materia

Fundamentos Matemáticos da Enxeñaría

unidade didáctica 13

Introdución ás ecuacións diferenciais ordinarias

Duarte Santamarina Ríos
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Vicerreitoría de Cultura

titulación

Enxeñaría Técnica Agrícola

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

unidade **didáctica** 13

Introdución ás ecuacións diferenciais ordinarias

Duarte Santamarina Ríos
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital

Edita
Vicerreitoría de Cultura
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Servizo de Edición Dixital da
Universidade de Santiago de Compostela

Dep. Legal: C 1186-2010
ISBN 978-84-9887-294-1

MATERIA: Fundamentos Matemáticos da Enxeñaría
TITULACIÓN: Enxeñaría Técnica Agrícola
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Espazos vectoriais

- Definición de espazo vectorial. Propiedades. Subespazos
- Dependencia e independencia linear
- Concepto de base dun espazo vectorial
- Coordenadas dun vector respecto dunha base
- Dimensión dun espazo vectorial

Unidade II. Matrices e determinantes

- Definición e operacións. Definición de matriz inversa
- Matriz de cambio de base
- Definición do determinante dunha matriz cadrada. Cálculo de determinantes
- Cálculo do rango dunha matriz e da matriz inversa

Unidade III. Resolución de sistemas de ecuacións lineares

- Definición de sistemas de ecuacións lineares
- Caracterización da solución dos sistemas de ecuacións lineares
- Teorema de Rouché-Frobenius. Sistemas homoxéneos
- Método de Gauss

Unidade IV. Diagonalización de matrices

- Valores propios, vectores propios, polinomio e ecuación característicos
- Subespazo asociado a un autovalor. Propiedades
- Teoremas de diagonalización

Unidade V. O plano e o espazo euclídeo

- Produto escalar e vectorial
- Ortogonalidade
- Distancias e ángulos

Unidade VI. Estatística descritiva. Regresión

- Conceptos xerais
- Variable aleatoria unidimensional: distribución de frecuencias
- Representación gráfica. Medidas de posición e dispersión
- Variable aleatoria bidimensional: distribución de frecuencias
- Relación entres variables, diagramas de dispersión. Recta de regresión

Unidade VII. Probabilidade

- Experimento, espazo mostral e suceso
- Probabilidade dun suceso. Regras aditivas
- Probabilidade condicionada. Regras multiplicativas
- Regra de Bayes

Unidade VIII. Variables aleatorias e distribucións de probabilidade

- Concepto de variable aleatoria: variables discretas e continuas
- Función de distribución. Función de masa e densidade
- Media e varianza. Desigualdade de Tchebychev

Distribución discreta uniforme, binomial, multinomial, Poisson e normal
Teorema central do límite. Aproximación da distribución binomial pola normal

Unidade IX. Conceptos básicos do cálculo: funcións, límites e continuidade

Nocións topolóxicas en $\mathbb{R}^n$: norma, distancia, contorno, puntos interiores, exteriores e fronteira, conxuntos abertos, pechados e limitados
Funcións reais de varias variables, dominio e gráfica
Límite dunha función nun punto. Propiedades. Cálculo de límites
Continuidade dunha función. Operacións con funcións continuas
Teoremas de Weierstrass, do valor intermedio e de Bolzano
Método da bisección

Unidade X. Cálculo deferencial de funcións reais

Derivadas parciais e direccionais. Interpretación xeométrica
Gradiente nun punto. Funcións derivadas. Derivadas de orde superior
Regras de derivación. Regra da cadea. Derivación implícita
Concepto de diferencial e función diferenciable
Recta e plano tanxente a un punto

Unidade XI. Aplicacións do cálculo diferencial

Teoremas de Rolle e do valor medio
Aproximación local dunha función por un polinomio. Teorema de Taylor
Problemas de extremos globais e relativos. Estudo da gráfica dunha función
Método de Newton-Raphson

