentes bajo las suposiciones de un modelo EOQ multi-item con costes de transporte generales.

Ejemplo 3.1. Tres compañías deben satisfacer sus demandas de tres artículos que reciben de un único proveedor externo. Por un nuevo pedido, cada empresa tiene que pagar un coste fijo a = 0.05 u.m., con una previsión de gastos para satisfacer sus demandas igual a $\overline{D}$=(2,2.25,3). El porcentaje de los gastos de pedido correspondiente a los costes de almacenaje de los artículos (h_i, con i =1,2,3) es 10 %, 10 % y 40 % respectivamente. Los costes de pedido variables vienen dados por una función A tal que:

$$A(S) = \sum_{i \in S} (\sum_{k \in M} p_{ki})$$

para cada $S \subseteq N$. La tabla 3.1 muestras los valores de p_{ki} con $k \in M$ e $i \in N$:

La política óptima para cada conjunto de jugadores viene en la tabla 3.2.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$C(S,\overline{Q}_i)$	2.285	2.515	11.177	4.795	13.496	13.720	16.029
$\hat{m}_s$	0.088	0.089	0.107	0.089	0.104	0.104	0.101

Tabla 3.2: Coste y número óptimo de pedidos.

A partir de este ejemplo se comprueba que la monotonía del número óptimo de pedidos no se satisface en general. Se tiene que $\hat{m}_{\{1,2\}} < \hat{m}_N$, pero, sin embargo, $\hat{m}_{\{2,3\}} < \hat{m}_N$. Sería deseable que para cada $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$, se satisface que $\hat{m}_{S\cup T} \leq \hat{m}_S + \hat{m}_T$. En general, esta condición no se cumple. La siguiente proposición asegura la condición anterior bajo la hipótesis de que la función de coste A sea monótona. La función de coste A será monótona si para cada par $S, T \subseteq N$ con $S \subseteq T$ se satisface que $A(S) \leq A(T)$.

Proposición 3.2. *Sea* $\left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i\in N}, \{d_{ki}\}_{k\in M, i\in N}, \{p_{ki}\}_{k\in M, i\in N}\right\}$ *un problema EOQ multi-item con costes de transporte generales. Si A es monótona, se verifica que*

$$\hat{m}_{S\cup T} \leq \hat{m}_S + \hat{m}_T$$

para cada $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$

Demostración: Sea $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \emptyset$. Entonces:

$$\hat{m}_{S\cup T} = \frac{\sum_{l\in S\cup T} h_l \overline{D}_l}{2(a + A(S\cup T))} \leq \frac{\sum_{l\in S} h_l \overline{D}_l}{2(a + A(S))} + \frac{\sum_{l\in T} h_l \overline{D}_l}{2(a + A(T))},$$

donde la desigualdad se verifica por la monotonía de A. La parte derecha es también menor o igual que:

$$\frac{\sum_{l\in S} h_l \overline{D}_l}{2(a + A(S))} + \frac{\sum_{l\in T} h_l \overline{D}_l}{2(a + A(T))} + \sqrt{\frac{\sum_{l\in S} h_l \overline{D}_l \sum_{l\in T} h_l \overline{D}_l}{4(a + A(S))(a + A(T))}}$$

que es igual a $(\hat{m}_S + \hat{m}_T)^2$. □

3.4. Juegos de inventario multi-item

Para cada coalición $S \subseteq N$ el valor de $c(S)$ se interpreta como el coste de cooperación de los jugadores de S. Sea $l = \left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i\in N}, \{d_{ki}\}_{k\in M, i\in N}, \{p_{ki}\}_{k\in M, i\in N}\right\}$ un problema EOQ multi-item con costes de transporte generales entonces, definimos el jugo de costes asociado con l como $c^l(S) = C(S, \overline{Q}_i^*)$ para todo $S \subseteq N$. Formalmente, (N, c) se dice que es un juego de inventario si satisface que $c(S)^2 = \sum_{l\in S} c(i)^2$. Sin embargo, los juegos de inventario multi-item con coste de transporte general no pertenecen a esta clase. Podemos analizar el carácter beneficiosa de que los agentes de N formen un grupo que coopere y haga pedidos conjuntos. Que un grupo de agentes de N coopere es beneficioso si el juego de costes (N, c^l) es subaditivo, i.e. cuando se verifica que $c^l(S\cup T) \leq c^l(S)+c^l(T)$, para cualquier par de coaliciones disjuntas $S, T \subset N$. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente y necesaria para la subaditividad de los juegos de costes asociados a esta clase de problemas.

