



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo de Fin de Máster

# Trenzas y álgebras de Lie categóricas

Alejandro Fernández Fariña

2015–16

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

**Trabajo de Fin de Máster**

# Trenzas y álgebras de Lie categóricas

Alejandro Fernández Fariña

Xullo, 2016

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



D. Manuel Ladra González, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, como director del Trabajo de Fin de Máster con título “Trenzas y álgebras de Lie categóricas”,

AUTORIZO

a D. Alejandro Fernández Fariña para su presentación a fin de obtener el título de Máster en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Santiago de Compostela, a 8 de julio de 2016.

Fdo.: Manuel Ladra González

Fdo.: Alejandro Fernández Fariña



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Categorías internas</b>	<b>1</b>
1.1. Categorías y pullbacks . . . . .	1
1.2. Funtores y equivalencias . . . . .	7
1.3. Categorías internas . . . . .	9
<b>2. Trenzas y Módulos cruzados de álgebras de Lie</b>	<b>15</b>
2.1. La categoría de álgebras de Lie . . . . .	15
2.2. Módulos cruzados de álgebras de Lie . . . . .	18
2.3. Trenzas en módulos cruzados de álgebras de Lie . . . . .	23
<b>3. Equivalencia entre módulos cruzados trenzados y álgebras de Lie categóricas trenzadas</b>	<b>33</b>
<b>4. Ejemplos de Módulos cruzados trenzados</b>	<b>47</b>
4.1. Las álgebras de Lie y los módulos cruzados trenzados . . . . .	47
4.2. Álgebras de Lie y álgebras de Lie categóricas trenzadas . . . . .	50
4.3. Trenzas y 2-módulos cruzados . . . . .	55
4.4. Trenzas equivariantes y 2-módulos cruzados . . . . .	60
<b>5. Objetos simpliciales reducidos de longitud <math>n</math></b>	<b>63</b>
5.1. Objetos simpliciales y Complejo de Moore . . . . .	63
5.2. Objetos simpliciales truncados . . . . .	66
<b>6. Equivalencia entre módulos cruzados trenzados y álgebras de Lie simpliciales reducidas de longitud 2</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>



## Resumen

En este trabajo se introduce el concepto de trenza sobre módulos cruzados de álgebras de Lie y álgebras de Lie categóricas, de modo que se tenga, como caso particular, que todo álgebra de Lie puede verse como un módulo cruzado trenzado cuya trenza es el propio corchete.

También se probará que las categorías de módulos cruzados trenzados de álgebras de Lie y álgebras de Lie categóricas trenzadas son equivalentes, obteniendo como caso particular la conocida equivalencia entre las categorías de módulos cruzados de álgebras de Lie y álgebras de Lie categóricas, motivante para introducir las trenzas en álgebras de Lie categóricas. Tras hacer esto veremos que la idea de trenza coincide con un caso particular del levantamiento de Peiffer para 2-módulos cruzados de álgebras de Lie.

Finalmente, se prueba la equivalencia de las categorías de álgebras de Lie simpliciales reducidas con complejo de Moore de longitud 2 y los módulos cruzados trenzados de álgebras de Lie.

## Abstract

In this paper we will introduce the notion of braiding for crossed modules of Lie algebras and categorical Lie algebras so that we have, as a particular case, every Lie algebra can be seen as a braided crossed module whose braiding is the Lie bracket itself.

We will also prove that the categories of braided crossed modules of Lie algebras and braided categorical Lie algebras are equivalent, obtaining as a particular case the well-known equivalence between the categories of crossed modules of Lie algebras and categorical Lie algebras, which leads to introduce the braiding in categorical Lie algebras. After doing this we will see that the idea of braiding matches with a particular case of the Peiffer lifting for 2-crossed modules of Lie algebras.

Finally, we will prove the equivalence between the categories of reduced simplicial Lie algebras with Moore complex of length 2 and the braided crossed modules of Lie algebras.



# Introducción

El término “categorificación” apareció por primera vez en 1995 y trata de traducir las ideas de álgebra habitual al nivel de categorías (o categorías de orden superior), substituyendo conjuntos por categorías, elementos por objetos, aplicaciones por funtores, ecuaciones o fórmulas por isomorfismos . . . Si la categorificación se hace de modo estricto, es decir, los isomorfismos en realidad son identidades y, por tanto, pedimos igualdades en vez de isomorfía, la categorificación da forma a lo que se denomina una categoría interna del contexto que se trata de categorificar.

El concepto de grupo categórico estricto es equivalente al de módulo cruzado de grupos, introducido por Whitehead [7] en el año 1949, como un modelo algebraico para espacios de 2-tipos de homotopía (i.e. espacios conexos con grupos de homotopía triviales en dimensiones  $> 2$ ). Ligados al concepto de módulo cruzados de grupos surgen los módulos cruzados trenzados de grupos y 2-módulos cruzados de grupos. Paralelamente han surgido las ideas de módulos cruzados de álgebras de Lie y 2-módulos cruzados de álgebras de Lie. Se ha probado para estos últimos su equivalencia con las álgebras de Lie simpliciales de longitud 1 y 2 ([4]). Cabe destacar que estos resultados son ciertos para grupos ([3]).

El objetivo de este trabajo es indagar más en la categorificación de álgebras de Lie, introduciendo el concepto de trenza para un módulo cruzado de álgebras de Lie y, dado que la categorías de álgebras de Lie categóricas y módulos cruzados de álgebras de Lie son equivalentes, para álgebras de Lie categóricas.

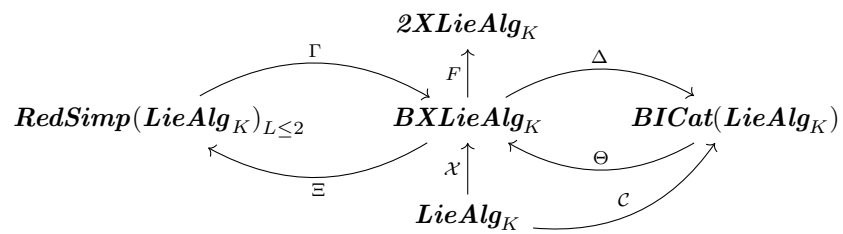
Se dará una explicación de la elección de los axiomas por su semejanza al caso de grupos, en los cuales un ejemplo de módulo cruzado trenzado es la identidad de un grupo en sí mismo, con la conjugación como acción y el conmutador como trenza. Además al igual que en el caso de grupos, buscamos que un módulo cruzado trenzado sea una particularización del caso de 2-módulos cruzados, tomando el último objeto del complejo trivial. También se introduce el concepto de trenza equivariante, análogo al ya existente para grupos, y se obtiene a partir de un módulo cruzado trenzado un 2-módulo cruzado de álgebras de Lie (de modo diferente al anterior), como ocurre en grupos.

Una vez hecho esto se probará que la trenza introducida cumple un resultado similar que la trenza en grupos, pues se verifica que la categoría de módulos cruzados trenzados de grupos es equivalente a la categoría de grupos simpliciales reducidos con complejo de Moore de longitud 2.

La motivación principal de este trabajo es mostrar una definición paralela a la definición de trenza en grupos, intentado elegir una definición apropiada en función de los ejemplos que debe verificar. Ulualan introdujo en [6] la trenza para módulos cruzados de álgebras de Lie, probando la equivalencia con su definición de álgebra de Lie categórica trezada, pero la definición no es correcta, pues no permite que el corchete tome el papel de trenza, lo cual es necesario por su semejanza con el caso de grupos, donde el conmutador es un ejemplo de trenza, como ya se mencionó anteriormente. Muchos autores discrepan también en la definición de 2-módulo cruzado de álgebras de Lie (como Ellis en [4] y Martins y Picken en [5]), pero atendiendo a la necesidad de que el corchete pueda ser la trenza y que el levantamiento de Peiffer generalice a la trenza, se ha optado por la definición de Martins y Picken.

Este trabajo consta de 6 capítulos. En el primero, se define el concepto de categoría, pullback, funtor, isomorfismo natural y equivalencia, dando algunas propiedades sobre estos conceptos. Luego se introduce el concepto de categoría interna. En el segundo capítulo, tras hablar de la categoría de álgebras de Lie, se define el concepto de módulo cruzado de álgebras de Lie para, a continuación, introducir el concepto de trenza, tanto sobre módulos cruzados como sobre álgebras de Lie categóricas. Para finalizar el capítulo se introducen las categorías donde se trabaja con este concepto de trenza. El tercer capítulo trata de mostrar la equivalencia entre las dos categorías mencionadas, tras introducir las trenzas. En el Capítulo 4 se muestran los ejemplos motivantes para la definición de la trenza. Por un lado se muestra su origen en intentar imitar el caso de grupos, dando pie a que el corchete pudiera ser una trenza, y a continuación se muestra que también se buscó que fuese un caso particular del levantamiento de Peiffer para 2-módulos cruzados, tanto suponiendo la última álgebra de Lie nula, como introduciendo el concepto de trenza equivariante. En todo el capítulo se muestran funtores que conservan y reflejan isomorfía entre las categorías de álgebras de Lie, módulos cruzados de álgebras de Lie, álgebras de Lie categóricas y 2-módulos cruzados de álgebras de Lie. En el Capítulo 5 se definen los objetos simpliciales y objetos simpliciales reducidos. Tras esto, trabajando en la categoría de álgebras de Lie, se define el complejo de Moore y la longitud de un álgebra de Lie simplicial o simplicial reducida. Tras hacer esto se introduce el concepto de álgebra de Lie simplicial truncada y se dan herramientas para poder probar la equivalencia. En el Capítulo 6 se prueba la equivalencia entre la categoría de módulos cruzados trezados de álgebras de Lie y las álgebras de Lie simpliciales reducidas de longitud 2.

Todos los funtores utilizados entre las categorías usadas en el trabajo (salvo las truncadas, pues se usan como herramienta) se muestran en el siguiente diagrama conmutativo salvo isomorfismo natural. Se ha supuesto que la característica del cuerpo  $K$  es distinta de 2. Los funtores del diagrama cumplen que dos objetos son isomorfos si y solo si lo son sus imágenes y en cada categoría se supone la identidad en sí misma, por lo que se puede deducir cuales son equivalencias.



En el diagrama el funtor  $F$  representa al funtor  $\mathcal{X}_2$  (ver pág. 62) o al funtor  $\mathcal{X}'_2$  (ver pág. 59).



# Capítulo 1

## Categorías internas

En este capítulo se definirá el concepto de categoría interna y se darán las herramientas necesarias para poder trabajar en los siguientes capítulos.

### 1.1. Categorías y pullbacks

**Definición 1.1.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  es una construcción matemática compuesta de los siguientes datos:

- Dos clases (no necesariamente conjuntos):
  - La clase  $Ob(\mathcal{C})$  de *objetos* de la categoría.
  - La clase  $Arw(\mathcal{C})$  de *flechas* (o *morfismos*) de la categoría.
- Ambas clases tienen a su vez los siguientes datos asociados:
  - Para cada flecha  $f$  vienen dados dos objetos  $d_0(f), d_1(f)$ .
    - $d_0(f)$  se denomina *dominio* de  $f$  y  $d_1(f)$  *codominio* de  $f$ .
    - Si  $d_0(f) = A$  y  $d_1(f) = B$  escribiremos  $f: A \rightarrow B$  o  $A \xrightarrow{f} B$ .
  - A cada objeto  $A$  se le asocia la flecha  $Id_A: A \rightarrow A$ . Dicha flecha se denomina *identidad* en  $A$ .
  - Dadas dos flechas  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  se les asocia una flecha  $h: A \rightarrow C$  que se denomina *composición* de  $f$  con  $g$  y se denota por  $g \circ f$ .
- Además, los datos anteriores deben cumplir:

$$(f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D) \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \quad (1.1)$$

$$f: A \rightarrow B \Rightarrow Id_B \circ f = f = f \circ Id_A. \quad (1.2)$$

Esto último suele expresarse como que “ $\circ$ ” es asociativa y tiene unidad.

