FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Álgebra Homolóxica

Samuel Alvite Pazo

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Álgebra Homolóxica

Samuel Alvite Pazo

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Álgebra Homológica
Breve descrición do contido
El álegbra homológica es una herramienta de gran utilidad en campos principales de la matemática como por ejemplo la geometría algebraica y la teoría algebraica de números. En este TFG se comenzará introduciendo las construcciones y nociones básicas de un curso estándar de álgebra homológica, para continuar con algunos aspectos más sofisticados de esta teoría que son de utilidad en geometría algebraica o en teoría de números.
Bibliografía
Godement, R., *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux.* Hermann, Paris 1958 Rotman, J. J., *An introduction to homological algebra.* Pure and Applied Mathematics, 85. New York-San Francisco-London: Academic Press 1979 Tamme, G., *Introduction to Étale Cohomology.* Universitext, Springer-Verlag 1994
Recomendacións

Índice general

Resumen

La noción de topología de Grothendieck, una generalización de la estructura de espacio topológico, se ha convertido en una herramienta básica en geometría algebraica y aritmética desde su introducción hace sesenta años por A. Grothendieck, principalmente porque permite el desarrollo de buenas teorías de homología en estos campos. Presentamos entonces los aspectos básicos de las topologías de Grothendieck, partiendo de los conceptos más básicos del álgebra homológica, así como la noción de cohomología de haces en una topología de Grothendieck.

Abstract

The notion of Grothendieck topology, a generalization of the topological space structure, has become a basic tool in algebraic and arithmetic geometry since its introduction by A. Grothendieck sixty years ago, mainly because it allows to develop nice homology theories in these fields. We expose the basics of Grothendieck topologies, from the basic concepts of homological algebra, as well as the notion of sheaf cohomology on a Grothendieck topology.

Introducción

Los objetos de estudio en geometría algebraica, las variedades algebraicas, tienen una topología llamada topología de Zariski, que si bien tiene mucha utilidad, tiene "pocos" abiertos (por ejemplo, no es Hausdorff), lo que hace que no sea muy útil para ciertos propósitos. Si bien para variedades sobre el cuerpo de números complejos la topología de este cuerpo induce una buena topología en la variedad, cuando nos encontramos con otros cuerpos sin topologías adecuadas (o con topologías adecuadas para algunos fines, pero no para otros, como los cuerpos p-ádicos), caso muy frecuente cuando buscamos aplicaciones aritméticas de la geometría algebraica, echamos de menos una buena topología.

Fue A. Grothendieck quien a principios de los años 60 se dio cuenta de que para ciertos propósitos (como por ejemplo, para definir cohomología), no era necesario tener una estructura de espacio topológico sino una estructura que podemos considerar más "débil", que es lo que desde entonces se llama topología de Grothendieck, y que en el caso de las variedades algebraicas, existen varias de estas topologías de Grothendieck muy útiles (por ejemplo, la primera aplicación que guió a Grothendieck para estudiar estos conceptos fue obtener una buena cohomología que permitiese probar las famosas conjeturas de Weil, conjeturas que gracias a ella se probaron en los años siguientes).

El propósito de este trabajo es definir y estudiar las topologías de Grothendieck, y la cohomología sobre una topología de Grothendieck, a partir de los conceptos básicos de álgebra homológica.

En el primer capítulo se definen estas estructuras, se ven algunos ejemplos (uno de ellos es un espacio topológico en el sentido usual) y se introducen algunos resultados técnicos que necesitaremos más tarde.

Las principales formas de construir una cohomología en este contexto son la cohomología de Čech y los funtores derivados. Al igual que en el caso de espacios topológicos usuales, donde los coeficientes naturales para la cohomología de Čech son los (pre)haces, los coeficientes en una de estas cohomologías sobre una topología de Grothendieck serán también los haces. El capítulo 2 se dedica entonces a estudiar los prehaces sobre una topología de Grothendieck (ya que no es la definición clásica de prehaz sobre un espacio topológico, con lo cual es necesario definir y estudiar todo desde el principio), para posteriormente definir la cohomología de Čech y como funtor derivado, y ver que coinciden.

El tercer capítulo comienza estudiando haces sobre una topología de Grothendieck y su relación con los prehaces. Posteriormente se introduce la cohomología. Dado que los ejemplos más importantes de cohomología asociada a topologías de Grothendieck son sobre variedades algebraicas y quedan lejos del alcance de este trabajo, nos limitaremos a dar ejemplos de cómo dos cohomologías usuales en matemáticas, la cohomología de grupos y la cohomología de André-Quillen, se pueden definir también como cohomologías sobre una topología de Grothendieck adecuada. También queda fuera de este trabajo la comparación de la cohomología de Čech con la cohomología como funtor derivado en el caso de haces, pues el contexto natural para esta comparación son las sucesiones espectrales, lo cual requeriría un trabajo mucho más extenso.

En la mayor parte del trabajo hemos seguido las notas de Artin [2] a través de su exposición en el libro [11]. Nuestro objetivo en este trabajo ha sido desgranar, detallar y completar las demostraciones en dicho libro, a veces demasiado concisas, de forma que este trabajo pueda ser leído fácilmente sin más conocimientos que los que se adquieren en el grado junto con unas nociones básicas de teoría de categorías y álgebra homológica como las que pueden verse en los primeros capítulos de [9]. Si bien en algún momento usamos nociones algo más avanzadas de estos temas, las hemos incluido en un apéndice con demostraciones o referencias, de forma que ellas no supongan ninguna dificultad para el lector.

Capítulo 1

Topologías de Grothendieck

La noción clásica de prehaz es la siguiente [5]. A un espacio topológico X le asociamos una categoría T cuyos objetos son los abiertos de X y dados dos abiertos U, V de T, el conjunto de morfismos de U en V es

$$Hom(U,V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } U \not\subset V \\ U \overset{i}{\hookrightarrow} V & \text{si } U \subset V \end{cases}$$

donde i denota la aplicación inclusión. La composición de morfismos es la obvia. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, un **prehaz** en X con valores en $\mathcal{C}$ es un funtor contravariante $F : T \to \mathcal{C}$.

Supongamos que nuestra categoría $\mathcal{C}$ tiene productos (generalmente $\mathcal{C}$ será la categoría de conjuntos, grupos abelianos...). Un prehaz $F : T \to \mathcal{C}$ es un **haz** si para todo abierto U de X y todo recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de U por abiertos el diagrama

$$F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1)\in I\times I} F(U_{i_0} \cap U_{i_1})$$

es un igualador.

La condición de que el diagrama sea un igualador no sólo implica que las composiciones de la primera flecha con cualquiera de las dos segundas coincide y que todo $A \to \prod_{i\in I} F(U_i)$ en $\mathcal{C}$ cuya composición con las flechas dobles también coincida factoriza de forma única a través de $F(U)$, sino también que el morfismo $F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i)$ es un monomorfismo o, de forma equivalente en $\mathcal{S}ets$ y $\mathcal{A}b$, inyectivo.

Así pues, para definir un haz necesitamos los abiertos de X, sus inclusiones, los recubrimientos de los abiertos y las intersecciones de dos abiertos de recubrimientos. Nótese que en T la intersección de abiertos $U_1, \ldots, U_r$ es simplemente el producto $U_1 \times \cdots \times U_r$ en la categoría T. Por lo tanto, Grothendieck propone la siguiente definición de topología que le permite trabajar con haces:

Definición 1.1 (Topología de Grothendieck)**.** Una **topología** T está formada por una categoría cat(T) y un conjunto cov(T) de familias de morfismos $\{U_i \to U\}_i$ en la categoría cat(T), llamadas recubrimientos (donde en cada recubrimiento $\{U_i \to U\}_i$ el objeto U es siempre el mismo), tales que satisfacen las siguientes propiedades:

T1) Dado $\{U_i \to U\} \in cov(T)$ y un morfismo $V \to U$ en $cat(T)$, existen todos los productos fibrados $U_i \times_U V$ y $\{U_i \times_U V \to V\}$ pertenece a cov(T).

T2) Dados $\{U_i \to U\} \in cov(T)$ y una familia $\{V_{ij} \to U_i\} \in cov(T)$ para todo $i \in I$, la familia $\{V_{ij} \to U\}$, obtenida mediante composición de morfismos, también pertenece a cov(T).

T3) Si $\phi : U' \to U$ es un isomorfismo en cat(T), entonces $\{U' \to U\} \in cov(T)$.

Definición 1.2. Un **morfismo** $f : T \to T'$ **de topologías** es un funtor $f : cat(T) \to cat(T')$ que satisface las dos siguientes propiedades:

1. Si $\{U_i \to U\} \in cov(T)$, entonces $\{f(U_i) \to f(U)\} \in cov(T')$.
2. Dados $\{U_i \to U\} \in cov(T)$ y un morfismo $V \to U$ en cat(T), el morfismo canónico
$$f(U_i \times_U V) \to f(U_i) \times_{f(U)} f(V)$$
es un isomorfismo para todo $i \in I$.

Ejemplo 1.3. Si X es un espacio topológico, la categoría T de abiertos de X con los recubrimientos usuales es una topología de Grothendieck, y si $\tilde{f} : X' \to X$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, $\tilde{f}$ induce de forma obvia un funtor $f : T \to T'$ con $f(U) = \tilde{f}^{-1}(U)$, que es un morfismo de topologías de Grothendieck.

Definición 1.4. Sea T una topología y $\mathcal{C}$ una categoría con productos. Un **prehaz** en T con valores en $\mathcal{C}$ es un funtor contravariante $F : T \to \mathcal{C}$.

Un **morfismo de prehaces** $f : F \to G$ es un morfismo de funtores contravariantes.

Un prehaz en T con valores en $\mathcal{C}$ se dice un **haz** si para todo recubrimiento $\{U_i \to U\} \in cov(T)$, el diagrama
$$F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1) \in I \times I} F(U_{i_0} \times_U U_{i_1})$$
es un igualador.

Un **morfismo de haces** es un morfismo de prehaces entre haces.

A los prehaces o haces con valores en la categoría de conjuntos se les llama **prehaces o haces de conjuntos**, mientras que los prehaces o haces con valores en la categoría de grupos abelianos se denominan **prehaces o haces abelianos**. Para estos últimos, dada una topología T, se denotará la categoría de prehaces abelianos en T como $\mathcal{P}$, y la categoría de haces abelianos como $\mathcal{S}$.

Es claro que $\mathcal{S}$ es una subcategoría de $\mathcal{P}$, pero puesto que los morfismos de haces son exactamente morfismos de prehaces, $\mathcal{S}$ es por definición una subcategoría plena de $\mathcal{P}$.

Ejemplos 1.5.

1. Si G es un grupo abeliano, el prehaz $\bar{G} : T \to \mathcal{A}b$, tal que $\bar{G}(U) = G$ para todo objeto U de T y $\bar{G}(f) = id_G$ para todo morfismo f de T, se llama prehaz constante G en T.

2. Sea T una topología y Z un objeto de la categoría subyacente. El funtor contravariante $Hom(-, Z)$ es un prehaz de conjuntos en T. Los prehaces construidos de esta forma se denominan **prehaces representables** .

Ejemplo 1.6 (Topología canónica)**.** La topología canónica es un ejemplo fundamental de topología de Grothendieck, pues, como veremos, es la más fina en la cual los prehaces representables son haces. Antes de definirla necesitaremos la definición y algunas propiedades de los epimorfismos efectivos (véase [4, Exposé IV, 1]). Aunque la definición de epimorfismo efectivo es bastante abstracta, veremos en el Ejemplo 1.6.3 que en algunas categorías usuales son simplemente morfismos que como aplicaciones entre conjuntos son sobreyectivos.

Definición 1.6.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites finitos. Un morfismo $f : A \to B$ es un **epimorfismo efectivo** si para todo objeto X, el diagrama en la categoría de conjuntos

$$Hom(B, X) \xrightarrow{Hom(f,X)} Hom(A, X) \underset{Hom(pr_2,X)}{\overset{Hom(pr_1,X)}{\rightrightarrows}} Hom(A \times_B A, X)$$

es un igualador, donde $pr_i : A \times_B A \to A$ es la proyección canónica i-ésima.

Observación 1.6.2. Un epimorfismo efectivo es un epimorfismo. En efecto, si $C \to D \rightrightarrows E$ es un igualador, $C \xrightarrow{j} D$ es un monomorfismo (si $F \rightrightarrows^{\alpha}_{\beta} C$ son tales que $j\alpha = j\beta$, por definición de igualador existe un único $u : F \to C$ tal que $ju = (j\alpha)$ $(= (j\beta))$, de donde $\alpha = u = \beta$). Así, si $f : A \to B$ es un epimorfismo efectivo, $Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ es un monomorfismo en la categoría de conjuntos, es decir, inyectivo, y por tanto $A \to B$ es un epimorfismo en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.6.3. Sea $\mathcal{C}$ una de las siguientes categorías:

– La categoría de conjuntos.

– Si Λ es un anillo, la categoría de Λ-módulos (en particular, tomando $\Lambda = \mathbb{Z}$, la categoría de grupos abelianos).

– Si Λ es un anillo, la categoría de Λ-álgebras (en particular, tomando $\Lambda = \mathbb{Z}$, la categoría de anillos).

– Si Λ es un anillo y Z es una Λ-álgebra, la categoría de Λ-álgebras sobre Z (es decir, los objetos son homomorfismos de Λ-álgebras $A \to Z$, y los morfismos son homomorfismos de Λ-álgebras (sobre Z) $A \to B$ tales que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo).

Entonces en $\mathcal{C}$ los epimorfismos efectivos son exactamente los morfismos sobreyectivos.

Veamos primero que epimorfismo efectivo implica sobreyectivo. Esto es claro en conjuntos y módulos por la Observación 1.6.2, pero nótese que en otras categorías epimorfismo no implica sobreyectivo (por ejemplo, la inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un epimorfismo de anillos). Veámoslo ahora en general. En cada una de estas categorías $\mathcal{C}$, un morfismo $f : A \to B$ da lugar a un morfismo $\tilde{f} : A \to \mathrm{im}(f)$. Tomando $X = \mathrm{im}(f)$ y el morfismo $A \to \mathrm{im}(f)$ de $Hom(A, X)$ en el igualador de la definición, entonces existe $h : B \to \mathrm{im}(f)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & & B \arrow[dl, "h"] \\ & \mathrm{im}(f) & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Componiendo hf y $\tilde{f}$ con la inclusión $j : \mathrm{im}(f) \hookrightarrow B$, obtenemos $jhf = j\tilde{f}$. Pero $j\tilde{f} = f$ por definición de f, con lo que $jhf = f$. Como f es un epimorfismo por la Observación 1.6.2, $jh = id_B$ y así j es sobreyectiva, es decir, $\mathrm{im}(f) = B$.

Veamos ahora que sobreyetivo implica epimorfismo efectivo. En cualquiera de estas categorías, un diagrama $C \xrightarrow{\alpha} D \rightrightarrows_{\gamma}^{\beta} E$ es un igualador si

i) $C \xrightarrow{\alpha} D$ es inyectivo.

ii) Si $d \in D$ verifica $\beta(d) = \gamma(d)$, entonces existe $c \in C$ tal que $\alpha(c) = d$.

Si $f : A \to B$ es sobreyectivo, entonces $Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ es inyectivo, pues sobreyectivo implica epimorfismo en cualquiera de estas categorías, y así i) está claro. Para ver ii), sea $g \in Hom(A, X)$ tal que sus dos imágenes en $Hom(A \times_B A, X)$ son iguales. Tenemos entonces que para todo $(a_1, a_2) \in A \times_B A$ (es decir, para todo $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$), $g(a_1) = g(a_2)$. Como f es sobreyectivo, podemos definir entonces $h : B \to X$ mediante $h(b) := g(a)$ donde $a \in f^{-1}(b)$. Por lo anterior, este elemento existe y $g(a)$ no depende de su elección. Este h es un morfismo en $\mathcal{C}$ y g es la imagen de h por $Hom(B, X) \to Hom(A, X)$.

Definición 1.6.4. Un morfismo $f : A \to B$ en una categoría con límites finitos es universalmente un epimorfismo efectivo si para todo morfismo $B' \to B$ el morfismo inducido

$$A \times_B B' \to B'$$

es un epimorfismo efectivo.

