



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estimación de conjuntos y convexidad

María Fernández Pérez

2022/2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estimación de conjuntos y convexidad

María Fernández Pérez

Septiembre de 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Estadística e Investigación Operativa
Título: Estimación de conjuntos y convexidad
Breve descripción do contido
<p>Los conjuntos convexos y las funciones convexas desempeñan un papel importante en muchas áreas de las matemáticas y la estadística. La convexidad combina intrínsecamente la geometría, el álgebra lineal, el análisis y la topología de varias formas. La noción de convexidad es fundamental, por ejemplo, en la programación matemática, en el subcampo de la programación lineal y, más generalmente, en la programación convexa. Los problemas de optimización convexa son inherentes a muchos métodos estadísticos y de aprendizaje automático que requieren la minimización de una función de pérdida dada. Pero más allá de su papel en los problemas de optimización subyacentes, la convexidad también es relevante en otras áreas de la estadística, como la estimación de conjuntos. En la teoría de la estimación de conjuntos, en la que el objetivo es estimar un conjunto, como el soporte de una distribución, a partir de una muestra (o diferentes funcionales asociadas a ella), se suelen imponer restricciones de forma. La convexidad es probablemente una de las más importantes y ha dado lugar a una considerable cantidad de literatura sobre el tema. El objetivo de este TFG es que el alumno/a realice una revisión del papel de la convexidad en la estimación de conjuntos.</p>

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Estimación de conjuntos	1
1.1. Notación y conceptos previos	1
1.2. Distancias entre conjuntos	3
1.2.1. La distancia de Hausdorff	3
1.2.2. La distancia en medida	6
1.3. Condiciones geométricas	7
1.3.1. Convexidad	7
1.3.2. α -convexidad	12
1.3.3. Propiedad de rodamiento	15
1.3.4. Reach o alcance de un conjunto	16
1.3.5. Estandaridad	18
2. Estimación del soporte	19
2.1. Estimador Devroye-Wise	19
2.2. Envolverte convexa	21
2.3. Envolverte α -convexa	25

3. Estudio de simulación	27
3.1. Envolverte convexa	27
3.2. Envolverte α-convexa	30
Anexos	33
A. Código de R	35
Bibliografía	41

Resumen

Uno de los propósitos fundamentales de la estimación de conjuntos consiste en reconstruir un conjunto, como el soporte de una distribución, a partir de una muestra aleatoria de puntos (o de diferentes funcionales asociadas a ella). Para que la estimación pueda realizarse será necesario imponer ciertas restricciones geométricas. Una de las más importantes es la convexidad. En el presente trabajo estudiaremos su relevancia basándonos en el artículo Brunel, V.-E. (2018). *Methods for Estimation of Convex Sets*. *Statistical Science*, 33(4), 615–632.

Abstract

One of the fundamental purposes of the set estimation is to reconstruct a set, such as the support of a distribution, from a random sample of points (or different functionals associated with it). In order for the estimation to be performed, certain geometric constraints must be imposed. One of the most important is convexity. In this paper, we will study its relevance based on the paper Brunel, V.-E. (2018). *Methods for Estimation of Convex Sets*. *Statistical Science*, 33(4), 615–632.

Introducción

La convexidad es un concepto fundamental en matemáticas con múltiples aplicaciones prácticas en diferentes campos como la optimización, la teoría de juegos, la teoría de conjuntos o la estadística. Nos centraremos en su aplicación en la teoría de la estimación de conjuntos, donde la convexidad es una de las principales restricciones de forma a considerar, ya que permite obtener estimaciones más precisas y acertadas del conjunto desconocido.

Las herramientas matemáticas que emplearemos a lo largo del trabajo se engloban en el campo de la estadística no paramétrica y de la geometría. Ambas desempeñan un papel fundamental en la estimación de conjuntos, por un lado la estadística no paramétrica proporciona métodos flexibles para analizar y describir características de los conjuntos sin necesidad de hacer suposiciones específicas sobre la distribución de los datos, mientras que la geometría facilita instrumentos para definir y representar la forma y la estructura de los conjuntos.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se pretende dar una visión general acerca de la estimación de conjuntos. Se establece la notación y se recuerdan ciertos conceptos que se emplearán a lo largo del trabajo. Se definen dos tipos de distancias entre conjuntos que serán herramientas clave para medir la similitud entre la forma de los conjuntos. A continuación se estudian ciertas restricciones de forma, abordando con mayor detenimiento el caso de los conjuntos convexos que constituye la base principal del trabajo.

El Capítulo 2 se centra en la estimación del soporte de una muestra aleatoria, se estudia la evolución y el comportamiento de los distintos estimadores. Primero sin imponer ninguna condición geométrica al conjunto y luego centrándose en la propiedad de convexidad.

Para concluir el trabajo, en el Capítulo 3 se presenta un estudio de simulación en el entorno de programación R sobre dos de los estimadores del soporte analizados en el Capítulo 2, esto permite evaluar la eficiencia de los estimadores mencionados en situaciones prácticas. En el Anexo A se recogen los códigos empleados para llevar a cabo dicha simulación.

Capítulo 1

Estimación de conjuntos

La estimación de conjuntos es un área de la estadística no paramétrica en la que la geometría juega un papel esencial. Así, la forma de los conjuntos y las distancias entre ellos tienen una importancia primordial en el problema que nos ocupa. Algunas de sus aplicaciones son el análisis cluster, la teoría de control, el procesamiento de imágenes y el reconocimiento de patrones, entre otras. La estimación de conjuntos hace referencia a un problema estadístico de estimación de un conjunto desconocido $S \subset \mathbb{R}^d$ a partir de una muestra aleatoria de puntos $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$, cuya distribución está íntimamente relacionada con S , y que se denotará como P_X . Este problema engloba casos como son la estimación del soporte, o determinados funcionales relacionados como, por ejemplo, el perímetro. También puede tener interés la estimación de los conjuntos de nivel. A lo largo de este trabajo nos centraremos principalmente en la estimación del soporte y de algunos funcionales, como son la medida o el área superficial. Si carecemos de información sobre el conjunto que nos interesa estimar, nos veremos obligados a emplear estimadores flexibles que sean capaces de abordar de manera eficiente una gran variedad de situaciones. Por otro lado, si limitamos la familia de conjuntos a estimar, podremos considerar mejores estimadores que se adapten a las restricciones de forma impuestas.

1.1. Notación y conceptos previos

Antes de profundizar en mayor detalle, vamos a introducir cierta notación que será empleada a lo largo del trabajo y a recordar conceptos que, si bien son previamente conocidos, resultan fundamentales para su posterior uso. Consideramos el espacio euclídeo d -dimensional \mathbb{R}^d , dotado del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la norma $\| \cdot \|$. La medida de Lebesgue d -dimensional se denota por μ . Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto no vacío y compacto. Entonces A^c , \bar{A} , $\text{int}(A)$ y ∂A representan el complementario, la clausura, el interior y la frontera de A respectivamente. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$

compacto, se dice que A tiene frontera de Lipschitz si ∂A es "suficientemente regular", en el sentido de que puede ser considerada como la gráfica de una función continua de Lipschitz. Se dice que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua de Lipschitz entre espacios métricos si existe una constante $K > 0$ tal que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in X$, donde d_Y es una medida de distancia entre puntos en Y y d_X es una medida de distancia entre puntos en X . $B(x, r)$ y $\overset{\circ}{B}(x, r)$ denotan la bola cerrada y la bola abierta de centro x y radio r respectivamente. Para simplificar la notación B y $\overset{\circ}{B}$ identifican a $B(0, 1)$ y a $\overset{\circ}{B}(0, 1)$ respectivamente. Además se tienen las siguientes igualdades $rB = B(0, r)$ y $r\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}(0, r)$.

Dados A y C contenidos en \mathbb{R}^d se define la suma de conjuntos como $A + C = \{a + c : a \in A, c \in C\}$. Se define la proyección métrica sobre un conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^d$ como la aplicación $p_A : \mathbb{R}^d \rightarrow A$ que asocia a cada $x \in \mathbb{R}^d$ el único punto de A que está a mínima distancia de x .

Dados x e $y \in \mathbb{R}^d$, se denota como $[x, y]$ el segmento cerrado que une x e y y se define como $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Análogamente se define segmento abierto (x, y) , como $(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 < \lambda < 1\}$. Se denotará como $\mathbb{1}_A$ la función indicadora o función característica de un conjunto A y la notación $||$ se usa para representar el valor absoluto. Una transformación afín invertible T es una aplicación que preserva líneas paralelas y razones entre distancias a lo largo de una línea, además existe una aplicación inversa que deshace la transformación original.

Recordemos ahora la definición de dos tipos de convergencia. Sea $\{X_n\}_{n \in \{1, 2, \dots\}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria, todas ellas definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Definición 1.1. Diremos que $\{X_n\}$ converge de forma casi segura o con probabilidad 1 a X y lo notaremos $X_n \xrightarrow{cs} X$ si:

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1.$$

Definición 1.2. Diremos que $\{X_n\}$ converge en probabilidad a X y lo notaremos $X_n \xrightarrow{p} X$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

El tipo de consistencia en la mayor parte de los resultados de la estimación de conjuntos es de la forma:

$D(S_n, S) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ya sea en probabilidad o de forma casi segura, donde D denota la distancia considerada entre conjuntos, de lo que hablaremos en la próxima sección y S_n denota el estimador del conjunto S construido a partir de la muestra. Se dice que S_n es un estimador consistente si $D(S_n, S) \rightarrow 0$ en probabilidad y se dice que es un estimador fuertemente consistente

si $D(S_n, S) \rightarrow 0$ con probabilidad uno. Los resultados más interesantes hacen referencia a una convergencia de S_n hacia S del tipo:

$D(S_n, S) = O_P(R_n)$ o $D(S_n, S) = O(R_n)$ con probabilidad uno, donde R_n es una secuencia numérica tal que $R_n \rightarrow \infty$, y O denota el orden de convergencia mientras O_P denota el orden en probabilidad.

1.2. Distancias entre conjuntos

A lo largo de este trabajo se emplearan las dos distancias siguientes, acorde a los resultados mencionados. La distancia de Hausdorff cuantifica la proximidad física entre dos conjuntos mientras que la distancia en medida es útil para cuantificar la similitud en cuanto a contenido. Sin embargo, cualquiera de las dos distancias son útiles para medir la similitud entre la forma de los dos conjuntos. Para escribir las definiciones que veremos a continuación nos hemos apoyado en [12].

1.2.1. La distancia de Hausdorff

Nos centraremos en el espacio euclídeo d -dimensional \mathbb{R}^d , dotado del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la norma $\| \cdot \|$.

