



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo de fin de grao

**A XEOMETRÍA DIFERENCIAL DUN MODELO DE  
MOVEMENTO DA BICICLETA**

ÁNGEL MANUEL COUSIÑO SÓÑORA

2020–2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO EN MATEMÁTICAS

Traballo de fin de grao

**A XEOMETRÍA DIFERENCIAL DUN MODELO DE  
MOVEMENTO DA BICICLETA**

ÁNGEL MANUEL COUSIÑO SÓÑORA

2020–2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA





# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía</b>
<b>Título: A xeometría diferencial dun modelo de movemento da bicicleta</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>O obxectivo deste traballo é estudar un modelo sinxelo de movemento da bicicleta sobre un plano. Consideraremos un segmento de lonxitude fixa no espazo euclidiano multi-dimensional, movéndose de xeito que o vector velocidade do extremo traseiro estea sempre aliñado co segmento. Se se prefixa a curva que percorre a roda dianteira, a traectoria da roda traseira determínase de forma única a través dunha certa ecuación diferencial de primeiro orde -a ecuación da bicicleta-. O traballo consistirá, basicamente, na lectura e comprensión de parte dos contidos (basicamente en dimensión 2) do artigo que aparece na bibliografía co fin de relacionar “a ecuación da bicicleta” con conceptos de xeometría diferencial estudados no grao.</p>
<b>Recomendacións</b>
<p>Visionado dos vídeos: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=ORBjkzCUQ-M">https://www.youtube.com/watch?v=ORBjkzCUQ-M</a> Conferencia Magistral: La geometría de trayectorias de bicicletas. Dr. Gil Bor. <a href="http://www.birs.ca/events/2016/5-day-workshops/16w5017/videos/watch/201606131102-Bor.html">http://www.birs.ca/events/2016/5-day-workshops/16w5017/videos/watch/201606131102-Bor.html</a> Conferencia no workshop Integrability and Near-Integrability in Mechanics and Geometry"2016. Dr. Gil Bor.</p>

# Índice xeral

Agradecementos	VII
Resumo	VII
<b>1. A ecuación da bicicleta</b>	<b>1</b>
1.1. Formulación do modelo da bicicleta . . . . .	1
1.2. As curvas de Zindler . . . . .	8
<b>2. A ecuación diferencial de Riccati</b>	<b>11</b>
2.1. Ecuación diferencial linear . . . . .	11
2.2. Ecuación diferencial de Bernoulli . . . . .	12
2.3. Ecuación diferencial de Riccati . . . . .	14
<b>3. A Monodromía da bicicleta</b>	<b>17</b>
3.1. A monodromía como unha transformación de Möbius . . . . .	18
3.2. A monodromía e a curvatura . . . . .	21
<b>4. Clasificación da Monodromía da bicicleta</b>	<b>25</b>
4.1. Clasificacións das transformacións de Möbius . . . . .	25
4.2. Un caso particular: a circunferencia de radio $R$ . . . . .	28
<b>5. O planímetro de Prytz e a Conxectura de Menzin</b>	<b>31</b>
5.1. O planímetro de Prytz . . . . .	31
5.2. A conxectura de Menzin . . . . .	36
<b>A. Transformacións de Möbius</b>	<b>37</b>
<b>B. Máis alá de Euclides: A Xeometría Proxectiva</b>	<b>41</b>
Bibliografía	49





Á miña familia,  
ás miñas mestras e mestres, en particular a Elena e Alberto,  
ás miñas compañeiras de luces e sombras,  
a todas as persoas que me axudaron a chegar ata aquí,  
grazas.



## Resumo

Neste traballo estudaremos o modelo sinxelo de movemento da bicicleta sobre o plano. Consideraremos un segmento de lonxitude prefixada que representará ao cadro da bicicleta. Imponeremos que o vector velocidade do extremo traseiro sexa paralelo a este. Fixando o percorrido da roda dianteira e a lonxitude do cadro, a traxectoria da roda traseira determínase de forma única a través dunha ecuación diferencial de primeiro orde de tipo Riccati, **a ecuación da bicicleta**. O traballo consistirá, basicamente, na lectura e comprensión de parte dos contidos (esencialmente en dimensión 2) do artigo [4] con conceptos de xeometría diferencial estudados no grao.

## Abstract

This final degree work focuses on the simple model of movement that the bicycle projects on the plane. We will consider for this aim a predetermined segment with fixed length that will represent the bicycle frame. We will impose that the velocity vector of the rear end is parallel to it. By fixing the travel of the front wheel and the length of the frame, the trajectory of the rear wheel is uniquely determined through a first-order differential equation (Riccati type), the equation of the bike. This work will consist, essentially, of reading and understanding part of the contents (basically in dimension 2) of article [4] with differential geometry concepts studied in the degree.



# Introdución

Neste traballo vamos falar dun modelo simple para o movemento dunha bicicleta usando como principal referencia os artigos [4, 11]. Para definir no primeiro capítulo o modelo usaremos a notación de Einstein e tamén definicións e resultados sacados do libro [15].

Consideraremos a bici como un segmento orientado de lonxitude prefixada, de tal forma que, a velocidade da parte traseira está na dirección do segmento que une a roda traseira coa dianteira.

Tal e como coñecemos a bici usual só a parte dianteira pode xirar (guiador). Imponendo unha condición de non esvaramento das rodas (condición non holonómica) xa nos dá a propia ecuación da bicicleta en  $\mathbb{R}^2$ . Non impoñeremos condicións de sentido da bicicleta, i.e., imaxinemos que dando pedais en sentido anti-horario a bici pode andar cara atrás pero o guiador segue sendo o da roda dianteira.

## A modelo da bicicleta

Se se prefixa a curva que percorre a roda dianteira e a orientación inicial da bici (dirección do segmento que une a roda traseira coa dianteira, dada por un vector director unitario), entón a roda traseira está determinada de maneira unívoca a través da EDO (1.4). Esta ecuación, no caso de estar en  $\mathbb{R}^2$  como é o noso caso, é equivalente á ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$y'' + \rho(t) \cdot y = 0$$

cuxo potencial  $\rho(t)$  depende da xeometría da roda dianteira e da lonxitude do segmento da bicicleta. Veremos tamén un par de exemplos onde en un deles chegamos á clásica tractiz.

Por último expoñeremos tamén as curvas de Zindler e un caso particular no que a bici debuxa unha sóa liña.

## A ecuación diferencial de Riccati

Neste capítulo veremos como son e como se resolven as ecuacións de tipo Riccati. Para iso faremos unha breve introdución histórica das ecuacións diferenciais ata chegar a resolver a ecuación diferencial linear mediante o método de factor integrante. Logo veremos as ecuacións de Bernoulli e como facendo un cambio de variable se reducen a lineais. Por último chegamos ao obxectivo deste capítulo, veremos as ecuacións diferenciais de Riccati e como se resolven. Este tipo de ecuacións son moi importantes no noso modelo de bicicleta, pois demostraremos que a ecuación da  $l$ -bicicleta mediante un cambio de variable tránformase nunha ecuación de tipo Riccati.

## A monodromía da bicicleta

A monodromía da bicicleta non é mais que, para unha curva (pechada ou non) descrita pola roda dianteira e unha lonxitude de bicicleta prefixadas, a aplicación que a cada dirección inicial da bici lle asigna a súa orientación final unha vez recorrida a curva da roda dianteira. En dimensión dous, a monodromía da bicicleta é unha transformada de Möbius.

No apéndice pódese ver unha definición construtiva destas chamadas transformacións de Möbius, que estrutura alxébrica teñen (a mesma que  $PSL(2, \mathbb{R})$ ) e como se relacionan co espazo proxectivo. Para isto apoiámonos en [13, 26].

No capítulo catro clasificaremos os diferentes tipos de monodromía a partir dos valores propios e vectores propios da matriz asociada a esta. Por último expoñeremos un caso particular, en concreto que a roda dianteira debuxe unha circunferencia no plano.

## O planímetro de Prytz e a Conxectura de Menzin

Nos dous últimos capítulos definiremos que é o planímetro, en particular o de Prytz, e como se poden medir áreas con este. Tamén veremos que orde de erro se comete ao usar este aparello para medir rexións.

Expoñeremos a conxectura de Menzin, que segue sen resolver hoxe en día sen engadir restricións a maiores. Veremos un par de teoremas que proban a conxectura engadindo que a curva dianteira sexa convexa ou que a curvatura desta sexa menor ou igual a un, respectivamente.

Quería facer un especial agradecemento a Luis Hernández Lamonedá e Gil Bor polo seminario impartido na USC e polas imaxes cedidas (todas as do capítulo 1, 4.3, 4.4, 4.5 e 5.4).

# Capítulo 1

## A ecuación da bicicleta

Unha persoa cunha mente curiosa, vendo aos picariños xogar coas bicicletas no parque, podería pensar ao ver os debuxos feitos por estas na terra: serán de algún interese ditas curvas? poderíase parametrizar as traxectorias cun modelo matemático simple? Sería posible adiviñar o sentido de avance da bicicleta só vendo as curvas descritas polas rodas? Tocaremos esta cuestións, e algunhas máis, resolverémolas neste capítulo. Para iso vamos primeiro a intentar construír o modelo do movemento da bicicleta.

### 1.1. Formulación do modelo da bicicleta

Consideraremos a bici como un segmento orientado de lonxitude prefixada  $l$ , de tal forma que, a velocidade da parte traseira está na dirección do segmento que une a roda traseira coa dianteira.

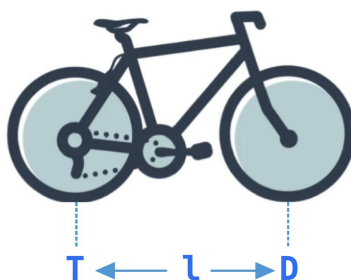


Figura 1.1: A bicicleta usual con medida entre rodas  $l$ .

Tal e como coñecemos a bici usual só a parte dianteira pode xirar (guiador). Impondo unha condición de non esvaramento das rodas (condición non holonómica) xa nos dá a propia ecuación da bicicleta en  $\mathbb{R}^2$ . Non esixiremos condicións de sentido da bicicleta,

podemos imaxinar que dando pedais en sentido anti-horario a bici pode andar cara atrás pero o guiador segue sendo o da roda dianteira.

Pensemos en dous exemplos que resolveremos máis adiante:

**Exemplo 1.** Este primeiro exemplo é o máis sinxelo de pensar. Trátase de que, cunha lonxitude prefixada  $l$  do cadro da bici, a roda dianteira recorre o eixo de abscisas e a posición inicial da roda traseira tamén está no eixo de abscisas.



**Exemplo 2.** Neste segundo exemplo consideramos a mesma lonxitude de cadro  $l$ , a mesma trazada para a roda dianteira, pero agora a posición inicial da roda traseira non é no eixo de abscisas, senón no das ordenadas.



O problema a resolver é: que curva debuxaría a roda traseira nos dous exemplos? Esta cuestión resolverémola contra o final deste capítulo.

Para poder calcular a traxectoria da roda traseira da bici, recordemos antes estas nocións.

**Definición 1.1. (Curva plana parametrizada diferenciable).** Unha curva plana, parametrizada e diferenciable en  $I$  é unha aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$  aberto, que é  $C^\infty$ .

Temos así,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ , onde as funcións  $\alpha_i(t)$  admiten derivadas continuas de todas as ordes. A  $t$  nomeámolo como **parámetro** da curva  $\alpha$ . Ao subconxunto imaxe,  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ , como a **traza** de  $\alpha$ . A aplicación,  $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , chámase (vector) **velocidade** (ou vector tanxente).



**Definición 1.2. (Curva parametrizada diferenciable regular).** Dise que unha curva parametrizada diferenciable,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é regular si  $\alpha'(t) \neq \vec{0}$  para todo  $t \in I$

**Definición 1.3. (p.l.a).** Dise que unha curva parametrizada,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , está parametrizada por lonxitude de arco se  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t \in I$ . Cando unha curva está parametrizada por lonxitude de arco adoitase poñer p.l.a. e o parámetro  $t$  cámbiase por  $s$ .

*Observación 1.4.* Cando unha curva está p.l.a. tense,

$$L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds = \int_{t_0}^t ds = t - t_0,$$

o que nos indica que a lonxitude da curva entre  $\alpha(t_0)$  e  $\alpha(t)$  é exactamente a distancia entre  $t$  e  $t_0$ .

*Observación 1.5.* Cando unha curva está p.l.a. temos,

$$0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} |\alpha'(s)|^2 = \frac{d}{ds} (\alpha'(s) \cdot \alpha'(s)) = 2(\alpha'(s) \cdot \alpha''(s)),$$

isto xeometricamente significa que a aceleración,  $\alpha''$ , é ortogonal á velocidade,  $\alpha'$ , e polo tanto á súa traxectoria.

*Observación 1.6.* Ao longo do traballo identificaremos  $\alpha'$  con  $\mathbf{v}$  indistintamente. Tamén por simplicidade a notación ás veces prescindiremos do parámetro  $t$ .

Vamos parametrizar a traxectoria que debuxa a roda dianteira da bicicleta nun plano como unha curva parametrizada diferenciable regular,  $\alpha$ . Agora, consideremos un número real positivo,  $l$ , que será a distancia entre a roda dianteira e a traseira. Definimos un vector director,  $\mathbf{r} \in \mathbb{S}^1$ , que nos indica a dirección do segmento que une as rodas da bici, podemos tamén parametrizalo como unha curva diferenciable regular p.l.a. dende un intervalo de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{S}^1$ .

