



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Aproximación de solucións de ecuacións diferenciais con iterantes de Picard

Ana Torres Pedreira

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Aproximación de solucións de ecuacións diferenciais con iterantes de Picard

Ana Torres Pedreira

07/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Aproximación de solucións de ecuacións diferenciais con iterantes de Picard
Breve descripción do contido
O traballo consiste en describir a demostración do teorema de Picard baseada no teorema da aplicación contractiva e analizar o comportamento dos iterantes de Picard en casos nos que as hipóteses do teorema non se cumplan.
Recomendacións
E.E. Codington e N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, reimp. 2018
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. O teorema de Banach da aplicación contractiva	1
1.1. Preliminares técnicos	1
1.2. O teorema da aplicación contractiva	3
2. Teorema de Picard	9
3. Converxencia dos iterantes de Picard	15
4. Aplicación ás ecuacións escalares de orde superior	21
5. Implementación computacional do método de Picard	27
Bibliografía	43

Resumo

O teorema de Picard asegura a posibilidade de aproximar a solución dun sistema de EDOs mediante os chamados iterantes de Picard cando a parte non linear é continua e satisfai unha condición de Lipschitz con respecto á variable dependente.

É interesante estudar o que ocorre coa sucesión de iterantes de Picard noutros casos, e así, ver se constitúen unha ferramenta válida para aproximar solucións.

O traballo consiste en describir a demostración do teorema de Picard baseada no teorema da aplicación contractiva e analizar o comportamento dos iterantes de Picard en casos nos que as hipóteses do teorema non se cumplan.

Á vista da definición dos iterantes de Picard é claro que a súa construción é posible sen que f sexa lipschitziana con respecto á súa segunda variable (unha das hipóteses do teorema de Picard). É aquí onde xorden varias cuestións sobre a relación entre a converxencia dos iterantes de Picard e a solución do problema, sabendo só que f é continua nun entorno de (t_0, y^0) .

Responderase a ditas cuestións con contraexemplos ao longo do traballo, utilizando diferentes condicións suficientes de unicidade local.

A parte teórica complementarase coa implementación do método de Picard no ordenador empregando o software matemático Maple. Onde se verá o comportamento dos iterantes de Picard gráficamente, tanto en casos nos que as hipóteses do teorema se cumplan, como en casos nos que non o faga.

Abstract

Picard's theorem ensures the possibility of approximating the solution of a system of EDOs by means of Picard's so-called iterants when the nonlinear part is continuous and satisfies a Lipschitz condition with respect to the dependent variable.

It is interesting to study what happens with the Picard's iteration sequence in other cases, and thus, see if they constitute a valid tool to approximate solutions.

The work consists of describing the proof of Picard's theorem based on the contractive application theorem and analyzing the behavior of Picard's iterants in cases where the hypotheses of the theorem are not fulfilled.

In view of Picard's definition of iterants it is clear that their construction is possible without f being lipschitzian with respect to its second variable (one of the hypotheses of Picard's theorem). This is where several questions arise about the relationship between the convergence of Picard's iterants and the solution of the problem, knowing only that f is continuous in an environment of (t_0, y^0) .

We will answer these questions with counterexamples throughout the work, using different sufficient conditions of local uniqueness.

The theoretical part will be complemented with the implementation of the Picard method on the computer using the Maple mathematical software. Where we will see the behavior of Picard's iterants graphically, both in cases where the theorems of the theorem are met, and in cases where it does not.

Introdución

A finais do século *XVII* diversos matemáticos comezaron a estudar as ecuacións diferenciais, ecuacións matemáticas que relacionan unha función coas súas derivadas.

Nas matemáticas aplicadas, as ecuacións diferenciais teñen un papel significativo en disciplinas como a enxeñería, a física, a química e a bioloxía. Pero o ámbito no cal as vamos a tratar neste traballo, son as matemáticas puras, onde se estudan dende perspectivas diferentes, centrándonos na aproximación teórica das solucións.

Hai diferentes tipos de ecuacións diferenciais, nós traballaremos coas ecuacións diferenciais ordinarias, que conteñen unha función dunha variable independente e as súas derivadas. O termo ordinaria úsase en contraste coa ecuación en derivadas parciais, a cal pode ser respecto a máis dunha variable independente.

A existencia de solucións é o primeiro paso teórico, pero dende o punto de vista das aplicacións non é satisfactorio que un problema de valor inicial poda ter máis dunha solución. Xorde así a necesidade de obter condicións suficientes para a unicidade de solución.

Considerando o problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

Supoñendo que f é continua nun entorno do punto (t_0, y^0) , nestas condicións sabemos que f ten polo menos unha solución nun entorno de t_0 . Pero como queremos garantir a unicidade de solución debemos esixir máis condicións sobre f .

O obxectivo é trasladar o problema de encontrar unha solución para $y' = f(t, y), y(t_0) = y^0$, ao de encontrar un punto fixo para unha aplicación adecuada entre espazos de funcións. Se dita aplicación está nas condicións do teorema do punto fixo de Banach, entón $y' = f(t, y), y(t_0) = y^0$ terá unha única solución.

Coas condicións do teorema de Picard podemos garantir a unicidade baseándonos no argumento que acabamos de describir. Este será o resultado central do traballo, que di o seguinte:

Se $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua nun entorno do punto $(t_0, y^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e é

lipschitziana con respecto á súa segunda variable en dito entorno, entón existe $\alpha > 0$ tal que o problema $y' = f(t, y), y(t_0) = y^0$ ten unha única solución no intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Ademais, dita solución é o límite uniforme en I da sucesión de iterantes de Picard, que se define como

$$\begin{cases} \phi_0(t) = y^0 \text{ para todo } t \in I \\ \phi_m(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{m-1}(s)) ds \text{ para todo } t \in I \text{ e todo } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sexa o rectángulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|y - y^0\|_\infty \leq b\}.$$

Supoñamos que dita función f é continua en R , e lipschitziana en y en R , entón o problema $y' = f(t, y), y(t_0) = y^0$ ten solución local única e a sucesión de Picard converxe a dita solución.

Á vista da definición dos iterantes de Picard, sabemos que é posible a súa construción sen que f sea lipschitziana con respecto á súa segunda variable.

Xorden así varias cuestións sobre a relación entre a converxencia da sucesión de iterantes de Picard e a solución do problema, que se describirán ao longo do traballo con diversos exemplos e resultados.

Así como a súa aplicación ás ecuacións escalares de orde superior.

Capítulo 1

O teorema de Banach da aplicación contractiva

A existencia de solucións é o primeiro paso teórico, pero así mesmo, non é satisfactorio dende o punto de vista das aplicacións que un problema de valor inicial poda ter máis dunha solución.

Xorde así a necesidade de obter condicións suficientes para a unicidade de solución.

Nos cinco capítulos descritos neste traballo utilizaremos diversos resultados do libro [1].

1.1. Preliminares técnicos

Dado un conxunto $X \neq \emptyset$ dise que unha aplicación $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ é unha métrica ou unha distancia se satisfai as seguintes propiedades:

1. Para $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. Para $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
3. Desigualdade triangular: Para $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un conxunto non vacío X , dotado dunha distancia d recibe o nome de espazo métrico. O espazo métrico (X, d) dise que é un espazo métrico completo se as sucesións de Cauchy son converxentes.

Exemplo 1.1. \mathbb{R}^n coa distancia euclidiana:

Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ é

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Exemplo 1.2. \mathbb{R}^n coa distancia infinito:

Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ é

$$d_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i| : i = \{1, 2, \dots, n\}$$

Exemplo 1.3. Un exemplo de dimensión infinita é o do espazo das funcións continuas nun intervalo: dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ compacto e non dexenerado defínese

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) = \{v : I \longrightarrow \mathbb{R}^n : v \text{ continua en } I\}$$

e dadas dúas funcións $v, w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ podemos definir a distancia entre ambas como $\max_{t \in I} \|v(t) - w(t)\|_\infty$.

Notemos que a función $\|v(\cdot) - w(\cdot)\|_\infty$ é continua en I , que é compacto, de modo que a definición anterior é boa.

Exercicio 1.4. *Comprobar que a función d que acabamos de definir é unha métrica e que o espazo métrico $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), d)$ é un espazo métrico completo.*

Solución 1.5. Na realización deste exercicio contarase coa axuda do libro [2]. Comprobemos en primeiro lugar, que se trata dunha métrica:

1. $d(v, w) \geq 0$, para todo $v, w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$?

$$d(v, w) = \max_{t \in I} \|v(t) - w(t)\|_\infty \geq 0$$

2. $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$, para todo $v, w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$?

$$d(v, w) = \max_{t \in I} \|v(t) - w(t)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \|v(t) - w(t)\|_\infty = 0 \text{ para todo } t \in I \Leftrightarrow v(t) - w(t) = 0 \text{ para todo } t \in I \Leftrightarrow v = w.$$

3. $d(v, w) = d(w, v)$ para $v, w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$?

$$d(v, w) = \max_{t \in I} \|v(t) - w(t)\|_\infty = \max_{t \in I} \|w(t) - v(t)\|_\infty = d(w, v)$$

4. $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$ para $v, w, z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$?

$$\begin{aligned} d(v, w) &= \|v(t) - w(t)\|_\infty \\ &= \|v(t) - z(t) + z(t) - w(t)\|_\infty \\ &\leq \|v(t) - z(t)\|_\infty + \|z(t) - w(t)\|_\infty \\ &\leq d(v, z) + d(z, w). \end{aligned}$$

Logo $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$.

