TESE DE DOUTORAMENTO

CONCEPÇÕES E PRÁTICA DOCENTE DO PROFESSORADO GALEGO ENTORNO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE FUNCIONAL

Autor: Luís Alonso Vidal Conde

Directoras: Mª Jesús Salinas Portugal

Teresa Fernández Blanco

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS APLICADAS
FACULTADE DE CIENCIAS DA EDUCACIÓN

SANTIAGO DE COMPOSTELA
2017

AGRADECIMENTOS

O meu agradecimento, em primeiro lugar, às minhas diretoras de Tese, Professoras Mª Jesús Salinas e Teresa Fernández, por todas as suas indicaçje s e conselhos, por ser guias eficientes e rigorosos frente a minha inexperiẽncia, mas sobretudo, pela sua infinita e admirável 'paciẽncia didática'. A frase tỹo comum, 'sem elas o trabalho nỹo teria sido realizado' ajusta-se literal e escrupulosamente ao seu sentido exato neste caso. Elas sabem bem disso e da minha gratitude permanente.

Também desejo fazer extensível este agradecimento ao resto do meu professorado dos Cursos de Doutoramento (professores/as Alonso, Batanero, Cajaraville, De Pro, Garcia-Rodeja) por fazer-me sentir que o trabalho de investigaçỹo no campo da didática da Matemática tem o valor do esforço e a recompensa última da melhora da nossa atividade docente.

Nỹo pode faltar também nesta lista os professores e professoras do Ensino Médio na Galiza que, dia a dia, fazem o seu trabalho com rigor e profissionalismo. De entre eles, especial agradecimento a todos e todas que participaram nesta investigaçỹo aportando as suas opinije s sobre o tema tratado.

Agradeço também a amável disponibilidade dos membros do Comité de Peritos que analisaram o inquérito e que aportaram interessantes sugestj es para a sua melhora.

Finalmente, agradecimento muito especial para Alva e André, por existir e por saber habitar, sempre com um sorriso, os limites da minha paciẽncia.

RESUMO

Este trabalho contém, essencialmente, a descrição, aplicação e valoração de um inquérito desenhado para que professores e professoras de Matemática do ensino secundário e Bacharelato da Galiza aportem informação ao respeito da instrução que realizam do conceito de 'limite funcional'. Nele recolhem-se as opiniões dos profissionais do ensino a respeito de diversos aspetos relativos ao conceito de limite funcional, como podem ser: o nível adequado para sua introdução, o rigor na definição, as representações mais utilizadas, os instrumentos, recursos e estratégias predominantes.

Através das respostas dos entrevistados e de forma transversal, realiza-se uma primeira análise da importância que teria, na aplicação dos aspetos anteriormente citados, a modificação do marco atual institucional no sentido de melhora para um marco ideal, onde as restrições à ação educativa fossem praticamente inexistentes. A intenção é colocar um primeiro chanço para um posterior estudo e análise mais completo da prática docente do professorado no tema concreto de limite funcional, que deveria incluir, junto a novas variáveis de estudo, outros âmbitos populacionais, que utilizem o conceito, como som os estudantes de master de secundária ou os professores e professoras universitárias.

Por outra parte, a partir do estudo proporcionado polo inquérito, também procedemos a uma primeira classificação do professorado relativamente a alguns aspetos que intervêm no processo de instrução do conceito de limite funcional, como podem ser as ferramentas, estratégias e referentes utilizados.

ABSTRACT

This work contains essentially the description, application and evaluation of a survey designed for high school Math teachers from Galiza. It was created in order to get information about the instruction they practice of the 'functional limit' concept. In this survey, we collect the educators' opinions related to functional limit concepts such as: the most adequate level for its introduction; accuracy in its definition; the most used representations; the most predominant tools, resources and strategies.

On the other hand, through the responses from the interviewed subjects, transversely, we make a first analysis regarding the importance that an eventual change in the current institutional framework would have when applying the referred issues. This would tend to an ideal institutional framework whith practically non-existent restrictions. It is our intention to put a first step for a further study and more complete analysis of teaching practices regarding the concept of "limit of a function". This should include new study elements and also other sections of the population using the same concept, as secondary school master sudents or university teachers.

Finally, based on the study brought by the survey and using multivariant analysis methods, we also proceeded to a first classification of the teachers regarding some aspects involved in the teaching process of the concept "limit of a function" (such as instruments, strategies and referents used).

RESUMEN

Este trabajo contiene, esencialmente, la descripción, aplicación y valoración de una encuesta diseñada para que profesores y profesoras de Matemáticas de enseñanza secundaria y Bachillerato de Galicia aporten información respecto a la instrucción que realizan del concepto de 'límite funcional'. En él se recogen las opiniones de los profesionales de la enseñanza respecto a diversos aspectos relativos al concepto, como pueden ser: el nivel adecuado para su introducción, el rigor de la definición, las representaciones más utilizadas, los instrumentos, recursos y estrategias predominantes.

Por otra parte, a través de las respuestas de los entrevistados y de manera transversal, se realiza un primer análisis de la importancia que tendría, en la aplicación de los aspectos anteriormente citados, la modificación del actual marco institucional en el sentido de mejorarlo, acercándose a un marco ideal, donde las restricciones a la acción educativa fuesen prácticamente inexistentes. La intención es colocar un primer peldaño para un posterior estudio y análisis más completo de la práctica docente del professorado en el tema concreto del límite funcional, que debería incluir, junto a nuevas variables de estudio, otros 'usuarios' del concepto, como son los estudiantes de máster de secundaria o los profesores y profesoras universitarios.

Finalmente, a partir del estudio proporcionado por la encuesta, también procedemos a una primera clasificación del professorado en relación con algunos aspectos que intervienen en el proceso de instrucción del concepto de límite funcional, como pueden ser las herramientas, estrategias y referentes utilizados

ÍNDICE

Para Alva e André,

por terem partilhado comigo tantas paisagens.

Introdução geral

O presente trabalho quer ser uma investigação sobre o professor de matemática. Quer tentar saber algo do seu pensamento, das suas opiniões, das suas referências. O autor é mais um deles e tem refletido, como todos os seus colegas sobre múltiplos aspetos relacionados com a sua atividade profissional. Como o estudo deste conhecimento tem que ser limitado por força, preferimos centrar num aspeto concreto com o que levamos lutando desde dezenas de anos os docentes no campo da análise matemática: O conceito de limite. Esse que tantos esforços nos produz à hora em que devemos transmiti-lo; que tantas vezes nos convida e nos reta a tentar formas diversas para fazê-lo compreensível; que tantas dúvidas nos deixa sobre a sua compreensão após a instrução. Queremos desenhar uma janela aberta à opinião do professorado e assomar-nos a ela para ver, escuitar e apreender.

Temos estruturado o trabalho em seis capítulos que se descrevem brevemente a continuação.

No **Capítulo I** colocaremos o problema de investigação que contemplará a motivação do trabalho ligada ao interesse por conhecer as concepções e crenças do professorado sobre o tema de estudo e fazendo-nos três perguntas gerais de investigação: (1) Como considera o professorado que deve impartir-se o conceito de limite, (2) que importância tem para ele o marco de referência, e (3) como se agrupa ou organiza o professorado relativamente a referentes, materiais e estratégias no momento da instrução do conceito. Assinalaremos também vários objetivos ligados a outras perguntas concretas, como podem ser, entre outras, em que nível consideram a sua introdução, com que 'rigor' ou com que instrumentos.

No **Capítulo II**, abordaremos o conceito de limite funcional tanto desde o ponto de vista da sua evolução histórica quanto a sua evolução didática, fazendo especial menção aos últimos decénios no sistema educativo espanhol. Queremos sinalizar o seu contexto, os diversos tipos de definições utilizadas, e enquadrálo no currículo oficial do Ensino Médio na Galiza. Trataremos de indicar o tratamento do conceito de limite nos livros de texto e os relacionaremos com os diversos tipos de obstáculos que apresenta a sua instrução.

No **Capítulo III** trataremos do conhecimento profissional do professor de matemática e das suas concepções e crenças. Dentro do primeiro campo, tocaremos os modelos que organizam o seu conhecimento, como podem ser o MTSK ou o CDM, e nos que se baseiam muitos dos trabalhos de investigação produzidos neste campo. Numa segunda parte consideraremos a importância das crenças e concepções na prática docente. Entraremos as suas definições e nas suas relações, sempre difusas, como marco propício para o processo reflexivo. Da reflexão, da sua utilização, e ligada a esta, das estratégias de aprendizagem, materiais usados e as novas tecnologias para favorecer a visualização. Os programas de software dinâmico têm aqui também o seu protagonismo.

O **Capítulo IV** é o destinado ao desenho da investigação e a metodologia, onde trataremos da mostra, da forma em que foi escolhida entre os centros de ensino de todo o país, dos instrumentos de recolhida de dados, do processo de elaboração do inquérito e da sua administração. Foram 32 centros de ensino e mais de 110 professores e professoras que formaram parte de mostra e que responderam a um questionário de 16 itens, muitos deles múltiplos. O processo de elaboração foi complexo com várias versões, a última delas validada por peritos. Também tocaremos brevemente as ferramentas de análise descritivo, cluster e fatorial, que empregaremos durante o processo de estudo dos resultados.

No **Capítulo V** apresentamos os resultados; tanto os obtidos da análise descritiva feita como da aplicação de alguns métodos de análise multi-variante. No primeiro caso trataremos a resposta de cada um dos itens que conformam o inquérito e interpretaremos os seu resultados. Neste capítulo poderemos saber o que pensa o professorado galego sobre questões como podem ser as ferramentas usadas, a sua satisfação após a instrução, ou o uso das novas tecnologias, entre muitas outras. No segundo caso, procederemos a ver que classificações do professorado nos proporciona a análise cluster ou a fatorial sobre materiais, estratégias ou referentes. Tentaremos assim dar uma certa organização do professorado atendendo ao resultado destas análises.

Finalmente no Capítulo VI presentamos às conclusões relativas às perguntas de investigação recolhendo também as derivadas dos objetivos propostos. Terminamos este capítulo indicando as limitações que apreciamos no estudo e comentaremos possíveis linhas de investigação futuras.

Capítulo I

Problema de investigação

I.1. Motivação do trabalho

A ideia do presente trabalho surgiu a raiz da leitura, em um curso de doutoramento de didática da Matemática do ano 2009, de um artigo de Ponte (1994). Nos primeiros parágrafos, o autor situa rapidamente o foco sobre um dos aspetos que, do nosso ponto de vista constitui, por uma parte uma meta no caminho investigador da didática da Matemática, mas, simultaneamente, um objeto de estudo e formação permanente cuja importância, pelo geral, passa desapercebida: o professor ou professora de Matemática.

> A Educação Matemática tem de se debruçar sobre as questões relativas ao professor, nomeadamente ao seu papel no processo de ensino-aprendizagem e à forma como conduz a sua atividade docente. Trata-se, não entanto, de um domínio onde a investigação é particularmente problemática, e isso por várias razões que não se deve perder de vista.
>
> Em primeiro lugar, é difícil definir qual é precisamente o objeto de estudo. Serão os saberes do professor? E nesse caso quais — os de ordem científica ou os de ordem pedagógica? Pode-argumentar-se que nem uns nem outros são suficientes para garantir um bom desempenho profissional. Será que uma atenção essencial deve ser dada às suas práticas? Nesse caso, que aspetos da prática importa considerar?
>
> Em segundo lugar, sobre os professores existem as mais diversas representações sociais.

> Trata-se de um grupo muito heterogéneo na sua origem, valores e atitudes profissionais. O professor é um elo frágil da grande cadeia que é o sistema educativo. É facilmente culpabilizado por tudo o que não funciona. Todos se sentem no direito de emitir as opiniões mais contraditórias acerca do que deveria ser a sua atuação. Sendo a função educativa ponto de conflito de valores e ideologias muito diversas, torna-se particularmente difícil estudá-la numa perspetiva desapaixonada. (Ponte, 1994, p.1)

Concordamos plenamente com Guillén e Figueras (2004) na utilidade que tem, na prática educativa, em diferentes situações, conhecer as concepções e crenças dos professores em relação com uma matéria escolar, os conteúdos que impartem, aqueles aos que lhes dão mais importância ou nos que enfrentam dificuldades. Porque os e as que nos dedicamos ao labor docente, especialmente no âmbito científico, encontramos frequentemente situações nas que a ação didática deve ser tremendamente cuidadosa. No campo da matemática e no ensino secundário, todos temos em mente os principais conceitos problemáticos no momento da instrução. Dentro das dificuldades que se supõem ao entendimento dos diversos objetos matemáticos e suas propriedades, sempre incluem alguns aos que historicamente caracterizamos como complexos ou 'de difícil entendimento'. Limites, derivação, integração, por exemplo, fazem parte já de nossa pequena história secular de pequenos chanços aos que enfrentarmos na nossa labor educativa. Infelizmente, pelo geral, apenas contamos com pouco mais que a nossa formação académica, as nossas lembranças e a nossa reflexão didática sobre a experiência docente. Ao final, em ocasiões, a prática diária na aula não se corresponde com as concepções didáticas que o próprio professorado considera mais acaídas para a labor docente.

Um facto que nos pode orientar neste aspeto é, por exemplo, a diferença entre os enfoques dos Desenhos Curriculares, que insistem na importância da compreensão dos conceitos matemáticos através principalmente de métodos ligados a resolução de problemas e a realidade de uma debilidade semiótica (Cajaraville, Fernández, Labraña, Salinas, De La Torre e Vidal, 2003, p. 69) da aula "decantando-se para a prática rotinária de exercícios algorítmicos, com clara predominância do marco aritmético-algébrico".

I.1. **I.2. Perguntas de investigação**

O objeto de estudo é, desta forma, duplo: o professorado de Matemáticas no ensino médio público galego, e o conceito de limite funcional. A nossa ideia central é fazer um diagnóstico inicial da situação: Qual é a forma de instrução do conceito de limite funcional? A que idade considera mais adequada sua instrução? Com que rigor, e baixo que representações? Com que instrumentos e estratégias?

Estas são algumas das perguntas que pretendemos contestar e que se podem condensar na nossa primeira pergunta de investigação:

P1: Como considera o professorado que deve ser impartido o conceito de limite funcional?

No campo da prática docente, com frequência refletimos sobre o grau de melhora significativa do processo de ensino-aprendizagem, se o marco de referência ou institucional no que nos movemos se melhorar consideravelmente. Programas amplos, horários reduzidos, atenção à diversidade, diminuição do nível de exigência, falta de apoios e recursos tecnológicos, ratios elevadas, desprestígio social do professorado... são em muitas vezes assinaladas como causas ou impedimentos para uma melhor prática docente. Por esse motivo tentaremos neste trabalho avaliar, ainda que seja mínima e transversalmente, a importância que o professorado outorga a estas questões. Todo isso concretizado em relação a um conceito 'complexo' como é o de limite funcional. A nossa segunda pergunta de investigação será, polo tanto. a seguinte:

P2: Qual é a importância que o professorado dá ao marco de referência ou institucional como elemento condicionante para a instrução?

Por outra parte podemos observar que múltiplas investigações têm sido realizadas no campo da didática da Matemática entorno ao conceito de limite funcional, mas em muito poucas ocasiões estas se focalizam no docente. Historicamente, mas nomeadamente nos últimos anos muitos estudos têm-se centrado, bem no conceito, tanto nas raízes como na simbologia, nas dificuldades ou nos obstáculos, -Bagni, (2005), Kidron (2008), Cottrill et al. (1996), Glüçler (2014)- ou bem nos estudantes -Williams (1991), Fernández Plaza, Rico e Ruiz-Hidalgo, (2013), Juter, (2006), Moru, (2009), Parameswaran (2007), Szylik (2000) ou Bezuidenhout, (2001)- Por esse motivo consideramos relevante incidir nesta ocasião no professorado; conhecer o seu pensamento sobre estas questões, a sua experiência e a sua organização no momento da instrução. Comprovar similitudes e diferenças, estratégias compartilhadas entre professorado ou tendências diferentes. De ai surge a formulação de uma possível terceira pergunta de investigação:

P3: Como se agrupa ou organiza o professorado durante a instrução do conceito do limite funcional em relação a estratégias, materiais ou referentes utilizados?

Esta investigação foi realizada sem proposta inicial de hipóteses, já que se fundamenta em técnicas de tipo exploratório, com a finalidade de conhecer uma situação concreta relacionada com aspetos educativos de tipo prático. Carecemos de informação suficiente para formular uma hipótese consistente, para além de intuições que não têm mais valor que o de explorar linhas investigativas. Para Aliaga (2000, p.76), "ainda que o resultado deste tipo de investigação pode ser a formulação de novas hipóteses, a investigação exploratória, em si mesma, não está guiada por nenhuma hipótese prévia".

I.3. Objetivos da investigação

O primeiro objetivo geral é avançar no conhecimento dos fatores e fenómenos didáticos que acompanham ao professorado de Ensino Médio da Galiza, ao por em prática os mecanismos para a instrução do objeto matemático 'Limite funcional'.

O segundo objetivo geral, com carácter transversal, é aportar elementos de comparação na desfuncionalidade que sempre se refere por parte do professorado no momento da instrução motivados polos condicionantes de tempo e materiais de apoio.

O terceiro objetivo geral é estudar e classificar o professorado participante no estudo relativamente a alguns aspetos relacionados com a sua atividade docente e em relação com a instrução do conceito limite funcional.

O primeiro e segundo objetivo permitirá-nos analisar comparativamente as opiniões do professorado desde uma perspetiva realista, que denominaremos *situação atual*, condicionada polos elementos da Instituição, a respeito de uma outra que denominamos *situação ideal*, onde as dificuldades técnicas, de materiais, tempo e programa seriam as 'ideais' para ação instrutiva. A nossa intenção é estabelecer algum elemento de medida da importância que tem para o professorado o contexto real da aula; interessa saber em que grau este contexto condiciona as estratégias, ferramentas e procedimentos, suscetíveis de serem aplicados numa situação hipotética de melhora das condições ambientais e na procura de um maior sucesso académico.

Subordinados a estes dous primeiros objetivos gerais, entrecruzam-se no estudo uma série de objetivos específicos com a intenção comum de conhecer a opinião do professorado – e o seu grau de coincidência- sobre distintos aspetos relacionados com o processo de ensino-aprendizagem do conceito de limite, baseando-se na sua experiência didática. Estes objetivos específicos são:

1. Determinar o nível adequado em que considera que deve impartir-se a noção de limite de funções nos distintos itinerários da ESO ou do Bacharelato.

2. Comparar os resultados obtidos no ponto anterior com as pautas marcadas pola legislação vigente.

3. Identificar a representação ou representações que se considera adequada para a sua introdução.

4. Valorar a importância que adquirem o carácter ontogénico, didático e epistemológico do conceito para a sua apreensão.

5. Valorar a satisfação do resultado obtido na instrução.

6. Determinar a relação, durante a instrução, dos limites de sucessões e de funções.

7. Analisar instrumentos, técnicas e ferramentas que o professorado utiliza realmente na instrução do objeto matemático. A comparação com as que afirma utilizaria numa hipotética “Situação ideal”, aportaríamos uma medida aproximada das carências que o professorado adverte neste aspeto, tanto desde o ponto de vista programático, organizativo ou tecnológico.

8. Conhecer o interesse do professorado polas hipóteses de incorporação de novas tecnologias como apoio didático docente em relação ao conceito de limite funcional.

Como objetivos específicos do terceiro objetivo geral teremos:

1. Agrupar o professorado atendendo o material utilizado.

2. Agrupar o professorado atendendo às estratégias.

3. Agrupar o professorado atendendo aos referentes no processo de instrução do conceito.

Capítulo II

Evolução do conceito de limite

II.1.Introdução

O plano de trabalho deve estar estruturado desde o início para obter as respostas aos interrogantes de um estudo no sentido no que Kerlinger (1979, p.83) chama desenho de uma investigação. Pelos seus objetivos, o presente trabalho de investigação abarca uma variedade de aspetos, todos relacionados com a instrução do conceito, mas a sua vez de diversa natureza. A ideia é perguntar ao professorado sobre diferentes fatores unidos ao conceito, pelo que a estruturação de um marco teórico relativamente uniforme, parece difícil. É por isso que optamos por incluir neste capítulo as referências que de uma ou outra maneira mantêm maior relação com os diferentes aspetos tratados no inquérito formulado.

Desta forma, por exemplo, unida à questão da definição do conceito, contribuímos para o marco referencial, por uma parte com um esboço general sobre sua evolução histórica, e por outra, um segundo, também geral, sobre sua evolução didática em Espanha; unida à questão do nível ou curso adequado para a instrução, acompanhamos como referente fundamental os aspetos pertinentes do marco legislativo atual. Da mesma forma, em relação com outros aspetos objeto de estudo, introduzimos referências teóricas como podem ser, as relacionadas com os obstáculos epistemológicos, imagens conceptuais, fenómenos de retro-alimentação, reflexão na prática docente, novas tecnologias, etc.

II.2. Evolução histórica do conceito de limite

Para Ferrante (2009), o processo evolutivo histórico do conceito de limite podemos dividi-lo em etapas diferenciadas. Blázquez, Ortega e Gatica (2006, pp.192-94) contemplam até quatro etapas na conceptualização. Nas primeiras faz-se uma utilização implícita do conceito sem ter consciência dele e vão evoluindo para finalmente ganhar em rigor e generalização a outros espaços matemáticos. Nessa longa evolução tendente para a concreção, intervêm muitos atores que aportam novas visões. No entanto sua forma atual, a que se ensina normalmente nas faculdades universitárias e em alguns centros de ensino secundário, não aparece até século passado.

A primeira ideia muito intuitiva do processo de passagem ao limite, sem conceito, podemos adivinha-la dentro de um processo implícito que utilizam alguns métodos para resolver problemas, de tipo geométrico, fundamentalmente. Assim podemos pressenti-la em Eudoxo de Cnido (360 a. C.) no seu método de exaustão, que utilizaria popularmente Arquímedes, para aplicar ao cálculo de áreas de figuras, volumes de corpos ou longitudes de curvas. A ideia consistia em aproximar uma figura através de outras nas que se pode medir a magnitude correspondente. Para estimar a superfície do círculo inscrevem-se e circunscrevem-se polígonos regulares de n lados e vão-se duplicando progressivamente o número de lados destes polígonos até que a diferença se esgote ou fique exausta.

Também a ideia ainda não plasmada, flutuava nas mentes de Nicole de Oresme (nos seus estudos sobre series numéricas) e de Kepler, que, preocupado na capacidade dos toneis de vinho em 1615, tratou de descompor com o método dos infinitésimos qualquer corpo em infinitas partes, infinitamente pequenas, com áreas e volumes conhecidos.

A representação de objetos mediante uma super-posição de elementos cuja dimensão era uma unidade menor que a avaliada a utilizou Cavalieri no seu livro *Geometría indibisibilibus*. Fermat e Descartes, a princípios do século XVII trabalham com curvas e tangentes de curvas, e conquanto não falam de limites, os métodos construtivos que utilizam deixa bem perto esse conceito . Assim, Fermat considerava em uma cimeira ou em um vale de uma curva, quando h é pequeno, os valores da função f(x) e f(x+h) se podem tomar como iguais de tão próximos que estão.

A partir de Fermat, Mersenne em 1638, já considera que a curva e a sua tangente em um ponto, coincidem num contorno pequeno de dito ponto. Utilizava critérios de semelhança de triângulos, dividindo f(x-h)-f(x) entre h, fazendo que h valha 0. Na prática estava a calcular, sem nomeá-lo o limite funcional na abcissa do ponto. Finalmente em Barrow, aperfeiçoa o método anterior utilizando os incrementos da variável x e y. A teoria das fluxões, de natureza geométrico mecânica, foi criada por Newton e exposto na obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* em 1736. As fluentes são diferentes formas de movimento mecânico contínuo. São variáveis dependentes do tempo; as velocidades da corrente dos fluentes denominam-se fluxões. No desenvolvimento destas teorias usa métodos baseados no uso de quantidades infinitamente pequenas. Em 1704, na sua obra " Tractatus quadratura curvarum", aparece de forma confusa e não perfeitamente definida a primeira ideia de limite. Utiliza incrementos finitos e numa dada altura afirma "Desvaneçam-se agora aqueles incrementos...". Posteriormente no seu famoso *Principia Mathematica*, clarifica, segundo Boyer (1999, pp. 500-501):

> Quantidades, e a razão de quantidades, em qualquer intervalo finito de tempo convergem continuamente à igualdade, e que dantes do final de dito tempo se aproximam uma à outra mais que qualquer diferença dada, fazem-se finalmente iguais.

Por enquanto Leibnitz, trabalhando nas pendentes da tangente à curva, desde uma perspetiva mais formal da matemática, observa que a pendente da tangente à curva depende da razão entre as diferenças das ordenadas e das abcissas quando estas se fazem infinitamente pequenas. Ainda não tinha aparecido o conceito de função. Foi Euler o criador da Análise a partir do cálculo diferencial de Leibnitz e do método de fluxões de Newton; mas seria D'Alembert, na sua Encyclopedie, a dar a primeira definição de limite, contendo esse termo:

> Diz-se que uma quantidade é limite de outra quantidade, quando a segunda

pode-se aproximar à primeira mais que qualquer quantidade dada por pequena que se possa supor, sem que, não obstante a quantidade que se aproxima possa jamais ultrapassar à quantidade à que se aproxima; de maneira que a diferença entre uma tal quantidade e seu limite seja absolutamente inasignável. (Citado em Ferrante, 2009, p.7)

Cauchy tomaria o conceito impreciso anterior para proporcionar-lhe um carácter mais aritmético e rigoroso, falando já de variáveis. Assim em 1821, no seu *Cours d'analyse de L'École Polytechnique*, propõe a seguinte definição:

> Quando os sucessivos valores que toma uma variável se aproxima indefinidamente a um valor fixo, de maneira que terminam por diferir dele em tão pouco como queiramos, este último valor chama-se o limite de todos os demais”. (Citado em Blázquez, Ortega e Gatica, 2006, p.193)

Baseada nesta mesma ideia de limite, Bolzano proporcionaria uma primeira definição de continuidade; mas a ideia de movimento leva implícita a definição anterior, foi criticada por Weierstrass, que se atreveu a dar uma definição puramente métrica:

> Se, dado que qualquer ípsilon, existe um η_0, tal que para $0<n<\eta$, a diferença $f(x_0 \pm n)-L$ é menor em valor absoluto que ípsilon, então diz-se que L é o limite de f(x) para $x=x_0$.

Finalmente já em pleno século XX, melhorar-se-ia a expressão exacta da definição em termos de ípsilon e delta.

> Seja **f** uma função e **a** um número real. O número **L** é o limite da função **f** no ponto **a** (e escreve-se lim f(x)=L), se, dado um ε real, $\varepsilon>0$, existe um $\delta>0$, tal que se $0</x-a/<\delta(\varepsilon)$, então $/fx)-L/<\varepsilon$.

que também foi expressada topologicamente em terminologia de contornos:

> O número L é o limite de f(x) para x tendendo a **a**, se para todo o contorno de L existe un contorno reduzido de **a** de maneira tal que a cada x pertencente ao contorno reduzido de **a** e ao domínio da função, tem uma imagem f(x) no contorno de L.

A evolução ao longo dos séculos supôs uma evidente concretização no conceito, que para Blázquez, Ortega e Gatica (2006,p.194) não surge desde o campo da didática, senão que "vão orientadas para o rigor matemático e o seu formalismo sintático incrementou com o avanço da matemática; no entanto não tem em conta as aprendizagens dos alunos". Estes autores para o trabalho didático, são partidários de uma conceptualização que contribua com rigor à concepção de D'Alembert e elimine subjetivismo da de Cauchy. Para uma visão linear da evolução da conceptualização do limite podemos ver a figura II.1.

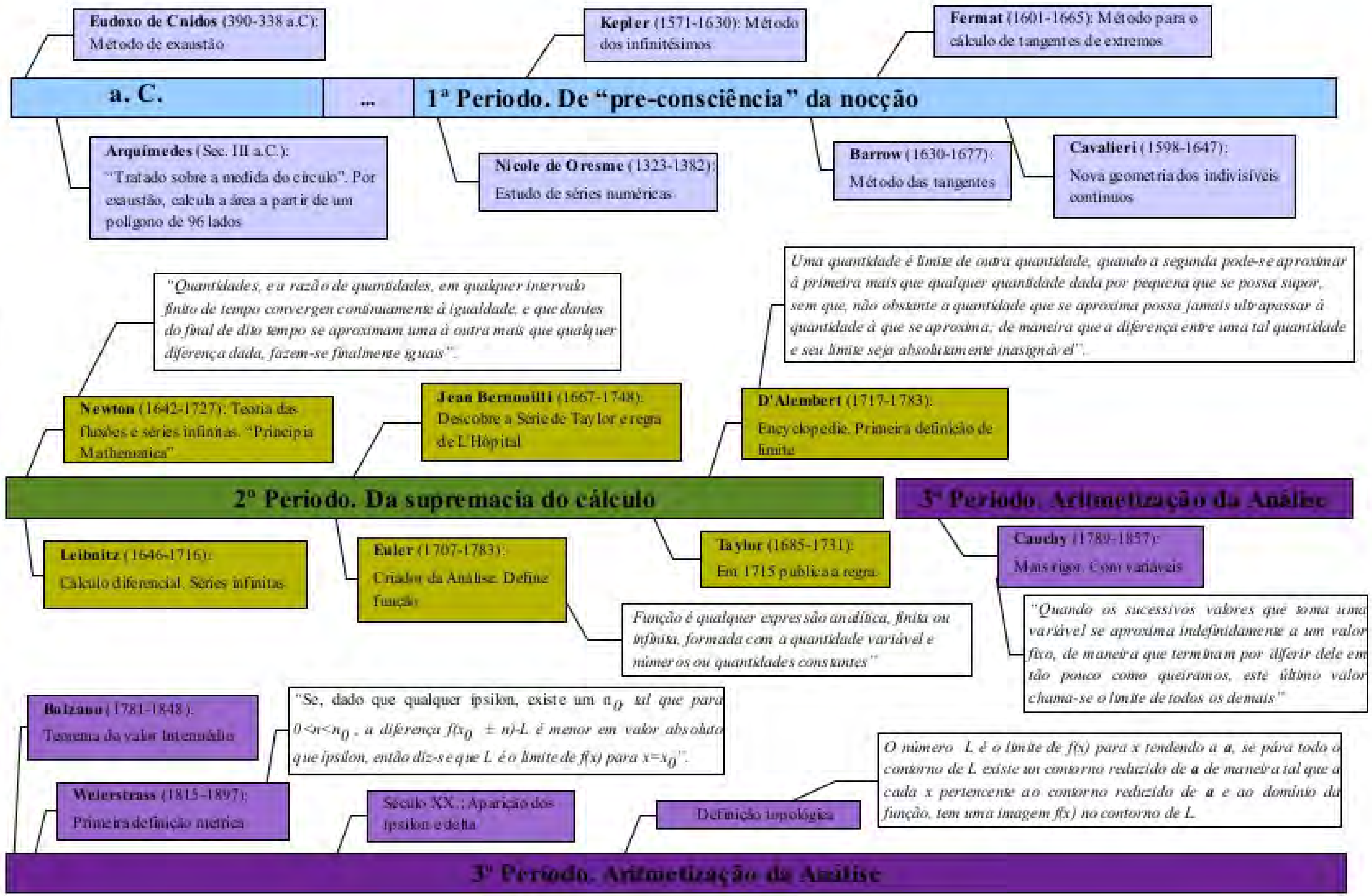


Figura II.1: Esquema evolução do conceito

II.3. Evolução didática do conceito de limite funcional

Da mesma forma em que o conceito de limite funcional foi evoluindo ao longo do tempo, desde uma presença não explícita até uma formalização rigorosa, tal é como vimos no apartado anterior, se nos achegamos à didática do conceito, isto é, à forma em que o conceito de limite funcional é tratado na instrução docente, podemos observar claramente que esta se viu condicionada, na maior parte dos casos, pela concepção do ensino das matemáticas na cada momento histórico. Assim as variações relacionam-se diretamente com as produzidas no contexto (mudanças de programas, reorganizações do sistema educativo, decretos ministeriais, debates didáticos, etc)

Sierra, González e López (1999) analisam a evolução em um período a mais de 70 anos do conceito de limite funcional através dos livros de texto. Evidentemente a forma e intensidade com que este conceito aparece nestes livros, está diretamente relacionado com os programas oficiais da matéria e com as diferentes tendências didáticas que surgiram aos ao longo dos últimos 70 anos. Os autores, classificam o seu estudo em três períodos que, em linhas gerais, correspondem aos diversos planos de estudo espanhóis:

1. Período compreendido entre 1940 e 1967. Compreende os planos do 38 e 56.
2. Período compreendido entre 1966 e 1975. Compreende a introdução da matemática moderna e termina com a implantação do BUP em 1975.
3. Período compreendido entre 1975 a 1995. Começa com a implantação do BUP e termina com a Lei de Ordenação Geral do Sistema Educativo (LOGSE).

Os autores terminam o estudo no período de implantação da LOGSE mas fazem menção ao continuismo com as ideias marcadas pelo período anterior.

II.3.1 Evolução nos últimos decénios

Baseando-nos no trabalho de Sierra, González e López (1999) e dentro do marco do presente estado da questão, efetuaremos um pequeno percurso histórico pelo ensino da matemática nos últimos 70 anos, para responder as seguintes perguntas:

1. Em que momento se introduz o conceito de limite? De que maneira se introduzem? enquadrado em que programa? Com que rigor?

2. Que tipo de definição se utiliza?

3. Baseadas em que teorias de ensino-aprendizagem?.

4. Quais são os fenómenos referentes a situações reais ou próprios de outras ciências que se utilizam na aprendizagem?.

II.3.1.1 Contexto da introdução do conceito de limite. Programas nos que se estuda.

Na primeira época após a Guerra Civil espanhola, não aparece ao menos explicitamente o cálculo diferencial e integral. Em 1953 dividiu-se o Bacharelato em elementar (10-14 anos) e superior (14-16 anos). A superior tinha duas especialidades denominadas ciências e letras. O chamado preuniversitario, era curso ponte com os estudos universitários. A matéria de matemáticas era obrigatória no Bacharelato elementar e na especialidade de ciências do Bacharelato superior. O conceito de limite e continuidade aparece o sexto curso (16 anos) dentro do bloco de análise, unido conceito de sucessão e aplicado para a continuidade de funções.

Com a irrupção da Matemática Moderna introduziu-se, nos anos 66 e 69, o novo programa, baseado na Teoria de Conjuntos e nas Estruturas Matemáticas em sentido Bourbakista. A ideia era estudar os conceitos fundamentais. Os outros tratariam-se nos exercícios para os alunos (Sierra, González e López, 1999). O limite coloca-se brevemente em quinto curso (15 anos) com as funções de variável real, aprofundando em sexto curso ambos conceitos, primando o ponto de vista topológico.

A Lei Geral de Educação foi promulgada em 1970 e estabeleceu o Bacharelato unificado e polivalente, BUP e o curso de orientação universitária, (COU). As matemáticas eram obrigatórias em princípio nos três cursos de Bacharelato. Posteriormente o terceiro passaram a ser optativas. O conceito de limite aparece em segundo curso de BUP, aos 16 anos e, em contraposição à orientação antropológica anterior, sugere-se introduzir de forma métrica. Como contra-prestação o cálculo de limite se reduz a casos singelos. Segundo Rico e Sierra (1997, p.46) "a influência de grandes psicólogos cognitivos da época, principalmente Piaget e Bruner fez que se defendesse o ensino das estruturas matemáticas aos meninos e adolescentes baixo argumentos cognitivos, que respondeu à moderna teoria da aprendizagem e ao seu carácter evolutivo".

Em 1987 modifica-se o plano de estudos de COU, introduzindo matemáticas II nas opções que estavam orientadas às ciências humanas e sociais. E a formalização do conceito de limite é prescindível e convida-se a não utilizar uma anotação rigorosa para definir o conceito.

Em 1990 com a promulgação da LOGSE reestruturara-se todo o ensino secundário, ficando esta em linhas gerais da forma que está estabelecida na atualidade. Aqui as matemáticas agora são contempladas como um conjunto de conhecimentos que nascem da necessidade de resolver problemas práticos. Agora o conhecimento matemático consiste mais que na posse dos resultados finais desta ciência, no domínio da sua 'forma de fazer'. O conceito de limite introduz-se agora no primeiro curso de Bacharelato, tanto de letras como de ciências, permanecendo ausente de toda a educação secundária obrigatória.

Atualmente a Lei vigorante é a LOMCE que no que diz respeito ao conteúdo e ao nível em que é impartido no bacharelato não sofreu modificações percetivas.

II.3.1.2 Tipo de definição

No primeiro período a definição de limite cimenta-se na ideia de infinitésimos e na linguagem de incrementos a partir dos conceitos de variável e de sucessão; acompanhadas da já clássica definição baseada na linguagem de sucessões:

> Uma função f(x) têm limite **b** quando a variável **x** tende para **a** quando elegendo qualquer sucessão de valores x_1, x_2, x_3,.. x_n que tem limite **a**, os correspondentes valores de f(x): f(x_1), f(x_2), f(x_3)... têm por limite b.

Com Sixto Rios o conceito de limite começa-se definir a partir das funções:

> O limite de uma função f(x) quando x tende para **a** é o número **b**, se se verifica que os valores da função f(x) se aproximam tanto como queiramos a **b**, tomando os valores da variável **x** convenientemente próximos a **a**.

Aparece também uma interpretação geométrica de limite através de contornos. Começa assim uma mudança na definição desde a ideia de variável até a introdução do conceito de função.

No período correspondente às matemáticas modernas, a definição de limite deriva a um maior formalismo, predominado o enfoque topológico, onde tinham importância os contornos.

No período correspondente ao BUP e ao COU, a definição de limite toma um cariz principalmente métrico. Também se enfatiza pela primeira vez o conceito de limites laterais:

> Diremos que uma função f(x) tem por limite b quando x tende à pela direita quando, para todo número positivo ε (por pequeno que seja) existe um número positivo δ, dependente de ε , tal que se cumpra: 0< x-a <δ então /f(x)- b/ < ε.

Analogamente define-se o limite pela esquerda. Dá-se-lhes o nome de limites laterais e afirma-se que quando existem o limite de f(x) no ponto também existem os limites laterais, e os três são iguais entre si.

A continuação colocamos exemplos destas definições usadas nos distintos períodos na Tabela II.1.

Período	Exemplo de definição
Anos 1940-67	*"Diz-se que a variável tem um limite ou tende a um limite se, na sucessão dos seus valores, verifica-se que a partir de um deles a diferença entre os demais e o limite é em valor absoluto tão pequena como se queira".*
Matemática moderna (1967-75)	*"Diremos que uma função f(x)=y tem por limite b para x=a , quando para tudo contorno E_b do ponto b, se verifica que $f^{1}(E_b) = E_a - a$, ou bem, $f^{1}(E_b) = E_a$. No segundo caso, além de ter limite a função em x=a , diremos que é contínua em dito ponto".*
BUP-COU (1975-95)	*"Diremos que uma função f(x) tem por limite b quando x tende à pela direita quando, para todo número positivo ε (por pequeno que seja) existe um número positivo δ, dependente de ε , tal que se cumpra:* $0 < x\text{-}a < \delta$ *então* $/f(x)\text{-} b/ < \varepsilon$*."*
LOGSE-Actualidade	*"Uma função f(x) têm limite b quando a variável x tende para a quando elegendo qualquer sucessão de valores x_1, x_2, x_3,.. x_n que tem limite a, os correspondentes valores de f(x): $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$... têm por limite b".*

Tabela II.1: Exemplos de definições mais usadas em distintos periodos.

No primeiro período correspondente aos anos 50 e 60, o conceito de limite tem um carácter fundamentalmente instrumental. A pretensão era encontrar umas regras singelas se permitissem calcular rapidamente o limite de variáveis complicadas nas que intervêm operações algébricas transcendentes. Predomina o carácter intuitivo nas demonstrações em frente à rigorosidade. Procura-se a memorização de definições e propriedades e a prática como as capacidades a desenvolver no aluno.

No período correspondente as matemáticas modernas, estas constroem-se a base de conjuntos e aplicações. Parece lógico então a orientação topológica que predomina na reforma. Estão presentes a aprendizagem de definições mediante atividades dirigidas e a aplicação das definições na resolução de exercícios. Há uma preponderância clara de aspetos topológicos sobre os métricos no conceito de limite conquanto "começa-se a considerar ao aluno como sujeito que aprende, tratando de explicar esta aprendizagem desde as teorias piagetianas" (Sierra, González e López, 1999, p.17). Desta forma também se aprecia em muitos casos que o aluno vá construindo rigidamente os conceitos, que se achegue a algumas demonstrações e realize exercícios.

No período correspondente ao BUP, procura-se o rigor ao mesmo tempo em que a inteligibilidade do conceito. Um rigor conjugado com a visibilidade do conceito, que não sempre é conseguida. Aqui predomina a quantidade e variedade de exemplos e exercícios para atingir o objetivo do entendimento. É o período onde ao final do capítulo aparece em exercícios de revisão recapitulação e ampliação. Procura-se desenvolver atividades como aprendizagem das definições de forma simbólica, com a manipulação de símbolos e regras, reconhecer o método dedutivo, e adquirir ferramentas para a resolução e entendimento de exercícios e propriedades.

Com a entrada em vigor da LOGSE (1990), e mais tarde da LOE (2006) decide-se incrementar a importância concedida à motivação por acreditar no surgimento do conceito de forma natural, procuram-se um apoio que não existe na história das matemáticas e nas suas aplicações; focaliza-se a apresentação intuitiva dos conceitos dantes que seu desenvolvimento formal e acrescenta-se a intensidade na realização de exercícios e problemas de diversos tipos. Estão presentes agora as influências da fenomenologia didática, a aprendizagem por descoberta e o método de resolução de problemas.

Com o intuito de esclarecer os aspetos antes citados, podemos observar a tabela II.2.

	Período 1940-1967	***Período matemáticas modernas (1967-75)***	***Período BUP-COU (1975-1995)***	***Período*** LOPEG-LOCE-***LOGSE-LOE -LOMCE***
Lei em vigor	*Plano de 1938 e plano de 1953*	*Decretos com modificações pontuais de planos anteriores.*	*Lei Geral de Educação e Financiamento da Reforma Educativa (Villar Palasí) (1970)*	*LOE, uma norma que funde a LOGSE, a LOPEG e a LOCE,*
Em que momento se introduz o conceito de limite? Curso/idade	*6º curso / 16 anos*	*5º curso (introdução)* *6º curso (desenvolvimento)*	*2º curso de BUP/ 15-16 anos.*	*1º curso de Bacharelato / 17 anos*
Com que rigor?	*Forte componente intuitivo*	*Avanço a um maior formalismo*	*Formalista combinado com representações gráficas.*	*Intuitiva em matemáticas aplicadas as CC.SS; formalista em Matemáticas II*
1. **Que tipo de definição predomina?**	*Infinitésimos/ sucessões unidas a variáveis*	*Topológica.*	*Métrica. Secundariamente, por sucessões.*	*Métrica / por sucessões*
Baseadas em que teorias de ensino-aprendizagem?.	*Ensino tradicional: memorização de definições e propriedades e prática.*	*Teoria bourbakista: Estrucuras algébricas, de ordem e topológicas*	*Formalista estruturalista. Influída por psicólogos cognitivos (Piaget, Bruner)*	*Construtivista (o alunado deve aprender sozinho e o professor deve ajudar-lhe a descobrir as coisas)*
2. **Fenomenologia.**	*Escassa e unida à geometría.*	*Só de casos relativos às matemáticas.*	*Abundante, relativo a vida real e outras ciências*	*Abundante, mas pouco utilizada na prática.*

Tabela II.2: Esquema evolução na didática do conceito de limite funcional nos últimos 70 anos.

II.3.1.3 Fenómenos referentes a situações reais ou próprios de outras ciências

Na primeira etapa qualquer situação de carácter fenomenológico que se aparte de aspetos puramente matemáticos é realmente escassa, fora as de componente geométrico relativo a retas secantes a uma curva e a as suas pendentes.

Também as referências a situações da vida real ou fenómenos relativos a outras ciências diferentes das matemáticas também não abundam no período compreendido entre 1966 e 1975 e que se corresponde, como sabemos, a introdução das chamadas Matemáticas Modernas. Mal há referências exteriores à própria matemática e inclusive os problemas de tipo geométrico utilizados no período anterior são agora menos frequentes. O conceito de limite simplesmente unido a funções expressadas de forma algébrica. “Toda uma geração de professores e alunos transmitirão e assimilarão umas matemáticas sem conexão com outras ciências e fenómenos”. (Sierra, González e López, 1999, p. 470).

Durante o período correspondente ao Bacharelato unificado e polivalente, o conceito de limite, em segundo de BUP aparece, geralmente, já unido a situações da vida diária por fenómenos da natureza: a relação entre o volume de uma caixa e o seu lado, a altura da água de um depósito e o tempo que demora em encher, a intensidade do som e a distancia foco. Poderíamos dizer que neste período o conceito de limite está tratado baixo o prisma em que se concebem a aprendizagem das matemáticas em geral: aparte de aspetos formais, são uma ferramenta para interpretar ou predizer diversos fenómenos.

II.3.2 O conceito de Limite Funcional no atual currículo oficial do Ensino Médio na Galiza

Em geral todo o relacionado com este conceito, aparece marcado nas matérias de Matemáticas I e II do Bacharelato de Ciências e Matemáticas I e II do Bacharelato de Ciências Sociais. A ordenação do currículo do Bacharelato na Comunidade Autónoma da Galiza estava regulada no momento do inicio do trabalho pelo decreto 126/2008 do 19 de Junho .

Na introdução de dito decreto o legislador situa o nascimento da Matemática como caminho de solução de problemas provenientes das tentativas de compreender e apurar a realidade física que nos rodeia. Mais tarde, Pitágoras iniciou o passo necessário para dotar às matemáticas de um carácter abstrato e independente da realidade física.

Essas duas vertentes tentam ser mantidas no curriculum de Bacharelato tal e como se afirma na introdução:

> A idade do alunado de Bacharelato e os vários anos de contacto com o saber matemático proporciona uma boa base para dar os primeiros passos no caminho do pensamento científico, onde não só seguirá estando presente a intuição, senão também o seu questionamento, a dedução, a argumentação, à utilização precisa da linguagem, etc., todo o que constitui um caminho para o formal e o abstrato (Xunta de Galicia, 2008, p.12294)

Tudo isto sem perder de vista as circunstâncias em que se encontra o processo didático. Assim se reconhece que:

> Os passos que seguem nesta direção durante toda a etapa devem ser pausados e curtos, sem prescindir nunca da realidade de que surge o conhecimento matemático com o que se aplica. Ademais, apresentando às alunas e aos alunos situações variadas surgidas tanto da própria matemática como as outras ciências, da tecnologia ou do seu contorno próximo para que as pesquisem, mostrando as relações das matemáticas com outros campos do saber. (..) (Xunta de Galicia, 2008, p.12295).

Não se nega em nenhum momento no currículo de Matemática o sesgo conceptual do mesmo. Ainda que não deixa de se insistir nos procedimentos e nas atitudes. Estes últimos deveriam refletir-se com mais precisão nos critérios de avaliação.

O espírito LOGSE, com a sua visão construtivista da aprendizagem, fica plasmado no texto de introdução do decreto e no referente aos objetivos. Assim se nos faz questão de que:

> Uma versão da forma de fazer matemáticas a proporciona a resolução de problemas, onde quase sempre é necessário começar pondo exemplos concretos que esclareçam a situação problemática, ou procurando contra exemplos, para passar a utilizar estratégias de ensaio-erro sistémico, executar

> procedimentos algorítmicos a mão ou com a ajuda de calculadora, fazer simulações com o computador, utilizar a intuição, contrastar as soluções encontradas, apresentar o trabalho realizado de uma forma ordenada e coerente, utilizando o vocabulário técnico com precisão. (Xunta de Galicia, 2008, p.12295).

O legislador quer incidir nos meios que o professorado deveria utilizar no seu processo didático. Merecem especial atenção as calculadoras e programas informáticos, sistemas de álgebra computacional, sistema de geometria dinâmica e folhas de cálculo. Chama a atenção a insistência em que todos eles devem-se utilizar, além de para a realização de cálculos ou elaboração de gráficas, como uma ajuda no processo de ensino de conceitos ou propriedades .

Na matéria de Matemática Aplicada às CC.SS. I e II, recolhe-se na introdução a

> necessidade de proporcionar ao alunado de Bacharelato de humanidades e ciências sociais a possibilidade de conhecer aquelas ferramentas matemáticas básicas, imprescindíveis para representar, sintetizar, otimizar ou comunicar por meio de gráficas, expressões algébricas, tabelas etc. a informação relevante que lhes facilite a análise e o entendimento de alguns problemas das ciências sociais. (Xunta de Galicia, 2008, p.12328)

Por esse motivo, destas matemáticas terão, afirma o documento, um sesgo marcadamente instrumental, predominando as aplicações práticas sobre o conteúdo formal ou conceptual. Mesmo assim faz-se questão de que os conceitos e os procedimentos devem-se dotar de significado para poder ser aplicados, evitando que o aluno considere as matemáticas "como um conjunto de fórmulas e procedimentos que se devam aplicar irrefletidamente na análise de diferentes situações problemáticas das ciências sociais" (p.12329) Marco preferente volta a ser de novo o desenvolvimento das capacidades em um contexto de resolução de problemas, próprio, -segundo o documento- dos dois cursos de Bacharelato. E é que a argumentação do documento legislativo, não se cansa de insistir, fiel ao já comentado espírito LOGSE, neste como método adequado para desenvolver as capacidades pessoais e sociais aplicáveis em diferentes campos das ciências sociais.

Os objetivos marcados pelo decreto de Ordenamento do Bacharelato na área das matemáticas os dous âmbitos, procuram o desenvolvimento de, entre outras, as capacidades resumidas na tabela II.3.

Nível	Objetivos
Matemática Bacharelato (Nos dois âmbitos)	• *Aplicar os conceitos, procedimentos e estratégias próprias das matemáticas a situações diversas.* • *Realizar investigações, explorar fenómenos, resolver problemas e situações provenientes de atividades quotidianas ou de diferentes âmbitos do saber.* • *Utilizar as estratégias características de investigação científica e as destrezas próprias das matemáticas.* • *Adquirir o rigor no pensamento científico formulando acertadamente os problemas, estabelecendo definições precisas e comunicando-se com eficácia e precisão.* • *Empregar os atuais recursos tecnológicos para obter e processar informação, facilitar o entendimento de conceitos e propriedades matemáticas, realizar cálculos e representações gráficas e servir como ferramenta na resolução de problemas.* • *Relacionar as matemáticas com outras áreas do saber, valorizando as contribuições que se fazem entre elas para o seu respetivo desenvolvimento.*
Matemática Bacharelato CC.SS.	• *Apreciar as matemáticas como parte integrante de nossa cultura, compreendendo o que contribuem rendimento no desenvolvimento dos meios social, cultural ou económico*

Tabela II.3: objetivos do decreto 126/2008 para as Matemáticas no Bacharelato.

Atualmente no período obrigatório do ensino secundário, (ESO) não aparece explicitado o conceito de limite funcional, na programação de nenhum dos quatro cursos. Pelo contrário o decreto 126/2008, que estabelece a ordenação e o currículo do Bacharelato na Galiza, introduz o conteúdo relativo ao conceito de limite funcional, da seguinte forma:

- No primeiro curso de Bacharelato de ciências, na matéria de Matemáticas I, dentro do bloco de análise, aparece sob o epígrafe "*aproximação, numérica e gráfica, ao conceito de limite de uma função, tendências e continuidade*". Tudo isto, após ter trabalhado o tema de funções reais de variável real, o estudo do seu domínio, percurso, crescimento e decrescimento, extremos, concavidade e convexidade, e após as operações com funções. Nos critérios de avaliação não aparece em nenhum momento a ideia do limite como exigível sob algum dos aspetos explicados. Desta forma relega-se quase totalmente ao segundo e último curso de Bacharelato a introdução mais formal do conceito.