Teorema 3.3. *Sea* $l = \left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i\in N}, \{d_{ki}\}_{k\in M, i\in N}, \{p_{ki}\}_{k\in M, i\in N}\right\}$ *y* (N, c^l) *el juego de costes asociado. Entonces* (N, c^l) *es subaditivo sí y solo sí, para cada par de coaliciones no vacías* $S, T \subset N$ *con* $S \cap T = \emptyset$,

$$1 \geq \frac{A(S\cup T) - A(S)}{\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i} + \frac{A(S\cup T) - A(T)}{\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i}$$

Demostración: Sean $S, T \subset N$ bajo las condiciones del teorema. Entonces $c^l(S\cup T) \leq c^l(S) + c^l(T)$ si y solo si

$$2c^l(S)c^l(T) \geq (c^l(S\cup T))^2 - (c^l(S))^2(c^l(T))^2$$

. El lado derecho de la desigualdad anterior es igual a

$$2(a + A(S\cup T)\sum_{i\in S\cup T} h_i\overline{D}_i - 2(a + A(S)\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i - 2(a + A(T)\sum_{i\in T} h_i\overline{D}_i$$

entonces se tiene que,

$$2(A(S\cup T) - A(S))\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i + 2(A(S\cup T) - A(T))\sum_{i\in T} h_i\overline{D}_i.$$

Como $\sum_{i\in T} h_i\overline{D}_i = 2(a + A(S)\hat{m}_S$ para cada $S \subseteq N$, la cantidad anterior se puede escribir como

$$2(A(S\cup T) - A(S))(2(a + A(S)\hat{m}_S) + 2(A(S\cup T) - A(T))(2(a + A(T)\hat{m}_{ST}).$$

Teniendo en cuenta las expresiones que acabamos de deducir, la expresión inicial se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}&(2(a + A(S))\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i)(2(a + A(T))\sum_{i\in T} h_i\overline{D}_i)\\ &\geq (A(S\cup T) - A(S))(2(a + A(S)\hat{m}_S) + (A(S\cup T) - A(T))(2(a + A(T)\hat{m}_{ST}).\end{aligned}$$

Después de algunas operaciones se obtiene:

$$1 \geq \frac{A(S\cup T) - A(S)}{\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i} + \frac{A(S\cup T) - A(T)}{\sum_{i\in S} h_i\overline{D}_i}.$$

□

El teorema anterior proporciona una condición sobre A bajo la cual la cooperación de los agentes en N es beneficiosa. Una vez están determinadas las coaliciones beneficiosas, es esencial definir las reglas para distribuir los costes de la cooperación. La siguiente sección trata este problema.

3.5. Compartir los costes de pedidos conjuntos

En esta sección abordamos el problema de la distribución de los costes de la cooperación de los agentes bajo un sistema EOQ multi-item con costes de transporte generales l. Una regla de asignación $\mathbb{X}$ para l proporciona una asignación de costes $\mathbb{X}(l) \in \mathbb{R}^N$. Formalmente, el núcleo de un juego de costes (N, c^l) viene dado por

$$C(N, c^l) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ : \ \sum_{i \in N} x_i = c^l(N) \ y \ \sum_{i \in S} x_i \leq c^l(S) \forall S \subset N \right\}.$$

Las asignaciones pertenecientes a $C(N, c^l)$ son estables, i.e. abandonar la coalición y actuar de forma independiente no proporciona ningún beneficio a ningún subgrupo de agentes $S \subset N$. En este sentido, sería deseable que $\mathbb{X}(l)$ perteneciese al núcleo de los juegos correspondientes para una clase grande de sistemas l. Una forma natural de dividir los costes compartidos es dividir los costes de la cooperación proporcionalmente a un λ_i para cada $i \in N$. Siendo λ_i el valor individual de la regla $\lambda-$proporcional de asignación, denotada por RP^λ, para $i \in N$.