Vamos a impoñer unha condición de rixidez antes de definir analiticamente a curva da roda traseira,  $\beta$ . Como xa dixemos a distancia do cadro dunha bicicleta usual,  $l$ , non varía de tamaño, noutras palabras,

$$\|\alpha(t) - \beta(t)\| = l \text{ para todo } t \in I \text{ (condición de rixidez).} \quad (1.1)$$

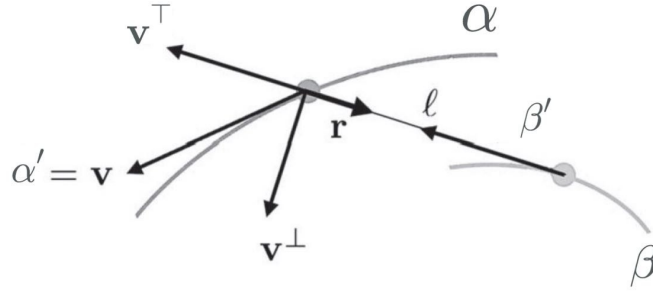


Figura 1.2: Formulación do modelo

Tendo en conta as definicións anteriores e a condición imposta xa podemos parametrizar a traza da roda traseira como a seguinte curva,  $\beta$ , dada pola expresión seguinte:

$$\beta(t) = \alpha(t) + l\mathbf{r}(t). \quad (1.2)$$

A outra condición que vamos impoñer é a suposición utópica dunha superficie e rodas anti-eskorrentes, é dicir, a roda traseira non esvara.

$\beta(t) - \alpha(t)$  é tanxente á curva  $\beta$  en  $\beta(t)$  para todo  $t \in I$  ([condición de non esvaramento](#)). (1.3)

A continuación probaremos que a condición (1.3) implica que, a proxección da velocidade da curva,  $\alpha$ , sobre o vector director,  $\mathbf{r}$ , é a velocidade de  $\beta$ . Noutras palabras, a velocidade da roda traseira está na dirección de  $\mathbf{r}$ .

**Proposición 1.7.** *Sexan  $\alpha$  e  $\mathbf{r}$  curvas parametrizadas diferenciables regulares p.l.a. en  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{S}^1$ , respectivamente; un número real,  $l > 0$ ; e  $\beta = \alpha + l\mathbf{r}$ . Entón a condición (1.3) implica que,  $\beta' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{v} (\equiv \alpha')$  é a velocidade de  $\alpha$ .*

*Demostración.* Descompoñemos  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\top$ , onde  $\mathbf{v}^\perp$  e  $\mathbf{v}^\top$  son, respectivamente, as proxeccións ortogonais de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}^\perp$ . Tense que  $\mathbf{v}^\top = a\mathbf{r}$ , onde  $a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ .

Fixando un  $t$  arbitrario, (1.3) implica que  $\beta(t) - \alpha(t) = b\beta'(t)$ , onde  $0 \neq b \in \mathbb{R}$ , xa que  $l > 0$ . Substituíndo  $\beta(t)$  dada pola expresión (1.2) nesta última ecuación obtemos,

$$l\mathbf{r}(t) = b\beta'(t) \text{ implica que } \lambda\mathbf{r}(t) = \beta'(t).$$

Achemos o valor de  $\lambda$  multiplicando escalarmente por  $\mathbf{v}$  pola esquerda.

$$\lambda\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \beta' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + l\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}',$$

onde a última igualdade é a expresión (1.2) derivada e multiplicada escalarmente por  $\mathbf{r}$ .  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ , anúlase. Polo tanto, dado que  $\mathbf{r}$  é unitario tense,

$$\lambda = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Como o produto escalar é simétrico obtemos o resultado requirido. QED

O que nos indica esta proposición é que, (1.3) condiciona á velocidade da roda traseira (i.e., a dirección de movemento desta) a seguir a dirección de  $\mathbf{r}$  (dirección do cadro da bici), de aí que a condición implique o non esvaramento.

Na seguinte proposición, vamos demostrar que a condición (1.3) é equivalente á ecuación denominada, **ecuación da  $l$ -bicicleta**, que é unha ecuación diferencial ordinaria.

**Proposición 1.8.** *Sexan  $\alpha$  e  $\mathbf{r}$  curvas parametrizadas en  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{S}^1$ , respectivamente; un número real,  $l > 0$ ; e  $\beta = \alpha + l\mathbf{r}$ . Entón a condición (1.3) de non esvaramento é equivalente á seguinte EDO,*

$$l\mathbf{r}' = -\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \tag{1.4}$$

A ecuación (1.4) denomínase a **ecuación da  $l$ -bicicleta** en  $\mathbb{R}^2$ , definida para toda parametrización da roda dianteira  $\alpha(t)$  e para toda lonxitude de bicicleta  $l$ .

*Demostración.* Descompoñemos  $\mathbf{v}$  como na proposición anterior. Agora ben, de (1.2), séguese que,

$$\beta'(t) = \mathbf{v} + l\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\top + l\mathbf{r}'(t) \tag{1.5}$$

Substituíndo en (1.5) a expresión da proposición anterior obtemos,

$$\mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\top + l\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}^\top$$

e desta última igualdade obtense,

$$\mathbf{v}^\perp + l\mathbf{r}'(t) = \vec{0} \iff \mathbf{v}^\perp = -l\mathbf{r}'(t). \tag{1.6}$$

Ademais sabemos que,

$$\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}^\top = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \tag{1.7}$$

Entón, por (1.6) e (1.7) obtemos o resultado. QED

Agora podemos dar resposta ás cuestións dos exemplos anteriores descritos. O noso obxectivo será calcular a ecuación da curva que describe a roda traseira dunha  $l$ -bicicleta, en definitiva calcular  $\beta$ . Dada  $\alpha$  cunha posición inicial axeitada do cadro e, usando a ecuación que acabamos de obter, só necesitaríamos calcular  $\mathbf{r}$ .

Como  $\mathbf{r} \in \mathbb{S}^1$  podemos supoñer que  $\mathbf{r}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$  para algunha función  $\theta$  que mida o ángulo que forma o cadro da bici co eixo  $x$  en  $\mathbb{R}^2$ , tense que,

$$\mathbf{r}'(t) = \theta'(t)(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) \text{ e } \mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t)).$$

Substituíndo en 1.4, Substituíndo en 1.4 e multiplicando escalarmente pola dereita por,  $(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)))$ , obtemos,

$$l\theta'(t) = v_1(t)\sin(\theta(t)) - v_2(t)\cos(\theta(t))$$

Faremos o cambio de variable,  $p(t) = \tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$ , pero antes expresemos a ecuación anterior doutra forma equivalente tendo en conta que,

$$\sin(\theta(t)) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} = \frac{2}{1 + p^2(t)},$$

$$\cos(\theta(t)) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} = \frac{1 - p^2(t)}{1 + p^2(t)},$$

e

$$p(t) = \tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \iff \theta(t) = 2 \arctan(p(t)).$$

Derivando,

$$\theta'(t) = \frac{2}{1 + p(t)},$$

e derivando  $p(t)$  obtemos,

$$p'(t) = \frac{1 + p^2(t)}{1 + p(t)},$$

entón

$$\theta'(t) = \frac{2p'(t)}{1 + p^2(t)}$$

Xa temos todas as ferramentas necesarias para facer dito cambio de variable. Procedamos:

$$l\theta'(t) = v_1(t)\sin(\theta(t)) - v_2(t)\cos(\theta(t)) \iff l \frac{2p'(t)}{1 + p^2(t)} = v_1(t) \frac{2p(t)}{1 + p^2(t)} - v_2(t) \frac{1 - p^2(t)}{1 + p^2(t)},$$

é dicir,

$$p'(t) = \frac{1}{2l}(v_2(t)p^2(t) + 2v_1(t)p(t) - v_2(t)),$$

que é unha ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Apliquemos isto aos exemplos comentados anteriormente. Nestes casos  $\alpha(t) = (t, 0)$ , co que  $(v_1, v_2) = (1, 0)$  e a ecuación queda  $p'(t) = \frac{1}{l}p(t)$ , que ten fácil solución dado que é unha ecuación lineal con coeficientes constantes

$$p(t) = p_0 \exp\left(\frac{t}{l}\right),$$

desfagamos os cambios,

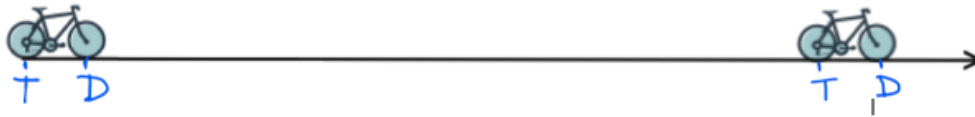
$$p(t) = p_0 \exp\left(\frac{t}{l}\right) = \tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right), \theta(t) = \arctan\left(\exp\left(\frac{t}{l}\right)\right)$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) = \left( \frac{1 - p_0 \exp\left(\frac{2t}{l}\right)}{1 + p_0 \exp\left(\frac{2t}{l}\right)}, \frac{2p_0 \exp\left(\frac{t}{l}\right)}{1 + p_0 \exp\left(\frac{2t}{l}\right)} \right)$$

**Exemplo 1.-** Neste caso  $p_0 = 0$  e obtemos  $\mathbf{r}(t) = (0, 0)$ , polo que,

$$\beta(t) = (t, 0) + (0, 0) = \alpha(t),$$

e concluímos que a traxectoria da roda traseira coincide coa da dianteira.



**Exemplo 2.-** Agora  $p_0 = 1$  e temos,

$$\mathbf{r}(t) = \left( -\tanh\left(\frac{t}{l}\right), \operatorname{sech}\left(\frac{t}{l}\right) \right),$$

polo que,

$$\beta(t) = \left( \left( 1 - \tanh\left(\frac{t}{l}\right), \operatorname{sech}\left(\frac{t}{l}\right) \right) \right),$$

se tomamos  $l = 1$  obtemos a traxectoria da roda traseira é a clásica tractriz

$$\beta(t) = (1 - \tanh t, \operatorname{sech} t).$$

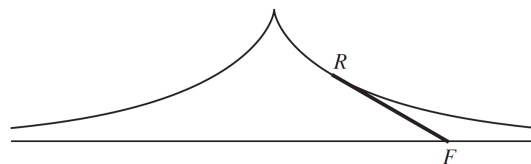


Figura 1.3: A famosa curva Tractriz. Imaxe extraída de [11]

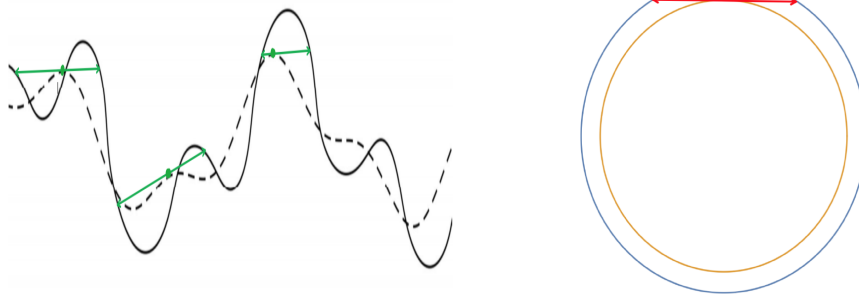
### HISTORIA DA TRACTRIZ:

A tractriz tamén recibe o nome de curva da persecución, pois describe a traxectoria seguida por un obxecto que se despraza a velocidade constante e que persigue de forma óptima a outro obxecto que se move en liña recta a velocidade (pode ser distinta) tamén constante. Foi introducida por primeira vez por Claude Perrault en 1670, e máis tarde foi estudada por sir Isaac Newton (1676) e Christian Huygens (1692).

Claude Perrault, nado en París en 1613, foi un célebre arquitecto, físico, mecánico, médico e naturalista, membro da academia das ciencias. O seu irmán era Charlest Perrault, autor dos contos célebres como Carapuchiña Vermella, A Cincenta e a Bela Dormente. Quixemos facer unha mención especial por ser o primeiro en falar da curva que nos corresponden nesta sección.

## 1.2. As curvas de Zindler

Un problema interesante é saber se se pode determinar o sentido do movemento feito pola bicicleta só vendo as trazadas das rodas desta. Polo xeral isto é posible (pode verse unha solución cun cálculo simple en [19]), pero ás veces non, por exemplo se as traxectorias das rodas son círculos concéntricos (ver [8]). Fixémonos na seguinte figura, á esquerda hai unha trazada na que se pode saber o sentido e dirección da bici, e na dereita unha curva ambigua.



Tampouco se poden determinar as curvas que cumpren a seguinte propiedade: dados dous puntos  $x$  e  $y$ , poden atravesar esta curva de tal forma que a distancia do segmento que une  $x$  e  $y$  é constante, e ademais a velocidade do punto medio do segmento  $xy$  está na mesma dirección que este segmento. As curvas que cumpren esta propiedade chámanse **curvas de Zindler** (ver [35]). No caso da bicicleta serían as trazadas da roda dianteira  $\alpha$  e traseira  $\beta$ , tales que, a distancia entre  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  é sempre a mesma para todo  $t$  (esta condición cúmprese sempre no modelo da bicicleta formulado antes), e que a curva

definida polo punto medio do cadro da bici ten velocidade paralela ao cadro da bici tamén para todo  $t$  (Olo que esta non, pois falamos da curva debuxada polo punto medio entre as rodas da bici, non da traseira).

