REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# Análisis epistémico y cognitivo de una tarea de visualización en el espacio bidimensional

Teresa F. Blanco[1], Juan D. Godino[2], José Manuel Diego-Mantecón[3]

1) Universidad de Santiago de Compostela. España
2) Universidad de Granada. España
3) Universidad de Santander. España

Date of publication: Octubre 24th, 2018
Edition period: Octubre 2018-Febrero 2019

**To cite this article:** Blanco, T. F.; Godino, J. D. & Diego-Mantecón, J.M. (2018). Análisis epistémico y cognitivo de una tarea de visualización en el espacio bidimensional. REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 7(2), 251-279. doi: 10.4471/redimat.2018.2463

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2463

*REDIMAT, Vol. 7 No. 3 October 2018 pp. 251-279*

# Epistemic and Cognitive Analysis of a 2D Visualization Task

Teresa Fernández Blanco
*Universidad de Santiago de Compostela*

Juan Díaz Godino
*Universidad de Granada*

José Manuel Diego-Mantecón
*Universidad de Santander*

(*Received: 19 December 2016; Accepted: 30 September 2018; Published: 24 October 2018)*

## Abstract

In this article we present the types of objects and processes undertaken by an ideal subject in the resolution of a visualization task related to plane symmetries. In the framework of the ontosemiotic approach to knowledge and mathematical instruction this is equivalent to elaborating the epistemic configuration associated with the resolution of that task. This configuration will be used as a reference point to analyze the cognitive configurations of a sample of 400 pre-service primary education teachers and to formulate hypotheses about potential semiotic conflicts. These configurations, epistemic and cognitive, are constructed applying the categories of primary and secondary objects proposed by the ontosemiotic approach. The research methodology entails a mix method approach with both qualitative and quantitative components. The results have shown that the students have difficulties in applying visualization skills to decompose and recompose figures, as well as in recognising symmetry as movement in unusual contexts.

**Keywords:** ontosemiotic approach, configuration, training of teachers, simetry, visualization

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2463

*REDIMAT, Vol. 7 No. 3 Octubre 2018 pp. 251-279*

# Análisis Epistémico y Cognitivo de una Tarea de Visualización en el Espacio Bidimensional

Teresa Fernández Blanco
*Universidad de Santiago de Compostela*

Juan Díaz Godino
*Universidad de Granada*

José Manuel Diego-Mantecón
*Universidad de Santander*

(*Recibido: 19 Diciembre 2016; Aceptado: 30 Septiembre 2018; Publicado: 24 Octubre 2018)*

**Resumen**

En este artículo se presentan los tipos de objetos y procesos puestos en juego por un sujeto ideal en la resolución de una tarea de visualización relacionada con las simetrías en el plano. En el marco del enfoque ontosemiótico esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para analizar las configuraciones cognitivas de una muestra de 400 futuros profesores de Educación Primaria. La metodología de la investigación tiene un doble componente cualitativo y cuantitativo, describiéndose como de tipo mixto. Los resultados muestran que estos estudiantes tienen dificultades en la aplicación de habilidades de visualización para descomponer y recomponer figuras, así como en el reconocimiento de la simetría como movimiento en contextos no habituales. El marco teórico empleado aporta una herramienta eficaz que lleva hacia la necesidad de plantear acciones formativas que inicialmente se dirijan hacia aspectos del conocimiento del contenido del profesor, y considerar acciones que complementen su formación didáctica.

**Palabras clave:** enfoque ontosemiótico, configuración, formación de maestros, simetría, visualización

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2463

Diversas investigaciones han resaltado el papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático en general y, de manera especial en la geometría, por lo que su evaluación y desarrollo es un objetivo de la enseñanza en los distintos niveles educativos (Gal y Linchevski, 2010; Phillips, Norris, y Macnab, 2010; Presmeg, 2006; Rivera, 2011). Esta importancia se ve reflejada en las orientaciones curriculares de varios países (NCTM, 2000; MEC, 2014) y tendría que suponer además una presencia paralela en la formación de profesores. A pesar de ello, el tratamiento de la visualización en la formación del profesorado no ha sido abordado en profundidad (Fernández, 2011; Debrenti, 2016), al igual que la manera en que la visualización interactúa con la didáctica de la matemática (Presmeg, 2006).

La mayoría de las investigaciones en Educación Matemática relacionadas con la visualización y la geometría se centran en el espacio tridimensional, encontrándose un número más reducido de éstas en el espacio bidimensional (Fernández, 2011). En particular, el conjunto de estas investigaciones sobre formación de maestros de Educación Primaria, población objeto de estudio de este trabajo, no es muy amplio ni muy variado. Se han encontrado trabajos sobre representaciones planas de objetos tridimensionales (Gaulin, 1985; Malara, 1998); identificación y clasificación de sólidos (Guillén, 2000, 2001); desarrollos planos de cuerpos tridimensionales (Cohen, 2003); adquisición de conceptos básicos de geometría (Gutiérrez y Jaime, 1996; Herskowitz; 1989, Matsuo, 2000); y sobre el concepto de simetría (Jaime y Gutiérrez, 1989; Son, 2006; Orton, 1987).

Por otra parte, Gutiérrez (1996) y Presmeg (2006) ponen de manifiesto la necesidad de crear un marco general que unifique el cuerpo de la visualización en Educación Matemática. Según Presmeg (2008), el interés desde este campo por una base teórica semiótica puede proporcionar un punto de inicio para interpretar fenómenos de visualización matemática en muchas áreas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y a muchos niveles.

Considerando lo anterior, el objetivo central de esta investigación es mostrar, desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), herramientas de análisis que permitan detectar y analizar los posibles conflictos semióticos de los futuros maestros de primaria cuando resuelven una tarea de visualización en el espacio bidimensional.

El trabajo se estructura en cinco secciones. En la primera se presenta el marco teórico adoptado en la investigación, en la segunda se desarrolla la configuración epistémica de una tarea propuesta a una muestra de 400 estudiantes del grado de maestro de Educación Primaria y se formulan las hipótesis pertinentes sobre conflictos potenciales. A continuación, se analizan las configuraciones cognitivas asociadas a esa tarea, para las cuales se ha tomado la configuración epistémica como modelo de referencia. En la cuarta sección se discuten las hipótesis formuladas. Para finalizar, se presentan las conclusiones sobre la investigación realizada.

## Perspectiva de la Visualización en el Marco del Enfoque Ontosemiótico

El enfoque ontosemiótico considera que el análisis de la actividad matemática, y de los objetos y procesos que intervienen en esta, se centra en las prácticas que realizan las personas implicadas en dicha actividad (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En la visualización, este planteamiento lleva a distinguir entre 'prácticas visuales' y 'prácticas analíticas' (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato 2012). Para distinguir estas prácticas es necesario fijar la atención en los tipos de objetos que intervienen, los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego la visualización y como analíticos si no la ponen (Arcavi, 2003).