**Definición 1.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sean  $A \xrightarrow{f} Y$ ,  $B \xrightarrow{g} Y \in \text{Arw}(\mathcal{C})$ . Se dice que  $f$  y  $g$  tienen *pullback* y este es igual a  $(C, (p_1, p_2))$  si:

1.  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $p_i \in \text{Arw}(\mathcal{C})$ ,  $i \in \{1, 2\}$  y además se cumple el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{p_1} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

2. Si  $(X, (h_1, h_2))$  es tal que  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $h_i \in \text{Arw}(\mathcal{C})$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , cumpliendo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_1} & A \\ h_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Entonces existe un único  $h: X \rightarrow C$  de modo que se el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & A \\ & \searrow^{h_1} & & & \downarrow f \\ & & C & \xrightarrow{p_1} & A \\ & \searrow^{h_2} & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ & & B & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a square with  $X$  at the top left,  $C$  at the bottom left,  $A$  at the top right, and  $B$  at the bottom right. Arrows:  $X \xrightarrow{h_1} A$  (top),  $X \xrightarrow{h_2} B$  (left),  $C \xrightarrow{p_1} A$  (top),  $C \xrightarrow{p_2} B$  (left),  $A \xrightarrow{f} Y$  (right),  $B \xrightarrow{g} Y$  (right). A dashed arrow  $h: X \rightarrow C$  is shown from  $X$  to  $C$ . The text says this diagram is commutative, meaning  $p_i \circ h = h_i$  for  $i=1,2$ .)

Es decir  $p_i \circ h = h_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ .

Si en una categoría todo par de flechas con el mismo codominio posee pullbacks, entonces se dice que es una *categoría con pullbacks*.

**Proposición 1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría.

1. Los pullbacks de flechas de  $\mathcal{C}$ , si existen, son únicos salvo isomorfismo único.

Es decir, si  $(C, (p_1, p_2))$  y  $(D, (\pi_1, \pi_2))$  son pullbacks de las flechas de  $\mathcal{C}$   $A \xrightarrow{f} Y$  y  $B \xrightarrow{g} Y$ , entonces existe un único isomorfismo  $h: C \rightarrow D$  de modo que  $\pi_i \circ h = p_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ .

2. Los pullbacks de flechas de  $\mathcal{C}$ , si existen, se conservan por isomorfismos.

Es decir, si  $(C, (p_1, p_2))$  es un pullback de las flechas de  $A \xrightarrow{f} Y$  y  $B \xrightarrow{g} Y$ ; y  $h: C \rightarrow D$  es un isomorfismo, entonces  $(D, (p_1 \circ h^{-1}, p_2 \circ h^{-1}))$  es un pullback de  $f$  y  $g$ .

*Demostración.* 1. Sean  $(C, (p_1, p_2))$  y  $(D, (\pi_1, \pi_2))$  dos pullbacks de las flechas de  $\mathcal{C}$ ,  $A \xrightarrow{f} Y$  y  $B \xrightarrow{g} Y$ . Entonces por la propiedad universal del pullback ocurre lo siguiente:

Como  $f \circ p_1 = g \circ p_2$ , y  $(D, (\pi_1, \pi_2))$  es pullback existe una única flecha  $C \xrightarrow{h} D$  cumpliendo  $\pi_i \circ h = p_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Este es el único morfismo cumpliendo esta propiedad, así que si vemos que es isomorfismo habremos concluido esta parte de la demostración.

Como  $f \circ p_1 = g \circ p_2$ , usando que  $(C, (p_1, p_2))$  es pullback existe un único  $C \xrightarrow{x} C$  cumpliendo  $p_i \circ x = p_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Además se tiene que, por unicidad  $x = \text{Id}_C$ .

Como  $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$ , al ser  $(D, (\pi_1, \pi_2))$  pullback existe un único  $D \xrightarrow{y} D$  cumpliendo  $\pi_i \circ y = \pi_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Además por unicidad  $y = \text{Id}_D$ .

Como  $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$  y  $(C, (p_1, p_2))$  es el pullback, entonces existe un único  $D \xrightarrow{z} C$  cumpliendo  $p_i \circ z = \pi_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Veamos que  $z$  es el inverso de  $h$ .

Como  $\pi_i \circ (h \circ z) = (\pi_i \circ h) \circ z = p_i \circ z = \pi_i$  con  $i \in \{1, 2\}$  la unicidad indica que  $h \circ z = \text{Id}_D$ .

Se tiene que  $p_i \circ (z \circ h) = (p_i \circ z) \circ h = \pi_i \circ h = p_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $z \circ h = \text{Id}_C$  por unicidad.

2. Veamos que  $(D, (p_1 \circ h^{-1}, p_2 \circ h^{-1}))$  es un pullback de  $f$  y  $g$ .

Se tiene que  $f \circ (p_1 \circ h^{-1}) = (f \circ p_1) \circ h^{-1} = (g \circ p_2) \circ h^{-1} = g \circ (p_2 \circ h^{-1})$  por lo que cumple la primera propiedad. Veamos que cumple la propiedad universal.

Sea  $(X, (x_1, x_2))$ ,  $x_i: X \rightarrow Y$  con  $i \in \{1, 2\}$ , de modo que  $f \circ x_1 = g \circ x_2$ .

Por ser  $(C, (p_1, p_2))$  pullback existe una única flecha  $x: X \rightarrow C$  de modo que  $p_i \circ x = x_i$ .

Tomemos  $h \circ x: X \rightarrow D$ . Se tiene que  $(p_i \circ h^{-1}) \circ (h \circ x) = p_i \circ x = x_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , por lo que se ha probado la existencia de una flecha en las condiciones de la propiedad universal.

Veamos su unicidad. Sea  $y: X \rightarrow D$  cumpliendo  $(p_i \circ h^{-1}) \circ y = x_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ . Si esto es así  $h^{-1} \circ y$  esta en las condiciones de la flecha mediadora de la propiedad universal de  $(C, (p_1, p_2))$  y por ello la unicidad de  $x$  afirma que  $x = h^{-1} \circ y$ , y por tanto  $y = h \circ x$ , lo cual prueba la unicidad.  $\square$

**Proposición 1.4.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Sea  $(A \times_{\mathcal{C}} B, (p_1, p_2))$  el pullback de  $f: A \rightarrow C$  y  $g: B \rightarrow C$  y  $(A' \times_{\mathcal{C}} B', (p'_1, p'_2))$  el pullback de  $f': A' \rightarrow C$  y  $g': B' \rightarrow C$ . Si  $h: A \rightarrow A'$  y  $r: B \rightarrow B'$  son dos flechas en dicha categoría cumpliendo  $f' \circ h = f$  y  $g' \circ r = g$ .*

*Entonces existe una única flecha  $h \times_{\mathcal{C}} r: A \times_{\mathcal{C}} B \rightarrow A' \times_{\mathcal{C}} B'$  de modo que  $p'_1 \circ h \times_{\mathcal{C}} r = h \circ p_1$  y  $p'_2 \circ h \times_{\mathcal{C}} r = r \circ p_2$ .*

*Demostración.* Dado que  $f' \circ (h \circ p_1) = (f' \circ h) \circ p_1 = f \circ p_1 = g \circ p_2 = (g' \circ r) \circ p_2 = g' \circ (r \circ p_2)$  (donde hemos usado las hipótesis  $f' \circ h = f$  y  $g' \circ r = g$ ), se puede usar la propiedad universal del pullback  $(A' \times_{\mathcal{C}} B', (p'_1, p'_2))$ . Por tanto existe

una única flecha  $h \times_C r: A \times_C B \rightarrow A' \times_C B'$  cumpliendo  $p'_1 \circ h \times_C r = (h \circ p_1)$  y  $p'_2 \circ h \times_C r = (r \circ p_2)$ . Esto prueba la existencia y la unicidad.  $\square$

**Proposición 1.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sean  $C_1 \xrightarrow{s,t} C_0$  dos flechas en  $\mathcal{C}$ . Asumamos que puede construirse el siguiente pullback:*

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow t \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0, \end{array}$$

Supongamos que existe  $C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{k} C_1$  verificando los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ k \downarrow & & \downarrow s \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ k \downarrow & & \downarrow t \\ C_1 & \xrightarrow{t} & C_0, \end{array}$$

con el cual se pueden definir los siguientes pullbacks:

$$\begin{array}{ccc} (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ \pi'_2 \downarrow & & \downarrow t \circ k \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) & \xrightarrow{\pi''_1} & C_1 \\ \pi''_2 \downarrow & & \downarrow t \\ C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{s \circ k} & C_0. \end{array}$$

Entonces existe un único  $i: (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)$  cumpliendo:

$$\pi'_1 \circ i = \pi_1 \circ \pi'_1, \quad \pi_1 \circ \pi''_1 \circ i = \pi_2 \circ \pi'_1, \quad \pi_2 \circ \pi''_1 \circ i = \pi'_2.$$

Además dicho  $i$  es un isomorfismo.

*Demostración.*

- Existencia. Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ & \searrow \pi'_2 & \xrightarrow{\pi_2} C_1 \\ & \searrow \pi_2 \circ \pi'_1 & \downarrow \pi_1 \\ & & C_1 \xrightarrow{t} C_0. \end{array}$$

Como  $t \circ (\pi_2 \circ \pi'_1) = (t \circ \pi_2) \circ \pi'_1 = (t \circ k) \circ \pi'_1 = s \circ \pi'_2$ , la propiedad universal de los pullbacks dice que existe un único  $(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{f} C_1 \times_{C_0} C_1$  cumpliendo:

$$\pi_2 \circ f = \pi'_2, \quad \pi_1 \circ f = \pi_2 \circ \pi'_1.$$

Con  $f$  podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & & & & \\
 \searrow & & \xrightarrow{\pi_1 \circ \pi'_1} & & \\
 & C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) & \xrightarrow{\pi'_1} & C_1 & \\
 \searrow f & \downarrow \pi''_2 & & \downarrow t & \\
 & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{s \circ k} & C_0 & 
 \end{array}$$

Como  $(s \circ k) \circ f = (s \circ \pi_1) \circ f = s \circ (\pi_1 \circ f) = s \circ (\pi_2 \circ \pi'_1) = (s \circ \pi_2) \circ \pi'_1 = (t \circ \pi_1) \circ \pi'_1 = t \circ (\pi_1 \circ \pi'_1)$ , de nuevo por la propiedad del pullback existe un único  $i: (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)$  cumpliendo:

$$\pi'_1 \circ i = \pi_1 \circ \pi'_1, \quad \pi''_2 \circ i = f.$$

Por tanto esta  $i$  cumple que:

$$\pi'_1 \circ i = \pi_1 \circ \pi'_1, \quad \pi_1 \circ \pi''_2 \circ i = \pi_1 \circ f = \pi_2 \circ \pi'_1, \quad \pi_2 \circ \pi''_2 \circ i = \pi_2 \circ f = \pi'_2,$$

lo cual prueba la existencia del morfismo.

- Unicidad. Sea  $a: (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)$  cumpliendo:

$$\pi'_1 \circ a = \pi_1 \circ \pi'_1, \quad \pi_1 \circ \pi''_2 \circ a = \pi_2 \circ \pi'_1, \quad \pi_2 \circ \pi''_2 \circ a = \pi'_2.$$

Dado que  $\pi_2 \circ \pi''_2 \circ a = \pi'_2$  y  $\pi_1 \circ \pi''_2 \circ a = \pi_2 \circ \pi'_1$ , por unicidad de la flecha  $f$  se tiene que  $f = \pi''_2 \circ a$ .

Además, dado que  $f = \pi''_2 \circ a$  y  $\pi'_1 \circ a = \pi_1 \circ \pi'_1$ , la unicidad de  $i$  afirma que  $a = i$ , lo que da la unicidad del morfismo.