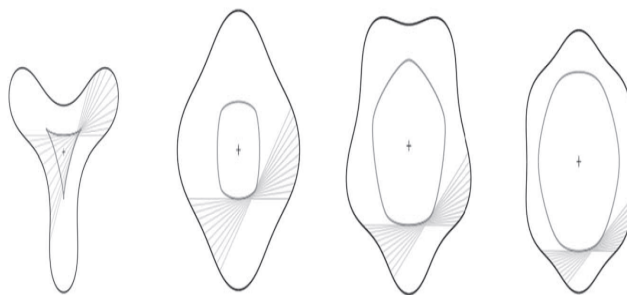


Figura 1.4: Curvas de Zindler.

As curvas de Zindler brindan solucións a outros problemas. O problema de Ulam na teoría de flotación ([23], problema 19): Que corpos flotan en equilibrio en todas as posicións? No caso bidimensional o límite de dito corpo é unha curva de Zindler (ver [3, 27, 28]) para os traballos iniciais e [14] para información histórica; en particular, sobre Herman Auerbach(1901-1942)). Recentemente, obtivéronse unha grande cantidade de resultados sobre este problema en [5, 6, 29] e unha serie de artigos de F. Wegner [30, 31, 32, 33, 34].

Wegner construíu unha familia de curvas de Zindler non triviais (non usou esta terminoloxía), descritas explicitamente en termos de funcións elípticas. Foi motivado polo estudo do movemento dun electrón nun campo magnético cuxa forza depende cadráticamente da distancia á orixe.

Entón estes tres problemas: as trazadas ambiguas, o problema de flotación de Ulam e o movemento dun electrón, teñen solución común. Aínda hoxe en día se descoñece unha descrición completa das curvas planas de Zindler, e moito menos en dimensións superiores.

Outra cuestión interesante é se pode existir unha soa liña no trazado dunha bicicleta, non sendo unha liña recta. *A priori* a intuición dinos que non, pero unha vez máis as matemáticas demostran que non podemos fiarnos desta. A seguinte figura podería ser feita por unha persoa moi habilidosa coa bicicleta, o método construtivo desta curva pode verse en [9].

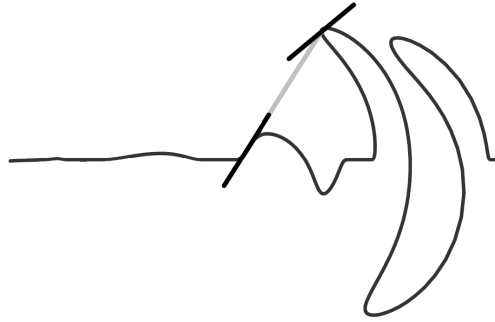


Figura 1.5: A trazada das roda dianteira e traseira coinciden. Imaxe extraída de [9]



## Capítulo 2

# A ecuación diferencial de Riccati

### 2.1. Ecuación diferencial linear

Os primeiros intentos por resolver problemas físicos mediante o cálculo diferencial, a finais do século XVII, levaron gradualmente a crear unha rama das matemáticas, as ecuacións diferenciais. As cales se converteron, a mediados do século XVIII, nunha rama particular destas. Os creadores do cálculo infinitesimal foron Leibniz e Newton, ambos por separado. Newton observou que si  $\frac{d^n}{dx^n}y = 0$ , entón  $y(x)$  é un polinomio de grado  $n - 1$ , logo  $y$  depende de  $n$  constantes arbitrarias. Esta observación foi demostrada no século XIX coa axuda do Teorema do Valor Medio. En 1693 Huygens fala explicitamente de ecuacións diferenciais. No mesmo ano, Leibniz di que as ecuacións diferenciais son funcións de elementos do triángulo característico. En 1660, Jacob Bernoulli formulou o problema da catenaria. A catenaria cumpre unha propiedade importante: de entre todas as curvas de lonxitude dada, a que minimiza a enerxía potencial é precisamente esta. O estudo de funcións minimizantes levou ao descubrimento do cálculo de variacións por Euler a mediados do século XVIII. Lagrange a finais de século mellorou dita teoría implantada por Euler. Leibniz descubriu a técnica de separación de variables en 1691: indicou como se resolve,  $y \frac{d}{dy}x = f(x)g(y)$ . No mesmo ano reduciu a ecuación homoxénea,

$$\frac{d}{dx}y = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

a unha separable mediante o cambio de variable,  $y = vx$ . En 1694, Leibniz publicou a

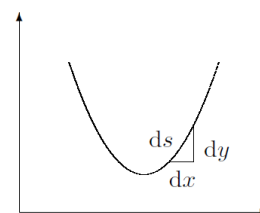


Figura 2.1: O triángulo característico.

resolución da ecuación que nos concirne nesta sección, a **ecuación diferencial linear**,

$$\frac{d}{dx}y + p(x)y = g(x).$$

En 1694 Leibniz e Jean Bernoulli estudaron o problema de encontrar a familia de curvas que cortan cun ángulo dado a unha familia de curvas dadas. Jean Bernoulli sinalou que este problema é importante para determinar as traxectorias dos raios de luz que recorren un medio non uniforme, porque ditos raios cortan ortogonalmente os chamados frontes de luz. O problema foi resolto de forma xeral e de maneira independente por Leibniz e por Jean Bernoulli en 1698. O método usado é o mesmo que se utiliza hoxe en día. Tamén foron identificadas as ecuacións diferenciais de primeiro orde exactas, é dicir, as ecuacións da forma,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

para as cales existe unha función  $z = z(x, y)$  tal que  $dz = Mdx + Ndy$ . Clairut en 1739 deu a condición  $\frac{\partial}{\partial y}M = \frac{\partial}{\partial x}N$ . A mesma condición tamén foi dada por Euler en 1734 de forma independente. Si se ten que,  $dz = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , como remarcaron Euler e Clairut, a solución é  $z = cte$ .

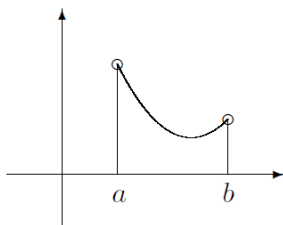


Figura 2.2: A catenaria.

Cando unha ecuación de primeiro orde non é exacta, é posible nalgúns casos, de que multiplicándoa por unha función axeitada, chamada **factor integrante**, se converta nunha exacta. Foi Euler en 1734 o que se deu conta de que este concepto proporcionaba un método de integración e introduciu as expresións que hoxe en día usamos. Pódese ler máis sobre a historia das ecuacións diferenciais en [24].

**Definición 2.1. (EDO Linear):** Unha ecuación diferencial ordinaria de primeira orde dise linear se é da forma,

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{2.1}$$

onde  $p$  e  $g$  son funcións continuas.

## 2.2. Ecuación diferencial de Bernoulli

A ecuación diferencial de Bernoulli é unha ecuación diferencial ordinaria de primeira orde, formulada por **Jacob Bernoulli** (Basilea, 27 de decembro de 1654-ibíd, 16 de Agosto de 1705) tamén coñecido por James Bernoulli. Foi un destacado matemático e científico

suízo. As súas contribucións á xeometría analítica, á teoría da probabilidade e ao cálculo de variacións foron de moita importancia.

A partir das concepcións de Leibniz desenvolveu problemas de cálculo infinitesimal. En 1696 converteuse na primeira persoa en descubrir a técnica para resolver ecuacións diferenciables separables. Publicou dous artigos importantes, **Curvas Transcendentais**(1696) e **Isoperimetría**(1700).

A súa obra mestra foi **Ars Conjectandi** (Arte da conxectura), traballo pioneiro en teoría da probabilidade. No que introduce a distribución binomial, a cal leva o seu nome. A obra foi publicada en 1713, oito anos da morte de Jacob, polo seu sobriño. Pódese ler máis sobre a súa biografía en [16]



Figura 2.3: Jakob Bernoulli. Imaxe extraída de [16]

**Definición 2.2. (EDO de Bernoulli):** Unha ecuación diferencial ordinaria de primeira orde dise de Bernoulli se é da forma,

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

onde  $p$  e  $q$  son continuas e  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ , xa que se fose igual a 1 ou a 0 sería unha EDO linear.

Vexamos como resolver esta ecuación diferencial. Primeiro multiplicamos a EDO polo inverso de  $y^n$ , obtendo,

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Agora fagamos o cambio de variable,  $v = y^{1-n}$ , para convertela nunha EDO en termos de  $v$ . Derivando, temos,  $v' = (1 - n)y^{-n}y'$ . E substituíndo,

$$\frac{1}{1 - n}v' + p(x)v = q(x),$$

que como podemos observar agora é unha EDO linear a cal poderíamos resolver co método de factor integrante que describimos antes e despois desfacendo o cambio de variable.

### 2.3. Ecuación diferencial de Riccati

A ecuación de Riccati é unha ecuación diferencial ordinaria non linear de primeiro orde. **Francesco Jacopo Riccati** (Venecia, 28 de maio de 1676 - 15 de abril de 1754) foi un matemático e filósofo veneciano. Estudou detalladamente a hidrodinámica sobre a base da mecánica newtoniana, a cal introduciu no seu país de orixe. Rechazou a presidencia da Academia das Ciencias de San Petersburgo en aras da súa retirada e aristocrática vida.

No século XVIII, Riccati, estudou esta ecuación co fin de estudar a hidrodinámica. A pesar de que a ecuación diferencial leva o seu nome Jacopo só estudou casos particulares desta. A ecuación foi expresada e analizada tal e como hoxe en día a coñecemos pola **familia Bernoulli**. Pode lerse moito máis sobre este matemático en [17]



Figura 2.4: Jacopo Francesco Riccati. Imaxe extraída de [17]

**Definición 2.3. (EDO de Riccati):** Unha ecuación diferencial ordinaria de primeira orde dise de Riccati se é da forma,

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \quad (2.2)$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  son funcións continuas.

Vexamos como resolver unha EDO de Riccati. Facemos o cambio de variable  $y = y_1 + u$  onde  $y_1$  é unha solución de (2.2) e tendo en conta que  $u$  depende de  $x$ ,  $u = u(x)$ . Así

obtemos unha EDO de Bernoulli con  $n = 2$ . Derivando o cambio de variable,

$$y' = y_1' + u' \iff u' = y' - y_1',$$

substituíndo  $y'$  dado pola expresión (2.2) temos,

$$u' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 - y_1'$$

facendo o cambio  $y = y_1 + u$ ,

$$\begin{aligned} u' &= p(x) + q(x)(y_1 + u) + r(x)(y_1 + u)^2 - y_1' \\ &= p(x) + q(x)y_1 + q(x)u + r(x)y_1^2 + 2r(x)y_1u + r(x)u^2 - y_1' \\ &= (p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2) - y_1' + (q(x) + 2r(x)y_1)u + r(x)u^2 \\ &= y_1' - y_1' + (q(x) + 2r(x)y_1)u + r(x)u^2, \end{aligned}$$

xa que  $y_1$  é solución. Entón chegamos á expresión seguinte,

$$u' - (q(x) + 2r(x)y_1)u = r(x)u^2,$$

que é unha ecuación diferencial de Bernoulli para  $u = u(x)$  con  $p(x) = -(q(x) + 2r(x)y_1)$  e  $q(x) = r(x)$ . Como xa vimos antes, esta pódese reducir a unha EDO linear e resolvela polo método de factor integrante.

Sexan  $y_1, y_2$  e  $y_3$  tres solucións particulares da ecuación de Riccati (2.3) e  $y$  a solución xeral. Entón,

$$u = \frac{1}{y - y_1}, \quad u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1},$$

satisfan a mesma ecuación diferencial, polo tanto,

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = C,$$

onde  $C$  é constante. Substituíndo  $u, u_1$  e  $u_2$  por  $y, y_1$  e  $y_2$  esta relación pode reescribirse como,

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = C \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}.$$

Entón chegamos a que a solución xeral dunha ecuación diferencial de Riccati pode expresarse como unha función racional en termos de tres solucións particulares.

Reciprocamente, unha función do tipo,

$$y = \frac{Cf_1 + f_2}{Cf_3 + f_4},$$

onde  $f_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  son funcións de  $x$  e  $C$  é unha constante arbitraria, satisfai a ecuación de Riccati (pódese probar desdexando  $C$  e derivando  $y$ ).



## Capítulo 3

# A Monodromía da bicicleta

Sexa unha curva parametrizada da traxectoria da roda dianteira,  $\alpha(t)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Para unha lonxitude prefixada,  $l$ , e para cada punto da traxectoria da bici,  $\alpha(t)$ , existen infinitas posibilidades de dirección de arranque,  $\mathbf{r}$ , en concreto tantas como puntos na circunferencia unidade,  $\mathbf{S}^1$ . Por iso, consideramos a familia de circunferencias unidade centradas en cada instante de  $\alpha$ , e identificaremos estas entre sí mediante o transporte paralelo (fixémonos que en curvas pechadas é a identidade). Fixando un punto  $\alpha(t_0)$  na curva  $\alpha$ , pola Proposición 1.8 e as condicións (1.1) e (1.3) definimos, para cada instante  $t$ , o difeomorfismo,

$$M_l^t : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1 \text{ (Monodromía da bicicleta)}. \quad (3.1)$$

que asigna a cada  $\mathbf{r}_0$  un  $\mathbf{r}(t)$ , onde  $\mathbf{r}(t)$  é a solución de (1.4), que satisfai a condición inicial  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ . Noutras palabras,  $M_l^t$  é o fluxo da EDO (1.4).