Demostremos a continuación, que o espazo métrico $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), d)$ é un espazo métrico completo:

Sexa $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unha sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Isto é equivalente a que a sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en I e, en particular, cada unha das sucesións $f_n(x)$ con $x \in I$ fixado, é unha sucesión de Cauchy de números reais e, por tanto, converxente a un certo límite real que denotamos por $f(x)$.

Entón sabemos que converxe a unha función f no espazo $B(I, \mathbb{R}^n)$, dada por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Trátase de comprobar que esta función f pertence a $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, é dicir, que é continua.

Imos demostrar que f é uniformemente continua en I .

Sexa $\varepsilon > 0$. A condición de converxencia de sucesión en $B(I, \mathbb{R}^n)$ garante a existencia dun $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, $d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Daquela $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in I$.

Fixamos un $n \geq n_0$ e consideramos a función f_n . Logo, sendo continua nun compacto, f_n é uniformemente continua.

Daquela, existe un δ tal que se $\|x - y\| < \delta$, entón $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Así, se $\|x - y\| < \delta$, resulta $\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| < \varepsilon$.

1.2. O teorema da aplicación contractiva

Unha vez descritos os preliminares técnicos, damos paso ao resultado máis importante deste capítulo, no que vai estar baseada a demostración do Teorema de Picard que posteriormente describiremos.

Vexamos previamente a definición de aplicación contractiva:

Definición 1.6. Dada unha aplicación T dun espazo métrico (X, d) en sí mesmo, dise que T é unha aplicación contractiva se existe un número real $K \in [0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$ para calquera $x, y \in X$.

Teorema 1.7 (Teorema de Banach do punto fixo.). *Sexan (X, d) un espazo métrico completo e $T : X \rightarrow X$ unha aplicación contractiva (é dicir, $d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$ para calquera $x, y \in X$ sendo $K \in [0, 1)$).*

Entón T ten un único punto fixo (é dicir, un único $\bar{x} \in X$ tal que $\bar{x} = T\bar{x}$).

Demostración. (Véxase no libro [3], p.2,3)

Supoñamos unha aplicación $T : (M, d) \rightarrow (M, d)$ contractiva e (M, d) espazo métrico completo.

Dado $x_0 \in M$, tomamos $x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_n = T^n(x_0) = T(x_{n-1})$.

Vexamos que a sucesión x_n dada por $x_i = T^i(x_0)$ é de Cauchy. En efecto, por ser T contractiva, tense que existe $K \in [0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq Kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq K^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \leq \\ &\leq K^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Así, dado $m > n$, temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (K^{m-1} + K^{m-2} + \dots + K^{n+1} + K^n)d(x_1, x_0) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} K^i d(x_1, x_0) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} K^i d(x_1, x_0) \\ &= \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ cando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{x_n\}$ é unha sucesión de Cauchy en (M, d) .

Como (M, d) é un espazo métrico completo, existe $z \in M$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$.

Vexamos que z é o unico punto fixo de T .

En efecto,

$$\begin{aligned} d(T(z), z) &\leq d(T(z), T(x_n)) + d(T(x_n), z) \\ &\leq Kd(z, x_n) + d(x_{n+1}, z) \rightarrow 0 \text{ do que se segue que } T(z) = z. \end{aligned}$$

Supoñamos que existe $w \in M$ tal que $T(w) = w$ con $w \neq z$, por tanto, $d(z, w) > 0$. Nese caso, $d(z, w) = d(T(z), T(w)) \leq Kd(z, w) < d(z, w)$, o cal é unha contradicción. O que proba a unicidade. \square

Consideremos o problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases} \quad (1.1)$$

considerando que f é continua nun entorno do punto (t_0, y^0) .

Nestas condicións sabemos, polo teorema de Cauchy Peano, que f ten polo menos unha solución nun entorno de t_0 . Pois baixo a hipótese de ser f continua nun entorno do punto (t_0, y^0) , pódese garantir a existencia, aínda que non necesariamente a unicidade, de solución local do problema (1.1). Está claro que haberá que esixir máis condicións sobre f se queremos afinar o resultado para garantir, ademais, a unicidade de solución.

Observación 1.8. O obxectivo é trasladar o problema de encontrar unha solución para (1.1) ao de encontrar un punto fixo para unha aplicación adecuada entre espazos de funcións. Se dita aplicación está nas condicións do teorema do punto fixo de Banach, entón (1.1) terá unha única solución.

As condicións sobre a función f coas que poderemos garantir a unicidade baseándonos no argumento que acabamos de describir son do tipo que definimos a continuación.

Definición 1.9. Unha función $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana con respecto á súa segunda variable uniformemente con respecto á primeira se existe $L > 0$ tal que $\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\|_\infty \leq L\|y - \bar{y}\|_\infty$ para calquera $(t, y), (t, \bar{y}) \in D$.

Notación 1.10. A partir de agora referirémonos a "lipschitziana con respecto á segunda variable uniformemente con respecto á primeira" como "lipschitziana na segunda variable", por abreviar.

Diremos que f é localmente lipschitziana na segunda variable se para cada punto $(t_1, y^1) \in D$ existe un entorno seu $U \subset D$ e existe $L = L(U) > 0$ tal que $\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\|_\infty \leq L\|y - \bar{y}\|_\infty$ para calquera $(t, y), (t, \bar{y}) \in U$.

En ambos casos as constantes L reciben o nome de constantes de Lipschitz.

Exemplo 1.11. As funcións lineais $f(t, y) = ay + b$ para $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ son constantes. Temos $\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\|_\infty = \|a(y - \bar{y})\|_\infty = |a| \|y - \bar{y}\|_\infty$.

A seguinte proposición dá máis exemplos de funcións lipschitzianas con respecto á súa segunda variable.

Proposición 1.12. *Sexa $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un aberto convexo respecto de $y \in \mathbb{R}^n$, é dicir, tal que se $(t, y), (t, \bar{y}) \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$ entón $(t, \lambda y + (1 - \lambda)\bar{y}) \in D$.*

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ é continua e acotada en D para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entón f é lipschitziana con respecto á súa segunda variable en D .

Demostración. Sexa $M > 0$ unha cota para as derivadas parciais de f en D . Para t fixo, sexa a función $y \rightarrow f_i(t, y)$ definida na proxección de $C = D \cap (t \times \mathbb{R}^n)$ sobre \mathbb{R}^n , que é convexa. Dados $(t, y), (t, \bar{y})$ dentro de dito convexo temos, en virtude do teorema do valor medio, que $f_i(t, y) - f_i(t, \bar{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \tilde{y})(y_j - \tilde{y}_j)$, para algún \tilde{y} do segmento $[y, \bar{y}] \in \mathbb{R}^n$.

Así temos para cada $(t, y), (t, \bar{y}) \in C$ que $|f_i(t, y) - f_i(t, \bar{y})| \leq nM\|y - \bar{y}\|_\infty$ para cada $i = \{1, 2, \dots, n\}$, de onde $\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\|_\infty \leq nM\|y - \bar{y}\|_\infty$.

Notemos por último que a constante nM non depende do t fixado, de forma que o resultado está probado. \square

En xeral, referímonos máis a miúdo ao seguinte corolario que á proposición anterior.

Corolario 1.13. *Sexa $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un aberto e sexa $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ é continua en D para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entón f é localmente lipschitziana con respecto á súa segunda variable.*

Demostración. Fixado un punto calquera $(t, y) \in D$ basta aplicar a proposición anterior sobre calquera bóla pechada centrada no punto (t, y) con clausura contida en D . \square

Exemplo 1.14. A función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(t, y) = ty^2$ para cada $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, é de clase \mathcal{C}^∞ de modo que é localmente lipschitziana con respecto a y en todo \mathbb{R}^2 , segundo o corolario anterior.

Notemos, sen embargo, que non é lipschitziana con respecto á y en todo \mathbb{R}^2 . Se o fose, existiría unha constante $L > 0$ tal que $|ty^2 - t\bar{y}^2| \leq L|y - \bar{y}|$ para todo t e calquera $y, \bar{y} \in \mathbb{R}$.

En tal caso, fixado $t_0 \in \mathbb{R}$ teríamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y) = \lim_{\bar{y} \rightarrow y} \frac{t_0 y^2 - t_0 \bar{y}^2}{y - \bar{y}} \leq L$ para calquera $y \in \mathbb{R}$, o cal é unha contradición pois $\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y) = 2t_0 y$.

Exemplo 1.15. A función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(t, y) = t + \sqrt{|y|}$ para cada $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, é de clase \mathcal{C}^∞ nos semiplanos $y < 0$ e $y > 0$, de modo que é localmente lipschitziana con respecto a y nesas rexións. Sen embargo, non é localmente lipschitziana en y en ningún aberto que corte ao eixo x : en efecto, se f fose lipschitziana con respecto a y na bola $B((t_0, 0), \varepsilon)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, entón existiría $L > 0$ tal que teríamos $|f(t_0, y) - f(t_0, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|$ para todo $(t_0, y), (t_0, \bar{y}) \in B((t_0, 0), \varepsilon)$, é dicir, $|\sqrt{|y|} - \sqrt{|\bar{y}|}| \leq$

$L |y - \bar{y}|$ para todo $(t_0, y), (t_0, \bar{y}) \in B((t_0, 0), \varepsilon)$, en particular (tomando $\bar{y} = 0$) sería $\sqrt{|y|} \leq L |y|$ para todo y con $(t_0, y) \in B((t_0, 0), \varepsilon)$, o cal é falso para valores próximos a cero de $|y|$, xa que $\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|y|}}{|y|} = \infty$.

Notemos que o problema aquí é que a derivada da función raíz cuadrada non é acotada en ningún entorno de cero.