- $i$  es un isomorfismo.

Para verlo construiremos la inversa de  $i$  de un modo simétrico al de la construcción de este morfismo.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) & & & & \\
 \searrow & & \xrightarrow{\pi''_1} & & \\
 & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 & \\
 \searrow \pi_1 \circ \pi''_2 & \downarrow \pi_2 & & \downarrow t & \\
 & C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 & 
 \end{array}$$

Dado que  $s \circ (\pi_1 \circ \pi''_2) = (s \circ \pi_1) \circ \pi''_2 = (s \circ k) \circ \pi''_2 = t \circ \pi''_1$ , por la propiedad de los pullbacks existe un único  $g: C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) \rightarrow C_1 \times_{C_0} C_1$  cumpliendo:

$$\pi_1 \circ g = \pi''_1, \quad \pi_2 \circ g = \pi_1 \circ \pi''_2.$$

Al igual que con  $f, g$  permite la construcción del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) & & & & \\
 \searrow & & g & & \\
 & (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \\
 \searrow^{\pi_2 \circ \pi''_2} & \downarrow \pi'_2 & & \downarrow t \circ k & \\
 & C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 & 
 \end{array}$$

Como  $(t \circ k) \circ g = (t \circ \pi_2) \circ f = t \circ (\pi_2 \circ g) = t \circ (\pi_1 \circ \pi''_2) = (t \circ \pi_1) \circ \pi''_2 = (s \circ \pi_2) \circ \pi''_2 = s \circ (\pi_2 \circ \pi''_2)$ , se tiene, debido a la propiedad del pullback, que existe un único  $j: C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) \rightarrow (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1$  cumpliendo:

$$\pi'_1 \circ j = g, \quad \pi'_2 \circ j = \pi_2 \circ \pi''_2.$$

Veamos que  $i \circ j = \text{Id}_{C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)}$  y  $j \circ i = \text{Id}_{(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1}$ .

- $j \circ i = \text{Id}_{(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1}$ . Tomemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & & & & \\
 \searrow & & \pi_1 \circ \pi'_1 & & \\
 & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 & \\
 \searrow^{\pi_2 \circ \pi'_1} & \downarrow \pi_2 & & \downarrow t & \\
 & C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 & 
 \end{array}$$

Se da la conmutatividad del diagrama exterior por construcción, lo cual indica que existe un único  $l: (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1 \times_{C_0} C_1$  cumpliendo:

$$\pi_1 \circ l = \pi_1 \circ \pi'_1, \quad \pi_2 \circ l = \pi_2 \circ \pi'_1.$$

Es claro que  $\pi'_1$  cumple esas dos condiciones trivialmente.

Se tiene también que  $\pi_1 \circ (g \circ i) = (\pi_1 \circ g) \circ i = \pi'_1 \circ i = \pi_1 \circ \pi'_1$  y  $\pi_2 \circ (g \circ i) = (\pi_2 \circ g) \circ i = (\pi_1 \circ \pi''_2) \circ i = \pi_2 \circ \pi'_1$ .

La unicidad de  $l$  afirma que  $\pi'_1 = l = g \circ i$ , lo cual se usará a continuación.

Sea el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & & & & \\
 \searrow & & \pi'_1 & & \\
 & (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \\
 \searrow^{\pi'_2} & \downarrow \pi'_2 & & \downarrow t \circ k & \\
 & C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 & 
 \end{array}$$

El diagrama exterior conmuta trivialmente, por tanto existe un único  $h: (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \rightarrow (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1$  cumpliendo:

$$\pi'_1 \circ h = \pi'_1, \quad \pi'_2 \circ h = \pi'_2.$$

La flecha identidad lo cumple y, por tanto,  $h = \text{Id}_{(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1}$ .

También es cierto que  $\pi'_2 \circ (j \circ i) = (\pi'_2 \circ j) \circ i = (\pi_2 \circ \pi''_2) \circ i = \pi'_2$  y  $\pi'_1 \circ (j \circ i) = (\pi'_1 \circ j) \circ i = g \circ i = \pi'_1$ .

La unicidad de  $h$  prueba que  $j \circ i = h = \text{Id}_{(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1}$ .

- La prueba de  $i \circ j = \text{Id}_{C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)}$  se hace de manera análoga.

□

## 1.2. Funtores y equivalencias

**Definición 1.6.** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos categorías. Un *functor*  $F$  entre dichas categorías está formado por dos asignaciones:

- Una asignación es entre objetos de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , de modo que a cada objeto  $A$  de  $\mathbf{A}$  se le asigna un único objeto  $F(A)$  de  $\mathbf{B}$ .
- Una asignación entre flechas de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , donde se le asigna a cada flecha  $f$  de  $\mathbf{A}$  una única flecha  $F(f)$  de  $\mathbf{B}$ .

Además estas asignaciones deben cumplir las siguientes propiedades:

- Para toda flecha  $A \xrightarrow{f} B$  de  $\mathbf{A}$  debe cumplirse que  $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ .
- $F$  conserva las flechas identidad, es decir,  $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$  para todo objeto  $A$  de  $\mathbf{A}$ .
- $F$  conserva la composición, es decir, debe darse que  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  para cualquier par de flechas  $f$  y  $g$  de  $\mathbf{A}$  que se puedan componer.

Si  $F$  es un functor entre las categorías  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  lo denotaremos por  $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$ .

Además también podemos referirnos a  $F(A)$  como  $FA$  y  $F(f)$  como  $Ff$  siendo respectivamente objeto y flecha en la categoría  $\mathbf{B}$ .

A veces también indicaremos la asignación en ambos (objetos y flechas) al mismo tiempo, usando la siguiente expresión:

$$F(A \xrightarrow{f} B) = FA \xrightarrow{Ff} FB.$$

**Definición 1.7.** Se definen los siguientes funtores entre categorías:

1. Para cualquier categoría  $\mathbf{A}$  se define el *functor identidad*  $\text{Id}_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  como

$$\text{Id}_{\mathbf{A}}(B \xrightarrow{f} C) = B \xrightarrow{f} C.$$

2. Sean  $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$  y  $\mathbf{B} \xrightarrow{G} \mathbf{C}$  dos funtores. Se define el *functor composición de  $F$  con  $G$*  como el funtor  $\mathbf{A} \xrightarrow{G \circ F} \mathbf{C}$  dado por la siguiente expresión:

$$G \circ F(A \xrightarrow{f} B) = G(FA) \xrightarrow{G(Ff)} G(FB).$$

**Definición 1.8.** Sean  $F, G: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  dos funtores. Una *transformación natural*  $\tau$  de  $F$  a  $G$ , denotada por  $\tau: F \rightarrow G$  (o  $F \xrightarrow{\tau} G$ ), es una correspondencia que a cada objeto  $A$  de  $\mathbf{A}$  le asigna una única flecha  $\tau_A: FA \rightarrow GA$  de  $\mathbf{B}$  cumpliendo la siguiente propiedad:

Para toda flecha  $A \xrightarrow{f} A'$  en  $\mathbf{A}$  se cumple el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ \downarrow Ff & & \downarrow Gf \\ FA' & \xrightarrow{\tau_{A'}} & GA'. \end{array}$$

**Definición 1.9.** Sean  $F, G: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  dos funtores.

Se dirá que una transformación natural  $\tau: F \rightarrow G$  es un *isomorfismo natural* si y solo si para todo objeto  $A$  de  $\mathbf{A}$  la flecha  $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$  es un isomorfismo.

Se dirá que  $F$  y  $G$  son *naturalmente isomorfos* si y solo si existe un isomorfismo natural  $\tau: F \rightarrow G$ . Si es así se denotará  $F \cong G$ .

**Definición 1.10.** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos categorías.

Un funtor  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  se dice una *equivalencia* entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  si y solo si existe un funtor  $G: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  cumpliendo que  $F \circ G \cong \text{Id}_{\mathbf{B}}$  y  $G \circ F \cong \text{Id}_{\mathbf{A}}$ .

Se dirá que  $\mathbf{A}$  es *equivalente* a  $\mathbf{B}$  y se denotará por  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$  si y solo si existe una equivalencia entre ellas.

**Proposición 1.11.** Sea  $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un funtor.

Entonces, si  $\phi$  es un isomorfismo en  $\mathbf{C}$ , se tiene que  $F(\phi)$  es un isomorfismo en  $\mathbf{D}$ .

Además, si  $F$  es una equivalencia se tiene que  $\phi$  es isomorfismo en  $\mathbf{C}$  si y solo si  $F(\phi)$  es isomorfismo en  $\mathbf{D}$ .

*Demostración.* Sea  $\phi: A \rightarrow B$  un isomorfismo en  $\mathbf{C}$ . Por ser isomorfismo existe  $\phi^{-1}$  en  $\mathbf{A}$ . Es claro que  $F(\phi)$  y  $F(\phi^{-1})$  pueden componerse ya que, por la definición de funtor, tienen de dominio y codominio respectivamente  $F(A)$  y  $F(B)$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} F(\phi) \circ F(\phi^{-1}) &= F(\phi \circ \phi^{-1}) = F(\text{Id}_B) = \text{Id}_{F(B)}, \\ F(\phi^{-1}) \circ F(\phi) &= F(\phi^{-1} \circ \phi) = F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}. \end{aligned}$$

Por tanto  $F(\phi)$  es un isomorfismo con flecha inversa  $F(\phi)^{-1} = F(\phi^{-1})$ .

Supongamos ahora que  $F$  es una equivalencia. Por serlo existe un funtor  $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  cumpliendo que  $F \circ G \cong \text{Id}_{\mathbf{D}}$  y  $G \circ F \cong \text{Id}_{\mathbf{C}}$ . Denotemos por  $\tau: G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{C}}$  a la transformación natural que da el isomorfismo natural.

Si  $F(\phi): F(A) \rightarrow F(B)$  es isomorfismo entonces, por la primera parte de esta demostración, se tiene que  $GF(\phi): GF(A) \rightarrow GF(B)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}$ .

Por ser  $\tau$  una transformación natural se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} GF(A) & \xrightarrow{\tau_A} & A \\ \downarrow GF(\phi) & & \downarrow \phi \\ GF(B) & \xrightarrow{\tau_B} & B \end{array}$$

Donde  $\tau_A$  y  $\tau_B$  son isomorfismos por construcción.

En conclusión,  $\phi = \tau_B \circ GF(\phi) \circ (\tau_A)^{-1}$  es un isomorfismo por ser composición de isomorfismos (si  $f, g$  son isomorfismos, siendo el dominio de  $g$  el codominio de  $f$ , entonces  $g \circ f$  es un isomorfismo de inversa  $f^{-1} \circ g^{-1}$ ), como se quería demostrar.  $\square$

*Observación 1.12.* La demostración de la segunda parte puede rehacerse en el caso de tener dos funtores  $H$  y  $I$  naturalmente isomorfos. Usando el mismo diagrama se llega a que  $H(f)$  es isomorfismo si lo es  $I(f)$ . Usando de nuevo el argumento, por simetría, se tiene que para toda  $f$ , flecha en la categoría dominio de los funtores,  $H(f)$  es isomorfismo si y solo si  $I(f)$  es isomorfismo. En particular si  $H(A)$  es isomorfo a  $H(B)$  mediante  $H(f)$ , entonces  $I(A)$  es isomorfo a  $I(B)$  mediante  $I(f)$ .

**Corolario 1.13.** Si  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una equivalencia, entonces dos objetos  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{C}$  son isomorfos si y solo si  $F(A)$  y  $F(B)$  son isomorfos.

## 1.3. Categorías internas

**Definición 1.14.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con pullbacks.

Una *categoría interna* de  $\mathcal{C}$  esta formada por dos objetos  $C_1$  (*objeto de morfismos o flechas*) y  $C_0$  (*objeto de objetos*) de  $\mathcal{C}$  junto los cuatro morfismos siguientes:

- Dos morfismos  $C_1 \xrightarrow{s, t} C_0$ .  $s$  se denomina *morfismo dominio* y  $t$  *morfismo codominio*.
- Un morfismo  $k: C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$ , denominado *morfismo composición*, donde  $C_1 \times_{C_0} C_1$  es el pullback dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow t \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0. \end{array}$$

- Un morfismo  $e: C_0 \rightarrow C_1$ , denominado *morfismo asignador de identidades*.