Se consideran, como mínimo, dos niveles de objetos visuales que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel aparecen los objetos primarios que se observan en un texto matemático: tareas, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. Para cada uno de estos objetos primarios se elabora una tipología. Las tareas en las que se pone en juego la visualización son aquellas: en las que se comunica información sobre la forma, componentes y estructura de los objetos espaciales; en las que se comunica la posición relativa de objetos en el espacio; en las que se reconoce las invariancias en las formas o en sus representaciones; y en las que se reconoce y representa la estructura de sistemas conceptuales.

El lenguaje visual es el medio de comunicación icónica, indexical y diagramática de la forma y de la posición relativa de objetos en el espacio, o de representación de la estructura de sistemas conceptuales (planos, cuerpos geométricos, indicadores de posición, etc.). Los conceptos, en el estudio del espacio y la geometría, se diferencian en representaciones externas (ej. dibujo, imagen, figura) y conceptos figurales (ej. triángulo, prisma cuadrangular recto) (Fischbein, 1993). Los procedimientos visuales que se consideran son: proyectar, seccionar, rotar, simetrizar, trasladar, y deslizar cuerpos en el espacio; construir sólidos a partir de sus proyecciones planas y viceversa; transformar representaciones visuales mediante descomposición/recomposición de figuras; y representar relaciones gráficamente. Algunas propiedades que intervienen en la resolución de tareas visuales son las propiedades de la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos; propiedades de las diferentes proyecciones; y propiedades de los propios conceptos visuales. Por último, la elaboración de un argumento justificativo de las propiedades y procedimientos requiere la simple presentación del objeto material, en el caso de propiedades de naturaleza empírica. En otro caso, es necesaria la elaboración de argumentaciones deductivas basadas en reglas previamente aceptadas.

En el segundo nivel de análisis aparecen cinco ‘dualidades contextuales’, que son una tipología de objetos que surge de las distintas maneras de ver, hablar y operar sobre los objetos del nivel anterior. Estas dualidades son: (1) Unitario – Sistémico; (2) Expresión – Contenido; (3) Ostensivo – No ostensivo; (4) Personal – Institucional; y (5) Extensivo – Intensivo.

(1) Dualidad Unitario – Sistémico. Esta dualidad está ligada a los procesos de reificación, en el sentido de constitución de objetos por parte de un sujeto individual como una totalidad, la cual interviene como tal en nuevas actividades y procesos, y al proceso inverso de descomposición de una entidad sistémica en sus elementos constituyentes. Las imágenes son vistas como un todo y se opera con ellas como un todo unitario, o bien son vistas como sistemas formados por partes, y se opera con las partes.

(2) Dualidad Expresión – Contenido. La noción de representación es introducida en el enfoque ontosemiótico mediante esta dualidad, como un tipo particular de relación entre los objetos primarios del modelo. El antecedente de estas relaciones son usualmente entidades lingüísticas, pero también pueden ser otro tipo de entidades. La expresión puede ser una imagen, un dibujo, un diagrama, etc., que representa (metafórica o

icónicamente) un objeto físico, una figura geométrica, o una estructura conceptual (contenido). Se trata de comprender una realidad compleja en términos de otra que la representa y con la que se opera. Esta dualidad da cuenta del uso metafórico de los objetos visuales para comprender una realidad abstracta, no ostensiva, en términos de otra realidad ostensiva o visual.

(3) Dualidad Ostensivo – No ostensivo. El enfoque ontosemiótico concede un papel esencial a la ostensión en la práctica matemática al postular que cada objeto matemático (abstracto, ideal, general, inmaterial, o no ostensivo) tiene una faceta ostensiva, es decir, una faceta mostrable públicamente, visualmente o de otro modo perceptivo. Esta ostensión puede manifestarse a través de inscripciones simbólicas, necesarias para representar los objetos entendidos como un todo unitario, y poder operar con ellos en progresivos niveles de generalidad. También puede hacerlo mediante visualizaciones icónicas o diagramáticas que muestran la estructura del objeto, entendido de manera sistémica. Lo ostensivo hace referencia a lo perceptible y lo no ostensivo a lo inmaterial, mental o ideal. Aquí aparecen las distinciones entre representaciones externas y las representaciones internas cuya interacción es fundamental para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Goldin, 2007).

(4) Dualidad Personal – Institucional. En el enfoque ontosemiótico esta dualidad interpreta la dialéctica entre cognición individual y social. Postula una forma de existencia de los objetos matemáticos que se califica de personal o mental y otra forma de existencia que se considera como institucional, a la que se le atribuye una naturaleza normativa.

(5) Dualidad Extensivo – Intensivo. Un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplo particular, y es intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad. Estos atributos de los objetos matemáticos son relativos al juego de lenguaje en el que participan y no son entidades absolutas. Una imagen puede ser usada como icono de una clase o como un tipo de objeto visual.

Para hacer operativo este análisis, el enfoque ontosemiótico propone como herramienta analítica la noción de configuración ontosemiótica, en la doble versión epistémica y cognitiva. Llamamos configuración ontosemiótica a la red de objetos y procesos que se ponen en juego en la realización de una determinada práctica matemática. La Figura 1 nos ofrece una imagen visual y metafórica de esta noción teórica (Godino, Fernández, Gonzato y Wilhelmi, 2013). Con ella se quiere resaltar la complejidad de los sistemas cognitivos y epistémicos que se ponen en juego en la construcción y comunicación del conocimiento matemático.

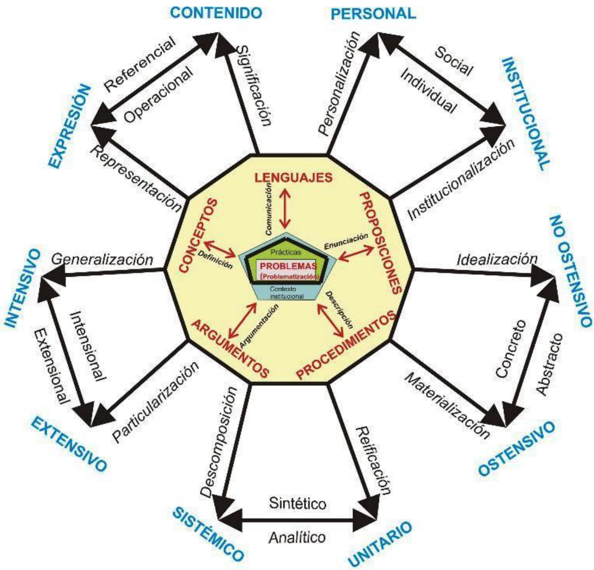



*Figura 1*. Configuración de prácticas, objetos y procesos, obtenida de Godino, Fernández, Gonzato y Wilhelmi (2013, p.117)

## Metodología

El enfoque metodológico de la investigación tiene un componente cualitativo y cuantitativo, pudiéndose describir como investigación de tipo mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009). En nuestro caso, el análisis de las soluciones de la tarea, tanto en la faceta epistémica (solución experta de referencia) como en la faceta cognitiva (soluciones dadas por los estudiantes), se realiza aplicando las categorías de objetos primarios y secundarios que propone el enfoque ontosemiótico. Este análisis tiene un componente interpretativo y contextual. Los tipos de configuraciones cognitivas que se determinan emergen del análisis de las prácticas operativas y discursivas manifestadas por los sujetos que responden a una tarea, tratándose, por tanto, de un análisis cualitativo. Por otra parte, se evalúa el grado de corrección de las respuestas a dicha tarea que, como variable cuantitativa, se resume y analiza mediante técnicas estadísticas.