Unidade XII. Cálculo integral. Aplicacións

Integral de Riemann. Propiedades. Primitiva dunha función
Teoremas do valor medio e fundamentais do cálculo integral
A integral indefinida. Propiedades. Cálculo de primitivas
Integrais impropias de primeira e segunda especie
Integración numérica: regras do punto medio, trapecios e Simpson
Integración sobre rexións rectangulares
Teorema de Fubini. Integración sobre rexións sinxelas

Unidade XIII. Introdución ás ecuacións diferenciais ordinarias

Concepto e clasificación dunha ecuación diferencial
Xeneralidades sobre solucións
Problemas de valor inicial
Ecuacións de primeira orde: homoxéneas exactas, lineares, de variables separables
Exemplos de aplicacións xeométricas e físicas

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

As ecuacións diferenciais son ecuacións que se utilizan para modelizar fenómenos que proveñen da física, química, bioloxía e economía, por nomear algunhas disciplinas. Casos onde aparecen este tipo de relacións son, por exemplo, deformacións de estruturas, problemas de combustión, modelización de poboacións, problemas meteorolóxicos, etc. Teñen a súa orixe co cálculo diferencial que arranca no século XVII, cando aparecen as derivadas cos traballos de Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716). Estas ecuacións permiten modelizar procesos evolutivos. Con estas ecuacións un pode medir iso: o cambio.

Sir Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Nas unidades didácticas (en adiante, UD) precedentes, o estudantado debeu acadar coñecementos sobre o cálculo diferencial e integral de funcións dunha e de varias variables. Esta UD parte co obxectivo de completar os coñecementos básicos que un futuro enxeñeiro debe posuír. Trataremos de ensinar tanto problemas básicos que involucran ecuacións diferenciais ordinarias así como técnicas de resolución deste tipo de ecuacións. Restrinxirémonos, como curso básico que é, aos casos máis sinxelos posibles: ecuacións de orde un e grao un. Aprenderemos a deseñar problemas básicos en formulación matemática a través de ecuacións diferenciais ordinarias. Encadrarémolas segundo o tipo e aprenderemos as técnicas básicas de resolución analítica para este tipo de ecuacións diferenciais.

OS OBXECTIVOS

Os obxectivos que se prentenden cubrir nesta UD son:

- Expresar e comprender a definición de *ecuación diferencial*.

- Formular unha **ecuación diferencial** a partir de leis da física, química, bioloxía, etc., así como recoñecer problemas formulados desde estas disciplinas que poidan ser modelizados por ecuacións diferenciais.

- Establecer a diferenza entre *ecuacións diferenciais ordinarias* e *ecuacións diferenciais parciais*, así como distinguir a súa **orde** *e* **grao**.

- Comprender o significado de *solución* dunha ecuación diferencial dada e determinar se unha función é *solución* da ecuación diferencial en estudo.

- Establecer as diferenzas conceptuais entre *solución xeral* e *solución particular que verificando unha condición inicial.* Comprobar se unha función é solución dun problema con valor inicial.

- Definir o **campo de direccións** correspondente á ecuación diferencial *y'=F(x,y)*.

- Obter información cualitativa do comportamento do sistema modelizado por unha ecuación diferencial de primera orde a partir do campo de direccións.

- Usar *software* axeitado para facer a gráfica do **campo de direccións** asociado a unha ecuación diferencial de primera orde.

- Recoñecer cando unha ecuación diferencial de primera orde é do tipo **variables separables, linear, homoxénea** ou **exacta**.

- Encontrar **solucións explícitas** ou **implícitas** correspondentes a ecuacións diferenciais con **variables separables**, ás **ecuacións lineares de primeira orde**, ás **ecuacións diferenciais homoxéneas** e ás **ecuacións diferenciais exactas**.

- Recoñecer e resolver problemas formulados desde a bioloxía, física etc., que poidan ser modelizados por ecuacións diferenciais de primera orde en **variables separables, lineares, homoxéneas** e **exactas** con condicións iniciais.