Donde los morfismos anteriores deben satisfacer los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{I1)} & \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ & \searrow & \downarrow s \\ & \text{Id}_{C_0} & C_0. \end{array} & \mathbf{I2)} & \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ & \searrow & \downarrow t \\ & \text{Id}_{C_0} & C_0. \end{array} \\
 \mathbf{I3)} & \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ \downarrow k & & \downarrow s \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0. \end{array} & \mathbf{I4)} & \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ \downarrow k & & \downarrow t \\ C_1 & \xrightarrow{t} & C_0. \end{array}
 \end{array}$$

**I5)** Si  $(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1$  y  $C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)$  son los pullbacks dados por los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) & \xrightarrow{\pi''_1} & C_1 \\
 \pi'_2 \downarrow & & \downarrow t \circ k & \pi''_2 \downarrow & & \downarrow t \\
 C_1 & \xrightarrow{s} & C_0, & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{s \circ k} & C_0,
 \end{array}$$

entonces gracias a **I3)** e **I4)** podemos aplicar la Proposición 1.5 y afirmar que existe un único morfismo  $i: (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1)$  (el cual es un isomorfismo) cumpliendo:

$$\pi''_1 \circ i = \pi_1 \circ \pi'_1, \quad \pi_1 \circ \pi''_2 \circ i = \pi_2 \circ \pi'_1, \quad \pi_2 \circ \pi''_2 \circ i = \pi'_2.$$

Además, dado que  $t \circ \text{Id}_{C_1} = t$ ,  $s \circ k = (s \circ k)$ ,  $t \circ k = (t \circ k)$  y  $s \circ \text{Id}_{C_1} = s$  (son igualdades triviales) podemos aplicar la Proposición 1.4 para afirmar que existen dos morfismos únicos  $C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) \xrightarrow{\text{Id}_{C_1} \times_{C_0} k} C_1 \times_{C_0} C_1$  y  $(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{k \times_{C_0} \text{Id}_{C_1}} C_1 \times_{C_0} C_1$  verificando:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 \circ \text{Id}_{C_1} \times_{C_0} k &= \text{Id}_{C_1} \circ \pi''_1, \quad \pi_2 \circ \text{Id}_{C_1} \times_{C_0} k = k \circ \pi''_2, \\
 \pi_1 \circ k \times_{C_0} \text{Id}_{C_1} &= k \circ \pi'_1, \quad \pi_2 \circ k \times_{C_0} \text{Id}_{C_1} = \text{Id}_{C_1} \circ \pi'_2.
 \end{aligned}$$

Dados estas construcciones se pide cumplir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{k \times_{C_0} \text{Id}_{C_1}} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\
 \downarrow i & & \downarrow k \\
 C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) & & \\
 \downarrow \text{Id}_{C_1} \times_{C_0} k & & \\
 C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{k} & C_1.
 \end{array}$$

**I6)** Sean  $C_0 \times_{C_0} C_1$  y  $C_1 \times_{C_0} C_0$  los pullbacks dados por los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} C_0 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{p_1} & C_0 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{C_0} \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_0 & \xrightarrow{q_1} & C_1 \\ q_2 \downarrow & & \downarrow t \\ C_0 & \xrightarrow{\text{Id}_{C_0}} & C_0. \end{array}$$

Usando la Proposición 1.4 podemos tomar  $C_0 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{e \times_{C_0} \text{Id}_{C_1}} C_1 \times_{C_0} C_1$  ya que  $t \circ e = \text{Id}_{C_0}$  por **I2)** y  $s \circ \text{Id}_{C_1} = s$ . Volviendo a utilizarla tenemos  $C_1 \times_{C_0} C_0 \xrightarrow{\text{Id}_{C_1} \times_{C_0} e} C_1 \times_{C_0} C_1$  pues  $t \circ \text{Id}_{C_1} = t$  y  $s \circ e = \text{Id}_{C_0}$  por **I1)**.

Entonces debe darse el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_0 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{e \times_{C_0} \text{Id}_{C_1}} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xleftarrow{\text{Id}_{C_1} \times_{C_0} e} & C_1 \times_{C_0} C_0 \\ & \searrow p_2 & \downarrow k & \swarrow q_1 & \\ & & C_1 & & \end{array}$$

Si se dan las condiciones nos referiremos a la categoría interna mediante la 6-pla ordenada  $(C_1, C_0, s, t, e, k)$ .

**Definición 1.15.** Sean  $\mathcal{C} = (C_1, C_0, s, t, e, k)$  y  $\mathcal{C}' = (C'_1, C'_0, s', t', e', k')$  dos categorías internas en una categoría con pullbacks  $\mathcal{C}$ .

Un *functor interno* es un par de morfismos  $F_1: C_1 \rightarrow C'_1$  y  $F_0: C_0 \rightarrow C'_0$  en  $\mathcal{C}$ , cumpliendo los siguientes diagramas conmutativos:

$$\text{FI1)} \quad \begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_0 \\ C'_1 & \xrightarrow{s'} & C'_0. \end{array}$$

$$\text{FI2)} \quad \begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{t} & C_0 \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_0 \\ C'_1 & \xrightarrow{t'} & C'_0. \end{array}$$

$$\text{FI3)} \quad \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ \downarrow F_0 & & \downarrow F_1 \\ C'_0 & \xrightarrow{e'} & C'_1. \end{array}$$

$$\text{FI4)} \quad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{F_1 \times_{F_0} F_1} & C'_1 \times_{C'_0} C'_1 \\ \downarrow k & & \downarrow k' \\ C_1 & \xrightarrow{F_1} & C'_1. \end{array}$$

Donde  $F_1 \times_{F_0} F_1$  es el único morfismo dado por la propiedad universal del pullback en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & F_1 \circ \pi_1 \\ & & & & \curvearrowright \\ C_1 \times_{C_0} C_1 & & & & \\ & \searrow F_1 \times_{F_0} F_1 & & & \\ & & C'_1 \times_{C'_0} C'_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & C'_1 \\ & & \downarrow \pi'_2 & & \downarrow t' \\ & & C'_1 & \xrightarrow{s'} & C'_0 \\ & \searrow F_1 \circ \pi_2 & & & \end{array}$$

$\pi_i$  y  $\pi'_i$  son las proyecciones de los pullback  $C_1 \times_{C_0} C_1$  y  $C'_1 \times_{C'_0} C'_1$ , siendo estos los construidos en la definición de categoría interna.

Se puede aplicar la propiedad universal gracias a **FI1**) y **FI2**) y la construcción de  $C_1 \times_{C_0} C_1$ , ya que se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} s' \circ (F_1 \circ \pi_2) &= (s' \circ F_1) \circ \pi_2 = (F_0 \circ s) \circ \pi_2 = F_0 \circ (s \circ \pi_2) = F_0 \circ (t \circ \pi_1) \\ &= (F_0 \circ t) \circ \pi_1 = (t' \circ F_1) \circ \pi_1 = t' \circ (F_1 \circ \pi_1). \end{aligned}$$

Si se cumple la definición se denotará al funtor interno por  $(F_1, F_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ .

**Proposición 1.16.** Sean  $\mathcal{C} = (C_1, C_0, s, t, e, k)$ ,  $\mathcal{C}' = (C'_1, C'_0, s', t', e', k')$  y  $\mathcal{C}'' = (C''_1, C''_0, s'', t'', e'', k'')$  tres categorías internas de  $\mathcal{C}$ .

Sean  $(F_1, F_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  y  $(G_1, G_0): \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$  dos funtores internos.

Entonces  $(G_1 \circ F_1, G_0 \circ F_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$  es un funtor interno.

Además el par  $(\text{Id}_{C_1}, \text{Id}_{C_0})$  es un funtor interno de la categoría interna  $\mathcal{C}$  en sí misma.

*Demostración.* Empecemos probando que el par  $(\text{Id}_{C_1}, \text{Id}_{C_0})$  es un funtor interno.

Los diagramas **FI1**), **FI2**) y **FI3**) son inmediatos por ser  $\text{Id}_{C_1}$  e  $\text{Id}_{C_0}$  flechas identidad en  $\mathcal{C}$ .

Comprobemos **FI4**). Para ello veamos primero que flecha es  $\text{Id}_{C_1} \times_{\text{Id}_{C_0}} \text{Id}_{C_1}$ .

Sabemos que  $\text{Id}_{C_1} \times_{\text{Id}_{C_0}} \text{Id}_{C_1}$  es la única flecha con dominio y codominio  $C_1 \times_{C_0} C_1$  que cumple  $\pi_i \circ \text{Id}_{C_1} \times_{\text{Id}_{C_0}} \text{Id}_{C_1} = \text{Id}_{C_1} \circ \pi_i = \pi_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ . Por unicidad, como  $\text{Id}_{C_1 \times_{C_0} C_1}$  cumple la propiedad se concluye que  $\text{Id}_{C_1} \times_{\text{Id}_{C_0}} \text{Id}_{C_1} = \text{Id}_{C_1 \times_{C_0} C_1}$ .

Al ser esta última flecha la identidad el diagrama de **IF4**) se cumple, por lo que  $(\text{Id}_{C_1}, \text{Id}_{C_0})$  es un funtor interno.

Tomemos ahora el par de morfismos  $(G_1 \circ F_1, G_0 \circ F_0)$ . Por ser  $(F_1, F_0)$  y  $(G_1, G_0)$  funtores internos se cumple (usando la propiedad asociativa para quitar paréntesis):

$$\begin{aligned} s'' \circ G_1 \circ F_1 &= G_0 \circ s' \circ F_1 = G_0 \circ F_0 \circ s, \\ t'' \circ G_1 \circ F_1 &= G_0 \circ t' \circ F_1 = G_0 \circ F_0 \circ t, \\ e'' \circ G_0 \circ F_0 &= G_1 \circ e' \circ F_0 = G_1 \circ F_1 \circ e. \end{aligned}$$

Por lo que se cumplen **FI1**), **FI2**) y **FI3**).

Para ver que se cumple **FI4**) veamos que flecha es  $(G_1 \circ F_1) \times_{(G_0 \circ F_0)} (G_1 \circ F_1)$ . Sabemos que es la única flecha tal que  $\pi''_i \circ ((G_1 \circ F_1) \times_{(G_0 \circ F_0)} (G_1 \circ F_1)) = (G_1 \circ F_1) \circ \pi_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ .

Tomemos la flecha  $(G_1 \times_{G_0} G_1) \circ (F_1 \times_{F_0} F_1)$  que por construcción tiene el mismo dominio y codominio que la que estamos considerando. Veamos que es la misma.

Se cumple la siguiente igualdad (por simplicidad omitimos paréntesis en la composición gracias a la asociativa):

$$\pi''_i \circ (G_1 \times_{G_0} G_1) \circ (F_1 \times_{F_0} F_1) = G_1 \circ \pi'_i \circ (F_1 \times_{F_0} F_1) = G_1 \circ F_1 \circ \pi_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Por unicidad  $(G_1 \circ F_1) \times_{(G_0 \circ F_0)} (G_1 \circ F_1) = (G_1 \times_{G_0} G_1) \circ (F_1 \times_{F_0} F_1)$ .

Usando esto probemos que se cumple **IF4** (de nuevo omitiendo paréntesis):

$$\begin{aligned} k'' \circ ((G_1 \circ F_1) \times_{(G_0 \circ F_0)} (G_1 \circ F_1)) &= k'' \circ (G_1 \times_{G_0} G_1) \circ (F_1 \times_{F_0} F_1) \\ &= G_1 \circ k' \circ (F_1 \times_{F_0} F_1) = G_1 \circ F_1 \circ k. \end{aligned}$$

Por tanto,  $(G_1 \circ F_1, G_0 \circ F_0)$  es un funtor interno.  $\square$

**Definición 1.17.** Sean  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}'$  y  $\mathcal{C}''$  categorías internas de  $\mathcal{C}$ .