Lema 1.6.5. *Sean $U \overset{\alpha}{\to} V$ y $V \overset{\beta}{\to} W$ universalmente epimorfismos efectivos. Entonces $U \xrightarrow{\beta\circ\alpha} W$ también lo es.*

Demostración. Por la propiedad universal del producto tenemos morfismos

$$U \times_V U \to U \times_W U \to V \times_W V$$

y un diagrama asociado para cada objeto Z, claramente conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & Hom(U \times_W U, Z) \arrow[d, "t"] & \\
Hom(V,Z) \arrow[r, "x"] & Hom(U,Z) \arrow[ur, shift left, "r"] \arrow[ur, shift right, "s"'] \arrow[r, shift left, "m"] \arrow[r, shift right, "n"'] & Hom(U \times_V U, Z) & \\
Hom(W,Z) \arrow[r, "y"] \arrow[ur, "z"] & Hom(V,Z) \arrow[u, "l"] \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & Hom(V \times_W V, Z) \arrow[u, "u"] \arrow[uu, bend right=60, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Nótese que en el diagrama $x = l$, pero empleamos diferentes letras para seguir el diagrama más cómodamente.

Las dos filas del diagrama son igualadores por hipótesis. Vamos a ver que la diagonal es un igualador, con lo que $\beta \circ \alpha$ será un epimorfismo efectivo. Sea $f \in Hom(U, Z)$ tal que $r(f) = s(f)$. Entonces $m(f) = tr(f) = ts(f) = n(f)$ y así existe $g \in Hom(V, Z)$ tal que $x(g) = f$, es decir, tal que $l(g) = f$. Por la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
 & Hom(U \times_W U, Z) \\
Hom(U,Z) \arrow[ur, shift left, "r"] \arrow[ur, shift right, "s"'] & \\
Hom(V,Z) \arrow[u, "l"] \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & Hom(V \times_W V, Z) \arrow[uu, "k"']
\end{tikzcd}$$

si demostramos que k es inyectivo, tenemos que $p(g) = q(g)$, con lo que existirá $h \in Hom(W, Z)$ tal que $y(h) = g$, y así $z(h) = ly(h) = l(g) = f$, probando que la diagonal es un igualador.

Para ver que k es inyectivo, vamos a ver que $U \times_W U \to V \times_W V$ es un epimorfismo. Este morfismo es la composición

$$U \times_W U \xrightarrow{U \times_W \alpha} U \times_W V \xrightarrow{\alpha \times_W V} V \times_W V$$

donde ambos morfimos son epimorfismos, pues α es universalmente un epimorfismo efectivo, y en particular epimorfismo universal, con lo que la composición de estos dos epimorfismos es un epimorfismo.

Hemos probado que $\beta \circ \alpha$ es un epimorfismo efectivo. Veamos que es universalmente un epimorfismo efectivo.

Consideremos un morfismo $W' \to W$ y un diagrama de cuadrados cartesianos

$$\begin{tikzcd}
U \times_W W' = U \times_V (V \times_W W') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & V \times_W W' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\
U \arrow[r, "\alpha"] & V \arrow[r, "\beta"] & W
\end{tikzcd}$$

Tenemos que probar que la composición de la fila superior es un epimorfismo efectivo. Como α y β son universalmente epimorfismos efectivos, α' y β' son epimorfismos efectivos por definición, y así su composición es epimorfismo efectivo por lo visto antes. $\square$

Proposición 1.6.6. *En cualquiera de las categorías del Ejemplo 1.6.3, todo epimorfismo efectivo es universalmente un epimorfismo efectivo.*

Demostración. Se deduce de que epimorfismo efectivo equivale a sobreyectivo en esas categorías y que la sobreyectividad en ellas se conserva por cambios de base. $\square$

Más generalmente, aunque no lo vamos a utilizar y por ello no haremos la demostración, se tiene el siguiente resultado (Corolario 1.6.9).

Definición 1.6.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites finitos. Un objeto P de $\mathcal{C}$ es **proyectivo** si $Hom(P, A) \to Hom(P, B)$ es sobreyectivo para todo epimorfismo efectivo $A \to B$. En las categorías del Ejemplo 1.6.3, por lo visto en dicho ejemplo, esta definición coincide con la usual en dichas categorías. Diremos que $\mathcal{C}$ tiene suficientes proyectivos si para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe un objeto proyectivo P de $\mathcal{C}$ y un epimorfismo efectivo $P \to A$.

Proposición 1.6.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites finitos que tiene suficientes proyectivos. Sea $f : A \to B$ un morfismo. Son equivalentes:*

i) f es un epimorfismo efectivo.

ii) $Hom(P, A) \to Hom(P, B)$ es sobreyectivo para todo objeto proyectivo P.

Demostración. Puede consultarse en [7, Chapter II, §4, Proposition 2, page II.4.3]. □

Corolario 1.6.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites finitos que tiene suficientes proyectivos. Si $f : A \to B$ es un epimorfismo efectivo, entonces es universalmente un epimorfismo efectivo.*

Demostración. Sea $g : B' \to B$ un morfismo, P un objeto proyectivo y $h : P \to B'$ un morfismo. Por la Proposición 1.6.8 es suficiente encontrar un morfismo $l : P \to A \times_B B'$ tal que $pr_2 \circ l = h$. Como P es proyectivo y $f : A \to B$ es un epimorfismo efectivo, existe un morfismo $\alpha : P \to A$ tal que $f \circ \alpha = g \circ h$. Así, por definición de $A \times_B B'$, existe $l : P \to A \times_B B'$ único tal que $pr_1 \circ l = \alpha$, $pr_2 \circ g = h$, y así $f \circ \alpha = f \circ (pr_1 \circ l) = (f \circ pr_1) \circ l = (g \circ pr_2) \circ l = g \circ (pr_2 \circ l) = g \circ h$. □

Estas nociones se generalizan a familias de morfismos $\{U_i \to V\}_{i \in I}$, con V fijado para todo $i \in I$. Una familia $\{U_i \to V\}_{i \in I}$ es una familia de epimorfismos efectivos si el diagrama

$$Hom(V, Z) \to \prod_i Hom(U_i, Z) \rightrightarrows \prod_{i,j} Hom(U_i \times_V U_j, Z)$$

es un igualador para todo Z en $\mathcal{C}$. Del mismo modo, es universalmente una familia de epimorfismos efectivos si $\{U_i \times_V V' \to V'\}_{i \in I}$ es una familia de epimorfismos efectivos para todo morfismo $V' \to V$ en $\mathcal{C}$.

Definimos sobre la categoría $\mathcal{C}$ la **topología canónica** T tomando como conjunto de recubrimientos la colección de familias $\{U_i \to U\}$ que son universalmente de epimorfismos efectivos en $\mathcal{C}$. Veamos que se satisfacen los axiomas de la Definición 1.1.

En el caso de T1), sea $\{U_i \to V\}$ universalmente una familia de epimorfismos efectivos y $V' \to V$ un morfismo. Entonces $\{U_i \times_V V' \to V'\}_{i \in I}$ una familia de epimorfismos efectivos. Queremos ver que para todo morfismo $W \to V'$, la familia $\{(U_i \times_V V') \times_{V'} W \to W\}$ es una familia de epimorfismos efectivos, pero como $(U_i \times_V V') \times_{V'} W \cong U_i \times_V (V' \times_{V'} W)$, basta verlo para $\{U_i \times_V (V' \times_{V'} W) \to V' \times_{V'} W\}$, pero esto se tiene por ser $\{U_i \to V\}$ universal.

Para ver $T2$), sólo hay que tener en cuenta que la composición de epimorfismos efectivos universales es un epimorfismo efectivo universal por el Lema 1.6.5, y que este resultado se extiende a familias de epimorfismos efectivos fácilmente.

Para ver que se satisface $T3$), sea $U' \xrightarrow{\varphi} U$ un isomorfismo. Entonces, se tiene que el diagrama

$$Hom(U, Z) \xrightarrow{\varphi^*} Hom(U', Z) \rightrightarrows Hom(U' \times_U U', Z)$$

es un igualador para todo Z en $\mathcal{C}$, ya que la propiedad universal se sigue del hecho de que $Hom(U, Z) \xrightarrow{\varphi^*} Hom(U', Z)$ es un isomorfismo. Para ver que es universal, dado un morfismo $V \xrightarrow{f} U$, falta ver que $U' \times_U V \to V$ es un epimorfismo efectivo. Pero por ser $U' \xrightarrow{\varphi} U$ un isomorfismo, se tiene que $U' \times_U V \cong V$, pues

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{id} & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi^{-1}\circ f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ U' & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

es un producto fibrado. Así, $U' \times_U V \to V$ también es un isomorfismo, y se razona igual que para $U' \xrightarrow{\varphi} U$.

Nótese que, tal y como se ha definido T, todos los prehaces representables en T son, de hecho, haces: dado un recubrimiento $\{U_i \to U\}$, por ser este universalmente una familia de epimorfismos efectivos, el diagrama

$$Hom(U, Z) \to \prod_{i_0} Hom(U_{i_0}, Z) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1)} Hom(U_{i_0} \times_U U_{i_1}, Z)$$

es un igualador para todo Z en $\mathcal{C}$ o, equivalentemente, para el prehaz representable asociado a Z.

Es más, la topología canónica es la topología más fina en la que los prehaces representables son haces. Sea T' otra topología sobre $\mathcal{C}$, tal que todo prehaz representable es un haz. Para todo recubrimiento $\{U_i \to U\}$ en $cov(T')$ y todo Z en $\mathcal{C}$, dado que $Hom(-, Z)$ es un haz, el diagrama

$$Hom(U, Z) \to \prod_{i_0} Hom(U_{i_0}, Z) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1)} Hom(U_{i_0} \times_U U_{i_1}, Z)$$

es un igualador. Por tanto, $\{U_i \to U\}$ es una familia de epimorfismos efectivos. Análogamente, como en virtud del axioma $T1$) se tiene que, dado un morfismo $V \to U$, $\{U_i \times_U V \to V\}$ es un recubrimiento, se sigue que es también una familia de epimorfismos efectivos y así $\{U_i \to U\}$ es universal. Vemos entonces que todo recubrimiento de T' es también un recubrimiento de la topología canónica T, de modo que T es la topología más fina sobre $\mathcal{C}$ para la que todo prehaz representable es un haz.

Capítulo 2

Prehaces abelianos

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{P}$ la categoría de prehaces abelianos en una topología T. Se tiene:*

1. *$\mathcal{P}$ es una categoría abeliana con generadores que satisface Ab5).*
2. *Una sucesión de prehaces abelianos $F' \to F \to F''$ es exacta en $\mathcal{P}$ si y sólo si la sucesión $F'(U) \to F(U) \to F''(U)$ es exacta en $\mathcal{A}b$ para todo $U \in cat(T)$.*

Demostración. El resultado se sigue directamente de las Proposiciones A.4 y A.7, tomando $\mathcal{C} = cat(T)^0$ y $\mathcal{C}' = \mathcal{A}b$. □

Corolario 2.2. *La categoría abeliana $\mathcal{P}$ tiene suficientes objetos inyectivos.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema A.8. □

Observación 2.3. La demostración de la Proposición A.7 implica que una familia de generadores de $\mathcal{P}$ puede construirse usando que $\mathbb{Z}$ es un generador de la categoría $\mathcal{A}b$ y definiendo la familia de prehaces abelianos $(Z_U)_{U \in T}$ dada por

$$Z_U(V) = \bigoplus_{Hom(V,U)} \mathbb{Z}$$

para $V \in T$.

Además, dado un prehaz abeliano F, existe un isomorfismo

$$F(U) = Hom(\mathbb{Z}, F(U)) \cong Hom(Z_U, F)$$

funtorial en F, es decir, que el prehaz Z_U representa al funtor sección en U, definido como $\Gamma_U : F \to F(U)$, de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{A}b$.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{I}$ una categoría y $\mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{P})$ la categoría de funtores $F : \mathcal{I} \to \mathcal{P}$, y denotemos por F_i y $\varinjlim F_i$ a $F(i), i \in \mathcal{I}$, y $\varinjlim F$, respectivamente.*

i) *Para cada funtor* $F : \mathcal{I} \to \mathcal{P}$ *existe el límite directo* $\varinjlim F_i$, *y* $(\varinjlim F_i)(U) = \varinjlim F_i(U)$. *Además, el funtor* $\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ *es aditivo y exacto por la derecha.*

ii) *Si la categoría* $\mathcal{I}$ *es pseudodirigida, entonces* $\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ *es exacto.*

Demostración. Sea $\varinjlim F_i(U)$ el límite directo de la composición de funtores $\mathcal{I} \xrightarrow{F} \mathcal{P} \xrightarrow{\Gamma_U} \mathcal{A}b$. Es claro que el prehaz abeliano en T tal que $U \to \varinjlim F_i(U)$, junto con los morfismos de prehaces $F_i(U) \to \varinjlim F_i(U)$ representan al funtor de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{S}ets$ $\varinjlim F$. La exactitud para i) y ii) se sigue de forma directa de las Proposiciones A.15 y A.18, respectivamente. □

2.1. Cohomología Čech

El Corolario 2.2 afirmaba que la categoría de prehaces abelianos $\mathcal{P}$ tiene suficientes objetos inyectivos, de modo que para todo objeto F de esta categoría se tiene un monomorfismo $F \to I_0$ para cierto prehaz inyectivo I_0. Así, puede construirse para cada objeto una resolución inyectiva, es decir, una sucesión exacta en $\mathcal{P}$

$$0 \to F \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$$

donde los objetos I_j son inyectivos para $j \geq 0$. En estas condiciones, como ya se ha comprobado que $\mathcal{P}$ es una categoría abeliana, se tiene que para cualquier funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{C}'$ con $\mathcal{F}$ exacto por la izquierda, existe el funtor derivado $(\mathcal{R}^q\mathcal{F})_{q\geq 0}$, siendo $\mathcal{C}'$ una categoría abeliana cualquiera.

Ejemplo. Si $U \in Ob(T)$, el funtor de secciones en U $\Gamma_U : \mathcal{P} \to \mathcal{A}b$, con $\Gamma_U(F) = F(U)$ es exacto por la Proposición 2.1, y así $\mathcal{R}^q\Gamma_U = 0$ para todo $q > 0$. Sin embargo, cuando estemos en la categoría de haces (en vez de en la categoría de prehaces), donde $\Gamma_U : \mathcal{S} \to \mathcal{A}b$ ya no es exacto, los funtores derivados $\mathcal{R}^q\Gamma_U$ jugarán un papel muy importante.

Sea $\{U_i \to U\}$ un recubrimiento en la topología T. Puede construirse un funtor

$$H^0(\{U_i \to U\}, -) : \mathcal{P} \to \mathcal{A}b$$

que asigna a cada prehaz abeliano en T el grupo abeliano

$$H^0(\{U_i \to U\}, F) = ker\left(\prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1)\in I\times I} F(U_{i_0} \times_U U_{i_1})\right)$$

Proposición 2.5. *El funtor* $H^0(\{U_i \to U\}, -) : \mathcal{P} \to \mathcal{A}b$ *es aditivo y exacto por la izquierda*

Demostración. La aditividad se deduce de la exactitud por la izquierda. Sea $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{P}$. Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & H^0(\{U_i \to U\}, F') \arrow[d] & H^0(\{U_i \to U\}, F) \arrow[d] & H^0(\{U_i \to U\}, F'') \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \prod_i F'(U_i) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_i F(U_i) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_i F''(U_i) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{i,j} F'(U_i \times_U U_j) \arrow[r] & \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j) \arrow[r] & \prod_{i,j} F''(U_i \times_U U_j) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas en virtud de la Proposición 2.1 (ya que los productos son exactos en la categoría de grupos abelianos) y las columnas son exactas por definición de $H^0(\{U_i \to U\}, -)$.

Aplicando el Lema de la serpiente [9, Theorem 6.5, page 174] sobre las dos filas inferiores del diagrama, se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to H^0(\{U_i \to U\}, F') \to H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{U_i \to U\}, F'')$$

concluyendo así que el funtor es exacto por la izquierda.

□

Por lo establecido al inicio de esta sección, estamos en condiciones de definir los funtores derivados de $H^0(\{U_i \to U\}, -)$.