Finalmente, buscarase que o alumnado desenvolva de xeito intuitivo as seguintes habilidades sociais:

- Argumentar e expresarse de xeito científico e dende criterios racionais.

- Desenvolver a capacidade para traballar de xeito colectivo á hora de enfrontarse aos problemas matemáticos.

- Adquirir soltura no uso de bibliografía.

DISTRIBUCIÓN HORARIA

Esta UD está prevista para 15 horas presenciais das que:

- 8 serán de teoría e problemas.

- 1 hora para presentar os comandos que se precisan no loxical matemático que utilizarán de apoio para a resolución dos problemas matemáticos que se lles presenten.

- 4 horas para o traballo en grupo. As 3 primeiras horas presenciais serán para a realización do mesmo á que haberá que engadirlle 1 hora máis para a súa avaliación.

- 2 horas para a proba final de UD. Para a realización da devandita proba precisaremos 1 hora á que haberá que engadirlle 1 hora máis para a avaliación e posta en común de xeito conxunto co estudantado.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

O Espazo Europeo de Educación Superior aposta por medir o traballo que se debe realizar tendo en conta o tempo que lle vai levar ao estudantado acadar os obxectivos desenvolvidos na materia cunha aprendizaxe autónoma e construtiva. Isto leva a innovar e mellorar o concepto de docencia que normalmente "sufría" o estudantado: escoitar, tomar apuntamentos, memorizalos e realizar unha proba obxectiva por outro máis acorde ás directrices do EEES. A docencia presencial cremos que segue sendo absolutamente necesaria e primordial. En calquera caso, apoiarémonos tamén en novas técnicas docentes como é o emprego dos diferentes recursos dispoñibles na rede. Un exemplo pode ser a plataforma dixital da USC que habilitaremos e usaremos tanto para verter gran parte do contido da materia: guía docente, probas de autoavaliación, contidos teóricos como a presente unidade didáctica (en formato *PowerPoint* ou PDF), así como citar a documentación coa que se realizarán tanto as clases teóricas como as prácticas. Permitirá facer un seguimento máis individualizado e unha periodización do traballo que leva o estudantado coa axuda das titorías virtuais.

O equilibrio entre o ensino teórico e o práctico estará en consonancia coas competencias fixadas nos obxectivos da UD. Cabe insistir en que non só se considera e valora o coñecemento acadado nas horas teóricas baseadas nas clases maxistrais, senón tamén o traballo persoal que posibilita a interiorización dos coñecementos e mellora a capacidade para expresalos de maneira competente e correcta.

A síntese do método que se empregará é a seguinte:

1. **Clases teóricas:** clases presenciais de teoría nas que o profesor presentará, con axuda de medios audiovisuais os contidos da UD en liñas xerais. O obxectivo destas clases é proporcionar ao estudante os coñecementos básicos que lle permitan abordar o estudo da UD de xeito autónomo con axuda da bibliografía recomendada e dos exercicios e traballos propostos.

2. **Clases de exercicios:** clases presenciais nas que o profesor realizará detalladamente exercicios da UD, axudándose de programas informáticos (Matlab) e de medios audiovisuais. Entregaráselle ao alumnado un boletín de problemas no que se abordan os diferentes conceptos vistos en teoría. Parte dos exercicios dos boletíns serán resoltos nestas clases de exercicios mentres que outra parte deberá ser resolta polo alumnado de xeito autónomo. Así mesmo, algúns dos problemas dos boletíns poderanse propor como traballo en grupo.

3. **Traballo en grupo:** clases presenciais nas que o estudantado será distribuído en grupos e realizará un traballo relacionado cos conceptos teóricos estudados na UD e cos exercicios propostos no boletin. O obxectivo é fomentar o manexo de bibliografía e información así como a capacidade para traballar de xeito colectivo á hora de enfrontarse con problemas matemáticos. Poderanse asignar traballos distintos a cada un dos grupo. Os traballos realizaranse exclusivamente nas clases presenciais e entregaranse por escrito o último día da súa realización.