Sean  $(F_1, F_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  y  $(G_1, G_0): \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$  dos funtores internos.

Entonces se define la *composición* de  $(F_1, F_0)$  con  $(G_1, G_0)$  y se denota  $(G_1, G_0) \circ (F_1, F_0)$  como el funtor interno  $(G_1 \circ F_1, G_0 \circ F_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$ .

Al funtor interno  $(\text{Id}_{\mathcal{C}_1}, \text{Id}_{\mathcal{C}_0}): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  se denominan *funtor interno identidad*.

*Observación 1.18.* Dado que la composición de funtores internos viene dada por la composición en  $\mathcal{C}$ , se tiene que es asociativa.

La composición tiene unidad, pues  $(\text{Id}_{\mathcal{C}_1}, \text{Id}_{\mathcal{C}_0}): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un funtor interno.

Esto permite dar la siguiente definición.

**Definición 1.19.** Se denota por  $\mathbf{ICat}(\mathcal{C})$  la categoría que tiene como objetos las categorías internas de  $\mathcal{C}$ , como flechas los funtores internos en  $\mathcal{C}$  y como composición la composición de funtores internos e identidad los funtores internos identidad.



## Capítulo 2

# Trenzas y Módulos cruzados de álgebras de Lie

### 2.1. La categoría de álgebras de Lie

**Definición 2.1.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial.

Una aplicación  $K$ -bilineal  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$  (la cual se denotará sobre los elementos como  $[\cdot, \cdot](x, y) := [x, y], \forall x, y \in V$ ) se denomina *corchete de Lie* si cumple las siguientes propiedades:

1.  $[x, x] = 0, \forall x \in V$ .
2. Identidad de Jacobi:  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in V$ .

En este caso se dirá que el par  $(V, [\cdot, \cdot])$  es una  $K$ -álgebra de Lie o un álgebra de Lie sobre  $K$ .

*Notación 2.2.* Se hará un abuso de lenguaje denotando  $V = (V, [\cdot, \cdot])$  al afirmar que es un  $K$ -álgebra de Lie.

De este modo se denotará por  $V$  la  $K$ -álgebra de Lie, el  $K$ -espacio vectorial, el grupo abeliano y el conjunto base. De igual modo  $K$  denotará tanto el cuerpo como el conjunto subyacente.

*Observación 2.3.* Sea  $V$  un  $K$ -álgebra de Lie, entonces:

$$\begin{aligned} [x, y] &= -[y, x], & \forall x, y \in V, \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0, \forall x, y, z \in V. \end{aligned}$$

Cabe notar que la primera propiedad se denomina anticonmutatividad.

**Definición 2.4.** Sean  $V, W$  dos  $K$ -álgebras de Lie, entonces una aplicación  $K$ -lineal  $f: V \rightarrow W$  se dice *homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie* si cumple la siguiente propiedad:

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)], \quad \forall x, y \in V.$$

**Definición 2.5.** Se denota por  $\mathbf{LieAlg}_K$  la categoría que tiene como objetos las  $K$ -álgebras de Lie, como morfismos los homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie, como identidad la identidad usual y como composición la composición usual.

*Observación 2.6.* La categoría  $\mathbf{LieAlg}_K$  tiene pullbacks.

Dados  $M \xrightarrow{f} N$  y  $X \xrightarrow{g} N$  homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie, su pullback es el par  $(M \times_N X, (\pi_1, \pi_2))$  donde  $M \times_N X := \{(x, y) \in M \times X \mid f(x) = g(y)\}$ , y  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son las proyecciones usuales restringidas a  $M \times_N X$ . El corchete de Lie que se toma sobre el espacio vectorial  $M \times_N X$  se define, al igual que en  $M \times X$ , como  $[(x, y), (z, w)] = ([x, z], [y, w])$ .

**Definición 2.7.** Denominaremos  $K$ -álgebras de Lie categóricas a los objetos de la categoría  $\mathbf{ICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

**Definición 2.8.** Sean  $M$  y  $N$  dos  $K$ -álgebras de Lie, una acción de  $N$  sobre  $M$  es una aplicación  $K$ -bilineal  $\cdot : N \times M \rightarrow M$  (la cual denotaremos como  $n \cdot m := \cdot((n, m))$ ) verificando:

$$\mathbf{A1)} \quad [n, n'] \cdot m = n \cdot (n' \cdot m) - n' \cdot (n \cdot m), \quad \forall n, n' \in N, \forall m \in M,$$

$$\mathbf{A2)} \quad n \cdot [m, m'] = [n \cdot m, m'] + [m, n \cdot m'], \quad \forall m, m' \in M, \forall n \in N.$$

**Proposición 2.9.** Sean  $M$  y  $N$   $K$ -álgebras de Lie y  $\cdot : N \times M \rightarrow M$  una acción de  $N$  sobre  $M$ .

Entonces la aplicación  $K$ -bilineal  $[\cdot, \cdot] : (M \times N) \times (M \times N) \rightarrow M \times N$  definida como:

$$[(m, n), (m', n')] = ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']), \quad \forall m, m' \in M, \forall n, n' \in N,$$

(donde al definir se han usado los corchetes de Lie correspondientes a las  $K$ -álgebras de Lie  $M$  y  $N$ ) es un corchete de Lie.

*Demostración.* 1. Bilinealidad. (solo se probará en la primera componente, pues al probar a continuación que  $[x, x] = 0$ , la anticonmutatividad nos dará la linealidad en la segunda componente).

Sean  $\lambda, \mu \in K$ ,  $m, m', m'' \in M$ ,  $n, n', n'' \in N$ , se tiene:

$$\begin{aligned} & [\lambda(m, n) + \mu(m', n'), (m'', n'')] = [(\lambda m + \mu m', \lambda n + \mu n'), (m'', n'')] \\ & = ([\lambda m + \mu m', m''] + (\lambda n + \mu n') \cdot m'' - n'' \cdot (\lambda m + \mu m'), [\lambda n + \mu n', n'']) \\ & = (\lambda[m, m''] + \mu[m', m''] + \lambda(n \cdot m'') + \mu(n' \cdot m'') - \lambda(n'' \cdot m) \\ & \quad - \mu(n'' \cdot m'), \lambda[n, n''] + \mu[n', n'']) \\ & = (\lambda([m, m''] + (n \cdot m'') - (n'' \cdot m)) + \mu([m', m''] + (n' \cdot m'') \\ & \quad - (n'' \cdot m')), \lambda[n, n''] + \mu[n', n'']) \\ & = \lambda[(m, n), (m'', n'')] + \mu[(m', n'), (m'', n'')]. \end{aligned}$$

$$2. \quad [x, x] = 0, \quad \forall x \in M \times N.$$

Sea  $x = (m, n) \in M \times N$ , entonces:

$$[(m, n), (m, n)] = ([m, m] + n \cdot m - n \cdot m, [n, n]) = (0, 0) = 0.$$

## 3. Identidad de Jacobi.

Veamos el valor de  $[[a, b), (c, d), (e, f)]$  con  $a, c, e \in M, b, d, f \in N$ .

$$\begin{aligned} [[a, b), (c, d), (e, f)] &= [[a, c] + b \cdot c - d \cdot a, [b, d), (e, f)] \\ &= ([[a, c] + b \cdot c - d \cdot a, e] + [b, d) \cdot e - f \cdot ([a, c] + b \cdot c - d \cdot a), [[b, d), f]) \\ &= ([[a, c], e] + [b \cdot c, e] - [d \cdot a, e] + [b, d) \cdot e - f \cdot [a, c] - f \cdot (b \cdot c) \\ &\quad + f \cdot (d \cdot a), [[b, d), f]). \end{aligned}$$

Sean  $m, m', m'' \in M$  y  $n, n', n'' \in M$ .

Usando la fórmula anterior se puede observar que la segunda componente de la suma de los tres corchetes que aparecen en la identidad de Jacobi es  $[[n, n'), n''] + [[n', n''), n] + [[n'', n), n'] = 0$ , por la identidad de Jacobi en el corchete de Lie de  $N$ . Veamos que la primera componente también es nula.

Usando la conmutatividad de la suma, la primera componente (usando la fórmula mostrada) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &[[m, m'), m''] + [[m', m''), m] + [[m'', m), m'] \\ &- n'' \cdot [m, m') - [n'' \cdot m', m] + [n'' \cdot m, m'] \\ &- [n' \cdot m, m''] + [n' \cdot m'', m] - n' \cdot [m'', m] \\ &+ n'' \cdot (n' \cdot m) + [n', n'') \cdot m - n' \cdot (n'' \cdot m) \\ &+ [n \cdot m', m''] - n \cdot [m', m'') - [n \cdot m'', m'] \\ &- n'' \cdot (n \cdot m') + n \cdot (n'' \cdot m') + [n'', n) \cdot m' \\ &[n, n') \cdot m'' - n \cdot (n'' \cdot m'') + n' \cdot (n \cdot m''). \end{aligned}$$

Nótese que la primera, segunda y tercera columna son respectivamente reordenaciones la primera componente de  $[[m, n), (m', n'), (m'', n'')]$ ,  $[[m', n'), (m'', n''), (m, n)]$  y  $[[m'', n''), (m, n), (m', n')]$ . Además la suma de la primera fila es cero por la identidad de Jacobi en el corchete de Lie de  $M$ , la suma de la segunda, tercera y cuarta (por separado) da cero por el axioma **A1**) de acciones de  $N$  sobre  $M$  y la suma de la tercera, sexta y séptima es cero (en cada caso) por el axioma **A2**). Por tanto la primera coordenada es también cero, lo que prueba que se cumple la identidad de Jacobi.  $\square$

**Definición 2.10.** Sean  $M$  y  $N$   $K$ -álgebras de Lie,  $\cdot$  una acción de  $N$  sobre  $M$ .

El  $K$ -álgebra de Lie sobre el  $K$ -espacio vectorial  $M \times N$  dada por el corchete de Lie definido por

$$[(m, n), (m', n')] = ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']), \quad \forall m, m' \in M, \quad \forall n, n' \in N$$

se denomina producto semidirecto de  $M$  con  $N$  y se denota por  $M \rtimes N$ .

*Notación 2.11.* Se hará un abuso de lenguaje en la definición, pues en el producto semidirecto también se denotará el  $K$ -espacio vectorial producto (y por tanto el conjunto subyacente) por  $M \rtimes N$ .

## 2.2. Módulos cruzados de álgebras de Lie

**Definición 2.12.** Un *módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie* es una cuaterna ordenada  $(M, N, \cdot, \partial)$  donde  $M$  y  $N$  son  $K$ -álgebras de Lie,  $\cdot$  es una acción de  $N$  sobre  $M$  y  $\partial: M \rightarrow N$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie verificando:

$$\mathbf{M1)} \quad \partial(n \cdot m) = [n, \partial m], \quad \forall m \in M, \forall n \in N.$$

$$\mathbf{M2)} \quad \partial m \cdot m' = [m, m'], \quad \forall m, m' \in M.$$

Donde  $\partial m := \partial(m)$ .

**Proposición 2.13.** Sea  $(M, N, \cdot, \partial)$  un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie. Entonces la 6-pla ordenada  $(M \rtimes N, N, s, t, e, k)$ , donde:

- $M \rtimes N \xrightarrow{s} N$  está dada por  $s((m, n)) = n, \forall (m, n) \in M \rtimes N$ ;
- $M \rtimes N \xrightarrow{t} N$  está definida como  $t((m, n)) = \partial m + n, \forall (m, n) \in M \rtimes N$ ;
- $N \xrightarrow{e} M \rtimes N$  viene dada por  $e(n) = (0, n), \forall n \in N$ ;
- si  $((M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N), (\pi_1, \pi_2))$  es el pullback de  $t$  y  $s$ , entonces  $k$  es una aplicación,  $k: (M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N) \rightarrow M \rtimes N$  y se define como  $k(((m, n), (m', n')))) = (m + m', n)$ , donde  $((m, n), (m', n'))$  pertenece a  $(M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$ ;

es una  $K$ -álgebra de Lie categórica.