Definición 1.3. Sean A y C dos subconjuntos no vacíos y compactos de un espacio métrico \mathbb{R}^d . Se define la distancia de Hausdorff entre A y C como:

$$d_H(A, C) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{c \in C} d(c, A) \right\},$$

donde

$$d(a, C) = \inf \{ \|a - c\| : c \in C \}.$$

Podemos garantizar que d_H está bien definida ya que la distancia de Hausdorff se restringe a subconjuntos no vacíos y acotados. En caso de no restringir la distancia de Hausdorff a subconjuntos cerrados, podría darse que la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos fuese cero aunque estos no sean iguales. Véase el ejemplo que se muestra en la Figura 1.1 donde A es un conjunto cerrado, pero C no.

Se puede definir la distancia de Hausdorff de forma equivalente haciendo uso de los conceptos de ϵ -vecindad que definimos a continuación.

Definición 1.4. Sea A un subconjunto no vacío, compacto de \mathbb{R}^d . Se define la ϵ -vecindad abierta de A como:

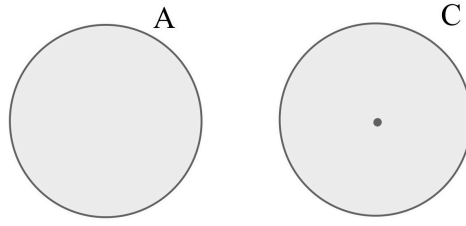


Figura 1.1: $A = B(0, 1)$; $C = A \setminus (0, 0)$

$$\overset{\circ}{B}(A, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < \epsilon\}.$$

Definición 1.5. Sea A un subconjunto no vacío, compacto de \mathbb{R}^d . Se define la ϵ -vecindad cerrada de A como:

$$B(A, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) \leq \epsilon\}.$$

Por tanto, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.6. Sean A y C dos subconjuntos no vacíos y compactos de un espacio métrico \mathbb{R}^d . Se define la distancia de Hausdorff entre A y C como:

$$d_H(A, C) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset \overset{\circ}{B}(C, \epsilon) \text{ y } C \subset \overset{\circ}{B}(A, \epsilon)\}.$$

Véase ilustrado en la siguiente Figura [1.2](#)

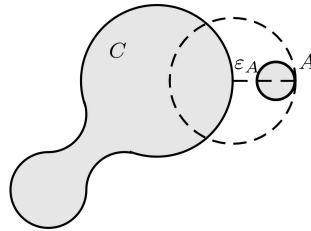


Figura 1.2: $\epsilon_A = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset \overset{\circ}{B}(C, \epsilon)\}$ (Imagen extraída de [12](#))

Como ya mencionamos las Definiciones [1.3](#) y [1.6](#) son equivalentes, se puede consultar la demostración de esta equivalencia en [19](#).

Otra definición alternativa para la distancia de Hausdorff en un espacio métrico \mathbb{R}^d es a partir de las operaciones morfológicas dilatación y erosión de un conjunto. Este enfoque se basa en la teoría de la morfología matemática. La morfología matemática es una teoría y técnica para el análisis y tratamiento de las estructuras geométricas, basada en la teoría de conjuntos, la teoría

de retículos y la geometría integral. Es de especial utilidad en problemas donde la forma sea la característica más relevante. El objetivo de las transformaciones morfológicas es la extracción de estructuras geométricas relevantes del conjunto sobre el que se opera, mediante la utilización de otro conjunto de forma conocida denominado elemento estructurante. Se puede consultar más información acerca de este campo en el libro [22]. A lo largo del trabajo definiremos y emplearemos las siguientes operaciones morfológicas: la erosión, la dilatación, la apertura y el cierre de un conjunto. Las bases teóricas de la morfología matemática se asientan sobre la suma y la resta de Minkowski que definimos a continuación.

Definición 1.7. Sean A y C dos subconjuntos de \mathbb{R}^d . La suma de Minkowski se define como, $A \oplus C = \{a + c : a \in A, c \in C\}$.

Notar que la Definición [1.7] es equivalente a la suma de conjuntos dada en la Sección 1.1 de notación y conceptos previos, pero se denotará como \oplus al hablar de suma de Minkowski para mantener la notación usual empleada en el campo de la morfología.

Definición 1.8. Sean A y C dos subconjuntos de \mathbb{R}^d . La resta de Minkowski se define como, $A \ominus C = \{x : \{x\} \oplus C \subset A\}$.

Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\lambda C = \{\lambda c : c \in C\}.$$

Se emplea la notación $A \oplus \{x\}$ para denotar a la traslación del conjunto A por el vector x . Una vez dados estos conceptos se pueden definir los operadores dilatación y erosión. La dilatación y la erosión son operaciones que modifican un conjunto A al interactuar con un elemento estructurante. La dilatación actúa expandiendo el conjunto. El elemento estructurante se coloca sobre cada punto del conjunto, y si el elemento se superpone con algún punto del conjunto, ese punto se agrega a la dilatación. Intuitivamente se puede pensar como si se "inflase" el conjunto, haciendo que abarque más espacio. Por otro lado, la erosión actúa reduciendo el conjunto. Al colocar el elemento estructurante sobre cada punto del conjunto, solo conserva los puntos que coinciden completamente con el elemento. Intuitivamente se puede entender como que el conjunto se "recorta" para adaptarse a la forma del elemento estructurante. La forma en que se dilata o erosiona el conjunto depende del elemento estructurante, en este contexto se va a considerar como elemento estructurante las bolas d -dimensionales.

Definición 1.9. La dilatación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ con el elemento estructurante $\overset{\circ}{B}(0, r)$ se define como la unión de bolas abiertas de radio r con centro en A , es decir,

$$\bigcup_{x \in A} \overset{\circ}{B}(x, r) = A.$$

Definición 1.10. La erosión de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ con el elemento estructurante $\overset{\circ}{B}(0, r)$ se define como el lugar geométrico de puntos de x tales que $\overset{\circ}{B}(x, r)$ está contenida en A , es decir,

$$\{x : \overset{\circ}{B}(x, r) \subset A\}.$$

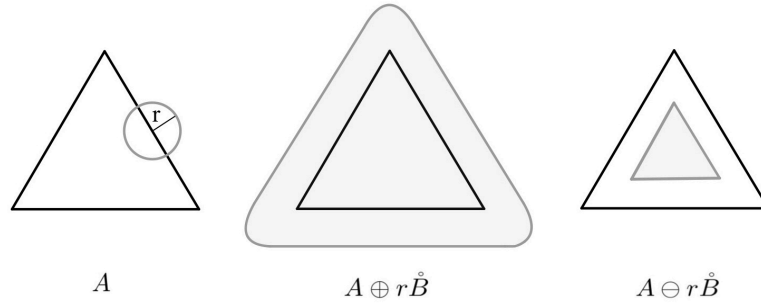


Figura 1.3: Dilatación y erosión del conjunto A con el elemento estructurante $\hat{B}(0, r)$

Si el elemento estructurante es $\hat{B}(0, r)$, la dilatación y la erosión de un conjunto A por el elemento estructurante es equivalente respectivamente a la suma $A \oplus r\hat{B}$ y a la resta $A \ominus r\hat{B}$ de Minkowski definidas anteriormente. Véase la Figura [1.11](#)

Como mencionamos anteriormente existe una tercera definición de la distancia de Hausdorff formulada en términos de la operación morfológica dilatación.

Definición 1.11. Sean A y C dos subconjuntos no vacíos y compactos de un espacio métrico \mathbb{R}^d . La distancia de Hausdorff entre A y C se define como:

$$d_H(A, C) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset C \oplus \epsilon\hat{B} \text{ y } C \subset A \oplus \epsilon\hat{B}\}.$$

Acabamos de ver tres definiciones equivalentes para la distancia de Hausdorff, y su uso dependerá del contexto o del área que estemos abordando. La equivalencia entre las Definiciones [1.6](#) y [1.11](#) es debido a esta igualdad:

$$\hat{B}(A, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < \epsilon\} = \bigcup_{x \in A} \hat{B}(x, \epsilon) = A \oplus \epsilon\hat{B}$$

que se puede consultar en [12](#).

1.2.2. La distancia en medida

Definimos esta distancia en el siguiente espacio de medida $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \mu)$, donde \mathcal{B} denota la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^d .

Definición 1.12. Sean A y $C \subset \mathcal{B}$. La distancia en medida entre A y C se define como:

$$d_\mu(A, C) = \mu(A\Delta C)$$

donde $A\Delta C$ denota la diferencia simétrica entre A y C ,

$$A\Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A).$$

Véase ilustrado en la siguiente Figura [1.4](#) La diferencia simétrica también puede ser expresada

como se muestra a continuación:

$$A\Delta C = (A \cup C) \setminus (A \cap C).$$

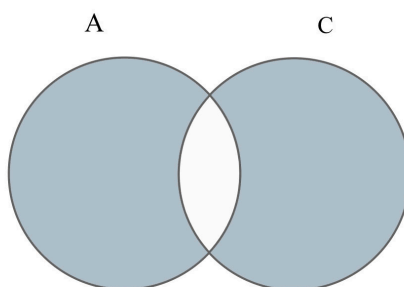


Figura 1.4: $A\Delta C$

Cabe destacar que en el caso bidimensional \mathbb{R}^2 nos referimos a la medida de Lebesgue μ como área y en el caso tridimensional \mathbb{R}^3 nos referimos a ella como volumen. Además la medida de Lebesgue podría reemplazarse por otra de mayor interés en el problema.

1.3. Condiciones geométricas

Las condiciones geométricas juegan un papel esencial en la estimación de conjuntos. Desde un punto de vista geométrico, la familia de los conjuntos cerrados en \mathbb{R}^d es muy amplia e incluye conjuntos extremadamente complicados, "monsters parade" referencia de [6]. Esto hace que las aproximaciones de la mayoría de dichos conjuntos mediante métodos estadísticos no sean demasiado efectivas. Por esta razón es necesario imponer ciertas restricciones de forma que permitan identificar diferentes clases de conjuntos cuyas aproximaciones estadísticas sean mejores. Estudiaremos desde la más restrictiva que es la convexidad, a la más flexible y analizaremos las relaciones que existen entre ellas. Empleamos [12], [6] y [20] como referencia fundamental tanto para establecer las definiciones como los resultados que trataremos en esta Sección 1.3.

1.3.1. Convexidad

Definición 1.13. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ se dice convexo si $\forall x \text{ e } y \in A, [x, y] \subset A$.

Definición 1.14. Se dice que un vector $x \in \mathbb{R}^d$ es una combinación lineal de los vectores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$. Además se verifica lo siguiente: Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ entonces se dice que x es una combinación afín de los x_i .

Si para cada λ_i con $i = 1, \dots, k$ se verifica que $\lambda_i \geq 0$ entonces x es una combinación positiva de los x_i .