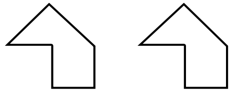
La visualización será analizada, en primer lugar, desde el punto de vista de los objetos primarios que en ella participan, esto es, los tipos de tareas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los cuales hay visualización. En segundo lugar, la visualización será analizada aplicando las cinco dualidades contextuales, desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados.

La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación. Con frecuencia las prácticas matemáticas y, en consecuencia, las configuraciones de objetos y procesos asociadas tendrán un carácter mixto, visuales-analíticas, y desde el punto de vista de la progresión del aprendizaje las conversiones entre componentes visuales y analíticos desempeñarán un papel importante (Godino, Fernández, Gonzato y Wilhelmi, 2013).

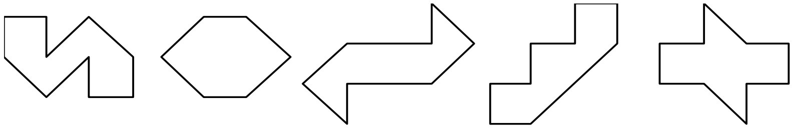
## Descripción de la Tarea y Muestra

La tarea, objeto de análisis en este estudio, consiste en componer figuras planas con dos piezas dadas, sin material concreto (ver Figura 2). Se considera una tarea visual (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012) que exige la construcción y transformación de imágenes mentales. Siguiendo a Owens (1992), aquellas operaciones que encarnan acciones de juntar dos figuras para formar otra se contemplan como procesos de pensamiento espacial, así como la imaginería visual usada para representar, reconocer y/o reproducir una forma o posición. En esta tarea aparecen implicadas tres acciones: formar figuras con dos piezas dadas, bajo la condición de que dichas piezas sólo se pueden trasladar y girar en el plano; identificar una figura en diferentes posiciones; e identificar las dos piezas en las cinco figuras que aparecen en el enunciado.

Tenemos dos piezas idénticas que podemos mover, sin levantar de la mesa.



¿Qué figura, de las indicadas abajo, NO podremos formar con estas dos piezas?



A B C D E

*Figura 1*. Tarea componer formas con dos piezas idénticas

En cuanto a las habilidades de visualización puestas en juego (Del Grande, 1990), la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales lleva a identificar correctamente las relaciones entre las dos piezas, en cada una de las figuras (si están giradas, si son simétricas, etc.). Otra habilidad implicada es la de conservación de la percepción para reconocer que las piezas mantienen su forma independientemente de haberlas girado. También es necesaria la habilidad de identificación visual para reconocer las dos piezas en cada una de las figuras. La habilidad de rotación mental entra en juego cuando se producen imágenes mentales dinámicas, al intentar conformar las figuras que requiere la tarea, mediante diferentes movimientos de las dos piezas.

La tarea se ha pasado en el mes de abril de 2015 a una muestra de 400 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria, de segundo curso, en una universidad del norte de España. Estos estudiantes aún no habían cursado ninguna materia del área de didáctica de la matemática.

## Configuración Epistémica de la Tarea e Hipótesis

Desde el enfoque ontosemiótico, el análisis de una tarea se realiza a dos niveles distintos y complementarios, en el primero se identifican los objetos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), lo que podemos describir como un análisis semántico (Godino, 2002); en el segundo se analizan las cinco dualidades ya nombradas en la sección anterior y se presentan las hipótesis sobre conflictos potenciales.

## Primer Nivel de Análisis: Identificación de Objetos Primarios

Tabla 1.
*Identificación de objetos primarios*

| | |
|---|---|
| Lenguaje | Verbal (términos y expresiones): tener, piezas, idénticas, mover, figura, formar, giros, traslaciones, simetría axial, 'sin levantar de la mesa'.<br>Icónico: dos piezas idénticas. 5 figuras diferentes que se pueden formar o no con esas dos piezas idénticas.<br>Simbólico: A, B, C, D, E. |
| Conceptos | Previos: lado, ángulo (recto, agudo, cóncavo, convexo), teselas, figura geométrica plana (cóncava, convexa, regular e irregular), simetrías, giros, traslaciones en el plano, área, y unidad de medida de área.<br>Emergentes: orientación de una figura, movimientos rígidos directos (traslación y giro) e inversos (simetría). |
| Propiedades | Previas: los movimientos rígidos mantienen las propiedades métricas de las figuras.<br>Las simetrías son movimientos inversos (cambian la orientación de las figuras).<br>Las teselas se unen por lados de la misma longitud.<br>La simetría axial está asociada a la acción de levantar y voltear una figura del plano.<br>Emergente: la figura que no se puede formar sin levantar una de las piezas dadas es la D. |
| Procedimientos | Dividir una figura en dos partes congruentes.<br>Componer y recomponer varias piezas para formar una figura plana.<br>Teselación.<br>Mover mentalmente, aplicando movimientos de traslación |

| | |
|---|---|
| | y giro, las dos piezas iniciales para formar cada una de las figuras. |
| Argumento | El enunciado afirma que no está permitido levantar las piezas de la mesa; es decir, no se permite componer las figuras con piezas simétricas a las dadas. En cada una de las figuras se identifican las dos piezas. Una vez identificadas las piezas se analiza qué movimientos (giros, traslaciones o simetrías) se aplican a esas piezas para formar las diferentes figuras. La solución es la D porque es la única figura que no se puede formar mediante giros o/y traslaciones de las piezas dadas. Es necesario que una de las piezas sea la simétrica de la otra, por tanto para construirla se necesita levantarla de la mesa (voltearla). |

## Segundo Nivel de Análisis: Dualidades e Hipótesis sobre Conflictos Potenciales

(1) Dualidad Unitario – Sistémico. Las piezas y las figuras que se presentan se pueden considerar como objetos unitarios en sí mismos, o como sistemas de varias piezas o subpiezas (Figura 3). La construcción de las figuras con las dos piezas ha de respetar la condición impuesta en el enunciado, no se pueden levantar de la mesa. En el caso de considerar cada pieza dividida en dos subpiezas (triángulo rectángulo isósceles y cuadrado) o en tres (dos triángulos rectángulos isósceles y un cuadrado), todas las figuras podrían formarse sin levantar ninguna de esas subpiezas de la mesa al ser estas figuras simétricas. Esta doble visión de las piezas como un todo unitario o como un sistema de subpiezas conduce a la primera hipótesis.