4. **Loxical matemático:** clases presenciais nas que se explicará o manexo do loxical matemático (Matlab). O obxectivo é que o estudantado manexe con soltura este programa e que o empregue como apoio na resolución dos exercicios dos boletíns así como no desenvolvemento do traballo en grupo.

5. **Probas de fin de UD:** clase presencial na que se avaliará tanto os coñecementos teóricos como a resolución de problemas. A proba pode consistir na resolución de tarefas cun grao de dificultade similar aos realizados en clases e propostos no boletín de problemas así como en preguntas curtas enfocadas a comprobar se están asimilados os conceptos teóricos básicos da UD.

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. Introdución

Desde a antigüidade o ser humano tratou de entender a natureza. Modelizar matematicamente un problema do mundo real significa aplicar conceptos, empregar obxectos e ferramentas matemáticas que permitan expresar o fenómeno de estudo na linguaxe simbólica propia desta ciencia. Non sempre é sinxelo; a realidade é complexa e presentala non é, salvo casos moi particulares, tarefa simple.

Exemplo 1: En problemas vinculados con encher recipientes o volume *V* de auga nun contedor nun tempo *t* satisfai

$$\frac{dV}{dt} = q(t) \ ,$$

onde *q(t)* é a razón de entrada de auga no recipiente, obtida esta función cun medidor. Esta ecuación é unha das máis sinxelas ecuacións diferenciais. O volume *V*=*V(t)* vén determinado pola razón de cambio *q(t)* e o seu valor inicial $V_0=V(t_0)$.

O teorema fundamental do cálculo dinos que a solución é

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau \ ,$$

que define a única solución da ecuación diferencial que pasa polo punto (t_0,V_0).

Exemplo 2: Un recipiente con auga quéntase a temperatura de ebulición (100 ^{o}C). Retírase nese instante e reméxese mentres arrefría nunha habitación onde a temperatura do aire é de 20 ^{o}C. Despois de 10 minutos, a temperatura da auga é de 60 ^{o}C. O problema trata de predicir o momento no que a temperatura da auga sexa de 40 ^{o}C e cando chega a ter a temperatura da habitación (20 ^{o}C). O enunciado do problema suxire a seguinte hipótese:

- A temperatura inicial é de 100 ^{o}C.
- Ao remexer a mestura, a temperatura é a mesma en todo o líquido.

As hipóteses suxiren que a temperatura da auga *T* é función do tempo

$$T=T(t),\ t\geq 0,$$

onde *T(t)* é unha función descoñecida de *t,* salvo *T(0)=100* e *T(10)=60*. A experiencia cóntanos que *T(t)* é unha función que decrece monotonamente en función de *t* e que $20 \le T(t) \le 100$.

Unha hipótese física é precisa para determinar a razón na que a pipeta de auga arrefría. Unha boa aproximación é a Lei de arrefriamento de Newton**.** Esta lei afirma que a razón de decrecemento de *T* (i.e. $-dT/dt$) é proporcional á diferenza de temperatura entre o líquido e a temperatura do ambiente da contorna (i.e. $T-20$). Polo cal, a ecuación diferencial que se obtén é

$$\frac{dT}{dt} = -h(T-20).$$

A solución *T=T(t)* é

$$T(t) = 20 + 80e^{-0.0693t}.$$

2. Concepto e clasificación das ecuacións diferenciais ordinarias

Unha ecuación diferencial ordinaria (EDO) é unha expresión da forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n}) = 0$$

onde *F* é unha relación entre a variable dependente *x,* a propia función *y* e as súas derivadas.