Definición 2.6. Sea F un prehaz abeliano en T. Se define el **q-ésimo grupo de cohomología Čech con valores en F asociado al recubrimiento** $\{U_i \to U\}$ como el q-ésimo funtor derivado de $H^0(\{U_i \to U\}, -)$, es decir:

$$H^q(\{U_i \to U\}, F) = R^q H^0(\{U_i \to U\}, -)(F)$$

Una forma alternativa de introducir estos grupos de cohomología es el uso de los complejos de cocadenas Čech. Veamos esta construcción:

Definición 2.7. Sea $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ un recubrimiento en la topología T y un prehaz abeliano F. Para $q \geq 0$, se define el **grupo de q-cocadenas con valores en F para el recubrimiento** $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ como

$$C^q(\{U_i \to U\}, F) = \prod_{(i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}} F(U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_q})$$

Estos grupos de q-cocadenas deben formar un complejo, y para ello se introduce la diferencial $d^q : C^q(\{U_i \to U\}, F) \to C^{q+1}(\{U_i \to U\}, F)$, definida como:

$$(d^q s)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} = \sum_{\nu=0}^{q+1} (-1)^\nu F(\hat{\nu})(s_{i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,i_{q+1}})$$

donde $\hat{\nu} : U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+1}} \to U_{i_0} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_\nu} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+1}}$ denota la proyección natural sobre el producto fibrado resultante de eliminar el factor U_{i_ν}. Como además $d^{q+1} \circ d^q = 0$ para todo $q \geq 0$, $C^*(\{U_i \to U\}, F)$ forma un complejo. En efecto, sea $q \geq 0$ fijado y $s \in C^q(\{U_i \to U\}, F)$.

$$\begin{aligned}(d^{q+1} \circ d^q)(s)_{i_0,\ldots,i_{q+2}} &= \sum_{\nu=0}^{q+2} (-1)^\nu F(\hat{\nu})(d^q s)_{i_0,\ldots,\hat{i}_\nu,\ldots,i_{q+2}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{q+2} (-1)^\nu F(\hat{\nu}) \left(\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu'} F(\hat{\nu'})(s_{i_0,\ldots,\hat{i_{\nu'}},\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,i_{q+2}}) \right. \\ &\left. + \sum_{\nu'=\nu+1}^{q+2} (-1)^{\nu'-1} F(\hat{\nu'})(s_{i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,\hat{i_{\nu'}},\ldots,i_{q+2}}) \right)\end{aligned}$$

donde $\nu' \neq \nu$. Sean ν' y ν fijados y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\nu' > \nu$. Tenemos que:

$$U_{i_0} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_\nu} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_{\nu'}} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+2}} \xleftarrow{\hat{\nu}} U_{i_0} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_{\nu'}} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+2}} \xleftarrow{\hat{\nu'}} U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+2}}$$

es lo mismo que

$$U_{i_0} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_\nu} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_{\nu'}} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+2}} \xleftarrow{\hat{\nu'}} U_{i_0} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_\nu} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+2}} \xleftarrow{\hat{\nu}} U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+2}}$$

por las propiedades del límite inverso. Entonces, se tiene que:

$$(-1)^\nu F(\hat{\nu})((-1)^{\nu'-1} F(\hat{\nu'})(s_{i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,\hat{i_{\nu'}},\ldots,i_{q+2}})) = -\left((-1)^{\nu'} F(\hat{\nu'})((-1)^\nu F(\hat{\nu'})(s_{i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,\hat{i_{\nu'}},\ldots,i_{q+2}}))\right)$$

por ser $\nu' \circ \nu = \nu \circ \nu'$ y F un funtor contravariante. Por lo tanto, todos los sumandos se cancelan y se tiene el resultado buscado.

El siguiente resultado afirma que ambas construcciones son equivalentes.

Teorema 2.8. *Sea F un prehaz abeliano sobre una topología T. El q-ésimo grupo de cohomología Čech, $H^q(\{U_i \to U\}, F)$, se identifica canónicamente con el q-ésimo grupo de homología del complejo $C^*(\{U_i \to U\}, F)$.*

Demostración. En primer lugar, denotemos los grupos de cohomología del complejo $C^*(\{U_i \to U\}, F)$ mediante $\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F)$. Es decir:

$$\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F) = ker(d^q)/im(d^{q-1}), q \geq 1$$

$$\tilde{H}^0(\{U_i \to U\}, F) = ker(d^0)$$

Puesto que un morfismo de prehaces (una transformación natural) $F \to G$ induce de forma natural un homomorfismo de complejos $C^*(\{U_i \to U\}, F) \to C^*(\{U_i \to U\}, G)$, se tiene para cada $q \geq 0$ un homomorfismo $\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F) \to \tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, G)$ tomando homología. Así, se obtiene para cada $q \geq 0$ un funtor

$$\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, -) : \mathcal{P} \to \mathcal{A}b$$

que es claramente aditivo.

Queremos ver que este sistema de funtores forma un ∂-funtor de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{A}b$ (Apéndice, Definición A.9). Para ver que se puede dotar a estos funtores de un homomorfismo de conexión ∂, se considera una sucesión exacta de prehaces

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

Se tiene que esta sucesión da lugar a una sucesión exacta de complejos

$$0 \to C^*(\{U_i \to U\}, F') \to C^*(\{U_i \to U\}, F) \to C^*(\{U_i \to U\}, F'') \to 0$$

Es decir, que para cada $q \geq 0$, se tiene que la sucesión en $\mathcal{A}b$

$$0 \to C^q(\{U_i \to U\}, F') \to C^q(\{U_i \to U\}, F) \to C^q(\{U_i \to U\}, F'') \to 0$$

es exacta, puesto que $C^q(\{U_i \to U\}, F) = \prod_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} F(U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_q})$ y entonces el resultado se sigue directamente de la Proposición 2.1 y de que $\prod$ es exacto en $\mathcal{A}b$.

Esto permite definir el homomorfismo de conexión en cohomología

$$\partial : \tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F'') \to \tilde{H}^{q+1}(\{U_i \to U\}, F')$$

para $q \geq 0$ que satisface las siguientes propiedades, como se detalla en [9, Theorems 6.2, 6.3 and 6.4, pages 171-173]:

1. Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de morfismos de prehaces abelianos, donde las filas son exactas, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F'') & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}^{q+1}(\{U_i \to U\}, F') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, G'') & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}^{q+1}(\{U_i \to U\}, G')
\end{array}$$

es conmutativo.

2. La sucesión larga

$$\cdots \to \tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F) \to \tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, F'') \to$$
$$\to \tilde{H}^{q+1}(\{U_i \to U\}, F') \to \tilde{H}^{q+1}(\{U_i \to U\}, F) \to \dots$$

dada por una sucesión exacta en $\mathcal{P}$ $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, es exacta en $\mathcal{A}b$.

Queremos ver que la familia de funtores $(\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, -))_{q \geq 0}$ forma un ∂-funtor universal. Como $\mathcal{P}$ y $\mathcal{A}b$ son categorías abelianas y $\mathcal{P}$ tiene suficientes objetos inyectivos, probar que el ∂-funtor es universal es equivalente a probar que los funtores $\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, -)$ son effaceables (Apéndice, Definición A.12) para $q \geq 1$.

Del mismo modo, para ver que dichos funtores son effaceables, es suficiente probar que aniquilan a los objetos inyectivos de $\mathcal{P}$. Esto es, dado un prehaz F en $\mathcal{P}$ inyectivo, debe comprobarse que la sucesión

$$C^0(\{U_i \to U\}, F) \to C^1(\{U_i \to U\}, F) \to \dots$$

es exacta.

Considérense los prehaces abelianos Z_U, con $U \in cat(T)$. Como se indica en la Observación 2.3, se definen como

$$Z_U(V) = \bigoplus_{Hom(V,U)} \mathbb{Z}$$

y se tiene que $Hom(Z_U, F) \cong F(U)$ para todo F en $\mathcal{P}$. Así pues, puede darse la siguiente descripción de los grupos de q-cocadenas $C^q(\{U_i \to U\}, F)$:

$$\begin{aligned} C^q(\{U_i \to U\}, F) &= \prod_{(i_0,\dots,i_q)} F(U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_q}) \\ &\cong \prod_{(i_0,\dots,i_q)} Hom(Z_{U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_q}}, F) \\ &\cong Hom(\bigoplus_{(i_0,\dots,i_q)} Z_{U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_q}}, F) \end{aligned}$$

En esta descripción, el último paso se sigue de [9, Theorem 2.27, page 56], ya que la suma directa puede verse como el límite de un sistema directo cuyos objetos son los sumandos, sin ningún morfismo entre ellos.

De esta forma, para verificar la exactitud de

$$C^0(\{U_i \to U\}, F) \to C^1(\{U_i \to U\}, F) \to \dots$$

puede probarse, de forma equivalente, la exactitud de la sucesión

$$Hom(\bigoplus_{i_0} Z_{U_{i_0}}, F) \to Hom(\bigoplus_{(i_0,i_1)} Z_{U_{i_0}\times_U U_{i_1}}, F) \to \dots$$

Puesto que F es un objeto inyectivo, el funtor contravariante $Hom(-,F)$ es exacto, y entonces basta probar la exactitud de la sucesión

$$\bigoplus_{i_0} Z_{U_{i_0}} \leftarrow \bigoplus_{(i_0,i_1)} Z_{U_{i_0}\times_U U_{i_1}} \leftarrow \dots$$

o, equivalentemente (en virtud de la Proposición 2.1), de la sucesión

$$\bigoplus_{i_0} Z_{U_{i_0}}(V) \leftarrow \bigoplus_{(i_0,i_1)} Z_{U_{i_0}\times_U U_{i_1}}(V) \leftarrow \dots \tag{2.1}$$

para todo $V \in cat(T)$. Como $Z_{U_{i_0}}(V) = \bigoplus_{Hom(V,U_{i_0})} \mathbb{Z}$, puede verse que estas flechas vienen inducidas por el siguiente diagrama de morfismos de conjuntos:

$$\coprod_{i_0} Hom(V,U_{i_0}) \leftleftarrows \coprod_{(i_0,i_1)} Hom(V,U_{i_0}\times_U U_{i_1}) \Lleftarrow \cdots \tag{2.2}$$

Dado $\varphi \in Hom(V,U)$, denotemos por $Hom_\varphi(V,U_i)$ el conjunto de morfismos $V \to U_i$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U_i \arrow[d] \\
V \arrow[ur] \arrow[r, "\varphi"'] & U
\end{tikzcd}$$

Podemos hacer las siguientes reescrituras:

$$\begin{aligned}
Hom(V,U_i) &= \coprod_{\varphi\in Hom(V,U)} Hom_\varphi(V,U_i) \\
Hom(V,U_{i_0}\times_U U_{i_1}) &= \coprod_{\varphi\in Hom(V,U)} Hom_\varphi(V,U_{i_0}\times_U U_{i_1}) \\
&= \coprod_{\varphi\in Hom(V,U)} Hom_\varphi(V,U_{i_0}) \times Hom_\varphi(V,U_{i_1}) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Si ahora abreviamos $\coprod_{i_0} Hom_\varphi(V, U_{i_0})$ como $S(\varphi)$ para $\varphi \in Hom(V,U)$, podemos reescribir el diagrama anterior como

$$\coprod_{\varphi \in Hom(V,U)} \left(S(\varphi) \leftleftarrows S(\varphi) \times S(\varphi) \;\substack{\leftarrow\\\leftarrow\\\leftarrow}\; \cdots \right)$$

Este diagrama, de igual forma que hacía el Diagrama (2.2), induce una sucesión en $\mathcal{A}b$ al aplicar sobre él los funtores "grupo abeliano libre" y "complejo asociado a un grupo abeliano semi-simplicial", obteniendo así la sucesión

$$\bigoplus_{\varphi \in Hom(V,U)} \left(\bigoplus_{S(\varphi)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d} \bigoplus_{S(\varphi)\times S(\varphi)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d} \cdots \right),$$

que es equivalente a la sucesión del Diagrama (2.1).

Puesto que en la categoría $\mathcal{A}b$ el funtor suma directa (el coproducto) es exacto, esto reduce la demostración a probar que la sucesión de grupos abelianos

$$\bigoplus_{S(\varphi)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d} \bigoplus_{S(\varphi)\times S(\varphi)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d} \cdots$$

es exacta.

Ahora bien, sabemos que estos morfismos d son de la forma:

$$d(1_{i_0,\ldots,i_q}) = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu 1_{i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,i_q}$$

donde los $1_{i_0,\ldots,i_q}$ son elementos de la base de $\bigoplus_{S(\varphi)^{q+1}} \mathbb{Z}$.

Si fijamos un $s \in S$, podemos construir un homomorfismo

$$\Delta : \bigoplus_{S(\varphi)^q} \mathbb{Z} \to \bigoplus_{S(\varphi)^{q+1}} \mathbb{Z}$$

tal que $\Delta(1_{i_0,\ldots,i_q}) = 1_{s,i_0,\ldots,i_q}$.

Veamos que se tiene $d\Delta + \Delta d = id$. Sea $1_{i_0,\ldots,i_q} \in \bigoplus_{S(\varphi)^{q+1}} \mathbb{Z}$. Es sencillo comprobar que

$$d\Delta(1_{i_0,\ldots,i_q}) = 1_{i_0,\ldots,i_q} + \sum_{\nu=1}^{q+1} (-1)^\nu 1_{s,i_0,\ldots,\hat{i}_{\nu-1},\ldots,i_q}$$

$$\Delta d(1_{i_0,\ldots,i_q}) = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu 1_{s,i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,i_q}$$

de donde, como $\sum_{\nu=1}^{q+1} (-1)^\nu 1_{s,i_0,\ldots,\hat{i}_{\nu-1},\ldots,i_q} + \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu 1_{s,i_0,\ldots,\hat{i_\nu},\ldots,i_q} = 0$ debido a la diferencia de signos, se sigue el resultado.

Entonces, se tiene que para un elemento $s \in \ker\big(\bigoplus_{S(\varphi)^{q+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \bigoplus_{S(\varphi)^{q}} \mathbb{Z}\big)$, $s = d\Delta(s) + \Delta d(s) = d\Delta(s) \in \mathrm{im}\big(\bigoplus_{S(\varphi)^{q+2}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \bigoplus_{S(\varphi)^{q+1}} \mathbb{Z}\big)$. Teniendo en cuenta que, además, $d \circ d = 0$ (se puede comprobar razonando de forma similar a como se hizo para la diferencial del complejo de cocadenas Čech), la sucesión en $\mathcal{A}b$

$$\bigoplus_{S(\varphi)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d} \bigoplus_{S(\varphi)\times S(\varphi)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d} \cdots$$

es exacta, y por tanto $(\tilde{H}^q(\{U_i \to U\}, -))_{q\geq 0}$ es un ∂-funtor universal, como queríamos demostrar.

□

Definición 2.9. Un **refinamiento de recubrimientos de U**

$$\{U'_j \to U\}_{j\in J} \to \{U_i \to U\}_{i\in I}$$

está formado por una aplicación $\epsilon : J \to I$ entre los conjuntos de índices y una familia de U-morfismos $f_j : U'_j \to U_{\epsilon(j)}$, es decir, morfismos tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U'_j \arrow[rr, "f_j"] \arrow[dr] & & U_{\epsilon(j)} \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación 2.10. Fijado un objeto U en T, nótese que los recubrimientos de U como objetos, junto con los refinamientos de estos como morfismos, forman la llamada categoría de recubrimientos de U en la topología T. Se denotará esta categoría como $\mathcal{J}_U$.

Veamos que estos refinamientos inducen morfismos entre los grupos de cohomología Čech. Sean los q-ésimos grupos de cohomología Čech $H^q(\{U_i \to U\}, F)$ y $H^q(\{U'_j \to U\}, F)$, y sea $f : \{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$ un refinamiento.

Se considera el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \prod_i F(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & \prod_{(i_0,i_1)} F(U_{i_0} \times_U U_{i_1}) \arrow[d, "f^1"] \\ \prod_j F(U'_j) \arrow[r] & \prod_{(j_0,j_1)} F(U'_{j_0} \times_U U'_{j_1}) \end{tikzcd}$$

donde las flechas f^0 y f^1 están inducidas por el refinamiento f. Esto da lugar a un homomorfismo

$$H^0(f, F) : H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{U'_j \to U\}, F)$$

sin más que restringirnos al núcleo de las flechas horizontales en el diagrama anterior. Este homomorfismo es, además, funtorial en F.