Hipótesis H1: La descomposición de las piezas en otras más pequeñas actuando de manera independiente y no como un todo pueden conducir a soluciones erróneas.

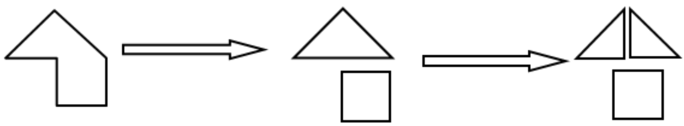


*Figura 3. Descomposición de las piezas dadas*

(2) Dualidad Expresión – Contenido. La expresión de las dos piezas dadas mediante la representación gráfica no sólo recalca la idea de que las dos piezas son idénticas sino también de que se encuentran en la misma posición, lo cual es fundamental para encontrar la solución a la tarea. Si sólo se representa una pieza, podría interpretarse que la tarea solicita encontrar si las figuras están o no formadas por dos piezas iguales, independientemente de su posición. La expresión 'mover sin levantar de la mesa' evita la palabra simetría, haciendo más cercana la tarea, y refuerza la idea de que no se pueden superponer piezas. En la tarea se introduce una pregunta directa "¿Qué figura No podremos formar con estas dos piezas?" que pone el énfasis en la acción 'no formar' lo cual podría centrar la atención del estudiante ahí, haciéndole obviar la restricción previa "Tenemos dos piezas idénticas que podemos mover, sin levantar de la mesa". Esta pregunta lleva a formular la segunda hipótesis.

Hipótesis H2: La estructura del enunciado puede hacer que el sujeto centre su atención en la pregunta y más concretamente en el verbo 'formar' obviando o olvidando la indicación previa.

(3) Dualidad Ostensivo – No ostensivo. Las piezas, así como las posibles figuras que se pueden formar, vienen dadas de forma ostensiva mediante una representación gráfica. En la resolución de la tarea, la identificación de las piezas dadas en las figuras se puede hacer de forma ostensiva, marcándolas por ejemplo con una línea de puntos, o bien de forma no ostensiva, mentalmente. Sin embargo, los movimientos que se aplican a las piezas para formar las figuras sólo se pueden realizar de forma no ostensiva, mental, al no disponer de las piezas físicamente para moverlas. Relacionada con esta dualidad se formulan las dos hipótesis siguientes.

Hipótesis H3: Construir las figuras de forma no ostensiva, es decir mentalmente, puede crear dificultades en los estudiantes y conducir a errores.

Hipótesis H4: La realización de movimientos (giros, traslaciones, simetrías) de forma no ostensiva, mentalmente, puede suponer una dificultad para los estudiantes.

(4) Dualidad Personal – Institucional. La concepción personal de simetría axial no parece estar ligada a la expresión 'levantar de la mesa', sino al de un movimiento realizado en el plano; es decir, a una transformación isométrica en un contexto escolar. En la faceta institucional

el concepto de simetría axial está asociado a una transformación en el plano que invierte la orientación. La realización física de dicha transformación requiere salir del plano, es decir, levantar la figura del plano y darle la vuelta (Jaime y Gutiérrez, 1989). La falta de conexión entre la concepción personal y la institucional de simetría llevará a formular la quinta hipótesis.

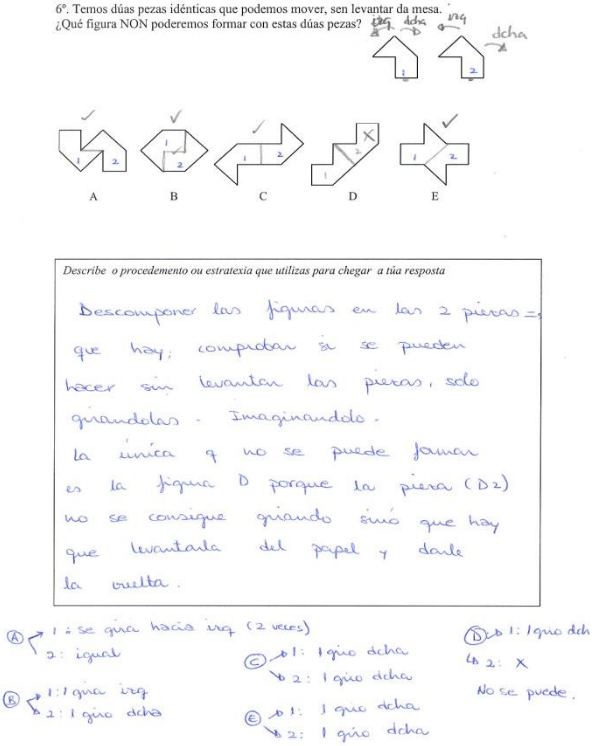
Hipótesis H5: Podemos conjeturar que la expresión 'levantar de la mesa' no va a ser asociada a una simetría axial.

(5) Dualidad Extensivo –Intensivo. En esta tarea, las piezas dadas son imágenes que aparecen de forma ostensiva actuando como un ejemplo particular (extensivo). Se refieren a un hexágono particular con unos valores métricos (longitudes y ángulos) específicos que van a determinar la construcción de esas figuras. No se refieren a un hexágono en general (intensivo). Tampoco se solicita ningún tipo de generalización de la tarea, ni referente a la forma de las piezas ni al número de ellas. No se formulan hipótesis en esta dualidad.

## Análisis de las Configuraciones Cognitivas Asociadas a la Tarea

Siguiendo el marco del enfoque ontosemiótico, las respuestas de los alumnos a la tarea se categorizan en nueve configuraciones cognitivas. A continuación, se describen brevemente cada una de las configuraciones, aunque no se detallan los dos niveles de análisis (objetos primarios y dualidades) por falta de espacio. El esquema que se sigue es el de la configuración epistémica, mostrado en la sección anterior.

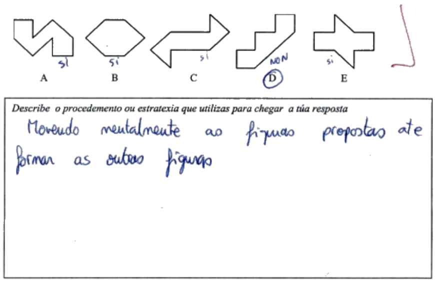
Configuración Cognitiva 1 (CC1): Comprobación exhaustiva ostensiva. Marcar las dos piezas en cada una de las figuras para comprobar qué movimientos (giros, traslaciones, simetrías) llevan a la construcción de dichas figuras. Ver como ejemplo la respuesta del estudiante 8 en la Imagen 1.