Capítulo 2

Teorema de Picard

A continuación enunciaremos e demostraremos o resultado central desta parte.

Teorema 2.1 (Teorema de Picard). *Se $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua nun entorno do punto $(t_0, y^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e é lipschitziana con respecto á súa segunda variable en dito entorno, entón existe $\alpha > 0$ tal que o problema (1.1) ten unha única solución no intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Ademais, dita solución é o límite uniforme en I da sucesión de iterantes de Picard, que se define como*

$$\begin{cases} \phi_0(t) = y^0 \text{ para todo } t \in I \\ \phi_m(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{m-1}(s)) ds \text{ para todo } t \in I \text{ e todo } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Demostración. Por hipótese, existen $a > 0$, $b > 0$, $M > 0$ e $L > 0$ tales que

1. A función f é continua no rectángulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|y - y^0\|_\infty \leq b\};$$

2. Para cada $(t, y) \in R$ tense que $\|f(t, y)\|_\infty \leq M$;

3. Para calquera $(t, y), (t, \bar{y}) \in R$ tense que

$$\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\|_\infty \leq L\|y - \bar{y}\|_\infty.$$

Fixemos un valor $\alpha \in (0, \min\{a, \frac{b}{M}\}]$ tal que $\alpha < \frac{1}{L}$ e definamos o intervalo

$I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e o conxunto

$$X = \{v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) : v(t_0) = y^0, \|v(t) - y^0\|_\infty \leq b \text{ para todo } t \in I\}.$$

En X consideramos a métrica habitual (definindo $d(v, w) := \max_{t \in I} \|v(t) - w(t)\|_\infty$ para $v, w \in X$) coa que X é un espazo métrico completo (por ser pechado no espazo das funcións continuas coa norma dos máximos).

Agora definimos a aplicación $T : X \rightarrow X$ onde para cada $v \in X$ é $Tv(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$ para cada $t \in I$.

(I) A aplicación T está ben definida. En efecto, se $v \in X$ entón $(t, v(t)) \in R$ para todo $t \in I$, así pola condición 1, a composición $f(\cdot, v(\cdot))$ é continua en I e, polo tanto, a función $Tv : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ está ben definida. Vexamos que $Tv \in X$.

É claro, pola definición, que Tv é continua en I e que $Tv(t_0) = y^0$.

Pola condición 2, e xa que $(t, v(t)) \in R$ para todo $t \in R$, temos

$$\|f(t, v(t))\|_\infty \leq M \text{ para todo } t \in I,$$

co que

$$\|Tv(t) - y^0\|_\infty \leq M\alpha \leq b \text{ para todo } t \in I,$$

e por tanto, $Tv \in X$.

(II) Unha función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unha solución de (1.1) se e só se φ pertence a X e é un punto fixo de T . Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unha solución de (1.1) entón φ é continua en I , $\varphi(t_0) = y^0$, $(t, \varphi(t)) \in R$ para todo $t \in I$ (porque $\alpha \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$) e

$$T\varphi(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = \varphi(t) \text{ para todo } t \in I,$$

de modo que $\varphi \in X$ e, ademais, $\varphi = T\varphi$.

Recíprocamente, se $\varphi \in X$ é un punto fixo de T entón $(t, \varphi(t)) \in R$ para todo $t \in I$, co que $f(\cdot, \varphi(\cdot))$ é continua en I , e ademais

$$\varphi(t) = T\varphi(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \text{ para todo } t \in I,$$

co que φ é solución de (1.1).

(III) A aplicación $T : X \rightarrow X$ é contractiva. Sexan $v, w \in X$ e $t \in I, t \geq t_0$, fixados. Temos

$$\begin{aligned} \|Tv(t) - Tw(t)\|_\infty &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, v(s)) - f(s, w(s))) ds \right\|_\infty \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\|_\infty ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|v(s) - w(s)\|_\infty ds \\ &\leq \alpha L \underbrace{\max_{s \in I} \|v(t) - w(t)\|_\infty}_{=d(v,w)}. \end{aligned}$$

Un razonamento análogo con $t \in I, t < t_0$, permite concluir que

$$\|Tv(t) - Tw(t)\|_\infty \leq \alpha L d(v, w) \text{ para todo } t \in I,$$

de onde

$$d(Tv, Tw) = \max_{t \in I} \|Tv(t) - Tw(t)\|_\infty \leq \alpha L d(v, w),$$

e como $\alpha L \in (0, 1)$ por elección de α , temos que T é contractiva con constante de contractividade $c = \alpha L$.

(IV) *Conclusión.* En virtude do teorema de Banach do punto fixo podemos asegurar que a aplicación T ten un único punto fixo que, ademais, é o límite (considerando a métrica d) de calquera sucesión da forma

$$\begin{cases} x_0 \in X \text{ fixado} \\ x_m = Tx_{m-1} \text{ para cada } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A sucesión de iterantes de Picard correspóndese coa elección

$$x_0(t) = y^0 \text{ para todo } t \in I,$$

que é un elemento de X .

Notemos, por último, que a converxencia con respecto á métrica d equivale á converxencia uniforme no intervalo I .

□

Observación 2.2. O teorema de Banach do punto fixo proporciona unha estimación para a distancia entre o iterante m -ésimo e o punto fixo. Isto danos unha estimación para o erro cometido ao aproximar a solución do problema polo m -ésimo iterante de Picard: se chamamos $y : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ á única solución do problema (e utilizando as notacións da demostración) temos

$$d(\phi_m, y) \leq \frac{c^m}{1 - c} d(\phi_1, \phi_0) \text{ para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Calculamos

$$d(\phi_1, \phi_0) = \max_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t f(s, y^0) ds \right\|_\infty \leq \alpha M,$$

e como a constante de contractividade do operador da demostración é $c = \alpha L$, entón

$$d(\phi_m, y) \leq \frac{\alpha^{m+1} L^m M}{1 - \alpha L},$$

ou o que é o mesmo,

$$\|\phi_m(t) - y(t)\|_\infty \leq \frac{\alpha^{m+1} L^m M}{1 - \alpha L} \text{ para todo } t \in I \text{ e para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2.3. *Exemplo escalar.*

Consideremos o problema escalar

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Neste caso $f(t, y) = y$ para todo $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Como $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ entón f é localmente lipschitziana en y , así que, segundo o teorema de Picard o problema anterior ten solución local única (que xa sabemos cal é).

Construamos a sucesión de iterantes de Picard para este problema.

En primeiro lugar $\phi_0(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$.

É fácil comprobar que

$$\phi_m(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^m}{m!} \rightarrow e^t \text{ cando } m \rightarrow \infty.$$

Ademáis a converxencia é uniforme en calquera intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ (e isto é así a pesar de que a aplicación que se constrúe na demostración do teorema de Picard pode non ser contractiva se o intervalo é moi grande).

Exemplo 2.4. *Exemplo vectorial.*

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, y_1(0) = 1, \\ y_2' = y_1, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Na nosa notación temos $t_0 = 0, y^0 = (y_1^0, y_2^0) = (1, 0)$ e

$$f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y)) = (-y_2, y_1)$$

para todo $(t, y) = (t, (y_1, y_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

É claro que $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ é continua en \mathbb{R}^2 para $i, j \in \{1, 2\}$, de modo que f é localmente lipschitziana en $y = (y_1, y_2)$. Podemos aplicar o teorema de Picard para asegurar que o problema ten unha solución local única e que esta, pode aproximarse pola sucesión de iterantes de Picard.

Neste caso, $\phi_0(t) = y^0 = (1, 0)$ para todo t , así

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t f(s, (1, 0)) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t (0, 1) ds \\ &= (1, 0) + (0, t) = (1, t). \end{aligned}$$

Seguimos calculando

$$\begin{aligned}
 \phi_2(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds \\
 &= (1, 0) + \int_0^t f(s, (1, 0)) ds \\
 &= (1, 0) + \int_0^t (-s, 1) ds \\
 &= \left(1 - \frac{t^2}{2}, t\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds \\
 &= (1, 0) + \left(-\int_0^t s ds, \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds\right) \\
 &= \left(1 - \frac{t^2}{2}, t - \frac{t^3}{6}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_4(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_3(s)) ds \\
 &= (1, 0) + \left(-\int_0^t \left(s - \frac{s^3}{6}\right) ds, \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds\right) \\
 &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12}, t - \frac{t^3}{6}\right),
 \end{aligned}$$

co que se vai obtendo o desenvolvemento en serie de potencias para a función coseno (na primeira compoñente) e para seno (na segunda). Como no caso anterior, a converxencia é uniforme en calquera intervalo compacto.

Exercicio 2.5. *Comprobar que o seguinte problema se encontra nas condicións do teorema de Picard e calcular a súa solución utilizando a sucesión de iterantes de Picard:*

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Resolveremos este exercicio no último capítulo do traballo.

É importante recalcar o feito de que a información proporcionada no teorema de Picard é de índole local. En particular, afírmase que a solución é única nun entorno do instante no que se prefixa a condición inicial, pero ben pode suceder que a unicidade de solución se perda ao considerar entornos máis grandes da condición inicial. Este comportamento ilústrase no seguinte exemplo:

Exemplo 2.6. *Problema cunha única solución local e infinitas solucións "globais".*

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-1) = -1. \end{cases}$$

A función $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ é de clase C^∞ no semiplano $y < 0$ (que contén a condición inicial), de modo que, en particular, f é continua e lipschitziana nun entorno da condición inicial $(-1, -1)$. Así, en virtude do teorema de Picard, podemos afirmar que existe un valor $\alpha > 0$ tal que o problema ten unha única solución definida no intervalo $[-1 - \alpha, -1 + \alpha]$.