Puesto que el ∂-funtor $(H^q(\{U_i \to U\}, -))_{q\geq 0}$ es universal, la funtorialidad de este homomorfismo implica que se extienda de forma única a un morfismo de ∂-funtores

$$(H^q(\{U_i \to U\}, -))_{q\geq 0} \to (H^q(\{U'_j \to U\}, -))_{q\geq 0}$$

de modo que se obtiene, para cada $q \geq 0$, un homomorfismo

$$H^q(f, F) : H^q(\{U_i \to U\}, F) \to H^q(\{U'_j \to U\}, F)$$

que es ∂-funtorial en F, es decir, que dada una sucesión exacta corta en $\mathcal{P}$

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

el diagrama resultante entre las dos sucesiones largas en cohomología

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(\{U_i \to U\}, F') \arrow[r] \arrow[d, "H^q(f,F')"] & H^q(\{U_i \to U\}, F) \arrow[r] \arrow[d, "H^q(f,F)"] & H^q(\{U_i \to U\}, F'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H^q(f,F'')"] & H^{q+1}(\{U_i \to U\}, F') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^q(\{U'_j \to U\}, F') \arrow[r] & H^q(\{U'_j \to U\}, F) \arrow[r] & H^q(\{U'_j \to U\}, F'') \arrow[r, "\partial"] & H^{q+1}(\{U'_j \to U\}, F') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Así, fijado un prehaz abeliano F en T y un $q \geq 0$, se obtiene un funtor contravariante entre las categorías $\mathcal{J}_U$ y $\mathcal{A}b$

$$\{U_i \to U\} \to H^q(\{U_i \to U\}, F)$$

que asigna a cada recubrimiento $\{U_i \to U\}$ el q-ésimo grupo de cohomología Čech de F asociado a él, y a cada refinamiento $f : \{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$ el homomorfismo $H^q(f, F) : H^q(\{U_i \to U\}, F) \to H^q(\{U'_j \to U\}, F)$.

Si ahora se considera la categoría dual de $\mathcal{J}_U$, que consta de los mismos objetos pero invierte las flechas, y que denotaremos como $\mathcal{J}_U^0$, el funtor anterior se vuelve covariante, y entonces podemos dar una definición de los grupos de cohomología Čech de U como un límite directo.

Definición 2.11. Sea F un prehaz abeliano en T y $U \in cat(T)$. Dado $q \geq 0$, el grupo

$$\check{H}^q(U, F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\} \in \mathcal{J}_U^0} H^q(\{U_i \to U\}, F)$$

se dice el **q-ésimo grupo de cohomología Čech de U con valores en F**.

Antes de enunciar el siguiente teorema, se incluye un resultado necesario para completar su demostración, que afirma que dos refinamientos entre los mismos recubrimientos inducen el mismo homomorfismo en homología.

Lema 2.12. *Sean $\{U_i \to U\}$ y $\{U'_j \to U\}$ dos recubrimientos de U, y $f, g : \{U'_j \to U\} \rightrightarrows \{U_i \to U\}$ dos refinamientos. Entonces, los homomorfismos inducidos*

$$H^q(f, F), H^q(g, F) : H^q(\{U_i \to U\}, F) \to H^q(\{U'_j \to U\}, F)$$

coinciden para todo prehaz abeliano F y para todo $q \geq 0$.

Demostración. Como se trata de homomorfismos de ∂-funtores universales, es suficiente probar que coinciden $H^0(f, F)$ y $H^0(g, F)$, pues ambos se extienden de forma única. Considérese el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \prod F(U_i) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, shift right, "g^0"'] \arrow[d, shift left, "f^0"] & \prod F(U_{i_0} \times_U U_{i_1}) \arrow[dl, "\Delta^1"'] \arrow[d, shift right, "g^1"'] \arrow[d, shift left, "f^1"] \\ \prod F(U'_j) \arrow[r, "d^0"'] & \prod F(U'_{j_0} \times_U U'_{j_1}) \end{tikzcd}$$

En el diagrama, $\Delta^1 : \prod_{(i_0, i_1)} F(U_{i_0} \times_U U_{i_1}) \to \prod_j F(U'_j)$ se define, para cada componente, como $(\Delta^1 s)_j = F((f_j, g_j)_U)(s_{\epsilon(j)}, s_{\delta(j)})$, siendo $f = (\epsilon, f_j)$, $g = (\delta, g_j)$ y $(f_j, g_j)_U : U'_j \to U_{\epsilon(j)} \times_U U_{\delta(j)}$ la aplicación canónica inducida por la propiedad universal del producto fibrado, por ser f y g refinamientos $\{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$. Se tiene que

$$\Delta^1 \circ d^0 = g^0 - f^0$$

ya que, por la propiedad universal del producto fibrado,

$$U'_j \xrightarrow{(f_j, g_j)_U} U_{\epsilon(j)} \times_U U_{\delta(j)} \xrightarrow{\hat{1}} U_{\epsilon(j)}$$

luego aplicando F se obtiene:

$$F(U_{\epsilon(j)}) \to F(U_{\epsilon(j)} \times_U U_{\delta(j)}) \to F(U'_j)$$

Dicho de otro modo, tenemos que

$$(f^0 s)_j = \Delta^1 \circ F(\hat{1})(s_{\epsilon(j)})$$

Mediante un razonamiento completamente análogo, llegamos a que

$$(g^0 s)_j = \Delta^1 \circ F(\hat{0})(s_{\delta(j)})$$

Así, podemos concluir que

$$(g^0 - f^0 s)_j = \Delta^1 \circ (F(\hat{0})(s_{\delta(j)}) - F(\hat{1})(s_{\epsilon(j)}))$$

Por lo tanto, $f^0|_{\ker(d^0)} = g^0|_{ker(d^0)}$, de donde se sigue inmediatamente que $H^0(f, F) = H^0(g, F)$.

□

Teorema 2.13. *El funtor $F \to \check{H}^0(U, F)$ de la categoría $\mathcal{P}$ a la categoría $\mathcal{A}b$ es aditivo y exacto por la izquierda. Además, los funtores derivados por la derecha de este funtor vienen dados por los grupos de cohomología Čech.*

Demostración. Para completar esta prueba, será necesario comprobar que el funtor

$$\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{J}_U^0, \mathcal{A}b) \to \mathcal{A}b$$

es exacto.

En primer lugar, dado un objeto $U \in cat(T)$ y dos recubrimientos $\{U_i \to U\}$ y $\{U'_j \to U\}$, el recubrimiento $\{U'_j \to U\}$ se dice **más fino** que $\{U_i \to U\}$ si existe un refinamiento $f : \{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$, y se denota $\{U'_j \to U\} \geq \{U_i \to U\}$.

Observamos que, dados los recubrimientos $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ y $\{U'_j \to U\}_{j \in J}$, utilizando las propiedades de la Definición 1.1, se tiene que

$$\{U_i \times_U U'_j \to U\}_{(i,j) \in I \times J}$$

también es un recubrimiento de U, pues por la primera propiedad, $\{U_i \times_U U'_j \to U'_j\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de U para un j fijado, y por la segunda propiedad (por composición con $\{U'_j \to U\}_{j \in J}$), se obtiene el resultado.

Por las propiedades del producto fibrado $U_i \times_U U'_j$, se tienen los refinamientos:

$$\begin{tikzcd} & \{U_i \to U\} \\ \{U_i \times_U U'_j \to U\} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \{U'_j \to U\} \end{tikzcd}$$

Así, el conjunto de recubrimientos de U es un conjunto dirigido. Por el Lema 2.12, el funtor $H^q(-, F)$ se factoriza a través del conjunto ordenado de recubrimientos que acabamos de definir para todo $q \geq 0$, puesto que si consideramos dos recubrimientos $\{U_i \to U\}, \{V_j \to U\}$ tales que $\{U_i \to U\} \geq \{V_j \to U\}$ y $\{U_i \to U\} \leq \{V_j \to U\}$, es decir,

$$\{U_i \to U\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{V_j \to U\}$$

entonces consideramos los refinamientos entre los mismos recubrimientos

$$\{U_i \to U\} \underset{id}{\overset{\beta \circ \alpha}{\rightleftarrows}} \{U_i \to U\}$$

que, por el funtor $H^q(-, F)$ van en el mismo morfismo por el Lema 2.12, luego $H^q(\beta \circ \alpha, F) = H^q(id, F) = id$ (análogamente, $H^q(\alpha \circ \beta, F) = id$). Por tanto, como $H^q(\alpha, F) \circ H^q(\beta, F) = id$ y $H^q(\beta, F) \circ H^q(\alpha, F) = id$, $H^q(\alpha, F)$ y $H^q(\beta, F)$ son isomorfismos (inversos uno del otro), de modo que $H^q(\{U_i \to U\}, F)$ y $H^q(\{V_j \to U\}, F)$ son isomorfos.

Esto significa que podemos considerar el límite desde este conjunto dirigido cociente (cambiando, en caso de ser necesario, objetos en $\mathcal{A}b$ por otros isomorfos, lo cual no afecta a la exactitud), y que este conjunto sea dirigido implica que el límite es exacto, como queríamos demostrar.

Sea ahora $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{P}$. Queremos ver que la sucesión
$$0 \to \check{H}^0(U, F') \to \check{H}^0(U, F) \to \check{H}^0(U, F'')$$
es exacta.

Sabemos que el funtor $H^0(\{U_i \to U\}, -)$ es exacto por la izquierda, luego para todo recubrimiento $\{U_i \to U\}$, la sucesión
$$0 \to H^0(\{U_i \to U\}, F') \to H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{U_i \to U\}, F'')$$
es exacta. Además, esta sucesión es funtorial en $\{U_i \to U\}$.

Por lo tanto, aplicando $\varinjlim$ que, pensado desde el conjunto dirigido anterior, es exacto, se tiene la exactitud de la sucesión
$$0 \to \check{H}^0(U, F') \to \check{H}^0(U, F) \to \check{H}^0(U, F'')$$
como queríamos demostrar.

Por otro lado, queremos ver que la familia $(\check{H}^q(U, -))_{q\geq 0}$ forma un ∂-funtor universal y exacto, pues así, dado que el funtor derivado por la derecha de $\check{H}^0(U, -)$ es un ∂-funtor universal y exacto que extiende a $\check{H}^0(U, -)$ y es único, tendremos que los grupos de cohomología Čech forman este funtor derivado.

Dado un refinamiento $f : \{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$ y una sucesión exacta
$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$
de prehaces, el diagrama inducido
$$\begin{tikzcd}
H^q(\{U_i \to U\}, F'') \arrow[r] \arrow[d] & H^{q+1}(\{U_i \to U\}, F') \arrow[d] \\
H^q(\{U'_j \to U\}, F'') \arrow[r] & H^{q+1}(\{U'_j \to U\}, F')
\end{tikzcd}$$
es conmutativo, con lo que los ∂-funtores $H^*(\{U_i \to U\}, -)$ para cada recubrimiento $\{U_i \to U\}$ dan lugar a un ∂-funtor $\check{H}^*(U, -) = \varinjlim_{\{U_i \to U\}} H^*(\{U_i \to U\}, -)$, pues:

1. Tomando $\varinjlim$ en los diagramas anteriores obtenemos un morfismo para cada q
$$\check{H}^q(U, F'') \to \check{H}^q(U, F')$$

2. Para todo diagrama conmutativo de sucesiones exactas en $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

el diagrama inducido

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^q(U,F') & \longrightarrow & \check{H}^q(U,F) & \longrightarrow & \check{H}^q(U,F'') & \longrightarrow & \check{H}^{q+1}(U,F') & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \check{H}^q(U,G') & \longrightarrow & \check{H}^q(U,G) & \longrightarrow & \check{H}^q(U,G'') & \longrightarrow & \check{H}^{q+1}(U,G') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

es conmutativo (por la propiedad universal de $\varinjlim$) y las filas son exactas, pues por lo visto al principio de la demostración, podemos considerar $\varinjlim$ como funtor exacto (sobre el conjunto dirigido definido anteriormente) y basta considerar que todas las sucesiones

$$\cdots \to H^q(\{U_i \to U\}, F'') \to H^{q+1}(\{U_i \to U\}, F') \to \dots$$

en cohomología asociadas a una sucesión exacta $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ en $\mathcal{P}$ son también exactas, por lo visto en el Teorema 2.8. Así, por exactitud del funtor $\varinjlim$, las sucesiones

$$\cdots \to \check{H}^q(U, F'') \to \check{H}^{q+1}(U, F') \to \dots$$

son exactas.

Por último, el ∂-funtor es universal, pues si F es inyectivo en $\mathcal{P}$

$$\check{H}^q(U,F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\}} H^q(\{U_i \to U\}, F) = \varinjlim 0 = 0$$

como se sigue de la demostración del Teorema 2.8 para cada $H^q(\{U_i \to U\}, F)$. Por lo tanto, esto permite concluir que los funtores derivados por la derecha de $\check{H}^0(U,-)$ vienen dados por $\check{H}^q(U,-)$, esto es, para todo $q \geq 0$:

$$\mathcal{R}^q \check{H}^0(U,-) = \check{H}^q(U,-)$$

□

2.2. Los funtores f^p y f_p

Sean T y T' dos topologías, con $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ las categorías de prehaces abelianos en T y T', respectivamente. Sea $f : T \to T'$ un funtor entre las categorías subyacentes.

Vamos a construir dos funtores adjuntos, f^p y f_p, entre las categorías $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$. Uno de ellos puede definirse inmediatamente:

Definición 2.14. Se define el funtor $f^p : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ como aquel que a cada prehaz F' en T' le asigna el prehaz f^pF' en T dado por

$$f^pF'(U) = F'(f(U))$$

para todo $U \in cat(T)$, y que a cada morfismo de prehaces en T' $v' : F' \to G'$ le asigna el morfismo $f^pv' : f^pF' \to f^pG'$ de prehaces en T, tal que

$$f^pv'(U) = v'(f(U))$$

para todo $U \in cat(T)$.

Observación 2.15. El funtor $f^p : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ es aditivo, exacto y conmuta con límites directos. La aditividad se sigue de la exactitud, y la exactitud viene dada por la Proposición 2.1, ya que si $0 \to F' \to G' \to H' \to 0$ es exacta en $\mathcal{P}'$, la sucesión en $\mathcal{P}$

$$0 \to f^pF' \to f^pG' \to f^pH' \to 0$$

es exacta si y sólo si la sucesión en $\mathcal{A}b$

$$0 \to f^pF'(U) \to f^pG'(U) \to f^pH'(U) \to 0$$

lo es para todo U en T, pero esto es, por definición

$$0 \to F'(f(U)) \to G'(f(U)) \to H'(f(U)) \to 0$$

Por último, la conmutatividad con límites directos se obtiene mediante aplicación directa de la Proposición 2.4.

Teorema 2.16.

i) El funtor f^p tiene un funtor adjunto por la izquierda, $f_p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$. f_p es un funtor aditivo, exacto por la derecha y conmuta con límites directos.

ii) Si $f_p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ es exacto, entonces $f^p : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ lleva prehaces inyectivos en $\mathcal{P}'$ en prehaces inyectivos en $\mathcal{P}$.

Demostración. Para ver que f^p tiene adjunto por la izquierda, debemos ver que el funtor

$$G' \to Hom(F, f^pG')$$

de $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{A}b$ es representable, es decir, que para cada F en $\mathcal{P}$ existe un objeto f_pF en $\mathcal{P}'$, y para cada G' en $\mathcal{P}'$ un isomorfismo

$$Hom(f_pF, G') \cong Hom(F, f^pG')$$

de grupos abelianos funtorial en G'. Así, se tiene que f_p es de forma natural un funtor de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$, que además es adjunto por la izquierda al funtor f^p. Como sabemos que f^p es aditivo y exacto por la izquierda, si vemos que f_p es su adjunto por la izquierda tendremos automáticamente que f_p es aditivo y exacto por la derecha. La conmutatividad con los límites directos se obtiene entonces directamente de la Proposición A.16.