Si se verifican ambas condiciones a las vez, es decir, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y para $i = 1, \dots, k$ $\lambda_i \geq 0$, entonces se dice que x es una combinación convexa x_i .

A partir de estos conceptos se tiene la siguiente caracterización:

Proposición 1.15. *Un conjunto A es convexo si, y sólo si, cualquier combinación convexa de puntos de A está en A .*

Definición 1.16. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un subconjunto no vacío. La envolvente convexa o cierre convexo de A , $\text{conv}(A)$ es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^d que pueden escribirse como combinación lineal convexa de una cantidad finita de puntos de A .

De la Definición [1.16](#) se tienen las siguientes propiedades:

1. $A \subset \text{conv}(A)$
2. Si $A \subset B$, entonces $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$
3. $\text{conv}(A)$ es convexo: dados x e $y \in \text{conv}(A)$ y $\lambda \in [0, 1]$, existen $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$, $\sum_{i=1}^m \mu_i y_i = y$. Por tanto,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$$

veamos que esta combinación lineal es convexa, es decir que sus coeficientes son no negativos y suman 1. Lo primero es evidente que se verifica y lo segundo lo comprobamos a continuación:

$$\lambda \sum_{i=1}^k \lambda_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i = \lambda 1 + (1 - \lambda)1 = 1$$

Teorema 1.17. *Sean A y $B \subset \mathbb{R}^d$ no vacíos.*

1. Si A es convexo, entonces $A = \text{conv}(A)$.
2. La envolvente convexa de un conjunto de puntos A es el menor conjunto convexo que contiene a dichos puntos, es decir, es la intersección de todos los conjuntos convexos en los que A está contenido.
3. $\text{conv}(A) + \text{conv}(B) = \text{conv}(A + B)$

Demostración. Para 1 ya sabemos que $A \subset \text{conv}(A)$. Supongamos que A es convexo y veamos que $\text{conv}(A) \subset A$. Si $x \in \text{conv}(A)$ entonces existen $x_1, \dots, x_k \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$. Aplicando inducción sobre k tendríamos:

- Si $k=1$, entonces $x \in A$.
- Si $k=2$, entonces $x \in [x_1, x_2] \subset A$ (por ser A convexo).
- Supongamos por hipótesis de inducción que si $y \in \text{conv}(A)$ se escribe como combinación lineal de menos de k puntos de A , entonces $y \in A$. Tomemos $x \in \text{conv}(A)$, si $\lambda_k = 0$, entonces podemos aplicar a x la hipótesis de inducción, luego $x \in A$. Si $\lambda_k = 1$, entonces $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} = 0$, luego x es combinación lineal convexa de un solo punto de A , por tanto $x \in A$. Supongamos ahora que $\lambda_k \in (0, 1)$. Entonces:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = (1 - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i + \lambda_k x_k$$

El miembro de la derecha es combinación lineal convexa de $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i$ y x_k . Como A es convexo, bastará probar que $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i \in A$ para ver que x está en A . Pero $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i$ es combinación lineal convexa de $x_1, \dots, x_{k-1} \in A$, entonces por hipótesis de inducción $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i \in A$.

Para 2, denotamos por $D(A)$ a la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^d que contienen a A . Como $A \subset \text{conv}(A)$ y $\text{conv}(A)$ es convexo, entonces $D(A) \subset \text{conv}(A)$. Recíprocamente, sea $C \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo con $A \subset C$. Tomando envolventes convexas, $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(C) = C$ (por el apartado 1). Como C es cualquier convexo que contiene a A , tendremos que $\text{conv}(A) \subset D(A)$ probando así la igualdad.

Para el apartado 3, veamos primero que $\text{conv}(A + B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$: Sea $x \in \text{conv}(A + B)$, entonces existen $a_1, \dots, a_k \in A$ y $b_1, \dots, b_k \in B, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i + b_i) = x$. Así,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$$

Recíprocamente veamos que $x + y \in \text{conv}(A + B) \forall x \in \text{conv}(A), y \in \text{conv}(B)$:

Existen $a_1, \dots, a_k \in A$ y $b_1, \dots, b_m \in B, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = x$ y $\sum_{j=1}^m \mu_j b_j = y$. Así,

$$x + y = \left(\sum_{j=1}^m \mu_j\right) \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \left(\sum_{j=1}^m \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, m} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j).$$

El miembro de la derecha es una combinación lineal convexa de $a_i + b_j \in A + B$, ya que los coeficientes $\lambda_i \mu_j$ son no negativos y suman 1. Por tanto, $x + y \in \text{conv}(A + B)$.

□

Uno de los resultados fundamentales sobre la generación de las envolventes convexas es el Teorema de Caratheodory [1.19](#). En la Definición [1.16](#) no se establece ninguna restricción sobre el número de puntos de A necesarios para la combinación convexa. Sin embargo el Teorema de Caratheodory nos indica cuál es el número máximo de puntos requeridos. A continuación se muestra el Lema [1.18](#) que se empleará en la demostración del Teorema de Caratheodory.

Lema 1.18. $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ son afínmente dependientes si y sólo si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$.

Teorema 1.19. (Caratheodory) Si $A \subset \mathbb{R}^d$ y $x \in \text{conv}(A)$, entonces x es combinación lineal convexa de puntos de A afínmente independientes (a lo sumo $n + 1$ puntos de A).

Demostración. Sea $x \in \text{conv}(A)$, que será de la forma $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ para ciertos $x_1, \dots, x_k \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Elegimos esta combinación lineal lo más corta posible, en particular $\lambda_i > 0 \forall i$. Por reducción al absurdo, supongamos que x_1, \dots, x_k son afínmente dependientes, por el Lema [1.18](#) existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$. Salvo reordenación de los índices podemos suponer que,

$$\frac{\lambda_k}{\alpha_k} = \min\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} / \alpha_i > 0\}$$

Si escribimos x como combinación lineal convexa de x_1, \dots, x_{k-1} tendremos una contradicción ya que se había supuesto la combinación original lo más corta posible.

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i) x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i x_i + \lambda_k x_k$$

Los dos últimos términos en el miembro de la derecha suman 0, ya que,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i x_i + \lambda_k x_k = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_k x_k = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto, solo nos queda ver que el primer término del miembro de la derecha es una combinación lineal convexa.

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i) = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i + \lambda_k) - \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i) = 1 - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} 0 = 1,$$

luego solo queda ver que cada coeficiente $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i$ es no negativo:

- Si $\alpha_i > 0$, entonces $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ luego $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \geq 0$.
- Si $\alpha_i = 0$, entonces $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i = \lambda_i \geq 0$.
- Si $\alpha_i < 0$, entonces $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \geq 0 \geq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ luego $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \leq \lambda_i$.

□

El Teorema [1.20](#) resume unas propiedades generales de los conjuntos convexos que permiten comprender cómo se comporta la envolvente convexa frente a propiedades topológicas básicas.

Teorema 1.20. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$.

1. Si A es convexo e $\text{int}(A) \neq \emptyset$, entonces $\text{int}(A)$ y A son convexos.
2. Si A es abierto, entonces $\text{conv}(A)$ es abierta.
3. Si A es acotado, entonces $\text{conv}(A)$ es acotada.
4. Si A es compacto, entonces $\text{conv}(A)$ es compacta.
5. Si A es convexo e $\text{int}(A) \neq \emptyset$, entonces $\text{int}(A) = \text{int}(\bar{A})$ y $\overline{\text{int}(A)} = \bar{A}$.

Otro resultado igualmente sencillo e importante sobre envolventes convexas es el siguiente:

Teorema 1.21. (Randon) *Todo subconjunto de puntos afínmente dependientes de \mathbb{R}^d , en particular, cualquier conjunto con al menos $n + 2$ puntos, puede expresarse como la unión de dos conjuntos disjuntos cuyas envolventes convexas tienen un punto en común.*

A partir de ahora cuando se hable de cuerpo convexo nos estaremos refiriendo a un conjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^d no vacío. Se denotará por \mathcal{K}_d la colección de todos los cuerpos convexos.

Dentro de la familia de los conjuntos convexos en \mathbb{R}^d , la familia más sencilla son los polítopos.

Definición 1.22. Un polítopo en \mathbb{R}^d es la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos. Se denotará como P .

Esta Definición [1.22](#) es la generalización d -dimensional del concepto de polígono convexo en \mathbb{R}^2 o de poliedro convexo en \mathbb{R}^3 .

De manera alternativa, se puede definir como:

Teorema 1.23. (Teorema Principal de los Polítopos) *Todo polítopo es la intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados. Además, toda intersección acotada de una cantidad finita de semiespacios cerrados es un polítopo.*

La aproximación de cuerpos convexos generales por polítopos es una herramienta muy útil en numerosas ocasiones.

Teorema 1.24. (Teorema de aproximación) *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un cuerpo convexo que contiene el origen en su interior. Entonces, para cada $\lambda > 1$, existe un polítopo $P \in \mathcal{K}^d$ verificando que $P \subset A \subset \lambda P$.*

Recordando el apartado 2 del Teorema [1.17](#) la envolvente convexa de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^d que contienen a A . Es posible refinar este resultado tomando una intersección en una familia menor, a cambio, debemos imponer que A sea compacto.

Teorema 1.25. *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un compacto no vacío. La envolvente convexa de A es la intersección de todos los semiespacios cerrados de \mathbb{R}^d que contienen a A .*

Se puede obtener una caracterización de la envolvente convexa de un conjunto a partir de sus puntos extremos mediante el Teorema de Krein-Milman [1.27](#).

Definición 1.26. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ convexo. Un punto $x \in A$ se dice extremo de A si no existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x \in (x_1, x_2)$. Se representa por $\text{extr}(A) = \{x \in A \mid x \text{ es un punto extremo de } A\}$ y suele llamarse el perfil de A .

Teorema 1.27. *(Teorema de Krein-Milman en \mathbb{R}^d)* Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un compacto convexo no vacío. Entonces, $A = \text{conv}(\text{extr}(A))$.

Otra clase de conjuntos convexos que distinguiremos son los conjuntos convexos con frontera "suave". De forma intuitiva se entiende que la frontera de un conjunto convexo es "suave", en el sentido de que no presenta cambios abruptos como esquinas o aristas pronunciadas, sino que la frontera posee cierta regularidad. Se dice que la frontera de estos conjuntos tiene curvatura positiva, notar que en el caso de los politopos la frontera tiene curvatura 0.

En [8](#) se presenta la siguiente condición que garantiza la suavidad a la frontera:

Condición 1.28. ∂A es suave si para cada $x \in \partial A$ existe un único $\theta(x) \in \partial(B)$ tal que $\langle y, \theta(x) \rangle \leq \langle x, \theta(x) \rangle \forall y \in A$ y para alguna constante $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $|\theta(x) - \theta(y)| \leq a|x - y| \forall x, y \in \partial A$.