*Demostración.* Veamos en primer lugar que las aplicaciones son morfismos de la categoría  $\mathbf{LieAlg}_K$ .

- La aplicación  $M \rtimes N \xrightarrow{s} N$  definida como  $s((m, n)) = n, \forall (m, n) \in M \rtimes N$  es un morfismo en la categoría.

1.  $s$  es  $K$ -lineal pues si consideramos como espacio vectorial  $M \rtimes N = M \times N$ ,  $s$  es la segunda proyección.

2. Conserva los corchetes.

Sean  $(m, n), (m', n') \in M \rtimes N$ .

$$\begin{aligned} s([(m, n), (m', n')]) &= s([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']) \\ &= [n, n'] = [s((m, n)), s((m', n'))]. \end{aligned}$$

- La aplicación  $M \rtimes N \xrightarrow{t} N$  dada por  $t((m, n)) = \partial m + n, \forall (m, n) \in M \rtimes N$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

1. Es  $K$ -lineal.

Sean  $(m, n), (m', n') \in M \rtimes N, \lambda, \mu \in K$ . Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} t(\lambda(m, n) + \mu(m', n')) &= t((\lambda m + \mu m', \lambda n + \mu n')) \\ &= \partial(\lambda m + \mu m') + \lambda n + \mu n' = \lambda \partial m + \mu \partial m' + \lambda n + \mu n' \\ &= \lambda(\partial m + n) + \mu(\partial m' + n') = \lambda t((m, n)) + \mu t((m', n')). \end{aligned}$$

Donde hemos usado que  $\partial$  es  $K$ -lineal.

2. Conserva corchetes.

Sean  $(m, n), (m', n') \in M \rtimes N$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} t([(m, n), (m', n')]) &= t([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']) \\ &= \partial([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m) + [n, n'] \\ &= \partial([m, m']) + \partial(n \cdot m') - \partial(n' \cdot m) + [n, n'] \\ &= [\partial m, \partial m'] + [n, \partial m'] - [n', \partial m] + [n, n'] = [\partial m + n, \partial m' + n'] \\ &= [t((m, n)), t((m', n'))]. \end{aligned}$$

Se han usado el axioma **M1**).

- Se tiene que  $N \xrightarrow{e} M \rtimes N$  expresada como  $e(n) = (0, n)$ ,  $\forall n \in N$ , es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

1. Es  $K$ -lineal.

Sean  $n, n' \in N$ ,  $\lambda, \mu \in K$ .

$$e(\lambda n + \mu n') = (0, \lambda n + \mu n') = \lambda(0, n) + \mu(0, n') = \lambda e(n) + \mu e(n').$$

2. Conserva los corchetes.

Sea  $n \in N$ .

$$e([n, n']) = (0, [n, n']) = [(0, n), (0, n')] = [e(n), e(n')].$$

- Si  $((M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N), (\pi_1, \pi_2))$  es el pullback de  $t$  y  $s$ , entonces el conjunto  $(M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$  es el siguiente:

$$\{(m, n), (m', n') \in (M \times N) \times (M \times N) \mid \partial m + n = n'\},$$

ya que  $\partial m + n = t(m, n) = s(m', n') = n'$ . Es decir, es el conjunto de elementos de la forma  $((m, n), (m', \partial m + n))$  con  $m, m' \in M$ ,  $n \in N$ . La estructura de  $K$ -álgebra Lie es la dada para los pullbacks en la Observación 2.6.

Consideremos la aplicación  $k: (M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N) \rightarrow M \rtimes N$  de las hipótesis, la cual viene dada por  $k(((m, n), (m', \partial m + n))) = (m + m', n)$  donde  $((m, n), (m', \partial m + n))$  es un elemento de  $(M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$ .

Veamos que es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

1. Es  $K$ -lineal.

Sean  $((m, n), (m', \partial m + n)), ((p, q), (p', \partial p + q))$  elementos del conjunto  $(M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$  y  $\lambda, \mu \in K$ .

$$\begin{aligned} &k(\lambda((m, n), (m', \partial m + n)) + \mu((p, q), (p', \partial p + q))) \\ &= k(((\lambda m + \mu p, \lambda n + \mu q), (\lambda m' + \mu p', \lambda \partial m + \lambda n + \mu \partial p + \mu q))) \\ &= (\lambda m + \mu p + \lambda m' + \mu p', \lambda n + \mu q) = \lambda(m + m', n) + \mu(p + p', n) \\ &= \lambda k(((m, n), (m', \partial m + n))) + \mu k(((p, q), (p', \partial p + q))). \end{aligned}$$

2. Conserva los corchetes.

Sean  $((m, n), (m', \partial m + n)), ((p, q), (p', \partial p + q))$  elementos de la  $K$ -álgebra de Lie  $(M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$ .

$$\begin{aligned}
& k([((m, n), (m', \partial m + n)), ((p, q), (p', \partial p + q))]) \\
&= k([(m, n), (p, q)], [(m', \partial m + n), (p', \partial p + q)]) \\
&= k([m, p] + n \cdot p - q \cdot m, [n, q]), ([m', p'] + (\partial m + n) \cdot p' \\
&\quad - (\partial p + q) \cdot m', [\partial m + n, \partial p + q]) \\
&= ([m, p] + n \cdot p - q \cdot m + [m', p'] + (\partial m + n) \cdot p' - (\partial p + q) \cdot m', \\
&\quad [n, q]) \\
&= ([m, p] + n \cdot p - q \cdot m + [m', p'] + \partial m \cdot p' + n \cdot p' - \partial p \cdot m' \\
&\quad - q \cdot m', [n, q]) \\
&= ([m, p] + n \cdot p - q \cdot m + [m', p'] + [m, p'] + n \cdot p' - [p, m'] - q \cdot m', \\
&\quad [n, q]) \\
&= ([m + m', p + p'] + n \cdot (p + p') - q \cdot (m + m'), [n, q]) \\
&= [(m + m', n), (p + p', q)] \\
&= [k(((m, n), (m', \partial m + n))), k(((p, q), (p', \partial p + q)))] .
\end{aligned}$$

Donde se ha usado el axioma **M2**) y la anticonmutatividad del corchete.

Una vez visto que son morfismos, veamos que cumplen los axiomas de las categorías internas.

- Se cumple **I1**), es decir,  $s \circ e = \text{Id}_N$ .

Sea  $n \in N$ , se tiene que:

$$s \circ e(n) = s((0, n)) = n = \text{Id}_N(n).$$

- Se tiene **I2**), es decir,  $t \circ e = \text{Id}_N$ .

Sea  $n \in N$ , entonces:

$$t \circ e(n) = t((0, n)) = \partial 0 + n = n = \text{Id}_N(n).$$

- Se da **I3**), es decir,  $s \circ \pi_1 = s \circ k$ .

Sea  $((m, n), (m', \partial m + n)) \in (M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$ .

$$\begin{aligned}
s \circ \pi_1(((m, n), (m', \partial m + n))) &= s((m, n)) = n, \\
s \circ k(((m, n), (m', \partial m + n))) &= s((m + m', n)) = n.
\end{aligned}$$

- Se cumple **I4**), es decir,  $t \circ \pi_2 = t \circ k$ .

Sea  $((m, n), (m', \partial m + n)) \in (M \rtimes N) \times_N (M \rtimes N)$ .

$$\begin{aligned} t \circ \pi_2(((m, n), (m', \partial m + n))) &= t((m', \partial m + n)) = \partial m' + \partial m + n, \\ t \circ k(((m, n), (m', \partial m + n))) &= t((m + m', n)) = \partial(m + m') + n. \end{aligned}$$

Se concluye este apartado por la linealidad de  $\partial$ .

Por cumplirse los axiomas **I1**), **I2**), **I3**) e **I4**) se pueden hacer las construcciones de los axiomas **I5**) e **I6**); lo cual permite hablar de las flechas que están en la definición y tratar de probar los últimos dos axiomas.

- Se cumple **I5**), es decir,  $k \circ k \times_N \text{Id}_{M \rtimes N} = k \circ (\text{Id}_{M \rtimes N} \times_N k) \circ i$ .

Sea  $x \in (M \rtimes N \times_N M \rtimes N) \times_N M \rtimes N$ .  $x = (((m, n), (m', n')), (m'', n''))$  con  $m, m', m' \in M'$ ,  $n, n', n'' \in N$  cumpliendo  $\partial m + n = t((m, n)) = s(m', n') = n'$  y  $\partial m' + n' = t \circ k(((m, n), (m', n'))) = s((m'', n'')) = n''$ .

Veamos como funcionan las aplicaciones:

$$\begin{aligned} k \circ k \times_N \text{Id}_{M \rtimes N}(x) &= k(((m + m', n), (m'', n''))) = ((m + m') + m'', n), \\ k \circ (\text{Id}_{M \rtimes N} \times_N k) \circ i(x) &= k \circ (\text{Id}_{M \rtimes N} \times_N k)((m, n), ((m', n'), (m'', n''))) \\ &= k(((m, n), (m' + m'', n'))) = (m + (m' + m''), n). \end{aligned}$$

Por lo que se da la igualdad por la propiedad asociativa de la suma en  $M$ .

- Comprobemos que se cumple **I6**) en dos pasos, uno por cada diagrama conmutativo. Las aplicaciones  $p_2$  y  $q_1$  son las proyecciones usuales restringidas, como ya se comentó anteriormente.

- Se tiene que  $k \circ (e \times_N \text{Id}_{M \rtimes N}) = p_2$ .

En primer lugar veamos que conjunto es  $N \times_N (M \rtimes N)$ .

Si  $x \in N \times_N (M \rtimes N)$ , entonces  $x = (n, (m', n'))$ ,  $n, n' \in N$ ,  $m' \in M$  cumpliendo  $n = \text{Id}_N(n) = s((m', n')) = n'$ .

Se tiene lo siguiente:

$$k \circ (e \times_N \text{Id}_{M \rtimes N})(x) = k(((0, n), (m', n'))) = (m', n) = (m', n') = p_2(x).$$

- $k \circ (\text{Id}_{M \rtimes N} \times_N e) = q_1$ .

Veamos que conjunto es  $(M \rtimes N) \times_N N$ .

Sea  $x \in (M \rtimes N) \times_N N$ , entonces  $x = ((m, n), n')$ ,  $n, n' \in N$ ,  $m \in M$  cumpliendo  $\partial m + n = t((m, n)) = \text{Id}_N(n') = n'$ .

Por tanto.

$$k \circ (\text{Id}_{M \rtimes N} \times_N e)(x) = k(((m, n), (0, n'))) = (m, n) = q_1(x).$$

□

**Definición 2.14.** Sea  $(M, N, \cdot, \partial)$  un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie. Denominaremos a la categoría interna dada por la Proposición 2.13  $K$ -álgebra de Lie categórica asociada a  $(M, N, \cdot, \partial)$ .

*Observación 2.15.* Si  $s: A \rightarrow B$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie, entonces el conjunto

$$\ker(s) := \{x \in A \mid s(x) = 0_B\},$$

donde  $0_B$  es el elemento neutro del grupo abeliano  $B$ , hereda las operaciones de  $K$ -álgebra de Lie de  $A$ .