En primer lugar, debe definirse f_pF para un prehaz F en $\mathcal{P}$. Sea $U' \in cat(T')$, y considérense los pares (U, ϕ'), donde $U \in cat(T)$ y ϕ' es un morfismo $\phi' : U' \to f(U)$ en T'. Definimos la categoría $\mathcal{I}_{U'}$ tomando estos pares como objetos y, dados dos objetos (U_1, ϕ'_1) y (U_2, ϕ'_2), definiendo un morfismo $(U_1, \phi'_1) \to (U_2, \phi'_2)$ como un morfismo $\phi : U_1 \to U_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & f(U_1) \arrow[dd, "f(\phi)"] \\ U' \arrow[ur, "\phi'_1"] \arrow[dr, "\phi'_2"'] & \\ & f(U_2) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La asignación $(U, \phi') \to F(U)$ da lugar a un funtor contravariante $F_{U'}$ de $\mathcal{I}_{U'}$ a $\mathcal{A}b$. Considerando la categoría dual $\mathcal{I}^0_{U'}$, el funtor se vuelve covariante, y podemos definir

$$f_pF(U') = \varinjlim_{\mathcal{I}^0_{U'}} F_{U'} = \varinjlim_{(U,\phi')} F(U)$$

ya que este límite directo siempre es representable, por ser $\mathcal{A}b$ una categoría en las condiciones de la Proposición A.15.

Con respecto a las aplicaciones $\epsilon' : U' \to V'$ en T', como estas inducen un funtor $\mathcal{I}_{V'} \to \mathcal{I}_{U'}$ sin más que asignar $(V, \phi' : V' \to f(V)) \to (V, \phi' \circ \epsilon' : U' \to f(V))$, obtenemos un morfismo

$$\varinjlim_{\mathcal{I}^0_{V'}} F_{V'} \to \varinjlim_{\mathcal{I}^0_{U'}} F_{U'}$$

inducido por el morfismo que lleva cada $F(V)$ del sistema directo de la izquierda en el $F(V)$ del sistema de la derecha como la identidad. Así, tenemos un homomorfismo $f_pF(V') \to f_pF(U')$ y hemos construido el prehaz abeliano f_pF en T'.

Para ver la existencia de isomorfismos $Hom(f_pF, G') \cong Hom(F, f^pG')$ funtoriales en G', considérese primero un morfismo $v : f_pF \to G'$ en $\mathcal{P}'$. Para cada U en T se obtiene un homomorfismo

$$v(f(U)) : f_pF(f(U)) \to G'(f(U)) = f^pG'(U)$$

Como $(U, id_{f(U)})$ es un objeto de la categoría $\mathcal{I}_{f(U)}$, se tiene un homomorfismo canónico

$$F(U) = F_{f(U)}(U, id_{f(U)}) \to \varinjlim_{\mathcal{I}^0_{f(U)}} F_{f(U)} = f_p F(f(U))$$

Componiendo estos dos morfismos, se obtiene un morfismo

$$F(U) \to f^p G'(U)$$

funtorial en U, y entonces tenemos un morfismo de prehaces abelianos en T

$$v^b : F \to f^p G'$$

Además, la aplicación

$$Hom(f_p F, G') \to Hom(F, f^p G')$$

que asigna v^b a v es un homomorfismo de grupos abelianos funtorial en G'. En efecto, pues dados los morfismos $v_1, v_2 : f_p F \rightrightarrows G'$, basta considerar que para todo U de T, $(v_1 + v_2)(f(U)) = v_1(f(U)) + v_2(f(U))$.

Por otro lado, sea un morfismo $u : F \to f^p G'$ en $\mathcal{P}$. Dado U' en T', para cada objeto (U, φ') en $\mathcal{I}_{U'}$ se obtiene un homomorfismo

$$F_{U'}(U, \varphi') = F(U) \xrightarrow{u(U)} f^p G'(U) = G'(f(U)) \xrightarrow{G'(\varphi)} G'(U')$$

funtorial en (U, φ'). Esto induce un homomorfismo

$$f_p F(U') = \varinjlim_{\mathcal{I}^0_{U'}} F_{U'} \to G'(U')$$

que es funtorial en U' de T'. Para ver esto, sea $h : U' \to V'$ y considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\varinjlim_{(V,\phi')\in\mathcal{I}_{V'}} F(V) & \longrightarrow & \varinjlim_{(V,\phi')\in\mathcal{I}_{V'}} G'(f(V)) & \longrightarrow & G'(V') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\varinjlim_{(U,\psi')\in\mathcal{I}_{U'}} F(U) & \longrightarrow & \varinjlim_{(U,\psi')\in\mathcal{I}_{U'}} G'(f(U)) & \longrightarrow & G'(U')
\end{array}$$

en el que la flechas vertical izquierda del cuadrado izquierdo es la inducida por el morfismo que lleva el objeto $F(V)$ del sistema superior al $F(V)$ del sistema inferior como la identidad (análogo para la otra flecha con los objetos $G'(f(V))$). Para ver que el cuadrado de la derecha es conmutativo, como los morfimos horizontales son los de la propiedad universal de $\varinjlim$, es suficiente con demostrar que para todo $(V, \phi') \in \mathcal{I}_{V'}$ el diagrama correspondiente a este cuadrado, pero antes de tomar $\varinjlim$, es conmutativo. De esta forma, al tomar $\varinjlim$, la conmutatividad se tiene porque se ha probado para todos los representantes de cada elemento de $\varinjlim_{(V,\phi')\in\mathcal{I}_{V'}} G'(f(V))$. Pero este diagrama es

$$\begin{array}{ccc} G'(f(V)) & \xrightarrow{G'(\phi')} & G'(V') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle G'(h)} \\ G'(f(V)) & \xrightarrow{G'(\phi'\circ h)} & G'(U') \end{array}$$

y es obviamente conmutativo.

Por lo tanto, hemos construido un morfismo de prehaces abelianos en T'

$$u^{\#} : f_pF \to G'$$

y, además, se tiene que el morfismo que asigna $u \to u^{\#}$ es inverso al morfismo $v \to v^b$ construido anteriormente. Esto concluye la prueba de i).

Una vez probado i), ii) resulta sencillo de probar. Sea M' inyectivo en $\mathcal{P}'$, y consideremos una sucesión exacta en $\mathcal{P}$

$$0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$$

Por hipótesis, $f_p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ es exacto, de modo que la sucesión en $\mathcal{P}'$

$$0 \to f_pF_1 \to f_pF_2 \to f_pF_3 \to 0$$

es exacta. Por ser M' inyectivo en $\mathcal{P}'$, el funtor $Hom(-, M')$ es exacto, luego tenemos una sucesión exacta

$$0 \to Hom(f_pF_1, M') \to Hom(f_pF_2, M') \to Hom(f_pF_3, M') \to 0$$

Pero, por lo visto en i), f_p es adjunto por la izquierda a f^p, luego se tiene un isomorfismo $Hom(F, f^pM') \cong Hom(f_pF, M')$, que no afecta a la exactitud. Así, la sucesión

$$0 \to Hom(F_1, f^pM') \to Hom(F_2, f^pM') \to Hom(F_3, f^pM') \to 0$$

es exacta, de donde el funtor $Hom(-, f^pM')$ es exacto y, por tanto, f^pM' es inyectivo en $\mathcal{P}$.

□

Proposición 2.17. *Sea $f : T \to T'$ un funtor y F un prehaz abeliano en T representable por un objeto Z de T. El prehaz en T' f_pF es representable por el objeto $f(Z)$ de T'.*

Demostración. Queremos ver que para todo U' en T', $f_pF(U') \cong Hom(U', f(Z))$. Sea entonces U' en T'. Cada (U, φ') en $\mathcal{I}_{U'}$ induce un morfismo

$$F(U) = Hom(U, Z) \to Hom(U', f(Z))$$

asignando a cada morfismo $U \xrightarrow{\alpha} Z$ el morfismo $U' \xrightarrow{\varphi'} f(U) \xrightarrow{f(\alpha)} f(Z)$. Este morfismo es claramente funtorial en (U, ϕ'), pues dado $U_1 \xrightarrow{\phi} U_2$ basta considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & f(U_1) \arrow[r, "f(\alpha)"] \arrow[d, "f(\phi)"] & f(Z) \arrow[d] \\ U' \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, "\psi'"'] & & \\ & f(U_2) \arrow[r, "f(\beta)"] & f(Z) \end{tikzcd}$$

y que $\alpha : U_1 \to Z$ viene dado por $Hom(U_2, Z) \xrightarrow{Hom(\phi,Z)} Hom(U_1)$ como imagen de $\beta : U_2 \to Z$.

Así, se induce por la propiedad universal del límite directo un morfismo

$$f_pF(U') = \varinjlim_{(U,\phi')} Hom(U, Z) \to Hom(U', f(Z))$$

que, además, es funtorial en U' (puede repetirse el razonamiento empleado en el Teorema 2.16).

Veamos que se trata de un isomorfismo, para lo que basta comprobar que es inyectivo y sobreyectivo.

Supongamos que existen (U_1, φ'), $(U_2, \psi') \in \mathcal{I}_{U'}$ y morfismos $\alpha_1 : U_1 \to Z$, $\alpha_2 : U_2 \to Z$ tales que $f(\alpha_1)\varphi' = f(\alpha_2)\psi'$. Se tiene que α_1 y α_2 son representantes de la misma clase en $f_pF(U') = \varinjlim_{(U,\phi')} Hom(U, Z)$, puesto que el morfismo $Hom(Z, Z) \to Hom(U_1, Z)$ correspondiente a $\alpha_1 : (U_1, \varphi') \to (Z, f(\alpha_1)\varphi')$ es tal que $id_Z \mapsto \alpha_1$ y, análogamente para α_2, el morfismo $Hom(Z, Z) \to Hom(U_2, Z)$ correspondiente a $\alpha_2 : (U_2, \psi') \to (Z, f(\alpha_2)\psi')$ es tal que $id_Z \mapsto \alpha_2$, con lo que, por la conmutatividad de los morfismos canónicos al límite del sistema directo, se tiene la inyectividad.

En cuanto a la sobreyectividad, dado $\varphi' \in Hom(U', f(Z))$, basta considerar que el morfismo $F(Z) = Hom(Z, Z) \to Hom(U', f(Z))$ inducido por $(Z, \varphi') \in \mathcal{I}_{U'}$ lleva id_Z en $f(id_Z) \circ \varphi' = \varphi'$. $\square$

Capítulo 3

Haces abelianos

Como en la sección anterior, dada una topología T, $\mathcal{P}$ es la categoría de prehaces abelianos en T. Sea $\mathcal{S}$ la categoría de haces abelianos en T e $i : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{P}$ el funtor inclusión.

Observación 3.1. Sea F un haz abeliano en T. Para cualquier recubrimiento $\{U_i \to U\}$ en $cov(T)$, sabemos que el diagrama

$$F(U) \to \prod_{i_0} F(U_{i_0}) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1)} F(U_{i_0} \times_U U_{i_1})$$

es un igualador.

Por lo tanto, $H^0(\{U_i \to U\}, F) = \ker\left(\prod_{i_0} F(U_{i_0}) \rightrightarrows \prod_{(i_0,i_1)} F(U_{i_0} \times_U U_{i_1})\right)$ se identifica con $F(U)$.

Como consecuencia de esto, tenemos que

$$\check{H}^0(U, F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\} \in \mathcal{J}_U^0} H^0(\{U_i \to U\}, F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\} \in \mathcal{J}_U^0} F(U) = F(U)$$

de modo que el funtor sección Γ_U factoriza en $\mathcal{S}$ como

$$\Gamma_U = \check{H}^0(U, -) \circ i$$

El objetivo de la primera parte de este capítulo será probar que existe un funtor ${}^{ad}i : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ adjunto por la izquierda a $i : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{P}$ y estudiar sus propiedades.

Dado un prehaz F en T, llamaremos $F^\#$ al haz abeliano ${}^{ad}i(F)$, y llamaremos a $F^\#$ el haz asociado al prehaz F.

Observación 3.2. Como $\mathcal{S}$ es una subcategoría de $\mathcal{P}$, entonces la condición de que i y ${}^{ad}i$ sean adjuntos es equivalente a que para todo F en $\mathcal{P}$ exista un morfismo $F \to F^\#$ funtorial que tenga la propiedad universal para morfimos de F a haces abelianos. Es decir, todo morfismo $F \to G$, con G en $\mathcal{S}$, factoriza de forma única como $F \to F^\# \to G$.

Lema 3.3. *Existe un funtor* $\dagger\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *tal que para todo morfismo* $F \to G$ *de prehaces abelianos donde* G *es un haz, existe un único morfismo* $F^\dagger \to G$ *que hace factorizar* $F \to G$ *en* $F \to F^\dagger \to G$.
Además, $\dagger$ *es exacto por la izquierda.*

Demostración. Primero, considérese que dado un morfismo $V \to U$, se tiene un funtor J de la categoría $\mathcal{J}_U$ de recubrimientos de U a la categoría $\mathcal{J}_V$ de recubrimientos de V. Este funtor asigna $\{U_i \times_U V \to V\}$ a cada recubrimiento $\{U_i \to U\}$ de U, y dado un refinamiento $\{U'_j \to U\} \xrightarrow{f} \{U_i \to U\}$, asigna el refinamiento $\{U'_j \times_U V \to V\} \xrightarrow{J(f)} \{U_i \times_U V \to V\}$ definido de la forma obvia.

Dado un prehaz F en T, definimos

$$F^\dagger(U) = \check{H}^0(U, F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\}} H^0(\{U_i \to U\}, F)$$

para todo $U \in cat(T)$. Ahora, dado un morfismo $V \to U$, veamos que el funtor anterior induce un morfismo $F^\dagger(U) \to F^\dagger(V)$, dotando a $F^\dagger$ de estructura de prehaz abeliano.

En efecto, si consideramos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U_i \times_U V \arrow[d] & U_i \times_U U_j \times_U V \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] \\
U_i & U_i \times_U U_j \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

donde $U_i \times_U U_j \times_U V \cong U_i \times_U V \times_V U_j \times_U V$, entonces aplicando F y restringiéndonos al núcleo de los morfismos horizontales, se obtiene un morfismo $H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{U_i \times_U V \to V\}, F)$:

$$\begin{tikzcd}
F(U_i \times_U V) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F(U_i \times_U U_j \times_U V) \\
F(U_i) \arrow[u] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F(U_i \times_U U_j) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Para ver que estos morfismos pasan al límite, dado un refinamiento $f : \{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$ (que induce el refinamiento $J(f) : \{U'_j \times_U V \to V\} \to \{U_i \times_U V \to V\}$), basta con probar que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U'_j \arrow[d, "f_j"] & U'_j \times_U V \arrow[l] \arrow[d, "J(f)_j"] \\
U_{\epsilon(j)} & U_{\epsilon(j)} \times_U V \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, pero esto es evidente por cómo se define $J(f)_j$.

Por tanto, tenemos que se induce de forma natural un morfismo $F^\dagger(U) \to F^\dagger(V)$ y, así, $F^\dagger$ es un prehaz abeliano.

Adicionalmente, un morfismo de prehaces $u : F \to G$ induce también de forma natural un morfismo $u^\dagger : F^\dagger \to G^\dagger$, sin más que recordar que dado un refinamiento $f : \{U'_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$, el morfismo $H^0(f, F)$ es funtorial en F.

Esto nos permite definir para cada F en $\mathcal{P}$ el morfismo canónico $F \to F^\dagger$, funtorial en F, dado por:

$$F(U) = H^0(\{U \xrightarrow{id} U\}, F) \to \check{H}^0(U, F) = F^\dagger(U)$$

para todo $U \in cat(T)$.

En particular, si G es un haz abeliano, la Observación 3.1 implica que $G \to G^\dagger$ es un isomorfismo. Por lo tanto, dado un morfismo $F \to G$ en $\mathcal{P}$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F^\dagger \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & = & G^\dagger \end{array}$$

donde $F^\dagger \to G^\dagger$ es el morfismo inducido por $F \to G$, y los morfismos horizontales son los canónicos que acabamos de definir.

Concluimos así que el morfismo $F \to G$ desde un prehaz abeliano F a un haz abeliano G factoriza como $F \to F^\dagger \to G$. Para probar el Lema 3.3, falta ver que dicha factorización es única. Para ello, supongamos que $F \to G$ es el morfismo cero, y consideremos un recubrimiento $\{U_i \to U\}$ de U en T. Tenemos el (obvio) diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^0(\{U_i \to U\}, F) & \hookrightarrow & \prod F(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(U) \cong H^0(\{U_i \to U\}, G) & \hookrightarrow & \prod G(U_i) \end{array}$$

Que la flecha vertical derecha sea el morfismo cero implica por conmutatividad que $H^0(\{U_i \to U\}, F) \to G(U)$ también lo es. Por la propiedad universal de $F^\dagger(U) = \check{H}^0(U, F)$, se tiene que $F^\dagger(U) \to G(U)$ debe ser el morfismo cero. Como se ha probado para un U arbitrario, entonces el resultado se sigue para $F^\dagger \to G$.