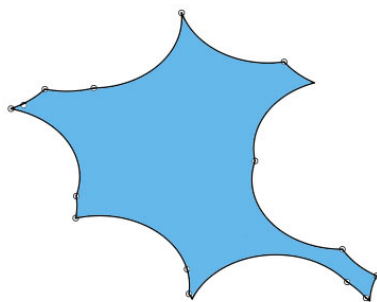
1.3.2. α -convexidad

Un conjunto cerrado A se dice que es α -convexo si existe un $\alpha > 0$ tal que A puede ser expresado como la intersección de los conjuntos complementarios de todas las bolas abiertas de radio α que son disjuntas con A , es decir, $A = C_\alpha(A)$ donde,

$$C_\alpha(A) = \bigcap_{\text{int}(B(x,\alpha)) \cap A = \emptyset} (\text{int}(B(x,\alpha)))^c, \quad (1.1)$$

denota la envolvente α -convexa de A .

La envolvente α -convexa de un conjunto A satisface que $C_\alpha(A) \subset C_{\alpha'}(A)$ para todo $\alpha \leq \alpha'$. Además, bajo ciertas condiciones de A , véase [23](#) se puede probar que $C_\alpha(A)$ tiende a la clausura de A cuando α tiende a 0 y tiende a la envolvente convexa de A cuando α tiende a ∞ .

Figura 1.5: Conjunto α -convexo

Consideremos la relación entre convexidad y α -convexidad. Si A es convexo y cerrado entonces A es α -convexo para todo $\alpha > 0$, como se puede observar en la Figura 1.6. Si el interior de la envolvente convexa es no vacío, entonces el recíproco también es cierto, como se prueba en [23].

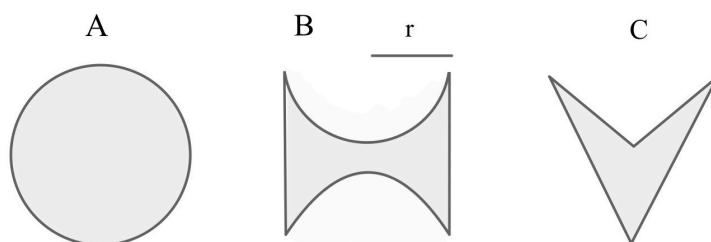


Figura 1.6: A conjunto convexo y α -convexo para todo $\alpha > 0$. B conjunto no convexo pero α -convexo para todo $\alpha \leq r$. C conjunto ni convexo ni α -convexo para ningún $\alpha > 0$.

Alternativamente se puede definir la α -convexidad de un conjunto A en términos de operaciones morfológicas, en particular a través del cierre de un conjunto, íntimamente relacionado con los operadores dilatación y erosión que ya definimos anteriormente. Se puede tratar de recuperar la forma original de un conjunto erosionado, si una vez realizada la erosión, se realiza una dilatación, esta operación es conocida como apertura. Del mismo modo, si se efectúa una dilatación seguida de una erosión, se está realizando una operación conocida como cierre. La dilatación y erosión no son operadores inversos, por tanto es importante destacar que tanto el cierre como la apertura pueden no coincidir con el conjunto original.

En base a lo mencionado anteriormente a continuación se define la α -convexidad mediante el

cierre con respecto a $\overset{\circ}{B}(0, \alpha)$. Entonces, el conjunto A es α -convexo si

$$A = (A \oplus \overset{\circ}{B}) \ominus \overset{\circ}{B} \quad (1.2)$$

Para poder llegar a esta definición, en primer lugar definimos los operadores cierre y apertura.

Definición 1.29. El cierre de un conjunto A con respecto a $\overset{\circ}{B}(0, r)$ se define como

$$(A \oplus r \overset{\circ}{B}) \ominus r \overset{\circ}{B}$$

Definición 1.30. La apertura de un conjunto A con respecto a $\overset{\circ}{B}(0, r)$ se define como

$$(A \ominus r \overset{\circ}{B}) \oplus r \overset{\circ}{B}$$

Al igual que ocurría con la dilatación y la erosión, el cierre y la apertura son el resultado de la interacción entre el conjunto de interés y un elemento estructurante. En este caso particular, ambas definiciones toman como elemento estructurante la bola abierta $\overset{\circ}{B}(0, r)$. En las Figuras 1.7 y 1.8 se muestra el cierre y la apertura de un conjunto A .

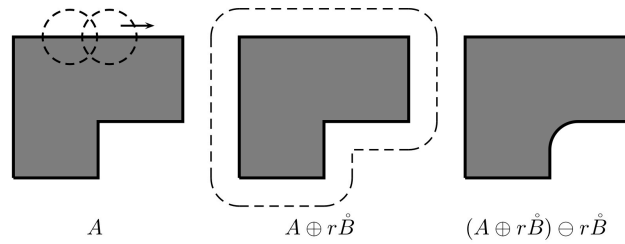


Figura 1.7: Dilatación y erosión que conducen al cierre de A . (Imagen extraída de [12])

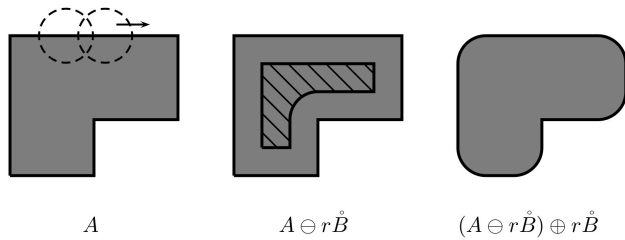


Figura 1.8: Dilatación y erosión que conducen a la apertura de A . (Imagen extraída de [12])

Probamos entonces que el cierre de un conjunto A coincide con la Definición 1.1 de envolvente α -convexa, para $\alpha = r$, es decir la siguiente igualdad,

$$(A \oplus r \overset{\circ}{B}) \ominus r \overset{\circ}{B} = \bigcap_{\{ \overset{\circ}{B}(x,r) : \overset{\circ}{B}(x,r) \cap A = \emptyset \}} (\overset{\circ}{B}(x,r))^c. \quad (1.3)$$

Para ello empleamos las propiedades que se citan a continuación. Las operaciones cierre y apertura son crecientes, idempotentes y duales entre sí con respecto a la toma de complementarios, esto es, $(A^c \ominus r \overset{\circ}{B}) \oplus r \overset{\circ}{B} = ((A \oplus r \overset{\circ}{B}) \ominus r \overset{\circ}{B})^c$ y $(A^c \oplus r \overset{\circ}{B}) \ominus r \overset{\circ}{B} = ((A \ominus r \overset{\circ}{B}) \oplus r \overset{\circ}{B})^c$. Se dice que A es morfológicamente cerrado con respecto a $\overset{\circ}{B}(0, r)$ si $A = (A \oplus r \overset{\circ}{B}) \ominus r \overset{\circ}{B}$, y morfológicamente abierto con respecto a $\overset{\circ}{B}(0, r)$ si $A = (A \ominus r \overset{\circ}{B}) \oplus r \overset{\circ}{B}$.

La apertura de A coincide con los puntos de todas las bolas $B(x, r)$ que están completamente contenidas en A , es decir,

$$(A \ominus r \overset{\circ}{B}) \oplus r \overset{\circ}{B} = \bigcup_{\overset{\circ}{B}(y, r) \subset A} \overset{\circ}{B}(y, r).$$

Esta ecuación junto con la dualidad con respecto al complementario de la apertura y el cierre demuestran [1.3](#).

1.3.3. Propiedad de rodamiento

A continuación se introduce la condición de rodamiento libre.

Definición 1.31. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado. Se dice que la bola αB rueda libremente en A si para cada punto de la frontera $a \in \partial A$ existe algún $x \in A$ tal que $a \in B(x, \alpha) \subset A$

Intuitivamente se entiende que un conjunto cerrado A verifica la propiedad de rodamiento si una bola puede rodar libremente, por el interior, a lo largo del perímetro, teniendo contacto con todos los puntos de este. De manera análoga, se puede definir "la propiedad de rodamiento externa" pero aplicando la Definición [1.31](#) a \bar{A}^c . Vease una representación en la Figura [1.9](#). Se trata de una propiedad de suavidad que se establece desde una perspectiva exclusivamente geométrica, sin utilizar explícitamente conceptos de diferenciación. Si se desea obtener una interpretación adicional en términos de propiedades de diferenciabilidad, véase [23](#).

La condición de rodamiento garantiza cierta regularidad en la frontera del conjunto como muestra el siguiente Lema [1.32](#). Las demostraciones de los resultados que veremos a continuación se pueden encontrar en Pateiro-López (2008, Appendix A) [12](#).

Lema 1.32. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado no vacío. Suponiendo que una bola de radio $\alpha > 0$ rueda libremente en A . Entonces, $\text{int}(\bar{A}^c) = A^c$ y $\partial A = \partial \bar{A}^c$.

El Lema [1.33](#) vincula las nociones de α -convexidad y propiedad de rodamiento.

Lema 1.33. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado no vacío. Suponiendo que una bola de radio $\alpha > 0$ rueda libremente en A y en \bar{A}^c . Entonces, A y \bar{A}^c son ambos α -convexos.

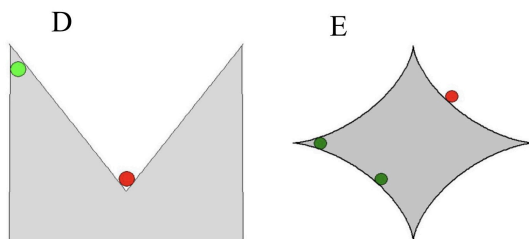


Figura 1.9: D es un conjunto que no tiene propiedad de rodamiento ni "propiedad de rodamiento externa", E es un conjunto que no tiene propiedad de rodamiento pero tiene "propiedad de rodamiento externa". (Imagen extraída de [6])

La implicación inversa del Lema 1.33 no es cierta, es decir, podemos encontrar conjuntos A y \bar{A}^c que sean ambos α -convexos, pero que no satisfagan la propiedad de rodamiento en A y en \bar{A}^c . Tómese como ejemplo la Figura 1.10, donde los conjuntos $A = B \cup \{x\}$ y $\bar{A}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{B}$ son ambos α -convexos para $\alpha = 1$. Sin embargo, una bola de radio 1 no puede rodar libremente en A porque es un punto.

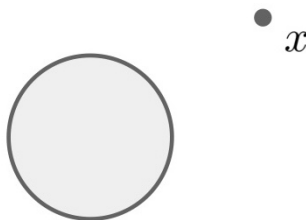


Figura 1.10: $A = B \cup \{x\}$ y $\bar{A}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{B}$

1.3.4. Reach o alcance de un conjunto

El alcance de un conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^d$ se define como el mayor valor de α , pudiendo ser este infinito, tal que si $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ y la distancia desde x a A es menor que α entonces la proyección métrica de x en A es única. Cualquier conjunto compacto y convexo A tiene alcance positivo, de hecho el alcance de estos conjuntos será ∞ .