En lo que sigue, tomamos un problema EOQ multi-item con costes de transportes generales l. Entonces la regla RP^λ para l se define formalmente como:

$$RP_i^\lambda(l) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j \in N} \lambda_j} c^l(N) \tag{3.1}$$

para cada $i \in N$ con $\lambda \in \mathbb{R}_+^N$ En el siguiente teorema estableceremos una condición bajo la cual $C(N, c^l)$ es no vacío.

Teorema 3.4. *Sea* $l = \left\{ N, M, a, A, \{h_i\}_{i \in N}, \{d_{ki}\}_{k \in M, i \in N}, \{p_{ki}\}_{k \in M, i \in N} \right\}$ *y* (N, c^l) *el juego de costes asociado. Entonces si* A *es monótona,* $RP^\lambda \in C(N, c^l)$ *sí y solo sí, para cada coalición no vacía* $S \subset N$ *se verifica que*

$$\frac{\hat{m}_N}{\hat{m}_S} \frac{A(N)}{A(S)} \leq \frac{\sum_{j \in N} \lambda^j}{\sum_{j \in S} \lambda^j}.$$

Demostración: Es suficiente probar que $\sum_{i \in S} RP_i^\lambda(l) \leq c^l(S)$ para todo $S \subset N$. Entonces, se tiene que satisfacer que

$$\sum_{i \in S} RP_i^\lambda(l) = \sum_{j \in S} (2(a + A(N))) \hat{m}_N \frac{\lambda_j}{\sum_{j \in N} \lambda_j} = (2(a + A(N))) \hat{m}_N \frac{\sum_{j \in S} \lambda_j}{\sum_{j \in N} \lambda_j} \leq c^l(S)$$

para todo $S \subset N$. Lo anterior se verifica sí y solo sí

$$(2(a + A(N))) \hat{m}_N \frac{\sum_{j \in S} \lambda_j}{\sum_{j \in N} \lambda_j} \leq (2(a + A(S))) \hat{m}_S.$$

Esta condición es equivalente a

$$a(\hat{m}_N \frac{\sum_{j\in S}\lambda_j}{\sum_{j\in N}\lambda_j} - \hat{m}_S) + A(N)\frac{\sum_{j\in S}\lambda_j}{\sum_{j\in N}\lambda_j} - A(S)\hat{m}_S \leq 0.$$

Esta desigualdad se satisface siempre que A sea monótona y como

$$\frac{\hat{m}_N}{\hat{m}_S} \leq \frac{\hat{m}_N}{\hat{m}_S}\frac{A(N)}{A(S)} \leq \frac{\sum_{j\in N}\lambda_j}{\sum_{j\in S}\lambda_j}$$

para todo $S \subseteq N$ se tiene que

$$\frac{\hat{m}_N}{\hat{m}_S}\frac{A(N)}{A(S)} \leq \frac{\sum_{j\in N}\lambda^j}{\sum_{j\in S}\lambda^j}$$

. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento de $RP^{\lambda}(l)$ en un sistema particular l.

Ejemplo 3.5. Sea $l = \left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i\in N}, \{d_{ki}\}_{k\in M, i\in N}, \{p_{ki}\}_{k\in M, i\in N}\right\}$ un problema EOQ multi-item con costes de transporte generales dado por:

- $N = \{1,2,3\}$, $M = \{1,2,3\}$, a= 0.013 y la función de coste A viene dada en la tabla 3.3.
- $\overline{D}$ =(1.351, 1.387, 2.385) y h=(0.011, 0.138, 0.239).