La exactitud por la izquierda de $\dagger$ se sigue de lo probado en el Teorema 2.13. $\square$

Teorema 3.4. *Existe un funtor $\# : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ adjunto por la izquierda al funtor $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$.*

Para probar el Teorema 3.4, debemos mostrar que, en caso de que $F^\dagger$ no sea un haz, entonces $(F^\dagger)^\dagger$ es un haz. A continuación, veremos que esto es cierto.

Definición 3.5. Sea F un prehaz abeliano en T. Decimos que F satisface la Condición (+) si

$$F(U) \to \prod_i F(U_i) \tag{+}$$

es inyectivo para todo recubrimiento $\{U_i \to U\}$.

Proposición 3.6.

i) Para cada prehaz abeliano F, el prehaz $F^\dagger$ satisface $(+)$.

ii) Si F satisface $(+)$, entonces $F \to F^\dagger$ es un monomorfismo y $F^\dagger$ es un haz.

Demostración.

i) Sea $\{U_i \to U\}$ un recubrimiento en T, y sea

$$\bar{s} \in \ker(F^\dagger(U) \to \prod_i F^\dagger(U_i))$$

Tenemos que demostrar que $\bar{s} = 0$.

Como $\bar{s} \in F^\dagger(U) = \check{H}^0(U, F)$, consideramos un recubrimiento $\{V_j \to U\}$ y un representante s de $\bar{s}$ en el elemento $H^0(\{V_j \to U\}, F)$ del sistema directo. Es decir, el morfismo canónico $H^0(\{V_j \to U\}, F) \to \check{H}^0(U, F)$ es tal que $s \mapsto \bar{s}$.

Si ahora denotamos como s_i la imagen de s por el homomorfismo

$$H^0(\{V_j \to U\}, F) \to H^0(\{V_j \times_U U_i \to U_i\}, F)$$

entonces s_i representa al elemento $(\bar{s})_i = F^\dagger(\varphi_i)(\bar{s})$, siendo $\varphi : U_i \to U$, puesto que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
F^\dagger(U) & \longrightarrow & F^\dagger(U_i) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^0(\{V_j \to U\}, F) & \longrightarrow & H^0(\{V_j \times_U U_i \to U_i\}, F)
\end{array}$$

es conmutativo por la propiedad universal de $F^\dagger(U)$.

Por hipótesis, tenemos que $(\bar{s})_i = 0$. Hemos visto ya que $\check{H}^0(U, F)$ puede verse como un límite directo sobre un conjunto dirigido, de modo que se puede encontrar un refinamiento

$$f_i : \{W_{il} \to U_i\} \to \{V_j \times_U U_i \to U_i\}$$

tal que $H^0(f_i, F)(s_i) = 0$. Por composición de los recubrimientos $\{W_{il} \to U_i\}$ y $\{U_i \to U\}$, se obtiene el recubrimiento $\{W_{il} \to U\}$. Además, los f_i inducen de forma natural un refinamiento

$$f : \{W_{il} \to U\} \to \{V_j \to U\}$$

Pero por construcción tenemos que $H^0(f, F)(s) = 0$, pues

$$\begin{array}{ccc} H^0(\{V_j \times_U U_i \to U_i\}, F) & \xrightarrow{H^0(f_i,F)} & H^0(\{W_{il} \to U_i\}, F) \\ \uparrow & & \| \\ H^0(\{V_j \to U\}, F) & \xrightarrow{H^0(f,F)} & H^0(\{W_{il} \to U\}, F) \end{array}$$

Por lo tanto, puesto que 0 es otro representante de $\bar{s}$, concluimos que $\bar{s} = 0$.

ii) Sea F un prehaz que satisface (+). Como primer paso, veremos que el morfismo canónico

$$H^0(\{U_i \to U\}, F) \to \check{H}^0(U, F)$$

es inyectivo para todo recubrimiento $\{U_i \to U\}$. Probado esto, se tendría que, en particular, $F(U) = H^0(\{U \xrightarrow{id} U\}, F) \to \check{H}^0(U, F)$ es inyectivo, luego $F \to F^\dagger$ sería un monomorfismo.

Como hemos visto que $\check{H}^0(U, F)$ puede describirse como un límite directo sobre un conjunto dirigido, basta probar que el homomorfismo

$$H^0(f, F) : H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{V_j \to U\}, F)$$

es inyectivo, para un refinamiento $f : \{V_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$.

Sea ahora el recubrimiento $\{V_j \times_U U_i \to U\}$ obtenido como composición de $\{V_j \times_U U_i \to U_i\}$ (obtenido a partir del axioma T1)) y $\{U_i \to U\}$. Consideramos los refinamientos:

$$\{V_j \times_U U_i \to U\} \xrightarrow{pr_2} \{U_i \to U\}$$

y

$$\{V_j \times_U U_i \to U\} \xrightarrow{pr_1} \{V_j \to U\} \xrightarrow{f} \{U_i \to U\}$$

Por el Lema 2.12, sabemos que los homomorfismos inducidos coinciden:

$$H^0(pr_2, F) = H^0(f \circ pr_1, F) = H^0(pr_1, F) \circ H^0(f, F)$$

Por lo tanto, para ver que $H^0(f, F)$ es inyectivo basta probar que $H^0(pr_2, F)$ lo es. Ya hemos visto que $H^0(pr_2, F)$ se obtiene a partir del homomorfismo

$$\prod_i F(U_i) \xrightarrow{F(pr_2)} \prod_{j,i} F(V_j \times_U U_i)$$

restringiéndonos al núcleo, $H^0(\{U_i \to U\}, F)$. Fijado i, se tiene un recubrimiento $\{V_j \times_U U_i \to U_i\}_j$ y, como F satisface (+), entonces $F(U_i) \to \prod_j F(V_j \times_U U_i)$ es inyectivo. Ahora bien, como $\prod_i$ es exacto en $\mathcal{A}b$, entonces tenemos que $\prod_i F(U_i) \xrightarrow{F(pr_2)} \prod_{j,i} F(V_j \times_U U_i)$ también es inyectivo.

Veamos ahora que $F^\dagger$ es un haz, es decir, que el diagrama

$$F^\dagger(U) \to \prod_i F^\dagger(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F^\dagger(U_i \times_U U_j)$$

es un igualador (o, equivalentemente en $\mathcal{A}b$, exacto, considerando la resta de las flechas dobles) para todo recubrimiento $\{U_i \to U\}$ en $cov(T)$. Puesto que $F^\dagger$ satisface (+) por lo visto en i), $F^\dagger(U) \to \prod_i F^\dagger(U_i)$ es inyectiva. Falta comprobar que, dado un elemento

$$\bar{s} \in \ker\Big(\prod_i F^\dagger(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F^\dagger(U_i \times_U U_j)\Big),$$

dicho elemento tiene un antecedente $\bar{s}'$ en $F^\dagger(U)$.

Sea $\bar{s}_i \in F^\dagger(U_i)$ la i-ésima componente de $\bar{s}$. Para cada i, escogemos un recubrimiento $\{V_{i\nu} \to U_i\}$ y un representante $s_i \in H^0(\{V_{i\nu} \to U_i\}, F)$ de $\bar{s}_i$. Denotemos ahora como s^1_{ij} a la imagen de s_i por el homomorfismo

$$H^0(\{V_{i\nu} \to U_i\}, F) \to H^0(\{V_{i\nu} \times_U U_j \to U_i \times_U U_j\}, F)$$

y, análogamente, s^2_{ij} a la imagen de s_j por el homomorfismo

$$H^0(\{V_{j\mu} \to U_j\}, F) \to H^0(\{U_i \times_U V_{j\mu} \to U_i \times_U U_j\}, F).$$

Como ya hemos visto en i), los elementos en $F^\dagger(U_i \times_U U_j)$ representados por s^1_{ij} y s^2_{ij} son, respectivamente, las imágenes de $\bar{s}_i$ por $F^\dagger(U_i) \to F^\dagger(U_i \times_U U_j)$ y de $\bar{s}_j$ por $F^\dagger(U_j) \to F^\dagger(U_i \times_U U_j)$. Por hipótesis, esas imágenes son la misma, pues se debe anular cada componente (i,j) de $\prod_{i,j} F^\dagger(U_i \times_U U_j)$.

Dado que los homomorfismos canónicos $H^0(\{V_{i\nu} \times_U U_j \to U_i \times_U U_j\}, F) \to F^\dagger(U_i \times_U U_j)$ son inyectivos, s^1_{ij} y s^2_{ij} son tales que coinciden en cualquier elemento del sistema directo para un refinamiento común de $\{V_{i\nu} \times_U U_j \to U_i \times_U U_j\}$ y $\{U_i \times_U V_{j\mu} \to U_i \times_U U_j\}$, y por tanto en particular para $\{V_{i\nu} \times_U V_{j\mu} \to U_i \times_U U_j\}$.

Así, tenemos que s^1_{ij} y s^2_{ij} coinciden en $H^0(\{V_{i\nu} \times_U V_{j\mu} \to U_i \times_U U_j\}, F) \subset \prod_{\nu,\mu} F(V_{i\nu} \times_U V_{j\mu})$. Entonces, podemos definir

$$s' := (s_i)_i \in \ker\Big(\prod_{i,\nu} F(V_{i\nu}) \rightrightarrows \prod_{i,j,\nu,\mu} F(V_{i\nu} \times_U V_{j\mu})\Big) = H^0(\{V_{i\nu} \to U\}, F)$$

que es tal que, si $\overline{s'}$ denota la imagen de s' en $F^\dagger(U)$, $\overline{s'} \mapsto \bar{s}$ por el homomorfismo $F^\dagger(U) \to \prod_i F^\dagger(U_i)$.

□

Corolario 3.7. *Sea F un prehaz abeliano en T. Son equivalentes:*

i) F es un haz.

ii) Para todo recubrimiento $\{U_i \to U\}$ en T existe un refinamiento $\{U'_j \to U\}$ tal que el diagrama

$$F(U) \to \prod_{j_0} F(U'_{j_0}) \rightrightarrows \prod_{j_0,j_1} F(U'_{j_0} \times_U U'_{j_1})$$

es un igualador.

Demostración.
i) $\Longrightarrow$ ii) Es trivial.
ii) $\Longrightarrow$ i) Si $\mathcal{J}_U$ es la categoría de recubrimientos de U, sea $\mathcal{J}'_U$ la subcategoría de $\mathcal{J}_U$ tal que sus recubrimientos $\{U'_j \to U\}$ hacen que los diagramas

$$F(U) \to \prod_{j_0} F(U'_{j_0}) \rightrightarrows \prod_{j_0,j_1} F(U'_{j_0} \times_U U'_{j_1})$$

sean igualadores. $\mathcal{J}'_U$ es, por definición, una subcategoría plena de $\mathcal{J}_U$ y, por hipótesis, la categoría dual $(\mathcal{J}'_U)^0$ es una subcategoría final de $\mathcal{J}^0_U$. Entonces, por la Proposición A.20:

$$F^\dagger(U) = \varinjlim_{\mathcal{J}^0_U} H^0(\{U_i \to U\}, F) = \varinjlim_{(\mathcal{J}'_U)^0} H^0(\{U'_j \to U\}, F) \xrightarrow{\cong} F(U)$$

y así el morfismo $F \to F^\dagger$ es un isomorfismo, luego en particular un monomorfismo. Por lo visto en la demostración del resultado anterior, esto permite razonar que F es un haz. $\square$

Teorema 3.8.

i) La categoría $\mathcal{S}$ de haces abelianos en T es abeliana, satisface el axioma Ab5) y tiene generadores.

ii) El funtor $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ es exacto por la izquierda, y el funtor $\# =^{ad} i : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ es exacto.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathcal{S}$ es una categoría aditiva. Por ser $\mathcal{S}$ una categoría plena de $\mathcal{P}$, que es aditiva, tenemos que para $F, G \in \mathcal{S}$ el conjunto $Hom(F,G)$ tiene estructura de grupo abeliano, en la que la composición de morfismos es bilinear. Además, el prehaz dado por $0(U) = 0$ para todo U en T es trivialmente un haz y claramente un objeto inicial y final en la cateogoría $\mathcal{S}$. Falta ver que el producto y suma de dos haces existe, pero lo veremos más adelante para productos y sumas arbitrarias.

Sea $F \to G$ un morfismo en $\mathcal{S}$. Para probar Ab1), debemos ver que tiene núcleo y conúcleo.

Consideramos, primero, el prehaz K, núcleo de $F \to G$, que por la Proposición 2.1 está dado por $K(U) = \ker(F(U) \to G(U))$. Se tiene que K es un haz y que junto con el morfismo $K \to F$ forma el núcleo de $F \to G$ en $\mathcal{S}$. En efecto, pues dado el recubrimiento $\{U_i \to U\}$ sea el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ K(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i K(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{i,j} K(U_i \times_U U_j) \arrow[d] \\ F(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i F(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j) \arrow[d] \\ G(U) \arrow[r] & \prod_i G(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} G(U_i \times_U U_j) \end{tikzcd}$$

En este diagrama, las columnas son exactas por exactitud del funtor $\prod$ en $\mathcal{A}b$, y la segunda y tercera fila también lo son, puesto que F y G son haces. Teniendo esto en cuenta, se sigue por el Lema de la serpiente [9, Theorem 6.5, page 174] que la primera fila es exacta. Como hemos escogido un recubrimiento $\{U_i \to U\}$ arbitrario, K es un haz.

K es el núcleo de $F \to G$ en $\mathcal{P}$. Por tanto, podemos expresar esto de forma equivalente diciendo que para todo X en $\mathcal{P}$, la sucesión:

$$0 \to Hom(X, K) \to Hom(X, F) \to Hom(X, G)$$

es exacta. Esto se tiene, en particular, si X es un haz, pero como $\mathcal{S}$ es una categoría plena de $\mathcal{P}$, $Hom_{\mathcal{S}}(P, P') = Hom_{\mathcal{P}}(P, P')$ para P, P' en $\mathcal{S}$ y así la sucesión es exacta para morfismos de haces, de modo que K es el núcleo de $F \to G$ en $\mathcal{S}$.

Consideramos ahora un morfismo $F \to G$ de prehaces con conúcleo C en $\mathcal{P}$. Veremos que $C^\#$ es el conúcleo del morfismo de haces $F^\# \to G^\#$ inducido por $F \to G$. Es decir, el conúcleo de un morfismo $F \to G$ en $\mathcal{S}$ es el haz asociado al prehaz dado por $C(U) = \operatorname{coker}(F(U) \to G(U))$, ya que $F^\# = F$, $G^\# = G$.

Para verlo, consideramos la siguiente sucesión exacta para cada X en $\mathcal{S}$

$$0 \to Hom(C, X) \to Hom(G, X) \to Hom(F, X)$$

Como $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ y $\# : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ son funtores adjuntos, esta sucesión exacta coincide con

$$0 \to Hom(C^\#, X) \to Hom(G^\#, X) \to Hom(F^\#, X)$$

Por lo tanto, $C^\#$ es el conúcleo de $F^\# \to G^\#$ en $\mathcal{S}$ (por definición de conúcleo).

Un razonamiento similar se puede ver para la imagen I de un morfismo $F \to G$ de prehaces, dada por $I(U) = \mathrm{im}(F(U) \to G(U))$. Como $I = \ker(\mathrm{coker}(F \to G)) = \ker(G \to C)$, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathcal{P}$:

$$0 \to I \to G \to C \to 0$$

Como el funtor $i \circ \# = \nmid \circ \nmid \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es exacto por la izquierda, tenemos que la sucesión

$$0 \to I^\# \to G^\# \to C^\#$$

es exacta en $\mathcal{P}$. Por lo tanto, considerando los morfismos en $\mathcal{P}$,

$$I^\# \cong \ker(G^\# \to C^\#)$$

Pero ya hemos visto antes que el núcleo de un morfismo $F \to G$ en $\mathcal{S}$ es precisamente el núcleo del morfismo $F \to G$ considerado en $\mathcal{P}$. Por tanto, el haz asociado $I^\#$ es el núcleo de $G^\# \to C^\#$ en $\mathcal{S}$ y, así, la imagen de $F^\# \to G^\#$ en $\mathcal{S}$.