A continuación citamos una serie de condiciones que relacionan la propiedad de rodamiento libre con el alcance positivo de un conjunto.

Lema 1.34. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado no vacío. Suponiendo que una bola de radio $\alpha > 0$

rueda libremente en A y en \bar{A}^c . Entonces $\forall x \in \mathbb{R}^d$ tal que $d(x, \partial A) < \alpha$ existe un único punto $a \in \partial A$ tal que $\|x - a\| = d(x, \partial A)$. Es decir, el alcance de ∂A es mayor o igual que α .

Como consecuencia todo punto cuya distancia a ∂A sea menor que α tiene una única proyección métrica sobre ∂A , donde a es la proyección métrica de x sobre ∂A . Este Lema [1.34](#) prueba que una condición suficiente para que $\partial A \subset \mathbb{R}^d$ tenga alcance positivo es que una bola de radio α ruede libremente en A y en \bar{A}^c . Pero no basta con que una bola de radio α ruede libremente en A para garantizar que $\text{reach}(\partial A) \geq \alpha$, como se puede observar en la Figura [1.11](#). Análogamente

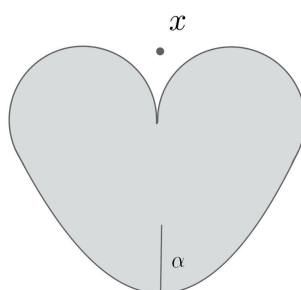


Figura 1.11: Una bola de radio α ruede libremente en A , $d(x, \partial A) < \alpha$, y la proyección métrica de x en la ∂A no es única.

ocurre si la bola de radio α sólo ruede en \bar{A}^c , véase [1.12](#).

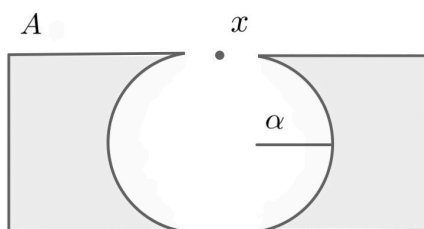


Figura 1.12: Una bola de radio α ruede libremente en \bar{A}^c , $d(x, \partial A) < \alpha$, y la proyección métrica de x en la ∂A no es única.

En el siguiente Lema [1.35](#) se muestra una aplicación útil del Lema [1.34](#).

Lema 1.35. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado no vacío. Suponiendo que una bola de radio $\alpha > 0$ ruede libremente en A y en \bar{A}^c . Entonces, A y \bar{A}^c son ambos conjuntos con alcance positivo, siendo $\text{reach}(A)$ y $\text{reach}(\bar{A}^c)$ mayor o igual que α .

1.3.5. Estandaridad

La estandaridad establece que toda bola de radio suficientemente pequeño centrada en un punto de A tiene al menos una proporción fija en A . Formalmente, se dice que A es μ -estándar si existen $\epsilon_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\forall x \in A$ y $\epsilon \leq \epsilon_0$;

$$\mu(B(x, \epsilon) \cap A) \geq \delta \mu(B(x, \epsilon)).$$

Intuitivamente se puede entender como que el conjunto A no tiene picos pronunciados, como se ilustra en la siguiente Figura [1.13](#)

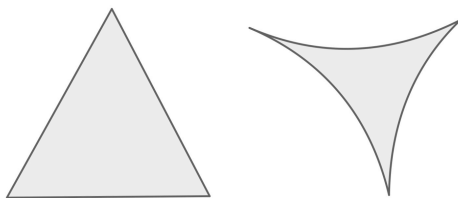


Figura 1.13: El conjunto de la izquierda es μ -estándar y el de la derecha no.

Capítulo 2

Estimación del soporte

En este caso lo que se pretende estimar es el soporte de una distribución P_X en \mathbb{R}^d . El objetivo es aproximar el soporte S de una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de observaciones que se encuentran en el interior de S , y que a partir de ahora se denotará como \mathcal{X}_n . Para un caso general sin asumir ninguna restricción de forma de S , el primer estimador que se podría considerar es la propia muestra \mathcal{X}_n . Este estimador es fuertemente consistente empleando la distancia de Hausdorff, sin embargo para la distancia en medida se tiene que $d_\mu(S, \mathcal{X}_n) = \mu(S) > 0$. Por tanto, se propondrán otros estimadores que alcancen mejores resultados para d_μ . Para el caso general se puede tomar el estimador de Devroye-Wise y si se asume que el conjunto S es convexo se puede considerar como estimador la envolvente convexa, que es el conjunto convexo más pequeño que contiene a la muestra.

2.1. Estimador Devroye-Wise

Chevalier (1976) [4] y Devroye and Wise (1980) [7] proponen estimar el soporte de una distribución de probabilidad desconocida mediante una versión suavizada de la muestra \mathcal{X}_n y que además mejora la precisión para d_μ . El estimador propuesto fue el estimador de Devroye-Wise que se define como sigue:

Definición 2.1. El estimador de Devroye-Wise se define como la unión de bolas centradas en una muestra de puntos con un radio común, es decir:

$$S_n = \bigcup_{i=1}^n B(X_i, \epsilon_n),$$

donde ϵ_n depende únicamente del valor n .

El problema de estimación del soporte fue introducido por [7] relacionado con una aplicación

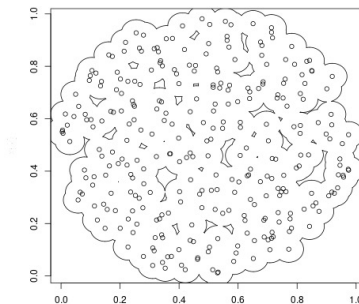


Figura 2.1: Estimador de Devroye-Wise para una muestra aleatoria de tamaño $n = 300$.

práctica, la detección de comportamiento anormal de un sistema, planta o máquina. Los resultados del comportamiento del estimador fueron analizados, entre otros, por Chevalier (1976) [4], Devroye and Wise (1980) [7] y Korostelév and Tsybakov (1993) [11]. En [7] podemos encontrar los siguientes resultados que garantizan la consistencia del estimador de Devroye-Wise bajo una serie de condiciones.

Teorema 2.2. *Si $\epsilon_n \rightarrow 0$ y $n\epsilon_n^d \rightarrow \infty$ entonces $d_\mu(S, S_n) \rightarrow 0$ en probabilidad.*

Teorema 2.3. *Si $\epsilon_n \rightarrow 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\alpha n \epsilon_n^d) < \infty \forall \alpha > 0$ entonces $d_\mu(S, S_n) \rightarrow 0$ con probabilidad uno.*

En el Teorema [2.2] se prueba que S_n es un estimador consistente mientras que el Teorema [2.3] garantiza que es fuertemente consistente. Estos resultados no solo son válidos para la medida de Lebesgue μ y conjuntos compactos, sino para cualquier medida cuya restricción al conjunto general sea absolutamente continua con respecto a la distribución P_X .

Bajo las suposiciones recogidas en [11] se obtiene el siguiente orden de convergencia. Si los X_i son uniformes en S y $S \subset \mathcal{G}$, una adecuada elección de los parámetros ϵ_n da un orden de convergencia uniforme del tipo:

$$\sup_{S \in \mathcal{G}} \mathbb{E} d_\mu(S_n, S) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/d},$$

donde \mathcal{G} representa una clase de conjuntos cuya frontera es Lipschitziana por partes, lo que asegura una cierta regularidad y suavidad local y \mathbb{E} denota la esperanza respecto a la distribución P_X . Si se ignora el factor logaritmo el orden de convergencia es esencialmente $n^{-1/d}$, que empeora rápidamente a medida que d aumenta, este fenómeno se conoce como la "maldición de la dimensionalidad".

En el caso de que tratásemos de estimar el perímetro de un conjunto S , la muestra \mathcal{X}_n no es un estimador del perímetro satisfactorio en el sentido de que el perímetro de \mathcal{X}_n no se acercará al

de S . Sin embargo ∂S_n donde S_n es el estimador de Devroye-Wise de la muestra definido en [2.1](#) podría ser un buen estimador de ∂S siempre que S no sea demasiado complicado y la secuencia de parámetros ϵ_n converja a 0 suficientemente despacio. Este problema se presenta en Cuevas and Rodríguez-Casal (2004) [5](#).

Su estudio recoge la siguiente condición:

Asumiendo que S es estándar con respecto a P_X , es decir que $\mathbb{P}\{X \in B(x, \epsilon)\} = P_X(B(x, \epsilon)) \geq \delta \mu(B(x, \epsilon))$ para $x \in S$ y ϵ suficientemente pequeño. Asumiendo también que S verifica la propiedad de rodamiento o "la propiedad de rodamiento externa" y

$$\epsilon_n = C \left(\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}, \text{ para algún } C > \left(\frac{2}{\delta \omega_d} \right)^{\frac{1}{d}}, \omega_d = \mu(B(0, 1)).$$

Entonces, con probabilidad uno, $d_H(\partial S_n, \partial S) \leq \epsilon_n$ y $d_H(S_n, S) \leq \epsilon_n$, eventualmente.

2.2. Envolverte convexa

Los primeros trabajos acerca de la estimación del soporte datan de los años sesenta, por parte de Rényi and Sulanke [16](#) y [17](#). Estos estudios se centraban en el caso particular en el que S era el soporte de un conjunto convexo contenido en el espacio euclídeo bidimensional \mathbb{R}^2 . En ellos se proponía como estimador natural la envolverte convexa de la muestra que denotaremos como $K_n = \text{conv}(\mathcal{X}_n)$. En este caso la muestra estaba formada por n puntos aleatorios i.i.d distribuidos uniformemente en un cuerpo plano convexo. La envolverte convexa es la intersección de todos los conjuntos convexos que incluyen a \mathcal{X}_n . Véase la Figura [2.2](#)

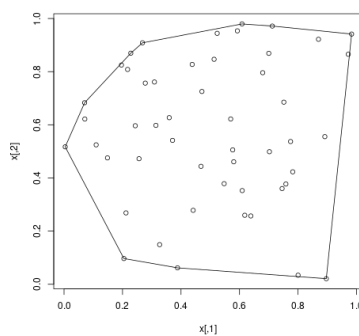


Figura 2.2: Envolverte convexa para una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$.