- Nesse segundo curso, também no bloco de análise, aparece , agora sim explicitado, sob o epígrafe de *"conceito de limite de uma função. Cálculo de limites singelos.*" O objetivo neste caso parece ser o estudo do conceito de limite como simples instrumento para os temas seguintes relativos à continuidade de uma função e ao conceito de derivada. Nos critérios de avaliação deste segundo curso, no ponto 4, especifica-se que se devem "utilizar os conceitos, propriedades e procedimentos adequados para encontrar e interpretar características destacadas de funções expressadas analiticamente.". Mais adiante, afirma-se que concretamente "se pretende comprovar a capacidade para utilizar os limites e as derivadas no estudo da continuidade, crescimento e decrescimento, concavidade e convexidade, extremo relativos e assimptotas da função. O ponto 5 especifica mais ao exigir-se "aplicar o conceito e o cálculo de limites e derivadas ao estudo de fenómenos naturais e tecnológicos e à resolução de problemas de otimização".

- Nos conteúdos correspondentes às matemáticas aplicadas às ciências sociais, do 1º curso de Bacharelato, aparece o conceito de limite camuflado sob o epígrafe titulado *estudo, por métodos gráficos e numéricos, de uma função nas proximidades de um ponto e dos comportamentos asintomáticos*. Nos critérios de avaliação deste primeiro curso, junto à exigência de reconhecimento dos fenómenos económicos e sociais das funções mais frequentes e à interpretação de situações em contextos sociais e económicos, também se plasma o critério do estudo dos comportamentos locais em uma função, mediante métodos gráficos ou numéricos. Essa é toda a referência ao conceito de limite na matéria de Matemáticas Aplicadas às Ciências Sociais I.

- No curso correspondente a 2º de Bacharelato de ciências sociais aparece explicitamente já o conteúdo correspondente ao conceito de limite, conquanto se contempla, em concordância com as ideias gerais de tratamento instrumental da matéria, uma simples *aproximação aos conceitos de limite e de continuidade. Interpretação dos diferentes tipos de descontinuidade e das tendências assimptóticas no tratamento da informação*. Para os critérios de avaliação, o conceito de limite, especificamente desaparece ou mostra-se diluído. Simplesmente, estipula-se a necessidade de *analisar e interpretar fenómenos habituais das ciências sociais suscetíveis de ser descritos mediante uma função, a partir do estudo qualitativo e quantitativo das suas propriedades mais características*. A intenção, afirma o documento, será estudar propriedades globais e locais para extrair informação da função.

Podemos resumir que o conceito de limite funcional, em toda a amplitude do termo, só é tratado no segundo curso de Bacharelato de Ciências. No primeiro curso mal aparece uma introdução.

Quanto às Matemáticas aplicadas às Ciências Sociais, o documento não faz referência explícita em nenhum momento ao conceito de limite no primeiro curso, e apenas é tratado como aproximação ao conceito no segundo curso. Para além do que indique a legislação, está, evidentemente, o desenvolvimento e especificação do conceito que o professorado utiliza nas aulas, que sempre será bem mais avançado que a síntese formulada em qualquer decreto legal de âmbito educativo.

Na seguinte tabela II.4 resumimos a menção do conceito de limite funcional enquadrado no currículo vigorante no momento do inquérito.

Decreto 126/2008			
Curso	**Conteúdos**	**objetivos**	**Critérios Avaliação**
Matemáticas I (Ciências)	*Aproximação, numérica e gráfica, ao conceito de limite de uma função, tendências e continuidade*	Aplicação ao estudo de características funcionais	Não aparece
Matemáticas Aplic. CC.SS. I	*Estudo, por métodos gráficos e numéricos, de uma função nas proximidades de um ponto e dos comportamentos asintomáticos*	Aplicação às funções representativas de fenómenos económicos e sociais	Exigência de reconhecimento e interpretação dos fenómenos económicos e sociais
Matemáticas II (Ciências)	*Conceito de limite de uma função. Cálculo de limites singelos*	Utilizar os conceitos, propriedades e procedimentos adequados para encontrar a interpretar características de funções expressadas analiticamente	Utilizar os limites e as derivadas no estudo da continuidade, monotonia, concavidade e convexidade, extremo relativos e assimptotas da função
Matemáticas Aplic. CC.SS. II	*Aproximação aos conceitos de limite e de continuidade. Interpretação dos diferentes tipos de discontinuidade e das tendências asimptóticas no tratamento da informação*	Estudar propriedades globais e locais para extrair informação da função	Analisar e interpretar fenómenos habituais das ciências sociais susceptíveis de ser descritos mediante uma função

Tabela II.4: Resumo dos aspetos relacionados com o Limite funcional no decreto 126/2008

Neste momento o marco que recolhe o regulamento é o Decreto 86/2015 do 25 de Junho, polo que se estabelece o currículo do Ensino Secundário Obrigatório e do Bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia.

Ainda que nele se abrem duas vias para o aprendizado da matemática em 3º curso da ESO (Matemática orientada ao Ensino Académico, e a orientada ao Ensino Aplicado) segundo se pretenda continuar polas vias do Bacharelato ou da Formação Profissional, na prática, no que diz respeito ao nosso estudo não há variações significativas, já que o os conteúdos relativos ao conceito de Limite Funcional estão projetados para serem impartidos nos mesmos níveis que na legislação precedente, e com a mesma extensão e profundidade.

O novo decreto recolhe na introdução no apartado de matemática, que “é necessario utilizar conceitos, propriedades, procedimentos e as linguagens adequadas para exprimir as ideias matemáticas, e resolver os problemas associados com a situação em questão.(Xunta de Galicia, 2015:*26039).* Para o legislador, a competência matemática consiste em

> adquirir um hábito de pensamento matemático que permita estabelecer hipóteses e contrastá-las, elaborar estratégias de resolução de problemas e ajudar na toma de decisões adequadas tanto na vida pessoal como na sua futura vida profissional (Xunta de Galicia, 2015, p.26039).

Como se concebe o currículo em blocos, mas conectados internamente, tanto no curso como nas etapas, fala-se de globalidade no conteúdo da matéria e contempla-se, por exemplo, um bloco primeiro “Processos, métodos e atitudes em matemática” que está desenhado para ser transversal a toda a matéria e que evolui desde “a resolução de problemas em 1ª da ESO até as demonstrações formais no segundo curso de Bacharelato” (Xunta de Galicia, 2015, p.26039).

Os eixos que se estabelecem para o ensino da disciplina são a resolução de problemas e os projetos de investigação, nas que se pretende estejam involucradas todas as competências e através duma metodologia ativa e contextualizada, baseada numa aprendizagem cooperativa onde cada pessoas poda desenvolver distintos papeis, achegando ou incorporando ideias, assumindo responsabilidades e aceitando erros. (p. 26040). Tudo mediante atividades ou projetos matemáticos que ponham em contacto os conteúdos apreendidos e o trabalho em equipa. No mesmo sentido aborda o legislador a matéria de Matemática aplicada às CC.SS., que sem variar de nível com respeito à legislação anterior, na introdução deste apartado, apenas a diferencia da matemática de Ciências, ressaltando que

> as matemáticas têm um carácter instrumental como base para o progresso na aquisição de conteúdos doutras disciplinas. Por exemplo, na economia, a teoria económica explica os fenómenos económicos com uma base matemática. A Teoria de Jogos ou a Teoria da decisão são outro exemplo das aplicações neste campo. Na

sociologia e nas ciências políticas emprega-se cada vez com maior frequência a análise de inquéritos, entre outras aplicações (Xunta de Galicia, 2015, p.26101).

Na tabela II.5 expomos os conteúdos, objetivos e critérios de avaliação recolhido no novo Decreto 86/ 2015.

Decreto 86/2015			
Curso	**Conteúdos**	**Estándares de aprendizagem**	**Critérios Avaliação**
Matemáticas I (Ciências)	*Conceito de Limite duma função num ponto e no infinito. Limites laterais. Indeterminações*	Representa graficamente funções, após um estudo completo das suas características.	Estudar e representar graficamente funções obtendo informação a partir das suas propriedades.
Matemáticas Aplic. CC.SS. I	*Ideia intuitiva de Limite duma função num ponto. Cálculo de limites singelos. O limite como ferramenta para o estudo da continuidade e das assímptotas.*	Aplicação às funções representativas de fenómenos económicos e sociais	Calcular limite finitos e infinitos duma função num ponto ou no infinito, para estimar as tendências.
Matemáticas II (Ciências)	*Limite duma função num ponto e no infinito. Continuidade duma função. Tipos de descontinuidade. Th de Bolzano.*	Aplica os conceitos de Limite e de derivada à resolução de problemas, assim como os teoremas relacionados.	Utilizar os limites e as derivadas no estudo da continuidade,num ponto ou num intervalo.
Matemáticas Aplic. CC.SS. II	*Não aparece explicitamente. Estuda-se a continuidade de funções elementais ou definidas a troços.*	Modeliza funções contínuas e definidas a troços. Calcula assímptotas de func. Singelas. Continuidade usando limite	Analisar e interpretar fenómenos habituais das ciências sociais de forma objectiva traduzindo a informação a linguagem de funções.

Tabela II.5: Resumo dos aspetos relacionados com o Limite funcional no decreto 86/2015

II.3.3 Tratamento do conceito de limite nos livros de texto

Os livros de texto são testemunhas dos conhecimentos que a sociedade considera relevantes num momento determinado (González, 2002). Por esse motivo diversas investigações têm como alvo o conhecimento e análise deste clássico recurso do processo de ensino-aprendizagem. Para além do contemplado no curriculum oficial do Bacharelato na

Galiza, no momento de formalizar e explicitar os conteúdos do decreto, é uma boa ajuda recorrer aos livros de texto mais habituais para fazer-nos uma ideia da extensão e profundidade com que o conceito é tratado e desenvolvido segundo as normas oficiais.

Claros, Sánchez e Coriat (2007), estudam a presença de dois fenómenos específicos que denominam *aproximação intuitiva* e *retro-alimentação*. Os fenómenos de aproximação intuitiva resultam da perceção do limite em forma dinâmica, intuitiva ou, simplesmente, menos rigorosa. Falamos, em essência, do progresso dos termos da sucessão de números reais ou da evolução, no caso das funções das variáveis dependente e independente. A expressão *parecem acercar-se* é a mais adequada para interpretar nitidamente o conceito. Pelo contrário, a retro-alimentação manifesta-se "*ao interpretar e aplicar as ações incluídas na definição formal do limite desde uma perspetiva métrica*" (p.127). Trata-se em essência de um processo de ida e volta. Simplificando a ideia, a viagem de um ípsilon do eixo de ordenadas a um delta no eixo de abcissas e a volta, de novo, para comprovar, no eixo de ordenadas. Os autores também estabelecem diferenças simbólicas nas definições formais do limite tanto de uma sucessão como de funções.

Seguidamente analisam 26 livros de texto e -considerando quatro sistemas de representação: verbal tabular, gráfico e simbólico- estabelecem exemplos paradigmáticos extraídos dos livros de texto. Entre as conclusões que merecem menção e que interessam ao nosso trabalho, podemos destacar que na maioria dos currículos o conceito de limite de uma sucessão precede ao conceito de limite de uma função, acompanhando a proposta de Tall e Vinner (1981). Também se destaca que, após a entrada em vigor e extensão generalizada da LOGSE, produz-se um auge nos fenómenos de aproximação intuitiva em detrimento dos fenómenos de retro-alimentação. Para Claros, Sánchez e Coriat (2007: 135) "*o desequilíbrio observado no período LOGSE outorga bem mais peso à intuição do conceito de limite que aos enfoques mais precisos, que exigem manejar os fenómenos de retro-alimentação*".

Merece ser destacada outra conclusão no citado trabalho no sentido de que a maioria dos livros de texto define o conceito de limite utilizando apenas algum dos sistemas de representação, desprezando o benefício, na compreensão do conceito, que aportaria ao alunado a possibilidade de passar de um sistema de representação a outro.

Conejo, Arce e Ortega (2015) convencidos de que as demonstrações são importantes para a compreensão da matemática, consideram que devem figurar nos livros de texto do bacharelato. Demonstrar os resultados sobre limites, ajudam a melhor compreensão do conceito. Analisam a evolução da demonstração matemática nos textos escolares, chegando à conclusão de que os livros mais modernos tendem a dar definições formais do limite e não são tratados exclusivamente como ferramenta para estudar funções. Para além das definições, formulam-se as propriedades dos limites. Notam que no penúltimo curso as definições são a través de sucessões de imagens, mais intuitiva, enquanto no último ano de bacharelado já aparece formalmente com o rigor do Ípsilon e Delta.

Partidários também duma definição matemática rigorosa do conceito de limite, Henning e Hoffkamp (2013) consideram que introduzir o conceito de forma intuitiva não é uma boa base. Os conceitos matemáticos avançados, como são o de limite funcional, fazem com que o professor sempre tenha que tomar decisões didáticas sobre o que ensinar de forma intuitiva e o que de forma matematicamente rigorosa.

II.3.4 Obstáculos epistemológicos e imagens conceptuais

Dentro do campo da didática da análise matemática os estudos aparecem historicamente centrados em três marcos teóricos: a teoria dos campos conceptuais, a de situações didáticas e a transposição didática. A engenharia didática desempenha um papel relevante no estudo epistemológico dos conceitos, das concepções dos estudantes e das concepções dos professores.

Bachelard (1948) estudou o conceito ‘obstáculo epistemológico’ nas ciências experimentais. Entende o conhecimento científico em termos de obstáculos, entendidos estes como entorpecimentos e confusões internas que aparecem numa ideia, realmente por necessidade funcional e produzem estancamentos e mesmo retrocesso no desenvolvimento do conhecimento.

Faz já mais de 30 anos, Bernard Cornu aplica na sua tese de doutoramento a ideia dos obstáculos epistemológicos, -baseados na evolução histórica do conceito-, ao estudo do objeto matemático. Em linhas gerais propõe a necessidade de abordar o conceito de limite desenvolvendo atividades de aproximação sob perspetivas geométricas e numéricas.

No âmbito da educação matemática foi Brousseau (1983) quem aponta a aparição de obstáculos epistemológicos, no processo de estudo do aluno e na história das ideias matemáticas. A teoria de obstáculos epistemológicos centrada na concepção de que o conhecimento se produz ao superar um obstáculo. Os erros produzidos no alunado na aprendizagem de um conceito determinado, têm -segundo o autor- uma característica de certa persistência, resultando difíceis de vencer. Só a interação do aluno com alguma situação que faça remover suas concepções ou crenças erradas, pode vencer a persistência pre-conceptual. Para o autor um obstáculo é

> aquele conhecimento que foi em geral satisfatório durante um tempo para a resolução de certos problemas, e que por este motivo se fixa na mente dos estudantes, mas que posteriormente resulta inadequado e difícil de adaptar-se no momento em que o aluno se enfrenta com novos problemas.

Em todo caso, trata-se de um conhecimento adquirido, não uma falta de conhecimento, que dificulta o avanço. Resulta difícil de erradicar e poderá persistir ao longo da sua vida (Páez, 2004)

A classificação de obstáculos de Brousseau vem dada pela sua origem: os obstáculos de origem ontogénico provêm de limitações do próprio sujeito; os de origem didático, dependem da proposta educativa, e os de origem epistemológico, do próprio conceito.

Sierpinska (1985) adentra-se no campo dos obstáculos epistemológicos para, partindo da história do conceito, tentar identificar as dificuldades que os alunos manifestariam na sua aprendizagem. Mais tarde, no ano 1987, tenta, de forma fundamentalmente prática, um desenvolvimento do conceito que favoreça a superação dos obstáculos. Na mesma linha, mas no campo da engenharia didática, Robinet (1983) propôs uma generalização do conceito de limite funcional a partir do estudo gráfico de funções elementares.

Intimamente unida à ideia de conceito surge a teoria das imagens conceptuais de Tall e Vinner (1981). A 'imagem conceptual' é a estrutura cognitiva associada a um conceito, incluindo ideias mentais, propriedades e processos relacionados; da incoerência da imagem conceptual de um indivíduo, da contradição com a definição formal do conceito, aparece o conflito cognitivo. No caso de limite funcional este conflito cognitivo produz-se pela ideia, pela imagem de aproximação de x para um ponto **a** e a consequência de que f(x) se aproxime ao limite sem o atingir.

Para Mallet (2013) um obstáculo cognitivo é uma situação em que uma estrutura mental existente é apropriada para um domínio, mas provoca dificuldade com a aprendizagem em outro domínio devido à compatibilidade com a nova situação ou conceito.

Blázquez e Ortega (2000) realizam uma investigação sobre dificuldades que apresenta o conceito de limite na educação secundária do momento. Os autores trabalham a partir de uma definição que "*sem estar isenta de rigor matemático, não tenha formalismo da notação, que tanta quebradeira de cabeça ocasiona ao alunado*" (p.4) e propõem a seguinte:

> Seja f" uma função e "a" um número real; o número "L" é o limite da função "f" no ponto "a", e escreve-se lim f(x)=L, se quando "x" se aproxima ao número "a", as suas imagens f(x) aproximam-se a "L" mais que qualquer outro número. (p.4)

Com uma metodologia clássica baseada em exposição por parte do professor dos conceitos principais, apoiado por uma guia de trabalho para o aluno, complementada com tarefas de trabalho na casa comentadas, corrigidas e detetados os erros produzidos, Blázquez, e Ortega (2000) desenham uma sequência didática que aplicam basicamente a alunos de segundo curso de Bacharelato. Desta investigação sobre as dificuldades educativas e os obstáculos que no conceito de limite acompanha aos alunos, obtêm as seguintes conclusões, que nós indicamos neste trabalho por considerar que, apesar do tempo decorrido desde o estudo dos autores, ainda mantêm plena vigência:

- Relacionam mal os diferentes sistemas de representação funcional.
- Custa-lhes interpretar desigualdades.
- Associam “todas” as gráficas com funções conhecidas.
- Não entendem a ideia gráfica do limite.
- Cometem erros de cálculo algébrico singelo.
- A ideia de que a função não tenha limites mais difícil de entender que o próprio conceito.
- Confundem limites finitos e infinitos.
- Interpretam indeterminações como a não existência do limite.
- Confundem limite com limite lateral.
- Não identificam o signo da função num contorno com o do limite e reciprocamente.
- Interpretação errónea das tabelas numéricas.
- Propõem como limite o valor da função em um ponto “próximo”.
- Associam limite com fronteira e relacionam-no com os extremos da função.
- Identificam tender em uma direção como mover no eixo OX nessa direção.
- Custa-lhes trabalhar com contornos e com aproximações.
- Não entendem a dependência funcional entre as variáveis.
- Não encontram situações relacionadas com o conceito.

A metodologia clássica de exposição, exercícios e correção de erros bem poderia explicar em parte alguns dos obstáculos. Também no momento da realização do estudo de

Blázquez e Ortega ainda não se tinha desenvolvido plenamente os instrumentos de apoio didático em relação com as novas tecnologias. Por isso resulta interessante qualquer nova atualização do projeto através de um trabalho semelhante enquadrado nas circunstâncias atuais.

Posteriormente, Blázquez, Ortega e Gatica (2008), com muitos anos de trabalho sobre o conceito de limite funcional e baseando-se, em muitas das investigações que se tinham levado a cabo sobre o tema (Ver tabela II.6), propõem que, das possíveis conceptualizações do limite funcional, “as ingénuas são mais perduráveis na memória dos alunos do que as rigorosas, e destas, a métrica é a mais difícil de lembrar que a de aproximação ótima “ (P.19).

Para Güçler (2014) muitos dos obstáculos cognitivos surgem como consequência do processo de abstração envolvido na formalização do conceito., já que muitos estudos dão conta das divergências entre a definição formal do conceito e a imagem que utilizam os alunos dela. Para além disso, os alunos tendem a adotar o discurso dos seus professores e consideram o limite como processo mas não como objeto. Provavelmente pola tendência do ensino a enfatizar os aspetos processuais e não conceptuais de limites (Kumsa, Pettersson e Andrews, 2017).

ANO	AUTOR	TRATA
1981	Tall, D. e Vinner, S.	Descrevem imagens conceptuais dos alunos
1983	Corm, B.	Concepções e obstáculos
1978	Tall, D. e Schwarzen-berger, R.	Conflito na aprendizagem do conceito
1997	Sánchez, C.	Génese histórica do conceito
1998	Sierra, M., Glez, M. e Lopez, C.	Limite desde o ponto de vista histórico
1983	Corm, B.	A partir de obstáculos epistemológicos construi uma sequência didática
1987	Sierpinska	Desenvolve o conceito a partir de situações didáticas que favoreçam a superação de obstáculos
1990	Sierpinksa	Teoria da acta de composição
1995	Antique et al.	Dificuldade associada à conceptualização/formalização
1991	Corm, B.	Transmissão didática dos obstáculos epistemológicos
1997	Sánchez, C.	Análise de manuais universitários e não-universitáriost
1998	Espinoza	Análise de manuais desde a perspectiva de momentos didáticos
1983	Robinet, J.	Processos de ensino do conceito: engenharia didática
1993	Cornu, W.	Ensino do conceito: actividades em contexto de res-olução de problemas
1983	Berthelot,R.,Berthelot,C.	Ensino do conceito: criaçao de uma situação funda-mental
1995	Delgado, C.	Evolução dos esquemas de alunos universitarios na adquisição deste conceito.
19971999	Blázquez, S, Ortega, T.	Importância das sucessões como instrumento de aproximação didática ao conceito
1999/2000	Blázquez, S, Ortega, T.	Plano didático para a docência do conceito de limite no ensino secundário
2001a/ 2001b	Blázquez, S, Ortega, T.	Sistemas de representação do ensino do limite e análise da quebra de compreensão do mesmo
2006	Blázquez,S, Gatica, S.N. Ortega, T., Benegas, J.	Estudo comparativo da definição métrica e a a sua re-centemente criada para procurar simplificação

Tabela II.6. Algumas investigações sobre o conceito

Capítulo III

Conhecimento profissional e crenças do professor de matemática

III.0. Introdução

O presente capítulo centrara-se em três aspetos relacionados com a figura do professor de matemática e que durante muito tempo têm sido objeto de estudo e investigação, e que fornecem de conteúdo teórico o nosso estudo.

Por uma parte abordaremos um campo de estudo que neste momento tem linhas de investigação abertas e tem produzido já vários modelos para organizar e estruturar os componentes de algo tão complexo de delimitar como é o chamado conhecimento profissional do professor de matemática.

Por outra parte trataremos o campo das crenças e concepções do professor e finalmente vinculadas e este apartado, veremos alguns aspetos relacionados com a prática docente: uso da reflexão, estratégias, materiais e novas tecnologias.

III.1 O conhecimento profissional do professor de matemática

Este trabalho enquadra-se no âmbito do estudo do conhecimento profissional, concepções e crenças do professor de matemática sobre o conceito de limite funcional.

É preciso polo tanto definir e descrever estes termos que resultam fulcrais nesta investigação.

No caso concreto do ensino da matemática ao conhecimento da matéria o professor deve acompanhar umas características específicas que o complementam para conformar o chamado *conhecimento profissional*.

A meados da década de setenta do século passado introduz-se na comunidade cientifica o modelo de *Teacher thinking* (Pensamento do professor) como modelo de investigação (Serrano, 2010) que agora tende a profundar-se como conhecimento profissional estudado a partir dos conteúdos do conhecimento, das crenças, dos conceitos e do pensamento dos professores. Entre os modelos dessa época destacam:

- O modelo de toma de decisões onde o professor é "alguém que valora constantemente as situações, reflete sobre elas, toma decisões sobre o caminho a seguir e observa os efeitos dessas decisões sobre os alunos (Clark, citado em Marcelo (1987))

- O modelo de processamento da informação, onde o docente enfrenta um ambiente complexo de tarefas que deve selecionar e simplificar, centrando-se numas concretas e descartando outras.

Hoje aceita-se que o conhecimento profissional do professor é um sistema complexo que se vai constituindo em função dos saberes, crenças, destreza, habilidades e capacidades (Compagnicci e Cardós, 2007).

Em todo caso este conhecimento profissional pode ser considerado como soma de dous domínios: O conhecimento do Conteúdo (CC) e o conhecimento didático do Conteúdo (CDC) (Ball, Thames e Phelps, 2008). A simbiose perfeita entre o saber teórico e o prático. O primeiro pode-se formar-se desde o inicio , mas o segundo acostuma a adquirir-se paulatinamente durante toda a carreira profissional e nela influirão diversos fatores.

III.1.1.Modelos para organizar o conhecimento profissional do professor de matemática

Para compreender melhor a estrutura do conhecimento do professor, vêm propondo-se e desenvolvendo-se nas últimas décadas diferentes construtos teóricos que representam interpretações com especificidades próprias, mas com a convergencia no facto de considerar separadamente o conhecimento da matéria e o conhecimento didático do conteúdo. (Montes, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Muñoz-Catalán e Carrillo, 2015).

Devem-se-lhe a Deborah Ball (2008) os primeiros passos de um dos modelos que organiza o conhecimento do professor de matemática. Anteriormente Shulman (1986) já se proponha diferenciar o clássico conhecimento do conteúdo em matemáticas, que qualquer pessoa instruída nesta disciplina pudesse possuir, da especificidade do conteúdo do que se ensina, analisado desde a própria matemática. Este era uma especificidade admitida noutras especialidades como a matemática aplicada mas não sobre a didática da matemática . Tanto o conhecimento do professor como a tarefa que supõe a sua identificação, pertenceria a outro tipo de aplicação da matemática (Climent, Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas e Montes, 2015).

III.1.1.1. O Modelo MKT

O grupo de Ball propõe, assumindo a diferenciação de Shulman, um modelo com o que quer representar o conhecimento matemático, hábitos da mente, tarefas especializadas que os professores utilizam, sensibilidade no processo educativo… O modelo chamaria-se Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT, nas suas siglas em inglês).

Para além da diferenciação entre Conhecimento da Matemática e Conhecimento didático do Conteúdo Matemático, cada um dos dous domínios ficará descomposto em três subdomínios. Assim teremos:

- Conhecimento da Matemática:

- *Conhecimento comum do Conteúdo*. O suposto para qualquer adulto instruído na matemática.

- *Conhecimento Especializado do Conteúdo*. Só com sentido para o professor de Matemática. Estritamente matemático que não é do domínio de outros profissionais com formação matemática. (Bass, 2007).

- *Conhecimento no Horizonte Matemático*. Relaciona conteúdos, reconhece validez de argumentações durante todas as etapas do curriculo.(Climent, N. et altri, 2015)

• Conhecimento didático do Conteúdo matemático:

- *Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes*. Compreender a perspetiva de aprendizagem do estudante, intuir pensamentos e respostas e antecipar possíveis erros.

- *Conhecimento do Conteúdo e o Ensino*. Desde esta perspetiva, razoar sobre a conveniência de materiais, recursos ou representações utilizar na instrução.

- *Conhecimento do Currículo das matemáticas Escolares*. Ver gráfico III.1 correspondente ao modelo MKT (Hill, Ball e Schilling, citados em Godino, 2009)

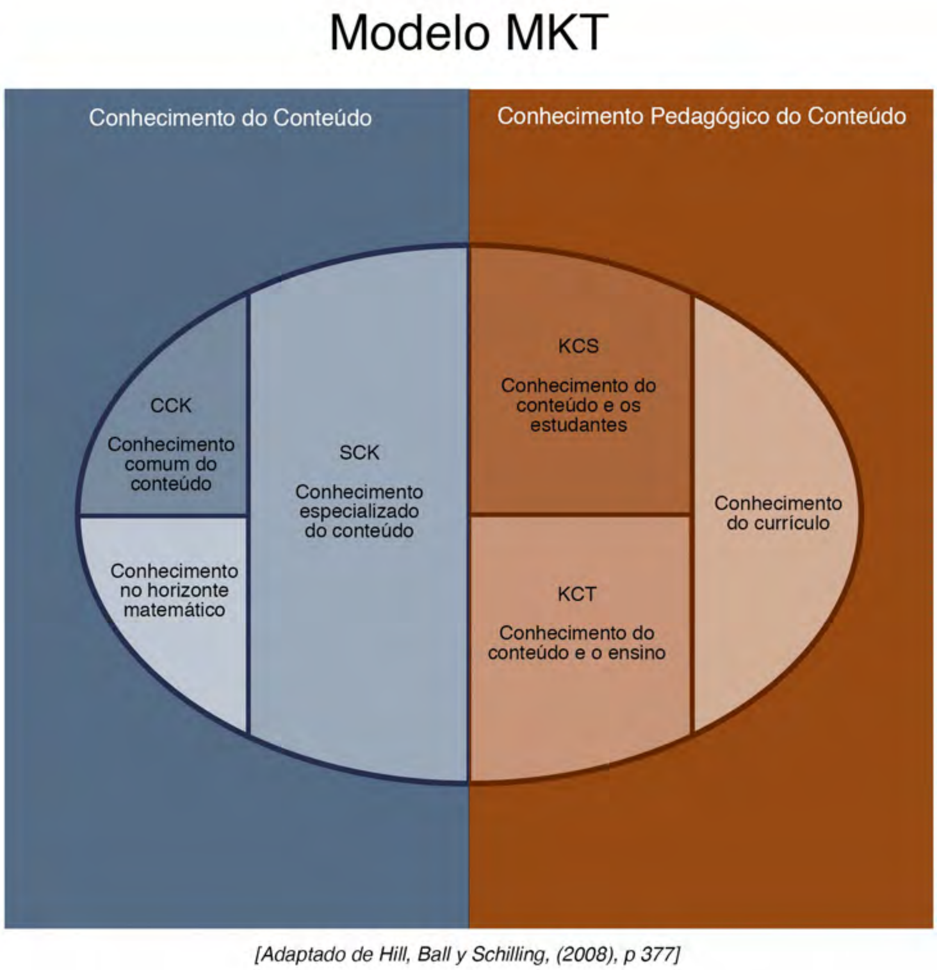
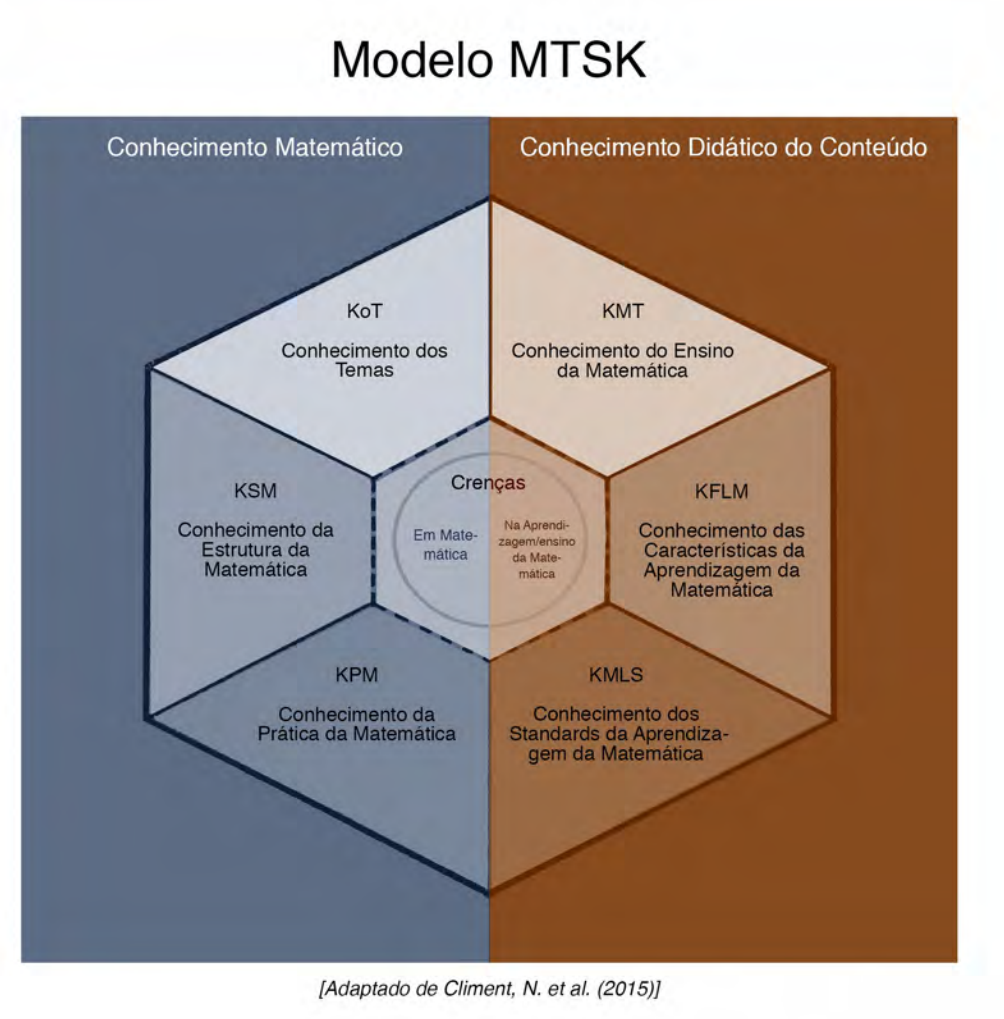


Gráfico III.1. Esquema do modelo MKT

III.1.1.2. O Modelo MTSK.

A partir dos trabalhos de Ball e colegas, o grupo SIDM, (Seminário de Investigación en Didática de la Matemática) , sediado na Universidade de Huelva propus uma correção e implementação que constituiu o modelo conhecido por MTSK (Conhecimento Especializado do Professor de Matemática), que recolhem algumas das ideias fundamentais dos modelos anteriores e elementos de outras teorias dos últimos vinte anos.(Climent, N. et altri, 2015).

Os autores salientam as premissas que sustentam o modelo. Por uma parte a especialização do conhecimento do professor e matemática deriva da sua profissão. E a segunda que o uso para a compreensão que um professor use para a docência da matéria é própria da matéria. Se o professor for de outra disciplina, seria preciso reformular de novo o MTSK para essa disciplina. Para além disso o Conhecimento do Conteúdo passou a denominar-se Conhecimento Matemático (MK). Uma parte interessante e anovada do modelo é a inclusão do domínio das crenças e concepções, como elementos permeáveis na estrutura capazes de modificar a organização e uso do conhecimento. Na gráfica III.2 podemos ver a estrutura do MTSK proposta polos autores.



Gráfica III.2. Esquema do Modelo MTSK

III.1:1.3. O Modelo CDM.

Fundamentado no Enfoque Onto-semiótico do Conhecimento e a Instrução matemática (E.O.S.), aparece um outro modelo que estrutura também o conhecimento profissional do professor (Godino, 2009) e que propõe as facetas que configuram modelo do Conhecimento didático-Matemático (C.D.M.). Trata-se de um modelo integrador com componentes ligadas ao análise didático-matemático (Gráfica III.3).

O autor assume que a proposta de Shulman (1986) joga um papel importante no desenvolvimento das investigações e implementações curriculares para a formação do professorado (Godino, 2009) e que mesmo as suas caracterizações continuam vigentes; ainda que põe ênfase na imperfeita delimitação do conceito PCK (Conhecimento Pedagógico do Conteúdo) que, a falta de uma definição precisa, tenta-se caracterizá-lo a base de descrever exemplos ou listas. Também enumera questões nas que ainda se está a trabalhar relativas a uma maior precisão do PCK, como são o papel das crenças, afetos e valores no desenvolvimento do PCK do professor, a melhora dos métodos para avaliar o PCK, determinar se as suas componentes são dependentes dos paradigmas de ensino-aprendizagem. (Godino, 2009).

Na procura da proficiência no ensino da matemática, em termos de competência profissional, e utilizando como marco teórico o Enfoque Ontosemiótico e as suas noções teóricas como ferramentas de análise e reflexão, propõe cinco facetas e quatro níveis que se podem entender como categorias do conhecimento do professor, entre as que tomam especial relevância as duas primeiras (Godino, 2009):

1. *Epistémica*, que recolhe os conhecimentos relativos ao contexto institucional e à distribuição do tempo.

2. *Cognitiva*, que se refira aos conhecimentos dos estudantes e a sua evolução na aprendizagem.

3. *Afectiva*, isto é, atitudes, emoções, crenças, valores do alunado com

respiro ao estudo e aos objetos matemáticos.

4. *Mediacional,* que abarca os recursos tecnológicos e consignação de tempos às tarefas.

5. *Interaccional*, referida ao professor e os estudantes.

6. *Ecológica*, referida às relações com o contorna social, político e económico.

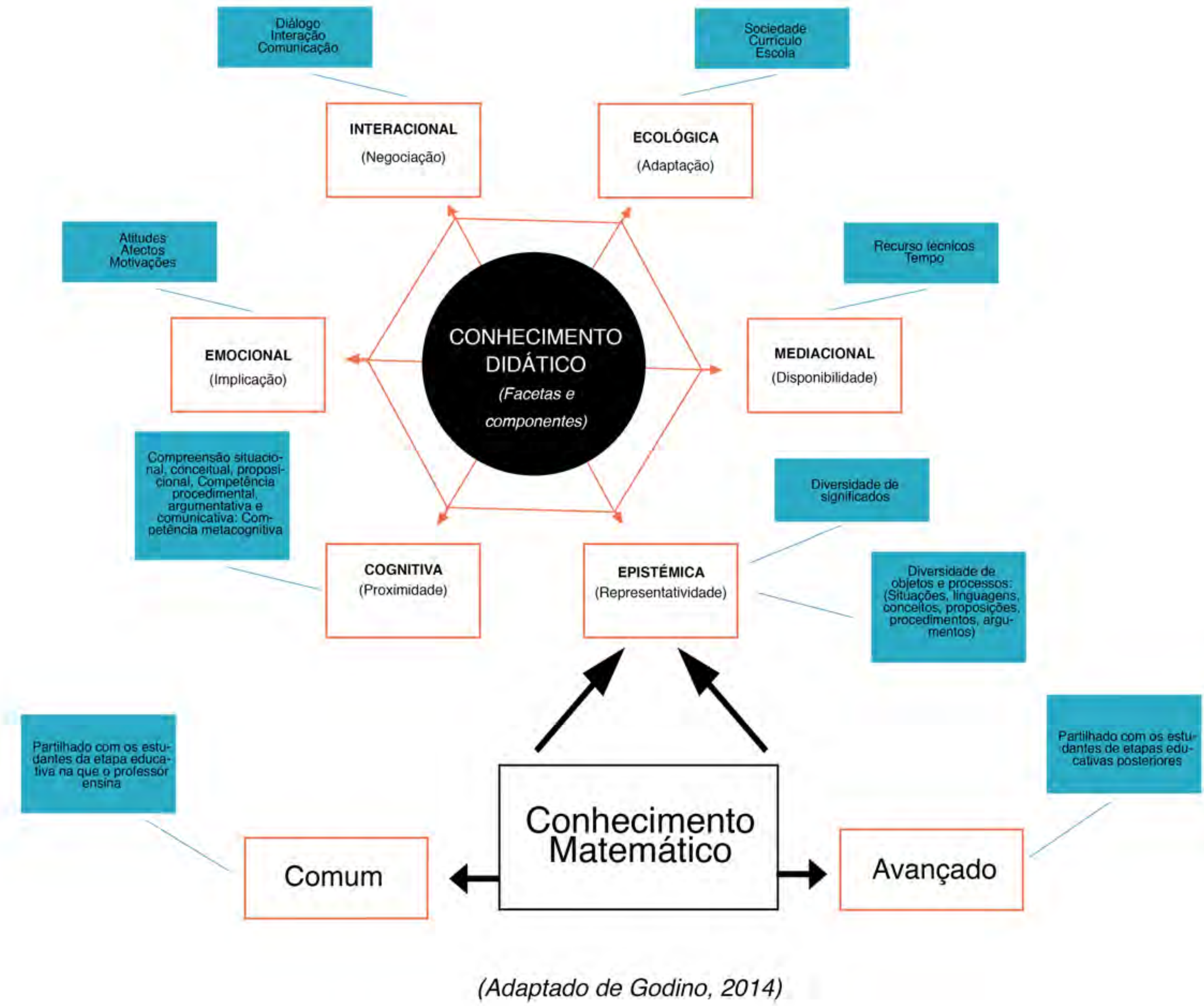
Paralelamente propõem esta estrutura aplicada em diversos níveis de análise que descrevem da seguinte forma: (Godino, 2009).

A1) *Práticas matemáticas e didáticas*, referidas às linhas de atuação de professor e alunos para resolver tarefas contextualizar conteúdos e promover a aprendizagem.

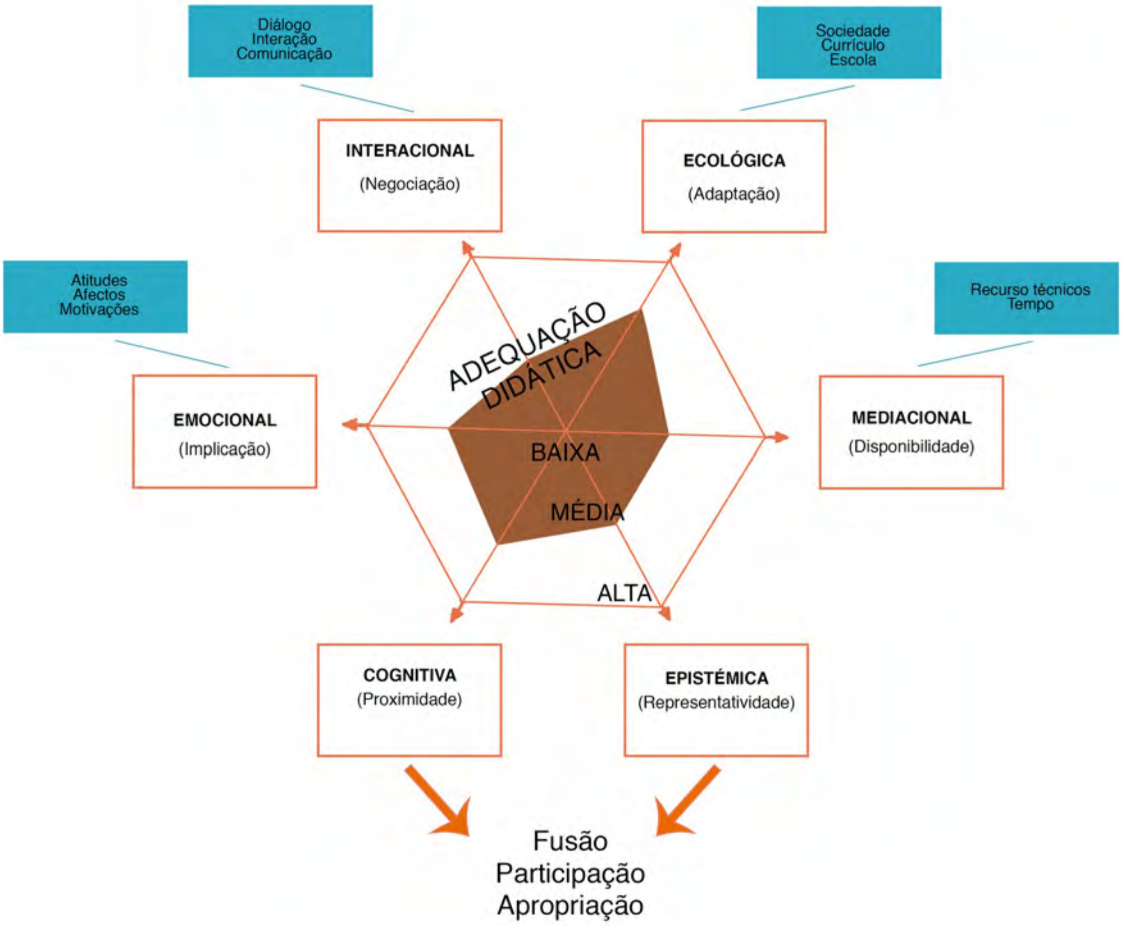
A2) *Configuração de objetos e processos matemáticos* que intervêm nas práticas ou que surgem delas, para descrever a sua complexidade.

A3) *Norma e meta-normas*, que fazem referência as regras normas e hábitos que condicionam o processo de estudo.

A4) *Adequação*, entendida como a identificação dos campos de estudo suscetíveis de serem melhorados para acrescentar a adequação didática. (Gráfica III.4)



Gráfica III.3. Esquema do Modelo CDM (Godino,2014)



Gráfica III.4. Esquema da Adequação didática (Godino, 2009)

III.2. Crenças e concepções

Num primeiro momento devemos salientar o complexo que resulta delimitar os termos 'concepções' e 'crenças'. Mas a influência das crenças e concepções do professorado na sua função docente leva sido estudada com certa profusão desde a década de 80 do século passado. Num primeiro debate, como é lógico sobre o conceito de crença, com diferentes caracterizações atendendo à sua natureza e relação com o conhecimento. Muitos autores utilizam ambos os termos como sinónimos; outros acham as concepções como sistemas de crenças, ideologias, reflexões a priori e teorias implícitas (Bohorquez, 2014).

Para além da definição académica de crença como

- (1) Fé religiosa.
- (2) Confiança
- (3) Opinião. (www.priberam.pt)

ou

- (1) Ato ou efeito de crer; opinião, parecer, religião.
- (2) Fé religiosa e
- (3) Convicção. (www.estraviz.org)

e do verbo crer em www.estraviz.org :

- (1) Ter como verdadeiro,
- (2) dar creto a, acreditar,
- (3) julgar, cuidar, supor, presumir,

  todo um debate se tem produzido para caracterizar as crenças em relação com o conhecimento, frente ou como parte dele.

Assim, os conceitos relacionam-se em autores como Rokeach (1968) já que todas as crenças têm um componente cognitivo, parte do conhecimento, e um afetivo que emociona e faz agir de uma forma determinada. Crenças, atitudes e valores formariam um sistema de crenças do indivíduo, que devem ser apenas inferidas, dada a impossibilidade de serem observadas ou medidas. As crenças são assim profundamente pessoais, não universais, surgidas por uma casualidade, uma experiência intensa ou por múltiplos acontecimentos.

Vicente (1995) distingue, nas fontes do conhecimento, entre as próprias do sujeito, baseadas na sua experiência vital e nos conhecimentos adquiridos e a externas, procedentes de outros, não comprovadas pessoalmente e mantida, em ocasiões, mesmo sem estar seguro da sua consistência. A este último apartado pertenceriam as crenças.

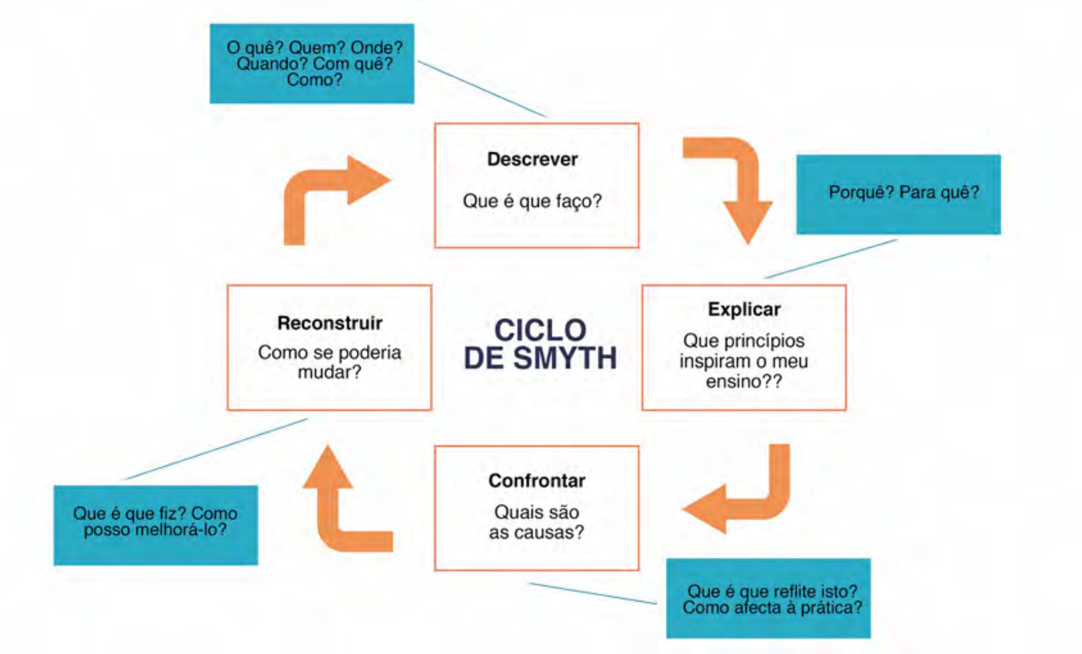
Este autor põe de manifesto que o uso linguístico do termo vai concretizar-se a partir do campo de uso.; desde uma aceção imprecisa até o mais estrito de confiança no transmitido por outros. 'Crer' significa assentir, aceitar como verdadeiro algo que se nos comunica: diferencia-se do "saber" como conhecimento comprovado ou adquirido de forma pessoal. Em realidade a comprovação e verificação pessoal é, mesmo no campo científico, minoritária, polo que a grande maioria dos conhecimentos adquiridos tratariam-se *stricto sensu* de crenças.

Abelson (1979) situa-os em âmbitos separados; as crenças baseariam-se em julgamentos enquanto o conhecimento, em factos objetivos. As crenças seriam, daquela, construções mentais da experiência, consideradas verdadeiras e que orientam o comportamento (Sigel, 1985) Grossman, Wilson e Shulman (1989) situam-nas frente ao conhecimento polo seu carácter de "discutíveis" e distinguem as referidas à Matemática como ciência ou como objeto de ensino-aprendizagem.

Nesse aspeto, todos os professores mantêm crenças sobre o seu trabalho, alunos, e responsabilidades e esse sistema de crenças influi na conduta cognitiva do professor (Pajares, 1992). Difíceis de perceber desde fora, e inconsciente delas, em muitos casos, seria necessário torná-las explícitas para referenciar com melhor precisão o marco de ensino (Clark e Peterson, 1986)

Porque as crenças e concepções dos professores constituem aspetos centrais da sua formação, é polo que devem ser utilizados, por exemplo, os cursos de formação do professorado como agentes externos motivadores da reflexão do próprio professor sobre as suas crenças, procurando a profissionalização da função docente.

Esta reflexão é entendida por Flores (1998) nos termos do ciclo reflexivo em quatro fases de Smyth (1991). Na gráfica III.5 apresentam-se de forma esquemática estas quatro fases.



Gráfica III.5. Esquema com as fases do ciclo de reflexão de Smyth

Thompson (1992) considera que as crenças caracterizam-se porque podem ser sustidas com vários graus de convencimento, enquanto que o 'saber' adquiriria o grau máximo. Não estão consensualizadas, dão-se independentemente da sua validez e caracterizam-se por uma falta de acordo sobre como avalia-las e julgá-las.

Green (1997) considera--as agrupadas em sistemas e indica, para elas três dimensões, relativamente à força ou forma com que se mantêm esses crenças, não ao conteúdo das mesmas.

Pajares (1992) distingue três componentes das crenças, cognitiva, afetiva e condutual. A crença é um objeto pouco propício para a investigação empírica, ao tratar-se de um construto global, difuso e difícil de definir. Estes problemas de definições e conceptualizações, a difícil compreensão das estruturas das crenças fazem com que a dificuldade nos estudos e nas investigações sejam comuns. A pesar de que deveriam tornar-se num dos focos mais interessante por produtivos da investigação em Educação. Pajares,

(1992) convida a centrar a labor investigadora neste campo, por considerar que o do conhecimento do professor está suficientemente tratado.

O papel protagonista das crenças relativamente ao comportamento do professor procede de considerá-las como os melhores indicadores das decisões que os indivíduos tomam ao longo da sua vida (Bandura, Dewey, citado em Pajares, 1992), já que estas influenciam as suas perceções e julgamentos, afetando ao seu comportamento na aula.

Neste aspeto cabe sinalizar, por ser objeto de interesse para este trabalho, que Calderhead e Robson (1991) relatam como professores mantiveram vivas na sua labor docente experiências vividas como estudantes. Entre os defensores da distinção entre conhecimento e crenças está Ponte (1994b) considerando estas como conhecimento relativamente pouco elaborado, ou melhor ainda, elaborado sem confrontação com a realidade empírica, e sem necessidade de consistência interna. Nesse sentido, propõe também estudar as imagens dos professores (um conceito claramente menos valorativo), princípios práticos e regras de prática (mais diretamente relacionadas com as ações dos professores), e de que forma elas se relacionam com as suas agendas. Para este autor, tanto as crenças como as concepções formam parte do conhecimento. As crenças são convicções pessoais indiscutíveis, produto da experiência ou fantasia com carácter valorativo e afetivo, enquanto as concepções são os marcos organizadores dos conceitos, essencialmente com carácter cognitivo (Dodera, Burroni, Lázaro, Piacentini, 2008).