Que é o que fai a monodromía<sup>1</sup> da bicicleta? fixado un punto inicial da roda dianteira,  $\alpha(t_0)$ , unha lonxitude desta,  $l$ , podemos elixir unha orientación inicial,  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{S}^1$ , e o que fai é asignarlle a súa orientación no instante  $t$ ,  $\mathbf{r}(t)$ .

*Observación 3.1.* fixada unha dirección inicial nun punto o resto de direccións nos restantes puntos estarían fixadas. O difeomorfismo está ben definido grazas a que (1.4) está nas hipóteses do Teorema de Picard-Lipschitz, polo tanto tense a existencia e unicidade de solución.

Na seguinte figura ilústrase á esquerda dez posicións iniciais diferentes do cadro da bici, e a dereita a súa posición final despois de recorrer a roda dianteira a curva pechada azul,

---

<sup>1</sup>T. Tokieda suxeriu o termo “opistodromía”.

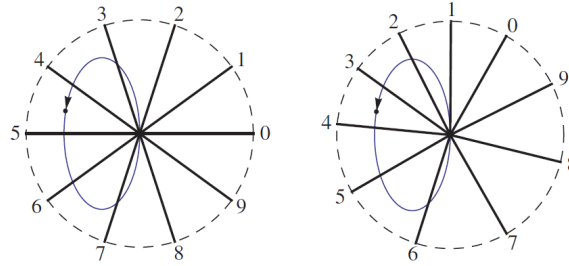


Figura 3.1: A monodromía da bicicleta. Imaxe extraída de [11]

### 3.1. A monodromía como unha transformación de Möbius

A monodromía (1.6) é unha transformada de Möbius (i.e., unha transformación a través do cociente de funcións lineais) actuando sobre a circunferencia de radio  $l$ . Vexamos isto formalmente.

**Proposición 3.2.** *A EDO (1.4) é unha EDO de Riccati.*

*Demostración.* No primeiro capítulo probamos, despois de un cambio de variable, que a ecuación (1.6) podía expresarse como:

$$p' = \frac{1}{2l}(-v_2 + 2v_1p + v_2p^2). \quad (3.2)$$

Vemos que é unha EDO de Riccati.

QED

Agora, si temos o seguinte sistema linear de ecuacións diferenciais,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Aplicando unha proactivización,  $p$ , obtemos,

$$\begin{aligned} p'(t) &= \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right)' \\ &= \frac{y'(t)}{x(t)} - p(t) \frac{x'(t)}{x(t)} \\ &= \frac{a_{21}(t)x(t) + a_{22}(t)y(t)}{x(t)} - p(t) \frac{a_{11}(t)x(t) + a_{12}(t)y(t)}{x(t)} \\ &= a_{21}(t) + a_{22}(t)p(t) - a_{11}(t)p(t) - a_{12}(t)p^2(t), \end{aligned}$$



polo tanto, a ecuación de Riccati asociada á proxectivización,  $p(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$ , é:

$$p'(t) = a_{21}(t) + (a_{22}(t) - a_{11}(t))p(t) - a_{12}(t)p^2(t) \quad (3.3)$$

**Teorema 3.3.** *A solución xeral dunha ecuación diferencial é unha función racional linear (transformación de Möbius) dunha constante arbitraria se, e só se, dita ecuación é unha ecuación de Riccati.*

*Demostración.* Primeiro supoñamos que a solución  $p(t)$  dunha ecuación diferencial de aplicar unha transformación de Möbius a unha constante arbitraria  $k$ , i.e.,  $p(t)$  ten a forma,

$$p(t) = \frac{kA(t) + B(t)}{kC(t) + D(t)}, \quad (3.4)$$

onde  $A(t), B(t), C(t)$  e  $D(t)$  son funcións analíticas de  $t$ . Se despexamos a constante  $k$  da ecuación (3.4) temos,

$$k = \frac{B(t) - p(t)D(t)}{p(t)C(t) - A(t)}, \quad (3.5)$$

derivando a ambos lados de (3.5) con respecto a  $t$  (vamos a obviar o parámetro  $t$  para non facer engorrosa a notación) resulta,

$$p'(AD - BC) = -p^2(C'D - CD') - p(B'C - A'D - C'B + D'A) - (A'B - AB'),$$

é dicir, obtense unha ecuación de Riccati.

Por outro lado, supoñamos que temos unha ecuación de Riccati da forma,

$$p'(t) = g(t) + q(t)p(t) + r(t)p^2(t), \quad (3.6)$$

e sexa  $p_1(t)$  unha solución particular coñecida de (3.6), i.e.,

$$p_1'(t) = g(t) + q(t)p_1(t) + r(t)p_1^2(t).$$

Facendo a transformación da variable dependente,

$$p(t) = p_1(t) + \frac{1}{v(t)}, \quad (3.7)$$

temos,

$$\begin{aligned} p'(t) &= p_1'(t) - \frac{1}{v^2(t)}v'(t) \\ &= g(t) + q(t)p_1(t) + r(t)p_1^2(t) - \frac{1}{v^2(t)}v'(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3.6) tamén nos leva a,

$$\begin{aligned} p'(t) &= g(t) + q(t)p(t) + r(t)p(t)^2 \\ &= g(t) + q(t)\left(p_1(t) + \frac{1}{v(t)}\right) + r(t)\left(p_1(t) + \frac{1}{v(t)}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

igualando (3.8) e (3.6) chegamos a que,

$$-\frac{1}{v^2(t)}v'(t) = r(t)\frac{1}{v^2(t)} + 2p_1(t)r(t)\frac{1}{v(t)} + q(t)\frac{1}{v(t)},$$

simplificando,

$$v'(t) + (q(t) + 2p_1(t)r(t))v = -r(t)$$

que é unha ecuación linear en  $v(t)$ , cuxa solución é (integrando un par de veces) da forma,

$$v(t) = k\varphi(t) + \psi(t), \quad (3.10)$$

onde  $k$  é unha cte arbitraria.

De (3.7) e (3.10) concluimos,

$$p(t) = p_1(t) + \frac{1}{k\varphi(t) + \psi(t)} = \frac{kp_1(t)\varphi(t) + p_1(t)\psi(t) + 1}{k\varphi(t) + \psi(t)},$$

é dicir, a solución xeral da ecuación de Riccati é unha función racional linear. QED

Como consecuencia destes resultados temos o seguinte resultado.

**Corolario 3.4. (Teorema de Foote):** *O fluxo da l-bicicleta (1.4) é a proxección en  $\mathbb{S}^1$  do fluxo do sistema linear seguinte,*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2l} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

mediante a aplicación (en notación de variable complexa)

$$z = x + iy \mapsto \mathbf{r} = \frac{z^2}{\|z\|^2},$$

ou de forma máis explícita, como aplicación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$(x, y) \mapsto \mathbf{r} = \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right),$$

polo tanto, a monodromía da bicicleta (o fluxo de (1.4)) vén dada polos elementos do grupo de Möbius  $PSL_2(\mathbb{R})$  de transformacións lineais fraccionarias,  $p \mapsto \frac{ap + b}{cp + d}$ .

*Demostración.* Considerando o sistema linear seguinte,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

como xa vimos antes, a solución  $(x(t), y(t))$  deste sistema proxéctase á solución  $p(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$  da ecuación de Riccati seguinte,

$$p'(t) = a_{21}(t) + (a_{22}(t) - a_{11}(t))p(t) - a_{12}(t)p^2(t). \quad (3.13)$$

Polo tanto o fluxo da ecuación de Riccati (3.13) é a proxección do fluxo do sistema linear (3.12).

Aplicando o mesmo procedemento a (3.11), obtemos (3.2). Polo tanto o fluxo da ecuación de Riccati (3.2) é a proxección do fluxo do sistema linear (3.11), e dito fluxo vén dado por unha transformación de Möbius tal e como vimos no teorema (3.3). QED

## 3.2. A monodromía e a curvatura

Vexamos outro acercamento ao problema reformulando a ecuación(1.4), en este parágrafo asumiremos que a curva da roda dianteira,  $\alpha$ , está parametrizada polo p.l.a.  $s$ .

**Definición 3.5. (Vector normal):** O **vector normal** a unha curva plana regular p.l.a.  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o vector  $\mathbf{n}(s) = J(\mathbf{v}(s))$ , onde  $\mathbf{v} = \alpha'$ , e onde  $J$  é a estrutura complexa en  $\mathbb{R}^2$ , i.e., a rotación positiva de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

Así podemos definir a seguinte base

**Definición 3.6. (Diedro de Frenet):** Definimos a base ortonormal positivamente orientada do plano euclídeo para cada  $s$ , que recibe o nome de **Diedro de Frenet**.

Estudemos como varían estes dous vectores segundo varíe  $s$ . Recordemos a Observación 1.5 que nos dicía que se a curva está p.l.a.,  $\alpha' \cdot \alpha'' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$ , sempre (en realidade bastaría con que a norma de dito vector fose constante). Tal e como definimos o vector normal (rotación do vector velocidade) vai a cumprir o mesmo, polo tanto  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$ . Como o Diedro de Frenet é unha base ortonormal do espazo euclídeo, calquera vector se pode expresar nesta mediante as proxeccións en ditos eixos de dito vector. Entón, vexamos que

expresión terían os vectores  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{n}'$  (xa que queríamos obter información de como varían).

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(s) = (\mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}(s) + (\mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{n}(s))\mathbf{n}(s) = (\mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{n}(s))\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = (\mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{v}(s))\mathbf{v}(s) + (\mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{n}(s))\mathbf{n}(s) = (\mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{v}(s))\mathbf{v}(s) \end{cases}$$

Ademais como  $\mathbf{v}(s) \perp \mathbf{n}(s)$  para todo  $s$ , entón tense que,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \frac{d}{ds}(\mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \implies \\ &\implies (\mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)) = -(\mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{n}'(s)). \end{aligned}$$

Co cal xa podemos introducir a seguinte definición,

**Definición 3.7. (Curvatura):** Chámase **curvatura** dunha curva plana regular p.l.a.  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  á función  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante,

$$\kappa(s) := \alpha''(s) \cdot J(\alpha'(s)) = \mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{n}(s).$$

Ademais definimos (onde teña sentido) a función **radio de curvatura** como,

$$p(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}.$$

*Observación 3.8.* Outro modo de achar a curvatura dunha curva plana regular p.l.a. é a seguinte: Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ten coordenadas  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , entón,

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \alpha''(s) \cdot J(\alpha'(s)) = (x''(s), y''(s)) \cdot (-y'(s), x'(s)) \\ &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)). \end{aligned}$$

Así chegamos ás seguintes expresións de variacións dos vectores do Diedro de Frenet.

**Definición 3.9. (Fórmulas de Frenet):** As seguintes ecuacións reciben o nome de **Fórmulas de Frenet** dunha curva plana,

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{v}(s) \end{cases}$$

*Observación 3.10.* Vemos que a aceleración só ten compoñente normal que é  $|\kappa(s)|$ , e esta é igual a  $|\kappa(s)| = |\kappa(s)|\|\mathbf{n}(s)\| = \|\mathbf{v}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$ .

*Observación 3.11.* O signo da curvatura indícanos en que sentido rota o vector velocidade  $\alpha'(s) = \mathbf{v}(s)$  conforme se recorre a curva  $\alpha$ . A seguinte figura ilustra esta observación.

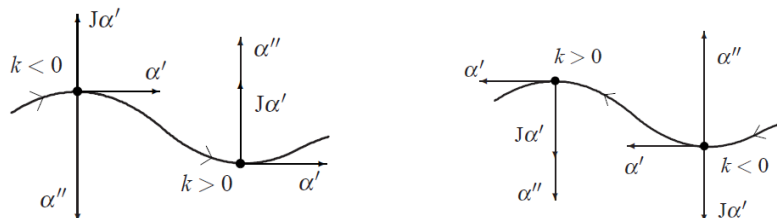


Figura 3.2: Signo da curvatura. Imaxe extraída de [15]

Sexa agora  $\Theta$  o ángulo coordenado de  $\mathbf{r}$  na Referencia de Frenet  $\{\mathbf{v}, \mathbf{n}\}$ , isto é,  $\mathbf{r} = \exp(i\Theta)\mathbf{v} = \cos(\Theta)\mathbf{v} + \text{sen}(\Theta)\mathbf{n}$  (nótese que  $\Theta < \pi$ ).