**Proposición 2.16.** *Sea  $(C_1, C_0, s, t, e, k)$  una  $K$ -álgebra de Lie categórica.*

*Entonces  $(\ker(s), C_0, \cdot, t|_{\ker(s)})$  es un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie, donde:*

- $t|_{\ker(s)}$  es la restricción de  $t$  a  $\ker(s)$ ,
- $\cdot: C_0 \times \ker(s) \rightarrow \ker(s)$  está dada por  $a \cdot x := [e(a), x]$  con  $a \in C_0$  y  $x \in \ker(s)$ .

*Demostración.* Se sabe que  $\ker(s)$  y  $C_0$  son  $K$ -álgebras de Lie.

Veamos que  $\cdot$  es una acción de  $C_0$  sobre  $\ker(s)$ .

- La aplicación está bien definida, pues si  $a \in C_0$  y  $x \in \ker(s)$  se tiene que  $s([e(a), x]) = [se(a), s(x)] = [a, 0] = 0$  y, por tanto  $[e(a), x] \in \ker(s)$ .
- Es una aplicación  $K$ -bilineal ya que el corchete es lineal en cada componente, nuestra aplicación coincide con él en su segunda componente y es la composición de  $e$  con la primera componente del corchete en su primera componente.
- Comprobemos los axiomas de acción.
  - Se da **A1**), es decir  $[a, b] \cdot x = a \cdot (b \cdot x) - b \cdot (a \cdot x)$  para  $a, b \in C_0$ ,  $x \in \ker(s)$ .

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot x &= [e([a, b]), x] = [[e(a), e(b)], x] \\ &= -[[e(b), x], e(a)] - [[x, e(a)], e(b)] = [e(a), [e(b), x]] - [e(b), [e(a), x]] \\ &= a \cdot (b \cdot x) - b \cdot (a \cdot x). \end{aligned}$$

- Se tiene **A2**), es decir  $a \cdot [x, y] = [a \cdot x, y] + [x, a \cdot y]$  para  $a \in C_0$ ,  $x, y \in \ker(s)$ .

$$\begin{aligned} a \cdot [x, y] &= [e(a), [x, y]] = -[x, [y, e(a)]] - [y, [e(a), x]] \\ &= [x, [e(a), y]] + [[e(a), x], y] = [x, a \cdot y] + [a \cdot x, y]. \end{aligned}$$

Veamos ahora que junto con  $t|_{\ker(s)}$  obtenemos un módulo cruzado. Denotemos  $\partial_t := t|_{\ker(s)}$ .

- $\partial_t$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie al ser la restricción de  $t$  a una  $K$ -álgebra de Lie con las mismas operaciones que  $C_1$ .
- Veamos que cumple los axiomas.

- Se verifica **M1**), es decir  $\partial_t(a \cdot x) = [a, \partial_t x]$  para  $x \in \ker(s)$ ,  $a \in C_0$ .

$$\partial_t(a \cdot x) = t([e(a), x]) = [t(e(a)), t(x)] = [a, \partial_t x].$$

- Se cumple **M2**), es decir  $\partial_t x \cdot y = [x, y]$ , para todo  $x, y \in \ker(s)$ .

$$\partial_t x \cdot y = [e(t(x)), y]$$

Si vemos que  $[e(t(x)), y] = [x, y]$  para  $x, y \in \ker(s)$  habremos acabado la demostración.

Sea  $z = (e(t(x)) - x)$ .

Se tiene que  $t(z) = t(e(t(x))) - t(x) = t(x) - t(x) = 0$  (ya que  $t(e(w)) = w$ ,  $\forall w \in C_0$  por **I2**). Por tanto, tiene sentido hablar de  $k((z, e(0)))$  ya que  $t(z) = 0 = s(0) = s(e(0))$ . Dado que  $y \in \ker(s)$ , tiene sentido hablar de  $k((e(0), y))$ , pues  $s(y) = 0 = t(0) = t(e(0))$ . Nótese que por **I6**)  $k((z, e(0))) = z$  y  $k((e(0), y)) = y$ .

Se usará esto para lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= k((0, 0)) = k([z, 0], [0, y]) = k([z, e(0)], [e(0), y]) \\ &= k([(z, e(0)), (e(0), y)]) = [k((z, e(0))), k((e(0), y))] = [z, y]. \end{aligned}$$

Para concluir, se tiene que

$$0 = [z, y] = [e(t(x)) - x, y] = [e(t(x)), y] - [x, y],$$

de donde se saca la igualdad. □

*Observación 2.17.* Nótese que en el último apartado de la demostración solo hemos usado que  $y \in \ker(s)$ , por lo que el resultado es cierto también para todo  $x \in C_1$ . Es decir  $[x, y] = [e(t(x)), y]$ ,  $\forall x \in C_1$ ,  $\forall y \in \ker(s)$ . También es cierto en estas condiciones que  $[y, x] = [y, e(t(x))]$ , por la anticonmutatividad.

**Definición 2.18.** En las condiciones de la Proposición 2.16 se denomina a  $(\ker(s), C_0, \cdot, t|_{\ker(s)})$  *módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie asociado a la categoría interna  $(C_1, C_0, s, t, e, k)$* . Además, cuando no provoque confusión, denotaremos en este contexto a  $t|_{\ker(s)}$  por  $\partial_t$ .

## 2.3. Trenzas en módulos cruzados de álgebras de Lie

Se introduce en esta sección el concepto de trenza sobre un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie y las  $K$ -álgebras de Lie categóricas (siendo la introducción de esta segunda motivada por lograr la equivalencia con entre las categorías con trenzas).

**Definición 2.19.** Sea  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial)$  un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.

Una *trenza* sobre  $\mathcal{X}$ , es una aplicación  $K$ -bilineal  $\{-, -\}: N \times N \rightarrow M$  (denotaremos  $\{-, -\}((n, n')) = \{n, n'\}$  para  $n, n' \in N$ ) verificando:

- B1)**  $\partial\{n, n'\} = [n, n']$ ,  $\forall n, n' \in N$ ,
- B2)**  $\{\partial m, \partial m'\} = [m, m']$ ,  $\forall m, m' \in M$ ,
- B3)**  $\{\partial m, n\} = -n \cdot m$ ,  $\forall m \in M, \forall n \in N$ ,
- B4)**  $\{n, \partial m\} = n \cdot m$   $\forall m \in M, \forall n \in N$ ,
- B5)**  $\{n, [n', n'']\} = \{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\}$ ,  $\forall n, n', n'' \in N$ ,
- B6)**  $\{[n, n'], n''\} = \{n, [n', n'']\} - \{n', [n, n'']\}$ ,  $\forall n, n', n'' \in N$ .

Si  $\{-, -\}$  es una trenza sobre  $(M, N, \cdot, \partial)$ , se dirá que  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  es un *módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie*.

*Notación 2.20.* Sea  $(C_1, C_0, s, t, e, k)$  una  $K$ -álgebra de Lie categórica, entonces si  $x \in C_1$  se escribirá  $x: s(x) \rightarrow t(x)$ .

Además, si  $x, y \in C_1$  con  $s(y) = t(x)$ , se escribirá  $y \circ x := k((x, y))$ .

*Observación 2.21.* Nótese que si  $x, y \in C_1$  entonces  $s([x, y]) = [s(x), s(y)]$  y  $t([x, y]) = [t(x), t(y)]$ . Por tanto,  $[x, y]: [s(x), s(y)] \rightarrow [t(x), t(y)]$ .

**Definición 2.22.** Sea  $\mathcal{C} = (C_1, C_0, s, t, e, k)$  una  $K$ -álgebra de Lie Categórica.

Una *trenza sobre  $\mathcal{C}$*  es una aplicación  $K$ -bilineal  $\tau: C_0 \times C_0 \rightarrow C_1$ , la cual, si se denota  $\tau_{a,b} := \tau((a, b))$ , cumple las siguientes propiedades:

**T1)**  $\tau_{a,b}: [a, b] \rightarrow [b, a]$ ,  $\forall a, b \in C_0$ .

**T2)** Se da el siguiente diagrama conmutativo para todo  $x, y \in C_1$ :

$$\begin{array}{ccc} [s(x), s(y)] & \xrightarrow{[x,y]} & [t(x), t(y)] \\ \downarrow \tau_{s(x), s(y)} & & \downarrow \tau_{t(x), t(y)} \\ [s(y), s(x)] & \xrightarrow{[y,x]} & [t(y), t(x)]. \end{array}$$

Es decir  $\tau_{t(x), t(y)} \circ [x, y] = [y, x] \circ \tau_{s(x), s(y)}$ .

**T3)**  $\tau_{a, [b, c]} = \tau_{[a, b], c} - \tau_{[a, c], b}$ ,  $\forall a, b, c \in C_0$ .

**T4)**  $\tau_{[a, b], c} = \tau_{a, [b, c]} - \tau_{b, [a, c]}$ ,  $\forall a, b, c \in C_0$ .

Si  $\tau$  es una trenza sobre  $\mathcal{C}$ , se dirá que el par  $(\mathcal{C}, \tau)$  es una  *$K$ -álgebra de Lie categórica trenzada*.

**Proposición 2.23.** *Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie.*

*Sea  $\mathcal{C} = (M \rtimes N, N, s, t, e, k)$  la  $K$ -álgebra de Lie categórica asociada al módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie  $(M, N, \cdot, \partial)$ .*

*Entonces la aplicación  $\tau: N \times N \rightarrow N \rtimes M$  dada por  $\tau_{n,n'} = (-2\{n, n'\}, [n, n'])$  para  $n, n' \in N$  es una trenza sobre  $\mathcal{C}$ .*

*Demostración.* Comprobemos que  $\tau$  es  $K$ -bilineal.

Sean  $n, n', n'' \in N$ ,  $\lambda, \mu \in K$ . Empezando por la primera componente se tiene que:

$$\begin{aligned} \tau_{\lambda n + \mu n', n''} &= (-2\{\lambda n + \mu n', n''\}, [\lambda n + \mu n', n'']) \\ &= (-\lambda 2\{n, n''\} - \mu 2\{n', n''\}, \lambda[n, n''] + \mu[n', n'']) \\ &= \lambda(-2\{n, n''\}, [n, n'']) + \mu(-2\{n', n''\}, [n', n'']) = \lambda\tau_{n, n''} + \mu\tau_{n', n''}. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene en la segunda componente.

Veamos que se cumplen los 4 axiomas.

- Comprobemos **T1**). Sean  $n, n' \in N$ , veamos que  $\tau_{n, n'}: [n, n'] \rightarrow [n', n]$ .

$$\begin{aligned} s(\tau_{n, n'}) &= s(-2\{n, n'\}, [n, n']) = [n, n'], \\ t(\tau_{n, n'}) &= t(-2\{n, n'\}, [n, n']) = -2\partial\{n, n'\} + [n, n'] \\ &= -2[n, n'] + [n, n'] = -[n, n'] = [n', n]. \end{aligned}$$

Donde hemos usado **B1**) y la anticonmutatividad para  $t$ .

- Veamos si se cumple el diagrama conmutativo dado en **T2**).

Sean  $x, y \in M \rtimes N$ ,  $x = (m, n)$ ,  $y = (m', n')$ , comprobemos que se cumple  $\tau_{t(x), t(y)} \circ [x, y] = [y, x] \circ \tau_{s(x), s(y)}$ .

$$\begin{aligned} &\tau_{t(x), t(y)} \circ [x, y] \\ &= k(((m, n), (m', n')), (-2\{\partial m + n, \partial m' + n'\}, [\partial m + n, \partial m' + n']))) \\ &= k(((m, m') + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']), (-2\{\partial m + n, \partial m' + n'\}, \\ &\quad [\partial m + n, \partial m' + n']))) \\ &= ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m - 2\{\partial m + n, \partial m' + n'\}, [n, n']) \\ &= ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m - 2\{\partial m, \partial m'\} - 2\{\partial m, n'\} - 2\{n, \partial m'\} \\ &\quad - 2\{n, n'\}, [n, n']) \\ &= ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m - 2[m, m'] + 2(n' \cdot m) - 2(n \cdot m') \\ &\quad - 2\{n, n'\}, [n, n']) \\ &= ([m', m] - n \cdot m' + n' \cdot m - 2\{n, n'\}, [n, n']). \end{aligned}$$

Donde se han usado **B2**), **B3**) y **B4**). Por otro lado:

$$\begin{aligned} &[y, x] \circ \tau_{s(x), s(y)} \\ &= k((( -2\{n, n'\}, [n, n'] ), ((m', n'), (m, n)))) \\ &= k((( -2\{n, n'\}, [n, n'] ), ((m', m) + n' \cdot m - n \cdot m', [n', n]))) \\ &= (-2\{n, n'\} + [m', m] + n' \cdot m - n \cdot m', [n, n']). \end{aligned}$$

Por tanto se da la igualdad.