Separando variables e integrando entre $t_0 = -1$ e t , chegamos a ver que

$$y(t) = t^3$$

é a única solución definida no intervalo $[-1 - \alpha, -1 + \alpha]$.

Notemos que a función $y(t) = t^3$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é solución do problema, pero non é a única solución que está definida en todo \mathbb{R} pois, por exemplo, a función

$$x(t) = \begin{cases} t^3 & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

é outra solución do mesmo problema.

Capítulo 3

Converxencia dos iterantes de Picard

Supoñamos que a función $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua no rectángulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|y - y^0\|_\infty \leq b\}$$

e tal que $\|f(t, y)\|_\infty \leq M$ para todo $(t, y) \in R$.

En virtude do teorema de Cauchy-Peano sabemos que o problema (1.1) ten polo menos, unha solución definida en $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ se tomamos

$$\alpha \in (0, \min\{a, \frac{b}{M}\}].$$

Por outra parte, se a función f é lipschitziana con respecto a y en R podemos construír a sucesión de iterantes de Picard e asegurar que esta, converxe á única solución do mesmo no intervalo I se se verifica que $\alpha L < 1$, sendo L a constante de Lipschitz.

Esta información pode ser esquematizada como segue:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ é continua en } \mathbb{R} \\ f \text{ é lipschitziana en } y \text{ en } \mathbb{R} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1.1) \text{ ten solución local única e} \\ \text{a sucesión de Picard converxe a dita solución.} \end{array} \right.$$

Á vista da definición dos iterantes de Picard

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0(t) = y^0 \text{ para todo } t \in I \\ \phi_m(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{m-1}(s)) ds \text{ para todo } t \in I \text{ e todo } m \in \mathbb{N}, \end{array} \right.$$

é claro que a súa construción é posible sen que f sexa lipschitziana con respecto á súa segunda variable. Surxen aquí varias cuestións: sabendo só que f é continua nun entorno de (t_0, y^0)

(I) Podemos afirmar que a sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente nalgún entorno de t_0 a algunha solución do problema?

(II) Se a sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente nalgún entorno de t_0 , é o límite unha solución do problema?

Se algunha subsucesión da sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente nalgún entorno de t_0 , é o límite unha solución do problema?

(III) Se o problema ten solución única nun determinado entorno de t_0 , a sucesión de iterantes de Picard converge?

Converxe hacia esa única solución?

Exemplo 3.1 (Contraexemplo para (I)). Consideremos a función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

e extendida con continuidade á rexión intermedia

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < t^2\}.$$

O problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ten polo menos unha solución definida nun entorno de $t_0 = 0$, xa que f é continua nun entorno da condición inicial $(0, 0)$.

Construímos a sucesión de iterantes de Picard correspondente: $\phi_0(t) = 0$, para todo t ,

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = \int_0^t 2s ds = t^2,$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = \int_0^t (-2s) ds = -t^2,$$

$$\phi_3(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds = \int_0^t 2s ds = t^2,$$

de onde é fácil inferir que

$$\phi_m(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } m \text{ é impar} \\ -t^2 & \text{se } m \text{ é par,} \end{cases}$$

Así resulta que:

- a sucesión de iterantes de Picard non converxe en ningún intervalo;
- as subsucesións converxentes teñen por límite uniforme en todo \mathbb{R} ou ben, a función $y(t) = t^2$ ou ben, a $y(t) = -t^2$, e ningunha delas é solución do problema de Cauchy (isto mostra que a resposta á segunda pregunta do punto (II) é negativa, en xeral).

Está claro que deste comportamento da sucesión de iterantes de Picard podemos sacar a seguinte conclusión sobre a función f : non hai ningún modo de definila na rexión

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < t^2\}$$

de maneira tal que o resultado sexa unha función lipschitziana con respecto á y nalgún entorno do punto $(0, 0)$, pois do contrario estaríamos nas condicións do teorema de Picard e, polo tanto, a sucesión de iterantes de Picard debería converxer uniformemente nalgún entorno de 0.

Exercicio 3.2. *Comprobar directamente (usando só a definición) que f non é lipschitziana con respecto á y en ningún entorno do $(0, 0)$ e que iso é independente da súa definición na rexión*

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < y^2\}.$$

Solución 3.3. Sexa

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

Sabemos que o problema $y' = f(t, y), y(0) = 0$, ten polo menos unha solución definida nun entorno de $t_0 = 0$, xa que f é continua nun entorno da condición inicial $(0, 0)$, vexamos agora que non é lipschitziana con respecto a y en ningún entorno do $(0, 0)$.

Recordemos a definición de función lipschitziana:

Unha función $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na súa segunda variable se existe $L > 0$ tal que $\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\|_\infty \leq L\|y - \bar{y}\|_\infty$ para calquera $(t, y), (t, \bar{y}) \in D$.

Se o fose existiría unha constante $L > 0$ tal que $\|2t - (-2t)\|_\infty \leq L\|y - \bar{y}\|_\infty$.

O cal quere decir que o termo $\frac{\|2t - (-2t)\|_\infty}{\|y - \bar{y}\|_\infty} \leq L$ estaría acotado por L .

Pero $\lim_{\bar{y} \rightarrow y} \frac{4t}{y - \bar{y}} = \infty$ para todo $t \neq 0$.

Por tanto f non é lipschitziana con respecto a y en ningún entorno do $(0, 0)$ independentemente da súa definición na rexión $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < t^2\}$.

Vimos que en xeral, supoñendo unicamente que a función f é continua, non cabe esperar que a sucesión de iterantes de Picard sexa converxente, sen embargo podemos dicir que a primeira pregunta do punto (II) ten resposta afirmativa. Todo isto precísase no exercicio seguinte.

Exercicio 3.4. (a) Supoñamos que $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua nun entorno do punto (t_0, y^0) . Se a sucesión de iterantes de Picard está ben definida e converge uniformemente nalgún entorno de t_0 , entón a función límite é unha solución do problema (1.1) en dito entorno de t_0 .

(b) Aplicar o resultado do apartado (a) ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Solución 3.5. A función $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ é continua nun entorno do punto $(0, 0)$.

Se calculamos os iterantes de Picard, observamos que son todos nulos:

$$\phi_0(t) = y^0 = 0, \text{ para todo } t$$

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = 0 + \int_0^t 0 ds = 0$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = 0 + \int_0^t 0 ds = 0.$$

E así sucesivamente.

Co que concluímos que cos iterantes de Picard, non se pode aproximar ningunha outra solución máis que a solución constante 0.

Por último deterémonos na cuestión (III): supoñamos que $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua nun entorno do punto (t_0, y^0) e que, ademais, o problema (1.1) ten unha única solución definida nun certo entorno de t_0 , podemos afirmar que a sucesión de iterantes de Picard converge á única solución do problema?

De novo, a resposta é NON, EN XERAL, e para construír un contraexemplo necesitamos outra condición suficiente de unicidade local que non sea a da Lipschitz.

Proposición 3.6 (Outra condición suficiente de unicidade local para problemas escalares).

Sexa $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función continua nun entorno do punto $(t_0, y^0) \in \mathbb{R}^2$.

Supoñamos que existe $a > 0$ tal que:

(i) para cada $\bar{t} \in [t_0, t_0 + a]$ fixado, a función $y \rightarrow f(\bar{t}, y)$ é decrecente

(ii) para cada $\bar{t} \in [t_0 - a, t_0]$ fixado, a función $y \rightarrow f(\bar{t}, y)$ é crecente.

Entón existe $\alpha \in (0, a]$ tal que o problema (1.1) ten unha única solución definida en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Demostración. O teorema de Cauchy Peano garantiza a existencia de polo menos, unha solución definida nun certo intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Non é restrictivo supoñer que $\alpha \in (0, a]$.

Supoñamos que $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, son un par de solucións distintas definidas en I . Por ser distintas podemos considerar que existe un punto $t_1 \in I$, $t_1 \neq t_0$ tal que $y_1(t_1) < y_2(t_1)$.

Caso I: $t_1 \in (t_0, t_0 + \alpha]$. Como $y_1(t_0) = y^0 = y_2(t_0)$ e as funcións y_i , $i = 1, 2$, son continuas, existe $t_2 \in [t_0, t_1)$ tal que

$$y_1(t_2) = y_2(t_2) \text{ e } y_1'(t) \leq y_2'(t) \text{ para todo } t \in [t_2, t_1].$$

Como $f(t, \cdot)$ é decrecente para cada $t \in [t_2, t_1]$ temos

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t)) \geq f(t, y_2(t)) = y_2'(t) \text{ para todo } t \in [t_2, t_1],$$

de onde, integrando entre t_2 e t_1 , chegamos á seguinte contradición: $y_1(t_1) \geq y_2(t_1)$.

Caso II: $t_1 \in [t_0 - \alpha, t_0)$. Demostración análoga á do *Caso I*.

Para ver que a unicidade local non é condición suficiente para a converxencia dos iterantes de Picard, basta considerar unha función como a do **Exemplo 1.22** que se encontre nas condicións da proposición que se acaba de probar.

□

Exemplo 3.7 (Unicidade local non implica converxencia da sucesión de iterantes de Picard.). Consideremos a función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

extendida con continuidade á rexión intermedia

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < t^2\}$$

e de tal forma que se encontre nas condicións da proposición anterior.