A fundamentação nos sentimentos da crença é também compartilhada por Moreno (2002) que a baseia nas experiências e na ausência de conhecimentos reais do indivíduo sobre o tema relacionado com elas. De ai a sua consistência e a dificuldade de mudança. No que diz respeito ao professorado, as crenças são ideias pouco elaboradas inseridas no conhecimento profissional, mas sem rigor (Azcárate, Garcia e Moreno, 2006).

Concepções incluem crenças, preferências e gostos; elas são mantidas por regras e contêm conceitos, significados e imagens mentais. Entre os conceitos encontramos crenças ou sistemas de crenças. Estes destinam-se a servir como informações de filtro de qualquer campo. (Contreras, 2009 p.14). O autor argumenta que o conhecimento matemático para o ensino tem natureza diferente que o conhecimento matemático; por esta razão, é necessário enfatizar a formação de um professor de matemática, além do conhecimento dos objetos matemáticos precisa. Do ponto de vista do aluno, as referências que têm de matemática, a sua capacidade de aprender, a sua utilidade será em grande parte resultado das mensagens das concepções e crenças que faz o professor. Além disso, foi demonstrado que as crenças dos professores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, materiais, métodos e conteúdos irão determinar as suas decisões sobre a instrução didática, é natural pensar que o desenvolvimento profissional do professor tem um eixo transversal nas concepções de campo (Contreras, 2009). Nesse sentido aponta como uma das possíveis origens das concepções dos professores: As suas experiências como estudantes. Estas podem influir no processo didático, na medida em que em alguns casos pode levar a transmitir informações aos seus alunos, dos quais eles próprios podem não estar convencidos.

Crenças e conceitos explícitos podem evoluir e, portanto, incentivar a prática do ensino. O fato de que as crenças estejam ligadas a experiências pessoais faz com que, em muitos casos, sejam resistentes à mudança, mas o seu estudo, a sua investigação é fundamental para compreender as decisões do professor. Mas Contreras quer agregar como elementos do pensamento do docente, para além das concepções e crenças, o sistema de crenças, as reflexões a priori, -que orientam o desenho de atividades-, as perspetivas (ideias preconcebidas sobre aspetos da dinâmica da aula), ideologias (rede de crenças sobre a atividade educativa) e teorias implícitas, que explicariam as razões das crenças do docente, relacionando-as com estereótipos sociais hegemónicos. (Gráfica III.6).

Gráfica III.6 Componentes do conhecimento profissional segundo o grupo IRES

Nesse sentido, afirma, analisando as ações educativas, rotinas e guiões, poderíamos inferir as concepções em forma de construtos hipotéticos (Contreras, 2009).

Como um elemento interessante para estudar as concepções e crenças do professorado, Contreras introduz o termo "tendências didáticas" como classificador de certos rasgos que, em maior ou menor medida se misturam na realidade profissional do docente, mas que podemos até certo ponto distinguir. Trabalha com quatro : Tradicional, Tecnológica, Espontaneicista e Investigativa. Para ver a grandes rasgos estas tendências está a gráfica III.7

Tendências didácticas

	Tradicional	Tecnológica	Espontaneísta	Investigativa
Aula	- Aula magistral	- Aula com conteúdos em construção / transmite conteúdos e processo	- Manipulação de modelos procurando o conhecimento	- Professor organiza processo de investigação do aluno
Materiais	**- Livro de texto**	**- Estratégias expositivas**	**- Estratégias expositivas manipuláveis**	**- Materiais necessários para investigação**
Programa	- Fidelidade a uma programação prévia	- Fidelidade programática	- Programação viva sem organização iniciada	- Propõe mas não vincula de forma concreta
Orientação	**- Orientada a aquisição de conceitos**	**- Orientada a ampliação em outros âmbitos**	**- Orientada a procedimentos/ fomentar atitude positiva p/ o trabalho escolar**	**- Orientada a procedimentos, conceitos e atitudes positivas**
Recursos	- Recurso matemático e memorização a curto prazo	- Uso da memória confiando na lógica construção da própria matemática	- Menor. A aprendizagem surge do contexto espontâneo	- Recursos investigativos
Responsabilidade	**- Aluno responsável de resultados**	**- Aluno responsável de resultados**	**- Aluno não responsável**	**- Professor provoca curiosidade, responsabilidade partilhada**
Avaliação	- Avaliação periódica da capacidade de reter informação - Avaliação de conteúdos	- Auto-avaliação do professor para eventual modificação futura	- Sentir permanente que reconduz o processo - Mede grau de implicaçao do aluno na aula	- Sensor de aprendizagem, auto-avaliação do aluno

(Adaptação a partir de Contreras 2009)

Gráfica III.7. .Características das tendências didáticas.

Para o autor, a tendência investigativa tem como princípio didático caracterizador a investigação, com aportes da psicologia construtivista unida a uma complexa concepção da realidade educativa (Contreras. 2009), mas também se enfrenta a dilemas originados por pressões do contexto educativo (pais, outros professores) ou de validação externa.

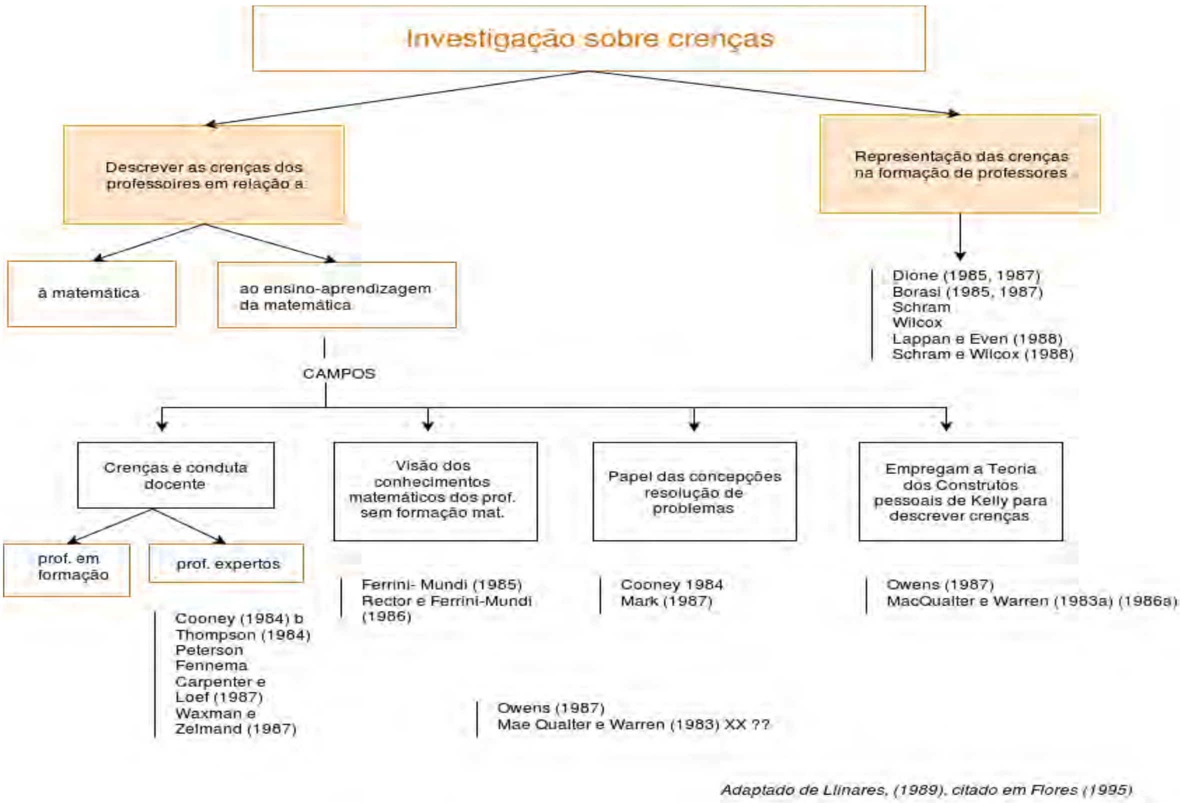
O ensino bem-sucedido depende do conhecimento profissional e das crenças dos professores (González, 2013) e, com essa ideia, (Kaiser, Blömeke, Busse, Döhrmann, e König, 2016) enquadraram as competências profissionais dos professores de matemática em termos de facetas cognitivas e afetivo-motivacionais. (Gráfica III.8)

Gráfica III.8.. Competências do professor, (adaptado de Kaiser et al.,2016, pág 90)

Nas primeiras análises sobre o conhecimento do professor, o interesse centrava-se no conteúdo dos 'sucessos mentais dos professores' (conhecimento, perceções, crenças), nos seus processos de pensamento, as mudanças através do tempo e as relações com o ensino (Llinares, 1996). Era preciso então determinar as componentes do conhecimento e as formas de descrever tanto conhecimento, como concepções e crenças do professor (Llinares, 1996).

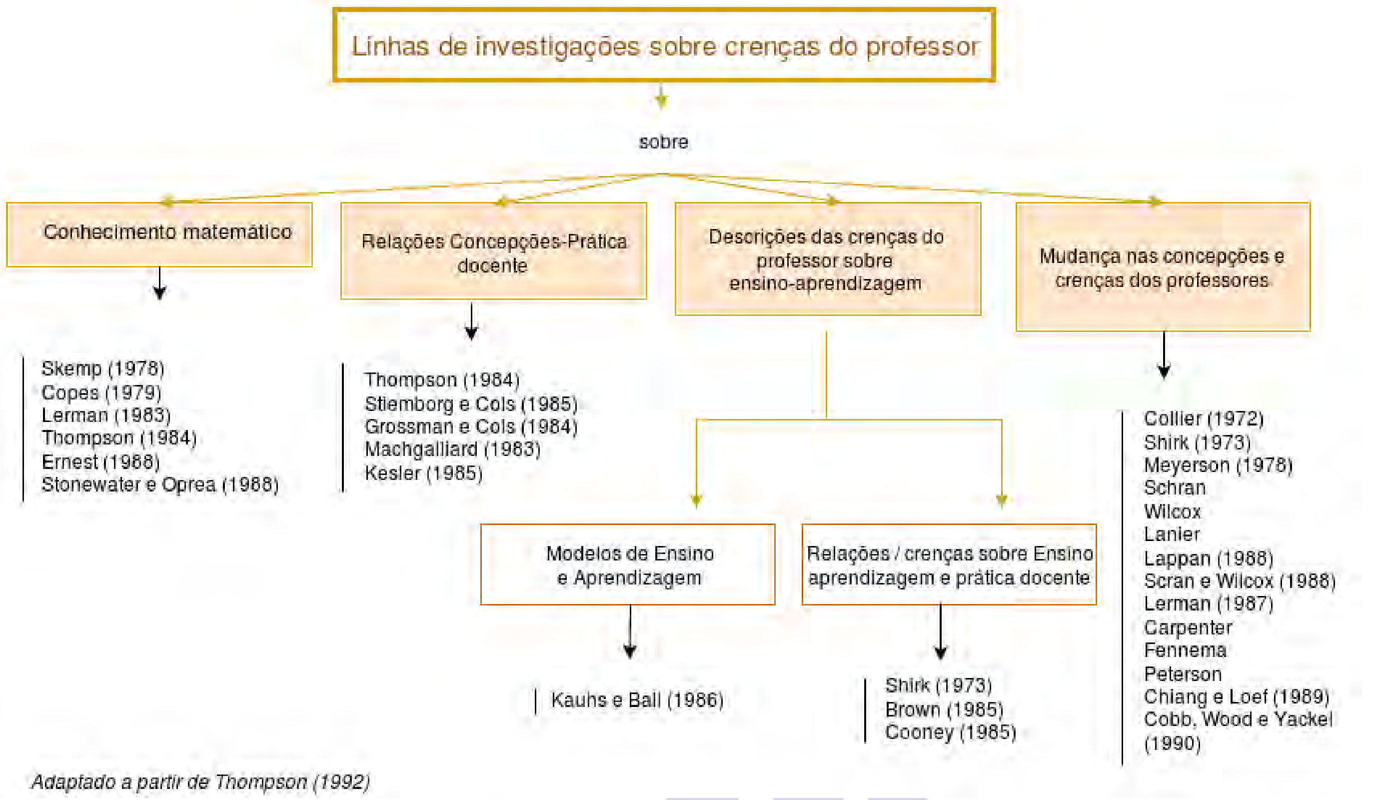
Llinares convida a refletir sobra o significado dado a termos como concepção, crenças, conhecimento e a pôr em claro que se entende por 'conhecimento do professor' e recolhe numa tabela as aproximações dadas até esse momento por diversos investigadores ao que se entende por conhecimento do professor desde a perspetiva do ensino. Também põe em destaque que as investigações que não se centrem diretamente no conteúdo matemático, estarão a descrever sempre o 'conhecimento situado' do professor e polo tanto integra as diferentes componentes do conhecimento e 'orientações para o contido matemático, que num extremo são as crenças do professor'.

Na sua tese de doutoramento, realiza um estudo completo de todas as investigações realizada até a data no campo das concepções e crenças do docente de matemática. Determinava assim vários campos de atuação, como se pode ver na gráfica III.9.



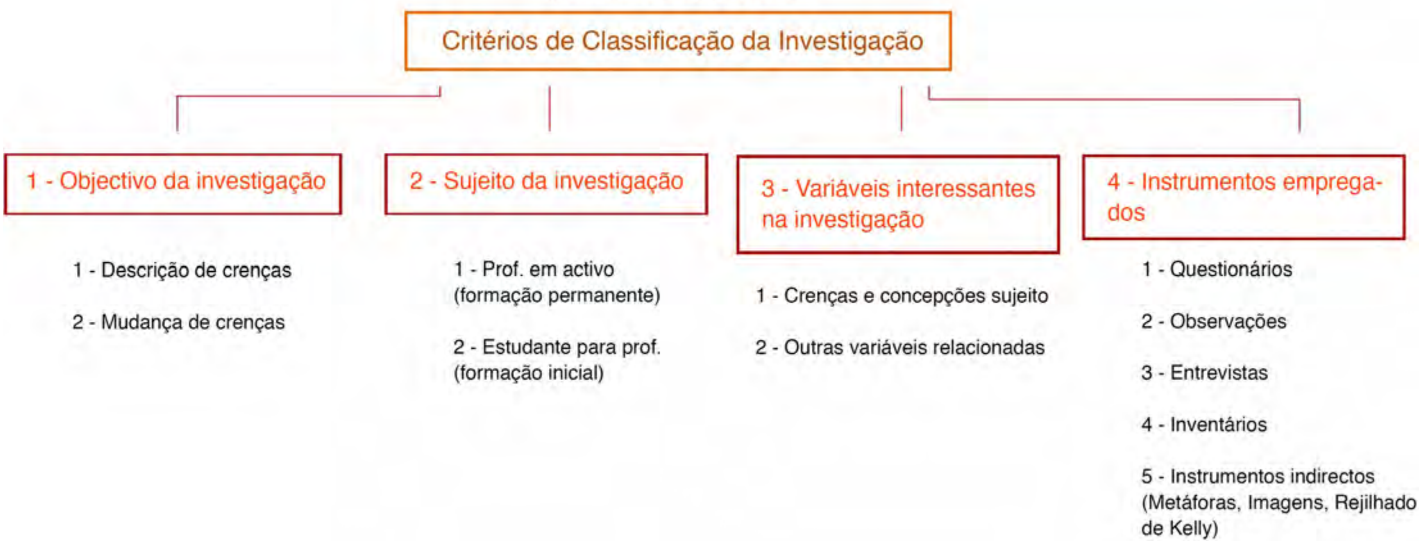
Grafica III.9 Investigações sobre crenças, adaptado de Llinares (1989)

Posteriormente, Thompson (1992) recolhe as investigações em inglês sobre as crenças e concepções do professor de Matemática e sobre o ensino e a aprendizagem das mesmas (Gráfica III.10). Isso permite a Flores (1995) trabalhar nesse campo e recolher só aquelas investigações posteriores a essa data e até 1995. Para além disso, proporciona uns critérios para classificar adequadamente as investigações (Gráfica III.11).



Gráfica III.10. . Linhas de investigação sobre crenças do professorado segundo Thompson (1992)

(Adaptado de Thompson 1992)



Gráfica III.11. Critérios de classificação das investigações segundo Thompson (1992)

Numa primeira aproximação, as crenças do professorado de matemática venhem sendo agrupadas em três campos: Crenças sobre a natureza da matemática, sobre o ensino e sobre a aprendizagem. Em cada campo aparecem distintas visões que os caracterizam, apresentadas na Tabela III.1

Crenças sobre a natureza da Matemática	Crenças sobre o ensino da Matemática	Crenças sobre a aprendizagem da Matemática
Instrumentalista	Conteúdo focado com ênfase no desempenho	Maestria de habilidades, recepção passiva de conhecimentos
Platónico	Conteúdo focado com ênfase na compreensão	Construção ativa da compreensão
Solução de problemas	Aluno focado	Exploração autónoma de interesse

Tabela III.1 Categorías das crenças dos professores (R. Mosvold & J. Fauskanger, 2013) (adaptado de Beswick, 2012, p.130)

Num estudo elaborado sobre as crenças do professorado no processo de ensino-aprendizagem (Gil e Rico, 2003) conclui-se que, para uma boa parte do professorado, o seu papel como agente principal do processo de ensino-aprendizagem manifesta-se em procurar e elaborar materiais, refletir sobre o processo ou inovar mediante as atividades. Ante tudo obtém-se como consequência, que as dificuldades do processo se atribuem aos sistema educativo, ao aluno e ao carácter implicitamente complicado da disciplina. Não detetam nenhuma crença que atribua ao professor a responsabilidade das dificuldades do ensino. (Gil e Rico, 2003).

Assim, segundo estas crenças, o labor do professorado deveria rotar entre estimular o interesse do aluno e repetir o ciclo explicar-trabalhar-corrigir-exercitar. Porém, o papel do professor como profissional vê-se regido pola preponderância do elemento reflexivo e investigador sobre o seu próprio trabalho, uma auto-reflexão sobre as suas decisões e as consequências no processo didático.. E esta reflexão necessariamente deve incluir os aspetos matemáticos para o ensino, aspetos nos que é ele, contrariamente a outros profissionais, o que se dá conta e adverte deles, notando-os e reforçando-os no ensino (Sosa, 2011).

Nesse sentido há uma crença estendida e aceitada de que se pode transmitir um conhecimento matemático externo, mas para ser eficaz a transmissão, deve referenciar-se na forma em que o aluno chegue a aprender, motivando-o e favorecendo a construção do seu pensamento. (Flores, 1988). Mas quais são, na prática estes referentes que ajudam para uma melhor transmissão do conhecimento matemático externo?

Um primeiro chegamento, anedótico, mas significativo, a este assunto encontramo-lo em Sosa, (2011) quando uma professora de matemática no bacharelato manifesta numa entrevista que as principais fontes das que adquiriu a sua formação pedagógica para ensinar matemática foram um curso do CAP (Curso de Adaptação Pedagógica) antes de fazer a sua oposição, da experiência como estudante, -é dizer, dos seus próprios professores-, da sua prática profissional e dos seus colegas de trabalho, quando entre eles 'comentam como afrontar determinados conceitos ou que atividades se adaptam melhor que outras' (Sosa, 2011). Estes são, dalguma forma, 'referentes' que o professorado usa e que forma parte do conhecimento profissional. Serão objeto também do nosso estudo.

Serrano (2010) investiga sobre as crenças de um grupo de professores universitários da Faculdade de Educação de Málaga. Usam uma metodologia quantitativa, descritiva, apoiando-se em métodos estatísticos, procuram a opinião dos docentes sobre o processo de ensino aprendizagem no âmbito institucional universitário. Conclui que os entrevistados mantêm uma atitude progressista na educação, salvo, paradoxalmente, em aspetos significativos como são a metodologia, a programação e avaliação do processo ensino-aprendizagem. Por esse motivo torna-se aqui pertinente a reflexao de Llinares (1995, p.15) : ¿Hay que intentar que los profesores llegan a modificar sus creencias para que lleguen a cuestionar su práctica e intenten cambiarla?, o por otra parte, ¿hay que hacer que los profesores desarrollen nuevas prácticas para que estas lleguen a generar nuevas creencias?, ¿Sería posible centrarse en los dos apsectos (creencias y práctica) al mismo tiempo?

III.3. A prática docente

Clark y Peterson (1986b) salientam duas características do processo docente: Por um lado a componente teórica, a importância do ensino das representações do professor e uma prática relativa à repercussão na atuação do aluno, e por outra, a relação entre ambas. A conduta do professor vem marcada por um sistema de pessoal de crenças e valores que guia o seu conhecimento (Flores, 1995). Mas por outra parte considera a pesar de não serem ensinado em metodologias, são animados a considerar que as suas crenças são importantes.

Para este autor, o foco investigativo situa-se na formação de professores de matemática, e considerando fundamental criar uma atitude reflexiva na sua prática profissional conclui que os cursos de formação devem afrontar as crenças dos estudantes para professor explicitando-as e enfrentando-as com os seus fundamentos. Nessa prática reflexiva resultará interessante os referentes externos que puderem condicionar ou ajudar a uma melhor formação profissional.

III.3.1. Utilização da reflexão na prática docente

Resulta bastante comum que se enfatize a separação entre a investigação que gera conhecimento teórico, da destinada ao conhecimento prático profissional. Para Martínez (2007), é esta última, a reflexão do professor, a que colabora seu desenvolvimento permitindo aprender desde seu desempenho prático. A reflexão é necessária mais ainda se se considera válida a ideia do reforçamento da tarefa assistencial da docência. Para Flores e Peñas (2007):

> A tarefa assistencial que constitui a docência atende a alunos que são sujeitos únicos, diferentes e cambiantes, tanto pela sua individualidade, como pelas condições socioculturais nas que se localizam. Isso faz que o docente deva

> dispor de princípios de atuação versáteis que lhe permitam adaptar-se a situações e sujeitos cambiantes. Para isso o professor tem que submergir em um processo de desenvolvimento profissional, isto é, de formação contínua conforme com a sua forma de contemplar o mundo, mas tratando de introduzir nesta visão o maior conjunto possível de perspetivas e variáveis. Para relacionar-se com estas variáveis de maneira significativa, o professor tem que desenvolver uma atitude reflexiva que (...) permitirá que o professor esteja aberto a contemplar novas contribuições que se estão a fazer desde as diferentes bases teóricas, incorporando aquelas que lhe sejam significativas em função da sua experiência (Flores e Peña, 2007).

A descrição e reflexão sobre os processos instrucionais são indispensáveis para qualquer melhora no ensino, não apenas porque permitirá distinguir práticas eficazes para a aprendizagem, mas também por facilitar ao professorado controlar as suas formas de intervenção, validando-as ou reconfigurando-as (Nogueira, Fernández, e Rodríguez, 2015).

A investigação educativa tem como um dos principais focos de interesse as crenças dos professores como "fatores determinantes da sua prática profissional e das suas ações na aula". (Gil, Rico e Fernández, 2002, p.50). O acto reflexivo começa quando a experiência se volta difícil ante algum acontecimento problemático que não pode ser resolvido imediatamente. A incerteza ou descontentamento no resultado faz que o professor analise a sua experiência, durante e após a ação educativa. A reflexão produzirá-se se o professor contar com atitudes conformes ao processo reflexivo (responsabilidade, interesse, mente aberta) e com ferramentas de pensamento ordenado.

A nossa atuação no âmbito educativo, e em general no mundo que nos rodeia, está condicionada pelo que sabemos previamente; a intuição, por uma parte, e os significados adquiridos, por outra, vão iniciando os caminhos escolhidos na ação educativa. Em palavras de Dewey (1989, p.98),

> A função do pensamento reflexivo, portanto, é a de transformar a situação na que se experimenta obscuridade, dúvida, conflito ou algum tipo de

> perturbação, em uma situação clara, coerente e harmoniosa.

Situado em frente ao processo reflexivo, o professor adquire a importância de um líder na instituição educativa: “o mestre é o líder intelectual de um grupo social. É um líder não por sua posição social, mas devido ao seu conhecimento mais amplo mais profundo e à maturidade da sua experiência” (Dewey, 1989, p.229). Schon (1992) será quem generalize o termo de professor reflexivo, que Dewey nunca chegou a utilizar.

Os diferentes tipos de reflexão são definidos por Van Manem (1977) no que ele denomina ‘tacto educativo’ , que apresenta uma intenção de hábito intuitivo:

- reflexão participativa (para a ação), que pode ter duas formas, ‘reflexão sobre as situações pedagógicas’, de antes de enfrentá-las, e ‘reflexão no desenho das classes’, mais sistémica.

- Reflexão ativa ou interativa, que permite ao professor enfrentar problemas que parecem na ação.

- A consciência da atuação.

- A reflexão sobre as lembranças que lhe ajudasse a dar sentido às experiências passadas e, desta forma, conseguir perspetivas sobre o significado das suas experiências.

Seguindo os níveis de reflexão de Van Manem (1977), aplicado ao caso do conceito de limite funcional, em um nível de *reflexão técnica* ante as dificuldades dos alunos, poderia variar de um extremo a outro; de considerar que os alunos ‘não estudaram o suficiente’ a procurar investigações experimentares que analisem entre os diversos instrumentos quais são os mais adequados para que os alunos entendam o conceito. Desde uma *reflexão prática* analisar-se-iam os aspetos fenomenológicos sobre o limite funcional, as limitações de cada modelo, e realizar-se-ia um diálogo investigador com a sua própria posta em prática. Por último a *reflexão crítica* poderia propor-se a significação da inclusão do limite funcional no curriculum da ESO ou do Bacharelato e o significado do fracasso escolar dos alunos em relação com os fins educativos. Esse será também tema de debate no nosso estudo.

Desde uma perspetiva parecida, Pérez (2005, p.251), entende a figura do chamado '*professor investigador*' como aquele que explicita as "*i*nquietudes que emergem de sua prática diária e a considera como objeto de investigação, tentando propostas de solução, bem fundamentadas, com objeto de propor e implementar mudanças concretas em aula e/ou na instituição". Para ele a competência profissional é a capacidade de resolver problemas na prática e "é preciso estudo, trabalho, pesquisa para renovar e, sobretudo reflexão para não ensinar apenas 'o que' e 'como' lhe foi ensinado" (p. 252).

Mas a reflexão prática não é suficiente; e é nessa linha que Miranda (2006) sugere uma reforma curricular que garanta uma formação teórica sólida para o professor pesquisador (tanto inicial como continuada) para que o peso da prática não prevaleça sobre o da teoria.

Em particular, e no nosso caso concreto do conceito de limite, um dos elementos que focalizan a reflexão do professor é o das representações conceptuais. Entendemos aqui, com Rico (2000, p.221), a representação de um objeto como "todas aquelas ferramentas, signos ou gráficos, que fazem presentes os conceitos e procedimentos matemáticos e com os quais os sujeitos particulares abordam e interagem com o conhecimento matemático, isto é, registam e comunicam o seu conhecimento sobre as matemáticas".

As estratégias de aprendizagem são procedimentos internos, cognitivos, que desenvolvem os sujeitos quando aprendem, para lograr um objetivo. É trabalho do professor reconstruir conscientemente os seus significados, como docentes, sobre o conteúdo que deve ensinar-se e a forma em que o processo de ensino deve produzir-se (Biggs, 1988).

A preponderância histórica de um modelo normativo no ensino da matemática, nomeadamente no campo do cálculo, está relacionada com a sua apresentação lógico-deductiva. Se escolhêssemos processos de ensino significativo onde predominem a atividade dos estudantes, teríamos que centrar-nos em aspetos ligados a processos de construção históricos, que permitam flexibilidade na procura do erro e o debate. (Bucari, Bertero e Trípoli, 2007).

Da mesma forma opina Kline (citada em González, 2000) quando afirma que da matemática está apoderada de uma forte tendência lógico-dedutiva. Ai está precisamente a necessidade do conhecimento formalizado, abstrato muitas vezes e de linguagem específica, que a separa do carácter dinâmico e evolutivo da própria perspetiva histórica.

Mas para Baroody, (1994), o desenvolvimento matemático do aluno desenvolveria-se paralelamente ao desenvolvimento histórico da matemática, partindo de conhecimentos imprecisos, e evoluindo para a precisão e a abstração.

Em pleno século XXI, e com a incorporação das novas tecnologias aos centros de ensino, podemos vislumbrar a tendência ao cambio da organização docente mudando radicalmente o ensino, centrado na transmissão de conhecimentos a um novo centrado na aprendizagem, onde se trabalharão conteúdos com materiais especificamente desenhados para isso.

As estratégias de aprendizagem mudarão radicalmente. Nesse aspeto também se transforma o papel dos dous atores fundamentais no processo: professor e aluno. O primeiro centrará cada vez mais o seu papel no desenho de situações e cenários mediados de aprendizagem, enquanto o segundo passará de espetador a ator principal da sua aprendizagem. (Cabero, 2005). Nesse sentido, a incorporação de diversos tipos de materiais e adaptá-los às necessidades do aluno, que se vê propiciada fundamentalmente polo acesso às novas tecnologias, é um elemento fulcral para estabelecer comunicações sincrónicas e anacrónicas entre os diferentes atores do ato didático, rompendo mesmo as tradicionais variáveis de espaço e tempo entre professor e estudante

III.3.2. Materiais usados polo professorado

Historicamente o conceito de material didático (material, no nosso trabalho) está relacionado com o termo recurso. Alguns consideram sinónimos ambos termos: sob o termo ‘material’ agrupamos os objetos, aparelhos ou meios de comunicação que podem ajudar a descrever, entender e consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem , por palavras de Alsina, Burgués e Fortuny (1988) ou analogamente todo objeto, jogo, meio técnico, etc, que permite ao aluno, sugerir conceitos ou materializar ideias abstratas (Álvarez ,1996).

Será Coriat (1997) quem marque a diferença entre os dous termos: Os recursos seriam os materiais não desenhados especificamente para o ensino, mas que o professor decide empregar na aula, enquanto o material didático é criado especificamente para o âmbito educativo (livro de texto, caderno, etc.) Porém, materiais didáticos de qualidade também se utilizam em situações diferentes para as que as que foram criados polo que ambas noções na prática não têm uma delimitação clara.

Para Llinares (2008) ensinar matemática é uma ação mediada por instrumentos, incluindo instrumentos técnicos materiais, como objetos físicos junto com “instrumentos conceptuales constituídos por los conocimientos conceptuales que fundamentan la práctica de enseñar matemáticas” (Llinares (2008, p.7).

Para o autor é importante que o professorado analise a importância dos instrumentos à hora de abordar as situações de ensino-aprendizagem nas aulas, já que o uso de um instrumento ou outro determina em grande medida o fluxo da atividade. No caso de estudantes para professor, Llinares, afirma que na forma em que um estudante para professor ‘usa um instrumento particular’ transforma a sua própria atividade. (Llinares, 2008). O professor deve ser consciente do potencial dos diferentes instrumentos, técnicos e/ou conceptuais e deve saber fazer a escolha conveniente. Nas tarefas do ensino das matemáticas, os instrumentos conceptuais e técnicos, que nós denominamos globalmente ferramentas, desempenham papeis diversos; os conceptuais aportam referências para interpretar situações da tarefa; os técnicos, meios para fazer determinadas cousas na prática (Llinares, 2008).

Em muitos casos os instrumentos são apenas livros de texto e pizarras clássicas, e resulta notória a ausência de uma variedade de materiais curriculares com atividades didáticas elaborados de maneira consistente e sequencial, avalados e revisados por especialistas competentes, sabedores do conhecimento profissional dos professores. (Sosa, 2011)

III.3.3. Utilização das novas tecnologias

Resulta essencial o papel da reflexão epistemológica sobre a natureza da Matemática e das suas consequências para a aprendizagem (Ponte, 1990). O autor considera que é necessário dar um lugar de preponderância às práticas reais em frente às concepções. Neste aspeto o papel das novas tecnologias será a mediadora na transformação das práticas pedagógicas, sempre sob uma orientação didática. É por isso que se devem primar os projetos profissionais individuais, a reflexão e o intercâmbio de experiências.

Material didático é entendido por Sacristán (2000) como recurso para a aprendizagem ou para o desenvolvimento de alguma função do ensino. Viseu e Ponte (2009) distinguem entre materiais manipuláveis (coisas que ou aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar) e materiais tecnológicos. A forte presença na sociedade atual aconselha a utilização destes últimos nas aulas de Matemática, para além, permitir a realização "de cálculos de um modo eficiente, facilita a organização e análise de dados, fornece imagens visuais dos conceitos matemáticos e apoia a atividade exploratória e investigativa dos alunos na realização dos seus trabalhos" (p. 389).

A consequência será a influência na aprendizagem significativa, principalmente no que respeita ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, 'autonomia, pensamento crítico, e de uma atitude positiva em relação à Matemática'. Em geral não podemos desconsiderar os recursos didáticos manipulativos ou virtuais porque para Godino et al. (2005, p.235) "podem ser o suporte para a proposta de problemas e situações didáticas que promovam a atividade e a reflexão matemática".

É um facto objetivo que durante a última década, a disponibilidade de tecnologias nas escolas aumentou e muitas escolas fornecem aos seus alunos um computador próprio (Valiente, 2010), não sendo preciso salas de computadores específicas compartilhadas. A relação do aluno com o computador passa a ser cada vez mais pessoal manipulável e simples, quase do mesma forma que durante décadas o tinha sido o livro de texto ou o caderno. Acompanhando a esta mudança foi parelha a do significado do conceito de ‘dominar a matemática’ acrescentando competências diferentes ao do conhecimento do conteúdo, como são a resolução de problemas, raciocínio e comunicação (Fahlgren, 2015).

Os alunos agora podem trabalhar juntos e usar computadores para explorar e descobrir propriedades e relações matemáticas. As discussões aparecem após o seu uso quando se exibem os resultados dos alunos num computador comum ou numa PDI (Goos, Galbraith, Renshaw e Geiger, citados em Fahlgren, 2015). O software mais utilizado na aula em matemática polo alunado tem a ver com o treinamento de procedimentos e prática. Mália ser importante, falta um desenvolvimento no uso nos processo de aprendizagem e explicação de conteúdos.

Para alguns autores, a baixa utilização de computadores nas salas de aula de matemática vê-se explicada pola crença de que agregar ferramentas tecnológicas aumenta a reconhecida dificuldade do ensino e aprendizagem da matemática (Lagrange e Erdogan, 2009). Os alunos usam os computadores e ferramentas TICs com soltura fora da aula, e parece claro que nessa perspetiva a forma até certo ponto autodidata em que o alunado adquire os conhecimentos técnicos são favorecidos por essas novas estratégias de usos de recursos relacionados com as novas tecnologias, mas a formação crítica e reflexiva apenas será possível com a interação dos atores do processo de ensino-aprendizagem (Mora, 2003).

Mas, infelizmente, essa facilidade de aprendizagem destas novas estratégias baseadas na tecnologia não se complementam necessariamente como soluções definitivas às dificuldades que os alunos têm com conteúdos específicos. Em muitos casos está-se empregando na aprendizagem como um recurso importante complementário, como pode ser a calculadora.

III.3.3.1 Visualização e novas tecnologias

Feita a incorporação das novas tecnologias às aulas, parece evidente que o conceito de "visualização" adquire uma especial relevância no momento de abordar a instrução de um conceito matemático, abstrato muitas vezes, com dificuldades ou obstáculos de tipo epistemológico. Visualizar, criar uma imagem mental do conceito ou melhor, do processo dinâmico, é em muitos casos, um passo prévio para a compreensão. Nesse campo as novas ferramentas aportam uma eficácia que antes da sua aparição se tornava complexa. O uso da tecnologia também parece ajudar nesse campo no processo de ensino-aprendizagem.

As ideias, conceitos e métodos das matemáticas apresentam uma grande riqueza de conteúdos visuais, representáveis intuitivamente, geometricamente, cuja utilização resulta aproveitável, tanto para a apresentação e manejo dos conceitos como para a sua manipulação para resolver certos problemas (de Guzmán, citado em Costa, Di Domeniantonio e Vacchino 2011)**.** O proceso mental interno que supõe a visualização resulta efetivo assim no descobrimento e compreensão de conceitos matemáticos que suponham imaginação e manipulação mental de objetos. (Costa et all, 2011)

Plasencia (2000) pergunta-se sobre a forma em que a tecnologia e o software informático podem ser usados efetivamente para favorecer a intuição, a visualização e o conhecimento matemático, e propugna que as novas tecnologias e o seu poder 'visualizador' entre de forma plena nas atividades que o professor pretenda desenvolver. Também se interessa em investigar até que ponto pode fomentar-se a construções de imagens mentais a través das novas tecnologias; nomeadamente o computador como veículo de promoção da visualização nos processos de ensino-aprendizagem.

Nesse sentido também se exprime Hitt (2003), mas fazendo notar que a tecnologia deve ser uma ferramenta na aula, não um fim. Concede à tecnologia a potencialidade de se converter num bom recurso que o professor dispõe para abordar os distintos registos da representação de um objeto.

No seu trabalho, Plasencia (2000) propõe investigar se os métodos de ensino promovem o uso da visualização, se é detectado e valorizado polo professorado, entrando num campo lindante com o das crenças e perceções do professorado. Nesse sentido perguntam por quais são as crenças que o professorado tem sobre o ensino e aprendizagem das matemáticas, que tipos de tarefas são desenvolvidas na sala de aula que fomentem o uso das imagens mentais e a visualização, e que consciência tem o professorado da diversidade dos alunos e da existência de alunos visualizadores.

Desde outra perspetiva, vinculados à solução de tarefas de visualização em matemática através do enfoque onto-semiótico (EOS) podem descrever-se e interpretar-se factos cognitivos, (Fernández, Godino e Cajaraville, 2012) Assim por exemplo a visualização e o razoamento espacial são interpretadas como práticas matemáticas específicas em muitos casos.

Costa et al., (2011) investigam mediante um inquérito a professores de matemática formulando as seguintes perguntas relativas às tecnologias e visualização:1) Considera que a visualização em matemática é importante? 2) Nas suas aulas, recomendou aos seus alunos realizar gráficos para visualizar os problemas ou as situações formuladas? 3) Considera que há problemas ou situações em que um software matemático, como ferramenta de visualização, ajuda para a compreensão de estes, mais do que o giz e a pizarra? 4) Dos seguintes conceitos, quais considera que os alunos aprenderão e conceptualizarão melhor a partir do uso dum software que visualize o problema. a) Integral definida como limite de somas de Riemann b) Teorema fundamental do cálculo c) Função integral d) Sólidos de revolução e) Gráficas de campos vetoriais em três dimensões f) Rotor e Divergência g) Relação entre Campos gradientes e curvas equipotenciais h) Outra. As três primeiras perguntas foram respondidas afirmativamente por todos os entrevistados. Na quarta ressaltaram como mais propícios ao uso do software informático na procura de uma melhor visualização, os sólidos de revolução e gráficas de campos vetoriais de três dimensões. O mais interessante é que as três primeiras respostas foram respondidas afirmativamente por todos os entrevistados.

III.3.3.2. O uso de programas de software dinâmico

Entre o professorado de Matemática que utiliza programas informáticos e pizarras digitais começa a destacar o uso frequente da aplicação GEOGEBRA. Utilizada para docência na visualização de múltiplos conceitos matemáticos, nomeadamente geométricos, está-se a fazer um oco cada vez maior entre o professorado que se inclina polas TIC como ferramenta de trabalho na aula.

Resulta fácil encontrar programas que trabalham, a partir de Geogebra o conceito de limite. Estudos concretos sobre a eficácia desta ferramenta começam também a aparecer, assim, en Bustos (2013) recolhe-se um estudo com um grupo experimental e um grupo de controle comparativo. Aplicou-se um pre-test e post-test. Com o primeiro utilizou-se o software Geogebra para a explicação gráfico-dinámica do conceito de limite usando intervalos ípsilon e delta. No segundo utilizou-se o método tradicional com giz e quadro. A conclusão, indica o autor, foi uma notável melhora do rendimento, refletida nos resultados obtidos.

Para além disso um inquérito aos estudantes que seguiram as classes usando GEOGEBRA indica entre outras coisas que motiva a aprendizagem, reforça o conteúdo, permite ao aluno trabalhar ao seu próprio ritmo, e faz com que seja mais ativo e participativo, melhora o nível de aprendizagem e facilita novas relações entre professor e aluno (Bustos, 2013).

A eficácia manifestada nestes estudo vê-se acompanhada pola aparição de diversas unidades didáticas que temporalizam o conceito de limite. Estão organizadas para trabalhar os diversos sistemas de representação (simbólico, gráfico, gráfico-dinámico, figurativo, verbal, ou numérico). Podemos assinalar a de Fernández Plaza, super-visada polo professor Rico Romero da Universidade de Granada para o curso 2009-2010. Nela também se contempla a representação gráfica com Geogebra e estuda-se a relação com o conceito de continuidade.

Bozkurt e Ruthven (2015) estudam a integração tecnológica nas salas de aula os tipos de conhecimento profissional exigido para tal fim, contrastando as práticas de um professor de matemática experto em tecnologia com um tecnologicamente inexperto usando Geogebra. Para além de salientar as dificuldades de conseguir as 'lições adequadas' para o experimento, o que segundo os autores, embora haja um grande interesse no GGB, o que indicava que, na prática, seu uso ainda é bastante raro, conclui-se também que o uso desta tecnologia na aula desloca o papel do professor para um observador, organizador do processo de aprendizagem, o que modifica substancialmente a interação entre professor e turma. Agora os alunos testam no computador e validam com ele.

Em todo caso as vantagens do uso deste tipo de aplicações, na opinião do professorado, parece centrar-se na economia de tempo e da visualização dinâmica ‘arrastando objetos’. Entre as desvantagens, não participar da discussão de classe e não raciocinar as relações após a medição com GeoGebra tal como põe de manifesto o estudo elaborado por Erkek e Işıksal-Bostan (2015).

Capítulo IV

Desenho da investigação e metodologia

IV.0. Introdução

No presente capítulo trataremos dous apartados que, a grandes rasgos, configuram o desenho da investigação e as ferramentas para a obtenção de resultados. Por uma parte detalhamos o processo completo de recolhida de dados, desde a designação da população e a mostra até a elaboração e validação do questionário (Anexo I). Por outra parte faremos uma breve referência as ferramentas ou Método de Análise de dados que utilizamos.

Para Bisquerra (2009) investigar em Educação é uma atividade com três características fundamentais:

a) É sistemática e organizada para garantir a qualidade dos resultados.

b) Tem como finalidade básica desenvolver conhecimento científico sobre educação, resolver problemas e melhorar práticas, incluindo as Instituições educativas.

c) Desenvolve-se segundo uns métodos de investigação.

As duas primeiras características são precisas para, por uma parte garantir o chamado rigor científico dos resultados obtidos e por outra para focalizar o processo a uma finalidade precisa e funcional de explicação e "melhora, se possível, da situação vigente no momento da investigação. Não se investiga '*por*'; investiga-se '*para*'.

Quanto à característica c) relativa ao método de investigação, Bisquerra (2009) distingue entre:

- *Investigações qualitativas,* nas que se dá cobertura à implicação pessoal do investigador no contexto investigativo, com estratégias de observação, pessoal, entrevistas, etc. que proporcionam dados qualitativos.

- *Investigações quantitativas*, que tendem a fragmentar a realidade, compartimentando o estudo, trabalhando com variáveis quantificáveis e polo tanto expressáveis em valores numéricos. Usam entre outros, os métodos de inquéritos, e analisam resultados com ferramentas estatísticas.

Frente a métodos nitidamente quantitativos ou qualitativos, aparecem com cada vez maior frequência os chamados *métodos mistos*, que para Hernández Sampieri, Fernández e Baptista (2010, p. 546) "representan um conjunto de processos sistemáticos, empíricos e críticos de investigação e implicam a recolhida e a análise de dados quantitativos e qualitativos, -e a sua integração e discussão conjunta-, para realizar inferências resultado de toda a informação recavada e lograr um maior entendimento do fenómeno estudado".

No caso do presente trabalho de investigação seguiremos um enfoque misto, nos termos exprimidos anteriormente em Hernández, Fernández e Baptista (2010). Apresenta metodologia quantitativa, porque se ajusta às características antes indicadas no que diz respeito, por exemplo, à recolhida de dados e tratamento estatístico deles, e a descrição de perfiles e pessoas; mas também se considera qualitativa porque se orienta à compreensão de práticas, cenários e fenómenos educativos e à toma de decisões (Bisquerra, 2009).

IV.1. População e mostra

A população objeto do nosso estudo está formado pelos professores e professoras de Matemáticas dos centros públicos de ensino de ESO e Bacharelato da Galiza.

Para a investigação educativa é muito útil em ocasiões, para evitar a dispersão da amostra, que esta seja escolhida por conglomerados ou clusters por exemplo "quando os integrantes da população se encontrem reunidos em agrupamentos naturais, tais como escolas ou aulas.(...) Para isso utilizaremos esses conglomerados como unidades mostrais primarias" Aliaga (2000, p.88). Para análises deste tipo, por conglomerados, é uma forma de seleção muito utilizada porque "em muitas casos facilita a recolhida de informação (…) e pode utilizar-se combinada com outros procedimentos" (Etxeberria e Tejedor, 2005, p.254). Para escolher a nossa amostra procedeu-se da seguinte forma:

1) Fez-se um reconto do número de centros de ensino públicos, que dão a educação secundária obrigatória e do Bacharelato na Galiza. São 219 Institutos de Ensino Secundário.

2) Ordenaram-se e classificaram os centros atendendo às seguintes categorias:

    - Províncias. Como existe uma divisão territorial e administrativa do professorado em províncias, esta população considera-se configurada por quatro estratos que se correspondem com cada uma das províncias galegas (Vidal e Salinas, 2011).

        - Núcleos de população. Estes, por sua vez, distribuídos em:

            - Sete grandes cidades galegas. A maior parte da população galega encontra-se agrupada em torno da sete grandes cidades galegas, que atuam como pelo numa distribuição populacional que abarca a costa e algumas populações medianas do interior.

            - Resto de vilas e populações de cada província.

3) Agindo proporcionalmente e considerando que deveríamos eleger ao menos um instituto em cada uma das sete cidades galegas, a amostra de institutos escolhidos compreendia um total de 32, distribuídos da seguinte forma:

- 12 institutos da província da Corunha, dos quais:
  - Dois da cidade da Corunha.
  - Um da cidade do Ferrol.
  - Um da cidade de Santiago de Compostela.
  - Oito do resto da província da Corunha.
- 5 institutos da província de Lugo, dos quais:
  - Um, da cidade de Lugo.
  - Quatro do resto da província.
- 5 institutos da província de Ourense, dos quais:
  - Dois, da cidade de Ourense.
  - Três, do resto da província.
- 10 institutos da província de Pontevedra, dos quais:
  - Dois da cidade de Vigo.
  - Um da cidade de Pontevedra.
  - Sete do resto da província.

Seguidamente mostramos a distribuição, tanto em centros (Tabela IV.1), como em professorado (Tabela IV.2)

Corunha				Lugo		Ourense		Ponte Vedra		
Corunha	Ferrol	Compostela	Resto provincia	Lugo	Resto provincia	Ourense	Resto provincia	Vigo	Ponte Vedra	Resto provincia
2	1	1	8	1	4	2	3	2	1	7
12				5		5		10		
32										

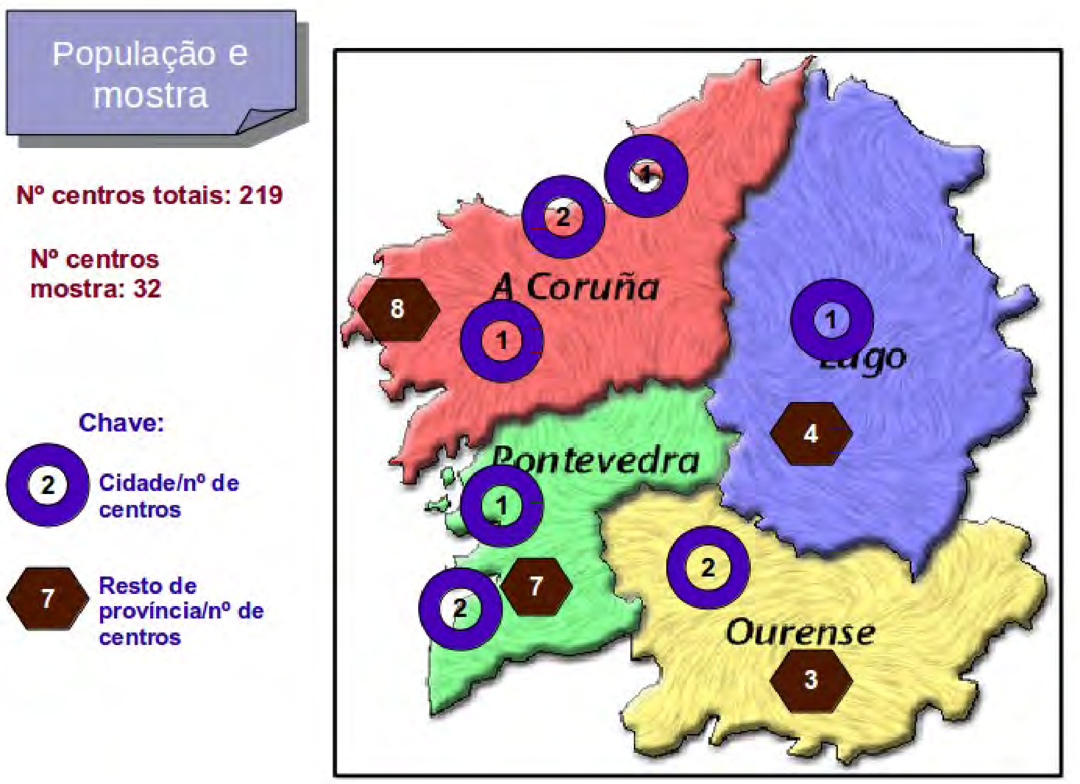
Tabela IV.1: Distribuição dos Centros de ensino da mostra

Também mostramos nas seguintes gráficas as distribuições dos centros no mapa da Galiza

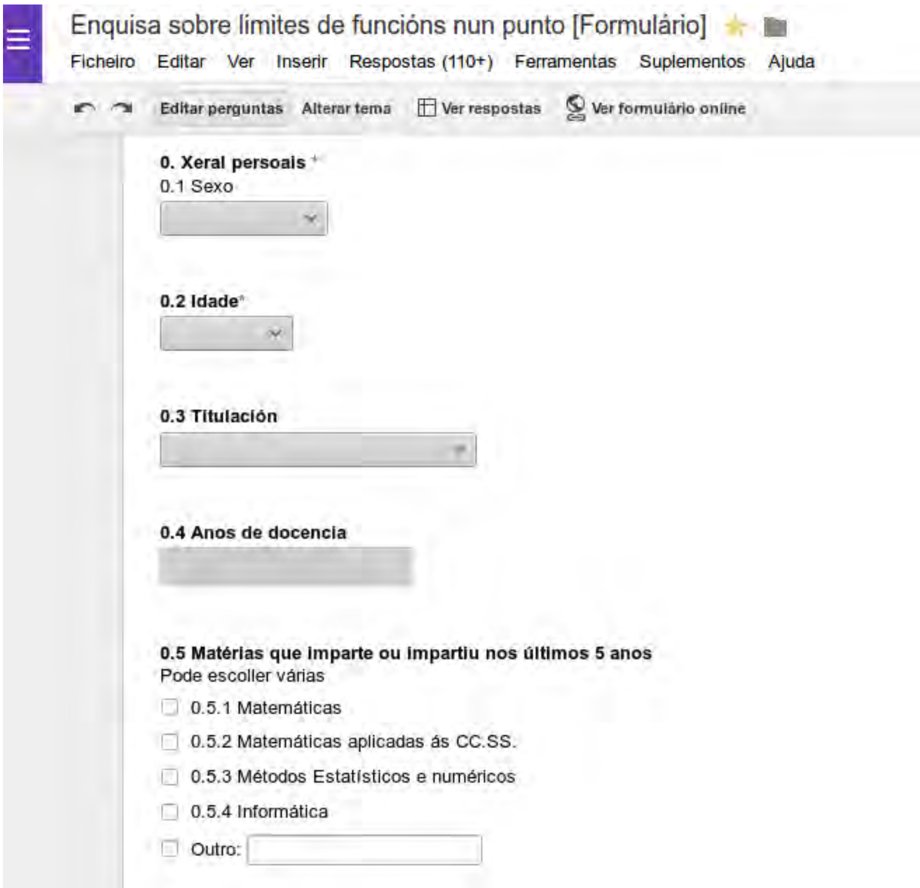
(Grafica IV.1) e do inquérito on-line (Gráficas IV.2 e IV.3).