**Proposición 3.12.**  $\mathbf{r} = \cos(\Theta)\mathbf{v} + \text{sen}(\Theta)\mathbf{n}$  é solución da EDO da l-bicicleta (1.4) para  $n = 2$  se, e só se,  $\Theta(t)$  satisfai,

$$\Theta'(t) = \frac{\text{sen}(\Theta(t))}{l} - \kappa.$$

*Demostración.* Usando a coordenada proxectiva,  $p = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , a última ecuación convértese na seguinte outra,

$$p' = \frac{p}{l} - \frac{\kappa}{2}(1 + p^2),$$

a cal é o resultado de proxectivizar o fluxo do seguinte sistema linear de ecuacións diferenciais (co mesmo método visto na sección anterior),

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & \kappa \\ \kappa & \frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

QED



## Capítulo 4

# Clasificación da Monodromía da bicicleta

### 4.1. Clasificacións das transformacións de Möbius

As transformacións de Möbius, cando a curva debuxada pola roda dianteira é pechada (o transportado paralelo é a identidade neste caso), pódense clasificar en tres tipos diferentes: elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Recordemos que si,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con determinante igual un, entón o seu polinomio característico é,

$$p_A(x) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + 1,$$

onde  $\operatorname{tr}(A)$  é a traza da matriz asociada a dita transformación. Podemos clasificar as transformacións mediante os valores propios e os vectores propios da matriz, xa que estamos nun sistema de ecuacións diferenciais linear. As raíces do polinomio característico son os autovalores desta matriz asociada. Podemos diferenciar os diferentes tipos de raíces observando o discriminante do polinomio,  $D = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4$ :

- $D < 0 \iff |\operatorname{tr}(A)| = |a + d| < 2$ , entón os autovalores de  $A$  son complexos,  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  con  $\|\lambda\| = 1$ .
- $D = 0 \iff |\operatorname{tr}(A)| = 2$ , entón  $A$  só ten un valor propio real de multiplicidade 2.

- $D > 0 \iff |\text{tr}(A)| > 2$ , entón  $A$  ten dous autovalores reais distintos.

Vamos entón a clasificalas:

- **Hiperbólicas:** Son aquelas  $T_A$  nas que  $|\text{tr}(A)| > 2$ . Correspóndense (salvo conxugación) a matrices da forma,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Isto é, son homotecias,

$$T_A(z) = \lambda^2 z.$$

Restrinxida ao círculo  $\mathbb{S}^1 \equiv \{\partial H\} \cup \{\infty\}$  é a homotecia,  $r \mapsto \lambda^2 r$ . Ten dous puntos fixos: o 0 e  $\infty$ . O cero é repulsor e o  $\infty$  é atractor.

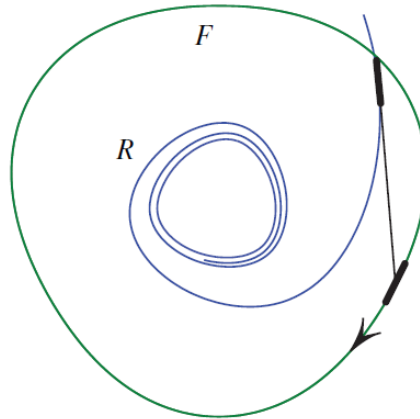


Figura 4.1: Comportamento hiperbólico. Imaxe extraída de [11]

- **Parabólicas:** Son aquelas onde  $|\text{tr}(A)| = 2$ . Correspóndense coas matrices asociadas da forma,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ao restrinxirnos a  $\mathbb{S}^1$  temos unha traslación. Ten un único punto fixo,  $\infty$ , que non é nin atractor nin repulsor.



- **Elípticas:** Son aquelas onde  $|\text{tr}(A)| < 2$ . Correspóndense coas matrices coa forma seguinte,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

onde  $a^2 + b^2 = 1$  e  $b \neq 0$ . Polo tanto,

$$T_A(z) = \frac{az + b}{-bz + a}.$$

Si  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = \text{sen}(\theta)$ , entón a restrición de  $T_A$  a  $\mathbb{S}^1 \equiv \{\partial H\} \cup \{\infty\}$  é rotar  $\theta$  e logo proxectar. Si  $x \in \{\partial H\} \cup \{\infty\}$  temos,

$$x \mapsto \frac{ax + b}{-bx + a} = \pi \left( \begin{pmatrix} ax + b \\ -bx + a \end{pmatrix} \right) = \pi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Aquí, } \pi \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x}{y};$$

$T_A$  elíptica non ten puntos fixos<sup>1</sup>.

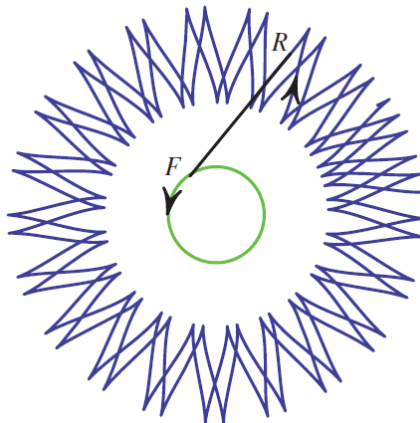


Figura 4.2: Comportamento elíptico. Imaxe extraída de [11]

---

<sup>1</sup>  $\infty \mapsto -\frac{a}{b}$  e  $\frac{a}{b} \mapsto \infty$

## 4.2. Un caso particular: a circunferencia de radio $R$

Consideremos agora que a roda dianteira describe unha circunferencia de radio  $R$ , entón temos 3 situacións diferentes segundo o radio elixido. Vexamos isto:

- **Caso  $R > 1$ :** A monodromía neste caso é hiperbólica e a curva traseira é a circunferencia de raio  $\sqrt{R^2 - 1}$ . Ten dous puntos fixos, polo tanto existen dúas posicións iniciais diferentes nas que a bici debuxa sendas curvas pechadas, tanto como para a roda dianteira como para a traseira.

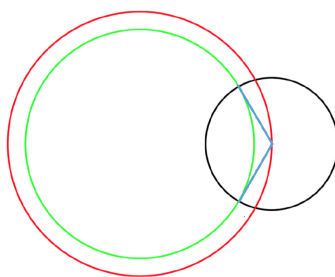


Figura 4.3: Monodromía hiperbólica

- **Caso  $R = 1$ :** A monodromía neste caso é parabólica. Temos só un punto fixo, é dicir, unha soa posición inicial do cadro da bici para que a roda traseira sexa pechada. Esta posición inicial é colocando o cadro da bici ortogonalmente á roda dianteira (como no caso da tractriz). Neste caso particular a roda traseira sería un só punto.

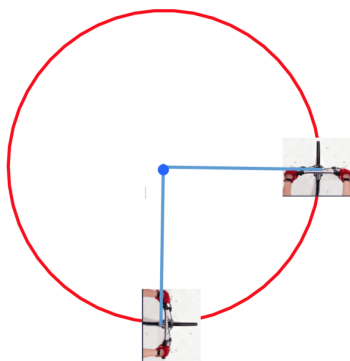


Figura 4.4: Monodromía parabólica

- **Caso  $R < 1$ :** A monodromía neste caso é elíptica. Non hai puntos fixos, logo ningunha posición inicial da bici nos dá unha curva pechada para a curva que debuxa a roda traseira.

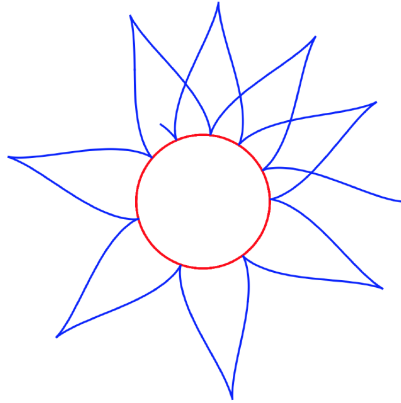


Figura 4.5: Monodromía elíptica



## Capítulo 5

# O planímetro de Prytz e a Conxectura de Menzin

### 5.1. O planímetro de Prytz

O [planímetro de Prytz](#) é un utensilio que nos serve para medir a área dunha figura plana (restrinxímonos ao caso bidimensional) a través da súa fronteira, ten unha correspondencia co Teorema de Green. Este instrumento segue o mesmo modelo ca o presentado anteriormente, vexamos como. O planímetro de Prytz consiste nunha barra, que representa ao cadro da bici, cuxo extremo ten unha punta afiada que se chama, trazador e, que representa á roda dianteira, mentres que o outro extremo da barra remata en forma de cicel paralelo á barra e, que representaría á roda traseira. É parecido a unha machada de aí o seu outro nome, **hatchet planimeter**, no idioma anglosaxón. Facendo recorrer o trazador pola fronteira da figura plana, segundo a orientación de inicio da barra que elixamos, o cicel vai debuxando unha curva ata que o trazador chega ao punto de partida. Vemos que o cicel do planímetro non é máis que a monodromía da bicicleta. Agora vexamos como medir áreas con este aparello tan enxeñoso. Así como o trazador empeza e remata no mesmo sitio, o cicel non ten porqué. Trazamos un segmento co punto de partida do trazador e o punto inicial do cicel, e outro co punto de inicio do trazador e o punto de remate do cicel. Pois ben, o ángulo que forman estes dous segmentos,  $\Delta\theta$ , aproxímanos a área da figura plana como,  $l^2\Delta\theta + O\left(\frac{1}{l}\right)$ . Para que o planímetro de Prytz funcione é indispensable que a monodromía sexa elíptica, así  $\theta$ , o ángulo de rotación, é independente de onde se inicie o recorrido do planímetro.

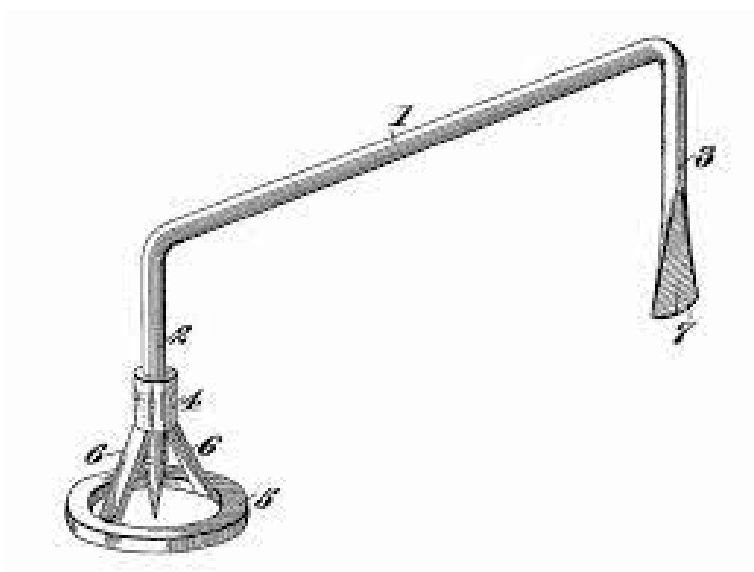


Figura 5.1: Planímetro de Prytz. Imaxe extraída de [10]

Vexamos de onde sae isto, pero antes lembremos o Teorema de Green:

**Teorema 5.1. (Teorema de Green):** *Sexa  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , unha parametrización positivamente orientada dun polígono curvado en  $\mathbb{R}^2$ , e sexa  $\Omega$  o subconxunto aberto limitado por este. Sexan agora,  $P, Q : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , funcións diferenciables,  $P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$ . Entón,*

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t)] dt$$

onde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  é unha partición de  $[a, b]$ , tal que,  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é diferenciable para todo  $i = 0, \dots, k$  con  $P(t) = P(x(t), y(t))$  e  $Q(t) = Q(x(t), y(t))$ . Se a nosa rexión  $\Omega$  é simple, temos que,

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} Px' + Qy'.$$

Agora ben, grazas a este teorema, facendo unha escolla axeitada das funcións  $P, Q$ , podemos calcular a área,  $A$ , que encerra a curva da roda dianteira e traseira, que é unha rexión simple. Vemos que elixindo como  $P(x, y) = -y$  e  $Q(x, y) = x$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y dx + x dy &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 2 dx dy \\ &= \iint_{\Omega} dx dy = A \end{aligned}$$

Polo tanto, chegamos á conclusión de que se as coordenadas da curva son  $(x, y)$  a área que encerra dita curva ven dada pola expresión seguinte,

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} xdy - ydx = A$$

Agora vexamos que información nos aporta isto ao noso modelo. Sexa  $A_d$  a área da rexión que encerra a nosa curva que debuxa a roda dianteira, e sexa  $A_t$  a área da rexión que encerra a nosa curva que debuxa a roda traseira. Sexan  $(x, y)$  e  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  as coordenadas da roda dianteira e traseira respectivamente. As coordenadas da roda traseira veñen dadas pola expresión (1.2) en función das coordenadas da roda dianteira,  $(x, y)$ , e do tamaño da bicicleta,  $l$  (estamos omitindo o parámetro  $t$  para simplificar a notación), é dicir,

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + l \cos(\theta), y + l \sin(\theta))$$

polo tanto,

$$(d\tilde{x}, d\tilde{y}) = (dx - \theta' l \sin(\theta), dy + \theta' l \cos(\theta))$$