Vexamos como conseguir isto:

Fixado $\bar{t} > 0$ temos

$$y \rightarrow f(\bar{t}, y) = \begin{cases} -2\bar{t} & \text{se } y \geq \bar{t}^2 \\ 2\bar{t} & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

se queremos que $f(\bar{t}, \cdot)$ sexa continua e decrecente en \mathbb{R} podemos definila en $[0, \bar{t}^2]$ como unha función lineal que en 0 vale $2\bar{t}$ e en \bar{t}^2 vale $-2\bar{t}$, así

$$f(\bar{t}, y) = -\frac{4}{\bar{t}}y + 2\bar{t}.$$

Notemos, ademais que esta definición de f fai que $f(\bar{t}, \cdot)$ sexa continua e crecente cando $\bar{t} < 0$, de modo que a función

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \\ -\frac{4}{t}y + 2t & \text{se } 0 < y < t^2, \end{cases}$$

encóntrase nas condicións da proposición e por tanto, o problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ten unha única solución local.

Sen embargo, xa sabemos que non só a sucesión de iterantes de Picard non converxe, senón que os límites das súas subsucesións converxentes non son solucións do problema.

Capítulo 4

Aplicación ás ecuacións escalares de orde superior

Exemplo 4.1 (A ecuación do péndulo). Consideremos un cable de lonxitude $l > 0$ do que pende un corpo de masa $m > 0$. Supoñamos que a masa do cable é despreziable fronte á masa do corpo (así podemos simplificar o problema supoñendo que toda a masa do sistema se encontra no extremo do cable).

Chamemos

$x(t)$ =lonxitude no instante t do arco descrito polo péndulo e medido dende a vertical (positivo á dereita da vertical),

$\theta(t)$ =ángulo en radiáns que forma o péndulo coa vertical no instante t (positivo á dereita da vertical).

A forza que move ao péndulo é a compoñente do peso que actúa na dirección tanxente ao arco que describe o seu movemento, así temos (a partir da segunda ley de Newton)

$$mx''(t) = -mg \operatorname{sen} \theta(t),$$

onde g é a aceleración da gravidade e o signo negativo aparece porque a forza é de *recuperación*, é dicir, diríxese sempre cara a posición de equilibrio.

Xa que $x(t) = l\theta(t)$ para cada t , chegamos a que a función $\theta(t)$ debe satisfacer a ecuación

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t),$$

que é unha ecuación de segundo orde.

Que condición inicial é adecuada para problemas deste tipo?

A necesidade de integrar dúas veces para determinar a solución, involucra a elección de dúas constantes de integración. O habitual é fixar o valor da función e da súa derivada

nun instante inicial. Nese caso, poderíamos considerar as condicións iniciais

$$\theta(0) = \frac{\pi}{6}, \theta'(0) = 0,$$

que se interpretan como que o ángulo no instante 0 é de $\frac{\pi}{6}$ e a velocidade angular é 0, é dicir, o péndulo parte do reposo.

Nesta sección estudaremos a existencia e unicidade local de solución para o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y^n = f(t, y, y', \dots, y^{n-1}), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, e $(t_0, (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

O problema (4.1) é un problema escalar de orde $n \in \mathbb{N}$ en forma normal.

Definición 4.2. Unha solución do problema (4.1) é unha función escalar $y = y(t)$, de clase C^n nun intervalo I non dexenerado que contén a t_0 como punto interior e tal que:

1. $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in D$ para todo $t \in I$;
2. $y^n(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ para todo $t \in I$;
3. $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

O seguinte teorema fundamental permite trasladar o estudo dunha ecuación escalar de orde n nun sistema de n ecuacións escalares de primeiro orde, ao que se poden aplicar os resultados precedentes.

Teorema 4.3 (Ecuacións de orde superior como sistemas de primeiro orde.). *Sexan $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unha función definida nun entorno de $(t_0, (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, I un intervalo non dexenerado que contén a t_0 como punto interior e $y \in C^n(I)$. Os dous seguintes enunciados son equivalentes:*

- (i) *A función y é solución do problema (4.1) en I ;*
- (ii) *A función vectorial $z(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ é unha solución definida en I do sistema*

$$\begin{cases} z'_1 = z_2, & z_1(t_0) = y_0, \\ z'_2 = z_3, & z_2(t_0) = y_1, \\ \dots & \dots \\ z'_{n-1} = z_n, & z_{n-1}(t_0) = y_{n-2} \\ z'_n = f(t, z_1, z_2, \dots, z_n), & z_n(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii)

Sexa y unha solución de (4.1) en I e sexa

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) = (y(t), y'(t), \dots, y^{n-1}(t)) \text{ para todo } t \in I$$

Derivando en I temos

$$z'_1 = y' = z_2,$$

$$z'_2 = y'' = z_3,$$

...

$$z'_{n-1} = y^{n-1} = z_n,$$

$$z'_n = y^n = f(t, y, y', \dots, y^{n-1}) = f(t, z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Por outra parte, tendo en conta a condición inicial

$$z_1(t_0) = y(t_0) = y^0, z_2(t_0) = y'(t_0) = y^1, \dots, z_n(t_0) = y^{n-1}(t_0) = y^n.$$

(ii) \Rightarrow (i)

Sexa $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$ unha solución en I do sistema. Vexamos que $y(t) := z_1(t)$ é unha solución de (4.1).

Derivando en I temos

$$y'(t) = z'_1(t) = z_2(t),$$

$$y''(t) = z'_2(t) = z_3(t),$$

...

$$y^{n-1}(t) = z_{n-1}(t) = z_n(t),$$

$$y^n(t) = z'_n(t) = f(t, z_1, z_2, \dots, z_n) = f(t, y, y', \dots, y^{n-1}).$$

Utilizando as condicións iniciais chegamos a que

$$y(t_0) = z_1(t_0) = y_0, y'(t_0) = z'_1(t_0) = z_2(t_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(t_0) = z_n(t_0) = y_{n-1}.$$

□

Corolario 4.4 (Teorema de Peano.). *Se a función $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é continua nun entorno do punto $(t_0, (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entón existe un entorno de t_0 no que o problema (4.1) ten definida polo menos unha solución.*

Corolario 4.5 (Teorema de Picard.). *Se a función $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é continua nun entorno do punto $(t_0(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e, ademais, é lipschitziana con respecto á variable (y, y', \dots, y^{n-1}) en dito entorno, entón existe un entorno de t_0 no que o problema (4.1) ten definida unha única solución.*

Para demostrar ambos corolarios basta ter en conta que o sistema de primeiro orde equivalente se encontra nas condicións do teorema de Peano e de Picard, e utilizar o teorema anterior.

Exemplo 4.6 (Ecuación do péndulo.). Apliquemos o estudado á ecuación do péndulo:

Partindo do problema de Cauchy

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta, \theta(t_0) = \theta_0, \theta'(t_0) = \theta_1,$$

chamamos $z_1 = \theta, z_2 = \theta'$ e temos que o sistema de primeiro orde equivalente é

$$\begin{cases} z_1' = \theta' = z_2, & z_1(t_0) = \theta(t_0) = \theta_0, \\ z_2' = \theta'' = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} z_1, & z_2(t_0) = \theta'(t_0) = \theta_1. \end{cases}$$

Observación 4.7. É fácil adaptar os resultados que se acaban de obter para sistemas de ecuacións de orde n en forma normal: non hai máis que transformar cada ecuación do sistema no sistema de primeiro orde equivalente para, de novo, razonar sobre un sistema de primeiro orde en forma normal.

Evitaremos entrar en detalles, pois a notación é engorrosa, pero veremos como levar a cabo este proceso nun exemplo.

Exemplo 4.8. Consideremos o sistema de ecuacións de orde 2

$$\begin{cases} y_1'' = \cos y_2, & y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, \\ y_2'' = \operatorname{sen} y_1, & y_2(0) = 3, y_2'(0) = -1. \end{cases}$$

Chamemos $z_1(t) = y_1(t), z_2(t) = y_1'(t)$, así a primeira ecuación é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} z_1' = z_2, & z_1(0) = 1, \\ z_2' = \cos y_2, & z_2(0) = 0. \end{cases}$$

Chamemos $z_3(t) = y_2(t), z_4(t) = y_2'(t)$. A segunda ecuación equivale ao sistema

$$\begin{cases} z_3' = z_4, & z_3(0) = 3, \\ z_4' = \operatorname{sen} y_1 = \operatorname{sen} z_1, & z_4(0) = -1. \end{cases}$$

Finalmente o sistema de partida é equivalente ao sistema de primeiro orde

$$\begin{cases} z_1' = z_2, & z_1(0) = 1, \\ z_2' = \cos z_3, & z_2(0) = 0, \\ z_3' = z_4, & z_3(0) = 3, \\ z_4' = \operatorname{sen} y_1 = \operatorname{sen} z_1, & z_4(0) = -1. \end{cases}$$

Notemos que a función $f(t, (z_1, z_2, z_3, z_4)) = (z_2, \cos z_3, z_4, \operatorname{sen} z_1)$ para todo $(t, (z_1, z_2, z_3, z_4)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ pertence a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^5)$ así que, en particular, é localmente lipschitziana en \mathbb{R}^5 . En virtude do teorema de Picard, existe un entorno de t_0 no cal o sistema de primeiro orde ten definida unha única solución e, por tanto, en dito entorno existe unha única solución para o sistema de partida.

Capítulo 5

Implementación computacional do método de Picard

Nesta sección realizaremos un estudo gráfico do comportamento dos iterantes de Picard coa axuda do software matemático Maple, comparando a información que nos aporta cada gráfico sobre os exemplos mencionados ao longo do traballo.

1. Comezamos considerando un problema non lineal:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Neste caso $f(t, y) = 1 + y^2$ para todo $(t, y) \in \mathbb{R}^2$.