Transcripción:
Descomponer las figuras en las dos piezas que hay: comprobar si se pueden hacer sin levantar las piezas, sólo girándolas.
Imaginándolo.
La única que no se puede formar es la figura D porque la pieza (D2) no se consigue girando, sino que hay que levantarla del papel y darle la vuelta.

*Imagen 1*. Respuesta del estudiante 8 como ejemplo de CC1

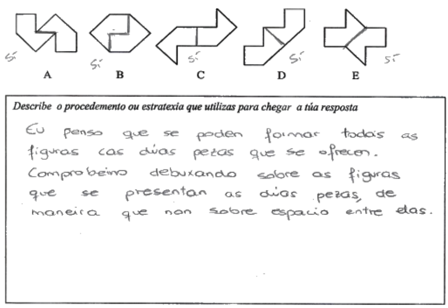
Configuración Cognitiva 2 (CC2): Comprobación exhaustiva no ostensiva. Formar o recubrir las figuras con las piezas mentalmente. No se realizan marcas sobre las figuras para facilitar los movimientos mentales realizados. Como muestra la Imagen 2, el estudiante 107 expresa de forma explícita que lo hace mentalmente, aunque otros los expresaron en las entrevistas cognitivas.




Transcripción:
Moviendo mentalmente las piezas hasta formar las otras figuras.

*Imagen 2.* Respuesta del estudiante 107 como ejemplo de CC2

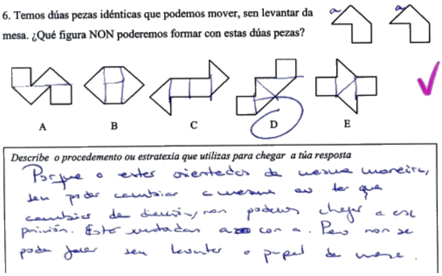
Configuración Cognitiva 3 (CC3): Comprobación exhaustiva ostensiva sin movimientos. Identificar las dos piezas que conforman cada figura. No se realizan, sin embargo, movimientos (giros, traslaciones, simetrías) con las piezas. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 45 en la Imagen 3.




Transcripción:
Yo pienso que se pueden formar todas las figuras con las dos piezas que se ofrecen. Comprobamos dibujando sobre las figuras que se presentan las dos piezas de manera que no sobre espacio entre dos.

*Imagen 3.* Respuesta del estudiante 45 como ejemplo de CC3

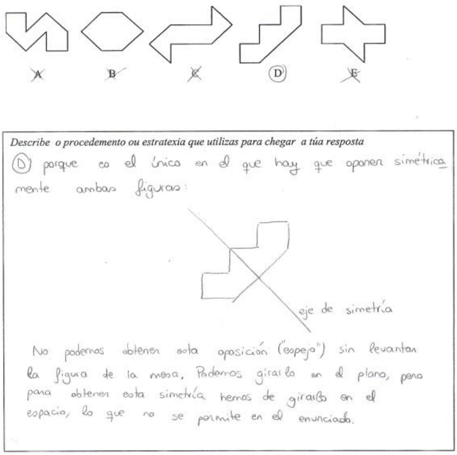
Configuración Cognitiva 4 (CC4): Descomposición de las piezas. Descomponer las piezas en unidades más pequeñas y realizar mentalmente movimientos a las mismas para llegar a la solución. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 365 en la Imagen 4.




Transcripción:
Porque al estar orientados de la misma manera, sin poder cambiar han de cambiar de dirección, no podemos llegar a esa dirección. Está orientado a con a. Pero no se puede formar sin levantar el papel de la mesa.

*Imagen 4*. Respuesta del estudiante 365 como ejemplo de CC4

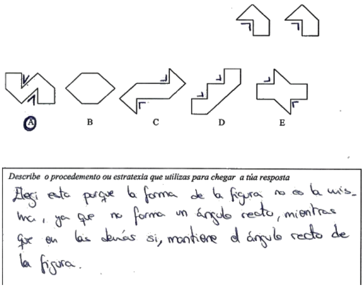
Configuración Cognitiva 5 (CC5): Identificación de la simetría axial. Trazar el eje de simetría axial, basándose en la propiedad de cambio de orientación de las simetrías. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 230 en la Imagen 5.




Transcripción:
La D, porque es el único que hay que opone simétricamente ambas figuras.
No podemos obtener esta opción (espejo) sin levantar la figura de la mesa. Podemos girarla en el plano, pero para obtener esta simetría hemos de girarlo en el espacio, lo que no se permite en el enunciado.

*Imagen 5*. Respuesta del estudiante 230 como ejemplo de CC5

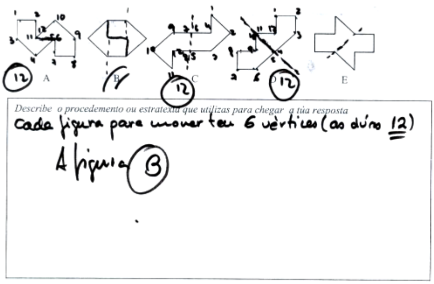
Configuración Cognitiva 6 (CC6): Discriminación angular. Discriminar aquellas figuras que no tienen ángulos exteriores rectos, ya que las dos piezas dadas tienen un ángulo recto. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 19 en la Imagen 6.




Transcripción:
Elegí esta porque la forma de la figura no es la misma, ya que no forma un ángulo recto, mientras que en las demás sí, se mantiene el ángulo recto de la figura.

*Imagen 6.* Respuesta del estudiante 19 como ejemplo de CC6

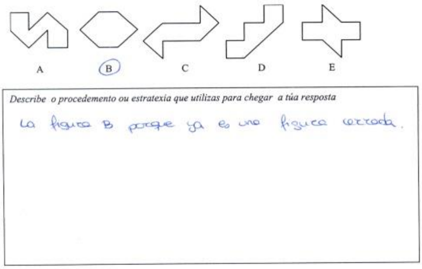
Configuración Cognitiva 7 (CC7): Discriminación numérica. Discriminar aquellas figuras que no tienen 12 lados/vértices, ya que la suma de los lados/vértices de las dos piezas dadas es 12. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 138 en la Imagen 7.




Transcripción:
Cada figura para mover tiene 6 vértices (las dos 12)
La figura B.