Vamos ver que información nos dá a diferenza das expresións  $A_d$  e  $A_t$ , pero antes vexamos que expresión explícita ten  $\tilde{x}d\tilde{y} - \tilde{y}d\tilde{x}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{x}d\tilde{y} - \tilde{y}d\tilde{x} &= (x + l \cos(\theta))(dy + d\theta l \cos(\theta)) - (y + l \sin(\theta))(dx - d\theta l \sin(\theta)) \\ &= xdy + d\theta l \cos(\theta)x + l \cos(\theta)dy + d\theta l^2 \cos^2(\theta) \\ &\quad - ydx + d\theta l \sin(\theta)y - l \sin(\theta)dx + d\theta l^2 \sin^2(\theta) \\ &= xdy + d\theta l \cos(\theta)x + 2l \cos(\theta)dy - l \cos(\theta)dy + d\theta l^2 \cos^2(\theta) \\ &\quad - ydx + d\theta l \sin(\theta)y - 2l \sin(\theta)dx + l \sin(\theta)dx + d\theta l^2 \sin^2(\theta) \\ &= (xdy - ydx) + (d\theta l^2 \cos^2(\theta) + d\theta l^2 \sin^2(\theta)) \\ &\quad + (2l \cos(\theta)dy - 2l \sin(\theta)dx) + (-l \cos(\theta)dy + d\theta l \sin(\theta)y + l \sin(\theta)dx + d\theta l \cos(\theta)x) \\ &= (xdy - ydx) + l^2 d\theta + 2l\lambda - ld(y \cos(\theta) - x \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Onde  $\lambda = \cos(\theta)dy - \sin(\theta)dx$ . Agora achemos a diferenza entre as expresións  $A_d$  e  $A_t$ ,

$$\begin{aligned} A_d - A_t &= \frac{1}{2} \int xdy - ydx - \frac{1}{2} \int \tilde{x}d\tilde{y} - \tilde{y}d\tilde{x} \\ &= \frac{1}{2} \int xdy - ydx - \frac{1}{2} \int xdy - ydx + l^2 d\theta + 2l\lambda - ld(y \cos(\theta) - x \sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{2} \int -l^2 d\theta - 2l\lambda + ld(y \cos(\theta) - x \sin(\theta)) \\ &= -\frac{l^2}{2} \int d\theta - l \int \lambda + \frac{l}{2} \int d(y \cos(\theta) - x \sin(\theta)) \\ &= -\frac{l^2}{2} \int d\theta - l \int \lambda. \end{aligned}$$

Onde a última igualdade é certa dado que a curva é pechada. A integral  $\int d\theta = 2\pi$  multiplicado polo número de voltas que da o segmento entre a roda dianteira e traseira. A condición de non esvaramento (1.3) implica que  $\lambda = 0$ , xa que,  $\lambda = 0 \iff \cos(\theta)dy = \sin(\theta)dx \iff \frac{dy}{dx} = \tan(\theta)$ . Polo tanto, no noso modelo teríamos,

$$A_d - A_t = -\frac{l^2}{2} \int d\theta$$

Entón se se cumpre o modelo,  $\lambda = 0$ , tense,

$$A_d = -\frac{l^2}{2} \int d\theta + A_t$$

e se non se cumpre,  $\lambda \neq 0$ , temos,

$$A_d = -\frac{l^2}{2} \int d\theta - l \int \lambda + A_t \tag{5.1}$$

Consideramos unha volta enteira do trazador sobre a curva pechada que debuxa a roda dianteira. Este movemento pode incumprir a restrición de que  $\lambda = 0$ . A integral,  $\int \lambda$ , mide dita violación da restrición. En particular,  $\int \lambda$ , mide a distancia que recorre a roda traseira na dirección ortogonal ao cadro, é dicir, canto esvara a roda traseira.

Podemos usar esta fórmula para medir a área baixo a curva da tractriz, o exemplo 2 visto no Capítulo 1, e daríanos que é  $\frac{\pi l^2}{2}$ , xa que  $\lambda = 0$  e o cadro da bici xira  $\pi^1$ . Tamén nos dí que a área comprendida entre o trazado da roda dianteira e o da traseira, como podemos ver na seguinte figura, é  $\pi l^2$ .

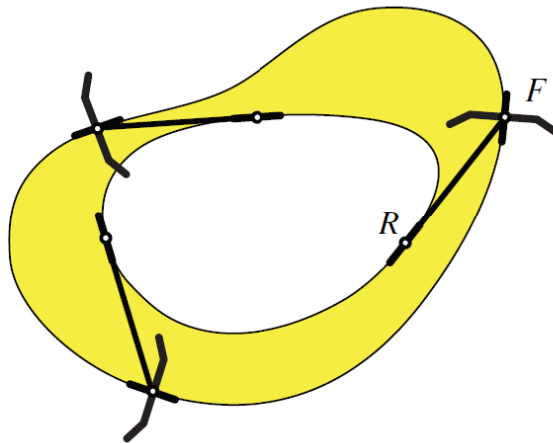


Figura 5.2: Representación da área comprendida entre os dous trazados. Imaxe extraída de [11]

<sup>1</sup>utilizaríamos a ecuación (5.1) con integrais impropias



Vexamos agora canto de ben aproxima as áreas o noso planímetro. Consideremos que o trazador empeza nun punto  $B$  e remata no mesmo, é dicir, unha volta á unha curva pechada. Vemos que a roda dianteira debuxaría unha curva pechada, pero non ten porqué ocorrer o mesmo coa traseira. Polo tanto o cicel non ten porqué rematar na mesma posición inicial. A orientación inicial do cadro e a final forma un ángulo,  $\Delta\theta$ , o cal incumpre a condición de non escorregamento. Notemos que  $\lambda = 0$  para todo o movemento excepto para a última parte, na que obtemos integrando o valor de  $l\Delta\theta$ , que non é máis que a lonxitude de arco que debuxa a roda traseira (cicel) na súa posición inicial e final. Temos que observar tamén que,  $\int d\theta = 0$ , porque o planímetro detense na posición orixinal sen facer unha volta completa.

Entón, usando (5.1), quedaríanos a expresión seguinte,

$$A_d = l^2\Delta\theta + A_t.$$

Para un valor de  $A_t$  pequeno é razoable a aproximación  $A_d \approx l^2\Delta\theta$ .

Agora a cuestión é: canto de boa é esta aproximación? O erro é  $A_t$ , que é a área delimitada polo recorrido en zig-zag do cicel máis o arco que se forma entre o punto final e inicial do cicel (ver figura (5.3)). Algunhas posicións iniciais son mellores opcións que outras, xa que dan diferentes resultados para  $A_t$ . A suxerencia pola maioría de autores sobre este tema é a de empezar e rematar no centroide da rexión delimitada polo trazador.

Temos claro que a mellor opción e empezar no centroide, pero canto de mellor? Só Prytz ([25]) e Hill ([12]) dan suficientes detalles matemáticos rigorosos (ver resumo en [10]). O seu análise mostra que, aínda empezando no centroide, non se elimina o erro cometido. Ensina que, para un punto de partida arbitrario, o erro cometido é da orde de  $O(1/l)$ , e empezando no centroide é,

$$l^2\Delta\theta = A_d \left( 1 + \frac{R^2}{2l^2} \right) + O((d/l)^3),$$

onde  $R^2$  é a distancia media ao cadrado dos puntos da curva dianteira ao centroide e  $d$  é o diámetro da rexión.

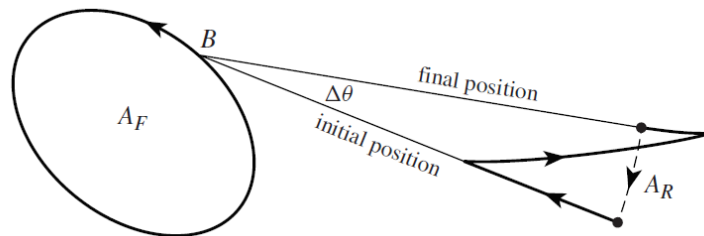


Figura 5.3: Representación do planímetro. Imaxe extraída de [11]

## 5.2. A conxectura de Menzin

A.L. Menzin, foi un enxeñeiro que inventou unha lixeira modificación do planímetro. Ademais conxecturou, en 1906, unha relación entre os dous tipos máis importantes de comportamento da bicicleta (hiperbólico e elíptico). Nas súas palabras: "Se a liña media ao longo da área é longa en comparación coa lonxitude da bici, entón a trazada da roda traseira acercárase asintoticamente a unha curva pechada límite. A partir de observacións puramente empíricas, parece que este efecto pode obterse sempre que a lonxitude da bicicleta non exceda o radio dun círculo de área igual á área da curva da roda dianteira". De xeito máis formal,

**Conxectura 5.2. (Menzin):** *Supoñamos que a traxectoria debuxada pola roda dianteira é unha curva pechada simple, que encerra unha rexión con área,  $A$ . Se  $A > \pi l^2$ , entón a monodromía  $M_\alpha$  ten un punto fixo atractor. Ou o que é o mesmo, a monodromía sería hiperbólica.*

Que a área que encerra a rexión sexa  $A > \pi l^2$  non é unha condición necesaria para que a monodromía  $M_\alpha$  sexa hiperbólica. A seguinte imaxe, na que en vermello sae a trazada da roda dianteira e en azul a da traseira, é un contra-exemplo disto,

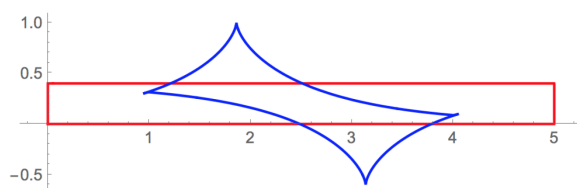


Figura 5.4: figura bicicleta con monodromía hiperbólica

No 2009 probouse a conxectura engadindo unha condición:

**Teorema 5.3. (Teorema de Levi-Tabachnikov):** *A conxectura é certa se supoñemos que  $\alpha$  debuxa unha curva conveza.*

Tampouco é unha condición necesaria<sup>2</sup> que  $\alpha$  sexa unha curva conveza.

**Teorema 5.4.** *Se  $|\kappa| \leq 1$  (pero  $|\kappa|$  non é idénticamente 1), entón a monodromía da bicicleta  $M_\alpha$  é hiperbólica.*

**Corolario 5.5.** *Para  $\alpha$  arbitraria,  $c\alpha$  ten monodromía hiperbólica para toda constante  $c$  suficientemente grande.*

*Demostración.* A curvatura  $\kappa_{c\alpha} = \frac{1}{c}\kappa_\alpha$

QED

<sup>2</sup>Non se coñecen condicións necesarias sobre  $\alpha$  para que a súa monodromía sexa hiperbólica.

## Apéndice A

# Transformacións de Möbius

As transformacións de Möbius (ou transformacións racionais lineais) son as funcións,  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , da forma

$$\omega = T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}_\infty$  denota a compactificación de Aleksandrov de  $\mathbb{C}$  (que se identifica coa esfera de Riemann mediante a proxección estereográfica). Dita transformación pódese identificar matricialmente da seguinte forma,

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Téñense as seguintes propiedades,

- $T_g = T_{g'}$  se, e só se, existe  $\lambda$  tal que  $g = \lambda g'$ .
- $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$ .
- Si  $g = I_2$  entón  $T_g(z) = z$ .

Se  $ad - bc = 0$  a transformación é singular (constante), colapsa todo o plano nun só punto, xa que (supoñamos que  $a$  e  $c$  son diferentes de cero, xa que se o son é trivial que é cte),

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a \left( z + \frac{b}{a} \right)}{c \left( z + \frac{d}{c} \right)} = \frac{a \left( z + \frac{b}{a} \right)}{c \left( z + \frac{b}{a} \right)} = \frac{a}{c}$$

excepto para o valor  $z = -\frac{d}{c}$  ( $c \neq 0$ ) onde  $T$  non está definida. Estamos interesados nas transformacións non singulares, entón impoñemos a condición  $ad - bc \neq 0$ . Agora sexa,

- $c = 0$ .

Pola condición de non singularidade temos que  $ad \neq 0$ , polo tanto ambos son diferentes de cero.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \alpha z + \beta,$$

onde  $\alpha = \frac{a}{d} \neq 0$  e  $\beta = \frac{b}{d}$ . Esta é unha bixección continua de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ . Verifica que,  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$ . Polo tanto definindo  $T(\infty) = \infty$  temos unha bixección continua de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , é dicir, un homeomorfismo, dado que  $\mathbb{C}_\infty$  é compacto.

- $c \neq 0$ .

$T$  está ben definida para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ . Tense,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \omega \in \mathbb{C} \iff \omega \neq \frac{a}{c}$$

xa que si  $\omega = \frac{a}{c} \iff ad - bc = 0$ . De modo que,

$$\omega \neq \frac{a}{c} \implies z = \frac{d\omega - b}{a - c\omega} \in \mathbb{C}.$$

Entón a imaxe de  $T$  é  $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ . Logo  $T : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ , dada por,  $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ . Verifica,

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} T(z) = \infty \text{ e } \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c}.$$

Logo temos un homeomorfismo de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Por todo o anterior tense a seguinte proposición.

**Proposición A.1.** *Sexan  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tales que  $ad - bc \neq 0$ . Defínese do seguinte modo  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  da seguinte forma,*

- para  $c = 0$ .

$$T(z) = \frac{az + b}{d} \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

$$T(\infty) = \infty.$$

- para  $c \neq 0$ .

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},$$

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Entón  $T$  é un homeomorfismo de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

**Definición A.2. (Transformación de Möbius):** Chamamos **transformación de Möbius** de parámetros  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$  á aplicación definida como na proposición anterior. Denotamos á familia de todas elas como  $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ .