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$A(S)$	1.6	1.6	1.7	1.8	1.7	1.7	2.0

Tabla 3.3: Función A.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c^l(S)$	0.219	0.786	1.397	0.865	1.416	1.615	1.768

Tabla 3.4: El juego de costes (N, c^l).

El juego de costes (N, c^l) asociado a l está en la Tabla 3.4. La condición del teorema anterior se cumple para l y, por ejemplo, para $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tal que $\lambda i = c^l(\{i\})$ para todo $i \in N$. Se comprueba fácilmente que $RP^{\lambda}(l) = (0.161,\ 0.578,\ 1.028)$.

3.6. Estructura de coaliciones de pedido beneficiosas

Aunque normalmente analicemos la formación de la coalición N, es fácil comprobar que no siempre es beneficiosa la cooperación. Por lo tanto, nos surge una nueva pregunta, ¿qué coaliciones se deben formar en un problema como los anteriores? Para dar una respuesta usaremos las ideas de Elomri et al. (2012) para problemas EOQ básicos con costes de transporte aditivos. Dado un juego de costes general (N, c), la noción de beneficio de una coalición $S \subseteq N$ se redefine en términos del cociente $\frac{c(S)}{\sum_{i \in S} c(i)}$. En este sentido, se dice que una coalición es la coalición de pedido más beneficiosa si minimiza el ratio anterior en el conjunto de posibles coaliciones de N. La tarea principal consistirá en determinar una estructura de pedido, i.e. una partición de N compuesta por las coaliciones de pedido más beneficiosas.

Sea $l = \left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i \in N}, \{d_{ki}\}_{k \in M, i \in N}, \{p_{ki}\}_{k \in M, i \in N}\right\}$ y (N, c^l) un problema EOQ multi-item con costes de transporte generales y sea P una estructura de pedido para N. Entonces $R\mathbb{P}^{\lambda}(l)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda_i = c^l(i)$ para todo $i \in N$ se define formalmente, para cada $i \in S_k \in P$, por

$$RP^{\lambda}(l) = \frac{c^l(i)}{\sum_{j \in S_k} c^l(j)} c^l(S_k). \tag{3.2}$$

Esta regla es fácil de obtener y tiene una interpretación muy natural. En Elomri et al. (2012) se demuestra que la restricción de $RP^{\lambda}(l)$ a cada subjuego inducido por $S_k \in P$ pertenece al núcleo si $\lambda_i = c^l(i)$.

Adaptamos el procedimiento de Elomri et al. (2012) para obtener una estructura de pedido como la ya mencionada. Escoge de forma iterativa, la coalición de pedido más beneficiosa de los agentes no asignados a ninguna clase anteriormente.

Algoritmo 3.6. *Sea* $l = \left\{N, M, a, A, \{h_i\}_{i \in N}, \{d_{ki}\}_{k \in M, i \in N}, \{p_{ki}\}_{k \in M, i \in N}\right\}$ *un problema EOQ multi-item con costes de transporte generales. Sea* (N, c^l) *el juego de costes asociado:*

1. $k = 0, P = \emptyset$.

2. $k = k + 1$.

3. *determinar* $S_k \subseteq N \setminus \bigcup_{S \in P} S$ *tal que*

$$\frac{c^l(S_k)}{\sum_{i \in S_k} c^l(i)} = \min_{T \subseteq N \setminus \bigcup_{S \in P} S} \left\{ \frac{c^l(T)}{\sum_{i \in T} c^l(i)} \right\}.$$

Si $S_k = N \setminus \bigcup_{S \in P} S$ *este procedimiento termina, de lo contrario, se obtiene* $S_k \subseteq N \setminus \bigcup_{S \in C} S$ *y entonces tomamos* $P = P \cup S_k$.

4. ir al paso 2 a no ser que $N \backslash \bigcup_{S \in P} S = \emptyset$.