Corunha				Lugo		Ourense		Ponte Vedra		
Corunha	Ferrol	Compos tela	Resto província	Lugo	Resto provincia	Ourense	Resto provincia	Vigo	Ponte Vedra	Resto Província
6	3	4	29	3	13	6	12	7	3	26
42				16		18		36		
112										

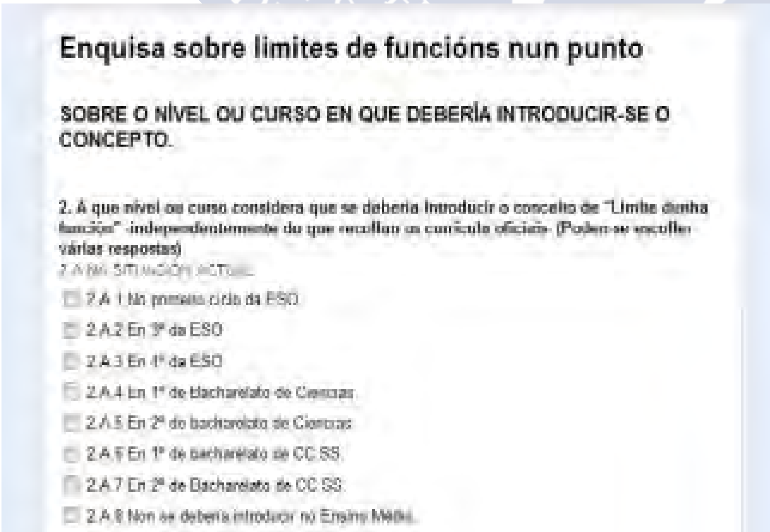
Tabela IV.2: Distribuição do professorado da mostra.



Gráfica IV.1. Distribuição geográfica dos centros da mostra



Gráfica IV.2. Imagem de uma parte do questionário on-line: O início.



Gráfica IV.3. Imagem de uma parte do questionário on-line: Onde se debe introduzir o conceito?

IV.2. Intrumentos de recolhida de dados

O instrumento básico de análise deste trabalho é o questionário elaborado. Para muitos autores a técnica dos questionários é um dos instrumentos de recolhida de informação de mais interesse e uso na investigação educativa. Ajudam a descrever as condições existentes, identificar patrões e normas e determinar relações entre fenómenos específicos (Cohen e Manion, 1990) ou resulta fundamentalmente útil para recavar informação nos que os inquiridos devem manifestar-se sobre o seu mundo profissional, social ou pessoal e onde intervêm, atitudes, valorações, desejos, pensamentos, crenças o condutas de atuação (García e Pérez, 1989). Não apenas no curso de investigações, em muitos casos em contextos reais, é necessário recolher informação suficiente que nos facilite agir sobre qualquer problemática (Méndez, 2004).

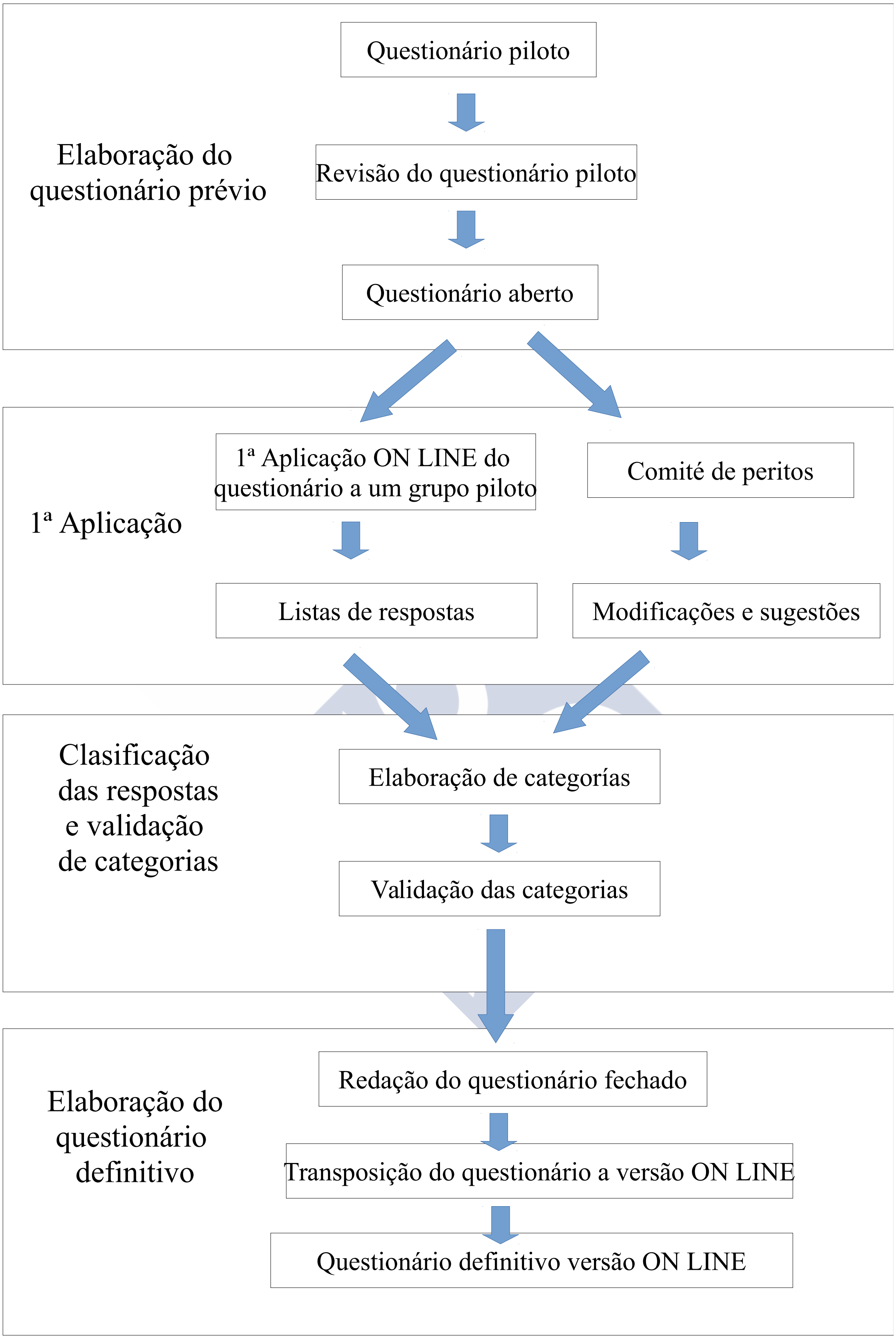
O nosso intuito é reunir no estudo aspetos meramente descritivos com uma faceta interpretativa desses resultados. Para isso utilizou-se uma metodologia descritiva de tipo inquérito onde se administrou um questionário para ser preenchido de forma ON LINE a uma amostra da população em estudo. Partimos de um questionário prévio aberto, onde se recolhem as perguntas básicas objeto de estudo relacionadas com o conceito de limite funcional. Isto está elaborado sobre uma série de possíveis respostas obtidas das diferentes concepções que o professorado normalmente manifesta no que diz respeito ao tema em questão. Desta forma estabelecemos para cada item ou questão uma série de possibilidades de respostas entre as que se incluem, na maior parte dos casos, uma opção aberta.

Uma vez elaborado este questionário prévio e depurado, eliminando questões repetitivas, redundantes ou pouco significativas, foi aplicado pela primeira vez a um conjunto pequeno de professores da contorna do autor, para determinar tanto possíveis falhas na estrutura do inquérito ON LINE como incoerências manifestadas na formulação das respostas.

IV.2.1. Elaboração e aplicação

As etapas seguidas para a elaboração do questionário ficam resumidas nos seguintes 6 passos:

Em primeiro lugar criamos um questionário piloto prévio. Procedemos a revisá-lo, e submete-se a uma primeira aplicação num conjunto pequeno de professores para valorar a sua coerência e funcionamento interno. Posteriormente reestruturamos o questionário inicial com as modificações desta primeira aplicação. Seguidamente submete-se à validação do questionário inicial por parte de um comité de peritos. (Anexo I). A versão definitiva do questionário aberto, com as incorporações e modificações apontadas pelo comité de peritos configurará o inquérito final. Na gráfica IV.4 podemos ver um esquema deste processo.



Gráfica IV.4. Processo de elaboração do questionário

Uma vez elaborado o questionário, procede-se à sua aplicação seguindo as seguintes pautas:

1. Estruturação e elaboração do inquérito ON LINE, e incorporação a uma página inserida na sala de aulas virtual do IES San Paio.

2. Eleição da amostra entre os institutos de ensino médio públicos, com ensino de Bacharelato, da Galiza.

3. Elaboração de um documento explicativo do projeto, para ser enviado aos diferentes diretores/as de Departamento de Matemática dos institutos que fazem parte da amostra. Nesse documento também se indica o processo mediante o qual o professorado pode aceder ao inquérito ON LINE com o objeto de ser aplicado.

4. Contacto pessoal e/ou telefónico com os diretores de Departamento dos centros de ensino incluídos na amostra escolhida. Nessa conversação explica-se o projeto, comunica-se-lhe o envio da carta explicativa e encarrega-se-lhes a comunicação e solicitude de colaboração para a aplicação do inquérito aos demais membros do Departamento.

5. Abertura do questionário ON LINE para permitir a receção de respostas. O questionário esteve aberto durante 10 dias do mês de Junho.

IV.2.2. Conteúdos básicos do questionário

A versão final está organizada em 16 itens em forma de perguntas, muitas delas com diferentes sub- questões. Na questão inicial pede-se ao entrevistado um código de controlo, proporcionado previamente, em funcion do tipo de centro de ensino ao que pertence. Estabeleceram-se códigos para cada um dos conglomerados que se definiram na amostra.

A pergunta zero (P0) refere aos dados pessoais do entrevistado: sexo e idade, título, anos de docência, e matérias que imparte.

A pergunta 1 (P.1) suscita a questão relativa à opinião por parte do professorado da conveniência de que o estudantado de ensino médio se forme na noção de limite de funções. Dentro desta pergunta procura-se a concretização para os diferentes níveis de ESO, Bacharelato de ciências ou Bacharelato de ciências sociais.

A pergunta nº 2 (P2) tem por objeto conhecer a opinião do professorado sobre do nível ou curso em que considera deve ser introduzido o conceito de limite funcional.

O objetivo das perguntas números 3 (P3) e 4 (P4) é conhecer o tipo de representação mais adequada para a introdução do limite funcional, tanto no nível da ESO como no Bacharelato.

Na pergunta 5 (P5) o entrevistado opina sobre a importância dos diversos tipos de obstáculos que, segundo Brousseau, se apresentam no ensino do conceito.

A pergunta 6 (P6) pergunta-se sobre o nível de satisfação do professor ou professora a respeito do esforço pedagógico investido na instrução do conceito.

A pergunta 7 (P7) busca conhecer a opinião do professorado sobre a forma de relacionar na instrução conceitos de limites de sucessões e limites de funções.

A pergunta 8 (P8) procura conhecer os instrumentos utilizados na instrucción educativa do tema em questão tanto na situação atual, como na hipotética situação ideal. Pretende-se assim valorar o grado de condicionamento que, na instrução, supõe a carência ou infra-utilização das novas tecnologias.

A utilidade de livro de texto no tema é o objetivo da pergunta 9 (P9). Existe uma opinião generalizada sobre a prática inutilidade de livro de texto na matéria de matemáticas. Mas este uso parece-nos mais inusual ainda quando falamos de um conceito de maior complexidade didática como é o de limite funcional. A pergunta em questão busca clarificar esse uso.

A pergunta 10 (P10) está formulada para que o entrevistado avalie diferentes estratégias didático cognitivas no que diz respeito ao tema tratado. Pretendemos saber, tanto na situação atual como numa hipotética situação ideal, que importância adquire para o professor questões como a motivação do estudantado, o apoio na história das matemáticas a representação intuitiva dos conceitos, a realização de exercícios, a conexão com a natureza e outras ciências, a incorporação de apoios didáticos, etc.

As perguntas nº 11, 12 e 13 (P11), (P12), (P13) têm como objeto conhecer a opinião do professorado sobre o nível de rigor em que deve ser tratado na instrução o conceito de limite, finito ou infinito (pergunta 13) de uma função num ponto (pergunta 11), ou no infinito (pergunta 12).

A pergunta 14 (P14) solicita que se valore a presença de diferentes referentes na mente do professorado no momento de abordar a instrução do conceito de limite de uma função. A forma em que foi explicada no Bacharelato, passando por estudos universitários, as dificuldades de alunos em cursos anteriores, a achega da informática e novas tecnologias ou ou a formação adquirida em cursos de formação e atualização do professorado.

Finalmente as questões 15 e 16 (P15) e (P16) buscam a valoração do professorado sobre as possibilidades que oferecem o apoio das novas tecnologias na instrução do conceito, assim como à valoração sobre a informação, formação, domínio ou interesse do professorado sobre as possibilidades da utilização destas novas tecnologias.

Nas questões número 5, 6, 10, 14, 15 e 16 os professores e professoras objeto da amostra asignam pontuações de um a cinco, expressando os seus preferências relativas ante as diversas opções de cada questão. Nas demais questões o professor inquirido tem de valorar um a um os itens propostos para as questões gerais. Na seguinte tabela IV.3, mostramos uma classificação das perguntas por campos.

Campos	Perguntas	Tipo	Marco referencial atual/Ideal
Introdução do conceito.	P.1 P.2 P.11 P.12 P.13	Escolha simples Escolha multiple Escolha múltiple Escolha múltiple Escolha múltiple	atual atual/Ideal atual/Ideal atual/Ideal atual/Ideal
Representações	P.3 P.4	Escolha múltiple Escolha múltiple	atual/Ideal
estratégia	P.7 P.10	Escala numérica Escala numérica	atual/Ideal atual
Referentes/reflexão	P.5 P.15	Escala numérica Escala numérica	atual atual
Instrumentos	P.8 P.9	Escolha múltiple Escolha simples	atual/Ideal atual/Ideal
Formação	P.6 P.16	Escala numérica Escala numérica	atual atual

Tabela IV.3: Distribuição dos itens por campos e tipos

Na tabela IV.4, dividida em partes por questão de espaço, apresentamos, junto a cada pregunta o interesse que nos move a formula-la.

Relação de perguntas do inquérito e interesse	
INTERESSE	**PERGUNTA**
Opinião do professorado sobre a necessidade de introduzir o conceito de limite nos niveis de ESO e Bacharelato, e motivo da opinião.	**1. Considera que os alunos/as de Ensino Médio devem ser formados na noção de Límite de funções?**
Opinião do professorado sobre o nivel em que esta noção devería ser introduzida de forma natural, de acordo com a capacidade/formação prévia do alumnado.	**2. A que nível ou curso considera que se devería introducir o conceito de límite de funçoes (independentemente do que indique os curricula oficiais)?**
Entendemos por representações matemáticas de un objeto cada uma das imagens ou ferramentas simbólicas que utilizamos para descrevê-lo. Assim, no conceito de limite de funções podemos distinguir a representação verba-; Numérica, Gráfica ou simbólica. Procuramos saber que modelo prefer o professorado.	**3. Entre as distintas representações do objeto matemático "limite de uma função num punto" (Castro e Castro 1997) cal considera adecuada para o nivel de ESO?** *(Podem-se escoller várias)*:
Entendemos por representações matemáticas de un objeto cada uma das imagens ou ferramentas simbólicas que utilizamos para descrevê-lo. Assim, no conceito de limite de funções podemos distinguir a representação verba-; Numérica, Gráfica ou simbólica. Procuramos saber que modelo prefer o professorado.	**4. Entre as distintas representações do objeto matemático "limite de uma função num punto" (Castro e Castro 1997) cal considera adecuada para o nivel de Bacharelato?** *(Podem-se escoller várias)*:
Brousseau distingue três tipos de obstáculos na aprendizagem dum conceito segundo a sua origem: obstáculos de origem ontogénica (limitações do próprio sujeito), obstáculos de origem metodológica (plantejamento educativo) e, obstáculos de origem epistemológica (o conceito e a sua génese). Queremos conhecer a opinião do professorado sobre este aspecto.	**5. Como valoraría a importância desses obstáculos a respeito do conceito de limite de funções?** *(1 - Pouco importante; 5 - Muito importante)*

Tabela IV.4. Relação de perguntas e motivação.

Relação de perguntas do inquérito e interesse (parte 2)	
INTERESSE	**PERGUNTA**
Dada a complexidade do conceito "límite duma função num ponto", é muito frequente que a relação entre o esforço investido na instrução e a satisfação pelo resultado obtido, não seja a esperada. Interessa-nos a opinião do professorado para concluír necessidades de melloria no campo educativo.	**6. Como valoriza o nível de satisfação a respeito do resultado da acção didática que realiza no tema em questão, comparando-a com o "esforço" pedagógico investido?** *(1-Pouco satisfeito; 5- Muito satisfeito)*
Algúns especialistas da didáctica da matemática, consideram a possibilidade de abordar o conceito de límite de forma geral, como objeto matemático de estudo específico; abranger-se-ia assim simultaneamente os campos de límites de sucessões e límites de funçöess. Taríase en certo sentido dum caminho desde a generalidade à particularidade. Queremos saber que opinião do professorado a este respeito, basando-se na súa prática.	**7. Relação entre limite de sucessão e límite de função: Como considera que devem ser tratados os conceitos de limites de sucessão e limites de função?**
Na Instituição escolar, constituída pelas pessoas envolvidas em determinadas situações-didáticas problemáticas, as prácticas sociais são partilhadas, com rasgos particulares e geralmente condicionadas pelos instrumentos disponíveis na mesma, as suas regras e o seu funcionamento. Queremos saber a opinião do professorado a respeito de ditos instrumentos.	**8. Quais são os instrumentos que usualmente utiliza para conseguir a instrução educativa a respeito do objeto matemático "Limite duma função"?**
Opiniñåo do professorado sobre a utilidade do livro de texto nesta matéria. Em muitos casos, -afírma-se-, o professorado só o utiliza para marcar a realização de exercícios Em casos como o de "conceito de límite duma função", mais complexo, o recurso ao libro de texto parece-nos ainda menos habitual.	**9. Utiliza normalmente o livro de texto, no proceso de ensino-aprendizagem, en particular para o tema de limites de funções?**

Tabela IV.4. Relação de perguntas e motivação.

Relação de perguntas do inquérito e interesse (parte 3)	
INTERESSE	**PERGUNTA**
Análise didática: Máis além de teorias pedagógicas, cursos de formação e linhas didáticas, o professorado move uma série de estratégias/ferramentas que servem de apoio na apreensão do conceito. Interessa-nos conhecer alguns aspectos destas estratégias.	**10. Por favor, avalie as seguintes características ou estratégias didático-cognitivas em relação à sua prática docente habitual no tema de "limites de funções:** *(1-Pouco importante; 5-Moi importante):*
No seguinte ítem propômo-nos coñhecer a opinião do professorado, sempre basado na súa prática docente, día-a-día nas aulas, sobre o rigor (entendido en termos de precisão formal, ligada à exatidão e à expressão linguagem matemática) que debe ser empregado na compreensão por parte do alumnado do conceito limite duma função. Existe relação entre o rigor formal e a apreensão do conceito?	**11. Do rigor da definição: Como considera que deve ser introduzida a definição de "limite duma função num ponto"?**
A idea de infinito (limite infinito ou limites no infinito) resulta historicamente complexa . Chegar-se ao infinito, duma forma mínimamente coerente e compreensível para o alumnado é um dos problemas que gera mais debate desde o ponto de vista didático. O professorado está imerso no processo de ensino deste conceito e queremos conhecer qual é o seu ponto de vista basado em experiência docente. A intenção das preguntas 12 e13 é responder à pregunta concreta de como se introduz (na prática) nas aulas galegas este concepto?	**12. Como considera que deve ser introduzida a definição de "limite de uma função NO INFINITO"?** **13. Como considera que deve ser introduzida a definição de "LIMITE INFINITO de uma função num ponto a" ?**

Tabela IV.4. Relação de perguntas e motivação.

Relação de perguntas do inquérito e interesse (parte 4)	
INTERESSE	**PERGUNTA**
No momento de abordar o processo de instrução pedagógica em temas que sabemos complexos para o alumnado, o professorado costuma pensar em referentes que podem ajudar a focalizar o processo para conseguir uma maior compreensão por parte dos alunos.	**14. Por favor, avalíe de 1 a 5 a importância em que considera que estão presentes, no seu caso, os seguintes referentes:** *(1-pouco presente; 5-muito presente)*
Resulta frequente a crença de que muitos dos problemas e obstáculos gerados na instrução dum objeto matemático conflitivo, podem ser resolvidas recorrendo ao apoio sistemático das novas tecnologias (programas informáticos, computadores, quadros digitais...). Estamos interessados em saber a opinião do professorado sobre a importância real que os professionais dão a esta circunstância. Os dois ítems seguintes vão nese sentido.	**15. Como valoraría a importância das novas tecnologias como apoio didático durante a instrução do conceito de limite de funções?** *(1-Pouco importante; 5- Muito importante)* **16. Como valoraría a informação, formação ou domínio das possibilidades das novas tecnologias que o/a senhor/a possui para serem aplicadas nas aulas no que respeita ao conceito de limite de funções?** *(1-Pouca informação; 5- Muita informação)*

Tabela IV.4. Relação de perguntas e motivação

IV.2.3. Administração do questionário

O questionário fechado administrou-se da seguinte forma: Uma vez contactado com os diretores e diretoras dos Departamentos de Matemática dos centros de ensino incluídos na amostra, estes, transferiram um resumo do projeto, junto à indicações de acesso ao inquérito ON LINE. Mediante uma chave e um código de controlo que relacionava o tipo de centro de ensino da amostra com o entrevistado, este procedia a preencher o questionário. O processo teve lugar durante 10 dias do mês de Junho de 2011 (Anexo II).

IV.3. Instrumentos de análise

No seguinte apartado, fazemos referência às breve ferramentas estatísticas que utilizamos no curso da nossa investigação para analisar os dados obtidos do inquérito.

IV.3.1. Análise descritiva

A nossa intenção após ter recolhido os dados foi analisá-lo utilizando em primeiro lugar a análise descritiva, para obter uma primeira configuração geral dos distintos itens. A nível de percentagens por exemplo damos uma primeira visão dos resultados, e fazemos comparações entre distintas possibilidades de resposta. As tabelas estatísticas e gráficas serão neste caso imprescindíveis. Dependendo dos itens selecionados, utilizamos diversas medidas, acorde à sua natureza; desde médias aritméticas até coeficientes de correlação, de assimetria ou curtose.

IV.3.2. Análise Multi-variante

Utilizando a Análise fatorial, tanto buscando componentes principais como fatores comuns, simplificamos a informação proporcionada por uma matriz de correlações para interpretar estas com maior facilidade.

Trata-se de procurar a estrutura interna de uma série de variáveis, de forma que entendamos que existem uns fatores que explicam porque uns itens se relacionam mais com uns do que com outros.

Para simplificar a matriz de correlações, o método de análise fatorial analisa a variância que é comum a todas as variáveis e, dependendo do enfoque, podemos analisar toda a variância, tanto comum como não comum, ou, alternativamente, analisar unicamente a variância comum. No primeiro caso estaremos usando por exemplo o método de análise de componentes principais; no segundo estaremos estimando as chamadas *comunalidades* (estimações da variância que cada item tem em comum com os demais) dando lugar a um processo que se denomina análise de fatores comuns. Os dous enfoques interpretam-se de forma quase idêntica na prática (Morales, 2013).

Em definitiva a análise fatorial pode indicar-nos como tendem a agrupar-se os itens estudados. Se observamos o significado dos item que pertencem ao mesmo fator, poderemos compreender ou intuir que fatores subjacentes explicam as correlações entre eles. Na tabela IV.5 pode apreciar-se uma visão de conjunto do processo e modalidades da análise fatorial:

<table>
<tr><th>Primeira Fase</th><th colspan="2">Enfoques</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Condensação de factores: identifica-se o número de factores que explicam a máxima proporção de variança comum a todas as variáveis.

Na construção de testes e escalas pode-se comprovar a co-relação de cada variável com o primeiro factor: é o que melhor representa o que todos os ítems medem em comum (mesmo que um primeiro factor importante não prove a unidimensionalidade).

Esta co-relação (o peso) com o primeiro factor de uma informação análoga à co-relação ítem-total.

Com frequência, e com maior propriedade, reserva-se o termo de "análise factorial" ao análise de factores comuns.</td><td>factores componentes

Utilizam-se uns na diagonal da matriz de intercorrelações, portanto analiza-se toda a variação, a comum e também a especifica de cada variável.

Os factores encontrados são:
reais, derivados dos dados disponiveis num estudo concreto</td><td>factores comuns

Não se utilizam uns na diagonal, mas sim estimações da comunalidade (ou variação que cada variável partilha com todas as restantes)

Os factores encontrados são:
hipotéticos, estimados, a partir dos dados</td></tr>
<tr><td colspan="2">Com muitas variáveis (mais de 15 ou 20), e estrutura factorial clara, ambos métodos dão</td></tr>
<tr><td colspan="2">Métodos</td></tr>
<tr><td>Condensação centroide,
Componentes Principais
(é o mais frequente),
Outros.</td><td>Eixos principais (Principal Axis)
Maximum Likelihood,
Minimum Residuals,
Alpha e outros.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">De cualquer um destes métodos passa-se a:</th></tr>
<tr><th>Segunda Fase</th><th>Rotação ortogonal</th><th>Rotação obliqua</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Com as rotações procura-se uma estrutura mais simples e interpretável.

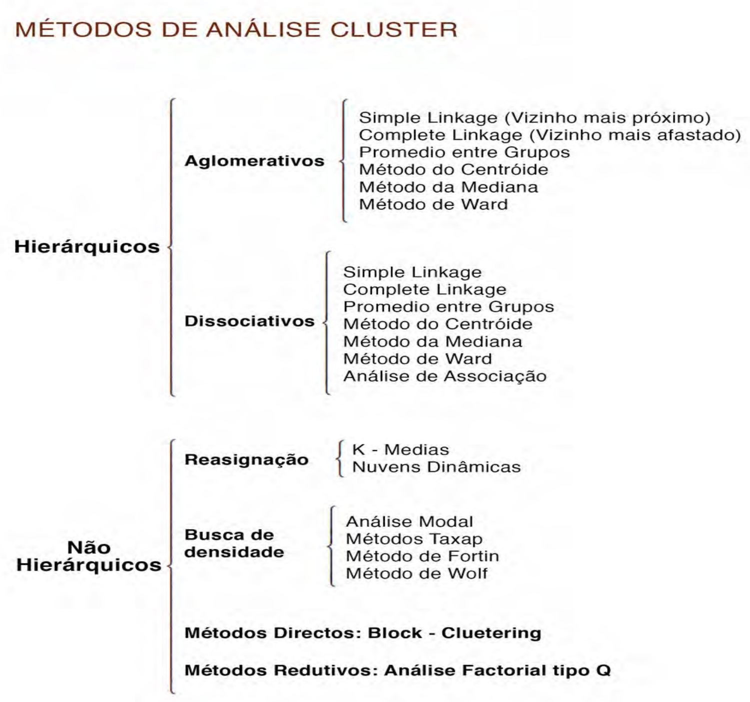
A variação encontrada no passo anterior re-distribui-se em todos os factores. Quando se fala de factores costuma sobrentender-se "factores rotados".

Os factores rotados clarificam a estrutura subjacente às variáveis; aqui radica a sua importância nos estudos de validez: analizam o constructo tal e como vem definido por uma série de ítems; cada factor</td><td>produz factores não relacionados; estrutura mais simples e mais fácil de interpretar</td><td>produz factores relacionados ou não relacionados (nao se força a não-relação); estrutura mais real mas menos simples</td></tr>
<tr><td colspan="2">Métodos</td></tr>
<tr><td>Vartimax, Quartimax, etc.</td><td>Varimin, Quartimin, Oblimin, etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Depois das rotações vem uma fase de reflexão e análise conceitual. Os factores indicam como tendem a agrupar-se os ítems ou variáveis. Agora trata-se de encontrar significado aos factores: que é que têm em comum os ítems que melhor definem cada factor?; como é que podemos denominá-los ("baptizá-los")?; como é que clarificam o constructo subjacente a todos eles?, etc. Costuma-se denominá-los com uma expressão que reflicta o significado comum a todos os ítems que expressam cada factor.</td></tr>
</table>

Tabela IV.5 Fases de um processo de análise fatorial (Morales, 2013)

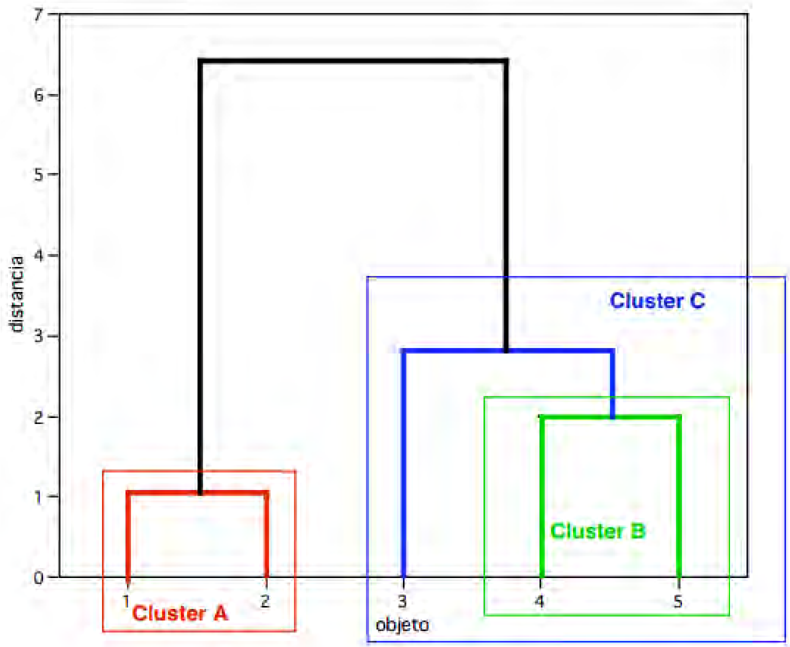
Se estamos interessados em classificar objetos (variáveis) em grupos de forma que se reflita o grau de similitude entre os membros do grupo frente ao grau de similitude entre membros de distintos grupos, uma ferramenta interessante é a Análise Cluster ou de Conglomerados. A classificação em conglomerados pode dar-nos uma ideia precisa das estruturas dos dados usados no estudo. Em múltiplos casos, estas relações não aparecem a priori e só após a análise cluster se podem estabelecer e obter utilidades.

O resultado pode supor a classificação esquemática de um conjunto de objetos que nos permitirá diagnosticar com mais eficácia a sua estrutura interna. O cluster ou conglomerado é a classe á que pertencem os seus membros. Segundo estas sejam aninhadas ou não, os métodos de classificação cluster dividem-se em Hierárquicos ou Não Hierárquicos. Por sua vez podemos classificar cada um deles em aglomerativos e divisivos. Nos primeiros, vão-se obtendo classes de objetos similares a partir de tantas classes como objetos tenhamos para classificar. Nos divisivos, uma única classe formada por todos os objetos dividem-se progressivamente em classes sucessivas (Gráfica IV.5).



Grafica IV.5. Tipos de análises cluster

Para a representação gráfica dos resultados de uma classificação hierárquica num análise cluster é útil representação em Dendogramas. Trata-se de uma representação gráfica em forma de árvore que explicita o processo de agrupamento em conglomerados. Os objetos de maior similitude estão conectados segundo esse grau de relação. Na gráfica IV.6 mostramos um exemplo de dendograma obtido de http://www.estadistica.net/Master-Econometria/Analisis_Cluster.pdf . Segundo estas sejam aninhadas ou não, os métodos de classificação cluster dividem-se em Herárquicos ou Não Herárquicos. Por sua vez podemos classificar cada um deles em aglomerativos e divisivos. Nos primeiros, vão-se obtendo classes de objetos similares a partir de tantas classes como objetos tenhamos para classificar. Nos divisivos, uma única classe formada por todos os objetos dividem-se progressivamente em classes sucessivas.



Gráfica IV.6. Exemplo de Dendograma

Antes de proceder à classificação em conglomerados, cada um separado dos outros, devemos antes definir a distancia entre eles, já que dessa eleição vai depender a agrupamento obtida refletida no dendograma particular. Dependendo de cada caso e subjetivamente pode-se escolher a definição de distancia mais acaida para o estudo.

No nosso estudo, procuramos uma certa classificação do professorado usando estas técnicas, de forma de podermos compreender melhor como se agrupam os distintos conglomerados e que fatores comuns poderemos interpretar.

Capítulo V

Resultados e discussão

V.0. Introdução

Neste capítulo apresentara-se os resultados em duas partes diferenciadas: Na primeira parte expõem-se os resultados da aplicação do questionário aos 112 professores e professoras de Matemática dos centros de ensino secundário pública da Galiza. Por outro lado procederemos a analisar os resultados obtidos da aplicação das técnicas de multi-variante para configurar certas classificações, grupos ou tendências entre o professorado, relativamente a alguns aspetos estudados da sua atividade docente.

V.1. Resultados da análise descritiva

Ao tratar-se de uma análise descritiva, configurada por itens independentes, que abarcam aspetos diversos, consideramos conveniente estruturar esta análise em base aos resultados obtidos em cada uma das perguntas formuladas no inquérito. Por esse motivo indicaremos, após cada pergunta, os resultados em tabelas e gráficos, acompanhados de uma descrição dos resultados mais significativos.

V.1.1 Resultado do primeiro item

P1:

Considera que os alunos e alunas de ensino médio devem ser formados na noção do limite de funções?

Pela resposta do professorado, podemos determinar a opinião, unânime na prática, de que o conceito de limite deve ser tratado no ensino secundário. (Tabela V.1 e Figura V.1). Também cabe destacar a crença maioritária em que a instrução do conceito pode ser compreendida na educação secundária obrigatória (ESO), já que 57% dos professores entrevistados consideram que se dão as condições necessárias para isso. Em questões posteriores incidirá-se sobre o tipo de condições precisas.

		SIM	NÃO
P1.I	Na ESO	57%	41%
P1.II	No Bacharelato de ciências	99%	1%
P1.III	No Bacharelato de ciências sociais	95%	4%

Tabela V.1: Percentagens das respostas ao item nº 1

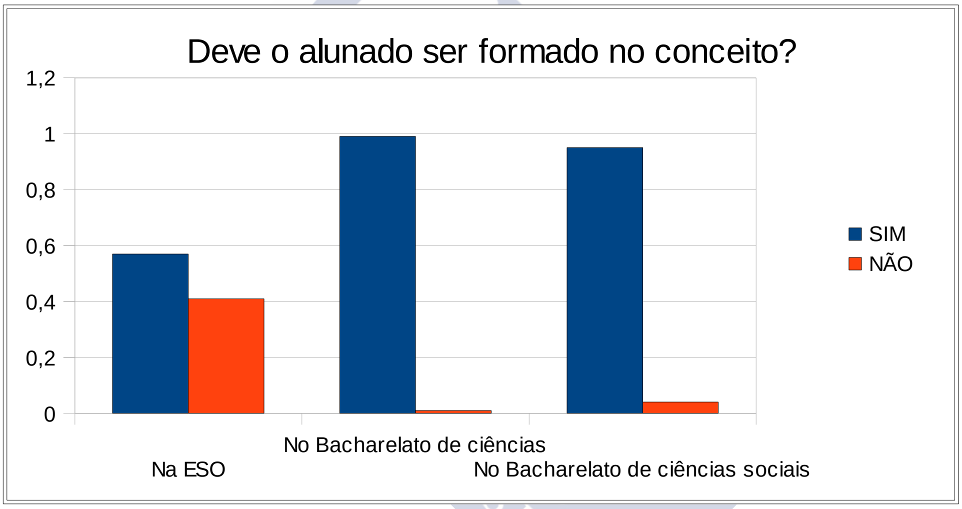


Figura V.1: Resultados gerais do item nº 1

V.1.2 Resultado do segundo item

P2:

A que nível ou curso considera que se deveria introduzir o conceito de limite funcional?

A análise das respostas a esta pergunta aporta-nos um dado significativamente interessante: Observamos que, com as condições e contorno atuais, só 37% dos professores consideram possível iniciar a instrução do conceito num 4º curso da ESO. Essa percentagem aumenta a mais da metade sim as condições fossem ideais (hipotéticas situações de flexibilidade programática, horária, e instrumentos de apoio convenientes). Obviamente, dadas essas condições ideais, e ao aumentar a percentagem do professorado decidido a introduzir o conceito em 4º de ESO, diminuirá a daqueles que escolheriam os níveis que a legalidade atual contempla (1º de Bacharelato).

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P2.I	No primeiro ciclo da ESO	1%	1%
P2.2	Em terceiro de ESO	1%	11%
P2.3	Em quarto de ESO	37%	52%
P2.4	Em 1º de Bacharelato de ciências	68%	46%
P2.5	Em 2º de Bacharelato de ciências	12%	12%
P2.6	Em 1º de Bacharelato de CC.SS.	59%	41%
P2.7	Em 2º de Bacharelato de CC.SS.	14%	11%
P2.8	Não deveria introduzir-se.	0%	1%

Tabela V.2: Percentagens das respostas ao item nº 2

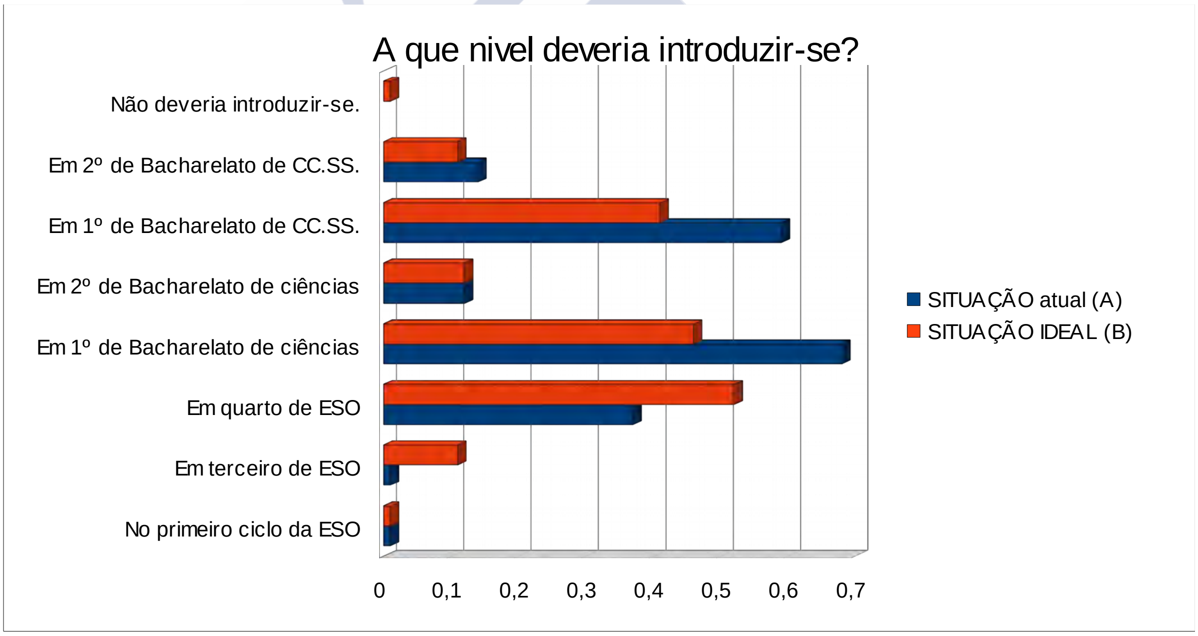


Figura V.2: Resultados gerais do item nº 2

V.1.3 Resultado do terceiro item

P3:

Entre as possíveis representações do objeto matemático "Limite funcional", qual considera adequada para o nível da ESO?

A resposta aqui também se mostra medianamente clarificadoras: na situação atual, a introdução do conceito, de produzir-se na ESO, esta deveria ser -a julgamento dos entrevistados- baseada numa representação verbal e numérica, utilizando tabelas de valores. Restringir-nos-íamos assim à concepção dinâmica do limite de uma função num ponto, ressaltando a ideia de procura do lugar para o que se achega a sucessão de imagens de origens cada vez mais próximos ao ponto dado. Uma percentagem considerável, se atendemos ao facto de que tal introdução não aparece no currículo oficial, tal como foi comentado no ponto II.3.2.

Vemos também como a percentagem da utilização da representação gráfica do limite aumenta se o professorado se situar num marco ideal de trabalho. Até aparece uma percentagem mínima de professores e professoras que estariam dispostos a considerar uma representação simbólica do conceito neste nível de quarto da ESO, sempre numa situação ideal. Os resultados anteriores, aparecem representados na tabela V.3 e, graficamente, na figura V.3.

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P3.1	Verbal	47%	51%
P3.2	Numérico (tabular)	63%	68%
P3.3	Gráfico. (Com sucessões)	31%	58%
P3.4	Gráfico. (Com contornas)	14%	35%
P3.5	Gráfico. (Com outros gráficos)	24%	27%
P3.6	Simbólico	1%	6%
P3.7	Outra (s)	15%	13%

Tabela V.3: Percentagens das respostas ao item nº 3

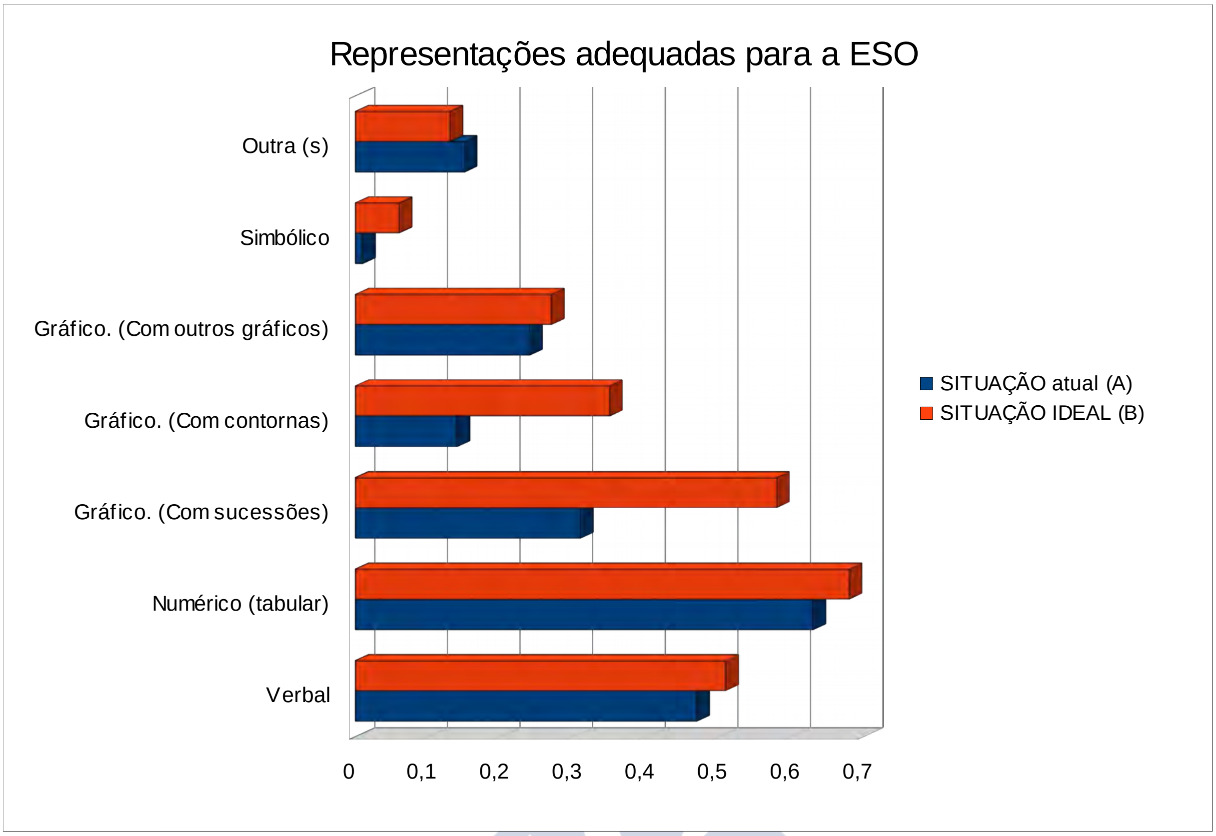


Figura V.3: Resultados gerais do item nº 3

V.1.4 Resultado do quarto item

P4:

Entre as possíveis representações o objeto matemático "limite funcional", qual considera adequada para o nível de Bacharelato?

Se aplicamos a pergunta anterior ao Bacharelato em lugar da ESO, vemos como as representações numéricas e gráficas, aumentam consideravelmente. Contudo a consequência mais interessante que podemos interpretar à luz dos resultados desta pergunta, está na manutenção das percentagens das diferentes representações, nas duas circunstâncias, atual e ideal, em que situamos ao professorado. Isto significa que uma hipotética melhora das condições que rodeiam à instrução quase não influiria no tipo de representações que se usariam para definir o conceito. Aumenta consideravelmente, até dobrar, a percentagem de uso da representação simbólica (com Ípsilon e Delta), no caso da situação ideal (Tabela V.4 e Figura V.4). Estes dados pode-nos levar a formular as seguintes hipóteses que deveriamos estudar numa nova etapa posterior:

1) O professorado já está aplicando na atualidade, maioritariamente, as representações que considera mais adequadas para a uma definição e tratamento do conceito de limite funcional. Uma hipotética melhora nas condições de ensino-aprendizagem, quase não suporia a introdução a maior escala da representação simbólica. Não seria muito aventurado perguntar-se, então, se, na atualidade, o maior impedimento para o tratamento desta representação na definição do conceito, está relacionado com a falta do tempo necessário para introduzir a simbologia necessária.

2) O professorado, de forma relativamente contraditória com respostas a questões posteriores -atendendo à manutenção das percentagens da situação atual e ideal- não parece considerar relevante aspetos como a melhora nos instrumentos de apoio didático, por volta das novas tecnologias, para melhora nas representações gráficas ou numéricas do conceito. A formulação desta hipótese vem motivada pela constância de um insignificante aumento das percentagens da coluna correspondente à situação ideal.

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P4.1	Verbal	62%	63%
P4.2	Numérico (tabular)	71%	71%
P4.3	Gráfico. (Com sucessões)	71%	73%
P4.4	Gráfico. (Com contornas)	58%	59%
P4.5	Gráfico. (Com outros gráficos)	42%	49%
P4.6	Simbólico	30%	61%
P4.7	Outra (s)	2%	6%

Tabela V.4: Percentagens das respostas ao item nº 4

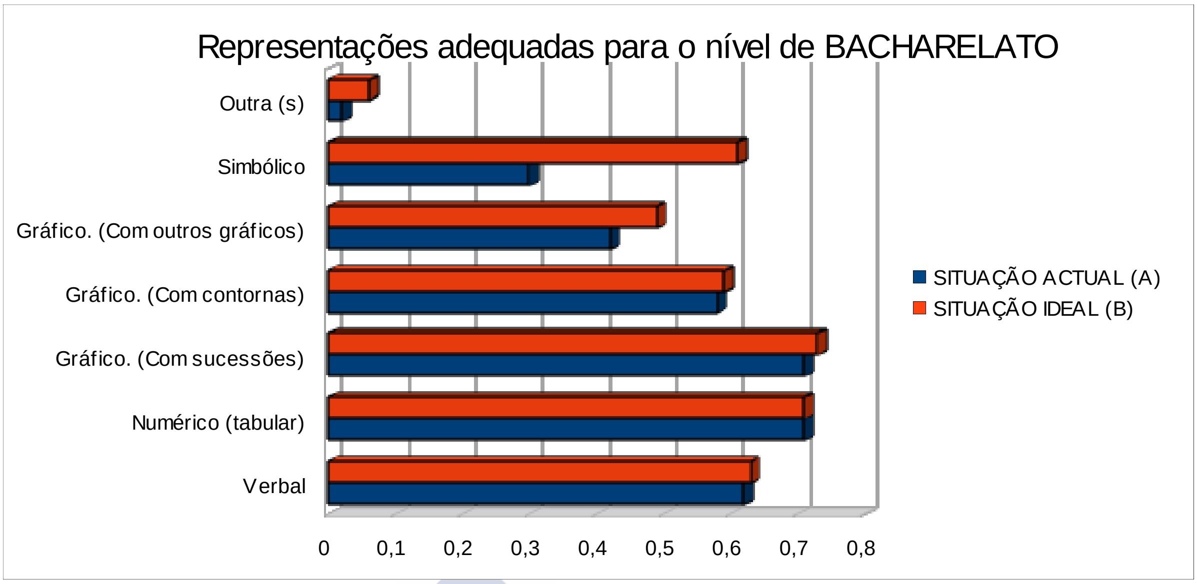


Figura V.4: Resultados gerais do item nº 4

3) A comparativa entre a ESO-Bacharelato, tanto do ponto de vista atual como ideal, que aparecem nos gráficos anteriores, dá ideia do incremento paulatino das representações simbólicas, mesmo aceleradamente no caso do Bacharelato em situação ideal, em detrimento das meramente verbais ou numéricas. (tabelas V. 5 e V.6 e figuras V.5 e V.6)

Comparação ESO-BACHARELATO	SITUAÇÃO atual NA ESO	SITUAÇÃO atual NO BACHARELATO
Verbal	47%	62%
Numérico (tabular)	63%	71%
Gráfico. (Com sucessões)	31%	71%
Gráfico. (Com contornas)	14%	58%
Gráfico. (Com outros gráficos)	24%	42%
Simbólico	1%	30%
Outra (s)	15%	2%

Tabela V.5: Comparação entre as representações preferidas atualmente.

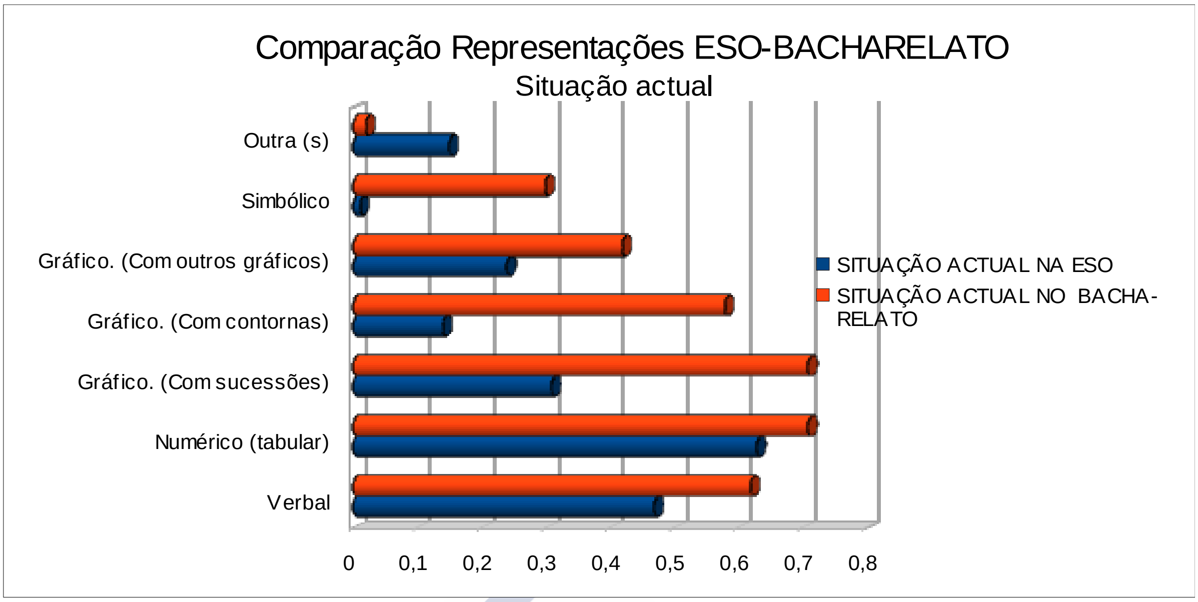


Figura V.5: Comparação entre as representações preferidas atualmente

.