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ entón, polo **corolario 1.12**, f é localmente lipschitziana en y .

Logo existe $\alpha > 0$ tal que o problema ten unha única solución no intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$. Dita solución é o límite uniforme en I da sucesión de iterantes de Picard.

Recordemos como se define:

$$\begin{cases} \phi_0(t) = y^0 \text{ para todo } t \in I \\ \phi_m(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{m-1}(s)) ds \text{ para todo } t \in I \text{ e todo } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Construamos entón dita sucesión e vexamos como se comporta.

En primeiro lugar

$$\phi_0(t) = y^0 = 0, \text{ para todo } t$$

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = 1 + \int_0^t ds = t.$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = 1 + \int_0^t 1 + s^2 ds = t + \frac{t^3}{3}.$$

$$\phi_3(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds = 1 + \int_0^t 1 + \left(s + \frac{s^3}{3}\right)^2 ds = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2 * t^5}{15} + \frac{t^7}{63}.$$

$$\text{plot}\left(\left\{0, t, t + \frac{t^3}{3}, t + \frac{t^3}{3} + \frac{2 \cdot t^5}{15} + \frac{t^7}{63}, \tan(t)\right\}, t = -\frac{\text{Pi}}{2} .. \frac{\text{Pi}}{2}, \text{color} = [\text{BLUE}, \text{RED}, \text{GREEN}, \text{PINK}, \text{YELLOW}]\right)$$

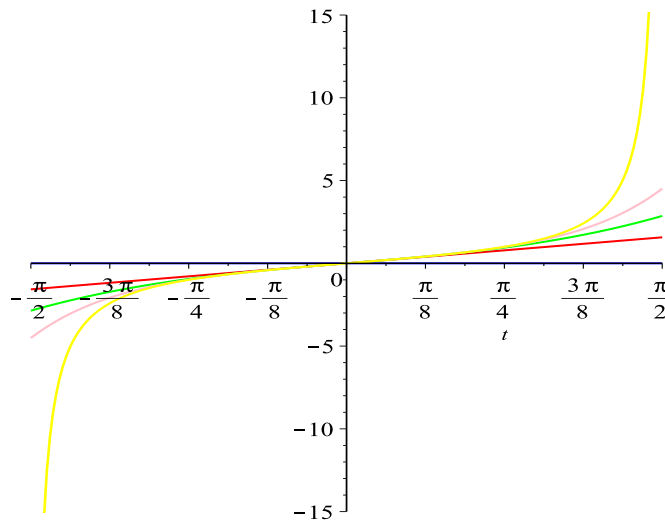


Figura 5.1: Gráfica dos iterantes de Picard e da solución

Neste caso, non podemos aproximar a solución mediante a sucesión de iterantes de Picard, pois non é fácil a simple vista, pero separando variables e integrando entre $t_0 = 0$ e t , chegamos a ver que a solución do problema é $y(t) = \tan(t)$.

Como podemos ver na Figura 5.1, a medida que avanzamos nos iterantes de Picard, a solución aproximada por estes parécese máis a solución exacta (que se corresponde ca cor amarela).

2. Consideremos o problema escalar do **exemplo 2.3**

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Neste caso $f(t, y) = y$ para todo $(t, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sabemos que este problema ten solución local única, pois cumpre as hipóteses do teorema de Picard:

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ entón, polo **corolario 1.12**, f é localmente lipschitziana en y .

Logo existe $\alpha > 0$ tal que o problema ten unha única solución no intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$. Dita solución é o límite uniforme en I da sucesión de iterantes de Picard.

Construamos entón dita sucesión e vexamos como se comporta.

En primeiro lugar

$$\phi_0(t) = y^0 = 1, \text{ para todo } t$$

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t.$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = 1 + \int_0^t 1 + s ds = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

$$\phi_3(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds = 1 + \int_0^t 1 + s + \frac{s^2}{2} ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}.$$

É fácil comprobar que a sucesión de iterantes de Picard é

$$\phi_m(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^m}{m!}.$$

Logo a solución do problema obtense:

$$\phi_m(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^m}{m!} \rightarrow e^t \text{ cando } m \rightarrow \infty.$$

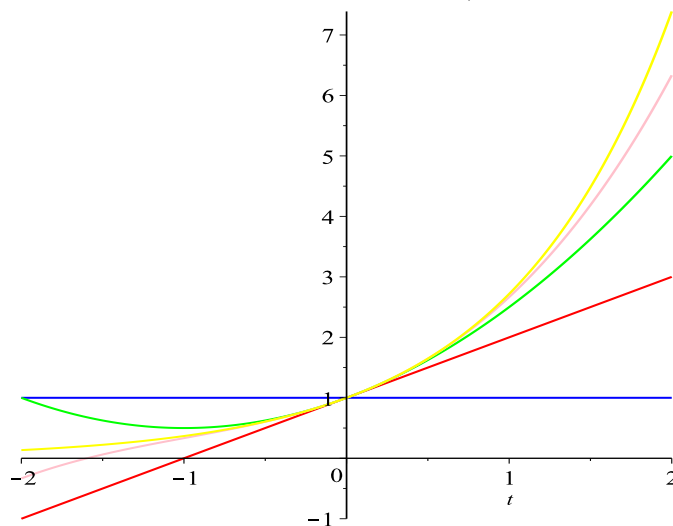
$$\text{plot}\left(\left\{1, 1+t, 1+t+\frac{t^2}{2}, 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}, \exp(t)\right\}, t=-2..2, \text{color}\right. \\ \left.= [\text{BLUE}, \text{RED}, \text{GREEN}, \text{PINK}, \text{YELLOW}]\right)$$


Figura 5.2: Gráfica dos iterantes de Picard e da solución do exemplo 2.3

Como podemos ver na Figura 5.2, a medida que avanzamos nos iterantes de Picard, a solución aproximada por estes parece máis a solución exacta (que se corresponde coa cor amarela).

Ademais a converxencia é uniforme en calquera intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ (e isto é así a pesar de que a aplicación que se constrúe na demostración do teorema de Picard pode non ser contractiva se o intervalo é moi grande).

Vexamos agora a gráfica dos erros correspondente.

Observando a Figura 5.3 apreciamos que canto máis avanzamos, menos erro hai, que é o ideal.

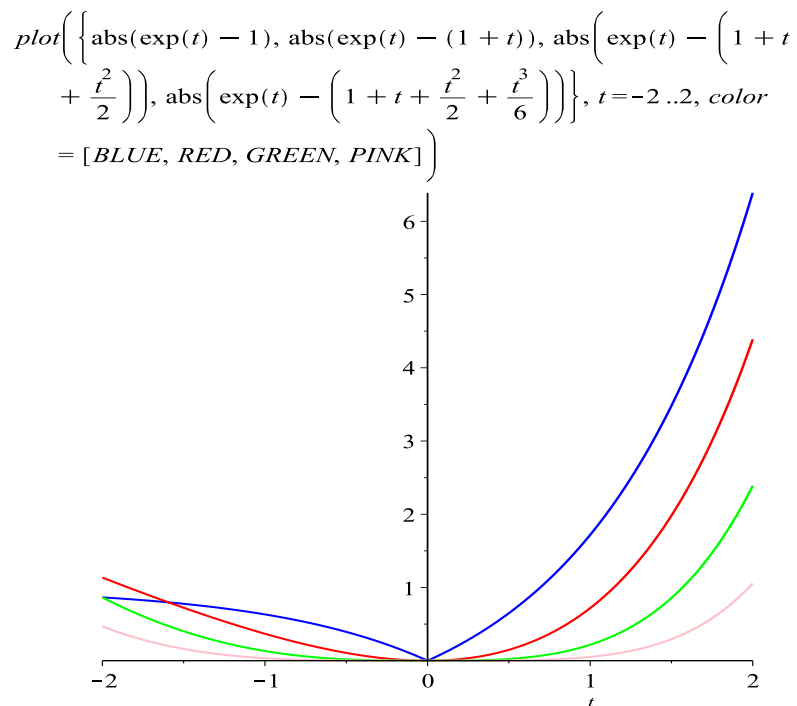


Figura 5.3: Gráfica dos erros do exemplo 2.3

3. Consideremos agora o problema do **exemplo 2.4** que se trata dun sistema:

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, y_1(0) = 1, \\ y_2' = y_1, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Na nosa notación temos $t_0 = 0, y^0 = (y_1^0, y_2^0) = (1, 0)$ e

$$f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y)) = (-y_2, y_1)$$

para todo $(t, y) = (t, (y_1, y_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

É claro que $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ é continua en \mathbb{R}^2 para $i, j \in \{1, 2\}$, de modo que polo **corolario 1.12**, f é localmente lipschitziana en $y = (y_1, y_2)$.

Logo podemos aplicar o teorema de Picard, co cal existe $\alpha > 0$ tal que o problema ten unha única solución no intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$. Dita solución pode ser aproximada pola sucesión de iterantes de Picard.