*Imagen 7.* Respuesta del estudiante 138 como ejemplo de CC7

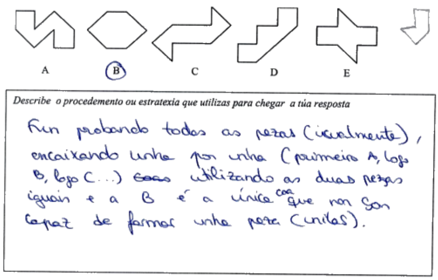
Configuración Cognitiva 8 (CC8): Discriminación visual. Discriminar aquellas figuras que son convexas, ya que las piezas dadas son cóncavas. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 65 en la Imagen 8.




Transcripción:
La figura B porque ya es una figura cerrada

*Imagen 8.* Respuesta del estudiante 65 como ejemplo de CC8

Configuración Cognitiva 9 (CC9): No identificar las piezas en alguna de las figuras. Discriminar aquellas figuras en las que no se identifican las dos piezas dadas. Véase como ejemplo la respuesta del estudiante 11 en la Imagen 9.




Transcripción:
Fui probando todas las piezas (visualmente), encajando una por una (primero la A, después B, luego C…) utilizando las dos piezas iguales y la B es al única con la que no soy capaz de formar una pieza (unirlas).

*Imagen 9.* Respuesta del estudiante 11 como ejemplo de CC9

## Análisis Cuantitativo y Cualitativo de las Configuraciones Cognitivas

En esta sección se presentan los análisis de las configuraciones cognitivas y los errores asociados a las mismas.

### Análisis de las Configuraciones Cognitivas

En la Tabla 2 se muestran los porcentajes de las configuraciones cognitivas, así como la efectividad de cada una de ellas, para la muestra de 400 estudiantes. Se entiende por efectividad el porcentaje de resultados correctos de cada configuración (Gorgorió, 1998), aplicándose únicamente a aquellas susceptibles de producir resultados correctos. En particular se identificaron tres elementos determinantes que compartieron algunas configuraciones cognitivas y que facilitaron o dificultaron la resolución de la tarea: el uso de objetos ostensivos, las características de las piezas y de las figuras, y el reconocimiento del concepto de simetría.

Tabla 2.
*Porcentaje y efectividad de las configuraciones*

| Código | Configuración | % | Efectividad % |
|---|---|---|---|
| CC1 | Comprobación exhaustiva ostensiva | 17,50 | 74,29 |
| CC2 | Comprobación exhaustiva no ostensiva | 20,25 | 86,42 |
| CC3 | Comprobación exhaustiva ostensiva sin movimientos | 7,50 | |
| CC4 | Descomposición de las piezas | 3,50 | 28,57 |
| CC5 | Identificación de la simetría axial | 3,00 | 100 |
| CC6 | Discriminación angular | 2,00 | |
| CC7 | Discriminación numérica | 2,50 | |
| CC8 | Discriminación visual | 2,00 | |
| CC9 | No identificar las piezas en alguna de las figuras | 21,00 | |
| No contesta | | 20,75 | |
| Total | | 100 | |

El uso de objetos ostensivos (segmentos, rayas, etc.) para marcar las dos piezas en las figuras es un elemento clave en las configuraciones CC1, CC3, CC4 y CC9. También en la configuración CC5, el 75% de los estudiantes separaron las dos piezas de forma ostensiva. En total un 51,75 % de los estudiantes se apoyó en este tipo de objetos para resolver la tarea.

Las características de las piezas y de las figuras (nº de ángulos/lados /vértices, amplitud ángulos, concavidad/convexidad, etc.) fueron determinantes en las configuraciones CC6, CC7 y CC8 para la resolución de la tarea. Respecto a las dos piezas dadas los estudiantes se centraron en tres características: el ángulo interior de 45º, el exterior de 90º (ángulo cóncavo de 270º), y el número de lados/vértices, que trataron de identificar en las figuras. Respecto a las figuras, los estudiantes se fijaron en la convexidad de la figura B por ser diferente a las demás figuras. Estas configuraciones no tratan de encontrar, ni ostensiva ni mentalmente, las piezas en las figuras, sino que se centran en consideraciones visuales o numéricas. Esto significa, tal y como sugiere Hershkowitz (1990), que los estudiantes buscan que las figuras construidas mantengan las mismas características que las piezas dadas.

El concepto de simetría como movimiento rígido sólo se reconoce en la configuración CC5. En esta configuración los estudiantes describen la figura D como simétrica mientras que en las demás configuraciones no se reconoce dicha característica. En algunos casos los estudiantes no mencionan de manera explícita las propiedades geométricas de la simetría, pero su razonamiento es coherente con dichas propiedades. Estos resultados concuerdan con los de Battista (2007). Cabe destacar que, aunque las configuraciones CC1 y CC2 se prestan al reconocimiento de la simetría, los estudiantes no llegan a manifestar dicho concepto bajo estas configuraciones.

## Errores Asociados a las Configuraciones Cognitivas

Se detectaron tres tipos de errores en el análisis de las respuestas: (1) situacionales, (2) procedimentales y (3) conceptuales (Fernández, 2011).

(1) El único error situacional (1S) se generó al obviar la condición del enunciado "mover, sin levantar de la mesa" que implica un movimiento rígido. Obviar esta condición supuso que los estudiantes se centraran en identificar las dos piezas en todas las figuras, independientemente del movimiento que permite formarlas. Este planteamiento lleva a considerar que todas las opciones de respuesta son correctas, pues se podrían formar todas las figuras con las piezas dadas. Las configuraciones CC3, CC6, CC7, CC8 y CC9, que representan el 35% de la muestra, están asociadas a este error.

(2) Los errores procedimentales que aparecen en este ítem son tres y están relacionados con la descomposición de las figuras. El primer error (1P) consiste en descomponer las figuras en dos piezas que no son congruentes con las dadas. El segundo error (2P) se produce al no identificar las dos piezas en la figura, lo que pone de manifiesto que la habilidad de identificación visual está parcialmente desarrollada. Este error está asociado a la configuración CC9 e implica, en la mayoría de los casos, que el movimiento que lleva a construir la figura es secundario para el estudiante. En la Tabla 3 se muestra la frecuencia de este error para cada una de las figuras.

Tabla 3.
Frecuencia y porcentaje del error procedimental (2P)

| | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Figura A | 23 | 27,38 |
| Figura B | 41 | 48,81 |
| Figura D | 11 | 13,10 |
| Figura E | 8 | 9,52 |
| B y D | 1 | 1,19 |
| Total | 84 | 100 |

El alto porcentaje asociado a la figura B (48,81%) se debe a su carácter convexo, al unir tres lados homólogos de las piezas en vez de uno, lo que dificulta la visualización de estas. La frecuencia de error en la figura A se debe al efecto óptico (ligero estrechamiento) que se genera al unir las piezas que la forman, provocando la percepción de dos piezas no iguales a las dadas (ver Figura 4). Esta situación pone de manifiesto que la habilidad de conservación de la percepción no está desarrollada completamente (Del Grande, 1987, 1990), dos piezas no pueden perder sus propiedades métricas al unirse.