Comparação ESO-Bacharelato	SITUAÇÃO IDEAL ESO	SITUAÇÃO IDEAL BACH
Verbal	51%	63%
Numérico (tabular)	68%	71%
Gráfico. (Com sucessões)	58%	73%
Gráfico. (Com contornas)	35%	59%
Gráfico. (Com outros gráficos)	27%	49%
Simbólico	6%	61%
Outra (s)	13%	6%

Tabela V.6: Comparação entre as representações preferidas em situação ideal

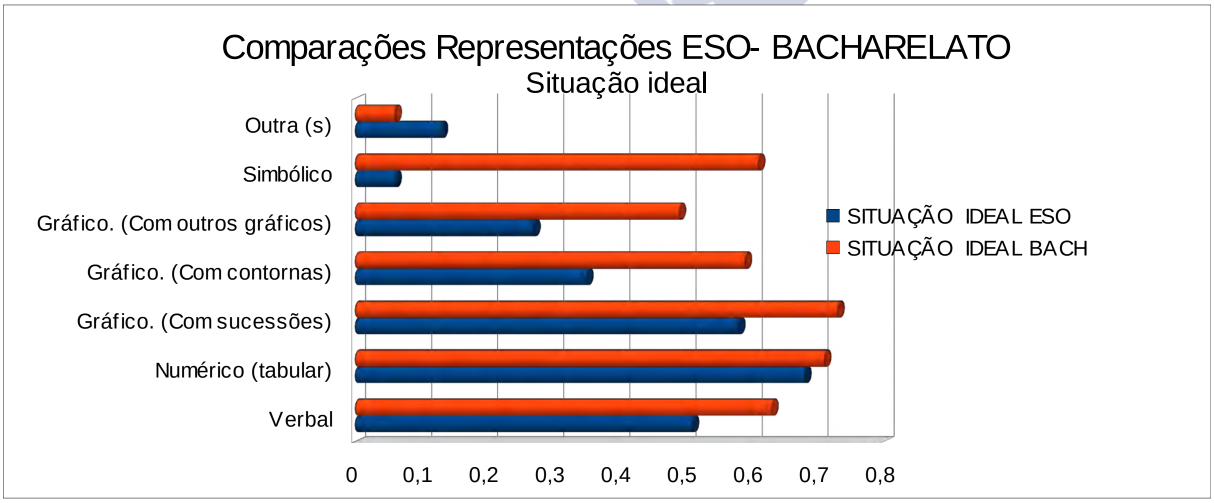


Figura V.6: Comparação entre as representações preferidas em situação ideal

V.1.5 Resultado do quinto item

P5:

Como valora a importância dos obstáculos para a aprendizagem no que respeita ao conceito de limite de funções? (Pontuado de 1 a 5).

O obstáculo metodológico aparece significativamente assinalado como o que gera maior importância para o professorado. Numa pontuação de um a cinco, a média situa-se em 3,55 com um desvio padrão menor do que 1. Isso dá-nos uma ideia de verdadeira uniformidade na consideração da necessidade de melhorar o aspeto metodológico como fulcral, para alcançar os melhores resultados pedagógicos. O professorado também reconhece a dificuldade epistemológica ao valorar com nota média de 3,46. Podemos comprová-lo na tabela V.7 e na figura V.7.

		$\overline{x}$	s
P5.1	Ontogénica (do propio sujeito)	3,2	1,02
P5.2	Metodológica	3,55	0,95
P5.3	Epistemológica (do próprio conceito)	3,46	1,01

Tabela V.7: Valores médios e de dispersão dos obstáculos.

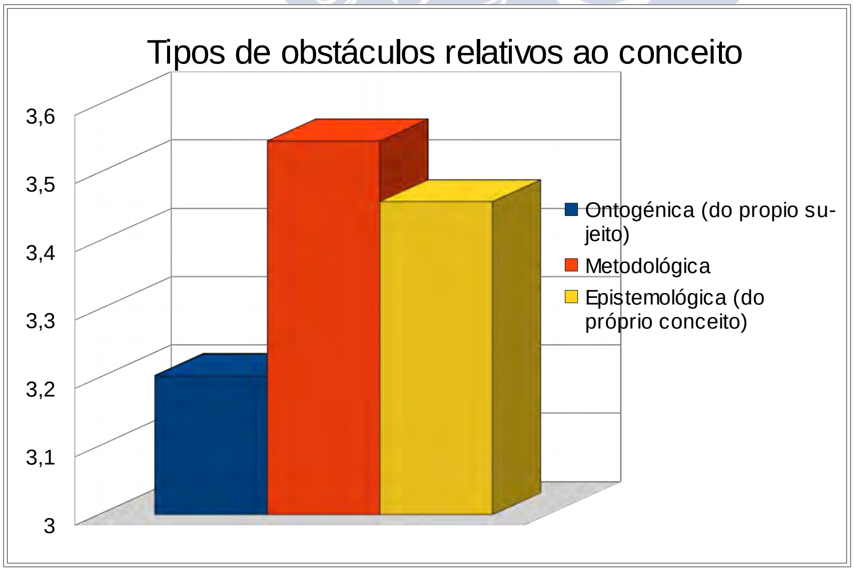


Figura IV.7: Pontuação média dos distintos obstáculos

V.1.6 Resultado do sexto item

P6:

Como valora o nível de satisfação a respeito do resultado da ação didática realizada no tema em questão? (Pontuado de 1 a 5)

Também resulta bastante uniforme a valoração do professorado sobre o nível de satisfação da ação didática. A média situa-se a quase a décima por baixo do 3. Não é portanto arriscado supor uma certa insatisfação com o resultado da sua ação instrutiva relativa ao limite funcional. Poderíamos formular a hipótese de que esta estiver ligada com a dificuldade metodológica, se atendermos aos resultados da pergunta 5 (Tabela V.8).

		$\overline{x}$	s
P6	Satisfação a respeito do resultado.	2,92	0,9

Tabela V.8: Nível médio de satisfação após a instrução

V.1.7 Resultado do sétimo item

P7:

Como consideram que deveria ser tratada a relação entre os conceitos de limites de sucessões e limites de funções?

Das respostas a esta questão, intuímos a preferência por introduzir previamente o conceito de limite de sucessões; hipoteticamente para, usando estas, introduzir mais tarde o conceito de limite funcional. Desenvolver o conceito geral de limite, contudo o que isso significa de abstração, só parece tomar-se em conta, ainda que em pequena medida, no caso de uma situação ideal. Nesse caso um terço do professorado entrevistado seria favorável para essa opção (Tabela V.9).

Também resulta significativo o dado da última linha da tabela V.9, no sentido de que, numa situação ideal, baixaria a percentagem dos que consideram que ambos os conceitos devem ser tratados por separado. Podemos perguntar-nos, nesse caso se as circunstancias actuais são as causantes da preferência pela diferenciação.

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P7.1	Devem relacionar-se. O limite de sucesões deve ser prévio	63%	55%
P7.2	Devem relacionar-se. O limite de funções deve ser prévio	0%	1%
P7.3	Demem desenvolver-se ao mesmo tempo, como conceito geral.	21%	32%
P7.4	Devem ser tratados por separado.	14%	8%

Tabela V.9: Preferência de relacionamento entre limites de sucessões e funções

V.1.8 Resultado do oitavo item

P8:

Quais os instrumentos (material didático) que usualmente utiliza (ou utilizaria na situação ideal) para a instrução educativa a respeito do objeto matemático "Limite Funcional"?

As respostas a esta pergunta (Tabela V.10 e Figura V.8) resultam significativas e à vista delas podemos formular as seguintes hipóteses:

1) O professorado utiliza preferentemente instrumentos tradicionais na atualidade (quadro preto tradicional, calculadoras científicas, caderno de atividades...) para a instrução do conceito, -qualificado anteriormente noutras perguntas como dificultoso no aspeto metodológico e epistemológico-. Só um de cada cinco entre o professorado entrevistado utiliza na atualidade as possibilidades que oferecem as novas tecnologias, como quadro digital, salas de aulas de informática ou programas informáticos.

2) O professorado admite contudo - como observamos na coluna duas- que se

as circunstâncias do contexto melhorassem, numa situação ideal, a tecnologia tradicional veria-se substituída pelas novas tecnologias. As percentagens de utilização destas últimas triplicaria-se ao menos, no pior dos casos. As comparações entre as colunas A e B, parecem apontar nesse sentido.

3) Instrumentos pouco usados na atualidade também não seriam utilizados de forma significativa se as circunstâncias mudarem. É o caso de DVD, ou calculadoras programáveis.

4) Nestes dous últimos anos, a instalação de PDI nos centros aumentou em grande medida polo que a percentagem de utilização pode ter melhorado no caminho a esse 70% de uso que declara o professorado para uma situação ideal.

		SIT. atual (A)	SIT. IDEAL (B)
P8.1	Giz branco	78%	50%
P8.2	Giz de cores	47%	39%
P8.3	Livro de texto	61%	37%
P8.4	Caderno de atividades do alunado	43%	37%
P8.5	Caderno de atividades de editoriais	6%	6%
P8.6	Quadro tradicional	79%	46%
P8.7	Calculadora científica	60%	52%
P8.8	Calculadora científica programável	1%	14%
P8.9	Calculadora gráfica	6%	29%
P8.10	D. V. D.	4%	11%
P8.11	Quadro Digital	21%	70%
P8.12	Projector	21%	38%
P8.13	Apresentações, de elaboração própria	13%	45%
P8.14	Apresentações, de elaboração alheia	7%	30%
P8.15	Aula de informática	20%	61%
P8.16	Programas informáticos	27%	69%

Tabela V.10: Preferência de uso de material para a instrução

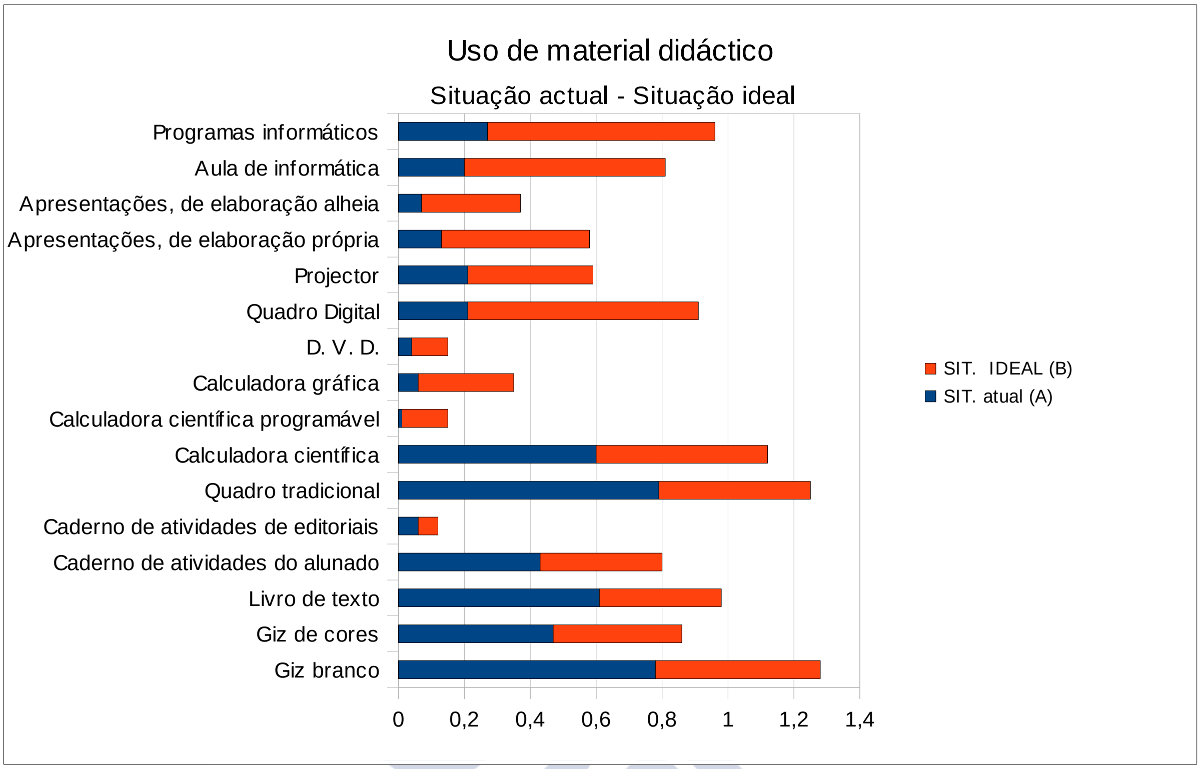


Figura V.8: Gráfico do uso do material didático

V.1.9 Resultado do nono item

P9.1:

Utiliza a normalmente o livro de texto no processo de ensino-aprendizagem, particularmente para o tema 'Limite Funcional'?

A utilização geral do livro de texto é maioritária, e diminuiria levemente no caso de uma situação ideal, hipoteticamente por substituição do instrumento por outros mais adequados como computadoras ou calculadoras gráficas (Tabela V.11 e Figura V.9). Mas lembremos a grande quantidade de trabalhos de investigação que têm por objeto de estudo os conteúdos dos livros de texto. A hipótese de que o professorado não é 'seguidor incondicional' de esses conteúdos, colhe aqui forma. Em todo o caso interessam-nos conhecer qual é o uso que se dá, na situação atual (ou se daria, em situação ideal), ao livro de texto. Isto vai-nos o clarificar a seguinte pergunta.

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P91.1	Sim	63%	59%
P91.2	Não	37%	41%

Tabela V.11: Uso do Livro de Texto

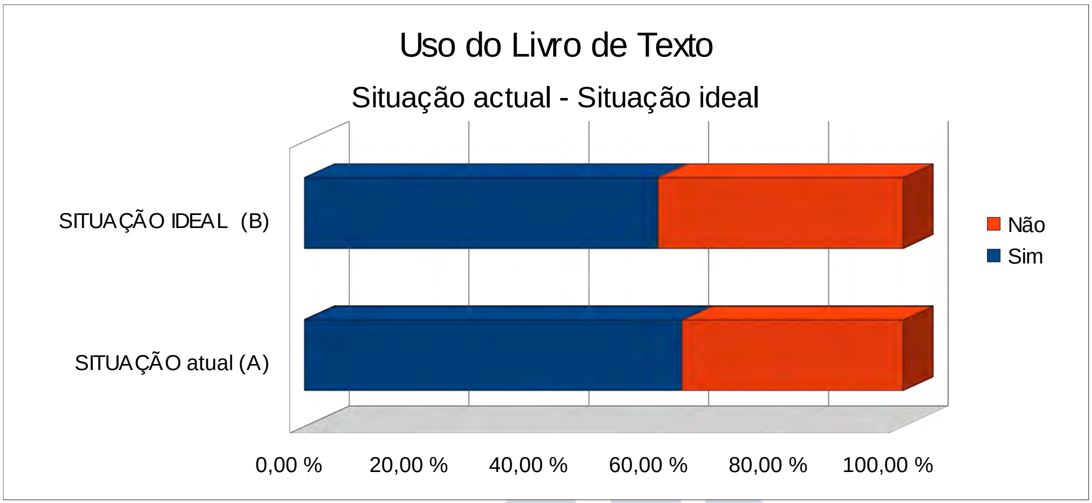


Figura V.9: Gráfico do uso do Livro de Texto

P9.2)

Qual o uso maioritário (na situação atual) ou seria (na situação ideal) o uso do livro de texto no processo de ensino aprendizagem, particularmente para o tema "Limite Funcional"?

Maioritariamente o uso do livro de texto na atualidade, no referido ao tema de limites funcionais, é como podemos observar principalmente para exercícios e problemas. Numa situação ideal o professorado incrementaria o seu uso como consulta do estudantado ou como complemento didático em casa, ademais de outros sem especificar. Nesse caso diminuem sensivelmente o uso do livro de texto para a proposta de exercícios e problemas para o estudantado. Como apreciamos na figura V.10 e na tabela V.12, os diversos usos alternativos do livro aparecem mais compensados, nesta situação ideal.

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P9.2.1	Para consulta do alunado	29%	41%
P9.2.2	Para referências de conceitos do alunado	23%	25%
P9.2.3	Como complemento didático em casa	25%	41%
P9.2.4	Principalmente para exercícios e problemas	58%	41%
P9.2.5	Outros	39%	42%

Tabela V.12: Percentagens de tipos de uso do livro de texto.

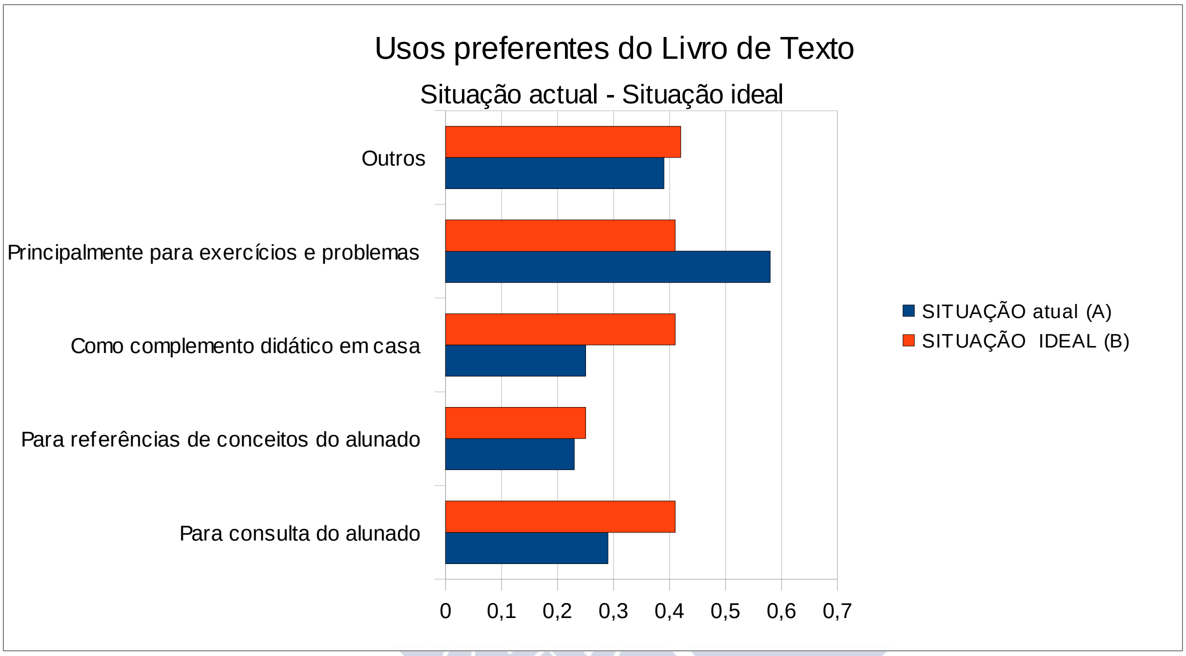


Figura V.10: Gráfico dos tipos de uso do livro de texto

V.1.10 Resultado décimo item

P10:

Qual a importância que outorga (outorgaria na situação ideal) durante a instrução educativa, a respeito do objeto matemático "Limite Funcional", a cada uma das seguintes características ou estratégias didático-cognitivas?(Pontuado de 1 a 5)

Na situação atual os fatores mais potenciados pelo professorado no tema de limite funcional são os relacionados com a motivação do estudantado, a representação intuitiva dos conceitos e a realização de grande quantidade e variedade exercícios. Em todos eles a média supera os quatro pontos; dois deles (a representação intuitiva e a realização maciça de exercícios) apresenta um desvio típico significativamente menor que as demais; o que nos indica uma maior concordância e uniformidade perto do valor central da média.

		SITUAÇÃO atual (A)					SITUAÇÃO IDEAL (B)				
		$\overline{x}$	s	C.V	C.a	CK	$\overline{x}$	s	C.V	C.a	CK
P10.1	A motivação do alunado	4	1,11	27,8	-0,87	0,33	4,49	0,72	15,9	-1,18	0,25
P10.2	O apoio na história da Matemática e nas suas aplicações	2,8	1	35,8	0,36	0,25	3,8	0,94	24,7	-0,56	0,17
P10.3	Representação intuitiva dos conceitos prévia ao desenvolvimento formal	4,22	0,81	19,2	-0,62	0.25	4,52	0,66	14,6	-1,25	0,5
P10.4	Realização de quantidade e variedade de exercícios e problemas, diversos, por parte do alunado .	4,13	0,89	21,5	-0,64	0.25	4,01	0,86	21,5	-0,63	0,5
P10.5	Conexão com a realidade, a natureza, a vida diária e com outras ciências.	3,64	1,01	27,68	-0,35	0,17	4,3	0,7	16,3	-0,82	0,25
P10.6	Ênfase nos procedimentos de resolução de problemas	3,4	1,05	30,86	-0,53	0,17	3,92	0,88	22,4	-0,44	0,5
P10.7	Incorporação de apoios didáticos(resumos, calculadora, computadora, quadro digital...)	3,75	1,04	27,75	-0,4	0,33	4,39	0,76	17,3	-1,04	0,25
P10.8	Utilização de factos curiosos ou chamativos relacionados com o tema	3,08	1,02	33,07	-0,06	0.5	3,77	0,82	21,6	-0,08	0,25

Chaves: X, Média; s, desvio padrão; CV, Coeficiente de variação; Ca, coeficiente de asimetria; CK, coeficiente de curtose de Kelley

Tabela V.13: Comparativa de parâmetros estatísticos nas estratégias. Situação atual/ideal

Comparando as pontuações médias nas duas situações (Tabela V.14), podemos afirmar que a realização de muitos exercícios é fundamental para o professorado, seja qual for o contexto de trabalho. A representação intuitiva seria mais fácil e aumentariam os apoios didáticos significativamente numa situação ideal.

	Motivação	Apoio na história	Represent. intuitiva	Muitos exercícios	Conexão realidade	Resolução problemas	Apoios didáticos	Factos curiosos
Situação atual	4	2,8	4,22	4,13	3,64	3,4	3,75	3,08
Situação ideal	4,49	3,8	4,52	4,01	4,3	3,92	4,39	3,77

Tabela V.14: Comparativa pontuações médias nas estratégias. Situação atual/ideal

As respostas do professorado permitem-nos afirmar que, na actualidade, a preocupação do professorado nas circunstâncias habituais, e relativamente ao conceito de limite de funções, gira em torno de facilitar ao aluno ou aluna, por uma banda, uma melhor compreensão intuitiva do conceito e por outra parte a dotá-lo das ferramentas de cálculo necessárias para manejar com soltura as propriedades dos limites através da realização de múltiplos exercícios.

É notavelmente significativo a pouca utilidade que o professorado concede ao apoio na História da Matemática e nas suas aplicações; assim mesmo não é destacável a utilização de factos curiosos ou atrativos relacionados com o tema. Também não destaca -provavelmente pela pouca adaptabilidade do conceito a estudar- o ênfase nos procedimentos de resolução de problemas; que por outra parte sempre foi valorado como método de aprendizagem construtivista adequado ao espírito da LOGSE. A prática docente, afasta-se aqui também mais uma vez do espírito do legislador.

As causas provavelmente podemos pressenti-las analisando os resultados, para este mesmo item, obtidos na coluna B, da situação ideal. Agora, nessa situação ideal, já dispomos de tempo programas flexíveis e instrumentos e apoios adequados, e nessa circunstância todos os parâmetros anteriores sofrem um acréscimo considerável.

Na coluna B, podemos apreciar uma única diminuição a respeito à situação atual: a que se refere à utilização da técnica de realização de exercícios diversos e abundantes por parte do estudantado. Um maior uso de apoios e instrumentos didáticos, supomos deslocaria as técnicas básicas de realização reiterada de exercícios similares.

Aumentam os valores da motivação do estudantado, no caso ideal, ao dedicar maior tempo e médios a fomentar o interesse. Mantém-se de todos os modos por baixo de quatro o ênfase nos procedimentos de resolução de problemas e o apoio na história das matemáticas e as suas aplicações (Figura V.11). Destaca também significativamente o aumento da média correspondente ao apartado de conexão com a realidade, a natureza a vida diária e outras ciências; argumento que se vê reforçado com um desvio padrão baixo (0,7).

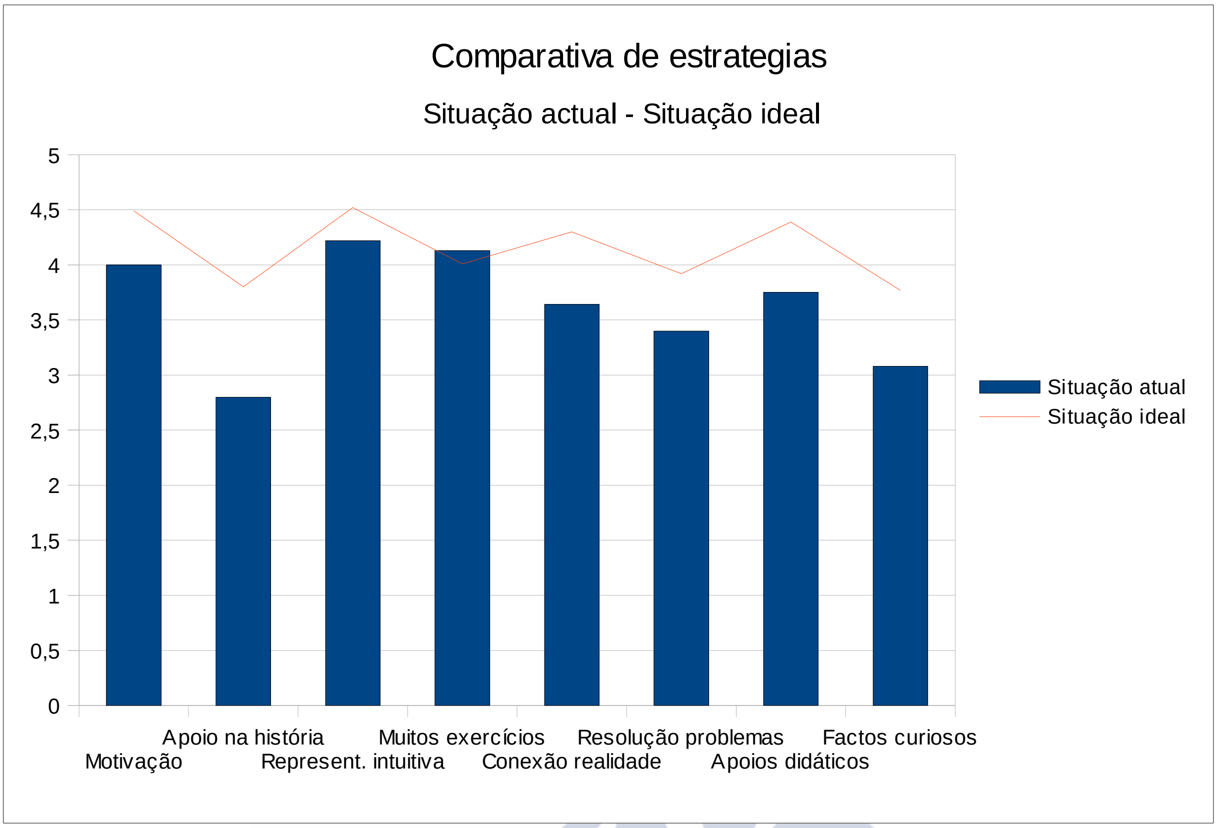


Figura V.11: Comparativa de estratégias. Situação atual/ideal

Como um complemento para a análise de estratégias de ensino-cognitivas, realizamos um estudo da possível correlação entre as pontuações nas diversas áreas estratégicas do ponto de vista da situação atual (X) e os valores destas mesmas estratégias que tomariam numa hipotética situação ideal (Y). Temos usado a tabela III.14 e obtivemos uma correlação de Pearson significativa ($r = 0{,}78$) e um coeficiente de determinação ρ^2 com um valor de 0,61. Supondo a distribuição minimamente normal, significaria que 61% da classificação correspondente às diferentes estratégias (motivação, exercícios de eficácia, as novas tecnologias ...) que ocorreram numa situação ideal, são explicadas a partir da situação atual; é dizer, a partir dos valores atuais de estas estratégias.

Teríamos uma margem de quase 40% que não seria explicada pelo interesse atual, ainda que possamos assumir a sua dependência de fatores externos, entre os quais, e hipoteticamente a possível melhora das condições atuais da educação na sua transição cara condições ideais. Certamente que seriam necessárias novas variáveis (e com eles, as técnicas de análise multi-variante) para tratar de identificar a importância de outras possíveis razões no interesse demonstrado pelos professores e descritos numa situação ideal; mas poderia-se formular a hipótese de que estas terão que ver principalmente com a melhora das condições ambientais de instrução. Também realizamos uma prova de eficácia para a correlação de Pearson que obtivemos válido para uma confiança de 95%. Do mesmo modo, o cálculo do rho de Spearman, para possíveis distribuições não necessariamente normais, com os mesmos valores através das suas escalas, obtivemos uma taxa de 0,89.

Seguidamente vamos analisar os seguintes três itens conjuntamente por tratar-se de pesquisar o rigor na definição que consideram apropriado os professores para a tratar os limites infinitos e ou no infinito.

V.1.11 Resultado undécimo, duodécimo e décimo terceiro item

P11:

No que diz respeito ao rigor na definição, como considera que deve ser tratado o conceito de 'limite de uma função num ponto'?

P12:

No que diz respeito ao rigor na definição, como considera que deve ser introduzido o conceito de 'limite de uma função no infinito'?

P13:

No que diz respeito ao rigor na definição, como considera que deve ser introduzido o conceito de 'limite infinito de uma função num ponto'?

Se analisarmos em conjunto as três perguntas anteriores que fazem referência ao rigor no conceito, podemos observar que todas as respostas apresentam similares características:

1) Nos três casos aos que se referem as perguntas 11,12 e 13 (limite de uma função num ponto, limite de uma função no infinito e limite infinito da função) há uma clara preferência por parte do professorado no que respeita ao rigor na definição, por um

tratamento verbal (superior a 80% de preferência), seguido de tratamentos com tabelas de valores e gráficos através de sucessões (em todos os casos com valores superiores a 60%). Na situação atual a opção mais rigorosa, tanto desde a perspetiva topológica através de contornos, como da métrica através de ípsilon e delta, adquirem muito pouca importância. Isto parece induzir a perguntar-nos se o rigor extremo formalista não concorda com as situações atuais das salas de aulas, organização de programas, e instrumentos de apoios didáticos. (Ver tabelas V.15, V.16, e V.17 e figuras V.12 e V.13)

2) Se nos concentrarmos na situação ideal podemos observar que também nas respostas as três perguntas, se produz um incremento notável das opções mais rigorosas, formalmente representadas pelas perspetivas topológica e métrica. Nos três casos o incremento de preferência por esta última opção passa de percentagens de por volta de 5% da situação atual para perto de 40% numa situação ideal. Como contrapartida diminui a preferência pela opção verbal, ainda que for minimamente.

3) Analogamente ao acontecido em perguntas anteriores, no contexto de uma situação ideal, de hipotética melhora das circunstâncias nas que se produz a instrução, todas as opções de representação formal do conceito vêem-se incrementadas em preferência por parte do professorado.

4) Podemos colocar, como consequência significativa as respostas obtidas nestas perguntas a seguinte hipótese de trabalho: “A utilização na prática diária de representações formal e simbolicamente mais rigorosas do conceito de limite funcional, está condicionada em grande medida pela situação atual na contorna da instituição educativa”. Uma melhora nessa situação atual poderia levar a que o professorado se incline por uma visão formalmente mais rigorosa do conceito. As melhoras ligadas as novas tecnologias podem ser determinantes neste campo, o “uso do computador no ensino. Abrem-se caminhos para instalação de salas-de-aula mais abertas: com pedagogias mais flexíveis, professores menos diretivos, diferentes processos de negociação com os alunos”. (Carneiro, 1999:242)

		SITUAÇÃO atual (A)	SITUAÇÃO IDEAL (B)
P11.1	Não deve ser introduzida	4%	1%
P11.2	Verbalmente	85%	78%
P11.3	Através de infinitésimos	7%	23%
P11.4	Topologicamente através de contornas	20%	47%
P11.5	Com tabelas de valores; através de sucessões (de x_i e de $f(x_i)$)	71%	75%
P11.6	Graficamente; através de sucessões (de x_i e de $f(x_i)$)	64%	79%
P11.7	Metricamente, através de ípsilon e delta	5%	38%
P11.8	Outro	5%	6%

Tabela V.15: Rigor no tratamento de definição. Situação atual/ideal

		atual (A)	IDEAL (B)
P12.1	Não deve ser introduzida	2%	2%
P12.2	Verbalmente	82%	75%
P12.3	Definindo previamente R U $\{\pm\infty\}$ e fazendo ∞ "um número real"	14%	23%
P12.4	Topologicamente através de contornas e cotas da variável x.	12%	37%
P12.5	Com tabelas de valores; através de sucessões (de x_i ao ∞, e de $f(x_i)$)	68%	74%
P12.6	Graficamente; através de sucessões (de x_i ao ∞, e de $f(x_i)$)	63%	0%
P12.7	Metricamente, através de Ípsilon e K	4%	37%
P12.8	Outro	4%	7%

Tabela V.16: Rigor no tratamento de definição de limite no infinito. Situação actual/ideal

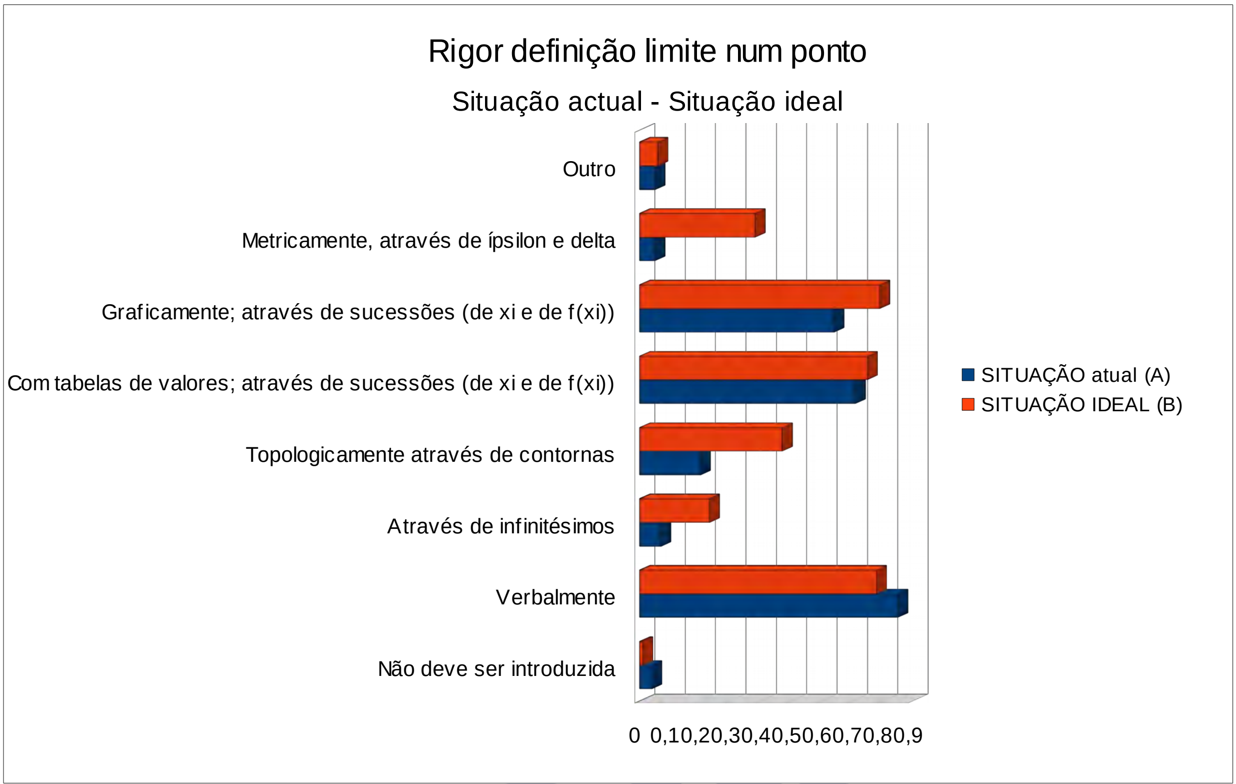


Figura V.12: Rigor no tratamento da definição. Situação atual/ideal

		atual (A)	IDEAL (B)
P13.1	Não deve ser introduzida	1%	1%
P13.2	Verbalmente	80%	77%
P13.3	Definindo previamente R U {±∞} e fazendo do ∞ "um número real"	14%	25%
P13.4	topologicamente a través de contornas de **a** e cotas de f(x)	13%	39%
P13.5	Com tabela de valores; através de sucessões (de x_i para **a** e de $f(x_i)$)	63%	74%
P13.6	Graficamente; através de sucessões (de x_i para a e de $f(x_i)$).	69%	80%
P13.7	Metricamente, através de K e delta	6%	40%
P13.8	Outro	6%	0%

Tabela V.17: Rigor no tratamento de definição de limite infinito. Situação atual/ideal.

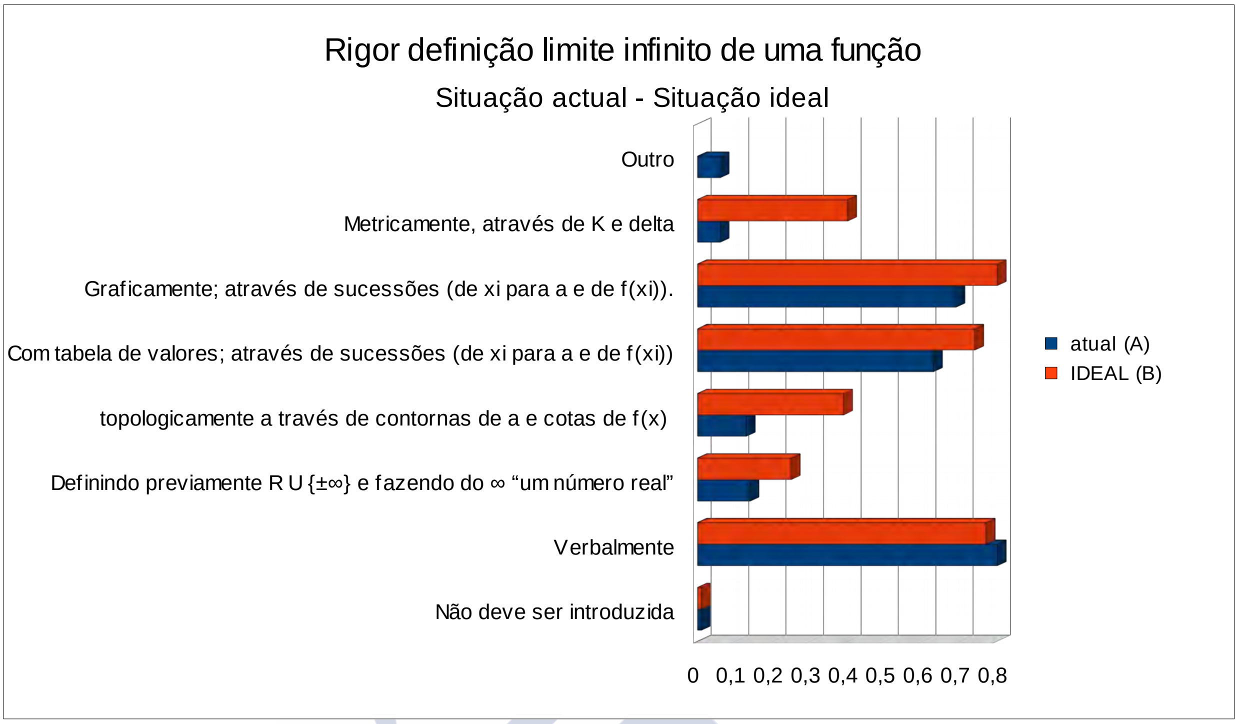


Figura V.13: Rigor do tratamento do limite infinito. Situação atual/ideal

V.1.14 Resultado décimo quarto item

P14:

Avalie de um a cinco a importância em que considera que estão presentes, no seu caso, os seguintes referentes no momento da instrução do conceito de 'limite funcional': (1- pouco presente; 5- muito presente)

Se nos situamos -tal como comentáramos no capítulo referente ao estado da questão no que falávamos da faceta do professor investigador reflexivo- no campo dos referentes utilizados na prática diária à hora de abordar a instrução do conceito de limite funcional, podemos observar claramente que a reflexão -que Van Manem (1977) qualificaria como técnica- centra-se fundamentalmente nas dificuldades e reações do próprio estudantado nos cursos precedentes.

Com uma pontuação média muito alta, próxima a 4,5, e um desvio padrão significativamente baixo, situa-se muito por acima dos demais referentes indicados.

Podemos formular a hipótese de que o professor atua em cada curso, reflete sobre os resultados obtidos -recordemos que em linhas gerais estes resultados não lhes resulta satisfatórios, segundo apreciamos na pergunta número 6- e modifica os elementos que considera adequados para melhorar a instrução nos cursos seguintes. (Tabela V.18)

Por outra parte destacam seguidamente os referentes relacionados com a leitura e investigação pessoal sobre o tema acerca das novas tecnologias e o chamado "efeito recordo" das dificuldades que o professor tinha no momento em que se enfrentou com o conceito nos seus estudos de Bacharelato.

Uma média muito inferior a 3 situam-se os referentes relacionados com os livros de texto, a forma em que foi instruído o próprio professor durante o Bacharelato, e sobretudo, o aprendido em cursos de formação e atualização do professorado. Estes últimos também não parecem ser efetivos para os professores entrevistados no que diz respeito ao tema investigado (2,04). Pode-se apreciar na Tabela V.19 e na Figura V.14.

No apartado 9 P14. 9 Outros, as respostas especificadas são, pelo geral, reiterativas, algumas das quais deveriam ter sido marcadas, pelos entrevistados, em apartados anteriores; assim temos comentários do tipo: 'A experiência docente', 'As conversações e comentários com outros professores e professoras', 'O aprendido em comentários com colegas de estudos universitários', 'A própria experiência impartindo métodos estatísticos e numéricos','As próprias reflexões e trabalhos realizados sobre o tema','Explicações da família com fortes conhecimentos matemáticos','A própria experiência e resultados obtidos com o estudantado' ou 'O tipo de alunos e a experiência como professor'.

		NA SITUAÇÃO atual				
		$\overline{x}$	**s**	**C.V(%)**	**C.a**	**CK**
P14.1	A forma em que me fora explicado no Bacharelato	2,57	1,18	46,05	0,2	0,17
P14.2	As minhas próprias lacunas ou dificuldades ao aprender no Bacharelato	3,19	1,25	39,35	-0,38	0,25
P14.3	O aprendido nos meus estudos universitários	3,06	1,12	36,42	-0,09	0,33
P14.4	O que aparece nos livros de texto	2,64	1,02	38,84	0,13	0,17
P14.5	As dificuldades, reações e resultados do meu alunado nos anos precedentes	4,47	0,78	17,5	-1,73	0,25
P14.6	O aprendido em cursos de formação e atualização do professorado	2,04	1,08	53,05	0,82	0,33
P14.7	A achega da informática e das novas tecnologias	3,37	1,2	35,5	-0,44	0,17
P14.8	A leitura e investigação pessoal sobre o tema.	3,49	1,11	31,9	-0,47	0,17
P14.9	Outros	2,89*	1,79*	62,02*	0,05*	0,5*

**Nota:- Os parâmetros obtidos para P14. 9, são calculados só para os 18 entrevistados que escolheram esta opção*

Tabela V.18: Referentes na instrução do conceito.

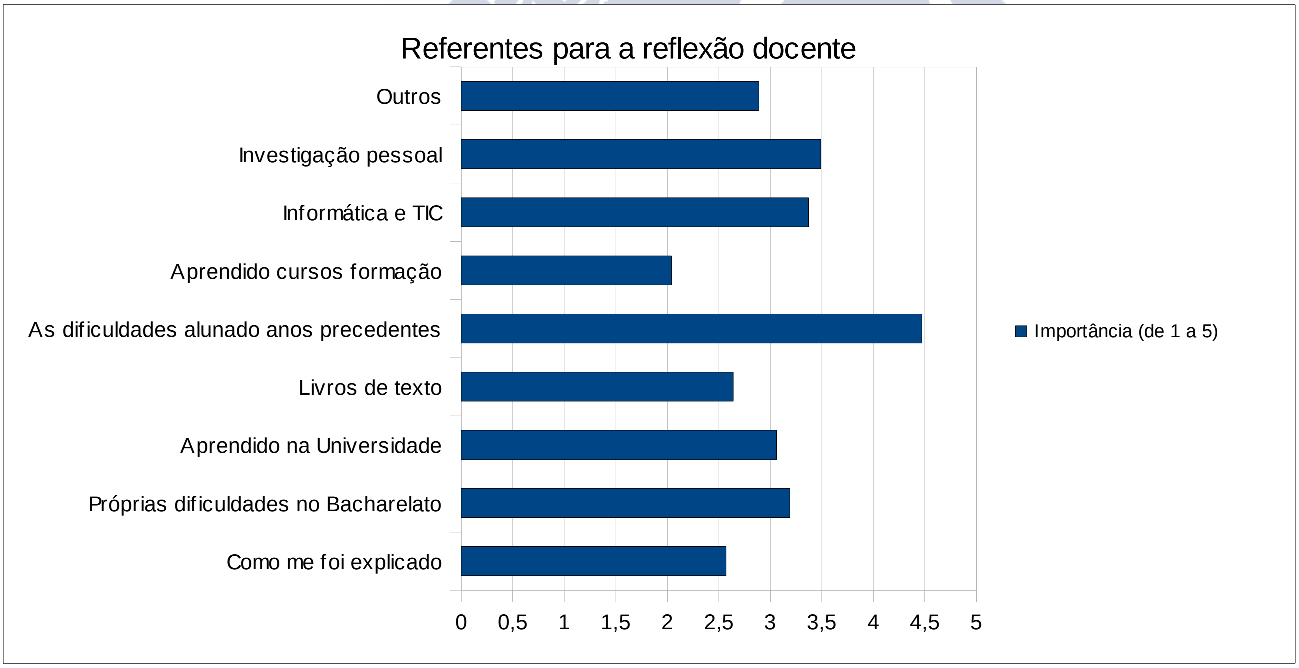


Figura V.14: Principais referentes para a reflexão docente

REFERENTES	Importância (de 1 a 5)
Como me foi explicado	2,57
Próprias dificuldades no Bacharelato	3,19
Aprendido na Universidade	3,06
Livros de texto	2,64
As dificuldades alunado anos precedentes	4,47
Aprendido cursos formação	2,04
Informática e TIC	3,37
Investigação pessoal	3,49
Outros	2,89

Tabela V.19: Pontuações médias dos referentes.

V.1.15 Resultado décimo quinto item

P15:

Avalie de um a cinco a importância em que considera as novas tecnologias como apoio didático durante a instrução do conceito de 'Limite funcional' (1- pouco importante; 5- muito importante)

A importância que dá o professorado à utilização das novas tecnologias nesse tema em concreto, é muito elevada, com uma pontuação média de 4,12 sobre 5. Este valor está em concordância com o expressado em apartados anteriores onde, em linhas gerais, manifesta-se um apoio metodológico a estas técnicas, se estiveram enquadradas na contorna adequada de uma situação ideal. (Tabelas V.20 e Figura V.15)

		SITUAÇÂO atual				
		$\overline{x}$	s	C.V(%)	C.a	s CK
P15	Importância das novas tecnologias	4,12	1,03	24,87	-0,93	0,5

Chaves: X, Média; s, desvio padrão; CV, Coeficiente variação; Ca, coeficiente asimetria; CK, coeficiente curtose de Kelley

Tabela V.20: Parâmetros importância novas tecnologia

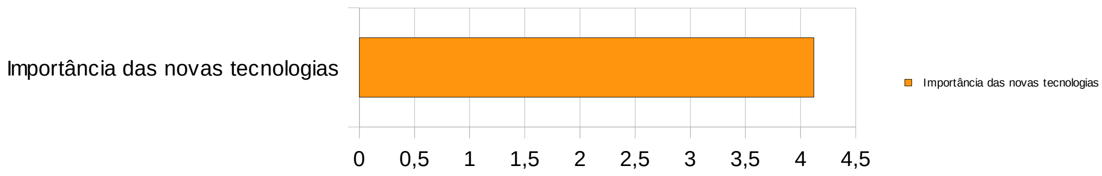


Figura V.15: Gráfico da pontuação da importância das novas tecnologias.

V.1.16 Resultado décimo sexto item

P16:

Avalie de um a cinco a importância em que considera, no seu caso pessoal, a informação, formação, domínio e 'interesse em formar-se', sobre as possibilidades das novas tecnologias para a docência, no tema concreto do conceito de limite funcional. (1- pouco importante; 5- muito importante).

Coerentemente ao expressado na pergunta décimo quinta anterior, o interesse na formação no campo das novas tecnologias como apoio didático ao tema em questão, resulta claro e evidente. A sua pontuação média de 4,13, supera os demais aspetos considerados na pergunta. (Tabela V.21)

		EM SITUAÇÃO atual				
		$\overline{x}$	**s**	**C.V(%)**	**C.a**	**CK**
P16.1	Informação que possuo	3,37	1,06	24,87	0,12	0,17
P16.2	Formação	3,24	1,1	33,82	0,02	0,33
P16.3	Domínio	3,16	1,02	32,33	0,01	0,33
P16.4	Interesse em formar-me	4,13	0,89	21,54	-1,11	0,25

Tabela V.21: Parâmetros relativos à relação docente com as novas tecnologias

A partir dos resultados obtidos nas respostas, podemos resumir que: *O professorado considera de grande importância a utilização das novas tecnologias na melhora da ação educativa do conceito de limite funcional, e está disposto a formar-se tecnologicamente* *para que a sua preparação repercuta positivamente na instrução.*(Figura V.16 e Tabela V.22)

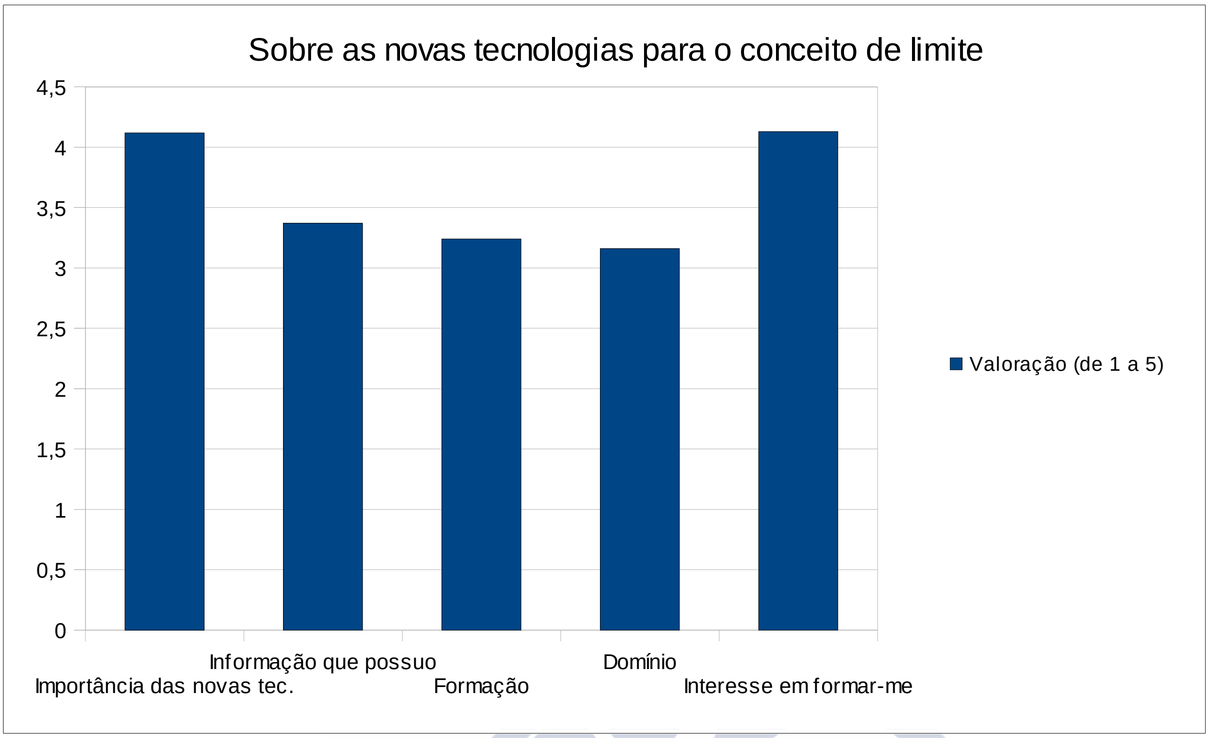


Figura V.16: Gráfico da relação do professorado com as novas tecnologias

	Valoração (de 1 a 5)
Importância das novas tec.	4,12
Informação que possuo	3,37
Formação	3,24
Domínio	3,16
Interesse em formar-me	4,13

Tabela V.22: Valoração de distintos aspetos relacionados com as novas tecnologias

V.2. Resultado da Análise Multi-variante

Neste apartado procedemos a recolher e comentar os resultados obtidos quando procedemos a submeter distintas variáveis relacionadas com o inquérito a processos de análise fatorial e de conglomerados. Foram em concreto os materiais usados polo professorado para a instrução do conceito, as estratégias e alguns referentes utilizados por eles na ação docente.