En primeiro lugar,

$$\phi_0(t) = y^0 = (1, 0), \text{ para todo } t.$$

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t f(s, (1, 0)) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t (0, 1) ds \\ &= (1, 0) + (0, t) = (1, t). \end{aligned}$$

Seguimos calculando

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t f(s, (1, 0)) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t (-s, 1) ds \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2}, t\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds \\ &= (1, 0) + \left(-\int_0^t s ds, \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2}, t - \frac{t^3}{6}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4(t) &= y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_3(s)) ds \\ &= (1, 0) + \left(-\int_0^t \left(s - \frac{s^3}{6}\right) ds, \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12}, t - \frac{t^3}{6}\right), \end{aligned}$$

Como vemos, na primeira compoñente obtemos:

$$\phi_{m_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} + \dots + \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}.$$

Sen embargo, na segunda compoñente chegamos a:

$$\phi_{m_2}(t) = t + \frac{t^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

`plot`($\left\{ \left\{ 1, 1 - \frac{t^2}{2}, 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12}, \cos(t) \right\}, t = -\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}, color = [BLUE, RED, GREEN, \right.$
 $\left. PINK, BLACK, PURPLE, YELLOW] \right\}$)

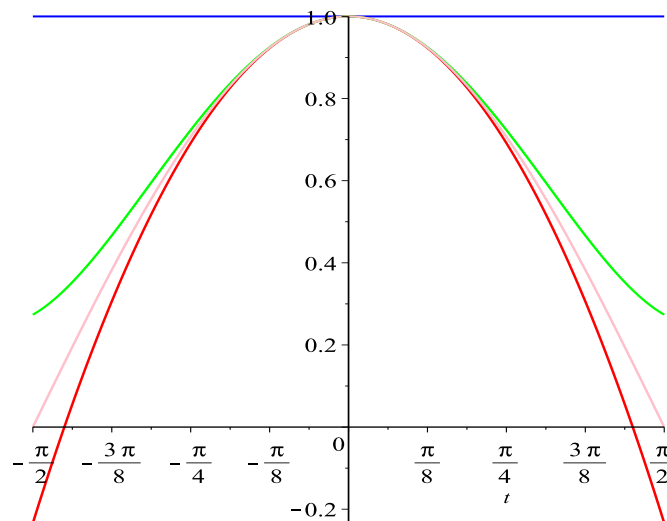


Figura 5.4: Gráfica dos iterantes de Picard e da solución do exemplo 2.4

Logo a solución do problema é:

$$\phi_m(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} + \dots + \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}, t + \frac{t^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \rightarrow (\cos(t), \sin(t)) \text{ cando } m \rightarrow \infty.$$

Ademais a converxencia é uniforme en calquera intervalo compacto.

Botémoslle un ollo á gráfica dos erros, para ver o seu comportamento:

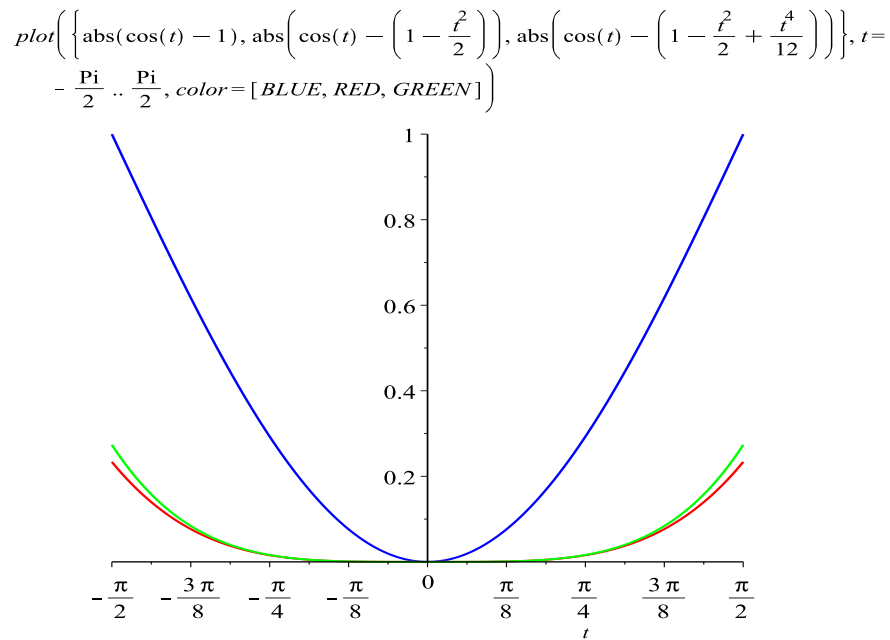


Figura 5.5: Gráfica dos erros do exemplo 2.4

4. Consideremos o problema do **exercício 2.5**

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Sexa $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sabemos que f é continua para $t \in (\delta, \infty)$ con $0 < \delta < 1$.

Ademais é localmente lipschitziana, basta tomar $L > \frac{1}{\delta}$.

Logo existe $\alpha > 0$ tal que o problema ten unha única solución no intervalo $I = [1 - \alpha, 1 + \alpha]$. Dita solución é o límite uniforme en I da sucesión de iterantes de Picard.

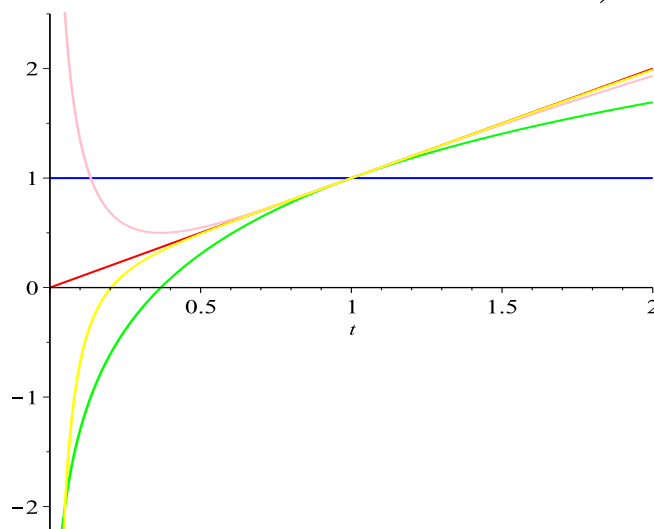
$$\text{plot}\left(\left\{1, 1 + \ln(t), 1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2}, 1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2} + \frac{\ln^3(t)}{6}, t\right\}, t\right. \\ \left.= 0..2, \text{color} = [\text{BLUE}, \text{RED}, \text{GREEN}, \text{PINK}, \text{YELLOW}]\right)$$


Figura 5.6: Gráfica dos iterantes de Picard e da solución do exercicio 2.5

Construamos entón dita sucesión:

En primeiro lugar:

$$\phi_0(t) = y^0 = 1, \text{ para todo } t$$

$$\text{plot}\left(\left\{\text{abs}(t - 1), \text{abs}(t - (1 + \ln(t))), \text{abs}\left(t - \left(1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2}\right)\right), \right.\right.$$

$$\left.\left.\text{abs}\left(t - \left(1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2} + \frac{\ln^3(t)}{6}\right)\right)\right\}, t = 0 \dots 2, \text{color} = [\text{BLUE}, \text{RED}, \text{GREEN}, \text{PINK}]\right)$$

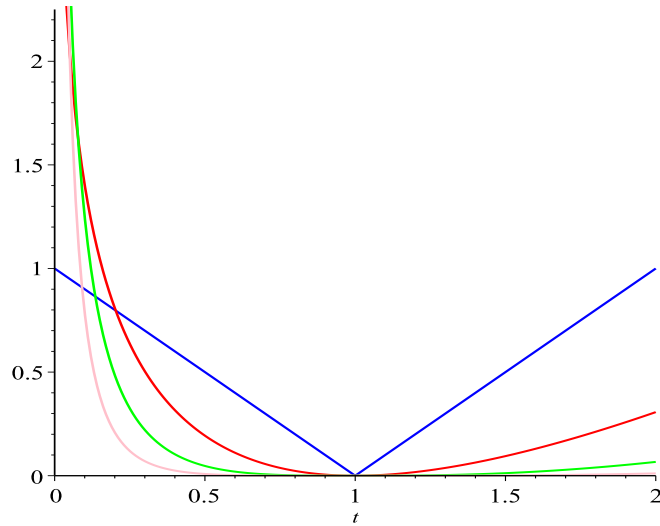


Figura 5.7: Gráfica dos erros exercicio 2.5

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = 1 + \int_1^t \frac{1}{s} ds = \ln(t).$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = 1 + \int_1^t \frac{1 + \ln(s)}{s} ds = 1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2}.$$

$$\phi_3(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds = 1 + \int_1^t \frac{1 + \ln(s) + \frac{\ln^2(s)}{2}}{s} ds = 1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2} + \frac{\ln^3(t)}{6}.$$

É fácil comprobar que a sucesión de iterantes de Picard é

$$\phi_m(t) = 1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2} + \frac{\ln^3(t)}{6} + \dots + \frac{\ln^m(t)}{m!}.$$

Logo a solución do problema obtense:

$$\phi_m(t) = 1 + \ln(t) + \frac{\ln^2(t)}{2} + \frac{\ln^3(t)}{6} + \dots + \frac{\ln^m(t)}{m!} \rightarrow e^{\ln(t)} = t \text{ cando } m \rightarrow \infty.$$

En canto á Figura 5.6 podemos apreciar como a medida que avanzamos nos iterantes de Picard, a solución exacta se parece máis á solución aproximada por ditos iterantes.

Da mesma forma, na Figura 5.7 observamos que ao avanzar o erro cada vez é menor, é dicir, aproxímase canto máis ao 0.

5. Vexamos agora o problema do **exemplo 2.6** que nos recalca que o teorema de Picard afirma a existencia dunha única solución nun entorno do instante no que se prefixa a condición inicial, pero se consideramos entornos máis grandes, poden existir máis solucións do problema, co cal se perdería a unicidade.

Consideramos o problema:

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-1) = -1. \end{cases}$$

A función $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ é de clase C^∞ no semiplano $y < 0$ (que contén a condición inicial), de modo que, en particular, f é continua e lipschitziana nun entorno da condición inicial $(-1, -1)$.