En [16](#) y [17](#) se proporciona un valor aproximado del riesgo que se corre al tomar la envolverte convexa como estimador del soporte. Se encargaron de estudiar el comportamiento asintótico de la esperanza del número de vértices denotado como V_n y del área "faltante", donde el área que falta coincide con la distancia en medida entre la envolverte convexa K_n y el soporte S , esto

es $\mu(S \setminus K_n)$. Estos resultados varían considerablemente dependiendo de la estructura de la frontera del soporte. La esperanza del número de vértices es del orden de $n^{1/3}$ si la frontera de S es suficientemente "suave", en el sentido de que no presenta esquinas ni aristas pronunciadas como ya mencionamos en la Subsección 1.3.1 de Convexidad, mientras que será de orden $r \ln(n)$ cuando S es un polígono convexo de r vértices, con $r \geq 3$. En cuanto a la esperanza del área "faltante" se prueba que es del orden de $n^{-2/3}$ para el primer caso, y del orden de $\ln(n)/n$ si S es un cuadrado.

Efron (1965) [9] proporciona la igualdad [2.1] que relaciona la esperanza del número de vértices V_{n+1} con la esperanza del área "faltante", independientemente de la estructura de la frontera de S .

$$\mathbb{E} \left[\frac{\mu(S \setminus K_n)}{\mu(S)} \right] = \frac{\mathbb{E}[V_{n+1}]}{n+1}, \quad (2.1)$$

Además [2.1] permite extender los resultados obtenidos en [16] y [17] acerca del área "faltante" a cualquier polígono convexo con r vértices. Por tanto, si S es un polígono convexo de este tipo su orden de convergencia será de la forma $r \ln(n)/n$. A la vista de los resultados se puede deducir que la esperanza del área "faltante" disminuye mucho más rápido cuando el soporte es un polígono en comparación a cuando su frontera es suficientemente "suave".

Posteriormente, el objetivo fue tratar de extender estos resultados a una dimensión d arbitraria. En particular, se probará que la identidad de Efron [2.1] se cumple para cualquier dimensión d si S es un cuerpo convexo contenido en \mathbb{R}^d . Además de lo ya visto, en [9] se tratan los temas ya mencionados en el caso bidimensional, pero aplicados a \mathbb{R}^3 . Se prueban fórmulas integrales para calcular la esperanza del volumen que falta, así como el número de vértices.

Bàràny and Larman (1988) [1] proponen una generalización de estos resultados sin ninguna suposición sobre la estructura de la frontera de S , y llegan a los siguientes resultados: si la frontera de un cuerpo convexo S es suficientemente "suave" entonces $\mathbb{E}[\mu(S \setminus K_n)]$ es del orden de $n^{-2/(d+1)}$, mientras que si S es un politopo será del orden de $n^{-1} \ln(n)^{d-1}$. De hecho en Schütt (1994) [21] se prueba que si S es un cuerpo convexo con frontera "suave" y curvatura positiva se tiene que,

$$n^{2/(d+1)} \mathbb{E} \left[\frac{\mu(S \setminus K_n)}{\mu(S)} \right] \rightarrow c(d, S), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

donde $c(d, S)$ es una constante explícita que depende de d y de S y que además es un invariante afín en S , es decir, $c(d, S) = c(d, T(S))$ para toda transformación afín invertible T . Además también se demuestra que esta convergencia es válida para todo cuerpo convexo S . En el caso de los politopos, donde la curvatura de $\partial(S)$ es 0 se tendrá que $c(d, S) = 0$.

Todos estos trabajos se desarrollaron desde una perspectiva geométrica y probabilística, sin embargo a lo largo de esta etapa no se trató de probar si la envolvente convexa se trataba o

no de un estimador óptimo para S . Esta pregunta no surgió en la literatura estadística hasta la década de los 90.

Korostelév and Tsybakov (1993) [11] demuestran que K_n es el estimador de máxima verosimilitud en la familia de los conjuntos convexos cerrados. La función de verosimilitud viene dada como, $L_n(S) := \mu(S)^{-n} \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i \in S} = \mu(S)^{-n} \mathbb{I}_{K_n \subseteq S}$, para todo cuerpo convexo $S \in \mathcal{K}^d$. Por tanto, esta función alcanza su máximo valor cuando $S = K_n$. La pregunta que se formula a continuación es en que grado de precisión va a poder aproximarse S mediante la envolverte convexa de la muestra \mathcal{X}_n . Esta cuestión aparece expuesta en Dümbgen and Walther (1996) [8], donde se estudia la proximidad entre el conjunto S y la envolverte convexa en términos de la distancia de Hausdorff para una dimensión d arbitraria.

Teorema 2.4. *Dados X_1, X_2, \dots, X_n uniformemente distribuidos en S , donde $\mathbb{P}\{X_i \in A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$ para cualquier conjunto de Borel $A \subset S$. Entonces:*

$$d_H(S, K_n) = \begin{cases} O((\log n/n)^{1/d}) \text{ casi segura} \\ O((\log n/n)^{2/(d+1)}) \text{ casi segura bajo la condición [1.28]} \end{cases}$$

Un interesante resultado, debido a Groemer (1974) [10] muestra que $\mathbb{E} \left[\frac{\mu(S \setminus K_n)}{\mu(S)} \right]$ es máxima cuando S es un elipsoide. Por tanto, se puede derivar de [21] que la constante $c(d, S)$ en [2.2] es del orden de $d^{d+o(d)}$ cuando d aumenta. Como consecuencia, cuando la dimensión de d se hace demasiado grande, la envolverte convexa K_n no es un buen estimador de S si S es un cuerpo convexo cuya frontera es "suave" porque sufre la "maldición de la dimensionalidad", tanto en el orden $n^{-2/(d+1)}$ como en el factor constante $d^{d+o(d)}$. Sin embargo, se sabe que el orden $n^{-2/(d+1)}$ no puede ser mejorado en un sentido "minimax", es decir que no existe un método alternativo que pueda alcanzar una tasa de convergencia más rápida a la existente en el peor de los casos, como se demostrará en el Teorema [2.5].

Como acabamos de mencionar, a continuación se prueba que la envolverte convexa K_n es un estimador óptimo para la clase de los cuerpos convexos \mathcal{K}^d en un sentido "minimax" empleando la distancia en medida. El siguiente resultado se puede encontrar en Brunel (2016) [2]. Antes de enunciarlo introduciremos cierta notación. Consideramos dos secuencias a_n y b_n de números positivos, donde se denota que $a_n \lesssim \theta b_n$ si $a_n \leq c(\theta)b_n, \forall n \geq 1$, para alguna constante positiva $c(\theta)$ que depende de un parámetro θ .

Teorema 2.5. *La siguiente desigualdad sostiene:*

$$\begin{aligned} n^{-\frac{2}{d+1}} &\lesssim_d \inf_{\tilde{S}_n} \sup_{S \in \mathcal{K}^d} \mathbb{E} \left[\frac{\mu(S \Delta \tilde{S}_n)}{\mu(S)} \right] \\ &\leq \sup_{S \in \mathcal{K}^d} \mathbb{E} \left[\frac{\mu(S \Delta K_n)}{\mu(S)} \right] \lesssim_d n^{-\frac{2}{d+1}}, \end{aligned}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los estimadores \tilde{S}_n basados en n observaciones i.i.d.

A continuación enfocaremos nuestra atención en el estudio de los polítopos convexos. En referencia al artículo [2] se investiga la posibilidad de mejorar la envolvente convexa como estimador cuando S es un polítopo con un número de vértices conocido, así como lograr una mayor velocidad de convergencia. Sea \mathcal{P}_r la clase los polítopos con a lo sumo r vértices. El estimador de máxima verosimilitud de P en la clase \mathcal{P}_r se define como $P_n \in \operatorname{argmax}_{Q \in \mathcal{P}_r} \mu(P)^{-n} \mathbb{1}_{X_i \in Q, \forall i=1, \dots, n}$, se trata de un polítopo con a lo sumo r vértices que contiene a la muestra \mathcal{X}_n y medida de Lebesgue mínima. A diferencia de K_n este estimador de máxima verosimilitud, P_n no se define de forma única. Sin embargo, el orden de convergencia no sufre la "maldición de dimensionalidad" si $S \in \mathcal{P}_r$.

Teorema 2.6. *Sea $r \geq d + 1$. Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\lesssim_d \inf_{\tilde{S}_n} \sup_{P \in \mathcal{P}_r} \mathbb{E} \left[\frac{\mu(P \Delta \tilde{S}_n)}{\mu(P)} \right] \\ &\leq \sup_{P \in \mathcal{P}_r} \mathbb{E} \left[\frac{\mu(P \Delta \hat{P}_n)}{\mu(P)} \right] \lesssim_d \frac{r \ln n}{n}, \end{aligned}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los estimadores \tilde{S}_n basados en n observaciones i.i.d.

En particular si $d = 2$, se prueba un mejor límite inferior, puesto que tendríamos

$$\inf_{\tilde{S}_n} \sup_{P \in \mathcal{P}_r} \mathbb{E} \left[\frac{\mu(P \Delta \tilde{S}_n)}{\mu(P)} \right] \gtrsim \frac{r}{n}.$$

En la práctica, el estimador P_n no es computable pero sirve para orientarnos a la hora de estimar $P \in \mathcal{P}_r$ empleando la distancia en medida. Todavía no está claro si el factor logarítmico podría eliminarse de la cota superior ([2], Section 3.2). Una desventaja de P_n es que necesita el conocimiento del número de vértices r , mientras que K_n es completamente independiente de la estructura de S . Con el objetivo de solucionar este problema en [2] se propone un procedimiento totalmente adaptativo, considerando como estimador P_n^{adapt} que también es independiente de la estructura de S y converge a la misma velocidad que P_n si $S \in \mathcal{P}_r$ para $r \geq d + 1$, y a la misma velocidad que K_n si estimamos un soporte general S . Sin embargo, los estimadores P_n y P_n^{adapt} no son manejables computacionalmente, así que cuando la dimensión d no es demasiado grande, la envolvente convexa K_n sigue siendo un estimador más realista de S .

Para terminar, citamos un resultado acerca de K_n que se recoge en [15], donde se compara la envolvente convexa K_n con las mejores aproximaciones mediante polítopos de cuerpos convexos con frontera "suave". Sea S un cuerpo convexo con frontera "suave" y sea S_r un polítopo con a

lo sumo r vértices, contenido en S , con la mínima $\mu(S \setminus S_r)$. Se tiene que,

$$\frac{\mu(S \setminus S_r)}{\mu(S \setminus K_n)} \rightarrow c_d, \quad n \rightarrow \infty,$$

con probabilidad uno, donde $c_d \leq 1$ es una constante positiva que solo depende de la dimensión d . Además Reitzner (2003) [15] muestra que $c_d \rightarrow 1$ cuando $d \rightarrow \infty$. Esto significa que para dimensiones altas, con probabilidad uno, la envolvente convexa funciona casi tan bien como estimador de S como el polítopo inscrito en S , cuando n se hace grande.