De nuevo, se puede repetir el razonamiento para ver que si J es la coimagen de $F \to G$ en $\mathcal{P}$, entonces $J^\#$ es la coimagen de $F^\# \to G^\#$ en $\mathcal{S}$.

Para ver Ab2), tenemos que ver que para un morfismo $u : F \to G$ en $\mathcal{S}$, el morfismo unívocamente determinado (Apéndice, Definición A.1) $\bar{u} : \mathrm{coim}(u) \to \mathrm{im}(u)$ es un isomorfismo. Considerando el morfismo $F \to G$ en $\mathcal{P}$, por ser $\mathcal{P}$ abeliana, tenemos el isomorfismo canónico $\bar{v} : J \to I$, donde J e I son el conúcleo y núcleo de u en $\mathcal{P}$, respectivamente. Entonces u factoriza en $\mathcal{P}$ como:

$$F \to J \xrightarrow{\bar{v}} I \to G$$

Ahora bien, ya hemos visto que $J^\#$ y $I^\#$ son el conúcleo y núcleo de $u : F \to G$ en $\mathcal{S}$, respectivamente. Además, F y G son haces, luego $F \cong F^\#$ y $G \cong G^\#$. Por tanto, aplicando el funtor $\#$ a la factorización de u en $\mathcal{P}$, obtenemos:

$$F \to J^\# \xrightarrow{\bar{v}^\#} I^\# \to G$$

En esta factorización, $\bar{v}^\#$ es un isomorfismo (por serlo $\bar{v}$), luego tomando $u = \bar{v}^\#$ hemos terminado.

A continuación, veremos que $\mathcal{S}$ tiene productos y sumas arbitrarios (luego, en particular, satisface Ab3)).

Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia de haces abelianos en T. Definimos el prehaz abeliano $\prod_i F_i$, que asigna $(\prod_i F_i)(U) = \prod_i F_i(U)$ a cada U de T. Por la exactitud del producto $\prod_i$ en $\mathcal{A}b$, es claro que $\prod_i F_i$ es un haz. Basta dotarlo de las proyecciones canónicas $\prod_i F_i \to F_i$ para ver que $\prod_i F_i$ es el producto de los haces F_i en $\mathcal{P}$. Como además es un haz y $\mathcal{S}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{P}$, es también el producto de los haces F_i en $\mathcal{S}$.

En cuanto a la suma, consideramos la misma familia $(F_i)_{i\in I}$ de haces abelianos en T, y denotamos por F su suma en $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ satisface Ab3), de modo que su existencia está asegurada). Entonces, tenemos que el homomorfismo en $\mathcal{A}b$

$$Hom(F, X) \to \prod_i Hom(F_i, X)$$

inducido por las inyecciones canónicas $F_i \to F$ es biyectivo, i.e, un isomorfismo en $\mathcal{A}b$.

Si ahora consideramos un X en $\mathcal{S}$, la propiedad universal de $F \to F^\#$ implica que existe una biyección

$$Hom(F^\#, X) \to \prod_i Hom(F_i, X)$$

como consecuencia de la biyección $Hom(F, X) \cong Hom(F^\#, X)$. Por lo tanto, los morfismos $F_i \to F^\#$, obtenidos por composición con $F \to F^\#$, son las inyecciones canónicas en $F^\#$, la suma directa de los F_i en $\mathcal{S}$.

Hasta el momento, hemos visto que $\mathcal{S}$ es una categoría abeliana que satisface el axioma Ab3) y tiene productos arbitrarios. Veamos entonces que también satisface el axioma Ab5) y que tiene generadores.

Para ver Ab5), consideramos un haz abeliano C en T y una familia $(A_i)_{i\in I}$ dirigida de subhaces abelianos de C (es decir, que para todo $i \in I$ y para todo U en T, $A_i(U) \subset C(U)$, de forma compatible con los morfismos de $cat(T)$). Dados los morfismos $v_i : A_i \to B$ a un haz abeliano fijado B, tales que v_i está inducido por v_j si $A_i \subset A_j$, debemos probar que existe una extensión

$$v : A \to B$$

que induzca los morfismos v_i, donde A es la imagen en $\mathcal{S}$ del morfismo $\bigoplus_i A_i \to C$ (siendo $\bigoplus_i A_i$ el haz suma directa).

Definimos $\bar{A}$ de forma que $\bar{A}(U) = \sum_i A_i(U) = \cup_i A_i(U)$. Es claro que $\bar{A}$ es un prehaz abeliano tal que $\bar{A}(U) \subset C(U)$ para todo U en T. Como C es un haz, la inclusión $\bar{A} \hookrightarrow C$ factoriza a través de $\bar{A}^\#$ en $\bar{A} \to \bar{A}^\# \to C$. Como veremos más adelante, el funtor $\#$ es exacto por la izquierda, luego conserva monomorfismos, y así tenemos $\bar{A}^\# \hookrightarrow C$. Es claro que $\bar{A}^\#$ es la imagen en $\mathcal{S}$ de $\bigoplus_i A_i \to C$.

En $\mathcal{P}$ podemos definir a partir de los morfismos v_i un morfismo $\bar{A} \to B$, pero como B es un haz, este morfismo factoriza en

$$\bar{A} \to \bar{A}^\# \xrightarrow{\bar{v}^\#} B$$

y, dada la identificación que hemos hecho ($\bar{A}^\# = \mathrm{im}(\bigoplus_i A_i \to C)$), podemos concluir que $v = \bar{v}^\#$ es la extensión buscada.

Para ver que $\mathcal{S}$ tiene generadores, recordemos que ya hemos visto que $\mathcal{P}$ los tiene, y dado explícitamente una familia de generadores (Proposición 2.1 y Observación 2.3, respectivamente).

Tomando la familia de prehaces abelianos $(Z_U)_{U \in T}$, generadores de $\mathcal{P}$, construimos una familia de generadores de $\mathcal{S}$ aplicando el funtor $\#$. Por ser $\#$ adjunto por la izquierda de $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$:

$$Hom(Z_U^{\#}, F) \cong Hom(Z_U, F) \cong F(U)$$

para todo F en $\mathcal{S}$, de modo que la familia $(Z_U^{\#})_{U \in T}$ es una familia de generadores en $\mathcal{S}$.

Por último, veamos que $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ es exacto por la izquierda, y que $\# = {}^{ad}i : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ es exacto.

$i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ es exacto por la izquierda porque, como hemos visto, el prehaz núcleo K de un morfismo de haces es, de hecho, un haz. Entonces, si consideramos una sucesión exacta

$$0 \to K \to F \to G$$

en $\mathcal{S}$, considerando esta misma sucesión en $\mathcal{P}$ se sigue teniendo la exactitud.

Por su parte, el funtor $\# : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ es adjunto por la izquierda al funtor $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$, luego es exacto por la derecha, pues dada una sucesión $F \to G \to H \to 0$ exacta en $\mathcal{P}$ y un X en $\mathcal{S}$, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(H, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & Hom(G, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & Hom(F, X) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & Hom(H^{\#}, X) \arrow[r] & Hom(G^{\#}, X) \arrow[r] & Hom(F^{\#}, X)
\end{tikzcd}$$

En el diagrama, la primera fila es exacta, pues $Hom(-, X)$ es exacto por la izquierda. Por lo tanto, la segunda fila también es exacta y así se tiene que la sucesión

$$F^{\#} \to G^{\#} \to H^{\#} \to 0$$

es exacta en $\mathcal{S}$.

Por otro lado, ya habíamos visto que $i \circ \# = \nmid \circ \nmid : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es exacto por la izquierda. Además, i es un funtor pleno y fiel, por ser $\mathcal{S}$ una subcategoría plena de $\mathcal{P}$. Consideramos entonces una sucesión $0 \to F \to G \to H$. Queremos ver que la sucesión

$$0 \to F^{\#} \to G^{\#} \to H^{\#}$$

es exacta en $\mathcal{S}$. Para ello, debemos probar que $F^{\#} \to G^{\#}$ es el núcleo de $G^{\#} \to H^{\#}$, viendo que se tiene la propiedad universal del núcleo. Sea entonces un haz L y un morfismo de haces $L \to G^{\#}$ tal que $L \to G^{\#} \to H^{\#} = 0$, entonces debe factorizar de forma única a través de $F^{\#}$ por un morfismo $u : L \to F^{\#}$, haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F^{\#} \arrow[r] & G^{\#} \arrow[r] & H^{\#} \\
L \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que la sucesión $0 \to i(F^\#) \to i(G^\#) \to i(H^\#)$ (la sucesión anterior, pensada en $\mathcal{P}$) es exacta en $\mathcal{P}$, es decir, el morfismo de prehaces $i(F^\#) \to i(G^\#)$ es el núcleo de $i(G^\#) \to i(H^\#)$. Entonces, por la propiedad universal del núcleo, si el prehaz $i(L)$ está en las condiciones anteriores, existe un único $g : i(L) \to i(F^\#)$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} i(F^\#) \arrow[r] & i(G^\#) \arrow[r] & i(H^\#) \\ i(L) \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Por ser i pleno, existe un morfismo $f : L \to F^\#$ en $\mathcal{S}$ tal que $i(f) = g$. Además, por ser i fiel, este morfismo f es único (por ser i pleno y fiel, se establece una biyección $Hom_{\mathcal{S}}(L, F^\#) \to Hom_{\mathcal{P}}(i(L), i(F^\#))$ dada por $f \mapsto i(f)$). Finalmente, f hace conmutar el diagrama en $\mathcal{S}$, pues $f \mapsto i(f)$ es una aplicación inyectiva, luego si el diagrama conmuta tras aplicar i (en $\mathcal{P}$), debe conmutar antes. Por tanto, $u = f$ nos da el resultado buscado.

Como $\# : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$ es exacto por la derecha y exacto por la izquierda, es un funtor exacto. $\square$

Como consecuencia de este Teorema, introducimos dos corolarios completamente análogos a resultados ya vistos para la categoría $\mathcal{P}$ en el Capítulo 2.

Corolario 3.9. *La categoría $\mathcal{S}$ de haces abelianos en T tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Aplicación directa del Teorema A.8. $\square$

Corolario 3.10. *Sea $\mathcal{I}$ una categoría y $\mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{S})$ la categoría de funtores $F : \mathcal{I} \to \mathcal{S}$.*

i) Para cada funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{S}$ existe el límite directo $\varinjlim F$, y es igual al haz asociado al prehaz dado por $U \mapsto \varinjlim F_i(U)$ (Proposición 2.4). Además, el funtor $\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ es exacto por la derecha.

ii) Si la categoría $\mathcal{I}$ es pseudodirigida, entonces $\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ es exacto.

Demostración.

i) Tanto la existencia del límite directo $\varinjlim F$ como la exactitud por la derecha de $\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ se siguen directamente de la Proposición A.15. La conmutatividad de $\varinjlim$ con $\#$ viene dada por la Proposición A.16.

ii) Aplicación directa de la Proposición A.18.

$\square$

3.1. Cohomología de Haces Abelianos

El Teorema 3.8 y el Corolario 3.9 aseguran que la categoría de haces abelianos $\mathcal{S}$ es abeliana y tiene suficientes inyectivos. Por tanto, igual que se afirmaba al iniciar la Sección 2.1, dado un funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{C}'$ exacto por la izquierda, existe el funtor derivado $(\mathcal{R}^q\mathcal{F})_{q\geq 0}$, siendo $\mathcal{C}'$ una categoría abeliana cualquiera.

Recuperamos también la definición del funtor sección en U, para cada U en T, pero en esta ocasión considerado en la categoría de haces abelianos. Para U en T, este funtor

$$\Gamma_U : \mathcal{S} \to \mathcal{A}b$$

es tal que $\Gamma_U(F) = F(U)$, para cada F en $\mathcal{S}$.

A diferencia de como ocurría en la categoría de prehaces abelianos, este funtor ya no es exacto, sino que es exacto por la izquierda, como composición de los funtores $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ (exacto por la izquierda, como se ha visto en el Teorema 3.8) y $\Gamma_U : \mathcal{P} \to \mathcal{A}b$ (exacto, por la Proposición 2.1). También se puede ver como composición de los funtores $i : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ y $\check{H}^0(U, -) : \mathcal{P} \to \mathcal{A}b$ (Observación 3.1), ambos exactos por la izquierda.

Definición 3.11. Sea F un haz abeliano en T. Se define el **q-ésimo grupo de cohomología de U con valores en F** como

$$H^q(U, F) = \mathcal{R}^q\Gamma_U(F)$$

Ejemplo 3.12. Sea G un grupo y T_G la topología canónica en la categoría de G-conjuntos por la izquierda. En esta categoría, los objetos son obviamente los G-conjuntos, y los morfismos son las aplicaciones G-equivariantes, es decir, aquellas aplicaciones f entre G-conjuntos X e Y tales que

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x),\ \forall g \in G,\ \forall x \in X$$

Esta categoría tiene productos fibrados: dados los morfismos $X \xrightarrow{f} Z$ e $Y \xrightarrow{g} Z$, $X \times_Z Y$ es el conjunto de pares $(x, y) \in X \times Y$ tales que $f(x) = g(y)$.

Razonando como en el Ejemplo 1.6.3, puede comprobarse que en esta categoría, una familia $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}$ es universalmente una familia de epimorfismos efectivos si y sólo si $U = \cup_i \varphi(U_i)$.

Es fácil ver que hay una equivalencia de categorías entre la categoría de G-módulos por la izquierda y la categoría de haces abelianos en T_G. Esta equivalencia viene dada por los funtores cuasi-inversos $A \mapsto Hom_G(\cdot, A)$ y $F \mapsto F(G)$.

Consideremos ahora un G-conjunto unitario e, con la única estructura de G-conjunto posible. Por la equivalencia anterior, dado un G-módulo por la izquierda A, tenemos que el funtor $Hom_G(-, A)$ es un haz abeliano, de modo que aplicándole el funtor sección en e obtenemos

$$\Gamma_e(Hom_G(-, A)) = Hom_G(e, A) = A^G$$

donde A^G denota el grupo de elementos G-invariantes de A, es decir,

$$A^G = \{a \in A : ga = a \text{ para todo } g \in G \text{ y todo } a \in A\}$$

ya que un morfismo G-equivariante $e \xrightarrow{f} A$ satisface que $a = f(e) = f(g \cdot e) = g \cdot f(e) = g \cdot a = a$.

Utilizando la equivalencia de categorías anterior, podemos identificar al funtor sección Γ_e con el funtor $(-)^G$, tal que $A \mapsto A^G$. Este funtor, dada la identificación que acaba de hacerse, es exacto por la izquierda.

Se definen, para un G-módulo A, **los grupos de cohomología de G con coeficientes en** A, y se denotan por $H^*(G;A)$, como los funtores derivados por la derecha $\mathcal{R}^*(-)^G(A)$ (véase [12, Definition 6.1.2, page 161]), considerando $(-)^G$ de la categoría de G-módulos en la categoría de grupos abelianos.

Así, si para el q-ésimo grupo de cohomología de e con valores en $Hom_G(-,A)$, se tiene que:

$$H^q(e, Hom_G(-,A)) = H^q(G;A)$$

Ejemplo 3.13 (Cohomología de André-Quillen)**.**

Para ver la definición de la cohomología de André-Quillen, es necesario introducir previamente algunos conceptos:

Definición 3.13.1. Sea A un anillo y B una A-álgebra. Sea $\mathcal{C}$ la categoría de A-álgebras sobre B (ver Ejemplo 1.6.3). Si C es un objeto de $\mathcal{C}$, un elemento de $cov(\mathcal{C})$ se define como un (único) $\{D \xrightarrow{f} C\}$ tal que f es universalmente un epimorfismo efectivo en $\mathcal{C}$, es decir, tal que f es un homomorfismo sobreyectivo de A-álgebras sobre B. Tenemos así una topología de Grothendieck, ya que sobreyectivo es estable por cambios de base y por composición.

Un haz de B-módulos en esta topología será un funtor contravariante F tal que para todo $D \to C$ sobreyectivo, el diagrama

$$F(C) \to F(D) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} F(D \times_C D)$$

es un igualador en la categoría de B-módulos, donde los morfismos p_1 y p_2 están inducidos por las proyecciones canónicas $D \times_C D \to D$. Como la categoría de B-módulos es abeliana, esto es equivalente a que la sucesión

$$0 \to F(C) \to F(D) \xrightarrow{p_1 - p_2} F(D \times_C D)$$

sea exacta.