El algoritmo que acabamos de describir identifica una estructura de pedidos $\mathbb{P}$ para el problema de inventario multi-item del primer ejemplo de esta sección:

Ejemplo 3.7. Consideramos el problema EOQ multi-item con costes de transporte generales del primer ejemplo de esta sección. Tabla 3.5 describe el juego de costes correspondiente (N, c^l) y los ratios asociados a cada posible coalición.

Entonces, $P = \{S_1, S_2\} = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ aplicando el algoritmo que acabamos de definir. La propuesta de la regla RP^λ para l con $\lambda \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda_i = c^l(\{i\})$ para todo $i \in N$, es

$$RP^\lambda(l){=}(2.283,\ 2.512,\ 11.177).$$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c^l(S)$	2.285	2.515	11.177	4.795	13.496	13.720	16.029
Ratio	1	1	1	0.999	1.003	1.002	1.003

Tabla 3.5: El juego de costes (N, c^l).

Aunque $RP^\lambda(l)$ nos proporciona asignaciones estables para cada $S \in P$ no es eficiente para N ya que

$$c^l(\{1,2\}) + c^l(\{3\}) = 4.795 + 11.177 < 16.029 = c^l(N).$$

Mas aún, aseguramos beneficios cuando los jugadores en N cooperan siguiendo P en este problema.

Capítulo 4

Conclusión

El modelo introducido en el primer capítulo se conoce como modelo básico de inventario ya que forma la base de una gran variedad de modelos de inventario diferentes. El modelo básico de inventario es un modelo simple y algunas extensiones harían que fuera más realista. Algunas posibles extensiones ya tratadas en la literatura considerarían la inclusión del coste de compra por cada unidad del bien, un tiempo de entrega estocástico, una cantidad finita para los pedidos, costes de pedido individuales, permitir que las empresas se queden sin stock, descuentos por cantidades mayores en los pedidos. Discutiremos brevemente algunas de estas extensiones.

Un coste de compra c por unidad del bien implica que las empresas deberían pagar a parte del coste fijo por pedido un coste variable cQ por un pedido de Q unidades. Por unidad de tiempo esto implica un coste extra $cQ \cdot d/Q = cd$, un coste constante, que no influenciara a la cantidad óptima de pedido ni a la longitud óptima del ciclo. Solo aumentará el coste, por lo tanto, no es realmente una extensión.

Los descuentos por cantidad se pueden definir de dos maneras. Primero podemos pensar en descuentos por cantidad para todas las unidades compradas, la otra forma de verlo es descuentos por cantidad crecientes, por ejemplo, las primeras 100 unidades cuestan 20€ y las siguientes 100 cuestan 15€.

En el caso de una demanda no determinista podremos pensar que D es la demanda estocástica de la empresa. Los juegos que surjan de esta situación pueden que estén dentro de la clase de juegos de inventario centralizados, donde se consideran valores esperados. De lo contrario estarán dentro de la clase de los juegos cooperativos TU con pagos estocásticos.

El segundo capítulo proporciona una nueva contribución a los problemas de inventario centralizados. Examina un problema de asignación de costes en un sistema de transporte de inventario con un único artículo, un único proveedor y múltiples agentes que realizan un pedido conjunto usando una política EOQ con una estructura de coste especifica. El coste de pedido conjunto es la suma de un coste fijo y un coste de transporte que es el máximo de los costes de transporte individuales. Este problema corresponde con la situación en la que todos los agentes están ubicados en la misma ruta de la línea. Para estos sistemas de transporte de inventarios, la cooperación no es siempre razonable, pero si imponemos una condición simple que compara el numero óptimo de pedidos para cada par disjunto de coaliciones, podemos asegurar que la cooperación es razonable. Es más, cuando la coalición es razonable, hemos probado que siempre podemos encontrar asignaciones estables. Finalmente, hemos introducido la regla de la línea, una regla de asignación que proporciona asignaciones estables cuando la coalición es razonable. En el siguiente capítulo abordaremos el problema de asignación de costes que surge de un sistema de inventario con múltiples artículos y varios agentes que hacen pedidos conjuntos siguiendo una política EOQ.