V.2.1. Agrupamentos do professorado em função dos materiais usados na instrução

Procedemos a efectuar uma análise cluster das variáveis indicadoras dos materiais usados para a explicacão do conceito Limite Funcional. No nosso caso foram: *UsaXiz, UsaLiv, UsaCAd, Usapiz, UsaCal, UsaCalGR, UsaPrjDVD, UsaPizDig, UsaPPT, UsaAuIn,f UsaSfWInf*. Para isso utilizamos o pacote informático SPSS. Obtemos os seguintes resultados: (Tabela V.23)

Podemos observar no dendograma da Figura V.17 como o professorado no momento de usar determinado material para a introdução do conceito de limite funcional, fica classificado **em dous grandes grupos**:

> a) Professorado que prefere usar ferramentas poderíamos dizer clássicas, como podem ser o giz, pizarra, livro de texto, caderno do aluno e também calculadora científica. Dentro deste grupo aparecem numa primeira relação imediata o professorado que usa ainda hoje, de maneira preferente, o giz e a pizarra.
>
> b) Professorado mais partidário de elementos ligados ao uso de novas tecnologias, onde o uso de pizarra digital, software informático, projetores, apresentações tipo Power-Point e aula de informática.

Clúster Enlace promedio (entre grupos)

Historial de conglomeração

Etapa	Clúster combinado		Coeficientes	Primeira aparição do clúster de etapa		Etapa seguinte
	Clúster 1	Clúster 2		Clúster 1	Clúster 2	
1	1	4	8,000	0	0	7
2	8	11	23,000	0	0	4
3	6	9	23,000	0	0	5
4	7	8	23,500	0	2	6
5	6	10	27,500	3	0	6
6	6	7	27,778	5	4	10
7	1	5	38,000	1	0	9
8	2	3	45,000	0	0	9
9	1	2	49,833	7	8	10
10	1	6	72,333	9	6	0

Tabela V.23. Conglomeração de materiais usados na instrução

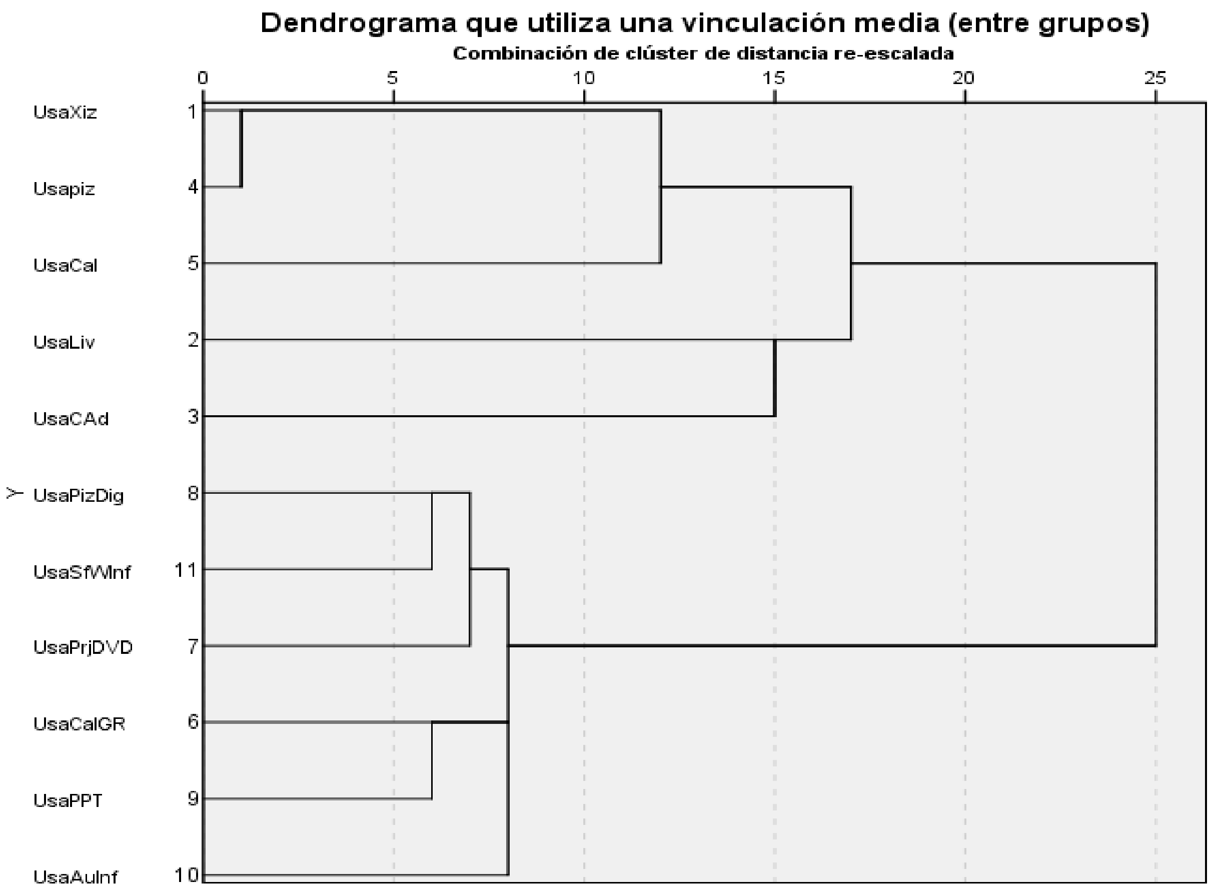


Figura V. 17. Dendograma de materiais usados na instrução.

Para confirmar o resultado anterior procedemos à realização de uma análise fatorial, procurando os dous fatores principais que nos insinua a prova anterior. Assim no SPSS introduzimos as mesma variáveis anteriores e obtemos. (Figura V.18)

Análise factorial sobre Materiais
(Forçando a dous factores sugeridos por dendrograma)

Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de extracción de cargas al cuadrado			Sumas de rotación de cargas al cuadrado		
	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado
1	2,697	24,522	24,522	2,697	24,522	24,522	2,225	20,227	20,227
2	1,699	15,450	39,971	1,699	15,450	39,971	2,172	19,744	39,971
3	1,235	11,223	51,194						
4	1,012	9,204	60,399						
5	,946	8,600	68,999						
6	,841	7,645	76,644						
7	,806	7,327	83,971						
8	,563	5,120	89,092						
9	,489	4,441	93,533						
10	,385	3,501	97,034						
11	,326	2,966	100,000						

Método de extracción: análisis de componentes principales.

Prueba de KMO y Bartlett

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo		,653
Prueba de esfericidad de Bartlett	Aprox. Chi-cuadrado	219,744
	gl	55
	Sig.	,000

Matriz de componente rotado[a]

	Componente 1	Componente 2
UsaXiz	,799	
UsaLiv		
UsaCAd	,542	
Usapiz	,800	
UsaCal	,369	
UsaCalGR		
UsaPrjDVD		,801
UsaPizDig	-,458	,622
UsaPPT	,376	,519
UsaAuInf		,534
UsaSfWInf		,632

Método de extracción: análisis de componentes principales.
Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.[a]
a. La rotación ha convergido en 3 iteraciones.

Figura V.18. Tabelas obtidas do SPSS com variáveis materiais usados.

Análisis factorial sobre Materiales
(Forzando a dos factores sugeridos por dendrograma)

Matriz de coeficiente de puntuación de componente

	Componente	
	1	2
UsaXiz	,357	-,010
UsaLiv	,090	-,070
UsaCAd	,265	,097
Usapiz	,371	,051
UsaCal	,169	,017
UsaCalGR	-,046	,133
UsaPrjDVD	,114	,395
UsaPizDig	-,150	,252
UsaPPT	,234	,293
UsaAuInf	,071	,262
UsaSfWInf	-,064	,276

Método de extracción: análisis de componentes principales.
Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.

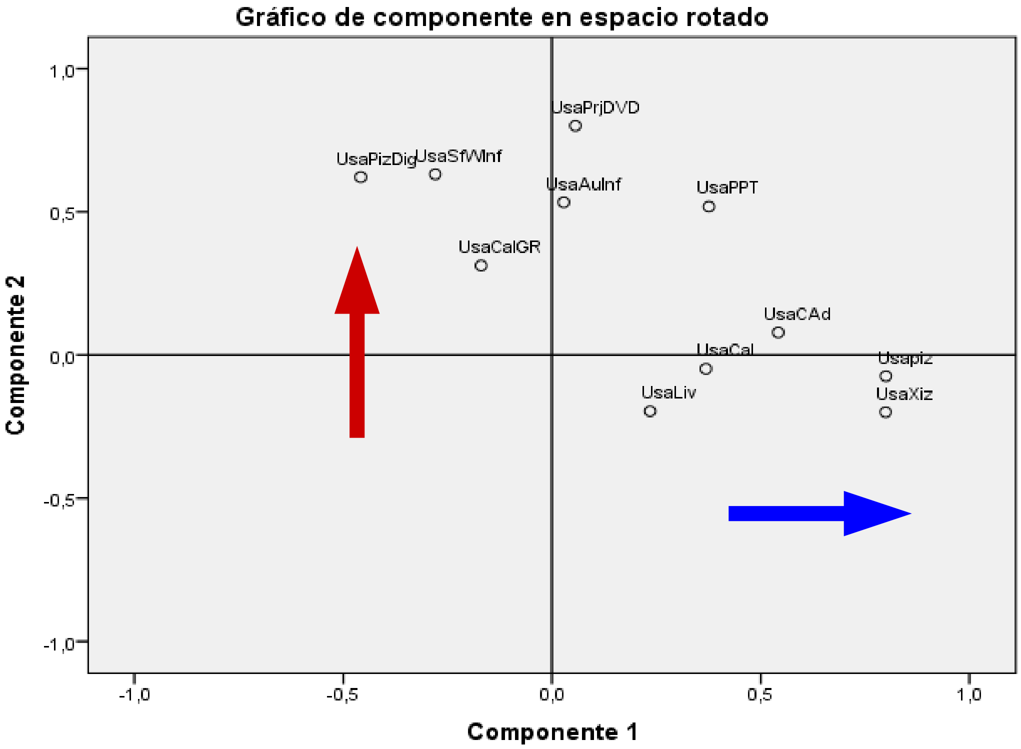


Figura V.19. Matriz de componentes principais e componentes obtidos

Forçamos o critério de obter **só dous** fatores (dado que a análise cluster era o que insinuava). (Figura V.19) Por esse motivo vemos que fica curto a variância acumulada explicada, que chega apenas a um 40%. Se não indicamos número de fatores prévios deixando simplesmente a escolha para auto-valores superiores a 1, que é o mais habitual, apareceriam a quatro fatores explicando o 60% da variância, como pode observar-se nas figuras V.20, V.21, e V.22.

fator /VARIÁVEIS UsaXiz UsaLiv UsaCAd Usapiz UsaCal UsaCalGR UsaPrjDVD UsaPizDig UsaPPT UsaAuInf UsaSfWInf

Análise fatorial

Prova de KMO e Bartlett

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo		,653
Prueba de esfericidad de Bartlett	Aprox. Chi-cuadrado	219,744
	gl	55
	Sig.	,000

Variância total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de extracción de cargas al cuadrado			Sumas de rotación de cargas al cuadrado		
	Total	% de variância	% acumulado	Total	% de variância	% acumulado	Total	% de variância	% acumulado
1	2,697	24,522	24,522	2,697	24,522	24,522	2,131	19,377	19,377
2	1,699	15,450	39,971	1,699	15,450	39,971	2,094	19,038	38,415
3	1,235	11,223	51,194	1,235	11,223	51,194	1,285	11,678	50,092
4	1,012	9,204	60,399	1,012	9,204	60,399	1,134	10,306	60,399
5	,946	8,600	68,999						
6	,841	7,645	76,644						
7	,806	7,327	83,971						
8	,563	5,120	89,092						
9	,489	4,441	93,533						
10	,385	3,501	97,034						
11	,326	2,966	100,000						

Método de extração: análises de componentes principais.

Figura V.20. Tabelas de adequação de mostra KMO de variância acumulada.

Matriz de componente[a]

	Componente			
	1	2	3	4
UsaXiz	-,717	,405		
UsaLiv			,648	,438
UsaCAd	-,339	,430		,501
Usapiz	-,631	,497		
UsaCal			-,403	
UsaCalGR	,338		-,516	,456
UsaPrjDVD	,511	,620		
UsaPizDig	,760			
UsaPPT		,635		
UsaAuInf	,347	,407	,483	-,394
UsaSfWInf	,638			

Método de extracción: análisis de componentes principales.
a. 4 componentes extraídos.

Matriz de componente rotado[a]

	Componente			
	1	2	3	4
UsaXiz		,850		
UsaLiv			,796	
UsaCAd			,739	
Usapiz		,809		
UsaCal		,405		,404
UsaCalGR				,694
UsaPrjDVD	,802			
UsaPizDig	,604	-,467		
UsaPPT	,533	,404		
UsaAuInf	,541			-,617
UsaSfWInf	,619			

Método de extracción: análisis de componentes principales.

Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.[a]
a. La rotación ha convergido en 6 iteraciones.

Matriz de transformación de componente

Componente	1	2	3	4
1	,658	-,694	-,293	,018
2	,753	,609	,249	-,003
3	,011	-,271	,619	-,737
4	-,002	-,273	,685	,676

Método de extracción: análisis de componentes principales.

Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.

Figura V.21. Tabelas de matrizes de transformação e rotados, com 4 componentes.

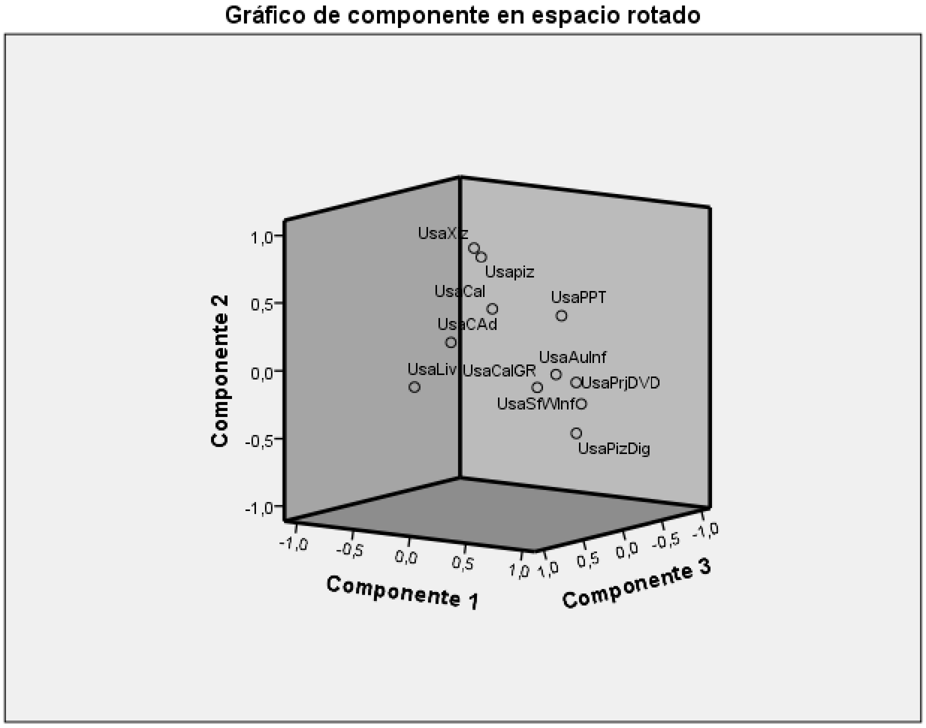


Figura V.22. Gráfico de componentes no espaço rotado.

Ainda com as quatro componentes principais (Figura V.21) podemos ver que o grupo de professores e professoras que escolhem ferramentas ligadas às novas tecnologias configuram o primeiro fator. O segundo fator arrasta os elementos tradicionais como giz e pizarra tradicional acrescentando as apresentações tipo PPT. As outras duas componentes marcam positivamente a persistência do uso do livro de texto e caderno do aluno, por uma parte e o uso de calculadoras por outro. Também se pode apreciar na Figura V.22.

Resulta interessante comprovar como num dos conglomerados aparece refletido um grupo de professores que utiliza ferramentas tradicionais para a instrução do conceito, qualificado antes como 'difícil' no aspeto metodológico e epistemológico. (Figura IV.7)

Noutro campo parece que as novas tecnologias fazem-se um lugar, ainda que combinadas com outros materiais. Nesse sentido parece lógico esperar que em situações de melhores condições institucionais e de formação futuras, sejam elementos fulcrais no conjunto de ferramentas utilizadas na instrução de conceitos complexos. (Figura V.23)

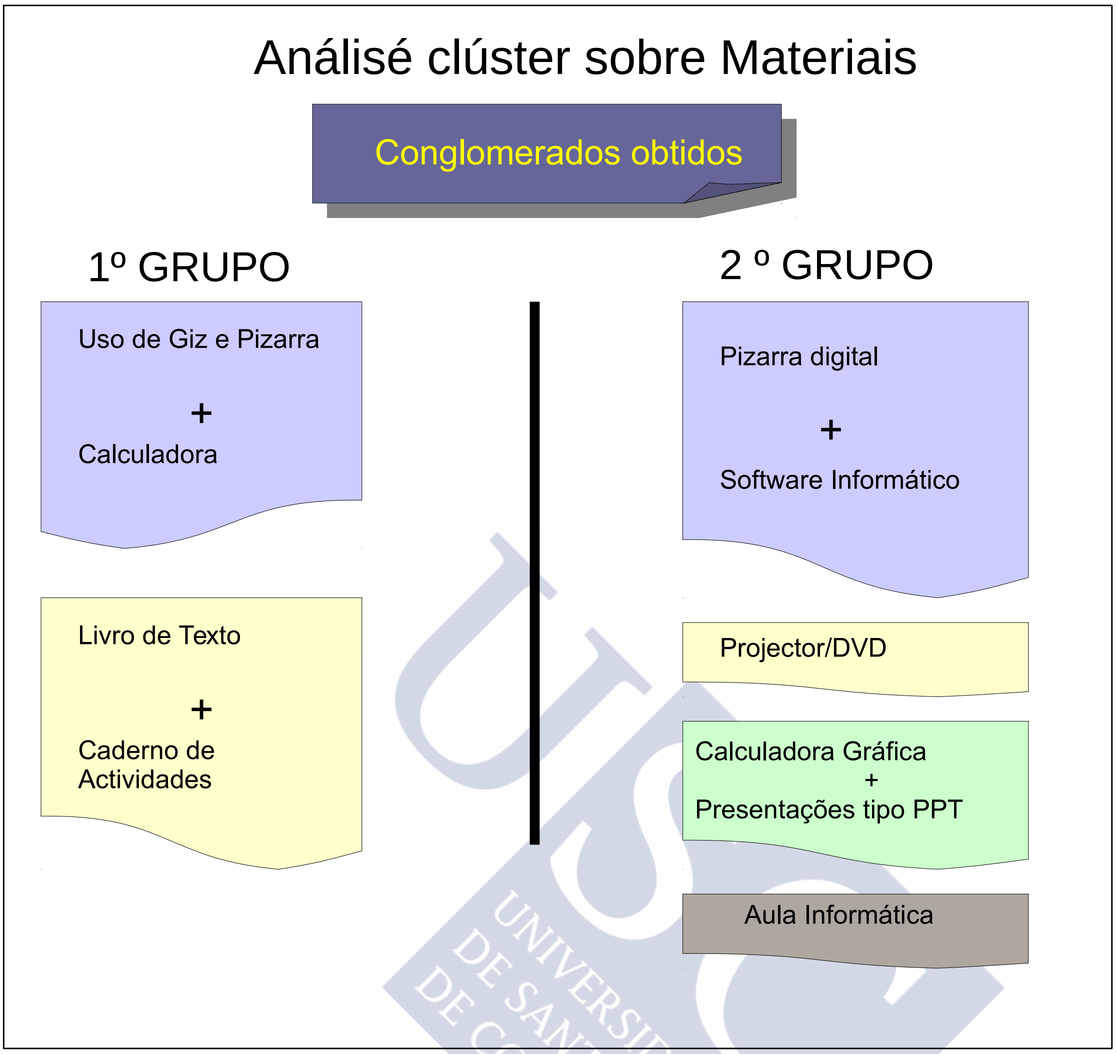


Figura V.23. Esquema dos conglomerados obtidos em materiais e a sua relação.

Na gráfica anterior temos marcado, dentro de cada conglomerado, com cores distintas as diferentes relações primárias entre as distintas variáveis. Assim numa mesma representam similar relevância em cada conglomerado (em sentido descendente).

V.2.2. Agrupamentos do professorado em função das estratégias usadas na instrução

Procuramos seguidamente os resultados obtidos quando submetemos às variáveis relacionadas com o que denominamos geralmente no inquérito 'estratégias' usadas polo professor para intervir na instrução do conceito de limite funcional.

Os nomes das variáveis que usamos para a aplicação da análise multi-variante, correspondeu-se com o nome daqueles elementos que no inquérito foram utilizadas para que o professorado pudesse entender da melhor maneira possível que com estratégias nos referíamos a “apoios”, não materiais precisamente, que nos contribuísse para uma melhor instrução do conceito. Todas obtidas de sugestões de professorado consultado, estas variáveis foram: *EstrConxVida, EstrResProb, EstrMatApoio, EstrHistMat, EstrAnecCur, EstrepInt, EstrMuitExer.*

Observando o dendograma obtido (Figura V.24), podemos apreciar como se formam dous grupos perfeitamente identificáveis:

- Um primeiro formado polo professorado que baseia a sua instrução numa representação intuitiva do conceito, unido à realização de muitos e variados exercícios sobre o tema. Este grupo aparece em primeira vinculação o que nos diz muito da sua pertinência.

- Um outro conglomerado, que, com maior diversidade, de estratégias parece centrar-se na resolução de problemas e conexão com outras matérias, unidos aos materiais de apoio.

No historial de conglomeração (Tabela V.24) aparece, mas esta classificação aportada polo dendograma podemos aprecia-la mais visualmente na Figura V.25.

Análise clúster sobre Estratégias

Historial de conglomeración

Etapa	Clúster combinado		Coeficientes	Primera aparición del clúster de etapa		Etapa siguiente
	Clúster 1	Clúster 2		Clúster 1	Clúster 2	
1	4	5	108,000	0	0	4
2	1	7	118,000	0	0	5
3	2	3	118,000	0	0	6
4	4	6	139,000	1	0	5
5	1	4	175,333	2	4	6
6	1	2	245,600	5	3	0

Tabela V.24. Historial de conglomeração em Estratégias

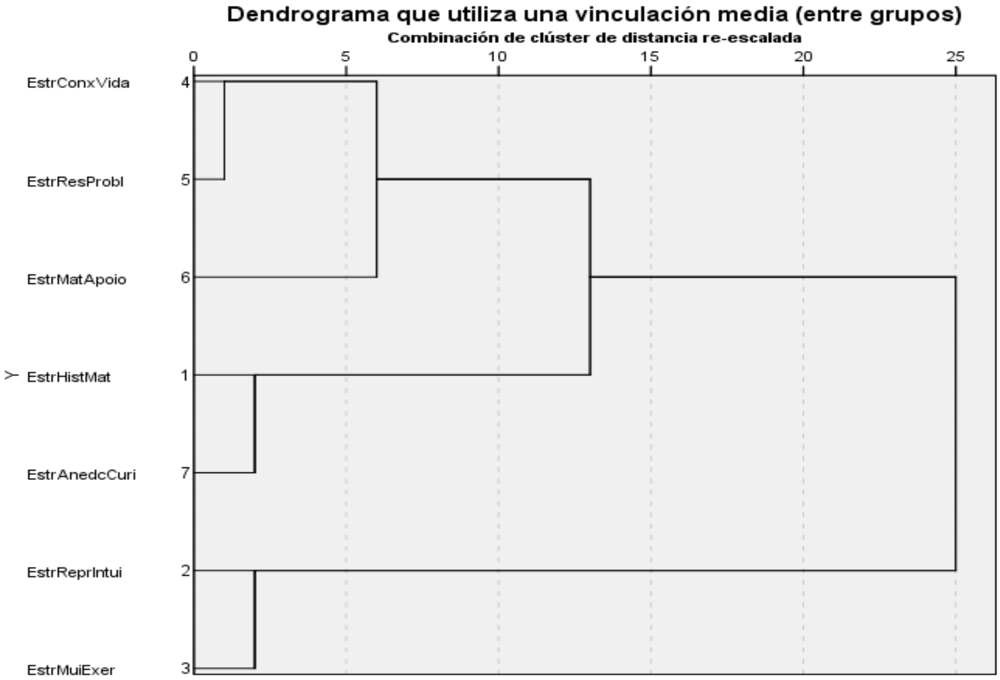


Figura V.24. Dendograma do Cluster sobre estratégias do professorado.

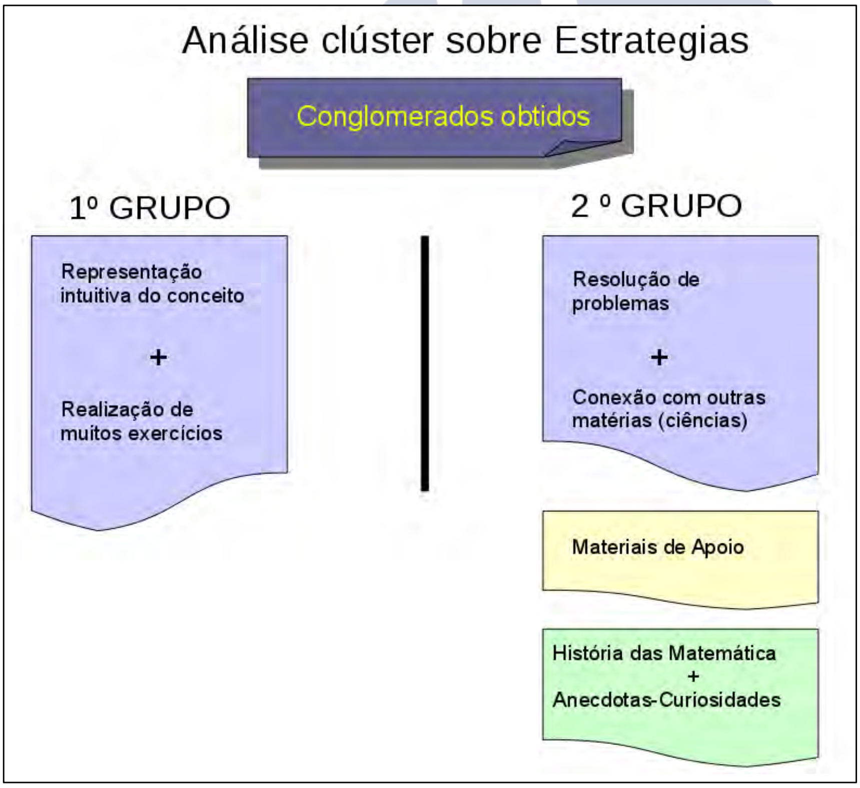


Figura V.25. Esquema dos conglomerados obtidos. Estratégias.

Para ver se a Análise Fatorial pode ser representativa, procuramos a prova de KMO que nos dá maior do que 7, o que nos indica a sua pertinência. (Ver Figura V.26)

Da tabela da variância total explicada (Figura V.26) podemos ver praticamente um 60% acumulada e no gráfico de sedimentação cuja trajetória nos indica que duas componentes são, na prática, suficientes.

Análise factorial sobre Estrategias

Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de extracción de cargas al cuadrado			Sumas de rotación de cargas al cuadrado		
	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado
1	3,061	43,726	43,726	3,061	43,726	43,726	2,759	39,411	39,411
2	1,113	15,907	59,633	1,113	15,907	59,633	1,416	20,222	59,633
3	,906	12,936	72,569						
4	,624	8,918	81,488						
5	,541	7,723	89,210						
6	,397	5,678	94,889						
7	,358	5,111	100,000						

Método de extracción: análisis de componentes principales.

Prueba de KMO y Bartlett

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo		,793
Prueba de esfericidad de Bartlett	Aprox. Chi-cuadrado	198,291
	gl	21
	Sig.	,000

KMO > 0.7

Análisis Factorial pertinente

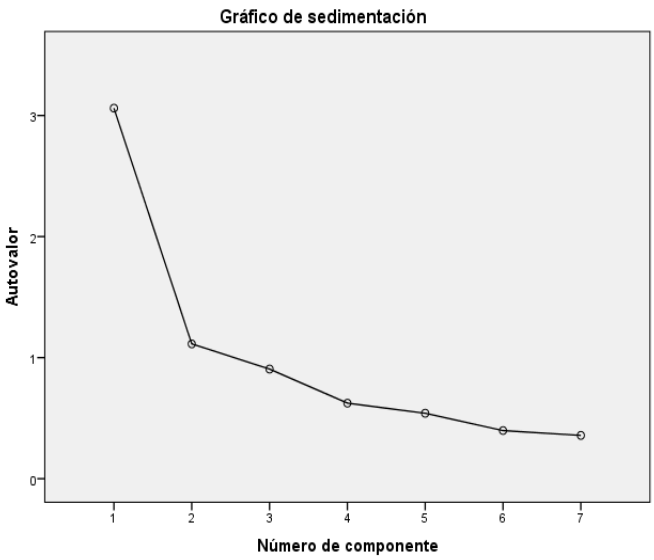


Figura V.26. Variância explicada e sedimentação. Estratégias.

Tanto na matriz de componentes como na de componentes rotados, pode-se apreciar a carga da primeira componente que nos pode sugerir associar a um fator mais “motivador” no campo das estratégias utilizadas e uma segunda componente, -com carga fundamental nas duas últimas variáveis (representação intuitiva e muitos exercícios)-, que podemos associar e estratégias mais ‘tradicionais’. Esta mesma ideia pode apreciar-se visualmente no gráfico de componentes rotados. (Figuras V.27 e V.28)

Matriz de componente rotado[a]

	Componente	
	1	2
EstrConxVida	,845	,107
EstrAnedcCuri	,838	
EstrHistMat	,712	,153
EstrResProbl	,698	,219
EstrMatApoio	,562	,410
EstrReprIntui		,814
EstrMuiExer	,173	,708

Método de extracción: análisis de componentes principales.
Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.
a. La rotación ha convergido en 3 iteraciones.

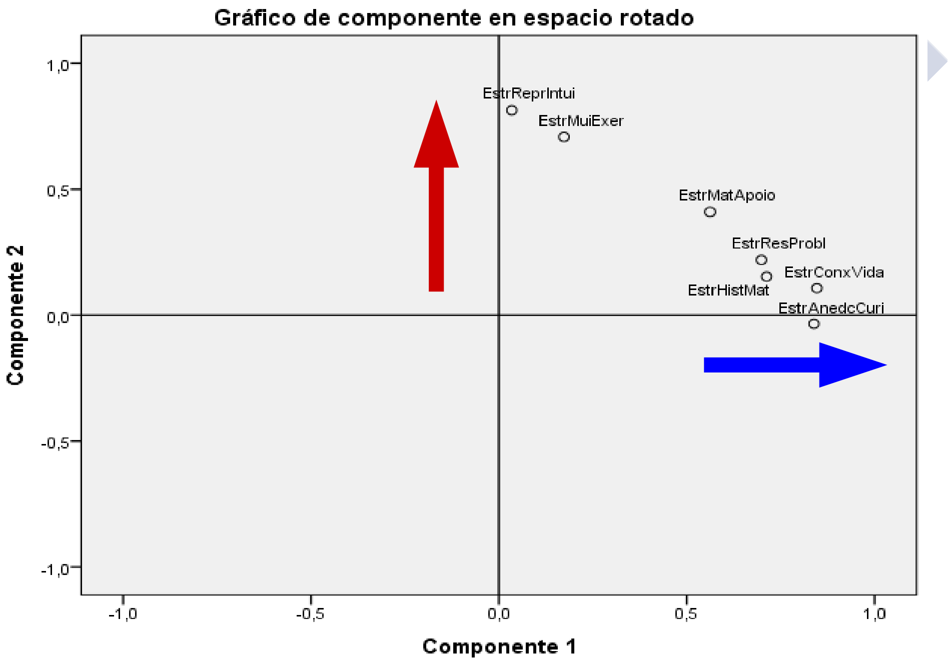


Figura V.27. Tabela de componentes rotados e Grafico de espaço rotado. Estratégias.

Análise factorial sobre Estratégias

Matriz de componente[a]

	Componente	
	1	2
EstrConxVida	,819	-,234
EstrAnedcCuri	,757	-,361
EstrResProbl	,728	
EstrHistMat	,715	-,140
EstrMatApoio	,678	,155
EstrReprIntui	,352	,734
EstrMuiExer	,438	,583

Método de extracción: análisis de componentes principales.
a. 2 componentes extraídos.

Matriz de componente rotado[a]

	Componente	
	1	2
EstrConxVida	,845	,107
EstrAnedcCuri	,838	
EstrHistMat	,712	,153
EstrResProbl	,698	,219
EstrMatApoio	,562	,410
EstrReprIntui		,814
EstrMuiExer	,173	,708

Método de extracción: análisis de componentes principales.
Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.
a. La rotación ha convergido en 3 iteraciones.

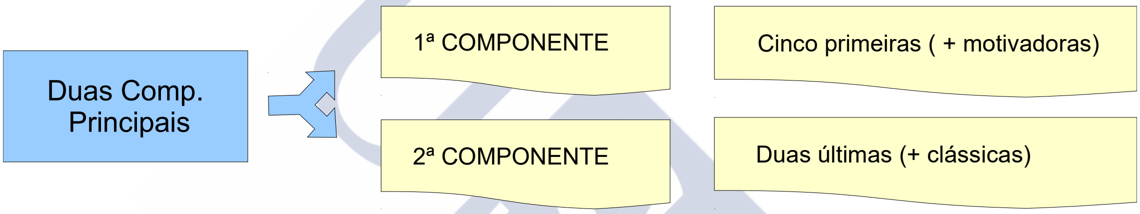


Figura V.28. Esquema dos componentes propostos. Estratégias.

V.2.3. Agrupamentos do professorado em função dos referentes usados na instrução

Como foi explicado no inquérito enviado ao professorado entrevistado, usamos aqui o termo 'referente' vinculado aos elementos que o professor tem presente à hora de abordar o processo de instrução e que influem nele. Pode ser desde a imagem que tinha das dificuldades presente de estudante, até o que 'dizem os livros de texto' ou o apreendido nos seus estudos académicos ou de formação, ou as dificuldades dos alunos em cursos anteriores. Em todo caso são elementos ligados mais direta ou indiretamente ao processo de reflexão do professor.

As variáveis neste caso -também pertencentes ao inquérito- são as seguintes:

RfApoiTics, RfAutForm, RfAlunCurPrev, RfFormExplBac, RfDifProBac, RfEStUniv, RfLivText e RfCursForm.

Realizamos uma análise cluster às variáveis relacionadas com os referentes usados maioritariamente polo professorado. (Figura V.29)

Clúster

Matriz de proximidades

Caso	Entrada de archivo matricial							
	RfFormExplBa	RfDifPropBac	RfEstUniv	RfLivText	RfAlunCursPrev	RfCursForm	RfApoiTics	RfAutForm
RfFormExplBac	,000	186,000	310,000	241,000	519,000	328,000	296,000	389,000
RfDifPropBac	186,000	,000	296,000	313,000	331,000	408,000	298,000	323,000
RfEstUniv	310,000	296,000	,000	185,000	391,000	350,000	314,000	225,000
RfLivText	241,000	313,000	185,000	,000	520,000	189,000	311,000	354,000
RfAlunCursPrev	519,000	331,000	391,000	520,000	,000	755,000	289,000	276,000
RfCursForm	328,000	408,000	350,000	189,000	755,000	,000	354,000	419,000
RfApoiTics	296,000	298,000	314,000	311,000	289,000	354,000	,000	183,000
RfAutForm	389,000	323,000	225,000	354,000	276,000	419,000	183,000	,000

Historial de conglomeração

Etapa	Clúster combinado		Coeficientes	Primera aparición del clúster de etapa		Etapa siguiente
	Clúster 1	Clúster 2		Clúster 1	Clúster 2	
1	7	8	183,000	0	0	5
2	3	4	185,000	0	0	4
3	1	2	186,000	0	0	6
4	3	6	269,500	2	0	6
5	5	7	282,500	0	1	7
6	1	3	316,000	3	4	7
7	1	5	386,600	6	5	0

Figura V.29. Tabelas de matriz de proximidades e historial de conglomeração Referentes.

Assim podemos caracterizar o professorado que prioriza as três primeiras variáveis como aquele que mostra uma maior inclinação pola atualização das suas estratégias ligadas fundamentalmente às novas tecnologias e à autoformação, enquanto o segundo grupo estará formado por aquele professorado que tem como maiores referentes a sua etapa formativa, apoiando-se em instrumentos clássicos como podem ser os livros de texto (Ver dendograma em Figura V.30). Neste último caso, a predileção polas TICs e pola auto-formação não parece ser tão importante.

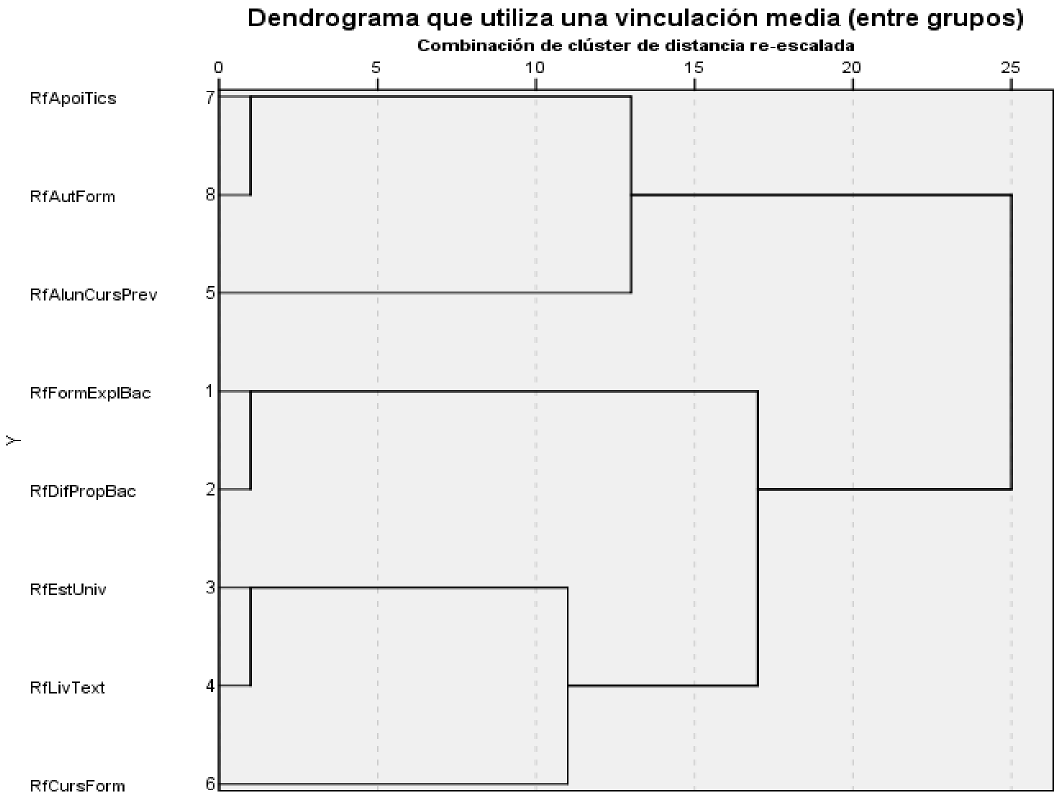


Figura V.30. Dendograma indicador de conglomerados. Referentes.

Ligado a esse grupo, com uma vinculação secundária, os referentes correspondentes às etapa formativa do professor durante o seu próprio bacharelato ("REFComoExplBac e REFDifBac -como me foi explicado ou dificuldades que eu tinha – parecem estar mais vinculados aos referentes clássicos de formação académica e livro de texto.

Se pensamos numa transição de referentes desde o mais tradicional ao mais moderno poderíamos representá-los no diagrama da Figura V.31.

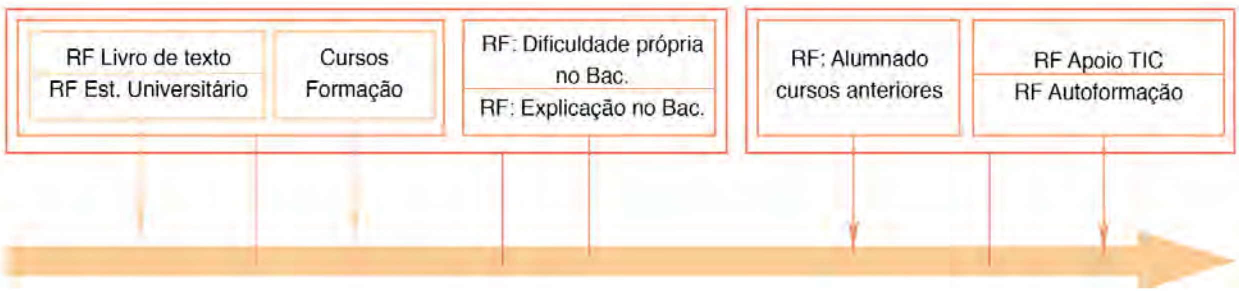


Figura V.31. Linha orientada dos referentes reflexivos. Referentes.

Este diagrama pode interpretar-se dinamicamente no sentido em que a deslocação para a direita significaria uma maior tendência à reflexão profissional baseada nas próprias experiências na procura da construção de um perfil de profissional prático reflexivo. Este deveria perceber situações onde se precisa racionalidade pola sua parte, examinando elementos que condicionam essas situações, mesmo os derivados das suas crenças ou esquemas (Perrenoud, 2004).

A zona da direita do diagrama centraria-se assim o perfil do profissional que contempla a auto-reflexão, centrada nas experiências com o alunado de cursos anteriores, adequando as pautas didáticas ano trás ano e apoiando-se preferentemente nas utilidades das TICs. Contrariamente ao que aconteceria na parte esquerda do diagrama, aqui o professor vai adaptando a sua prática docente, dinamicamente da mesma forma em que o alunado vai construindo os conceitos.

Estaríamos assim na linha que sugere Vergnaud (1990) no sentido de que os problemas grandes educação dão-se quando o professorado entende os objetos matemáticos como parados, sem que seja precisa nenhum tipo de construção desses conceitos para os alunos, se decatar-se que solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, voltando conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem mudanças importantes nas suas ideias.

Analisando como aprende o estudante a refletir precisa-se de um marco no que se promova a reflexão, obrigando ao professor a ‘refletir sobre a sua prática formativa’. (Flores, 2004)

Os elementos motivadores no processo de reflexão do professorado lembremos que são, como podemos apreciar na Figura V.32, com muita diferença os derivados das dificuldades, reações e resultados dos alunos em cursos precedentes durante o processo de ação educativa. Em menor medida, a própria investigação pessoal e a reflexão sobre as dificuldades do professor quando, de estudante, aprendeu o conceito. Já salientamos antes a a pouca importância, neste campo dos cursos de formação e atualização do professorado.

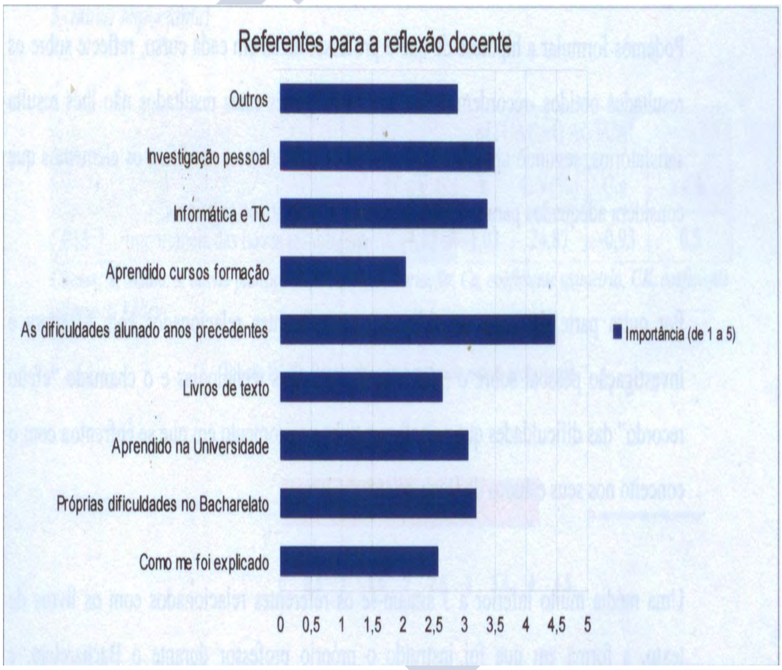


Figura V.32. Referentes para a reflexão

Podemos pensar se este processo reflexivo pode estar vinculado ou relacionado de alguma forma com a experiência docente, ou mais concretamente com os anos de docência do professor. E por isso também procedemos a estudar a possível correlação entre os anos de docência do profissional e a pertença a um dos dous grandes grupos anteriores.

Perguntamos, chegados a este ponto da investigação, se influem os anos de docência, a experiência profissional, na preferência por materiais docentes determinados. Se os docentes mais novos usam mais as novas tecnologias como caberia esperar, ou se são mais inovadores.

Temos confrontado a variável 'Anos de Docência' junto com qualquer outra variável do estudo e apenas encontramos pequenas correlações muito pouco importantes como para ser mencionadas com detalhe. Isso dá-nos a entender que *os anos de docência não são significativos* com relação a estratégias utilizadas, nem materiais usados, nem nas referências do professor na introdução do conceito de limite por parte do professorado. No anexo III indicamos as únicas correlações que obtivemos significativas no nível 0.01.

Capítulo VI
Conclusões

VI.0. Introdução

Na parte final deste trabalho de investigação só nos resta apresentar algumas conclusões, que de forma indireta já foram indicadas anteriormente ao longo das páginas anteriores. Porém, vamos tentar resumir aquelas que consideramos mais interessantes por fornecer-nos de aportações ao campo objeto de estudo.

Uma primeira conclusão que nos interessaria destacar -se se nos permitir um pequeno grau de subjetividade num trabalho de carácter científico- é a grande recetividade por parte dos professores e professoras entrevistados à hora de responder às perguntas formuladas, independentemente dos dados objetivos obtidos do estudo. Mostra de tal interesse não é só a quantidade de profissionais da educação que deixaram sentir sua opinião, mas também as múltiplas mensagens que nos chegaram agradecendo poder contribuir a expressar seus interesses sobre o tema proposto. Podemos concluir, *subjetivamente*, que o professorado agradece que, em temas de investigação unidos à docência, se solicite a opinião profissional dos que em último termo a co-protagonizam. Isto reforça a corrente que desde sectores profissionais ligados à didática da Matemática, valorizam os estudos ligados à prática docente e condicionam em grande medida ao conhecimento de esta as futuras possíveis mudanças. Outra vez, por palavras de Cajaraville et al. (2003, p.107) “não é possível uma adaptação curricular sem a intervenção do professor. (…) os conhecimentos profissionais dos professores é um tema básico que leva a profundar na sua formação, tanto inicial como permanente”. Tal como recordamos na introdução, por palavras de Ponte (1994, p.1) acerca do professor, o autor agrega que “todos se sentem no direito de emitir as opiniões mais contraditórias acerca do que deveria ser a sua atuação”.

VI.1. Sobre as perguntas de investigação e os objetivos

Ao começo da nossa investigação proponhamos três perguntas gerais: A primeira tentava investigar *como* considera o professor de matemática que deve impartir-se o conceito de limite funcional. Nesta pergunta inicial iam implícitos vários objetivos de investigação, desde conhecer em que nível considera que deve impartir-se o conceito até os instrumentos que pode utilizar na instrução, passando polo tipo de representação que utiliza, ou polo rigor que considera necessário, entre outros aspetos. Para conseguir estes objetivos, foi necessário perguntar ao professorado sobre todas as questões que consideramos intervinham no processo de instrução. Neste apartado faremos um resumo das conclusões obtidas.

Uma segunda pergunta de investigação formulava-se com a intenção de saber qual é a importância que o professorado dá ao marco de referência ou institucional como elemento condicionante para a instrução. Para responder a esta questão optou-se por desenhar em muitas das questões do inquérito uma dupla resposta, de tal forma que o professorado pudesse mostrar a sua opinião sobre o perguntado sob duas perspetivas distintas. Uma delas que denominamos *situação atual*, com todos os condicionantes que hoje em dia se apresentam na sala de aula, e uma outra perspetiva, talvez utópica, na que as condições de tempo, medios, ratios, programas... fossem *ideiais*. Comparando ambas respostas poderíamos medir até que ponto estes condicionamentos ‘institucionais’ influem na labor docente neste ponto determinado.

Uma terceira pergunta de investigação girava entorno à hipótese de que o professorado mostrasse certa heterogeneidade a respeito de diversos elementos participantes no processo de instrução do conceito. Desta forma, nos perguntávamos se, atendendo aos materiais usados (pizarra, caderno, software dinâmico...), ou às estratégias ou ao referentes usados, poderíamos permitir-nos agrupar o professorado em função de características semelhantes. Para responder a ela utilizamos ferramentas de análise multi-variante e as conclusões também serão aqui recolhidas. Procedemos seguidamente a resumi-las:

VI.1.1. A primeira pergunta de investigação

No que diz respeito à nossa primeira pergunta de investigação **-Como considera o professorado que deve ser impartido o conceito de limite funcional?-** podemos concluir, atendendo aos objetivos procurados e medíveis do estudo realizado, o seguinte:

> 1) Quase a totalidade do professorado manifesta-se partidário de introduzir o conceito de limite funcional nos níveis correspondentes ao ensino secundário. Deles grande parte inclusive considera que esta introdução deveria-se iniciar na etapa correspondente ao último curso da ESO, se se dessem as condições adequadas.
>
> Se referimos o estudo ao marco educativo atual, quase o 40% do professorado considera necessário a introdução do conceito de limite funcional na ESO. No caso de situar-nos na hipótese de um marco educativo melhorado (que no presente trabalho definimos como 'situação ideal'), os partidários ultrapassariam o 50%. Neste ponto, os resultados deste trabalho evidenciam, neste caso concreto, uma divergência entre a opinião do professorado e o ordenamento curricular oficial a respeito da educação secundária e Bacharelato.
>
> 2) De produzir-se a introdução do conceito de limite de educação secundária obrigatória, o professorado considera que esta deve ser intuitiva, estimando a representação verbal e numérica, e só no caso de uma situação ideal -unida a uma melhora das condições instrumentares e de programação- se deve introduzir a representação gráfica, preferencialmente as relativas às sucessões de x_i e $f(x_i)$.