Sabemos que,  $\lambda g = g'$  se e só se  $T_g = T_{g'}$ , por tanto  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $ad - bc = K \neq 0$ , temos,

$$T'(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{z}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{z}}},$$

é equivalente a  $T(z)$ .  $T'$  debe cumprir que

$$\frac{a}{\sqrt{z}} \frac{d}{\sqrt{z}} - \frac{b}{\sqrt{z}} \frac{c}{\sqrt{z}} = \frac{ad - bc}{k} = 1$$

co cal podemos impoñer a condición  $ad - bc = 1$ . As transformacións de Möbius máis elementais son,

- $T(z) = z + a$  que se chama **traslación**,
- $T(z) = az$  para todo  $a \neq 0$ ,
  - se  $a \in \mathbb{C}$  con  $|a| = 1$  chámase **rotación**,
  - se  $a \in \mathbb{R}^+$  denomínase como **homotecia**,
  - se  $1 < a \in \mathbb{R}^+$  noméase como **dilatación**,
- $T(z) = \frac{1}{z}$  para  $z \neq 0$  denótase como **inversión**.

Toda transformación de Möbius é composición destas transformacións elementais, xa que,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

donde podemos ver que se compón dunha traslación, dunha inversión, unha rotación e unha homotecia.

**Definición A.3. (Holomorfa):** Unha función definida nun subconxunto do plano complexo  $\mathbb{C}$  con valores en  $\mathbb{C}$  dise que é **holomorfa nun punto** do seu dominio se, é diferenciable no sentido complexo nun entorno aberto de dito punto. Se a función é holomorfa en todo o seu dominio dise **holomorfa**. Ás veces úsase o termo función **analítica** en lugar de holomorfa.

Esta condición implica que a función é infinitamente diferenciable e que pode ser descrita mediante a súa serie de Taylor.

**Definición A.4. (Conforme):** Sexa  $D \subseteq \mathbb{C}$  aberto. Unha función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  dise que é **conforme** se,  $f$  é analítica ou holomorfa e  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$ .

Dado que toda transformación de Möbius é composición de funcións elementais, entón as transformacións de Möbius son funcións holomorfas, xa que as elementais o son. Son invertibles e, ademais teñen a útil propiedade de que sempre transforman liñas e circunferencias en liñas e circunferencias, isto é, si  $C$  é un círculo ou unha liña entón  $T(C)$  será un círculo ou unha liña. Tamén son útiles para levar un dominio non limitado noutro que si o está, por exemplo o semiplano superior complexo  $\mathbb{H} := \{z \text{ tal que } \text{Im}(z) > 0\}$  no disco unidade con,

$$T(z) = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Non preservan xeralmente a forma do obxecto, pero si os ángulos e a orientación, é dicir, son funcións conformes (analítica  $\implies$  conforme). Pódense ver os diferentes tipos de transformacións que farían no plano complexo, e incluso ver o que farían nunha esfera identificando  $\mathbb{C}_\infty$  coa esfera de Riemann usando a proxección estereográfica, no seguinte enlace [1]. Por eso unha transformación de Möbius pode verse no plano complexo como a composición dunha proxección estereográfica do plano sobre a esfera, seguida dunha rotación ou desprazamento da esfera a unha nova localización e finalmente unha proxección estereográfica, esta vez da esfera ao plano.

**Proposición A.5.**  $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$  é un subgrupo (coa composición) do grupo dos homomorfismos do plano complexo ampliado,  $\mathbb{C}_\infty$ .

$SL(2, \mathbb{C})$  é o grupo (coa multiplicación de matrices como operación) no que os seus elementos son as matrices cadradas  $2 \times 2$  con entradas complexas e determinante un.  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I_2\}$ .

**Corolario A.6.** A función dada por  $g \mapsto T_g$  é un isomorfismo de grupos entre  $PSL(2, \mathbb{C})$  e  $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ .

$SL(2, \mathbb{R})$  é subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ , e este á súa vez ten como subgrupo a  $SL(2, \mathbb{Z})$ .  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  é un subgrupo de  $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ .

**Corolario A.7.** A función dada por  $g \mapsto T_g$ , onde  $g$  está restrinxida á recta real, é un isomorfismo de grupos entre  $PSL(2, \mathbb{R})$  e  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ .

En particular  $SL(2, \mathbb{R})$  preserva o semiplano superior  $\mathbb{H}$ , é dicir,  $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  para  $T$  restrinxida aos números reais.

## Apéndice B

# Máis alá de Euclides: A Xeometría Proxectiva

A xeometría está constituída por proposicións e teoremas os cales sustentáanse en postulados<sup>1</sup> inducidos pola experiencia. Os cinco postulados de Euclides foron a base da xeometría grega que dominou a disciplina ata o século XVIII. Destes postulados, o último -«por un punto exterior a unha recta pasa unicamente unha soa paralela»- converteuse pronto no máis estudado e polémico obxecto de debate. Debate que dou moitos froitos.

A diferenza dos demais postulados, o quinto non se pode inducir da experiencia, pois non se pode demostrar empiricamente. Resultaríanos imposible trasladarnos ata o punto máis lonxano que podamos imaxinar para comprobar se as rectas se cortan ou non. Os esforzos por salvar este escollo recorreron a historia das matemáticas ata o século XVIII, dende o filósofo grego **Proclo** (412-485) ata **A. M. Legendre** (1752-1833), que dedicou corenta anos da súa vida a intentar demostrar o postulado das paralelas, pasando por **Girolamo Saccheri** (1667-1733) y **J.H. Lambert** (1728-1777), entre outros moitos. Os reiterados intentos de demostrar o quinto postulado remitían touzudamente a bucles. En todos os intentos, de forma encuberta, se utilizaba o resultado a demostrar. Desta forma, a comunidade matemática foise convencendo de que o quinto postulado era un verdadeiro postulado independente dos demais, e que, polo tanto, ían a ser inútiles todas os intentos de dedución deste a partir dos outros catro postulados.

**Os cinco postulados de Euclides:** Aproximadamente no ano 300 a. C. Euclides escribiu os *Elementos*, o texto íntegro de xeometría e máis antigo que se coñece dos exemplares completos da historia das matemáticas. Este libro, contén os cinco postulados que,

---

<sup>1</sup>Un postulado é unha proposición cuxa verdade admítese sen probas e que é necesaria para servir de base en ulteriores razoamentos.

de forma sinxela e lóxica, dan lugar á xeometría euclídea.

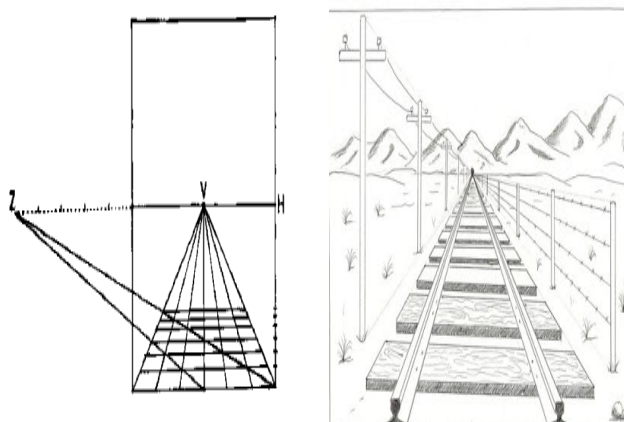
1. Por dous puntos pasa unha única liña recta.
2. Pódese prolongar unha liña recta indefinidamente a partir dunha recta finita.
3. Pódese trazar unha circunferencia cun centro e radio dados.
4. Todos os ángulos rectos son iguais.
5. Tamén coñecido como postulado das paralelas. Orixinalmente enunciouse como: si unha liña recta cruza a outras dúas rectas e a suma dos ángulos interiores é menor que dous rectos, estas dúas rectas, si se prolongan indefinidamente polo lado en que estes ángulos son menores, terminarán cruzándose.

Existen moitos enunciados equivalentes a este quinto postulado, pero quizá o máis coñecido sexa o seguinte: «Por un punto exterior a unha recta só pasa unha paralela a esta». Esa equivalencia estableceuna **John Playfair** (1748-1819) no ano 1795.

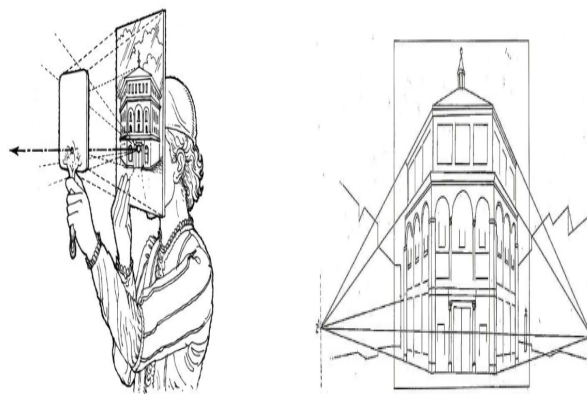
A imposibilidade de demostrar o quinto postulado converteuse no embrión doutras xeometrías consistentes e posibles. O froito desa labor foi recollido principalmente por personaxes como **János Bolyai** (1802-1860), **Nicolai I. Lobachevski** (1793-1856) e **J.C. Friedrich Gauss** (1777-1855), pioneiros na xeometría hiperbólica, un modelo que satisfai só os catro primeiros postulados da euclídea. «Creei un universo novo da nada», afirmou Bolyai tras o seu descubrimento.

Un punto de inflexión no mundo das matemáticas ocorreu un século antes do Renacemento. Os artistas da época intentaron plasmar no papel a realidade tridimensional. Empezaron a debuxar en perspectiva no papel (plano), coa intención de dar a impresión de estar vendo un obxecto no espazo. Ao debuxar en perspectiva xurden dous problemas. O primeiro é, cales son os puntos de fuga? O segundo é encontrar a relación real dun obxecto e a súa lonxitude no lienzo. Por exemplo, as vías dun ferrocarril na realidade son paralelas, pero nun debuxo en perspectiva non, estas converxen a medida que se afastan do punto de vista do espectador. Chegan a tocarse no horizonte, como se pode apreciar na seguinte figura, **v** é o punto de fuga e **H** é a liña do horizonte.





Estes problemas foron resoltos foron resoltos por **Brunelleschi, Filippo (1377-1447)** *circa* 1413, aínda que os primeiros escritos débense a Alberti en 1435. Brunelleschi foi arquitecto, enxeñeiro, orfebre, escultor e inventor italiano. Desenvolveu unha invención capital no munda da historia da arte, a perspectiva cónica (ou linear). Dita perspectiva consiste en representar graficamente sobre un plano un corpo tridimensional proxectado dende un cono visual imaxinario (cuxo vértice coincide co ollo do espectador) e mediante liñas auxiliares proxectantes (liñas de fuga) que converxen nun punto do horizonte (punto de fuga). Podemos apreciar este método nas seguintes figuras.<sup>2</sup>



A partir de aquí as obras empezaron a cambiar, adquirindo un maior realismo. Xa existían outros tipos de perspectivas, como a cabaleira (punto de vista dun xinete) usada polos romanos. Consistía en poñer máis baixos os obxectos que están preto de nós e con máis altura os mais afastados. Na Idade Media as pinturas eran esencialmente planas. Por exem-

<sup>2</sup>Todas as imaxes desta sección foron quitadas de [26]

plo a obra pictórica **Maestà di Santa Trinitá** de **Cimabue** arredor de 1285 confronta coa obra **Trinidad** feita polo pintor renacentista **Masaccio** arredor de 1425.



A partir desta idea de perspectiva cónica e algúns resultados probados por **Kepler** en 1604, **Desargues** en 1639 e **Pascal** en 1640, xurdiu a **xeometría proxectiva** a principios do século XIX por **Grassmann**, **Möbius**, **Plücker**, **Poncelet** e **von Staudt**.

Na xeometría proxectiva o concepto de liñas paralelas é diferente ao da euclídea. Agora dúas liñas son paralelas se se encontran nun punto situado no infinito (punto de fuga). Por este feito, a xeometría proxectiva non pode conter axiomas que se refiran a lonxitudes, ángulos ou congruencias. En particular, a pesar de que a noción de triángulo ten sentido na xeometría proxectiva, non ocorre así en canto ás de triángulos isósceles e equiláteros. A proxección dunha curva calquera, sen embargo, é outra curva.

Este feito propón a interesante cuestión de que clasificacións de curvas son significativas nesta xeometría. A noción de círculo, por exemplo, non pertence obviamente a este tipo de xeometría, dado que a proxección dun círculo non é necesariamente outro círculo: os círculos proxéctanse de maneira habitual como elipses. A noción de sección cónica, sen embargo, sí ten sentido nesta xeometría. Na xeometría euclídea unha sección cónica pódese definir como unha proxección dun círculo sobre un plano. Distintos tipos de proxeccións dan lugar a diversas clases de seccións cónicas.

**O infinito na xeometría proxectiva:** Os matemáticos que desenvolveron a xeometría proxectiva notaron que era moi cómodo introducir puntos no infinito. Cada liña dun plano suponse que ten só un destes puntos. Dúas liñas paralelas calquera suponse que se cortan nun punto común do infinito. E suponse tamén que todos os puntos no infinito descansan sobre unha única liña recta, a «liña no infinito». Esta liña non contén outros puntos que os puntos no infinito.