*Figura 4*. Efecto visual del estrechamiento de la figura A

El tercer error (3P) procedimental aparece al subdividir las piezas dadas y recolocarlas para formar las figuras. Por un lado, al subdividir las piezas en triángulos y cuadrados aparecen más posibilidades para formar las figuras, pero alguna de esas posibilidades hacen que se pierda la estructura unitaria de las piezas dadas (Figura 5). Por otro lado, los cuadrados y los triángulos isósceles rectángulos que se obtienen de la subdivisión son figuras simétricas, mientras que las piezas originales no lo son. Esa característica no fue tenida en cuenta por algunos de los estudiantes a la hora de realizar los movimientos (giros, traslaciones o simetrías) para formar las figuras con las nuevas subpiezas. Este error está asociado a la configuración CC4. Los resultados muestran que el 57,14% de las respuestas que corresponden a dicha configuración pierden la estructura unitaria de la pieza y el 14,29% no han tenido en cuenta los movimientos.

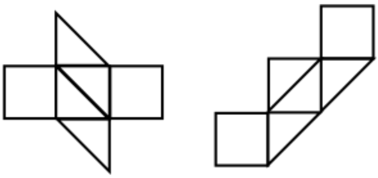


*Figura 5*. Pérdida de la estructura unitaria de las piezas

(3) Se detectaron tres errores conceptuales. El primero (1C), descartar la figura B convexa por su diferencia con las demás figuras que son cóncavas, está derivado de la fuerza que tiene la percepción visual. El alumno no hace ningún intento por analizar las características de la figura, y la descarta únicamente por la percepción visual. La figura B no mantiene las características morfológicas (ángulos interiores de 45º y ángulos exteriores de 90º) de las piezas con las que se ha de formar. Por otra parte, tampoco mantiene las mismas características morfológicas que el resto de las figuras. Este error está asociado a la configuración CC8. El segundo error conceptual (2C) consistió en asociar la propiedad de inversión de las simetrías a un giro; un error documentado anteriormente por Gutiérrez y Jaime (1996). Este error aparece en la configuración CC4. El tercer error conceptual (3C) hace referencia a debilidades métricas; los estudiantes no comprenden que al unir las dos piezas dadas se puedan perder lados, vértices y modificarse la amplitud de los ángulos variando la apariencia de

la figura que se forma sin perder el área. En este caso, se pone de manifiesto de forma implícita la idea errónea de que a igual área igual perímetro. A diferencia con el primer error, en este tercer error los estudiantes descartan la figura B por la discordancia entre el número de elementos de la figura con el de las piezas dadas, y no por su percepción visual. Este error es asociado a las configuraciones CC6 y CC7.

En resumen, todos los estudiantes que siguieron las configuraciones CC1, CC2, CC3, CC4, CC5 y CC7, en concreto el 49,75% de la muestra, fueron capaces de descomponer todas las figuras en las dos piezas dadas. Los estudiantes que siguieron la configuración CC9, el 21%, no fueron capaces de identificar las dos piezas en al menos una de las figuras. Los estudiantes de las configuraciones CC6, y CC8, el 4%, no ofrecen ninguna conclusión al respecto ya que estas configuraciones no se basan en la composición recomposición de las figuras. Aunque la mitad de los estudiantes fueron capaces de descomponer todas las figuras en las dos piezas dadas, solo un 34,5% llegó a la solución correcta. Este dato indica una gran deficiencia al reconocer y trabajar los movimientos requeridos en la tarea, y corrobora el trabajo de Brown y Wheatly (1997) quienes sostienen que descomponer/recombinar y realizar transformaciones geométricas son componentes independientes de la visualización. De todas las configuraciones que tuvieron en cuentan los movimientos solo una de ellas, la CC5, tuvo un 100% de efectividad. Las configuraciones CC1 y CC4 deberían haber proporcionado resultados similares en cuanto a efectividad, sin embargo la CC4 tuvo un porcentaje más bajo debido al tercer error procedimental, subdivisión de las piezas dadas en subpiezas simétricas, explicado anteriormente.

## Discusión sobre las Hipótesis Formuladas

A continuación, se discutirá sobre las hipótesis formuladas en la configuración epistémica de la tarea dada.

Hipótesis H1: La descomposición de las piezas en otras más pequeñas actuando de manera independiente y no como un todo pueden conducir a soluciones erróneas.

La configuración CC4 supone la descomposición ostensiva de las piezas dadas en otras más pequeñas. Esas nuevas piezas son cuadrados y triángulos isósceles rectángulos que aportan información que facilita la visualización de la descomposición de las figuras. Se muestran dos descomposiciones diferentes que surgen del análisis de las respuestas de los alumnos (Figura 3). La efectividad de esta configuración sólo alcanza el 28,57 % debido a que los movimientos se aplican a las subpiezas y no a las piezas, sin tener en cuenta una característica determinante para la resolución de la tarea: que las subpiezas son simétricas y las piezas no.

Hipótesis H2: La estructura del enunciado puede hacer que el sujeto centre su atención en la pregunta y más concretamente en el verbo ‘formar’ obviando o olvidando la indicación previa.

El análisis indicó que un 33% de los estudiantes no considera la parte del enunciado que impone una restricción al movimiento de las piezas. Ese porcentaje incluye a aquellos estudiantes que eligen, como solución, aquella figura en la que no identifican las dos piezas dadas (error 2P); a aquellos que identifican las piezas en todas las figuras y dan como solución todas las figuras (error 1S) y, por último, a los que descartan la figura convexa por su disparidad con las demás (error 1C). Todos ellos se centran únicamente en la acción de componer las figuras con las dos piezas o en encontrar las dos piezas en las figuras dadas.

Hipótesis H3: Construir las figuras de forma no ostensiva, es decir mentalmente, puede crear dificultades en los estudiantes y conducir a errores.

El hecho de no hacer ostensivas las particiones condujo al 27,25% de los estudiantes a errores. El 21% de ellos no fueron capaces de identificar las dos piezas en, al menos, una figura (error 2P). El 4% descarta la figura convexa por su disparidad con el resto y por ser la que requiere mayor dificultad visual para percibir las dos piezas que la conforman (error 1C). El 2,25% realiza una descomposición en la que las partes no son congruentes con las piezas dadas (error 1P).

Hipótesis H4: La realización de movimientos (giros, traslaciones, simetrías) de forma no ostensiva, mentalmente, puede suponer una dificultad para los estudiantes.

Solo un 37,75% siguieron configuraciones que involucran movimientos. Estas configuraciones fueron la CC1 y la CC2. Además, el 25,71% de los estudiantes de la CC1 y el 13,58 de la CC2 no fueron capaces de reconocer el tipo de movimiento (giro, traslación o simetría) necesario para formar algunas de las figuras con las piezas dadas. Esto representa la dificultad de hacer movimientos cuando no se dispone de las piezas físicamente.