2.3. Envolverte α -convexa

La convexidad es una propiedad bastante restrictiva, por tanto si el conjunto que se pretende estimar no es convexo la envolvente convexa K_n puede no ser un buen estimador. A continuación vamos a estudiar que ocurre si el conjunto verifica una restricción de forma más flexible, la α -convexidad, que ya definimos en el Capítulo 1.

Si el conjunto S es α -convexo, la envolvente α -convexa de la muestra

$$C_\alpha(\mathcal{X}_n) = (\mathcal{X}_n \oplus \alpha \overset{\circ}{B}) \ominus \alpha \overset{\circ}{B}$$

parece ser el estimador natural. Véase en la Figura 2.3

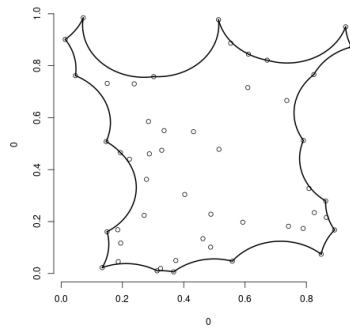


Figura 2.3: Envolverte α -convexa para una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ y $\alpha = 0,2$.

La proximidad entre el conjunto S y la envolvente α -convexa de la muestra $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ es estudiada en Rodríguez-Casal (2007) [18]. Se tiene $d_H(C_\alpha(\mathcal{X}_n), S) = O((\log n/n)^{1/d})$ con probabilidad uno. Aunque la familia de los conjuntos α -convexos es mucho más amplia que la familia de los conjuntos convexos el orden de convergencia de $d_H(C_\alpha(\mathcal{X}_n), S)$ y $d_H(K_n, S)$ es el mismo como se demuestra en [8].

Capítulo 3

Estudio de simulación

En el Capítulo anterior hemos tratado el problema de estimación del soporte desde un punto de vista teórico, a continuación veremos como realizar análisis prácticos en R. Llevaremos a cabo un estudio de simulación para los estimadores examinados anteriormente, en particular nos centraremos en el caso de la envolvente convexa K_n y la envolvente α -convexa $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$.

3.1. Envolverte convexa

En esta sección se muestran dos ejemplos donde se calcula la envolvente convexa de una muestra uniforme \mathcal{X}_n . En el primer caso que analizaremos el soporte de la muestra es la bola unidad B y en el segundo caso se trata de la corona circular, definida como el anillo entre dos círculos centrados en el origen de radios 0,25 y 0,5 respectivamente, que denotaremos como $E = B(0, 0,5) \setminus B(0, 0,25)$.

De acuerdo con el código de R que se muestra en el Anexo A seguiremos los siguientes pasos. En primer lugar se genera una muestra uniforme \mathcal{X}_n cuyo soporte es B , el tamaño de la muestra n se irá modificando para estudiar el comportamiento del estimador, la envolvente convexa K_n se calcula mediante el comando `chull`. Se realizan 200 simulaciones y se almacenan los resultados en dos vectores. El vector `result` almacena el área de la envolvente convexa en cada simulación, es decir, $\mu(K_n)$ y el vector `result1` almacena la diferencia relativa entre el área de la envolvente convexa y el área de B , es decir $\frac{|\mu(K_n) - \mu(B)|}{\mu(B)}$. Para calcular el área de K_n en R se usa la librería `sp` [14], se obtienen los puntos de K_n , se crea un polígono con dichos puntos y se calcula su área.

A continuación se representan dos Tablas 3.1 y 3.2 donde se muestran la media \bar{X} y la desviación típica s de los resultados del estimador sobre las 200 repeticiones, n toma los valores

correspondientes a la primera columna. En la Tabla 3.1 se analiza para la diferencia relativa entre el área de K_n y el área de B empleando los comandos `mean(result1)` y `sd(result1)` y en la Tabla 3.2 se estudia para el área de K_n usando los comandos `mean(result)` y `sd(result)`.

	\bar{X}	s
100	0.1520432	0.02508872
500	0.05292438	0.007713953
1000	0.03346174	0.004001366
2000	0.02113182	0.002569309

Cuadro 3.1: Media y desviación típica de $\frac{|\mu(K_n) - \mu(B)|}{\mu(B)}$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es B .

	\bar{X}	s
100	2.663935	0.07881854
500	2.975326	0.0242341
1000	3.036469	0.01257066
2000	3.075205	0.008071722

Cuadro 3.2: Media y desviación típica de $\mu(K_n)$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es B .

Observando los datos recogidos en las Tablas 3.1 y 3.2 podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Al aumentar el tamaño muestral, $\mu(K_n)$ se aproxima al valor de π que es el área de la bola unidad y del mismo modo, la diferencia relativa $\frac{|\mu(K_n) - \mu(B)|}{\mu(B)}$ disminuye. Esto se debe a que el crecimiento de n hace que la envolvente convexa se convierta en un mejor estimador para la muestra.
- La desviación típica disminuye en ambas tablas a medida que n aumenta.

Aplicando los mismos pasos que en el caso anterior, se genera una muestra uniforme \mathcal{X}_n en la corona circular denotada como E y se obtienen análogamente las Tablas 3.3 y 3.4 que aparecen a continuación. Notar que E no es un conjunto convexo.

De las Tablas 3.3 y 3.4 se deduce lo siguiente:

- A diferencia del caso anterior, a medida que el tamaño muestral crece, $\mu(K_n)$ se aleja del valor 0,58875 que se corresponde con el área de E , y la diferencia relativa aumenta. Esto

	\bar{X}	s
100	0.1661358	0.02792906
500	0.2757182	0.008267883
1000	0.2957531	0.004509627
2000	0.310058	0.002389646

Cuadro 3.3: Media y desviación típica de $\frac{|\mu(K_n) - \mu(E)|}{\mu(E)}$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es E .

	\bar{X}	s
100	0.6869107	0.01645157
500	0.7514601	0.004870185
1000	0.7632616	0.002656389
2000	0.7716879	0.001407618

Cuadro 3.4: Media y desviación típica de $\mu(K_n)$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es E .

es debido a que la corona circular no es un conjunto convexo y por tanto la envoltente convexa de la muestra no será un buen estimador del soporte. Como se puede observar en la Figura 3.1 K_n sobrestima el soporte de E . Para generar la gráfica de K_n en \mathbb{R} se obtienen los puntos de K_n y se dibujan las líneas que los unen mediante el comando `lines()`.

- La desviación típica disminuye en ambas tablas a medida que n aumenta.

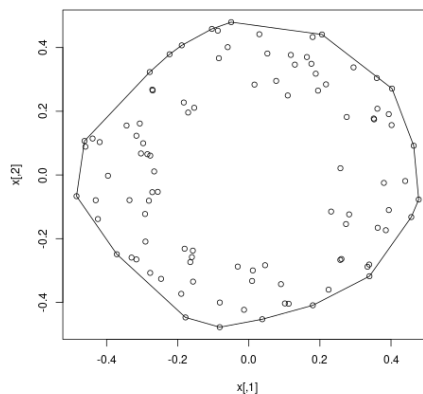


Figura 3.1: Envoltente convexa para una muestra uniforme en E de tamaño $n = 100$.

3.2. Envoltente α -convexa

En esta sección se tomará como estimador la envoltente α -convexa de la muestra $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ y se empleará la librería `alphahull` [13]. Siguiendo con el código que aparece en el Anexo A analizaremos ahora el caso dos, al igual que para K_n tomaremos dos soportes, la bola unidad B y la corona circular E . Para calcular en \mathbb{R} $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ se emplea el comando `ahull`. Análogamente al caso anterior se generan 200 repeticiones de la muestra y se calcula la envoltente α -convexa almacenando resultados en dos vectores: el vector `result` que almacena el área correspondiente a la envoltente α -convexa $\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n))$ y el vector `result1` que almacena la diferencia relativa entre el área de la envoltente α -convexa y el área de B o de E dependiendo del caso en el que nos encontremos. El área de $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ se calcula mediante el comando `areaahull`. El tamaño de la muestra y el valor de α se irán modificando para estudiar el comportamiento del estimador. Se obtendrán los resultados que se recogen en las siguientes Tablas 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8

	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 5$	
	\bar{X}	s	\bar{X}	s
100	0.9768646	0.007966766	0.1582184	0.02762584
500	0.2897271	0.03442171	0.05710514	0.008118
1000	0.08474391	0.009448954	0.03588012	0.004748815
2000	0.04960774	0.003851207	0.02221958	0.00249712

Cuadro 3.5: Media y desviación típica de $\frac{|\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n)) - \mu(B)|}{\mu(B)}$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es B .

	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 5$	
	\bar{X}	s	\bar{X}	s
100	0.07268201	0.02502833	2.644535	0.08678912
500	2.231388	0.108139	2.962192	0.02550345
1000	2.875362	0.02968476	3.028872	0.01491884
2000	2.985745	0.01209893	3.071788	0.007844935

Cuadro 3.6: Media y desviación típica de $\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n))$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es B .

De las Tablas 3.5 y 3.6 sacamos las siguientes conclusiones:

- A medida que aumenta n , $\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n))$ se aproxima al valor de π haciendo que la envoltente α -convexa sea un mejor estimador del soporte, del mismo modo la diferencia relativa entre el área de $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ y el área de B disminuye. También observamos que al tomar mayores

valores de α el área de la envolvente α -convexa tiende a ser mayor, como ya mencionáramos en la Subsección 1.3.2 de α -convexidad cuando α tiende a ∞ se tiene que $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ tiende a K_n .

- Distinguímos el caso particular en que $n = 100$ y $\alpha = 0,1$, el valor de α es tan pequeño que para este tamaño muestral el estimador está muy fragmentado y por tanto el área es muy pequeña y también su desviación típica. Véase ilustrado en la Figura 3.2, para obtener la gráfica de $C_\alpha(\mathcal{X}_n)$ empleamos el comando `plot()`.
- La desviación típica disminuye en ambas tablas a medida que n crece, salvo para $n = 100$ y $\alpha = 0,1$ como ya mencionamos.

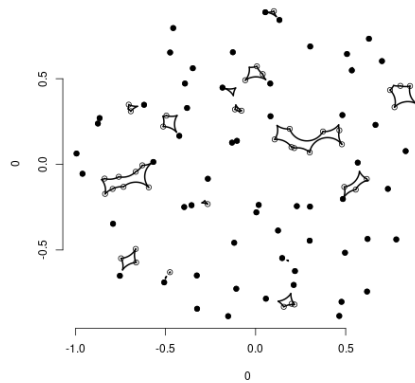


Figura 3.2: Envolverte α -convexa para una muestra uniforme en B de tamaño $n = 100$ y $\alpha = 0,1$.