Así, en virtude do teorema de Picard, podemos afirmar que existe un valor $\alpha > 0$ tal que o problema ten unha única solución definida no intervalo $I = [-1 - \alpha, -1 + \alpha]$.

Calculemos os iterantes de Picard:

En primeiro lugar:

$$\phi_0(t) = y^0 = -1, \text{ para todo } t$$

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = -1 + \int_{-1}^t 3(-1)^{\frac{2}{3}} ds = 2 + 3t.$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = -1 + \int_{-1}^t 3(2 + 3s)^{\frac{2}{3}} ds = -\frac{8}{5} + \frac{3(2 + 3t)^{\frac{5}{3}}}{5}.$$

$$f := t \rightarrow \text{piecewise} \left(t < -\frac{2}{3}, -(\text{abs}(2 + 3 \cdot t))^{\frac{5}{3}}, t > -\frac{2}{3}, (\text{abs}(2 + 3 \cdot t))^{\frac{5}{3}} \right)$$

$$t \rightarrow \text{piecewise} \left(t < -\frac{2}{3}, -|2 + 3 t|^{5/3}, -\frac{2}{3} < t, |2 + 3 t|^{5/3} \right) \quad (1)$$

$$f \quad \left\{ \begin{array}{ll} -|2 + 3 t|^{5/3} & t < -\frac{2}{3} \\ |2 + 3 t|^{5/3} & -\frac{2}{3} < t \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\text{plot} \left(\left\{ -1, 3 \cdot t + 2, -1 + \frac{3 \cdot f(t) + 3}{5}, t^3 \right\}, t = -1 .. 1, \text{color} = [\text{BLUE}, \text{RED}, \text{GREEN}, \text{YELLOW}] \right)$$

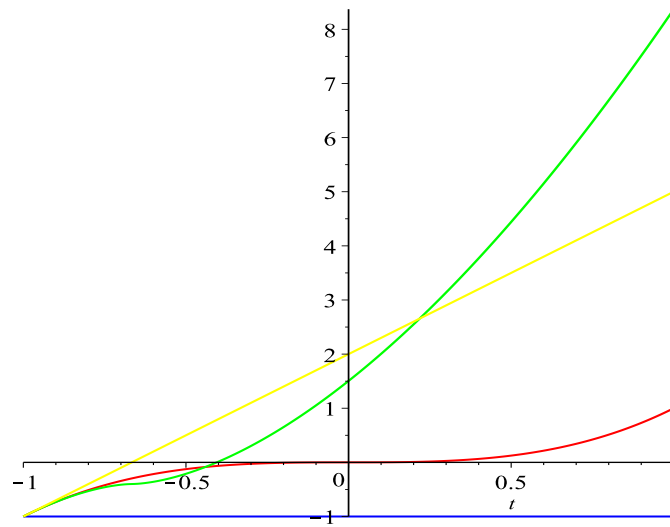


Figura 5.8: Gráfica dos iterantes de Picard e da solución do exemplo 2.6

Neste caso non podemos aproximar a solución mediante a sucesión de iterantes de Picard, pois non é fácil a simple vista, pero separando variables e integrando entre $t_0 = -1$ e t , chegamos a ver que

$$y(t) = t^3$$

é a única solución definida no intervalo $[-1 - \alpha, -1 + \alpha]$.

E polo teorema de Picard sabemos que o límite uniforme en I da sucesión de iterantes de Picard é dita solución.

Notemos que a función $y(t) = t^3$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é solución do problema, pero non

$$\begin{aligned}
 f := t \rightarrow & \text{piecewise} \left(t < -\frac{2}{3}, -(\text{abs}(2 + 3 \cdot t))^{\frac{5}{3}}, t > -\frac{2}{3}, (\text{abs}(2 + 3 \cdot t))^{\frac{5}{3}} \right) \\
 & t \rightarrow \text{piecewise} \left(t < -\frac{2}{3}, -|2 + 3t|^{5/3}, -\frac{2}{3} < t, |2 + 3t|^{5/3} \right) \quad \text{(1)} \\
 \text{plot} \left(\left\{ \text{abs}(t^3 - (-1)), \text{abs}(t^3 - (3 \cdot t + 2)), \text{abs} \left(t^3 - \left(-1 + \frac{3 \cdot f(t) + 3}{5} \right) \right) \right\}, t \right. \\
 & \left. = -1 .. 1, \text{color} = [\text{BLUE}, \text{RED}, \text{GREEN}] \right)
 \end{aligned}$$

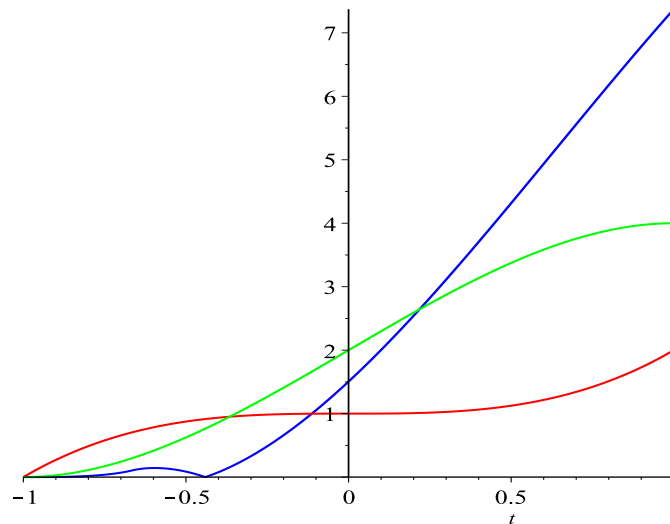


Figura 5.9: Gráfica dos erros do exemplo 2.6

é a única solução que está definida em todo \mathbb{R} pois, por exemplo, a função

$$x(t) = \begin{cases} t^3 & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

é outra solução do mesmo problema.

Como conclusão xeral, o que podemos apreciar nas gráficas dos iterantes de Picard e da solución dos problemas anteriores, é que:

En entornos próximos á condición inicial (t_0, y^0) , canto máis avanzamos nos iterantes de Picard, máis se parecen a solución exacta e a solución aproximada por ditos iterantes.

En canto aos erros, o que nos interesa é que se aproximen canto máis ao 0, e así o fan en todos os casos, vexamos as gráficas que amosan os erros dos problemas anteriores xa mencionados.

6. Vexamos agora o que ocorre coa sucesión de iterantes de Picard, cando f non é lipschitziana con respecto a y en ningún entorno da condición inicial.

Consideremos a función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

e extendida con continuidade á rexión intermedia

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < t^2\}.$$

O problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ten polo menos unha solución definida nun entorno de $t_0 = 0$, xa que f é continua nun entorno da condición inicial $(0, 0)$.

Construímos a sucesión de iterantes de Picard correspondente:

$$\phi_0(t) = 0, \text{ para todo } t.$$

Seguimos calculando:

$$\phi_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_0(s)) ds = \int_0^t 2s ds = t^2,$$

$$\phi_2(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds = \int_0^t (-2s) ds = -t^2,$$

$$\phi_3(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) ds = \int_0^t 2s ds = t^2,$$

Logo, como vemos a sucesión de iterantes de Picard correspóndese con:

$$\phi_m(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } m \text{ é impar} \\ -t^2 & \text{se } m \text{ é par,} \end{cases}$$

Así resulta que:

- a sucesión de iterantes de Picard non converge en ningún intervalo;

- as subsucesións converxentes teñen por límite uniforme en todo \mathbb{R} ou ben, a función $y(t) = t^2$ ou ben, a $y(t) = -t^2$, e ningunha delas é solución do problema de Cauchy.

Polo que a conclusión que sacamos sobre a función f é que non hai ningún modo de definila na rexión

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < t^2\}$$

de maneira tal que o resultado sexa unha función lipschitziana con respecto á y nalgún entorno do punto $(0, 0)$, pois do contrario estaríamos nas condicións do teorema de Picard e, polo tanto, a sucesión de iterantes de Picard debería converxer uniformemente nalgún entorno de 0.

7. Con este mesmo exemplo que acabamos de resolver, podemos garantir a unicidade local facendo unha nova definición da función f que cumpla as condicións da **proposición 3.6**.

Fixado $\bar{t} > 0$ temos

$$y \rightarrow f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

se queremos que $f(\bar{t}, \cdot)$ sexa continua e decrecente en \mathbb{R} podemos definila en $[0, \bar{t}^2]$ como unha función lineal que en 0 vale $2\bar{t}$ e en \bar{t}^2 vale $-2\bar{t}$, así

$$f(\bar{t}, y) = -\frac{4}{\bar{t}}y + 2\bar{t}.$$

Notemos, ademais que esta definición de f fai que $f(\bar{t}, \cdot)$ sexa continua e crecente cando $\bar{t} < 0$, de modo que a función

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{se } y \geq t^2 \\ 2t & \text{se } y \leq 0, \\ -\frac{4}{\bar{t}}y + 2t & \text{se } 0 < y < t^2, \end{cases}$$

Pero a sucesión de iterantes de Picard non converxe, nin os límites das súas subsucesións converxentes son solucións do problema.

Co cal vemos que se non estamos nas condicións do teorema de Picard, a sucesión de iterantes de Picard non converxe uniformemente en ningún entorno de t_0 a ningunha solución do problema.

Bibliografía

- [1] E.A. Coddington e N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.
- [2] Masa Vázquez, Xosé M., Topoloxía Xeral, Introducción aos espazos euclidianos, métricos e topolóxicos, 1999.
- [3] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, 1^o edition, Cambridge University press, Cambridge, UK, 1974.