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} = -32x \text{ , } y' = -32x \text{ , } dy = -32x dx \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 12e^{7x} \text{ , } y' + 5y = 12e^{7x} \text{ , } dy = \left(12e^{7x} - 5y\right)dx \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0 \text{ , } y'' + 8y' + 16y = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \text{ , } y'' + \sin y = 0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - \sqrt{2}y = \log\left(e^{xy}\right), \quad \left(y'''\right)^2 + y''\left(y'\right)^4 - \sqrt{2}y = \log\left(e^{xy}\right) \tag{5}$$

Os libros de texto utilizan, indistintamente, dous tipos de notación para as derivadas ordinarias:

- A notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, onde aparece a variable independente de forma explícita.
- A notación de Newton $y, y', y'', \ldots, y^{(n}$, máis compacta, onde a variable independente se deduce da formulación do problema $\omega_0 \ddot{y} = A \sin\omega t$, neste caso, a variable *t*.

Exemplo 3. No caso particular da ecuación do arrefriamento de Newton

$$0 = F(t,T,T') = \frac{dT}{dt} - h(T - 20)\,.$$

Exemplo4. A taxa de cambio con respecto ao tempo dunha poboación con índices constantes de nacemento e mortalidade é, en moitos casos simples, proporcional ao tamaño da poboación

$$\frac{dP}{dt} = kP\ ,$$

onde *k* é a constante de proporcionalidade.

Exemplo 5. A lei de Torricelli establece que a taxa de cambio con respecto ao tempo do volume de auga nun tanque que se está baleirando é proporcional á raíz cadrada da profundidade da auga no tanque,

$$\frac{dV}{dt} = -kh^{\frac{1}{2}}$$

na que *k* é a constante de proporcionalidade.

As ecuacións diferenciais clasifícanse atendendo á **orde** e **grao** das derivadas que interveñen na EDO. Formalmente chámase orde dunha EDO á maior orde de derivación que exista na función incógnita. Chámase **grao** dunha EDO ao maior expoñente que teña a derivada de maior orde. As ecuacións (1) e (2) son de orde e grao un. As ecuacións (3) e (4) son de segunda orde e grao un e a (5) é unha ecuación de terceira orde en grao dous.

As ecuacións diferenciais tamén se poden clasificar segundo a linearidade (linear ou non linear). Dise que unha ecuación diferencial ordinaria de orde *n* é linear se a función *F* é linear na variable dependente e nas súas derivadas $y, y', y'', \ldots, y^{(n}$. Exemplos: $2y' + 5y - 1 = 0$, $y' + x^2 y = 0$, $y'' + 2y' + y - \sin x = 0$. Isto significa que unha EDO de orde *n* é linear, se se pode expresar da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\,.$$

Se $g(x) \equiv 0$ denomínase a EDO linear de orde *n* homoxénea, se $g(x) \neq 0$ corresponde ao caso non homoxéneo. As principais características dunha EDO linear son:

1. Os coeficientes $a_i(x), i = 1,2,\ldots n$ dependen soamente da variable dependente *x*.
2. A variable dependente *y* e as súas derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n}$ aparecen só elevadas á primeira potencia. Non poden estar afectadas por termos non lineares da forma $\sin y, e^y, \log y$ etc.

Definición1. Dada unha ecuación diferencial e unha expresión da forma

$$y^{(n} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1}), \qquad F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Dise que *y=y(x),* $y: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha solución da ecuación anterior se

1. y é n-veces derivable en I.
2. $(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1}(x)) \in D, \forall x \in I$.
3. $y^{(n} = F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1}), \forall x \in I$.

Podemos falar de dous tipos de solución dunha EDO:

- *Solución xeral*: solución da EDO na que aparecen tantas constantes arbitrarias como orde ten a ecuación.
- *Solución particular:* é unha solución que se obtén despois de fixar os valores das constantes arbitrarias da solución xeral.

Exemplo 6. A función $y(x) = -16x^2$ é unha solución particular de $y' = -32x$, pero se k é unha constante calquera, $y(x) = -16x^2 + k$ tamén é unha solución. De feito, polo cálculo de primitivas sabemos que toda solución de $y' = -32x$ terá a forma $y(x) = -16x^2 + k, k \in \mathbb{R}$.