El tercer capítulo describe un problema EOQ multi-item con costes de transporte generales. Se introduce como generalización del modelo EOQ del segundo capítulo y de Fiestras-Janeiro et al. (2011). Analizamos un problema de asignación de costes en un sistema de inventario con múltiples artículos y costes de transporte generales, un único proveedor y varios agentes que realizan pedidos conjuntos siguiendo una política EOQ. La principal novedad con respecto al modelo del capítulo anterior es la consideración de una estructura particular para los costes, compuesta de dos componentes. La primera de las cuales es un coste fijo por cada pedido y la segunda es una variable que viene dada por una función general. En particular, asumimos que la segunda componente está relacionada con los costes de transporte de cada nuevo pedido desde el proveedor. Para justificar esta hipótesis hemos lidiado con situaciones en las cuales los agentes no están todos situados necesariamente en una ruta lineal. Hemos comprobado que la cooperación de los agentes de N no es necesariamente beneficiosa en esta clase de problemas, pero impusimos unas condiciones básicas bajo las cuales la cooperación es razonable. Desde un enfoque basado en la teoría de juegos, somos capaces de proporcionar algunas condiciones bajo las cuales el núcleo del correspondiente juego es no vacío. En particular, introducimos la regla λ-proporcional, una asignación que proporciona asignaciones estables bajo algunas condiciones. Todos estos resultados se pueden aplicar en muchas situaciones de inventario en el mundo real como, entre muchas otras, en operaciones de franquicias.

Bibliografía

[1] Driessen, Th. (1988). On cores of subconvex games and permutationally convex games. Methods of Operations Research. 60(1988), 313–323.

[2] Dror, M., Ball, M. & Golden, B. (1985). A computational comparison of algorithms for the inventory routing problem. Ann. Oper. Res.. 4(1), 1–23

[3] Elomri, A., Ghaffari, A., Jemai, Z. & Dallery, Y. (2012). Coalition formation and cost allocation for joint replenishment systems. Prod. Oper. Manage., 21(6), 1015–1027.

[4] Fiestras-Janeiro, M.G., García-Jurado, I., Meca-Martinez, A. & Mosquera, M.A. (2011). Cost allocation in inventory transportation systems. Sociedad de Estadística e Investigación Operativa 2011.

[5] Granot, D. & Huberman, G. (1982). The relationship between convex games and minimum cost spanning tree games: a case for permutationally convex games. SIAM Journal of Algebra and Discrete Methods, 3(1982), 288–292.

[6] Hadley, G. & Whitin, T.M. (1963). Analysis of inventory systems, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J.

[7] Meca-Martinez, A., García-Jurado, I. & Borm, P. (2003). Cooperation and competition in inventory games. Math. Methods Oper. Res., 57(3), 481–493.

[8] Meca, A., Timmer, J., García-Jurado, I., & Borm, P. (2004). Inventory games. European Journal of Operational Research, 156(1), 127-139.

[9] Saavedra-Nieves, A. (2020). A multi-agent inventory problem with general transportation costs. Operations Research Letters, 48(1), 86-92.

[10] Saavedra-Nieves, A., García-Jurado, I. & Fiestras-Janeiro, M.G. (2018). Placing joint orders when holding costs are negligible and shortages are not allowed in: D. Mueller, R. Trost (Eds.). Game theory in management accounting. Contributions to Management Science. Springer, 2018, 349–360.

[11] Shapley, L.S. & Shubik, M. (1967). Ownership and the production function. Journal of Economics, 8 (1967), 88–111.

[12] Sprumont, Y. (1990). Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility. Games and Economic Behavior, 2 (1990), 378–394.

[13] Young, H.P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory, 14 (1985), 65–72.

[14] Zipkin, P. (2000). Foundations of inventory management. McGraw Hill, New York.