3) No que diz respeito à representação adequada para Bacharelato, destaca uma predileção pelas de tipo numérico e gráfico (com variantes de sucessões e contornas), aparecendo com força a representação simbólica na situação ideal (cerca do 40%). Situados neste último contexto, resulta significativo que apenas sofreria variação a representação simbólica, que duplicaria a sua preferência. Podemos formular a hipótese para ser comprovada em futuros trabalhos de que, em opinião do professorado, uma melhora nas condições que rodeiam à ação educativa no aula suporia a introdução em massa da representação simbólica do limite funcional.

4) O professorado opina que os principais obstáculos de aprendizagem em relação ao conceito de limite funcional estão unidos ao aspeto metodológico-didático e ao epistemológico, descarregando em grande parte a responsabilidade ontogénica.

5) O nível de satisfação com respeito à ação educativa realizada no tema do limite funcional é significativamente baixa. Consideraríamos interessante um posterior estudo que analisasse mais pormenorizadamente as causas dessa 'insatisfação'.

6) O professorado de Matemáticas de Galiza relaciona os conceitos e limites de sucessões e limite funcional utilizando hipoteticamente os primeiros como apoio didático na introdução dos segundos.

7) Na situação atual o professorado aborda a instrução do conceito limite funcional utilizando preferencialmente materiais manipuláveis tradicionais no sentido de Viseu e Ponte (2009). Só o 60% considera a utilização da calculadora científica, e ao redor de 20% os instrumentos unidos às novas tecnologias, como são quadro digital, computadores ou aulas de informática.

O mesmo tempo, a opinião maioritária é que uma situação ideal é o marco adequado para desenvolver a instrução utilizando as novas ferramentas tecnológicas, tal como indicam as percentagens de utilização obtidos no resultado do trabalho.

8) Para mais da metade do professorado no tema relativo ao limite funcional, o uso do livro de texto está vinculado preferentemente à realização de exercícios e problemas por parte do aluno. O estudo manifesta, numa situação ideal, os diversos usos possíveis do livro de texto veriam-se mais compensados ou ao menos mas uniformemente distribuídos.

9) Na atualidade as estratégias mais valorizadas ou utilizadas pelo professorado no tema em questão, são as relacionadas com a motivação do alunado, a representação intuitiva dos conceitos prévio ao seu desenvolvimento formal e a realização de grande quantidade e variedade de exercícios de diversos tipos por parte do alunado. Temos que relacionar os três aspetos anteriormente citados como parte de um modelo de ensino tradicional, unido a instrumentos clássicos na aula. aspetos como o énfase nos procedimentos de resolução de problemas ou a incorporação de apoios didáticos unidos às novas tecnologias, não são valorizados da mesma maneira por parte do professorado.

A situação seria diferente, se nos situássemos num marco ideal. Neste caso, a instrução educativa sentiria-se mais unida a estratégias didático-cognitivas relacionadas com a LOGSE-LOMCE. Ainda considerando necessária uma aprofundação no estudo destes comportamentos, tudo parece sugerir a hipótese de que um avanço em instrumentos e estratégias relacionados com às novas tecnologias está condicionado pelas restrições que atualmente envolvem a ação didática na aula.

10) Em quanto ao rigor da definição de limite, o professorado, pragmaticamente, só considera a hipótese de profundidade no aspeto formal do conceito no caso de um marco de referência unido ao que nós chamámos uma ‘situação ideal’.

11) Se nos centramos no processo reflexivo, podemos concluir, numa primeira aproximação ao estudo (a aprofundar em posteriores trabalhos), que os elementos motivadores no processo de reflexão pedagógica são, com muita diferença, os derivados das 'dificuldades, reações e resultados dos alunos e alunas durante a ação educativa'; isto é, a principal reflexão é motivada pelas diferentes adaptações que o professor vai efetuando após as reações apreciadas nos alunos durante a sua experiência profissional. Em menor medida situam como elementos reflexivos a própria investigação pessoal e a reflexão sobre as próprias dificuldades do professor no momento em que aprendeu o conceito de limite, durante sua juventude.

Resulta também concludente o resultado obtido nesta investigação sobre a escassa influência que os cursos de formação e atualização do professorado tem, nesse tema concreto, como elemento referencial de reflexão para a ação docente. Este facto não deveria passar desapercebido no momento de se formular uma opinião a respeito da conveniência da manutenção de uma estrutura formativa profissional, atual, que tão pouca repercussão parece ter na formação efetiva do professorado. O fator 'livro de texto' também não parece ser o elemento referente no processo reflexivo docente, em concordância com outras conclusões extraídas anteriormente.

12) O professorado considera como altamente importante o apoio nas novas tecnologias, como ferramentas de melhora na instrução do conceito de limite funcional. Consequentemente considera necessária a sua atualização e formação para atender as demandas que nesse sentido possam aparecer.

VI.1.2. A segunda pergunta de investigação

Se abordamos as conclusões da segunda pergunta de investigação, **-Qual é a importância que o professorado dá ao marco de referência ou institucional como elemento condicionante para a instrução?-** podemos destacar que, de facto, em muitas das respostas do professorado se manifesta uma diferença significativa entre as suas opiniões enquadradas no contexto real atual das aulas e as que se dão se mudarmos o contexto institucional. Podemos responder que a esta pergunta que a importância dada polo professorado é alta, como já temos comentado em algum dos pontos anteriores.

Na maior parte dos itens formulados, o professorado mostra claramente como se as circunstâncias externas mudassem para umas melhores condições, a metodologia de instrução e sobre tudo os materiais ou ferramentas utilizadas mudariam. Mesmo chegam a considerar que em condições institucionais ideais, poderia impartir-se o conceito de limite em níveis inferiores. (um 52% consideraria-o possível em 4º curso da ESO).

VI.1.3. A terceira pergunta de investigação

No que diz respeito à terceira pergunta de investigação -**Como se agrupa ou organiza o professorado durante a instrução do conceito do limite funcional em relação a estratégias, materiais ou referentes utilizados?-** podemos concluir o seguinte:

1) Relativamente aos materiais utilizados, podemos classifica-los em dous grupos: O primeiro ligado a ferramentas mais tradicionais (giz, pizarra, livro, caderno, calculadora) e outro grupo que utiliza mais materiais relacionados com as novas tecnologias. É destacar que aparece também assinalado o professorado que utiliza exclusivamente giz e pizarra.

2) No campo das estratégias, também aparecem dous grupos: um primeiro que se caracteriza por preferir uma representação intuitiva do conceito, unido à realização de muitos exercícios, e outro grupo que considera abordar a instrução sob parâmetros de resolução de problemas, conectando com outras matérias e apoiando-se em curiosidades, anedotas ou na história da matemática. Neste caso também a análise fatorial nos permite deduzir duas componentes: Uma ligada a estratégias mais motivadoras e a segunda outras mais tradicionais.

3) Finalmente no âmbito dos referentes usados para a instrução, ligados ao

processo reflexivo, de novo encontramos dous grupos ainda que com uma distribuição mais heterogénea. Um grupo centrado no livro de texto e na sua formação académica como referente, junto com algum curso de formação e outro grupo refletindo sobre as dificuldades do seu alunado em cursos anteriores, nas sua dificuldades na época de estudante ou na auto-formação. Com sempre o referente relativo ao apoio nas TICs resulta transversal tanto nesta questão como nas anteriores, o que nos pode dar uma ideia da importância que estão a adquirir no mundo do ensino. Talvez tanta como para mudar significativamente os parâmetros de relação professor-alunos, que lembremos são os principais atores do processo.

VI.2. Limitações do estudo

Entre as limitações que com certeza poderíamos apreciar, vamos destacar as mais evidentes:

- O âmbito de estudo está restringido ao que administrativamente forma a Comunidade Autónoma Galega. Generalizar resultados a todo o Estado espanhol é arriscado, dado que se bem os programas e níveis em que se imparte os conceito de limite funcional são similares, não têm por que ser idênticos os marcos institucionais de referência. Lembremos neste sentido que Galiza tem plenas competências em matéria de Ensino. As condições em que se desenvolve a ação educativa não são necessariamente as mesmas. A aposta por exemplo pola introdução das TICs nos centros de ensino do Estado não é homogénea. Neste sentido, na Galiza, as condições de trabalho são neste momento digamos que 'manifestamente melhoráveis' por não deixarmos de ser discretos.

- E são as novas tecnologias, que aparecem permanente neste trabalho as que aportam outra limitação ao estudo. A velocidade de introdução destas ferramentas nos centros de ensino, provavelmente vaia ligada ao seu uso polo professorado. Parece lógico que no tempo de desenvolver esta investigação tenham aumentado por exemplo o número de PDI nas aulas, e talvez com elas, o uso e interesse do professorado em utilizá-las. Este seria um sesgo a ter em conta no momento de valorar certos resultados -não todos, claro- do trabalho.

- Finalmente o estudo poderia acrescentar-se com algum tipo de estudo de caso ou talvez entrevistas em profundidade que nos ajudassem a entender alguns dos resultados que pola análise descritiva intuímos. Essa seria uma possível melhora em futuras investigações relacionadas com este ou outro tema similar.

VI.3. Linhas de investigação futuras

Já foi comentado na introdução deste capítulo de conclusões que talvez devamos prosseguir nas linhas de investigação sobre o pensamento do professor, que tantos e tão bons resultados tem proporcionado, mas centrando-nos, ou polo menos apoiando-nos, na sua realidade quotidiana. Ele é o protagonista absoluto do processo. Devemos em primeiro lugar conhecer as suas opiniões e devemos testar com ele os resultados que vaiamos tendo. Só assim pode retroalimentar-se investigador e docente (que em grande medida todos têm as duas facetas em comum) procurando o sucesso do trabalho de ambos.

Consideramos que uma linha de investigação que pode resultar interessante, sugerida polos resultados deste trabalho, tem a ver com a do estudo da adaptação do professor de matemática às novas tecnologias, não apenas como ferramenta de uso na aula, mas como objeto próprio de investigação pessoal. Falamos em concreto da inevitável conversão das ferramentas de software dinâmico e elementos de referência básico no momento de o professor prepara as suas aulas e investiga sobre os modelos concretos de instrução de conceitos complicados *que tanto quebradeira de cabeça ocasiona ao alunado.* Pensemos que -por colocar só exemplo- em muito poucos anos teremos que escolher, a totalidade do professorado de matemática entre desenhar intervalos de tamanho Ípsilon e Delta, cada vez mais pequenos numa pizarra tradicional, a preparar nós mesmos um programa -usando as novas tecnologias e o software dinâmico adequado- onde o Ípsilon, e polo tanto o seu conseguinte Delta se vejam claramente mais pequenos cada vez.

Finalmente, no que diz respeito ao objeto concreto do nosso trabalho, não podemos obviar que, tal como comentávamos no início, outra linha evidente para posteriores investigações poderia centrar-se em realizar estudos semelhantes considerando, junto a novas variáveis de estudo, outros âmbitos populacionais que utilizem o conceito, como som os estudantes de master de secundária ou os professores e professoras universitárias. Isto nos proporcionariam elementos de comparação que nos permitiria estudar aspetos relacionados com o pensamento do professor ligado à sua experiência docente, por exemplo.

Na medida em que acreditemos nesta experiência, para nós fica claro que quando a labor investigadora tomar como um dos objetos centrais de estudo a opinião, os interesses e as práticas do professorado, conseguimos, por uma parte, diagnosticar em grande medida as dificuldades às que se enfrenta a ação educativa na aula e, por outra, abrimos o caminho à confiança e cumplicidade dos profissionais da educação, que sentem desta forma, talvez, o protagonismo ou ao menos participes das linhas investigadoras encaminhadas, desde uma perspetiva fundamentalmente pragmática, à melhora da educação.

Ficam perguntas sem responder e as respostas obtidas formulam novas perguntas. Mas é lógico. Investigar é assim, tão apaixonante.

REFERÊNCIAS

Abelson, R. (1979) Differences between belief systems and knowledge systems. *Cognitive Science, 3(4), 355-366.doi: 10.1207/s15516709cog0304_4.*

Aliaga, F. (2000). *Bases epistemológicas y proceso general de investigación educativa.* Valencia. España. CSV

Alsina, C., Burgués, C. e Fortuny, J, Mª. (1988). Materiales para construir la geometrís. Madrid. España.*Síntesis.*

Álvarez, A. (1996). Atividades matemáticas com Materiales didáticos. Madrid: MEC-Narcea.

André, M. e Ludke, M. (2011). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. *Em Aberto,5(31).*

Azcárate C., Garcia L. e Moreno M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de professores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Relime,* Vol. 9, Núm. 1, marzo, 2006, pp. 85-116.

Bachelard, G. (1948). La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. México DF, México: Siglo XXI Editores

Bagni, G. (2005). The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5 (4), 453-468. doi:10.1080/14926150509556675

Ball, D.L., Thames, M.H. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* 59

Baroody, A. (1994) El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial ey educación especial. *Aprendizaje-Visor.* Madrid.

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *10*(3), 689-706.

Beswick, K. (2012) Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics.* 79(1)1, 127-147.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (4), 487-500.

Biggs, J. (1988). Approaches to learning and to essay writing. En R.R. Schemeck (Ed). *Learning Strategies and Learning Styles (pp.185-228)* New York. USA: Plenum Press.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa*. Editorial la Muralla, S.A.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de limite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blazquez, Ortega e Gatica (2006). Una conceptualización de limite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Relime Vol. 9 Núm. 2. 2006

Blazquez, Ortega e Gatica (2008). Concepto de limite funcional: Aprendizaje y memoria. *Contextos educativos*, 11 (2008), 7-21

Bohorquez, L. (2014). Las creencias vs las concepciones de los professores de matemáticas y sus cambios. Congresso Ibero-americano de Ciência, tecnologia, inovação e educação. Buenos Aires, 12, 13 e 14 de Novembro de 2014. Artículo 1611

Boyer, C.B. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza editorial.

Bozkurt, G., e Ruthven, K. (2015). Expert and novice teachers' classroom practices in a technological environment. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2319-2325)

Brousseau, G. (1983) "Les obstacles epistemologiques et les problemas em mathematiques". *Recherches en Didactique des mathematiques*, v.4 (2), 165-198.

Buicari N., Bertero F., e Trípoli M., (2007).Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de cálculo. GIDIE. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata. Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales.

Bustos I. (2013). Propuesta didáctica: La enseñanza del concepto de límite en el grao undécimo haciendo uso del Geogebra. Universidad Nacional de Colombia. Consultado em http://www.bdigital.unal.edu.co/9500/1/8411002.2013.pdf

Cabero, J. (2005) Formación del professorado universitario en estratégias metodológicas para la incorporación del aprendizaje en red del Espacio de Educación Superior (EEES) Universidad de Sevilla. Sevilla.

Cajaraville, A., Fernández, M.T., Labraña, A., Salinas, M.J., De la Torre, E. e Vidal, E. (2003). *Avaliação do currículo de Matemáticas no 2º ciclo da ESO*. ICE. USC, 2003.

Calderhead J., Robson M. (1991), 'Images of teaching: Student teachers' early conceptions of classroom practice', *Teaching and Teacher Education* 7 (1), 1–8

Carneiro, V. C. (2005). Ingeniería didática: un referencial para la acción investigativa y para la formación de professores de matemáticas. *Zetetike, Campinas*, S.P. (13), nº 23, p. 85-118.

Carneiro, V. C. (1999) *Profissionalização do professor de matemática: limites e possibilidades para a formação inicial*. Tese (Doutorado em Educação) – PontifíciaUniversidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre,, . Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/TESE.pdf.

Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 255-296). New York: Macmillan.

Clark, C. M. y Peterson, P. L. (1986b). Procesos de pensamiento de los docentes. En M.C. Wittrock (Ed). *La investigación en la enseñanza, III. professores y alumnos*, pp. 443-533. Madrid: Paidos Educador. M.E.C.).

Claros, F.J., Sánchez, M.T. e Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el limite. *Revista de Investigación en didática de la Matemática*. Vol.1, nº, 3. Universidad de Granada.

Climent, N., Muñoz-Catalán, M., Contreras, L. Carrillo J., Rojas, N, Montes M., 2015. Conocimiento especializado del professor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del professor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME,* VOL. 18. 2015.

Cohen, L. e Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, La Muralla.

Compagnucci, E., e Cardós, P. (2007). El desarrollo del conocimiento profesional del profesor en psicología. *Orientación y sociedad*, *7*, 103-114.

Conejo L, Arce M., Ortega T (2015). A case study: How textbooks of a Spanish publisherjustify results related to limits from the 70's until today. Konrad Krainer; Nada Vondrov´a.CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.107-113, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Contreras, L. C., (2009) Concepções crenças e conhecimento: Referentes da prática profissional. *Educação webzine latino-americana em ciência e tecnologia*. Catamarca 2009.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y atividades: En L. Rico (coord). .*La Educación Matemática en la Enseñanza Secundária*. Barcelona: Horsori.

Cornu, B. (1991). Límits. En D. Tall (Ed)), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Costa, V. A., Di Domenicantonio, R.,e Vacchino, M. C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *27*, 75-87.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15 (2), 167-192. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2.

Dewey, John (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona, Paidós.

Dodera, M. Burroni, E. Lázaro M.P., Piacentini, B. (2008). Concepciones y creencias de professores sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática *Premisa, 10* (39), 5-16.

Erkek, Ö. e Işıksal-Bostan, M. (2015). Is the use of GeoGebra advantageous in the process of argumentation?. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 121-127).

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didáticas en torno al objeto “limite de función”: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza* *de las Ciencias*, 18(3), 355-368.

Etxeberria, J. e Tejedor, F.J. (2005) *Análisis descriptivo de datos en educación*. La Muralla. 2005.

Fahlgren, M. (2015) Designing for the integration of dynamic software environments in the teaching of mathematics Faculty of Health, Science and Technology Department of Mathematics and Computer Science.

Fernández, T., Godino J. D. e Cajaraville, J.A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista onto-semiótico. *Bolema* V.26 (42A) 39-63.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 44 (5), 699-710. doi:10.1080/0020739X.2013.805887.

Ferrante, J. L (2009). Una introducción al concepto de limite (2000 años en un renglón). Editorial de la Universidad tecnológica nacional argentina. 2009.

Flores, P. (1995). Concepciones y creencias de los futuros professores sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza. Tese de doutoramento. Granada.1995.

Martínez, P. F. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA*, *1*(4), 139-159.

Flores, P. (1998). Formación inicial de professores de matemáticas como profesionales reflexivos Departamento de didática de la Matemática Universidad de Granada, em http://www.ugr.es/~pflores/textos/articulos/Investigacion/UNO98.pdf.

Flores, P. e Peñas, M. J. (2007). Formación inicial de professores de matemática reflexivos.

Departamento de didática de la matemática. 2007. Universidad de Granada.

Güçler, B. (2014). The Role of Symbols in Mathematical Communication: The Case of the Limit Notation. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 251-268.

Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: The case of limits of functions in college level calculus courses. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 341.

Hernández R, Fernández C, e Baptista, P, (2010). Metodología de la Investigación. McGraw-Hill / Interamericana de editores, S.A. de C.V.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, (2).

García, V. e Pérez, R. (1989): La investigación del professor en el aula . Madrid, *Escuela Española. 51-2.*

Gil, F., Rico, L. e Fernández, A. (2002). Concepciones y creencias del professorado de secundaria sobre evaluación en matemáticas. *Revista de Investigación Educativa*, 20(1), 47-75.

Gil Fe Rico, L. (2003) Concepciones y creencias del professorado de secundária sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21(1), 27-47.*

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del professor de matemáticas. UNION, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Disponível em, http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf.

Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F., e Pareja, J. L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *64*, 1-11.

González, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo. *Revista de Investigación Educativa*, 8(1)1, 175-199.

González, M. T. (2002). Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspetiva histórica acerca de los puntos críticos (Doctoral dissertation). Consultada em http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/22651.

González, O. (2013). Conceptualizing and assessing secondary mathematics teacher's professional competencies for effective teaching of variability-related ideas. Proceedings of CERME 8, (pp.804- 809).

González, I. (2013) Propuesta didática: la enseñanza del concepto de limite en el grado undecimo, haciendo uso del geogebra. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ciencias exactas y naturales. Departamento de Matematicas y Estadistica. Manizales.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., e Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher*. New York: Pergamom.

Green, T. A. (Ed.). (1997). *Folklore: an encyclopedia of beliefs, customs, tales, music, and art* (Vol. 1). Santa Bárbara USA.

Guillén, G. e Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta, em *Actas del octavo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* Coruña:

Universidade da Coruña.

Henning, A., e Hoffkamp, A. (2013). Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.) Proceedings of CERME8 (pp. 2574–2583). Ankara: Middle East Technical University.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnologıa. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213.

Juter, K. (2006). Limits of Functions: Students Solving Tasks. *Australian Senior Mathematics Journal*, *20*(1), 15-30.

Kaiser, G., Blömeke, S., Busse, A., Döhrmann, M. e König, J. (2016). Professional knowledge of (prospective) Mathematicsteachers – Its structure and development . *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 11(15), 83-99.

Kerlinger, F. (1979). *Enfoque conceptual de la investigación del comportamiento.* México . Nueva Editorial Interamericana.

Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: The complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 197-216.

Kumsa, A., Pettersson, K., e Andrews, P. (2017). Obstacles to students' understanding of the limit concept, em CERME10. Disponível em: https://keynote.conference-services.net/ resources/444/5118/pdf/CERME10 0231.pdf.

Lagrange, J., e Erdogan, E. (2009). Teachers' emergent goals in spreadsheet-based lessons: Analyzing the complexity of technology integration. *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 65−84.

Llinares, S. (1995). Conocimiento Profesional del Profesor de Matematicas: Conocimiento, Creencias y Contexto en Relación a la Noción de Función1. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/1995/1995_03_Sllinares.pdf.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação*, 47-82.

Llinares, S. (2008). Aprendizaje del estudiante para professor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. Conferencia invitada en III Encuentro de Programas de Formación Inicial de professores de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Santa Fé de Bogotá, Colombia.

LOE (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Disponível em: http://noticias.juridicas.com/base_datos/Admin/lo2-2006.html.

LOGSE (1990). *Ley orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo.* Disponível em: http://educac.tripod.com/legislac/logse.htm.

Mallet (2013). An exemple of cognitive obstacles in avanced integration: The case of scalar line integrals. *International Journal of mathematical Education in Scence and Technology* 44 (1), 152-157.

Marcelo, C. (1987) El pensamiento del professor. Ediciones CEAC. Barcelona. España.

Méndez, J. (2004). Investigar la incidencia de los medios enlas aulas mediante cuestionarios *Revista Científica de Comunicación y Educación, 22,* 81-87.

Miranda, M. G. (2006) O Professor Pesquisador e Sua Pretensão de Resolver a Relação Entre a Teoria e a Prática na Formação de Professores. Em *O Papel da pesquisa na formação e na prática dos professores*. Campinas. Papirus, 5, 129-143.

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M.C. e Carrillo, J, (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. Em C. Fernández, M.Molina e N. Planas (Eds), *Investigación en Educación Matemática* XIX (pp. 381-389). Alicante.

Mora, C. (2003). Estratégias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Strategies for the learning and teaching of mathematics. Revista de Pedagogía 24 (70).*

Morales, P. (2013). El Análisis fatorial en la construcción e interpretación de tests, escalas y cuestionarios. Disponível em: http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/AnalisisFactorial.pdf.

Moreno, M. (2002). El pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones em Gerardo Perafán y Agustín Adúriz-Bravo (comps.)*, Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales,* Santafé de Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 127-139.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International journal of science and mathematics education*, *7*(3), 431-454.

Mosvold, R. e Fauskanger, J. (2013). Teachers' beliefs about mathematical knowledge for teaching definitions. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 8(2-3), 43-61.

Nogueira, I., Fernández, T. e Rodríguez, D. (2015). Análise ontossemiótica de processos de instrução matemática. Un exemplo no ensino básico. *Saber e educar*, 174-186.

Páez, R., (2004). *Procesos de construcción del concepto de limite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN. México, Distrito Federal. México.

Pajares,M. F. (1992) Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy

Construct. *Review of Educational Research* Fall, 62(3), 307-332.

Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(2), 193-216.

Pérez, G. (2005). Prática reflexiva do professor de matemática. *Educação matemática, pesquisa em movimento*. Sao Paulo: Cortés, 250-263.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* (Tesis de doctorado). Universidad de la Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, España. Disponível em: ftp://tesis.bbtk.ull.es/ ccppytec/ cp114.pdf.

Ponte, J. P. D. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação.

Ponte, J. P. (1994). O professor de Matemática: Um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante, Asociación de professores de matemáticas.* 3(2), 79.

Ponte, J. P. (1994b). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), Proceedings of the XVIII I*nternational Conference for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Vol. I, pp. 195-210), Lisbon, Portugal.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.),. *Actas del IV simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Córdoba: Universidad de Huelva.

Rico, L. e Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. *Bases teóricas del curriculo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid. Síntesis.

Robinet, J. (1983). Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4(3), 223-292.

Rokeach, M. (1968). *Beliefs, attitudes and values: A theory of organization and change.* California. USA.

Sacristán, J. G. (2000). *La educación obligatoria: su sentido educativo y social* (Vol. 1). Ediciones Morata.

Serrano, R. (2010) Pensamientos del professor: un acercamiento a las creencias y concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior. *Revista de Educación*, 352, 267-287.

Shön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos.* Barelona, Paidós.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 6 (1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math,* 18, 371-397.

Sierra Vázquez, González Astudillo, y López Esteban (1999). Evolución histórica del concepto de limite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias*, 1999, 17 (3), 463-476.

Sigel, I. E. (1985). A conceptual analysis of beliefs. In I. E. Sigel (Ed.), Parental belief systems: *The psychological consequences for children* (pp. 345-371). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Smyth, J. (1991) Una pedagogía crítica de la prática en el aula. *Revista de Educación, 294,* 275-300.

Sosa, L. (2011) *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: Un estudio de dos casos* (Tese de doutoramento). Universidad de Huelva. Departamento de Dídáctica de las Ciencias y Filosofía.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 258-276.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Thompson, A. G. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research.*

Valiente, J. L. G. (2014). Evaluando actitudes y usos de las TIC del profesorado de música de educación secundaria. *Revista Internacional de Educación Musical*, (2), 10-23.

Van Manen, M. (l977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry,* 6, 205-228.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. *Mathematics and Cognition* ICMI Study Series.

Vicente, L. (1995). *Palabras y creencias: ensayo crítico acerca de la comunicación humana y de las creencias.* Secretariado de publicaciones de la Universidad de Murcia.

Vidal, A. e Salinas, M. J. (2011). Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional. In *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 587-598).

Viseu, F e da Ponte, J. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didático do futuro professor de Matemática com apoio dás TIC's. *Revista latinoamericana de investigação em matemática educativa. Relime* 12(3), 384-413.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-36.

Xunta de Galicia, (2008). Decreto 126/2008 do 19 de Xuño, polo que se establece a ordenación e o currículo de Bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia.

Xunta de Galicia, (2015). Decreto 86/2015 do 29 de Xuño, polo que se establece a ordenación e o currículo de Bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia.

Anexo I

Modelo para a validação do inquéritos

Enquisa relativa ao profesorado de Secundária sobre o concepto de limite funcional. (Modelo para validación)

A seguinte enquisa está realizada no marco dun proxecto de investigación no campo da Didáctica da Matemática sobre o concepto de límite dunha función. Desexariamos que lese con atención todos os ítems da enquisa e nos respondese **SOAMENTE** ás **TRES** preguntas suscitadas inmediatamente **logo de cada un deles**. As preguntas a contestar atópanse enmarcadas nun cadro de texto con fondo gris. Trátase, en xeral, de que nos dea a súa opinión sobre a conveniencia de cada ítem para o fin que se persegue na enquisa. Unha vez que coñezamos a súa opinión sobre a pertinéncia dos ítems, e ter incorporado posibeis suxestións, se as houber, procedemos a aplicala de **forma on line** sobre unha mostra significativa do profesorado de Matemáticas de ensino medio da Galiza.

Agradecemos sinceramente todo o esforzo e o tempo empregado en valorar esta enquisa.

Atentamente:

Luís Alonso Vidal Conde

DATOS DO/A AVALIADOR/A:

Nome e Apelidos: ____________________

Centro de Traballo: ____________________

Data da Avaliación: ____________________

Enquisa relativa ao profesorado de Secundária sobre o Concepto de Limite Funcional. (Modelo para validación)

Nota inicial importante:

No presente formulário a maioría das preguntas son presentadas para ser respondidas desde **dous puntos de vista** distintos co fin de ser sometidos a comparación.

Baixo o epígrafe **"SITUACIÓN ACTUAL"** queremos referir-nos aos casos en que o profesor teña impartido nalgún dos últimos cinco anos o tema relativo ao "Concepto de limite de unha función". Entende-se, neste caso, que o profesorado está **condicionado** tanto polos programas actuais da matéria (secuencias, contidos, horário destinado a cada tema, etc...), como polas ferramentas pedagóxicas e materiais disponíbeis na actualidade en cada centro durante o proceso de instrución.

O aspecto **"SITUACIÓN IDEAL"** refíre-se a hipotéticas situacións en que o profesorado dispoña de tempo e materiais adecuados, -sen condicionantes de ningún tipo-, para a instrucción.

Por favor, responda as seguintes perguntas:

0. Xeral persoais

0.1 Sexo
0.1.1. Feminino
0.1.2. Masculino

0.2 Idade:
- 0.2.1. 20-30,
- 0.2.2. 31-40,
- 0.2.3. 41-50,
- 0.2.4. 51-60,
- 0.2.5. 60-70

0.3 Titulación:
- 0.3.1. Licenciado en Matemática,
- 0.3.2. Física,
- 0.3.3. Química,
- 0.3.4. Enxeñaria,
- 0.3.5. Outras....

0.4 Anos de docencia.

0.5 Matérias que imparte ou impartiu:
- 0.5.1. Matemática
- 0.5.2. Matemática aplicada às CC.SS.
- 0.5.3. Métodos estatísticos e numéricos.
- 0.5.4. Informática
- 0.5.5. Outras...... Cal?

A primeira pregunta pretende coñecer a opinión do profesorado sobre a necesidade de que o concepto de límite, pola súa dificultade, sexa introducido (ou non) nos niveis correspondentes á ESO e ao Bacharelato. Tamén nos interesan os motivos en que se fundamentan estas opinións.

1. Considera que os alunos/as de Ensino Médio deben ser formados na noción de Límite de funcións?

1.-I NA ESO

1-I.1 NON, porque é...

1.I.1.1 Concepto de difícil comprensión para a sua idade.
1.I.1.2 Inecesário para o Ensino obrigatório.
1.I.1.3 Imposíbel pola necesidade de tempo para a explicación.
1.I.1.4 Non figuran nos programas
1.I.1.5 Non figuran nos libros de texto
1.I.1.6 Outros: ______________________________
____
____

1.I.2 SI,

1.I.2.1 Porque están capacitados para a comprensión do concepto.
1.I.2.2 Só de forma intuitiva e con exemplos.
1.I.2.3 De forma "lúdica" e/ou interactiva, bascando-se en programas informáticos ou pizarras dixitais.
1.I.2.4 De forma concisa e renunciando as notacións.
1.I.2.5 Outros: ______________________________
____
____

1.II NO BACHARELATO DE CIENCIAS

1.II.1 NON, porque é...

1.II.1.1 Conceito de difícil comprensión para a sua idade.
1.II.1.2 Inecesário para o Ensino universitário ou profisional
1.II.1.3 Imposíbel pola necesidade de tempo para a explicación.
1.II.1.4 Suficiente con que saiban calcular limites mecanicamente.
1.II.1.5 Menos importante dentro de un programa moi denso.
1.II.1.6 Outros: ______________________________
____
____

1.II.2 SI,

1.II.2.1 Porque están capacitados para a comprensión do concepto.
1.II.2.2 Só de forma intuitiva e com exemplos.
1.II.2.3 De forma "lúdica" e/ou interactiva, bascando-se en programas informáticos ou pizarras dixitais.

1.II.2.4	De forma concisa e renunciando as notacións.
1.II.2.5	De forma clara e precisa, con simboloxía adecuada (E d).
1.II.2.6	Outros: ____________________

1.III NO BACHARELATO DE CIENCIAS SOCIAIS (LETRAS)

1.III.1 NON, porque é...

1.III.1.1	Conceito de difícil comprensión para a sua idade.
1.III.1.2	Inecesário para o Ensino universitário ou profisional
1.III.1.3	Imposíbel pola necesidade de tempo para a explicación.
1.III.1.4	Suficiente con que saiban calcular limites mecanicamente.
1.III.1.5	Menos importante dentro de un programa moi denso.
1.III.1.6	Outros: ____________________

1.III.2 SI,

1.III.2.1	Porque están capacitados para a comprensión do concepto.
1.III.2.2	Só de forma intuitiva e com exemplos.
1.III.2.3	De forma "lúdica" e/ou interactiva, baseando-se en programas informáticos ou pizarras dixitais.
1.III.2.4	De forma concisa e renunciando as notacións.
1.III.2.5	De forma clara e precisa, con simboloxía adecuada (E d).
1.III.2.5	Outros: ____________________

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun circulo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ____________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si. Porque ... ____________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ____________________

Interésanos coñecer a opinión do profesorado sobre o nivel en que a noción de límite dunha función debería ser introducida de forma natural, de acordo coa capacidade e formación previa do alumnado

2.- A que nível ou curso considera que se debería introducir o concepto de limite de funcións (independentemente do que indique os curricula oficiais)?

2.A NA SITUACIÓN ACTUAL.

2.A.1 No primiero ciclo da ESO.
2.A.2 En 3° de ESO.
2.A.3 En 4° de ESO
2.A.4 En 1° de Bacharelato de Ciencias
2.A.5 En 2° de Bacharelato de Ciencias
2.A.6 En 1° de Bacharelato de CC. Sociais
2.A.7 En 2° de Bacharelato de CC. Sociais.
2.A.8 Non se debería introducir no Ensino Medio.

2.B NA SITUACIÓN IDEAL.

2.B.1 No primiero ciclo da ESO.
2.B.2 En 3° de ESO.
2.B.3 En 4° de ESO
2.B.4 En 1° de Bacharelato de Ciencias
2.B.5 En 2° de Bacharelato de Ciencias
2.B.6 En 1° de Bacharelato de CC. Sociais
2.B.7 En 2° de Bacharelato de CC. Sociais
2.B.8 Non se debería introducir no Ensino Medio.

Con respecto ao item anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese item?

Si
Non Porque... ____________________________

2. Eliminaría Vosté este item?

Non.
*Si. Porque ...*____________________________

3. Considera adecuado este item ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao item)

Si
Non Porque... ____________________________

Entendemos por representacións matemáticas de un obxecto cada unha das imaxes ou ferramentas simbólicas que utilizamos para descrebé-lo. Así o concepto de limite de funcións podemos distinguir as representacións verbais ("É o valor ao que se aproxima a función cando nos aproximamos a un valor da orixe determinado"); Numérico (p.ex. A traves de táboas de valores), Gráfico ("usando as gráficas") ou simbólico ("Con símbolos matemáticos como podem ser epsilon e delta").

3. Entre as distintas representacións do obxecto matemático "limite de unha función nun punto" (Castro e Castro 1997) cal considera adecuada para o <u>nivel de ESO</u>? *(Poden-se escoller várias)*:

3.A NA SITUACIÓN ACTUAL

3.A.1 Verbal
3.A.2 Numérico (Tabular)
3.A.3 Gráfico.
 3.A.3.1 Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
 3.A.3.2 Con entornos
 3.A.3.3 Outros gráficos:_____
3.A.4 Simbólico.
3.A.5 Outra (s): __________

3.B NA SITUACIÓN IDEAL

3.B.1 Verbal
3.B.2 Numérico (Tabular)
3.B.3 Gráfico.
 3.B.3.1 Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
 3.B.3.2 Con entornos
3.B.4 Simbólico.
3.B.5 Outra (s): __________

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... __________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si. Porque ... __________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... __________

Entendemos por representacións matemáticas de un obxecto cada unha das imaxes simbólicas que utilizamos para descrebé-lo. Así o concepto de limite de funcións podemos distinguir as representacións verbais ("É o valor ao que se aproxima a función cando nos aproximamos a un valor da orixe determinado"); Numérico (p.ex. A traves de táboas de valores), Gráfico ("usando as gráficas") ou simbólico ("Con símbolos matemáticos como epsilon e delta").

4. Entre as distintas representacións do obxecto matemático "limite de unha función nun punto" (Castro e Castro 1997) cal considera adecuada para o nivel de Bacharelato? ***(Poden-se escolher várias):***

4.A NA SITUACIÓN ACTUAL

4.A.1 Verbal
4.A.2 Numérico (Tabular)
4.A.3 Gráfico.
- 4.A.3.1 Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
- 4.A.3.2 Con entornos
- 4.A.3.3 Outros gráficos:______ ______________ ______________

4.A.4 Simbólico.
4.A.5 Outra (s): ________ ________ ____________________

4.B NA SITUACIÓN IDEAL

4.B.1 Verbal
4.B.2 Numérico (Tabular)
4.B.3 Gráfico.
- 4.B.3.1 Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
- 4.B.3.2 Con entornos

4.B.4 Simbólico.
4.B.5 Outra (s): ____________________ ____________________

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ______________________________

2. Eliminaria Vosté este ítem?

Non.
*Si. Porque ...*______________________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ______________________________

Brousseau distingue tres tipos de obstáculos na aprendizaxe dun concepto segundo a sua orixe: obstáculos de orixe ontoxénica (proveñen das limitacións do próprio suxeito), obstáculos de orixe metodolóxica (dependen do plantexamento educativo) e, obstáculos de orixe epistemolóxica (próprios do concepto, da sua xénese). Queremos coñecer a opinión do profesorado sobre este aspecto.

5. **Como valoraría a importancia deses obstáculos no que respecta ao concepto de limite de funcións.** ***(1-Pouco importante; 5- Moi importante)***

5.1	Ontoxénica (do propio suxeito) :	1	2	3	4	5
5.2	Metodolóxica :	1	2	3	4	5
5.3	Epistemolóxica (do concepto en sí):	1	2	3	4	5

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun circulo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non *Porque...* ______________________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si. *Porque ...*______________________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non *Porque...* ______________________________

Dada a complexidade do concepto "límite dunha función nun punto", é moi frecuente que a relación entre o esforzo investido na instrución e a satisfacción polo resultado obtido, non sexa a esperada. Desexamos comprobar tal cuestión xa que, de ser certa, levaríanos a concluír unha necesaria mellora no campo da metodoloxía ou nos recursos da acción educativa.

6. Como valora o nivel de satisfacción respecto o resultado da acción didáctica que realiza no tema en cuestión, comparando ésta con o "esforzo" pedagóxico investido? ***(1-Pouco satisfeito; 5- Moi satisfeito)***

1 2 3 4 5

Con respecto ao item anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese item?

Si
Non *Porque...* ______________________________

2. Eliminaría Vosté este item?

Non.
Si. *Porque ...*______________________________

3. Considera adecuado este item ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao item)

Si
Non *Porque...* ______________________________

Algúns especialistas da didáctica da matemática, consideran a posibilidade de abordar o concepto de límite dunha forma xeral, como obxecto matemático de estudo específico; abarcaríase así ao mesmo tempo os campos de límites de sucesións e límites de funcións. Trataríase en certo sentido dun camiño desde a xereralidad á particularidade. Queremos saber que opinan a este respecto, baseándose na súa experiencia cotiá, os profesores e profesoras de ensino secundario.

7. Relación entre limite de sucesión e límite de función: Como considera que deben ser tratados os conceitos de limites de sucesión e limites de funcións?

7.A NA SITUACIÓN ACTUAL

7.A.1 Deben relacionar-se. O Limite de sucesión debe ser prévio
7.A.2 Deben relacionar-se. O límite de funcións previamente
7.A.3 Deben desenvolver-se ao mesmo tempo, como concepto geral.
7.A.4 Deben ser tratados por separado, por...
- 7.A.4.1 Ser demasiado complexos os conceitos.
- 7.A.4.2 Deben corresponder a niveis ou cursos distintos.
- 7.A.4.3 Poden levar a confusión entre eles.
- 7.A.4.4 Outros: ____________________

7.B NA SITUACIÓN IDEAL

7.B.1 Deben relacionar-se. O Limite de sucesión debe ser prévio
7.B.2 Deben relacionar-se. O límite de funcións previamente
7.B.3 Deben desenvolver-se ao mesmo tempo, como concepto geral.
7.B.4 Deben ser tratados por separado, por...
- 7.B.4.1 Ser demasiado complexos os conceitos.
- 7.B.4.2 Deben corresponder a niveis ou cursos distintos.
- 7.B.4.3 Poden levar a confusión entre eles.
- 7.B.4.4 Outros: ____________________

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun circulo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ____________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
*Si. Porque ...*____________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ____________________

Na Institución escolar, constituida polas persoas involucradas en determinadas situacións didácticas problemáticas, as prácticas sociais son compartidas, con rasgos particulares e xeralmente condicionadas polos instrumentos disponíbeis na mesma, as suas regras e o seu funcionamento.

8. Cais son os instrumentos que usualmente utiliza para conseguir a instrucción educativa no a respecto do objecto matemático "Limite dunha función"?

8.A NA SITUACIÓN ACTUAL

8.A.1 Xiz branca.
8.A.2 Xiz de cores.
8.A.3 Libro de Texto.
8.A.4 Caderno de actividades do alumnado.
8.A.5 Pizarra / Encerado (cadro)
8.A.6 Caderno de actividades elaborada por editoras.
8.A.7 Calculadora científica.
8.A.8 Calculadora científica programábel.
8.A.9 Calculadora gráfica. (Ex: Tipo Class Pad)
8.A.10 DVD.
8.A.11 Pizarra digital
8.A.12 Proxector.
8.A.13 Presentacións (Ex: tipo Power Point)
- 8.A.13.1 De elaboración própria
- 8.A.13.2 Elaboración allea.

8.A.14 Aula de informáticas
8.A.15 Programas informáticos
- 8.A.15.1 MatLab
- 8.A.15.2 Follas de cálculo.
- 8.A.15.3 Descartes
- 8.A.15.4 Math Cars
- Outros: ____________________
  ____

8.B NA SITUACIÓN IDEAL

8.B.1 Xiz branca.
8.B.2 Xiz de cores.
8.B.3 Libro de Texto.
8.B.4 Caderno de actividades do alumnado.
8.B.5 Encerado (cadro)
8.B.6 Caderno de actividades elaborada por editoras.
8.B.7 Calculadora científica.
8.B.8 Calculadora científica programábel.
8.B.9 Calculadora gráfica. (Ex: Tipo Class Pad)
8.B.10 DVD.
8.B.11 Pizarra digital
8.B.12 Proxector.
8.B.13 Presentacións (Ex: tipo Power Point)
- 8.B.13.1 De elaboración própria
- 8.B.13.2 Elaboración allea.

8.B.14 Aula de informáticas

8.B.15 Programas informáticos

- 8.B.15.1 MatLab
- 8.B.15.2 Follas de cálculo.
- 8.B.15.3 Descartes
- 8.B.15.4 Math Cars
- Outros: ____________________

____

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun circulo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ____________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
*Si. Porque ...*____________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ____________________

Existe unha opinión xeneralizada de que o libro de texto na materia de matemática apenas resulta útil. En moitos casos, -afírmase-, o profesorado só o utiliza para marcar a realización de exercicios por parte do alumnado. En casos como o de "concepto de límite dunha función", de maior complexidade , o recurso ao libro de texto parécenos menos habitual, si cabe. Queremos confirmalo.

9. Utiliza normalmente o libro de texto, no proceso de ensino-aprendizaxe, en particular para o tema de limites de funcións?

9.A NA SITUACIÓN ACTUAL

9.A.1 Na ESO:

- 9.A.1.1 Si
  - 9.A.1.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.A.1.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.A.1.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.A.1.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.A.1.2 Non

9.A.2 No Bacharelato:
- 9.A.2.1 Si
  - 9.A.2.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.A.2.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.A.2.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.A.2.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.A.2.2 Non

9.B NA SITUACIÓN IDEAL

9.B.1 Na ESO:
- 9.B.1.1 Si
  - 9.B.1.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.B.1.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.B.1.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.B.1.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.B.1.2 Non

9.B.2 No Bacharelato:
- 9.B.2.1 Si
  - 9.B.2.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.B.2.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.B.2.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.B.2.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.B.2.2 Non

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ____________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
*Si. Porque ...*____________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ____________________

Análise didáctica: Máis aló de teorías pedagóxicas, cursos de formación e liñas didácticas, o profesorado manexa unha serie de estratexias e ferramentas que serven de apoio na aprehensión do concepto. Interésanos coñecer algúns aspectos destas estratexias.

10. Por favor, avalie as seguintes características ou estratexias didáctico-cognitivas en relación á sua práctica docente habitual no tema de "limites de funcións: *(1-Pouco importante; 5-Moi importante):*

10.A NA SITUACIÓN ACTUAL

10.A.1 A motivación do alumnado.

1 2 3 4 5

10.A.2 Apoio na história das matemáticas e nas suas aplicacións.

1 2 3 4 5

10.A.3 Representación intuitiva dos conceptos prévia ao seu desenvolvimento formal.

1 2 3 4 5

10.A.4 Realización de cantidade e variedade de exercícios e problemas, de diferentes tipos, por parte dos alunos.

1 2 3 4 5

10.A.5 Conexión coa realidade, a naturaleza, a vida diária e con outras ciencias.

1 2 3 4 5

10.A.6 Enfase nos procedimentos de resolución de problemas.

1 2 3 4 5

10.A.7 Incorporación de apoios didácticos (resumos, calculadora, ordenador, pizarra dixital...).

1 2 3 4 5

10.A.8 Utilización de anécdotas, feitos curiosos ou chamativos relacionados co tema.

1 2 3 4 5

10.B NA SITUACIÓN IDEAL

10.B.1 A motivación do alumnado.

1 2 3 4 5

10.B.2 Apoio na história das matemáticas e nas suas aplicacións.

1 2 3 4 5

10.B.3 Representación intuitiva dos conceptos prévia ao seu desenvolv mento formal.

1 2 3 4 5

10.B.4 Realización de cantidade e variedade de exercícios e problemas, de diferentes tipos, por parte dos alunos.

1 2 3 4 5

10.B.5 Conexión coa realidade, a naturaleza, a vida diária e con outras ciencias.

1 2 3 4 5

10.B.6 Enfase nos procedimentos de resolución de problemas.

1 2 3 4 5

10.B.7 Incorporación de apoios didácticos (resumos, calculadora, ordenador, pizarra dixital...).

1 2 3 4 5

10.B.8 Utilización de anécdotas, feitos curiosos ou chamativos relacionados co tema.

1 2 3 4 5

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non ***Porque...*** ______

2. Eliminaria Vosté este ítem?

Non.
Si. ***Porque ...*** ______

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non ***Porque...*** ______

*No seguinte ítem propoñémonos coñecer a opinión do profesorado, sempre baseado na súa práctica docente, día a día nas aulas, sobre o **rigor** (entendido en términos de precisión formal, ligada á exactitude e á expresión linguaxe matemática) que debe ser empregado na comprensión por parte do alumnado do concepto límite dunha función. Existe relación entre o rigor formal e a aprehensión do concepto?*

11. Do rigor da definición: Como considera que debe ser introducida a definición de "limite de unha función nun punto" ?

11.A NA SITUACIÓN ACTUAL

11.A.1 Non debe ser introducida
11.A.2 Verbalmente (" Punto ao que se achega a función....")
11.A.3 A través de infinitésimos.
11.A.4 Topolóxicamente a través de contornos.
11.A.5 Con táboas de valores; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.A.5 Con gráficas; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.A.6 Metricamente a traves de Epsilon e Delta.
11.A.7 Outro: ______________________

11.B NA SITUACIÓN IDEAL

11.B.1 Non debe ser introducida
11.B.2 Verbalmente (" Punto ao que se achega a función....")
11.B.3 A través de infinitésimos.
11.B.4 Topolóxicamente a través de contornos.
11.B.5 Con táboas de valores; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.B.5 Con gráficas; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.B.6 Metricamente a través de Epsilon e Delta.
11.B.7 Outro: ______________________

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ______________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si. Porque ... ______________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao item)

Si
Non Porque... ______________________

A idea de infinito (límite infinito ou límites no infinito) resulta históricamente complexa . Achegarse ao infinito, dunha forma mínimamente coherente e comprensible para o alumnado é un dos problemas que xera máis debate desde o punto de vista didáctico. O profesorado atópase inmerso no proceso de ensino deste concepto e queremos coñecer cal é o seu punto de vista baseado en experiencia docente. A intención das preguntas 12 e13 é respondernos á pregunta concreta de como se introduce, na práctica, nas aulas galegas este concepto?

12. Como considera que debe ser introducida a definición de "limite de unha función NO INFINITO " ?

12.A NA SITUACIÓN ACTUAL

12.A.1	Non debe ser introducida.
12.A.2	Verbalmente (" Punto ao que se achega a función ao fazer cada vez mais grande (pequeño) o x)
12.A.3	Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
12.A.4	Topolóxicamente a través de contornos e cotas da variábel x.
12.A.5	Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$.
12.A.6	Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
12.A.7	Metricamente a traves de Epsilon e K.
12.A.8	Outro: ______________________

12.B NA SITUACIÓN IDEAL

12.B.1	Non debe ser introducida.
12.B.2	Verbalmente (" Punto ao que se achega a función ao fazer cada vez mais grande (pequeño) o x)
12.B.3	Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
12.B.4	Topolóxicamente a través de contornos e cotas da variábel x.
12.B.5	Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
12.B.6	Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$.
12.B.7	Metricamente a traves de Epsilon e K.
12.B.8	Outro: ______________________

13. Como considera que debe ser introducida a definición de "LIMITE INFINITO de unha función nun punto a" ?

13.A NA SITUACIÓN ACTUAL

13.A.1	Non debe ser introducida.
13.A.2	Afirmando que é a "non existéncia" de límite, por non ser un nº real
13.A.2	Verbalmente (" A función crece (decrece) indefinidamente cando a variábel se achega ao punto)

13.A.3	Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
13.A.4	Topolóxicamente a través de contornos de **a** e cotas de f(x).
13.A.5	Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$.
13.A.6	Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
13.A.7	Metricamente a traves de K e delta.
13.A.8	Outro: ______________________________

13.B NA SITUACIÓN ACTUAL

13.B.1	Non debe ser introducida.
13.B.2	Afirmando que é a "non existéncia" de límite, por non ser un nº real
13.B.2	Verbalmente (" A función crece (decrece) indefinidamente cando a variábel se achega ao punto)
13.B.3	Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
13.B.4	Topolóxicamente a través de contornos de **a** e cotas de f(x).
13.B.5	Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$.
13.B.6	Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
13.B.7	Metricamente a traves de K e delta.
13.B.8	Outro: ______________________________

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non *Porque...* ______________________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si. *Porque ...*______________________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non *Porque...* ______________________________

Análise fenomenolóxico: As Matemáticas para alén de unha ciencia, con os seus aspectos formais, tamén son instrumentos para comprender, interpretar e predecir diversos fenómenos.

14.- No que di respeito ao tratamento do concepto de limite de unha función nun punto , cales dos seguintes exemplos utiliza nas aulas ou considera interesantes para contextualizar, introducir ou exemplificar o concepto de limite de unha función nun punto?:

14.A NA SITUACIÓN ACTUAL.

14.A.1	Non utilizo, normalmente, exemplos.
14.A.2	Utilizo maioritariamente exemplos de funcións interesantes expresadas analíticamente e/ou definidas a trozos. (Ex. f(x) = 1/x no punto a=0)
14.A.3	A relación entre o volume de unha caixa e o seu lado.
14.A.4	A relación entre o peso de un depósito e a cantidade de litros que contén.
14.A.5	A relación entre a área de un cadrado e o seu lado.
14.A.6	A relación entre a altura de rectángulos inscritos nun ángulo e a sua base.
14.A.7	A relación entre a porcentaxe de audiéncia da Tv. e a hora do dia
14.A.8	A relación entre a altura de água de un depósito e o tempo que tarda en encher-se.
14.A.9	A relación entre o aumento que proporciona unha lupa e a distancia desta ao obxecto.
14.A.10	A temperatura da água que ao início está en ebullición e o tempo de enfriamento a partir dela.
14.A.11	A relación entre o volume dunha esfera e o seu radio.
14.A.12	A relación entre a intensidade do son e a distancia ao foco.