De xeito semellante, se C, C_1 e C_2 son constantes arbitrarias, $y(x) = e^{7x} + Ce^{-5x}$ e $y(x) = C_1e^{-4x} - C_2xe^{-4x}$ son as solucións xerais das EDO (2) e (3) no senso de que calquera solución de ditas EDO pode obterse a partir das anteriores expresións, sen máis que elixir C, C_1 e C_2 de xeito apropiado.

A solución pode vir dada basicamente de dous modos diferentes:

- De xeito **explícito:** a solución da EDO y vén despexada en función da variable independente x.
- De xeito **implícito:** a solución da EDO vén dentro dunha expresión relacionada coa variable independente x.

Exemplo 7. A $y(x)$ tal que $x^2 + xy^3 + \frac{1}{2}e^{-2y} = 0$ é unha solución da EDO $2x + y^3 + \left(3xy^2 - e^{-2y}\right)y' = 0$, no senso de que a función $y(x)$ que define implicitamente a relación verifica a EDO, é dicir, non sempre podemos obter de xeito sinxelo unha **solución explícita** e teremos que conformarnos cunha **solución implícita**.

Dado o problema con valores iniciais $y'=F(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. Se $F(x,y)$ e $F_y(x,y)$ son continuas, no rectángulo $a<x<b$, $c<y<d$, do plano xy que conteña o punto (x_0,y_0), entón nalgún intervalo $x_0-h<x<x_0+h$ contido en (a,b) existe unha solución única $y = \phi(x)$ para o problema con valores iniciais.

3. EDO de primeira orde separables

É o tipo de EDO máis simple. Teñen a forma xeral

$$p(x) + q(y)\frac{dy}{dx} = 0 ,$$

onde p e q son funcións continuas. Integrando directamente a expresión anterior, teremos

$$\int\left(p(x) + q(y)\frac{dy}{dx}\right)dx = 0 \Rightarrow \int p(x)dx + \int q(y)y'dx = 0 .$$

Se Q é unha primitiva de q, é dicir, *Q'(x)=q(x)*, sabemos que $q(y)y' = Q'(y)y' = (Q \circ y)'$ e substituíndo nas integrais

$$\int p(x)dx + \int (Q \circ y)'dx = 0 \Rightarrow \int p(x)dx + Q(y) = 0$$

e temos a solución xeral da ecuación de partida de xeito implícito.

Exemplo 8. Calcular a solución xeral da EDO $\dfrac{x^3}{y^2} + y' = 0$.

Exemplo 9. Calcula a solución particular da EDO $\begin{cases} (1+e^x)yy' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

4. EDO homoxéneas

Unha función *f(x,y)* dise **homoxénea de grao r** con respecto ás dúas variables se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y), \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Diremos que a EDO *Q(x,y) y'=P(x,y)* é **homoxénea** se *P(x,y)* e *Q(x,y)* son funcións homoxéneas do mesmo grao. Facendo o cambio *y=vx* pola regra da cadea *y'=v'x+v*. Substituíndo na ecuación de partida obtemos

$$\frac{Q(1,v)}{P(1,v) - vQ(1,v)} v' = \frac{1}{x} \ ,$$

que é unha EDO en variables separadas.

Exemplo 10. Resolver a EDO *(y-x) y'=x+y*

5. EDO lineares de primeira orde

Unha EDO linear de primeira orde ten a forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \ ,$$

onde P e Q son funcións continuas. Para resolvela, calcularemos unha primitiva *S(x)* da función *P(x)*; é dicir, tal que *S'(x)=P(x)*. Multiplicando a EDO por $e^{S(x)}$

$$e^{S(x)} \frac{dy}{dx} + e^{S(x)}P(x)y = e^{S(x)}Q(x) \ ,$$

e como

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{S(x)}\right) = \frac{dy}{dx}e^{S(x)} + ye^{S(x)}S'(x) = \frac{dy}{dx}e^{S(x)} + e^{S(x)}P(x)y$$

a nosa EDO transfórmase en

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{S(x)}\right) = e^{S(x)}Q(x) \ .$$

Integrando ambos os membros,

$$ye^{S(x)} = \int e^{S(x)}Q(x)dx \ ,$$

de onde obtemos a solución xeral

$$y = e^{-S(x)} \int e^{S(x)} Q(x) dx ,$$

con $S(x) = \int P(x) dx$.