Veamos que ocurre cuando el soporte de \mathcal{X}_n es la corona circular E , notar que como ya dijimos E no es un conjunto convexo, pero sí que es un conjunto α -convexo.

	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 5$	
	\bar{X}	s	\bar{X}	s
100	0.5452997	0.05272092	0.1622324	0.02844468
500	0.156246	0.012822790	0.2726994	0.00731622
1000	0.09798237	0.007099089	0.2956456	0.004040599
2000	0.06034138	0.004212551	0.3090763	0.002683851

Cuadro 3.7: Media y desviación típica de $\frac{|\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n)) - \mu(E)|}{\mu(E)}$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es E .

De los datos recogidos en las Tablas 3.7 y 3.8 resaltamos:

	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 5$	
	\bar{X}	s	\bar{X}	s
100	0.2678406	0.03105519	0.6846114	0.0167553
500	0.4970121	0.007553247	0.7496818	0.004309609
1000	0.5313322	0.004181708	0.7631982	0.002380109
2000	0.5535046	0.002481397	0.7711096	0.001580919

Cuadro 3.8: Media y desviación típica de $\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n))$ sobre las 200 repeticiones de una muestra \mathcal{X}_n cuyo soporte es E .

- Si $\alpha = 0,1$, cuando n crece, $\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n))$ se acerca al valor del área de E y por tanto es un buen estimador del soporte. Véase la Figura [3.3](#)
- Sin embargo, cuando $\alpha = 5$, $\mu(C_\alpha(\mathcal{X}_n))$ es mayor que el área de E , esto se debe a que como ya recordamos en el caso de la bola unidad, cuando α tiende a ∞ la envolvente α -convexa tiende a la envolvente convexa, y ya vimos en la sección anterior que la envolvente convexa no es un buen estimador para el soporte de la muestra porque E no es convexo.
- La desviación típica disminuye en ambas tablas cuando n aumenta.

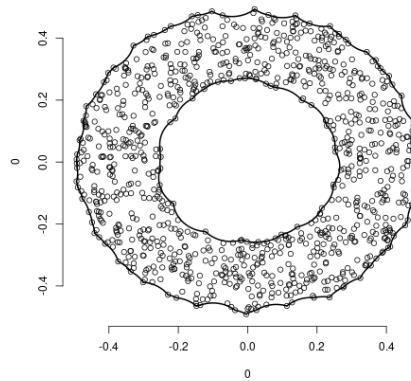


Figura 3.3: Envolvente α -convexa para una muestra uniforme en E de tamaño $n = 1000$ y $\alpha = 0,1$.

Anexos

Anexo A

Código de R

```
library(alphahull)
library(sp)

#Calculo de la envolvente convexa:

#Caso 1: B(0,1)
#Muestra uniforme de tamaño n=100 en B(0,1)
#c=(0,0)
n <- 100
A<-pi*1 #area B(0,1)
sim <- 200
result <- vector("numeric", sim)
result1<- vector("numeric",sim)

for (i in 1:sim) {
theta<-runif(n,0,2*pi)
r<-sqrt(runif(n,0,1))
x<-cbind(0+r*cos(theta),0+r*sin(theta))
#convex hull
hull.obj<- chull(x)
hull.obj<- c(hull.obj,hull.obj[1])
# Obtener los puntos de la envolvente convexa
envolvente <- x[hull.obj, ]
```

```
# Calcular el area de la envolvente convexa utilizando los puntos
poligono <- Polygon(envolvente,hole=F)
AH <- poligono@area

# Imprimir el area
result[i] <- AH
result1[i]<- abs(result[i]-A)/A
}

mean(result)
sd(result)
mean(result1)
sd(result1)

#Graficas
plot(x)
hull.obj<- c(hull.obj,hull.obj[1])
lines(x[hull.obj,])
#otra manera
plot(x, xlim = c(-1, 1), ylim = c(-1, 1), xlab = "x", ylab = "y", asp = 1)
lines(x[c(hull.obj, hull.obj[1]), 1], x[c(hull.obj, hull.obj[1]), 2], col = "red")

#Caso 2: corona circular
#Muestra uniforme de tamaño n=100 en  $B(c,0.5) \setminus B(c,0.25)$ 
#c=(0,0)
n <- 100
A<-pi*0.5^2-pi*0.25^2 #area de  $B(c,0.5) \setminus B(c,0.25)$ 
sim <- 200
result <- vector("numeric", sim)
result1<- vector("numeric",sim)
for (i in 1:sim) {
theta<-runif(n,0,2*pi)
r<-sqrt(runif(n,0.25^2,0.5^2))
x<-cbind(0+r*cos(theta),0+r*sin(theta))
#convex hull
hull.obj<- chull(x)
hull.obj<- c(hull.obj,hull.obj[1])
```

```
# Obtener los puntos de la envolvente convexa
envolvente <- x[hull.obj, ]

# Calcular el area de la envolvente convexa utilizando los puntos
poligono <- Polygon(envolvente,hole=F)
AH <- poligono@area

# Imprimir el area
result[i] <- AH
result1[i]<- abs(result[i]-A)/A
}

mean(result)
sd(result)
mean(result1)
sd(result1)

#Graficas
plot(x)
hull.obj<- c(hull.obj,hull.obj[1])
lines(x[hull.obj,])

#Calculo de la envolvente alpha-convexa:

#Caso 1: B(0,1)
#Muestra uniforme de tamaño n=100 en B(0,1).
#c=(0,0)
n <- 100
alpha <- 0.1 #probar para alpha=5
A<-pi*1 #area de B(0,1)
sim <- 200
result <- vector("numeric", sim)
result1<- vector("numeric",sim)
for (i in 1:sim) {
theta<-runif(n,0,2*pi)
r<-sqrt(runif(n,0,1))
```

```
x<-cbind(0+r*cos(theta),0+r*sin(theta))
# Alpha-convex hull
ahull.obj<- ahull(x, alpha = alpha)
#area de la envolvente alpha-convexa
AH<-areaahull(ahull.obj)
result[i]<- AH
result1[i]<- abs(result[i]-A)/A
}
mean(result1)
sd(result1)
mean(result
sd(result)

#Graficas
plot(x)
plot(ahull.obj)

#Caso 2: corona circular
#Muestra uniforme de tamaño n=100 en  $B(c,0.5) \setminus B(c,0.25)$ 
#c=(0,0)
n <- 100
alpha <- 0.1 #probar para alpha=5
A<-pi*0.5^2-pi*0.25^2 #area de  $B(c,0.5) \setminus B(c,0.25)$ 
sim <- 200
result <- vector("numeric", sim)
result1<- vector("numeric",sim)
for (i in 1:sim) {
theta<-runif(n,0,2*pi)
r<-sqrt(runif(n,0.25^2,0.5^2))
x<-cbind(0+r*cos(theta),0+r*sin(theta))
# Alpha-convex hull
ahull.obj <- ahull(x, alpha = alpha)
#area de la envolvente alpha-convexa
AH<-areaahull(ahull.obj)
result[i]<- AH
result1[i]<- abs(result[i]-A)/A
```

```
}  
mean(result1)  
sd(result1)  
mean(result)  
sd(result)  
  
#Graficas  
plot(x)  
plot(ahull.obj)
```


Bibliografía

- [1] BÁRÁNY, I. AND LARMAN, D. G. (1988). Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes. *Mathematika*, vol. 35, pp. 274–291.
- [2] BRUNEL, V.-E. (2016). Adaptive estimation of convex and polytopal density support. *Probab. Theory Related Fields*, vol. 164, pp. 1–16.
- [3] BRUNEL, V.-E. (2018). Methods for Estimation of Convex Sets. *Statistical Science*, vol. 33(4), pp. 615–632.
- [4] CHEVALIER, J. (1976). Estimation du support et du contour du support d’une loi de probabilité. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, vol. 12(4), pp. 339–364.
- [5] CUEVAS, A. AND RODRÍGUEZ-CASAL, A. (2004). On boundary estimation. *Adv. in Appl. Probab.*, vol. 36(2), pp. 340–354.
- [6] CUEVAS, A. (2009). Set estimation: Another bridge between statistics and geometry. *Bol. Stad. Investig. Oper.*, vol. 25, pp. 71–85.
- [7] DEVROYE, L. AND WISE, G. L. (1980). Detection of abnormal behavior via nonparametric estimation of the support. *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 38(3), pp. 480–488.
- [8] DÜMBGEN, L. AND WALTHER, G. (1996). Rates of convergence for random approximations of convex sets. *Adv. in Appl. Probab.*, vol. 28(2), pp. 384–393.
- [9] EFRON, B. (1965). The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, vol. 52, pp. 331–343.
- [10] GROEMER, H. (1974). On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. *Arch. Math. (Basel)*, vol. 25, pp. 86–90.
- [11] KOROSTELĚV, A. P. AND TSYBAKOV, A. B. (1993). *Minimax theory of image reconstruction*, vol. 82 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York.

- [12] PATEIRO-LOPEZ, B. (2008). Set estimation under convexity-type restrictions. *Ph. D. Thesis*. Universidad de Santiago de Compostela.
- [13] PATEIRO-LOPEZ, B., RODRIGUEZ-CASAL, A. (2022). Alphahull: Generalization of the Convex Hull of a Sample of Points in the Plane. R package version 2.5, <<https://CRAN.R-project.org/package=alphahull>>.
- [14] PEBESMA, E.J., BIVAND, R.S. (2005). Classes and methods for spatial data in R. *R News* 5 (2), <<https://cran.r-project.org/doc/Rnews>>.
- [15] REITZNER, M. (2003). Random polytopes and the Efron–Stein jackknife inequality. *Ann. Probab.*, vol. 31, pp. 2136–2166.
- [16] RÉNYI, A. AND SULANKE, R. (1963). Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, vol. 2, pp. 75–84.
- [17] RÉNYI, A. AND SULANKE, R. (1964). Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. II. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, vol. 3, pp. 138–147.
- [18] RODRÍGUEZ-CASAL, A. (2007). Set estimation under convexity type assumptions. *Annales de l'I.H.P.- Probabilités & Statistiques*, vol. 43, pp. 763–774.
- [19] ROMERO DÁVILA, J. A. (2016). Completitud de la métrica de Hausdorff en espacios métricos compactos. *Proyecto Curricular*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- [20] SCHNEIDER R. (2014). *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd expanded edition.
- [21] SCHÜTT, C. (1994). Random polytopes and affine surface area. *Math. Nachr.*, vol. 170, pp. 227–249.
- [22] SERRA, J. (1984). *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London. English version revised by Noel Cressie.
- [23] WALTHER, G. (1999). On a generalization of Blaschke’s rolling theorem and the smoothing of surfaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 22(4), pp. 301–316.