14.B NA SITUACIÓN IDEAL

14.B.1	Non utilizo, normalmente, exemplos.
13.B.2	Utilizo maioritariamente exemplos de funcións interesantes expresadas analíticamente e/ou definidas a trozos. *(Ex: f(x) = 1/x no punto a=0)*
14.B.3	A relación entre o volume de unha caixa e o seu lado.
14.B.4	A relación entre o peso de un depósito e a cantidade de litros que contén.
14.B.5	A relación entre a área de un cadrado e o seu lado.
14.B.6	A relación entre a altura de rectángulos inscritos nun ángulo e a sua base.
14.B.7	A relación entre a porcentaxe de audiéncia da Tv. e a hora do dia
14.B.8	A relación entre a altura de água de un depósito e o tempo que tarda en encher-se.
14.B.9	A relación entre o aumento que proporciona unha lupa e a distancia desta ao obxecto.
14.B.10	A temperatura da água que ao início está en ebullición e o tempo de enfriamento a partir dela.
14.B.11	A relación entre o volume dunha esfera e o seu radio.
14.B.12	A relación entre a intensidade do son e a distancia ao foco.

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non   Porque... ________________________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si.   Porque ...________________________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non   Porque... ________________________________

No momento de abordar o proceso de instrucción pedagóxica en temas que sabemos complexos para o alumnado, o profesorado acostuma a pensar en referentes que poden axudar a focalizar o proceso para conseguir unha maior comprensión por parte do alumnado.

15. Por favor, avalíe de 1 a 5 a importancia en que considera están presentes, no seu caso, os seguintes referentes: ***(1-pouco presente; 5-moi presente)***

15.1 A forma en que mo explicaron no Bacharelato.

1 2 3 4 5

15.2 As miñas propias lacunas ou dificultades cando mo ensinaron no bacharelato.

1 2 3 4 5

15.3 O aprendido nos meus estudos universitários.

1 2 3 4 5

15.4 O que aparece nos libros de texto.

1 2 3 4 5

15.5 As dificultades, reaccións e resultados no alumnado en anos precedentes.

1 2 3 4 5

15.6 O aprendido en cursos de formación e actualización do profesorado.

1 2 3 4 5

15.7 A aportación da informática e das novas tecnoloxías

1 2 3 4 5

15.8 A leitura e investigación persoal sobre o tema.

1 2 3 4 5

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun circulo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non ***Porque...*** ____________________

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
Si. ***Porque ...*** ____________________

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non ***Porque...*** ____________________

Resulta frecuente a crenza de que moitos dos problemas e obstáculos xerados na instrución dun obxecto matemático conflictivo, poden ser solucionadas recorrendo ao apoio sistemático das novas tecnoloxías (programas informáticos, ordenadores, pizarras dixitais...). Estamos interesados en saber a opinión do profesorado sobre a importancia real que os profesionais dan a esta circunstancia. Os dous ítems seguintes van nese sentido.

16. Como valoraría a importancia das novas tecnoloxías como apoio didáctico durante a instrucción do concepto de limite de funcións. ***(1-Pouco importante; 5- Moi importante)***

1 2 3 4 5

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ______

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
*Si. Porque ...*______

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ______

17. Como valoraría a información, formación ou domínio das posibilidades das novas tecnoloxías que posúe Vosté para seren aplicadas nas aulas no que respecta ao concepto de limite de funcións. *(1-Pouca información; 5- Moita información)*

1 2 3 4 5

Con respecto ao ítem anterior, por favor, responda ás seguintes preguntas, (rodeando a escollida cun círculo):

1. Está claramente tratada a cuestión nese ítem?

Si
Non Porque... ______

2. Eliminaría Vosté este ítem?

Non.
*Si. Porque ...*______

3. Considera adecuado este ítem ao obxecto de estudo?, (que está sinalado no parágrafo en cursiva anterior ao ítem)

Si
Non Porque... ______

Anexo II

Enquisa sobre o conceito de limite funcional

Por favor, responda as seguintes perguntas:

1. Xeral persoais

1.1 Sexo
1.1.1. Feminino
1.1.2. Masculino

1.2 Idade:
0.2.1. 20-30,
0.2.2. 31-40,
0.2.3. 41-50,
0.2.4. 51-60,
0.2.5. 60-70

1.3 Titulación:
1.3.1. Licenciado en Matemática,
1.3.2. Física,
1.3.3. Química,
1.3.4. Enxeñaria,
1.3.5. Outras....

1.4 Anos de docencia.

1.5 Matérias que imparte ou impartiu:
1.5.1. Matemática
1.5.2. Matemática aplicada às CC.SS.
1.5.3. Métodos estatísticos e numéricos.
1.5.4. Informática
1.5.5. Outras...... Cal?

A primeira pregunta pretende coñecer a opinión do profesorado sobre a necesidade de que o concepto de límite sexa introducido (ou non) nos niveis correspondentes á ESO e ao Bacharelato. Tamén nos interesan os motivos en que se fundamentan estas opinións.

2. Considera que os alunos/as de Ensino Médio deben ser formados na noción de Límite de funcións?

1.-I NA ESO

1-I.1 NON, porque é...

1.I.1.1 Concepto de difícil comprensión para a sua idade.
1.I.1.2 Inecesário para o Ensino obrigatório.
1.I.1.3 Imposíbel pola necesidade de tempo para a explicación.
1.I.1.4 Non figuran nos programas
1.I.1.5 Non figuran nos libros de texto
1.I.1.6 Outros:________________________________-
____
____

1.I.2 SI,

1.I.2.1 Porque están capacitados para a comprensión do concepto.
1.I.2.2 Só de forma intuitiva e con exemplos.
1.I.2.3 De forma "lúdica" e/ou interactiva, baseando-se en programas informáticos ou pizarras dixitais.
1.I.2.4 De forma concisa e renunciando as notacións.
1.I.2.5 Outros: ____________________________________
____
____

1.II NO BACHARELATO DE CIENCIAS

1.II.1 NON, porque é...

1.II.1.1 Conceito de difícil comprensión para a sua idade.
1.II.1.2 Inecesário para o Ensino universitário ou profisional
1.II.1.3 Imposíbel pola necesidade de tempo para a explicación.
1.II.1.4 Suficiente con que saiban calcular limites mecanicamente.
1.II.1.5 Menos importante dentro de un programa moi denso.
1.II.1.6 Outros: ________________________________
____
____

1.II.2 SI,

1.II.2.1 Porque están capacitados para a comprensión do concepto.
1.II.2.2 Só de forma intuitiva e com exemplos.
1.II.2.3 De forma "lúdica" e/ou interactiva, baseando-se en programas informáticos ou pizarras dixitais.
1.II.2.4 De forma concisa e renunciando as notacións.
1.II.2.5 De forma clara e precisa, con simboloxía adecuada (E d).
1.II.2.6 Outros: ____________________________________
____
____

1.III NO BACHARELATO DE CIENCIAS SOCIAIS (LETRAS)

1.III.1 NON, porque é...

1.III.1.1 Conceito de difícil comprensión para a sua idade.
1.III.1.2 Inecesário para o Ensino universitário ou profisional
1.III.1.3 Imposíbel pola necesidade de tempo para a explicación.
1.III.1.4 Suficiente con que saiban calcular limites mecanicamente.
1.III.1.5 Menos importante dentro de un programa moi denso.
1.III.1.6 Outros:________________________________-

1.III.2 SI,

1.III.2.1 Porque están capacitados para a comprensión do concepto.
1.III.2.2 Só de forma intuitiva e com exemplos.
1.III.2.3 De forma "lúdica" e/ou interactiva, baseando-se en programas informáticos ou pizarras dixitais.
1.III.2.4 De forma concisa e renunciando as notacións.
1.III.2.5 De forma clara e precisa, con simboloxía adecuada (E d).
1.III.2.5 Outros: ______________________________________
____

Interésanos coñecer a opinión do profesorado sobre o nivel en que a noción de límite dunha función debería ser introducida de forma natural, de acordo coa capacidade e formación previa do alumnado

2.- A que nível ou curso considera que se debería introducir o concepto de limite de funcións (independentemente do que indique os curricula oficiais)?

2.A NA SITUACIÓN ACTUAL.

2.A.1 No primiero ciclo da ESO.
2.A.2 En 3º de ESO.
2.A.3 En 4º de ESO
2.A.4 En 1º de Bacharelato de Ciencias
2.A.5 En 2º de Bacharelato de Ciencias
2.A.6 En 1º de Bacharelato de CC. Sociais
2.A.7 En 2º de Bacharelato de CC. Sociais.
2.A.8 Non se debería introducir no Ensino Medio.

2.B NA SITUACIÓN IDEAL.

2.B.1 No primiero ciclo da ESO.
2.B.2 En 3º de ESO.
2.B.3 En 4º de ESO
2.B.4 En 1º de Bacharelato de Ciencias
2.B.5 En 2º de Bacharelato de Ciencias
2.B.6 En 1º de Bacharelato de CC. Sociais
2.B.7 En 2º de Bacharelato de CC. Sociais
2.B.8 Non se debería introducir no Ensino Medio.

Entendemos por representacións matemáticas de un obxecto cada unha das imaxes ou ferramentas simbólicas que utilizamos para descrebé-lo. Así o concepto de limite de funcións podemos distinguir as representacións verbais ("É o valor ao que se aproxima a función cando nos aproximamos a un valor da orixe determinado"); Numérico (p.ex. A traves de táboas de valores), Gráfico ("usando as gráficas") ou simbólico ("Con símbolos matemáticos como podem ser epsilon e delta").

3. Entre as distintas representacións do obxecto matemático "limite de unha función nun punto" (Castro e Castro 1997) cal considera adecuada para o <u>nivel de ESO</u>? *(Poden-se escoller várias)*:

3.A NA SITUACIÓN ACTUAL

3.A.1 Verbal
3.A.2 Numérico (Tabular)
3.A.3 Gráfico.
3.A.3.1 Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
3.A.3.2 Con entornos
3.A.3.3 Outros gráficos:_______
____
____
3.A.4 Simbólico.
3.A.5 Outra (s): ________________________
____

3.B NA SITUACIÓN IDEAL

3.B.1 Verbal
3.B.2 Numérico (Tabular)
3.B.3 Gráfico.
3.B.3.1 Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
3.B.3.2 Con entornos
3.B.4 Simbólico.

3.B.5 Outra (s): ________________________
____

Entendemos por representacións matemáticas de un obxecto cada unha das imaxes simbólicas que utilizamos para descrebé-lo. Así o concepto de limite de funcións podemos distinguir as representacións verbais ("É o valor ao que se aproxima a función cando nos aproximamos a un valor da orixe determinado"); Numérico (p.ex. A traves de táboas de valores), Gráfico ("usando as gráficas") ou simbólico ("Con símbolos matemáticos como epsilon e delta").

4. Entre as distintas representacións do obxecto matemático "limite de unha función nun punto" (Castro e Castro 1997) cal considera adecuada para o <u>nivel de Bacharelato</u>? *(Poden-se escolher várias)*:

4.A NA SITUACIÓN ACTUAL

4.A.1 Verbal
4.A.2 Numérico (Tabular)

4.A.3 Gráfico.

	4.A.3.1	Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
	4.A.3.2	Con entornos
	4.A.3.3	Outros gráficos:_______
		____________________
		____________________

4.A.4 Simbólico.
4.A.5 Outra (s): __________________________

4.B NA SITUACIÓN IDEAL

4.B.1 Verbal
4.B.2 Numérico (Tabular)
4.B.3 Gráfico.

	4.B.3.1	Con sucesións de x_i e $f(x_i)$
	4.B.3.2	Con entornos

4.B.4 Simbólico.

4.B.5 Outra (s): __________________________
____

Brousseau distingue tres tipos de obstáculos na aprendizaxe dun concepto segundo a sua orixe: obstáculos de orixe ontoxénica (proveñen das limitacións do próprio suxeito), obstáculos de orixe metodolóxica (dependen do plantexamento educativo) e, obstáculos de orixe epistemolóxica (próprios do concepto, da sua xénese). Queremos coñecer a opinión do profesorado sobre este aspecto.

5. **Como valoraría a importancia deses obstáculos no que respecta ao concepto de limite de funcións.** ***(1-Pouco importante; 5- Moi importante)***

5.1	Ontoxénica (do propio suxeito) :	1	2	3	4	5
5.2	Metodolóxica :	1	2	3	4	5
5.3	Epistemolóxica (do concepto en sí):	1	2	3	4	5

Dada a complexidade do concepto "límite dunha función nun punto", é moi frecuente que a relación entre o esforzo investido na instrución e a satisfacción polo resultado obtido, non sexa a esperada. Desexamos comprobar tal cuestión xa que, de ser certa, levaríanos a concluír unha necesaria mellora no campo da metodoloxía ou nos recursos da acción educativa.

6. **Como valora o nível de satisfacción respecto o resultado da acción didáctica que realiza no tema en cuestión, comparando ésta con o "esforzo" pedagóxico investido?** ***(1-Pouco satisfeito; 5- Moi satisfeito)***

1 2 3 4 5

Algúns especialistas da didáctica da matemática, consideran a posibilidade de abordar o concepto de límite dunha forma xeral, como obxecto matemático de estudo específico; abarcaríase así ao mesmo tempo os campos de límites de sucesións e límites de funcións. Trataríase en certo sentido dun camiño desde a xereralidad á particularidade. Queremos saber que opinan a este respecto, baseándose na súa experiencia cotiá, os profesores e profesoras de ensino secundario.

7. Relación entre limite de sucesión e límite de función: Como considera que deben ser tratados os conceitos de limites de sucesión e limites de funcións?

7.A NA SITUACIÓN ACTUAL

7.A.1 Deben relacionar-se. O Limite de sucesión debe ser prévio
7.A.2 Deben relacionar-se. O límite de funcións previamente
7.A.3 Deben desenvolver-se ao mesmo tempo, como concepto geral.
7.A.4 Deben ser tratados por separado, por...
7.A.4.1 Ser demasiado complexos os conceitos.
7.A.4.2 Deben corresponder a niveis ou cursos distintos.
7.A.4.3 Poden levar a confusión entre eles.
7.A.4.4 Outros: ________________________________
____
____

7.B NA SITUACIÓN IDEAL

7.B.1 Deben relacionar-se. O Limite de sucesión debe ser prévio
7.B.2 Deben relacionar-se. O límite de funcións previamente
7.B.3 Deben desenvolver-se ao mesmo tempo, como concepto geral.
7.B.4 Deben ser tratados por separado, por...
7.B.4.1 Ser demasiado complexos os conceitos.
7.B.4.2 Deben corresponder a niveis ou cursos distintos.
7.B.4.3 Poden levar a confusión entre eles.
7.B.4.4 Outros: ________________________________
____

Na Institución escolar, constituida polas persoas involucradas en determinadas situacións didácticas problemáticas, as prácticas sociais son compartidas, con rasgos particulares e xeralmente condicionadas polos instrumentos disponíbeis na mesma, as suas regras e o seu funcionamento.

8. Cais son os instrumentos que usualmente utiliza para conseguir a instrucción educativa no a respecto do objecto matemático "Limite dunha función"?

8.A NA SITUACIÓN ACTUAL

8.A.1 Xiz branca.
8.A.2 Xiz de cores.
8.A.3 Libro de Texto.
8.A.4 Caderno de actividades do alumnado.
8.A.5 Pizarra / Encerado (cadro)

8.A.6	Caderno de actividades elaborada por editoras.		
8.A.7	Calculadora científica.		
8.A.8	Calculadora científica programábel.		
8.A.9	Calculadora gráfica. (Ex: Tipo Class Pad)		
8.A.10	DVD.		
8.A.11	Pizarra digital		
8.A.12	Proxector.		
8.A.13	Presentacións (Ex: tipo Power Point)		
		8.A.13.1	De elaboración própria
		8.A.13.2	Elaboración allea.
8.A.14	Aula de informáticas		
8.A.15	Programas informáticos		
		8.A.15.1	MatLab
		8.A.15.2	Follas de cálculo.
		8.A.15.3	Descartes
		8.A.15.4	Math Cars
			Outros: ____________________
			____________________

8.B NA SITUACIÓN IDEAL

8.B.1	Xiz branca.		
8.B.2	Xiz de cores.		
8.B.3	Libro de Texto.		
8.B.4	Caderno de actividades do alumnado.		
8.B.5	Encerado (cadro)		
8.B.6	Caderno de actividades elaborada por editoras.		
8.B.7	Calculadora científica.		
8.B.8	Calculadora científica programábel.		
8.B.9	Calculadora gráfica. (Ex: Tipo Class Pad)		
8.B.10	DVD.		
8.B.11	Pizarra digital		
8.B.12	Proxector.		
8.B.13	Presentacións (Ex: tipo Power Point)		
		8.B.13.1	De elaboración própria
		8.B.13.2	Elaboración allea.
8.B.14	Aula de informáticas		
8.B.15	Programas informáticos		
		8.B.15.1	MatLab
		8.B.15.2	Follas de cálculo.
		8.B.15.3	Descartes
		8.B.15.4	Math Cars
			Outros: ____________________
			____________________

Existe unha opinión xeneralizada de que o libro de texto na materia de matemática apenas resulta útil. En moitos casos, -afírmase-, o profesorado só o utiliza para marcar a realización de exercicios por parte do alumnado. En casos como o de "concepto de límite dunha función", de maior complexidade , o recurso ao libro de texto parécenos menos habitual, si cabe. Queremos confirmalo.

9. Utiliza normalmente o libro de texto, no proceso de ensino-aprendizaxe, en particular para o tema de limites de funcións?

9.A NA SITUACIÓN ACTUAL

9.A.1 Na ESO:
- 9.A.1.1 Si
  - 9.A.1.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.A.1.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.A.1.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.A.1.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.A.1.2 Non

9.A.2 No Bacharelato:
- 9.A.2.1 Si
  - 9.A.2.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.A.2.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.A.2.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.A.2.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.A.2.2 Non

9.B NA SITUACIÓN IDEAL

9.B.1 Na ESO:
- 9.B.1.1 Si
  - 9.B.1.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.B.1.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.B.1.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.B.1.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.B.1.2 Non

9.B.2 No Bacharelato:
- 9.B.2.1 Si
  - 9.B.2.1.1 Para consulta do alunado
  - 9.B.2.1.2 Para referèncias de conceitos do alunado
  - 9.B.2.1.3 Como complemento didáctico na casa
  - 9.B.2.1.4 Principalmente para os exercícios e problemas.
- 9.B.2.2 Non

Análise didáctica: Máis aló de teorías pedagóxicas, cursos de formación e liñas didácticas, o profesorado manexa unha serie de estratexias e ferramentas que serven de apoio na aprehensión do concepto. Interésanos coñecer algúns aspectos destas estratexias.

10. **Por favor, avalie as seguintes características ou estratexias didáctico-cognitivas en relación á sua práctica docente habitual no tema de "limites de funcións:** ***(1-Pouco importante; 5-Moi importante):***

10.A NA SITUACIÓN ACTUAL

10.A.1 A motivación do alumnado.

1 2 3 4 5

10.A.2 Apoio na história das matemáticas e nas suas aplicacións.

1 2 3 4 5

10.A.3 Representación intuitiva dos conceptos prévia ao seu desenvolvimento formal.

1 2 3 4 5

10.A.4 Realización de cantidade e variedade de exercícios e problemas, de diferentes tipos, por parte dos alunos.

1 2 3 4 5

10.A.5 Conexión coa realidade, a naturaleza, a vida diária e con outras ciencias.

1 2 3 4 5

10.A.6 Enfase nos procedimentos de resolución de problemas.

1 2 3 4 5

10.A.7 Incorporación de apoios didácticos (resumos, calculadora, ordenador, pizarra dixital...).

1 2 3 4 5

10.A.8 Utilización de anécdotas, feitos curiosos ou chamativos relacionados co tema.

1 2 3 4 5

10.B NA SITUACIÓN IDEAL

10.B.1 A motivación do alumnado.

1 2 3 4 5

10.B.2 Apoio na história das matemáticas e nas suas aplicacións.

1 2 3 4 5

10.B.3 Representación intuitiva dos conceptos prévia ao seu desenvolvimento formal.

1 2 3 4 5

10.B.4 Realización de cantidade e variedade de exercícios e problemas, de diferentes tipos, por parte dos alunos.

1 2 3 4 5

10.B.5 Conexión coa realidade, a naturaleza, a vida diária e con outras ciencias.

1 2 3 4 5

10.B.6 Enfase nos procedimentos de resolución de problemas.

1 2 3 4 5

10.B.7 Incorporación de apoios didácticos (resumos, calculadora, ordenador, pizarra dixital...).

1 2 3 4 5

10.B.8 Utilización de anécdotas, feitos curiosos ou chamativos relacionados co tema.

1 2 3 4 5

No seguinte ítem propoñémonos coñecer a opinión do profesorado, sempre baseado na súa práctica docente, día a día nas aulas, sobre o rigor *(entendido en términos de precisión formal, ligada á exactitude e á expresión linguaxe matemática) que debe ser empregado na comprensión por parte do alumnado do concepto límite dunha función. Existe relación entre o rigor formal e a aprehensión do concepto?*

11. Do rigor da definición: Como considera que debe ser introducida a definición de "limite de unha función nun punto" ?

11.A NA SITUACIÓN ACTUAL

11.A.1 Non debe ser introducida
11.A.2 Verbalmente (" Punto ao que se achega a función....")
11.A.3 A través de infinitésimos.
11.A.4 Topolóxicamente a través de contornos.
11.A.5 Con táboas de valores; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.A.5 Con gráficas; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.A.6 Metricamente a traves de Epsilon e Delta.
11.A.7 Outro: ____
____

11.B NA SITUACIÓN IDEAL

11.B.1 Non debe ser introducida
11.B.2 Verbalmente (" Punto ao que se achega a función....")
11.B.3 A través de infinitésimos.
11.B.4 Topolóxicamente a través de contornos.
11.B.5 Con táboas de valores; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.B.5 Con gráficas; a través de sucesións (de x_i e $f(x_i)$)
11.B.6 Metricamente a través de Epsilon e Delta.
11.B.7 Outro: ____
____

A idea de infinito (límite infinito ou límites no infinito) resulta históricamente complexa . Achegarse ao infinito, dunha forma mínimamente coherente e comprensible para o alumnado é un dos problemas que xera máis debate desde o punto de vista didáctico. O profesorado atópase inmerso no proceso de ensino deste concepto e queremos coñecer cal é o seu punto de vista baseado en experiencia docente. A intención das preguntas 12 e13 é respondernos á pregunta concreta de como se introduce, na práctica, nas aulas galegas este concepto?

12. Como considera que debe ser introducida a definición de "limite de unha función NO INFINITO " ?

12.A NA SITUACIÓN ACTUAL

12.A.1 Non debe ser introducida.
12.A.2 Verbalmente (" Punto ao que se achega a función ao fazer cada vez mais grande (pequeño) o x)
12.A.3 Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
12.A.4 Topolóxicamente a través de contornos e cotas da variábel x.
12.A.5 Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$.
12.A.6 Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
12.A.7 Metricamente a traves de Epsilon e K.
12.A.8 Outro: ______________________________________

12.B NA SITUACIÓN IDEAL

12.B.1 Non debe ser introducida.
12.B.2 Verbalmente (" Punto ao que se achega a función ao fazer cada vez mais grande (pequeño) o x)
12.B.3 Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
12.B.4 Topolóxicamente a través de contornos e cotas da variábel x.
12.B.5 Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
12.B.6 Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes ao infinito e de $f(x_i)$.
12.B.7 Metricamente a traves de Epsilon e K.
12.B.8 Outro: ____

13. Como considera que debe ser introducida a definición de "LIMITE INFINITO de unha función nun punto a" ?

13.A NA SITUACIÓN ACTUAL

13.A.1 Non debe ser introducida.
13.A.2 Afirmando que é a "non existéncia" de límite, por non ser un nº real
13.A.2 Verbalmente (" A función crece (decrece) indefinidamente cando a variábel se achega ao punto)
13.A.3 Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
13.A.4 Topolóxicamente a través de contornos de **a** e cotas de f(x).
13.A.5 Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$.
13.A.6 Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.
13.A.7 Metricamente a traves de K e delta.
13.A.8 Outro: ____

13.B NA SITUACIÓN ACTUAL

13.B.1 Non debe ser introducida.
13.B.2 Afirmando que é a "non existéncia" de límite, por non ser un nº real
13.B.2 Verbalmente (" A función crece (decrece) indefinidamente cando a variábel se achega ao punto)
13.B.3 Definindo antes R completa (R U Inf. U -inf) e actuando co infinito como "un nº real"
13.B.4 Topolóxicamente a través de contornos de **a** e cotas de f(x).
13.B.5 Con táboas de valores; través de sucesións de x_i tendentes a **a**

e de $f(x_i)$.

13.B.6 Con gráficas; través de sucesións de x_i tendentes a **a** e de $f(x_i)$. Posíbeis asíntotas.

13.B.7 Metricamente a traves de K e delta.

13.B.8 Outro: ____

No momento de abordar o proceso de instrucción pedagóxica en temas que sabemos complexos para o alumnado, o profesorado acostuma a pensar en referentes que poden axudar a focalizar o proceso para conseguir unha maior comprensión por parte do alumnado.

14. **Por favor, avalíe de 1 a 5 a importancia en que considera están presentes, no seu caso, os seguintes referentes:** ***(1-pouco presente; 5-moi presente)***

14.1 A forma en que mo explicaron no Bacharelato.

1 2 3 4 5

14.2 As miñas propias lacunas ou dificultades cando mo ensinaron no bacharelato.

1 2 3 4 5

14.3 O aprendido nos meus estudos universitários.

1 2 3 4 5

14.4 O que aparece nos libros de texto.

1 2 3 4 5

14.5 As dificultades, reaccións e resultados no alumnado en anos precedentes.

1 2 3 4 5

14.6 O aprendido en cursos de formación e actualización do profesorado.

1 2 3 4 5

14.7 A aportación da informática e das novas tecnoloxías

1 2 3 4 5

14.8 A leitura e investigación persoal sobre o tema.

1 2 3 4 5

Resulta frecuente a crenza de que moitos dos problemas e obstáculos xerados na instrución dun obxecto matemático conflictivo, poden ser solucionadas recorrendo ao apoio sistemático das novas tecnoloxías (programas informáticos, ordenadores, pizarras dixitais...). Estamos interesados en saber a opinión do profesorado sobre a importancia real que os profesionais dan a esta circunstancia. Os dous ítems seguintes van nese sentido.

15.* Como valoraría a importancia das novas tecnoloxías como apoio didáctico durante a instrucción do concepto de limite de funcións.** ***(1-Pouco importante; 5- Moi importante)

1 2 3 4 5

16. Como valoraría a información, formación ou domínio das posibilidades das novas tecnoloxías que posúe Vosté para seren aplicadas nas aulas no que respecta ao concepto de limite de funcións. (1-Pouca información; 5- Moita información)

1 2 3 4 5

Anexo III

Estudo de correlação de variáveis

ESTUDO DE CORRELAÇÕES ENTRE A VARIÁVEL *ANOS DE DOCÊNCIA* E OUTRAS VARIÁVEIS

1) ANOS DE DOCÊNCIA – IMPORTÂNCIA DAS TICS

Estadísticos descriptivos

	Media	Desviación estándar	N
AnosDoc	18,11	9,576	112
ImportTicsLim	4,12	1,030	106

Correlaciones

		AnosDoc	ImportTicsLim
AnosDoc	Correlación de Pearson	1	-,293**
	Sig. (bilateral)		,002
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	10178,714	-293,094
	Covariância	91,700	-2,791
	N	112	106
ImportTicsLim	Correlación de Pearson	-,293**	1
	Sig. (bilateral)	,002	
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	-293,094	111,406
	Covariância	-2,791	1,061
	N	106	106

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (2 colas).

NONPAR CORR /VARIABLES=AnosDoc ImportTicsLim /PRINT=BOTH TWOTAIL NOSIG /MISSING=PAIRWISE.

Correlaciones no paramétricas

Correlaciones

			AnosDoc	ImportTicsLim
tau_b de Kendall	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,221**
		Sig. (bilateral)	.	,004
		N	112	106
	ImportTicsLim	Coeficiente de correlación	-,221**	1,000
		Sig. (bilateral)	,004	.
		N	106	106
Rho de Spearman	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,283**
		Sig. (bilateral)	.	,003
		N	112	106
	ImportTicsLim	Coeficiente de correlación	-,283**	1,000
		Sig. (bilateral)	,003	.
		N	106	106

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (2 colas).

2) **ANOS DE DOCÊNCIA – USA CADERNO DO ALUNO**

CORRELATIONS /VARIABLES=AnosDoc UsaCAd /PRINT=TWOTAIL NOSIG
/STATISTICS DESCRIPTIVES XPROD /MISSING=PAIRWISE.

Correlaciones

Estadísticos descriptivos

	Media	Desviación estándar	N
AnosDoc	18,11	9,576	112
UsaCAd	,44	,498	112

Correlaciones

		AnosDoc	UsaCAd
AnosDoc	Correlación de Pearson	1	-,191*
	Sig. (bilateral)		,043
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	10178,714	-101,250
	Covariância	91,700	-,912
	N	112	112
UsaCAd	Correlación de Pearson	-,191*	1
	Sig. (bilateral)	,043	
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	-101,250	27,563
	Covariância	-,912	,248
	N	112	112

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (2 colas).

NONPAR CORR /VARIABLES=AnosDoc UsaCAd
/PRINT=BOTH TWOTAIL NOSIG /MISSING=PAIRWISE.

Correlaciones no paramétricas

Correlaciones

			AnosDoc	UsaCAd
tau_b de Kendall	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,155*
		Sig. (bilateral)	.	,050
		N	112	112
	UsaCAd	Coeficiente de correlación	-,155*	1,000
		Sig. (bilateral)	,050	.
		N	112	112
Rho de Spearman	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,186*
		Sig. (bilateral)	.	,049
		N	112	112
	UsaCAd	Coeficiente de correlación	-,186*	1,000
		Sig. (bilateral)	,049	.
		N	112	112

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (2 colas).

3) **ANOS DE DOCÊNCIA – ESTRATEGIA MOTIVADORA DO ALUNO**

CORRELATIONS /VARIABLES=AnosDoc EstrMotivAlun /PRINT=TWOTAIL NOSIG /STATISTICS DESCRIPTIVES XPROD /MISSING=PAIRWISE.

Estadísticos descriptivos

	Media	Desviación estándar	N
AnosDoc	18,11	9,576	112
EstrMotivAlun	4,00	1,117	110

Correlaciones

		AnosDoc	EstrMotivAlun
AnosDoc	Correlación de Pearson	1	-,194*
	Sig. (bilateral)		,042
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	10178,714	-226,000
	Covariância	91,700	-2,073
	N	112	110
EstrMotivAlun	Correlación de Pearson	-,194*	1
	Sig. (bilateral)	,042	
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	-226,000	136,000
	Covariância	-2,073	1,248
	N	110	110

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (2 colas).

NONPAR CORR /VARIABLES=AnosDoc EstrMotivAlun/PRINT=BOTH TWOTAIL NOSIG /MISSING=PAIRWISE.

Correlaciones no paramétricas

Correlaciones

			AnosDoc	EstrMotivAlun
tau_b de Kendall	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,161*
		Sig. (bilateral)	.	,029
		N	112	110
	EstrMotivAlun	Coeficiente de correlación	-,161*	1,000
		Sig. (bilateral)	,029	.
		N	110	110
Rho de Spearman	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,214*
		Sig. (bilateral)	.	,025
		N	112	110
	EstrMotivAlun	Coeficiente de correlación	-,214*	1,000
		Sig. (bilateral)	,025	.
		N	110	110

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (2 colas).

Correlaciones no paramétricas

Correlaciones

			AnosDoc	EstrMotivAlun
tau_b de Kendall	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,161*
		Sig. (bilateral)	.	,029
		N	112	110
	EstrMotivAlun	Coeficiente de correlación	-,161*	1,000
		Sig. (bilateral)	,029	.
		N	110	110
Rho de Spearman	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,214*
		Sig. (bilateral)	.	,025
		N	112	110
	EstrMotivAlun	Coeficiente de correlación	-,214*	1,000
		Sig. (bilateral)	,025	.
		N	110	110

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (2 colas).

5) ANOS DE DOCÊNCIA – REFERENTE COMO FOI EXPLICADO NO BACHARELATO

CORRELATIONS /VARIABLES=AnosDoc RfFormExplBac /PRINT=TWOTAIL NOSIG /STATISTICS DESCRIPTIVES XPRO /MISSING=PAIRWISE.

Correlaciones

Estadísticos descriptivos

	Media	Desviación estándar	N
AnosDoc	18,11	9,576	112
RfFormExplBac	2,57	1,187	106

Correlaciones

		AnosDoc	RfFormExplBac
AnosDoc	Correlación de Pearson	1	-,263**
	Sig. (bilateral)		,006
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	10178,714	-304,075
	Covariância	91,700	-2,896
	N	112	106
RfFormExplBac	Correlación de Pearson	-,263**	1
	Sig. (bilateral)	,006	
	Suma de cuadrados y productos vectoriales	-304,075	148,038
	Covariância	-2,896	1,410
	N	106	106

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (2 colas).

NONPAR CORR /VARIABLES=AnosDoc RfFormExplBac
/PRINT=BOTH TWOTAIL NOSIG /MISSING=PAIRWISE.

Correlaciones no paramétricas

Correlaciones

			AnosDoc	RfFormExplBac
tau_b de Kendall	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,224**
		Sig. (bilateral)	.	,002
		N	112	106
	RfFormExplBac	Coeficiente de correlación	-,224**	1,000
		Sig. (bilateral)	,002	.
		N	106	106
Rho de Spearman	AnosDoc	Coeficiente de correlación	1,000	-,295**
		Sig. (bilateral)	.	,002
		N	112	106
	RfFormExplBac	Coeficiente de correlación	-,295**	1,000
		Sig. (bilateral)	,002	.
		N	106	106

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (2 colas).

Anexo IV

Resumo em espanhol

RESUMEN

Este trabajo contiene, esencialmente, la descripción, aplicación y valoración de una encuesta diseñada para que profesores y profesoras de Matemáticas de enseñanza secundaria y Bachillerato de Galicia aporten información respecto a la instrucción que realizan del concepto de 'límite funcional'. En él se recogen las opiniones de los profesionales de la enseñanza respecto a diversos aspectos relativos al concepto de límite funcional, como pueden ser el nivel adecuado para su introducción, el rigor de la definición, las representaciones más utilizadas, los instrumentos, recursos y estrategias predominantes.

Comenzamos con una introducción general donde se recogen todos apartados de los que consta. Empezamos planteando el problema de investigación y las preguntas a las queremos dar respuesta: ¿cómo considera el profesorado que debe ser impartido el concepto de límite funcional? ¿Qué importancia tiene, en su opinión, el marco de referencia en el momento de la instrucción del concepto? ¿Cómo podemos agrupar al profesorado atendiendo a referentes, materiales y estrategias utilizadas en la instrucción?

En cuanto a la primera pregunta de investigación, que se presenta de una forma genérica, será concretizada en el estudio abarcando diversos puntos que nos puedan colocar en condiciones de conocer la respuesta. Así nos preguntamos sobre el nivel adecuado (curso) en que se considera que el concepto debe ser impartido, sobre las representaciones que el profesor considera más adecuadas en la instrucción, la importancia que da a los obstáculos inherentes al propio concepto, la satisfacción de los resultados obtenidos, los instrumentos utilizados, los referentes del profesor, el grado de utilización de las nuevas tecnologías en el proceso, etc. Por otra parte, a través de las respuestas de los entrevistados y de manera transversal, se realiza un primer análisis de la importancia que tendría, en la aplicación de los aspectos anteriormente citados, la modificación del actual marco institucional en el sentido de mejorarlo acercándose a un marco ideal, donde las restricciones a la acción educativa fuesen prácticamente inexistentes. Para poder obtener resultados ofrecemos en muchas de las cuestiones de la encuesta la posibilidad de que el profesor entrevistado responda atendiendo a dos situaciones concretas: por una parte centrándose en la *situación actual* de su clase, su entorno, su programa, su horario, su ratio... Por otra, suponiendo una situación alternativa sin condicionamientos restrictivos. Esto es, pensando en que el concepto podría ser explicado en un *marco institucional ideal* sin restricciones donde el profesor tuviese acceso a todas las posibilidades, material, tiempo o ratio ideales.

Para todo este estudio era necesaria la elaboración y aplicación de la encuesta. En el momento de la aplicación eran 219 los centros públicos con ESO y Bachillerato en Galicia y para la elaboración de la muestra, estos fueron categorizados atendiendo a la división provincial, a los núcleos de población importantes, ciudades y resto de *vilas*. Finalmente fueron 32 los centros de enseñanza escogidos en los que participaron 112 profesores y profesoras.

Se elaboró un cuestionario piloto, que fue revisado y posteriormente presentado a un pequeño grupo de profesores y, posteriormente, a un comité de expertos. Con las modificaciones y sugerencias aportadas se procedió a la elaboración de las categorías y su validación.

Finalmente se redactó el cuestionario definitivo se convirtió a su versión ON LINE y se presentó en la red, con acceso exclusivo a los entrevistados. El contacto con los departamentos de matemáticas de los centros que participaron en la encuesta constituyó el siguiente paso realizado, con el fin de dar las instrucciones pertinentes al profesorado entrevistado. El cuestionario final consta de 16 preguntas de todo tipo, relativa a la introducción del concepto, a las representaciones utilizadas, a las estrategias de instrucción, a los referentes reflexivos, a los instrumentos y a la formación y utilización de las nuevas tecnologías.

Seguidamente colocamos de forma sintética en este resumen las 16 preguntas finales, que podrán ser consultadas en su totalidad en el ANEXO II:

1. ¿Considera que los alumnos y alumnas de enseñanza secundaria deben ser formados en la noción de límite funcional?

2. Independientemente de lo indicado en el currículo oficial, ¿a qué nivel o curso considera que debería ser introducido el concepto de Límite Funcional?

3. Entre las distintas representaciones del objeto matemático 'límite de una función en un punto', ¿cuál considera adecuado para el nivel de la ESO?

4. Entre las distintas representaciones del objeto matemático 'límite de una función en un punto', ¿cuál considera adecuado para el nivel de Bachillerato?

5. ¿Cómo valoraría la importancia de los obstáculos de origen ontogénico, metodológico o epistemológico a respecto de la instrucción del concepto de Límite Funcional?

6. ¿Cómo valora el nivel de satisfacción a respecto del resultado de la acción didáctica, comparándolo con el esfuerzo pedagógico invertido?

7. ¿Cómo considera que deben ser tratados los conceptos de 'límites de sucesiones' y 'límites de funciones'?

8. ¿Cuáles son los instrumentos que utiliza en la instrucción del concepto Limite Funcional? (En anexo II)

9. ¿Utiliza normalmente libro de texto en el proceso de instrucción del concepto?

10. Evalúe las siguientes características o estrategias didáctico-cognitivas en relación a su práctica docente habitual en la instrucción del concepto de Límite Funcional. (En anexo II)

11. A respecto del rigor de la definición, ¿cómo considera que debe ser introducida la definición de "Límite de una función en un punto"? (En anexo II)

12. A respecto del rigor de la definición, ¿cómo considera que debe ser introducida la definición de "Límite de una función en el infinito"? (En anexo II)

13. A respecto del rigor de la definición, ¿cómo considera que debe ser introducida la definición de "Límite infinito de una función"? (En anexo II)

14. Evalúe de 1 a 5 la importancia en que considera están presentes los siguientes referentes en el momento de la instrucción. (En anexo II)

15. ¿Cómo valoraría la importancia de las nuevas tecnologías como apoyo didáctico durante la instrucción del concepto de límite funcional?

16. ¿Cómo valoraría la información, formación y/o dominio de las posibilidades de las nuevas tecnologías para ser aplicadas en la instrucción del concepto de Límite Funcional?

En el capítulo II del trabajo, abordamos el concepto de Límite Funcional tanto desde el punto de vista de su evolución histórica, como en lo relativo a su evolución didáctica. En esta última parte hacemos hincapié en su tratamiento en los últimos decenios del sistema educativo español.

Relativamente a su evolución histórica, seguimos una secuencia lineal, desde Eudoxo de Cnido y Arquímedes hasta las definiciones del siglo XX en términos de épsilon y delta o topológicamente a través de entornos. Incluimos en el trabajo una gráfica lineal que nos muestra de forma más visual esta evolución.

En lo que respecta a la evolución didáctica del concepto, que tratamos en el punto II.3, distinguimos, siguiendo fundamentalmente a Sierra, González y López (1999) en su estudio de los libros de texto españoles sobre el concepto, tres períodos fundamentales:

1. El período comprendido entre 1940 y 1967, que incluye los planes de estudio del 1938 y 1956.

2. El período desde 1966 a 1975, con la introducción de la que sería denominada 'matemática moderna' y que culminaría en la implantación del BUP y COU en 1975.

3. El período comprendido entre 1975 y 1995, que termina con la implantación de la LOGSE.

Aunque los autores terminan aquí su estudio, las ideas marcadas por el período anterior continúan en la entrada del siglo XXI y nosotros incluimos este periodo.

Construimos tablas que recogen por una parte un ejemplo de definición del concepto de Límite Funcional correspondientes a los períodos antes señalados (Tabela II.1 p. 37): Años 40-67, 67-75 (matemática moderna), 75-95 (BUP-COU) y LOGSE-ACTUALIDAD.

También consideramos de interés el estudio, resumido también en una tabla (Tabela II.2, p.39), de la evolución didáctica del concepto de limite funcional en los últimos 70 años, donde, tomando como base los períodos señalados anteriormente, se indica, la ley en vigor, la edad o curso de introducción del concepto, el rigor, el tipo de definición que se utiliza, las teoría de enseñanza-aprendizaje en las que se basa y la fenomenología empleada.

Una última parte de este capítulo está destinada a indicar el marco en el que se introduce el concepto dentro del currículo oficial de Enseñanzas Medias de Galicia. En este aspecto resaltamos el Decreto 126/2008, que recoge los contenidos, objetivos y criterios de evaluación del concepto en cada uno de los cursos de Bachillerato, tanto en las llamadas 'matemáticas de ciencias' como en las aplicadas a las ciencias sociales. Este decreto fue el que determinó totalmente las programaciones respectivas de las materias impartidas en el bachillerato en los últimos años en Galicia, concretamente hasta el año 2015. En este año fue sustituido por el Decreto 86/2015, que analizamos también en lo que se refiere a los cambios introducidos a respecto del decreto anterior (Tabela II.4 y II.5, p.46-48). Antes de comenzar el capítulo III hacemos referencia a los obstáculos epistemológicos y a las imágenes conceptuales, ya que forman parte importante de la batería de preguntas formuladas al profesorado entrevistado. También incluimos una tabla con múltiples investigaciones sobre el concepto de Limite Funcional.

El capítulo III está dedicado al estudio del conocimiento profesional y las creencias del profesor de matemáticas, dado que estos aspectos serán de importancia mayor en nuestro trabajo. En un campo tremendamente estudiado y que todavía incita al debate, hacemos referencia a los diversos modelos que se presentan para organizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

A partir de Shulman 81986) y Ball (2008) el conocimiento específico del profesor de matemáticas, diferenciado incluso en el campo de la didáctica de la matemática, comienza a ser resaltado e investigado y admitido. A partir de ahí el modelo MKT (Hill, Ball y Schilling (2008), implementado en cierta forma al modelo MTSK, propuesto por el Grupo SIDM, aporta una clasificación de los distintos componentes de este conocimiento, incluyendo la organización interna del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

Paralelamente a este modelo surge el Modelo CDM (Godino, 2009) utilizando como marco teórico el enfoque ontosemiótico del que el autor es especialista. Lógicamente hacemos también referencia a este modelo de organización del conocimiento del profesor.

En este mismo capítulo, ya en el aparto de creencias y concepciones del profesorado, nos detenemos a diferenciarlas siguiendo a diversos autores -Rokeach, (1968) o Vicente (1995)- o a resaltar su importancia en la acción pedagógica del profesor y en el proceso de aprendizaje del alumno. Así desde el punto de vista del alumno, las referencias que tienen de las matemáticas, su capacidad de aprender, su utilidad, será en parte resultado de los mensajes de las concepciones y creencias que aporta el profesor. (Contreras, 2009). Incluimos en este apartado varias tablas de elaboración propia y/o adaptadas a partir de estudios y artículos de diversos autores relacionados con el conocimiento profesional, con las llamadas 'Tendencias Didácticas', con las competencias del profesor, con las diversas investigaciones sobre las creencias del docente, sobre sus líneas de investigación, o los criterios para clasificar estas investigaciones (pp.72-77).

La práctica docente y la utilización de la reflexión en la práctica ocupa el siguiente punto de análisis de nuestro trabajo. La referencia a Van Manen (1997) y a sus diferentes tipos de reflexión es aquí obligada. También hacemos referencia sintéticamente a la importancia del material usado por el profesorado, por ser objeto de nuestro estudio, y a la utilización de las nuevas tecnologías. Así quedará patente que la tecnología y el software informático pueden ser usados de forma efectiva para favorecer la intuición, visualización y el conocimiento matemático, por lo que la pertinencia en el campo del concepto de Límite Funcional resulta evidente. Nos detendremos también en referenciar los llamados 'Programas de Software Dinámico ‘y su potencial importancia en la instrucción y en la preparación de procesos didácticos y de investigación.

El capítulo IV está dedicado al diseño de la investigación y a la metodología. Ya indicamos en este resumen anteriormente el proceso de elección de muestra y cuestionario, que es detallada en este apartado. También son incorporadas mínimas referencias teóricas a los instrumentos de análisis que serán utilizados para la obtención de los resultados: Análisis descriptivo, para ordenar, agrupar e estudiar los resultados del cuestionario y multivariante (factorial y de conglomerados, principalmente) para estudiar agrupaciones o clasificaciones realizadas a partir de las respuestas obtenidas relacionadas con aspectos diversos de la instrucción del concepto objeto de debate.

En el capítulo V detallamos y discutimos los resultados del estudio, y lo hacemos ítem a ítem. Así por ejemplo, podemos resaltar sintéticamente, en este resumen, los siguientes:

1. El 57% del profesorado indica que incluso en la ESO se podría formar al alumno en el concepto de límite funcional, aunque obligatoriamente debe hacerse en el bachillerato (99%).

2. En condiciones ideales la mitad del profesorado considera que se podría introducir el concepto en 4º ESO y, en tal caso, esta introducción sería apenas a través de representaciones verbal o numérica (tablas).

3. En el bachillerato las representaciones preferidas son las tabulares y gráficas, aunque en una hipotética situación ideal, sin restricciones, un 61% utilizaría también la representación simbólica (a través de épsilon y delta).

4. El obstáculo metodológico del concepto de Límite Funcional aparece significativamente señalado como el de mayor importancia para el profesorado.

5. Nos es significativamente alto el nivel de satisfacción del profesor con el resultado obtenido después de la instrucción del concepto.

6. La mayoría del profesorado considera preferible introducir previamente el concepto de Límite para sucesiones antes que el de Límite Funcional.

7. Se continúa utilizando instrumentos y materiales tradicionales en la instrucción del concepto (pizarra, tiza, calculadora, cuadernos) aunque se valoraría muy positivamente la utilización de software y ordenadores en una situación ideal.

8. La utilización del libro de texto es todavía mayoritaria aunque sería sustituido por instrumentos relacionados con las nuevas tecnologías en una situación ideal.

9. En la situación actual los factores más potenciados por el profesorado desde el punto de vista estratégico son la motivación del alumnado, la representación intuitiva de los

conceptos y la gran cantidad y variedad de ejercicios. Los resultados variarían significativamente si nos encontrásemos en una situación ideal, como queda reflejado en las páginas 127 a 130.

10. En cuanto al rigor de la definición, el profesorado se inclina por un acercamiento verbal al concepto, para seguidamente utilizar el tratamiento numérico a través de tablas de valores. En una situación ideal, aumentan las preferencias de una mayor rigurosidad formalmente representadas por las perspectivas topológica y métrica.

11. El tipo de reflexión del profesorado, que Van Manen califica como 'técnica', se centra fundamentalmente en las dificultades y reacciones del propio alumnado en cursos precedentes, como indica, entre otras cosas, el resultado del ítem 14.

12. La importancia que da el profesorado entrevistado a la utilización de las nuevas tecnologías en la instrucción del concepto es elevada (14.2 sobre 5). Esto, unido a los resultados del ítem 16, nos permite afirmar que además está dispuesto a formarse tecnológicamente para que su preparación repercuta positivamente en la mejora de la acción educativa.

En este mismo capítulo evaluamos los resultados de la aplicación de algunas técnicas de análisis multivariante a algunas variables determinadas con el fin de encontrar posibles agrupaciones o clasificaciones del profesorado. En concreto, utilizando el paquete informático SPSS, consideramos las variables relativas a los materiales usados por el profesorado en la instrucción, las estrategias y los referentes. Todos ellos por separado, sometidos a análisis clúster y/o factorial.

En cuanto a los materiales, obtenemos principalmente dos grupos: Uno, ligado al uso de instrumentos de tipo tradicional (tiza, encerado, calculadora) y un segundo grupo con usos más relacionados con las nuevas tecnologías.

Si nos referimos a las estrategias utilizadas podemos agrupar el profesorado también en dos conglomerados principales: El primero basa su instrucción principalmente en una representación intuitiva del concepto seguido de la realización de muchos y variados ejercicios. Otro conglomerado estaría formado por aquellos que utilizan una mayor diversidad de estrategias, con resolución de problemas, conexión con otras materias o uso de materiales de apoyo.

También recogemos los resultados del análisis a las variables relacionadas con los referentes utilizados en el proceso de instrucción del concepto, obteniendo un primer grupo de profesores que muestra una mayor inclinación por las estrategias ligadas a la autoformación, incluyendo las nuevas tecnologías, frente a otro grupo que da mayor relevancia a su etapa formativa, apoyada en instrumentos tradicionales.

Obtenemos resultados que interpretamos como preferencias en el proceso reflexivo del profesor en relación al concepto. Si resumimos podríamos decir que, con mucha diferencia los elementos motivadores en el proceso de reflexión del profesorado en el campo estudiado, son los relativos a las dificultades, reacciones y resultados de los alumnos en cursos precedentes. En menor medida también aparecen la propia investigación personal e la reflexión sobre las dificultades del profesor en su época de estudiante.

El capítulo VI está dedicado íntegramente a las conclusiones del estudio. En él recordamos las preguntas de investigación y posteriormente vamos indicando las respuestas obtenidas para cada una de ellas (pp. 161-166). También aparecen en este capítulo, las limitaciones del estudio y las posibles líneas de investigación futuras. En cuanto a las primeras podemos destacar el ámbito restrictivo del estudio vinculado a la Comunidad Autónoma de Galicia y a las posibles modificaciones de los últimos años en lo que se refiere a la introducción de las nuevas tecnologías en los centros escolares gallegos objeto del estudio.

En relación a las líneas de investigación posibles destacamos, entre otras, el estudio de la adaptación del profesor de matemáticas a las nuevas tecnologías, so sólo como herramienta de uso en el aula, sino también como objeto propio de investigación personal.

Después de las referencias, incluimos cuatro anexos: El modelo para la evaluación del cuestionario -enviado y valorado por el comité de expertos-, el modelo definitivo impreso del cuestionario final, un anexo relativo a la correlación estudiada entre las variables “años de docencia” y otras variables, y finalmente el que incluye este resumen en español.

La modesta intención de este trabajo es colocar un primer peldaño para un posterior estudio y análisis más completo de la práctica docente del profesorado en el tema concreto de Límite Funcional, que debería incluir, junto a nuevas variables de estudio, otros usuarios del concepto, como son los estudiantes de máster de secundaria o los profesores y profesoras universitarias.