O factor $e^{S(x)}$ que utilizamos para obter a solución xeral, por razóns obvias, recibe o nome de **factor integrante**.

Exemplo 11. Achar a solución particular de $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^6$ para *x>0* e tal que *y(2)=20*.

6. EDO exactas

Diremos que a EDO *M(x,y) dx+N(x,y) dy=0* é *exacta* cando exista unha función *F(x,y)* para a que se verifica

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy .$$

Proposición1. Unha condición necesaria para que a EDO *M(x,y) dx+N(x,y) dy=0* sexa exacta é que se verifique

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} .$$

Polo tanto, atendendo ao anterior, a solución xeral dunha EDO exacta vén dada por *F(x,y)=C*, sendo *C* unha constante arbitraria.

Pero, quen é *F(x,y)*? Sabemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) . \tag{7}$$

Entón de (6)

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

e substituíndo esta expresión de *F* en (7)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y) = N(x,y) \quad \Rightarrow \qquad g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$$

$$\Rightarrow \quad g(y) = \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right)dy$$

polo que podemos escribir

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right)dy$$

pero sen esquecer que a solución xeral é *F(x,y)=C*.

Exemplo 12. Resolver a EDO *(3x+2y)dx+(2x+y)dy=0*.

7. Modelización matemática

A modelización matemática dun problema físico contén, en xeral, tres etapas:

1. **Formulación matemática do problema***:* este paso é coñecido tamén como *construción dun modelo matemático.* Comprende a cuantificación das variables do problema, decidir que hipóteses e simplificacións se poden realizar, e tradución destas condicións nun problema matemático (ecuacións) ben definido.

2. **Resolución do problema matemático***:* neste paso utilízase a análise matemática para construír unha ou varias funcións que resolven as ecuacións do paso 1. En poucas ocasións poderemos obter unha solución pechada ou analítica do problema. Moitas veces virá dada a solución a través de series infinitas ou transformadas integrais, polo que será necesario, na maioría dos casos, a utilización de métodos numéricos para poder resolvelas de forma aproximada coa axuda do ordenador.

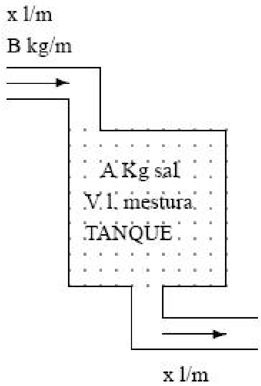
3. **Interpretación da solución***:* o último paso consiste en analizar a solución para entender os fenómenos que poden ocorrer, como esta pode depender de varios parámetros e como os resultados poden ser usados. Isto pode levar a unha mellora do modelo matemático e poder obter novas solucións máis aproximadas.

A continuación presentamos catro exemplos onde se utilizaría a modelización matemática para poder resolvelos.

Exemplo 13. Dinámica de poboacións: supoñamos que estamos estudando como evoluciona a poboación dunha especie. Denotamos $P(t)$ ao número de individuos da poboación no instante t. Para poboacións grandes de organismos que non teñen unha estación de reprodución con nacementos continuos e superposición de xeracións, como pode ser o cultivo de bacterias en laboratorio, células de lévedo etc., a poboación segue un modelo simple (modelo de Malthus) que propón considerar que o ritmo de crecemento da poboación é directamente proporcional ao número de individuos presentes en cada instante t.

Exemplo 14. Desintegración radioactiva: o núcleo dun átomo está formado por combinacións de protóns e neutróns. Moitos destes núcleos son inestables no sentido en que se desintegran e se transforman en átomos doutras substancias. Para modelar a desintegración radioactiva suponse que a taxa coa que os núcleos dos átomos se desintegran é proporcional á cantidade m de substancia (núcleos) presente en cada instante t. Atope unha ecuación diferencial que permita encontrar a cantidade de materia en cada instante t: $m(t)$.