Hipótesis H5: Podemos conjeturar que la expresión 'levantar de la mesa' no va a ser asociada a una simetría axial.

Solo el 3% de los estudiantes relacionó la expresión 'levantar de la mesa' con el concepto simetría axial. Esto fue corroborado en las entrevistas cognitivas, cuando se les preguntó a los estudiantes sobre el tipo de movimientos que realizaban.

## Conclusiones

En este trabajo se ha utilizado la noción teórica del enfoque ontosemiótico de 'configuración cognitiva', en su versión epistémica y cognitiva, para analizar una tarea de visualización relacionada con las simetrías en el plano. La configuración epistémica y las cognitivas se han construido atendiendo a dos niveles de análisis que propone el enfoque ontosemiótico: los objetos primarios (tarea, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y las dualidades (Unitario – Sistémico; Expresión – Contenido; Ostensivo – No ostensivo; Personal – Institucional; Extensivo – Intensivo).

Se han detallado los dos niveles de análisis en la configuración epistémica, lo que ha permitido formular cinco hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales. Esta configuración sirvió de referencia para analizar las configuraciones cognitivas de 400 estudiantes del grado de maestro en Educación Primaria. El análisis cualitativo de las configuraciones cognitivas permitió categorizarlas en nueve diferentes. Dicho análisis también identificó tres elementos que han compartido diferentes configuraciones y que facilitaron o dificultaron la resolución de la tarea: el uso de objetos ostensivos, las características morfológicas de las piezas y de las figuras y el reconocimiento del concepto de simetría. Además, se han detectado tres tipos de errores asociados a diversas configuraciones cognitivas: situacionales, procedimentales y conceptuales.

La discusión sobre las cinco hipótesis formuladas pone de manifiesto que se cumplen. Así, la descomposición de las piezas en otras más pequeñas (subpiezas), aunque facilita la identificación de las piezas en las figuras, conduce a soluciones erróneas; la estructura del enunciado de la tarea, poniendo el énfasis en la acción de la pregunta directa ('no formar'), hizo que muchos estudiantes se centraran únicamente en formar las figuras y obviaran analizar los movimientos que las forman; identificar las piezas en las figuras y realizar los movimientos de forma ostensiva condujo a los estudiantes a no resolver la tarea con éxito; y, por último, el significado personal de la acción 'levantar de la mesa y voltear', en la mayoría de los estudiantes, no incluye el concepto de simetría.

Los resultados del análisis cuantitativo y cualitativo muestran grandes deficiencias en estos estudiantes en el conocimiento común del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008), tanto en conceptos como en propiedades y procedimientos de la geometría escolar básica. Estos estudiantes tienen dificultades en el reconocimiento de la simetría como movimiento en contextos no habituales; y también en la aplicación de habilidades de visualización para identificar, descomponer y recomponer figuras. Esto lleva hacia la necesidad de plantear acciones formativas que inicialmente se dirijan hacia esos aspectos del conocimiento del profesor y considerar después acciones que complementen su formación didáctica.

El marco teórico empleado aporta una herramienta eficaz que ha permitido que afloren los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la tarea matemática llevada a cabo, tanto desde el punto de vista institucional (configuración epistémica) como personal (configuraciones cognitivas). El análisis epistémico ha llevado a formular una serie de hipótesis que se han corroborado al analizar las diversas configuraciones cognitivas de los futuros profesores de Educación Primaria.

## Bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215-241. doi: 10.1023/A:1024312321077

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Brown, D. L. & Wheatley, G. H. (1997). Components of imagery and mathematical understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 45-70.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (pp. 229-236). Honolulu, Hawai, USA: IGPME.

Debrenti, E. (2016). Some components of geometric knowledge of Prospective elementary teachers. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th PME International Conference* (pp. 292). Szeged, Hungary: IGPME.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In Montgomery, M., and Shulte, A. (Eds.), *Learning and Teaching geometry, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 14-20.

Fernández, M. T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Unpublised PhD dissertation. Universidad de Santiago de Compostela, Spain.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 163-183. doi: 10.1007/s10649-010-9232-y

Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. *Proceedings of the 9th PME International Conference* (pp. 53-71). Noordwijkerhout, The Netherlands: IGPME.

Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450. doi: 10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Cajaraville, J. A. Fernández, T., & Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 163-184.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Fernández, T., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2013). Synergy between visual and analytical languages in mathematical thinking. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 645-654). Ankara, Turkey: ERME.

Goldin, G.A. (2007). Representation in School Mathematics A Unifying Research Perspective. In J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 207-231. doi: 10.1023/A:1003132603649

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 415-431.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference* (pp. 3-19). Valencia, Spain: IGPME.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En A. Giménez, y otros (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.

Hershkowitz, R. (1989). Visualitation in geometry- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 61- 76.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400. doi: https://www.jstor.org/stable/40539304

Hart, L. C., Smith, S. Z, Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, *3*(1), 26-41. doi: 10.1177/1558689808325771

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the van Hiele model. *Proceedings of the 13th PME International Conference* (pp. 131-138). Paris, France: IGPME.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En Olivier, A y Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference* (pp. 239-246). Stellenbosch, South Africa: IGPME.

Matsuo, N. (2000). States of understanding relations among concepts of geometric figures: Considered from the aspect of concept image and concept definition. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference* (pp. 271-278). Hiroshima, Japan: IGPME.

MEC (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 52, 19349-19420.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Orton, J. (1997). Pupil's perception of pattern in relation to shape. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th PME International Conference* (pp. 304-311). Lahti, Finland: IGPME.

Owens, K. (1992). Spatial thinking takes shape through primary school experiences. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference* (pp. 202-209). Durham, USA: IGPME.

Phillips, L.M., Norris, S.P., y Macnab, J.S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2008). An overarching theory for research in visualization in mathematics education. In *Proceedings of the 11th International Congress in Mathematical Education ICME-11*. Monterrey, Mexico: ICME.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: The Netherlands: Springer.

Son, Ji-Won. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry. In J. Navotna, H. Moraova, M. Kratna, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145-152). Prague, Czech Republic: IGPME.

**Teresa Fernández Blanco** es Profesora Titular de Didáctica de la Matemática del departamento de Didácticas Aplicadas en la Universidad de Santiago de Compostela. España.

**Juan Díaz Godino** es Catedrático del departamento de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. España.

**Jose Manuel Diego-Mantecón** es Profesor en el departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria. España.

**Dirección de contacto:** La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse a la autora Teresa Fernández Blanco. Dirección Postal: Departamento de Didácticas Aplicadas. Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Norte. Avda. Xoán XXIII s/n, Santiago de Compostela, 15784, España. **Email:** teref.blanco@usc.es