Destaca que soamente se engade un punto do infinito a cada liña, e non dous, como podería suxerir a idea de que unha liña se prolonga ata o infinito en ambos sentidos. Na xeometría euclídea unha liña recta prolóngase cara (sen alcanzalos) dous puntos no infinito, en dous sentidos, pero non é o caso na xeometría proxectiva: para cada liña, existe só un punto no infinito e pertence á liña.

Os puntos e a liña do infinito foron concibidos para evitar cuestións de paralelismo, que non é unha noción da xeometría proxectiva, posto que as proxeccións poden desbaratalo. Debido á súa propensión euclídea, a mente humana non pode visualizar de todo o proceso de engadir eses puntos e esa recta do infinito. O desenrolo da xeometría proxectiva debe ser axiomático. Coa inclusión dos puntos do infinito e da recta do infinito, a xeometría proxectiva pódese caracterizar mediante o seguinte conxunto de axiomas:

1. Existen polo menos un punto e unha recta.
2. Se  $X$  e  $Y$  son puntos distintos, por eles pasa unha única recta.
3. Se  $l$  e  $m$  son rectas distintas, existe un solo punto común a ambas.
4. Nunha recta calquera, existen polo menos tres puntos.
5. Non todos os puntos están sobre a mesma recta.

**Construcción do espazo proxectivo:** Procedemos a crear o espazo proxectivo a partir dos dous problemas antes citados, puntos de fuga e horizonte. Toda liña en  $\mathbb{R}^2$  é paralela a unha (única) recta que cruza a orixe. Cada liña que cruza a orixe corta ao círculo  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  en dous puntos antipodais, e calquera dos dous puntos determina á recta  $l$  que pasa polo centro. Queremos asignar un só punto de fuga para todas as rectas paralelas a  $l$ , identificamos cada punto en  $\mathbb{S}^1$  co seu punto antipodal. O interior de  $\mathbb{S}^1$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , podemos ver o semicírculo  $\{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$  como o horizonte. Identificamos  $(\cos(0), \sin(0))$  con  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , é máis, podemos ver este semicírculo como a recta real engadíndolle un punto,  $\infty$ . Esta mesma idea pode extrapolarse ao espazo tridimensional: toda liña no espazo é paralela a unha (única) recta que pasa pola orixe, e ésta interseca á esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  en dous puntos antipodais. O interior desta esfera é homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ . Vemos que todo isto é análogo ao caso anterior. Agora faríamos o mesmo para o caso  $n$ -dimensional,  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  para todo  $n \geq 0$ . A definición usual de  $n$ -espazo proxectivo real, usada en topoloxía alxébrica é o seguinte espazo cociente,

$$\mathbb{RP}(n) = \mathbb{S}^n / \sim$$

onde  $x \sim y$  (para  $x, y \in \mathbb{S}^n$ ) se  $x$  e  $y$  son antipodais.

O problema agora radica en facer o mesmo pero en vez de no corpo dos números reais en calquera outro corpo. A idea é distinguir os puntos afíns (puntos de  $\mathbb{F}^n$ , enténdase como  $n$  copias de  $\mathbb{F}$ ) e os puntos do infinito (puntos de fuga).

Se  $V$  é un espazo vectorial sobre  $\mathbb{F}$ , definimos a relación de equivalencia sobre  $V - \{0\}$  por  $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}'$  se existe  $t \in \mathbb{F}^\#$  con  $\mathbf{v}' = t\mathbf{v}$ . As clases desta relación son,

$$[\mathbf{v}] = \{t\mathbf{v} \text{ tal que } t \in \mathbb{F}^\#\} .$$

Se  $V$  é de dimensión finita  $n$  e  $\mathbf{v} \in V$  ten coordenadas  $\mathbf{v} = (x_0, \dots, x_n)$  nunha certa base, entón escribimos,

$$[\mathbf{v}] = [x_0, \dots, x_n] = \{(tx_0, \dots, tx_n) \text{ tal que } t \in \mathbb{F}^\#\} .$$

A  $[x_0, \dots, x_n]$  chamámoslle **coordenadas homoxéneas** de  $\mathbf{v} = (x_0, \dots, x_n)$ . Se  $x_0 \neq 0$  entón,

$$[\mathbf{v}] = [x_0, \dots, x_n] = \left[ 1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right] .$$

Vamos a distinguir as coordenadas homoxéneas  $[x_0, \dots, x_n]$  con  $x_0 = 0$  das que teñen  $x_0 \neq 0$ . Como fixemos con  $\mathbb{R}\mathbb{P}(2)$ , definimos o espazo proxectivo sobre un corpo arbitrario  $\mathbb{F}$  como o conxunto de todas as liñas que pasan pola orixe en  $\mathbb{F}^n$ .

**Definición B.1.** Se  $U$  é un espazo vectorial  $(n + 1)$ -dimensional sobre un corpo  $\mathbb{F}$ . O **espazo proxectivo  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{F}$**  defínese como,

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}\mathbb{F}(n) = \{[\mathbf{v}] \text{ tal que } \mathbf{v} \in V - \{0\}\} .$$

Se  $U \subseteq V$  é un subespazo de  $V$ , entón  $\mathbb{P}(U)$  é o **subespazo proxectivo** definido por,

$$\mathbb{P}(U) = \{[\mathbf{u}] \in \mathbb{P}(V) \text{ tal que } \mathbf{u} \in U\} .$$

Definimos como **hiperplano proxectivo** ao subespazo proxectivo  $\mathbb{P}(U)$  si  $\dim(U) = \dim(V) - 1$ .

Por exemplo a liña proxectiva  $\mathbb{P}\mathbb{F}$  é

$$\mathbb{P}\mathbb{F} = \{[\mathbf{u}] \text{ tal que } \mathbf{u} \in U - \{0\}\} ,$$

onde  $\dim(U) = 2$ . Cando  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  entón  $\mathbb{P}\mathbb{C}$  é a esfera de Riemann, isto é,  $\mathbb{C}$  identifícase con  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{P}\mathbb{C}$  con  $\mathbb{S}^2$ , que é o plano real máis un punto,  $\infty$ .

Vexamos agora como os grupos lineais actúan sobre o espazo proxectivo. Existe unha razón xeométrica para cocientar  $SL(V)$  con  $SZ(V)$  e é que a acción de  $GL$  ten en conta as coordenadas homoxéneas dos puntos no espazo proxectivo.

**Teorema B.2.** *Sea  $V$  un espacio vectorial  $(n + 1)$  – dimensional sobre o corpo  $F$ .*

1. *Si  $W$  é un espacio vectorial sobre  $F$ , entón toda transformación linear non singular  $T : V \longrightarrow W$  determina unha única función (chamada **Proxectivización**),*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(W) \\ [\mathbf{v}] &\longmapsto [T\mathbf{v}], \end{aligned}$$

2. *Si  $T, S : V \longrightarrow W$  son transformacións lineares non singulares, entón  $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(S)$  se, e só se,  $S = \lambda T$  para algún  $\lambda \in F^\#$ ,*

3. *Definimos o **grupo proxectivo linear** como,*

$$PGL(V) = GL(V)/Z(V),$$

*onde  $Z(V)$  é o centro de  $GL(V)$ . Entón  $PGL(V)$  actúa fielmente sobre  $\mathbb{P}(V)$*

4. *definimos,*

$$PGL(n + 1, k) = GL(n + 1, k)/Z(n + 1, k),$$

*onde  $Z(n + 1, k)$  é o centro de  $GL(n + 1, k)$ . Entón  $PGL(n + 1, k)$  actúa sobre  $\mathbb{P}\mathbb{F}(n)$ .*

**Corolario B.3.**  *$PGL(2, k)$  actúa sobre a liña proxectiva  $\mathbb{P}\mathbb{F}$ .*

Unha transformación linear non singular  $T : F^2 \longrightarrow F^2$  correspóndese cunha matriz invertible,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e  $\mathbb{P}(T) : [x_0, x_1] \longmapsto [A(x_0, x_1)] = [ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1]$ . Pero,  $cx_0 + dx_1 \neq 0$  dado que  $A$  é invertible. Entón,  $[ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1] = \left[ \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1}, 1 \right]$ , de modo que  $PGL(2, k)$  actúa sobre  $\mathbb{P}\mathbb{F}$ .



# Bibliografía

- [1] Animacións das transformacións de Möbius.  
<http://www-users.math.umn.edu/~arnold/moebius/moebius-movie.mov>
- [2] Animacións de planímetros:  
<http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/Planimeter.htm>.  
Consultado por última vez: setembro de 2021.
- [3] Auerbach, H., *Sur un problème de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottants*.  
Studia Math 7 (1938): 121–42.
- [4] Bor, G. et al. *Tire Tracks and Integrable Curve Evolution* International Mathematics  
Research Notices, Vol. 9 (2020): 2698-2768.
- [5] Bracho, J., Montejano, L. and Oliveros, D., *A classification theorem for Zindler ca-  
rrouseles*. J. Dyn. Control Systems 7 (2001): 367–84.
- [6] Bracho, J., Montejano, L. and Oliveros, D., *Carousels, Zindler curves and the floating  
body problem*. Period. Math. Hungar. 49 (2004): 9–23.
- [7] *Breve historia de las ecuaciones diferenciales*  
[http://personales.upv.es/jbenitez/cajon\\_sastre/histed.pdf](http://personales.upv.es/jbenitez/cajon_sastre/histed.pdf)  
Consultado por última vez: setembro de 2021.
- [8] Finn, D., *Which way did you say that bicycle went?* Math. Mag. 77 (2004): 357–67.
- [9] Finn, D., *Can a bicycle create a unicycle track?* College Math. J. 33 (2002): 283–92.
- [10] Foote, R., *Geometry of the Prytz planimeter*. Rep. Math. Phys. 42 (1998): 249–71
- [11] Foote, R., Levi, M. and Tabachnikov, S., *Tractrices, bicycle tire tracks, hatchet pla-  
nimeters, and a 100-year-old conjecture*. Amer. Math. Monthly 120 (2013): 199–216.
- [12] Hill F. W., *The hatchet planimeter*, Philosophical Magazine, S. 5, 38 (1894) 265–269.

- [13] González Juan, J. L., *Transformacións de Möbius*, Trabajo Fin de Master, Universidade: UNED. [http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterMatavanz-Jlgonzalez/Gonzalez\\_Juan\\_JoseLuis\\_TFM.pdf](http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterMatavanz-Jlgonzalez/Gonzalez_Juan_JoseLuis_TFM.pdf)
- [14] Gutkin, E. *Addendum to: capillary floating and the billiard ball problem*. J. Math. Fluid Mech. 15 (2013): 425–30.
- [15] Hernández Cifre, M. A. y Pastor González, J. A., *Un curso de Geometría Diferencial Teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2010.
- [16] Historia e biografía de Jacob Bernoulli.  
[https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli\\_Jacob/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/)  
Consultado por última vez: setembro de 2021.
- [17] Historia e biografía de Jacopo Francesco Riccati.  
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riccati/>  
Consultado por última vez: setembro de 2021.
- [18] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publications, 1978.
- [19] Konhauser, J. D. E., Velleman D. and Wagon S., *Which Way Did the Bicycle Go?*, Mathematical Association of America, 1996.
- [20] Levi, M. and Tabachnikov S., *On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin’s conjecture, and oscillation of unicycle tracks*. Exp. Math. 18 (2009): 173–86.
- [21] Levi, M., *“Bike tracks” quasi-magnetic forces, and the Schrödinger equation*. SIAM News 47 (2014).
- [22] Levi, M., *Schrödinger’s equation and “bike tracks” - a connection*. J. Geom. Phys. 115 (2017): 124–30.
- [23] Mauldin, R. D., *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*. Edited by R. D. Mauldin. Boston, Mass.: Birkhäuser, 1981.
- [24] Morris, K., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial, 2012.
- [25] Prytz, H., *Stangplanimetret*, Den Tekniske Forenings Tidsskrift 10 (1886) 23–28.
- [26] Rotman, J. J., *Advanced modern algebra*. Third edition. volumes cm. – (Graduate studies in mathematics ; volume 165)



- [27] Ruban, A., *Sur le problème du cylindre flottant*. Dokl. Akad. Nauk 25 (1939): 350–352.
- [28] Salgaller, V. and Kostelianetz, P., *Sur le problème du cylindre flottant*. Dokl. Akad. Nauk 25 (1939): 353–355.
- [29] Tabachnikov, S., *Tire track geometry: variations on a theme*. Israel J. Math. 151 (2006): 1–28.
- [30] Wegner, F., *Floating bodies of equilibrium*. Stud. Appl. Math. 111 (2003): 167–83.
- [31] Wegner, F., *Floating bodies of equilibrium I*. Preprint 2002, arXiv:physics/0203061.
- [32] Wegner, F., *Floating bodies of equilibrium II*. Preprint 2002, arXiv:physics/0205059.
- [33] Wegner, F., *Floating bodies of equilibrium. Explicit solution*. Preprint 2006, arXiv:physics/0603160.
- [34] Wegner, F., *Floating bodies of equilibrium in 2D, the tire track problem and electrons in a parabolic magnetic field*. Preprint 2007, arXiv:physics/0701241.
- [35] Zindler, K., *Über konvexe Gebilde II*. Monatsh. Math. Phys. 31 (1921): 25–57.