Exemplo 15. Concentración de mesturas: supoñamos que un tanque de *V* litros contén *A* gramos de soluto. No tanque ingresa unha mestura de *B* gramos de soluto por litro a unha velocidade de *e* litros por segundo; ao mesmo tempo, do tanque sae mestura á mesma velocidade. Atope unha ecuación diferencial que permita coñecer como evoluciona a cantidade de soluto no tanque *y(t)*.



Exemplo 16. Circuítos eléctricos: aplique a lei de Kirchhoff das tensións (a tensión aplicada é igual á suma das caídas de tensión), para modelizar o comportamento da intensidade de corrente nun circuíto RL e da carga nun capatizador conectado en serie cunha resistencia; en ambos os dous casos a forza electromotriz aplicada é *v(t)* e o interruptor pechouse no instante *t=0*. No caso do circuíto RC, o capatizador está descargado en *t=0*.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Ao longo do curso iranse propoñendo problemas de boletíns para a resolución individual por parte do alumnado.

Tamén temos prevista a realización dun traballo en grupo vinculada a esta UD. O problema que deberán resolver será máis complexo que os presentados no boletín e poderán apoiarse en loxicais matemáticos para a súa resolución. Para a realización desta actividade, terase en conta unha técnica de aprendizaxe cooperativa. Os grupos serán escollidos de tal modo que en cada un haxa alumnado bo, malo e regular. O obxectivo é que a xente con maiores coñecementos dinamice, estimule e incluso ensine a aqueloutro estudantado que, por unha ou outra razón, poida ir un pouco máis descolgado.

AVALIACIÓN

A avaliación da materia realizarase de xeito continuado e tendo en conta o conxunto de todas as actividades docentes descritas na metodoloxía. Así, para a avaliación global teranse en conta a asistencia e participación en clases, os resultados dos traballos en grupo, os exercicios propostos,así como a proba final da UD. Os aspectos valorados en cada actividade e a porcentaxe que achega cada unha delas á nota global especifícanse na seguinte táboa:

Actividade docente	Aspecto valorado	Peso
Exercicios propostos	Claridade de escritura e presentación das probas Dominio dos conceptos teóricos e prácticos da materia	30%
Realización de traballos en grupo	Claridade de escritura e exposición de resultados Participación activa na realización do traballo Estrutura e presentación do traballo	20%
Probas de avaliación final UD	Claridade de escritura e presentación das probas Dominio dos conceptos teóricos e prácticos da materia	50%

BIBLIOGRAFÍA

ARANDA, T., GABRIEL GARCÍA, J. , (1999): *Notas sobre Matlab,* Oviedo, Servicio de Publicaciones Universidad de Oviedo.

BRADLEYL., SMITH, K. J. , (2000): *Vol. 1 Cálculo de unha variable, Vol. 2 Cálculo de varias variables,* Madrid, Prentice Hall.

EDWARDS, C.H., PENNEY, D.E., (1985): *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones.* México, Prentice-Hall Hispanoamericana.

KENT NAGLE, R., EDWARD B. SAFF (1992): *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, Argentina, Addison Wesley Longman.

LARSON, R. HOSTETLER, R; EDWARDS, B. (1995): *Cálculo y geometría analítica.* McGraw-Hill.

NEUHAUSER, C. (2004): *Matemáticas para las ciencias.* Pearson Prentice-Hall.

STEWART, J. (2001): *Cálculo. Trascendentes tempranas.* Thomsonlearning.

THOMAS, G.B. FINNEY, R.L. (19987): *Cáclulo con geometría analítica.* Addison-Wesley Iberoamericana..

ZILL, D. CULLEN, M. (2006): *Ecuacione diferenciales con problemas de valores en la frontera*, Thomson.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo de profesores e alumnos de todas as materias e titulacións da universidade

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Servizo de Normalización Lingüística