Definición 3.13.2. Sea C un A-álgebra sobre B y M un B-módulo. Definimos una A-derivación de C en M como un homomorfismo de A-módulos $d : C \to M$ que verifica $d(xy) = d(x)y + xd(y)$. El conjunto de tales A-derivaciones tiene estructura de B-módulo (inducida por la estructura de B-módulo de M) y se denotará como $Der_A(C,M)$.

Proposición 3.13.3. *$Der_A(-, M)$ es un haz de $\mathcal{C}$ en la categoría de B-módulos.*

Demostración. Sea $f : D \to C$ un recubrimiento (i.e., un homomorfismo sobreyectivo de A-álgebras sobre B). Tenemos que demostrar que la sucesión de homomorfismos de B-módulos

$$0 \to Der_A(C, M) \to Der_A(D, M) \xrightarrow{p_1 - p_2} Der_A(D \times_C D, M)$$

es exacta.

La inyectividad de $Der_A(C, M) \to Der_A(D, M)$ se debe a que f es en particular un epimorfismo en la categoría de A-módulos (por ser sobreyectivo), ya que las A-derivaciones son en particular homomorfismos de A-módulos.

La composición de los dos homomorfismos consecutivos es claramente cero.

Finalmente, sea $d \in Der_A(D, M)$ tal que $d \circ pr_1 = d \circ pr_2$ donde $pr_i : D \times_C D \to D$ son las proyecciones canónicas. Sea $d' \in Der_A(C, M)$ definida por $d'(c) = d(x)$, con $x \in f^{-1}(c)$. Este x existe para todo $c \in C$ por ser f sobreyectiva, y $d(x)$ no depende de la elección de x porque $d \circ pr_1 = d \circ pr_2$. Resulta fácil ver que d' es una derivación, ya que d lo es. □

Definición 3.13.4. Se define el q-ésimo módulo de cohomología de André-Quillen de la A-álgebra B y el B-módulo M como

$$H^q(A, B, M) := H^q(B, Der_A(-, M)) \quad (:= \mathcal{R}^q\Gamma_B(Der_A(-, M)))$$

Observación 3.13.5. Esta definición coincide con la usual dada por André [1] y Quillen [8]. La demostración puede verse en [7, Chapter II, §5].

Apéndice

A. Definiciones y resultados auxiliares

En este capítulo se recogen resultados auxiliares utilizados a lo largo del documento que se alejan del foco central que se sigue. En general, nos contentaremos con dar simplemente una referencia para la demostración, aunque en algún caso incluiremos la demostración por necesitarla explícitamente en el texto principal.

Suponemos conocidas las primeras definiciones de teoría de teoría de categorías y de álgebra homológica. Si no se conociesen dichas definiciones, pueden consultarse en [11, Chapter 0, §1, pages 1-4] (o, para un tratamiento más completo, en [10, Sections 1.2, 5.1, 5.5]), y en los primeros capítulos de [9], respectivamente.

Definición A.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $u : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Se definen la **imagen** y **coimagen** de u como

$$\mathrm{im}(u) = \ker(\mathrm{coker}(u)) \quad \mathrm{coim}(u) = \mathrm{coker}(\ker(u))$$

Si, dado el morfismo u, existen su imagen y coimagen, entonces existe un morfismo unívocamente determinado:

$$\bar{u} : \mathrm{coim}(u) \to \mathrm{im}(u)$$

Ahora bien, por definición de $\mathrm{im}(u)$, se tiene que $u : A \to B$ factoriza como $A \to \mathrm{im}(u) \to B$, puesto que $\mathrm{im}(u) = \ker(B \to \mathrm{coker}(u))$ y $A \to B \to \mathrm{coker}(u)$ es el morfismo 0, también por definición. Por otro lado, $\ker(u) \to A \to \mathrm{im}(u) \to B$ también es el morfismo 0, y sabemos que $\mathrm{im}(u) \to B$ es un monomorfismo, de modo que (por ser $\mathcal{C}$ aditiva) $\ker(u) \to A \to \mathrm{im}(u)$ también se anula. Así, por la propiedad universal de $\mathrm{coim}(u) = \mathrm{coker}(\ker(u) \to A)$, $A \to \mathrm{im}(u)$ factoriza como $A \to \mathrm{coim}(u) \to \mathrm{im}(u)$. Se tiene así que el morfismo $u : A \to B$ coincide con la composición

$$A \to \mathrm{coim}(u) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{im}(u) \to B$$

Definición A.2. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice **abeliana** si es aditiva y satisface las siguientes propiedades:

Ab1) Todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene núcleo y conúcleo.

Ab2) Para todo morfismo u en $\mathcal{C}$ el morfismo canónico $\bar{u} : \mathrm{coim}(u) \to \mathrm{im}(u)$ es un isomorfismo.

Adicionalmente, una categoría abeliana $\mathcal{C}$ puede satisfacer otras propiedades, que resultan de utilidad a la hora de determinar si tienen suficientes objetos inyectivos. Estas son:

Ab3) Para toda familia $(A_i)_{i\in I}$ de objetos A_i de $\mathcal{C}$, la suma directa de los A_i existe.

Ab5) Si Ab3) se satisface y para cada familia dirigida de subobjetos A_i de $A \in \mathcal{C}$ y cada sistema de morfismos $u_i : A_i \to B$, con B fijado para todo u_i, tales que u_i es inducido por u_j si $A_i \subset A_j$, entonces existe un único morfismo $u : \sum_i A_i \to B$, donde $\sum_i A_i$ es la imagen de $\bigoplus A_i \to A$.

Definición A.3. Una sucesión $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ se dice exacta si $\ker(v) = \mathrm{im}(u)$.

Proposición A.4. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías, con $\mathcal{C}'$ abeliana. Entonces la categoría $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ de funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$, cuyos morfismos son las transformaciones naturales, es una categoría abeliana, donde una sucesión $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ es exacta en $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ si y sólo si la sucesión $\mathcal{F}'(A) \to \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}''(A)$ es exacta en $\mathcal{C}'$ para todo $A \in obj(\mathcal{C})$.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [11, Chapter 0, §1, Proposition 1.3.1, page 5]. □

Definición A.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana e I un objeto de $\mathcal{C}$. I se dice un objeto inyectivo si el funtor contravariante $Hom(-, I)$ es exacto.

Se dice que la categoría abeliana $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos si para todo A en $\mathcal{C}$ existe un monomorfismo de A en algún objeto inyectivo de $\mathcal{C}$.

Definición A.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana que satisface Ab3) y $(Z_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$. Tomando $Z = \bigoplus_i Z_i$, $(Z_i)_{i\in I}$ se dice una familia de generadores si para todo A en $\mathcal{C}$ existe una sucesión exacta de la forma $\bigoplus Z \to A \to 0$.

Proposición A.7. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías, con $\mathcal{C}'$ abeliana. Considérese la categoría $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ de funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$. Se tiene que:*

i) Si $\mathcal{C}'$ satisface Ab5), entonces $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ también lo satisface.

ii) Si $\mathcal{C}'$ tiene generadores y satisface Ab3), entonces $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ también satisface ambas propiedades.

Demostración. Se incluye únicamente la prueba de ii), puesto que ciertos detalles de esta demostración son importantes para el desarrollo del texto principal. El resto de la demostración puede encontrarse en [11, Chapter 0, §1, Proposition 1.4.3, pages 7-9].

ii) Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$. El funtor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ dado por $F(A)=\bigoplus_i F_i(A)$, junto con las transformaciones naturales $F_i\to F$ inducidas por las inyecciones $F_i(A)\to F(A)$, es la suma directa de los F_i en $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$. Así, $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ también satisface Ab3).

Sea ahora Z un generador de $\mathcal{C}'$. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ definimos un objeto Z_A en $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$:

$$Z_A(B)=\bigoplus_{Hom(B,A)} Z$$

para todo B en $\mathcal{C}$. Para un morfismo $B\xrightarrow{f}B'$ en $\mathcal{C}$, $Z_A(f)$ se define de la manera obvia.

Veamos que $(Z_A)_{A\in\mathcal{C}}$ es una familia de generadores para $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$. Primero, probamos que para cada A de $\mathcal{C}$ y cada funtor F de $\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$, se tiene un isomorfismo canónico

$$Hom(Z,F(A))\xrightarrow{\cong}Hom(Z_A,F)$$

En efecto, dado un morfismo $Z\xrightarrow{g}F(A)$ en $\mathcal{C}'$, se obtiene una transformación natural $Z_A\to F$, ya que los morfismos $Z\xrightarrow{g}F(A)\xrightarrow{F(h)}F(B)$, donde $F(h)$ proviene de un $B\xrightarrow{h}A$, inducen un morfismo $Z_A(B)=\bigoplus_{Hom(B,A)} Z\to F(B)$ para cada B.

Para construir el inverso, partiendo de una transformación natural $V:Z_A\to F$, obtenemos inmediatamente un morfismo $Z\to Z_A(A)=\bigoplus_{Hom(A,A)} Z\to F(A)$, siendo la primera flecha la inyección $Z\to\bigoplus_{Hom(A,A)} Z$ para el morfismo id_A.

Dado $F\in\mathcal{H}om(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ y un subobjeto G de F, $G\neq F$, el objeto $G(A)$ será un subobjeto propio de $F(A)$ (i.e., $G(A)\neq F(A)$), para al menos un A de $\mathcal{C}$. Por hipótesis, como Z es un generador de $\mathcal{C}'$, existe un morfismo $Z\to F(A)$ en $\mathcal{C}'$ que no factoriza a través de $G(A)$ mediante la inclusión canónica $G(A)\to F(A)$. Pero entonces, la transformación natural $Z_A\to F$ obtenida a partir de ese morfismo $Z\to F(A)$ mediante el isomorfismo canónico $Hom(Z,F(A))\xrightarrow{\cong}Hom(Z_A,F)$ que hemos definido claramente no factoriza a través de la inyección canónica $G\to F$.

□

Teorema A.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Si $\mathcal{C}$ tiene generadores y satisface Ab5), entonces $\mathcal{C}$ tiene suficientes objetos inyectivos.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [6, Chapitre I, Théorème 1.10.1, pages 135-136]. □

Definición A.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{C}'$ una categoría aditiva. Un ∂-funtor exacto covariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ es un sistema $T = (T^i)_{i\geq 0}$ de funtores covariantes y aditivos $T^i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ junto con un morfismo de conexión

$$\partial : T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$$

definido para cada $i \geq 0$ y cada sucesión exacta corta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ en $\mathcal{C}$, satisfaciendo:

i) Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

es conmutativo para todo $i \geq 0$.

ii) Dada una sucesión exacta corta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ en $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$, la sucesión larga

$$0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\partial} T^1(A') \to T^1(A) \to \cdots$$

es exacta en $\mathcal{C}'$.

Definición A.10. Sean $T = (T^i)_{i\geq 0}$ y $T' = (T'^i)_{i\geq 0}$ dos ∂-funtores exactos entre una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y una categoría aditiva $\mathcal{C}'$. Un morfismo de T a T' es un sistema $f = (f^i)_{i\geq 0}$ de morfismos funtoriales

$$f^i : T^i \to T'^i$$

que conmutan naturalmente con ∂. Esto es, para cualquier sucesión exacta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ en $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f^i(A'')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^{i+1}(A')} \\ T'^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T'^{i+1}(A') \end{array}$$

es conmutativo.

Definición A.11. Un ∂-funtor exacto $T = (T^i)_{i\geq 0}$ entre una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y una categoría aditiva $\mathcal{C}'$ se dice **universal** si cada transformación natural $f^0 : T^0 \to T'^0$ tiene una única extensión a un morfismo $f : T \to T'$.

Definición A.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\mathcal{C}'$ una categoría aditiva. Un funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es **effaceable** si para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe un monomorfismo $u : A \to M$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(u) = 0$.

Lema A.13. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es effaceable si y sólo si $F(M) = 0$ para todo M inyectivo en $\mathcal{C}$.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [11, Chapter 0, §2, Lemma 2.1.1, pages 10-11]. □

Teorema A.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con suficientes inyectivos y sea $T = (T^i)_{i\geq 0}$ un ∂-funtor exacto de $\mathcal{C}$ a una categoría abeliana $\mathcal{C}'$. Son equivalentes:*

i) T es universal.

ii) T^i es effaceable para $i > 0$.

Demostración. La demostración puede consultarse en [6, Chapitre I, Proposition 2.2.1, page 141]. □

Proposición A.15. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana que satisface Ab3). Entonces $\varinjlim F$ es representable para cada funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y*

$$\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

es un funtor exacto por la derecha y aditivo entre categorías abelianas.

Demostración. La demostración puede consultarse en [11, Chapter 0, §3, Proposition 3.1.1, page 18]. □

Proposición A.16. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor entre categorías arbitrarias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. Si F tiene un funtor adjunto por la izquierda ${}^{ad}F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, entonces F conmuta con límites inversos representables y ${}^{ad}F$ conmuta con límites directos representables.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [3, Exposé I, Proposition 2.11]. □

Definición A.17. Una categoría $\mathcal{I}$ se dice pseudodirigida si satisface:

i) Cada diagrama en $\mathcal{I}$ de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & j \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & j' \end{tikzcd}$$

se puede extender a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & j \arrow[dr] & \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\ & j' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ii) Cada diagrama en $\mathcal{I}$ de la forma

$$i \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} j$$

se puede extender a un diagrama

$$i \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{w} k$$

tal que $wu = wv$.

Si $\mathcal{I}$ es no vacía y pseudodirigida, se dice dirigida si para cada dos objetos i y j existe un objeto k y morfismos $i \to k$ y $j \to k$.

Proposición A.18. *Sea $\mathcal{I}$ una categoría pseudodirigida y $\mathcal{C}$ una categoría abeliana que satisface Ab5). Entonces el funtor*

$$\varinjlim : \mathcal{H}om(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

es exacto.

Demostración. La idea de la demostración puede consultarse, esencialmente, en [6, Chapitre I, Proposition 1.8, pages 133-134]. □

Definición A.19. Sea $\mathcal{I}$ una categoría. Una subcategoría $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ se dice **final** si $\mathcal{J}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{I}$ y para todo objeto i de $\mathcal{I}$ existe un morfismo $i \to j$ en $\mathcal{I}$ para cada objeto j de $\mathcal{J}$.

Proposición A.20. *Sea $\mathcal{I}$ una categoría que satisface el axioma i) para ser pseudodirigida (Definición A.17). Entonces el morfismo*

$$\varinjlim F \to \varinjlim F|_{\mathcal{J}}$$

es un isomorfismo para toda subcategoría final $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$.

Demostración. La demostración puede consultarse en [11, Chapter 0, §3, Proposition 3.3.1, pages 20-21]. $\square$

Bibliografía

[1] André, M., *Homologie des algèbres commutatives*. Springer-Verlag 1974

[2] Artin, M., *Grothendieck Topologies*. Mimeographed notes, Harvard University 1962

[3] Artin, M., Grothendieck, A., Verdier J. L., *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4)*. Tome 1 - 3, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305. Springer, Berlin Heidelberg New York 1972, 1973

[4] Demazure, M., Grothendieck, A., *Schémas en groupes (SGA 3)*. Tome 1, Lecture Notes in Mathematics, vol. 151. Springer, Berlin Heidelberg New York 1970

[5] Godement, R., *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Hermann, Paris 1958

[6] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Math. J. 9 (1957), pp. 119-221

[7] Quillen, D. G., *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg 1967

[8] Quillen, D. G.. *On the (co-) homology of commutative rings*. Proc. Symp. Pure Math (1970), Vol. 17, No. 2, pp. 65-87

[9] Rotman, J. J., *An introduction to homological algebra*. Pure and Applied Mathematics, 85. New York-San Francisco-London: Academic Press 1979

[10] Rotman, J. J. *An introduction to homological algebra*. 2ª ed., Springer Science & Business Media 2008

[11] Tamme, G., *Introduction to Étale Cohomology*. Universitext, Springer-Verlag 1994

[12] Weibel, C. A., *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics , Vol. 38. Cambridge University Press 1994

Índice de definiciones