■ Comprobemos **T3**).

Veamos que  $\tau_{n,[n',n'']} = \tau_{[n,n'],n''} - \tau_{[n,n''],n'}$ ,  $\forall n, n', n'' \in N$ :

$$\begin{aligned} & \tau_{[n,n'],n''} - \tau_{[n,n''],n'} \\ &= (-2\{[n,n'],n''\}, [[n,n'],n'']) - (-2\{[n,n''],n'\}, [[n,n''],n']) \\ &= (-2(\{[n,n'],n''\} - \{[n,n''],n'\}), [[n,n'],n''] - [[n,n''],n']) \\ &= (-2(\{[n,n'],n''\} - \{[n,n''],n'\}), -[n'',[n,n']] - [n',[n'',n]]) \\ &= (-2\{n,[n',n'']\}, [n,[n',n'']]) = \tau_{n,[n',n'']}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado **B5**) en la cuarta igualdad.

■ Veamos que se cumple **T4**).

Sean  $n, n', n'' \in N$ , veamos que  $\tau_{[n,n'],n''} = \tau_{n,[n',n'']} - \tau_{n',[n,n'']}$ .

$$\begin{aligned} & \tau_{n,[n',n'']} - \tau_{n',[n,n'']} \\ &= (-2\{n,[n',n'']\}, [n,[n',n'']]) - (-2\{n',[n,n'']\}, [n',[n,n'']]) \\ &= (-2(\{n,[n',n'']\} - \{n',[n,n'']\}), [n,[n',n'']] - [n',[n,n'']]) \\ &= (-2\{[n,n'],n''\}, -[[n',n''],n] - [[n'',n],n']) \\ &= (-2\{[n,n'],n''\}, [[n,n'],n'']) = \tau_{[n,n'],n''}. \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado **B6**) en la tercera igualdad.  $\square$

**Definición 2.24.** Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie. Denominaremos a  $(\mathcal{C}, \tau)$ , donde  $\mathcal{C}$  es la  $K$ -álgebra de Lie categórica asociada a  $(M, N, \cdot, \partial)$  y  $\tau$  es la trenza dada por la Proposición 2.23,  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada asociada a  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ .

**Proposición 2.25.** Sea  $K$  es un cuerpo de característica diferente de 2.

Sea  $(\mathcal{C}, \tau) = ((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  una  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada y  $\mathcal{X} = (\ker(s), C_0, \cdot, \partial_t)$  el módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie asociado a la categoría interna  $\mathcal{C}$ .

Entonces  $\{-, -\}: C_0 \times C_0 \rightarrow \ker(s)$  definida por  $\{a, b\} := \frac{e([a,b]) - \tau_{a,b}}{2}$  para  $a, b \in C_0$  es una trenza sobre  $\mathcal{X}$ .

*Demostración.* En primer lugar veamos que esta bien definida (nótese que por ser  $K$  de característica diferente de dos podemos dividir por este número, con lo que la expresión tiene sentido).

Para ver esto tomemos  $a, b \in C_0$  y comprobemos que  $\{a, b\} \in \ker(s)$ .

$$s(\{a, b\}) = s\left(\frac{e([a,b]) - \tau_{a,b}}{2}\right) = \frac{1}{2}(s(e([a,b])) - s(\tau_{a,b})) = \frac{1}{2}([a,b] - [a,b]) = 0.$$

Donde hemos usado que  $s \circ e = \text{Id}_{C_0}$  y el Axioma **T1**).

Comprobemos ahora que se trata de una aplicación  $K$ -bilineal.

Sean  $\lambda, \mu \in K$ ,  $a, b, c \in C_0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \{\lambda a + \mu b, c\} &= \frac{e([\lambda a + \mu b, c]) - \tau_{\lambda a + \mu b, c}}{2} \\ &= \frac{\lambda e([a, c]) + \mu e([b, c]) - \lambda \tau_{a, c} - \mu \tau_{b, c}}{2} \\ &= \lambda \frac{e([a, c]) - \tau_{a, c}}{2} + \mu \frac{e([b, c]) - \tau_{b, c}}{2} = \lambda \{a, c\} + \mu \{b, c\}. \end{aligned}$$

La  $K$ -bilinealidad en la segunda componente se hace de modo análogo.

En ambas hemos usado la  $K$ -bilinealidad del corchete de Lie y  $\tau$ , junto con la  $K$ -linealidad de  $e$ .

Veamos ahora que se cumplen los axiomas para ver que es una trenza sobre  $(\ker(s), C_0, \cdot, \partial_t)$ .

- Comprobemos **B1)**:

Sean  $a, b \in C_0$ , veamos que  $\partial_t \{a, b\} = [a, b]$ .

$$\begin{aligned} \partial_t \{a, b\} &= \partial_t \left( \frac{e([a, b]) - \tau_{a, b}}{2} \right) = t \left( \frac{e([a, b]) - \tau_{a, b}}{2} \right) \\ &= \frac{t(e([a, b])) - t(\tau_{a, b})}{2} = \frac{[a, b] - [b, a]}{2} = \frac{2[a, b]}{2} = [a, b]. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que  $t \circ e = \text{Id}_{C_0}$  y parte del axioma **T1)**.

- Verifiquemos **B2)**, es decir que  $\{\partial_t x, \partial_t y\} = [x, y]$  para  $x, y \in \ker(s)$ .

$$\{\partial_t x, \partial_t y\} = \frac{e([\partial_t x, \partial_t y]) - \tau_{\partial_t x, \partial_t y}}{2} = \frac{e([t(x), t(y)]) - \tau_{t(x), t(y)}}{2}.$$

Veamos que  $\frac{e([t(x), t(y)]) - \tau_{t(x), t(y)}}{2} = [x, y]$ .

Por el Axioma **T2)** sabemos que se tiene la siguiente igualdad:

$$k([x, y], \tau_{t(x), t(y)}) = k((\tau_{s(x), s(y)}, [y, x])).$$

Como  $x \in \ker(s)$  (de igual modo para  $y$ ) se tiene que  $\tau_{s(x), s(y)} = \tau_{0, 0} = 0$  por bilinealidad. Se tiene entonces que

$$k((\tau_{s(x), s(y)}, [y, x])) = k((0, [y, x])),$$

y por tanto la siguiente igualdad:

$$k([x, y], \tau_{t(x), t(y)}) = k((0, [y, x])).$$

Usando ahora la linealidad de  $k$  en la expresión anterior, se obtiene lo siguiente:

$$0 = k([x, y], \tau_{t(x), t(y)} - [y, x]).$$

Dado que  $t(\tau_{t(x), t(y)} - [y, x]) = [t(y), t(x)] - [t(y), t(x)] = 0 = s(e(0))$  podemos hablar de  $k((\tau_{t(x), t(y)} - [y, x], e(0)))$ .

Además  $k((\tau_{t(x),t(y)} - [y, x], e(0))) = \tau_{t(x),t(y)} - [y, x]$  por el Axioma **I6** de categorías internas.

Sumando ambas igualdades y usando la linealidad de  $k$  se obtiene lo siguiente:

$$k(([x, y] + \tau_{t(x),t(y)} - [y, x], \tau_{t(x),t(y)} - [y, x])) = \tau_{t(x),t(y)} - [y, x].$$

Esto puede reescribirse por la anticonmutatividad del corchete como

$$k((2[x, y] + \tau_{t(x),t(y)}, \tau_{t(x),t(y)} - [y, x])) = \tau_{t(x),t(y)} - [y, x].$$

Como  $s(\tau_{t(x),t(y)} - [y, x]) = [t(x), t(y)] - 0 = [t(x), t(y)]$  tiene sentido hablar de  $k((e([t(x), t(y)]), \tau_{t(x),t(y)} - [y, x]))$  (lo cual es igual a  $\tau_{t(x),t(y)} - [y, x]$  de nuevo por **I6**).

Restando ambas igualdades y usando la linealidad de  $k$  obtenemos:

$$k((2[x, y] + \tau_{t(x),t(y)} - e([t(x), t(y)]), 0)) = 0.$$

Usando de nuevo **I6** se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= k((2[x, y] + \tau_{t(x),t(y)} - e([t(x), t(y)]), 0)) \\ &= k((2[x, y] + \tau_{t(x),t(y)} - e([t(x), t(y)]), e(0))) \\ &= 2[x, y] + \tau_{t(x),t(y)} - e([t(x), t(y)]). \end{aligned}$$

Lo cual, al ser el cuerpo de característica diferente de 2, nos da la igualdad requerida.

- Veamos ahora que se cumple **B3**.

Sean  $a \in C_0, x \in \ker(s)$ , probemos que  $\{\partial_t x, a\} = -a \cdot x$ .

$$\{\partial_t x, a\} = \frac{e([\partial_t x, a]) - \tau_{\partial_t x, a}}{2} = \frac{e([t(x), a]) - \tau_{t(x), a}}{2}.$$

Es claro que  $[x, e(a)]: [s(x), a] \rightarrow [t(x), a]$  y por ello, usando **T2** se tiene lo siguiente:

$$k(([x, e(a)], \tau_{t(x), a})) = k((\tau_{s(x), a}, [e(a), x])).$$

Como  $x \in \ker(s)$  se da que  $\tau_{a, s(x)} = \tau_{a, 0} = 0 = e(0)$ . Por esto último se tiene (usando el Axioma **I6**) la siguiente identidad:

$$k(([x, e(a)], \tau_{t(x), a})) = k((0, [e(a), x])).$$

Usando la linealidad de  $k$  se obtiene la siguiente igualdad:

$$k(([x, e(a)], \tau_{t(x), a} - [e(a), x])) = 0.$$

Como  $t(\tau_{t(x), a} - [e(a), x]) = [a, t(x)] - [a, t(x)] = 0$  (hemos usado el Axioma **I2**) podemos hablar de  $k((\tau_{t(x), a} - [e(a), x], e(0))) = \tau_{t(x), a} - [e(a), x]$  (la

igualdad por el Axioma **I6**). Al sumar esta expresión con la anterior, usando la linealidad de  $k$  y la anticonmutatividad del corchete obtenemos:

$$k((\tau_{t(x),a} - 2[e(a), x], \tau_{t(x),a} - [e(a), x])) = \tau_{t(x),a} - [e(a), x].$$

Como  $s(\tau_{t(x),a} - [e(a), x]) = [t(x), a] - 0 = [t(x), a]$  podemos hablar de  $k((e([t(x), a]), \tau_{t(x),a} - [e(a), x])) = \tau_{t(x),a} - [e(a), x]$  (la igualdad está dada por **I6**). Restando las igualdades y usando la linealidad de  $k$  se obtiene:

$$k((\tau_{t(x),a} - 2[e(a), x] - e([t(x), a]), 0)) = 0$$

Usando de nuevo **I6**):

$$\begin{aligned} 0 &= k((\tau_{t(x),a} - 2[e(a), x] - e([t(x), a]), 0)) \\ &= k((\tau_{t(x),a} - 2[e(a), x] - e([t(x), a]), e(0))) \\ &= \tau_{t(x),a} - 2[e(a), x] - e([t(x), a]) = \tau_{t(x),a} - 2a \cdot x - e([t(x), a]). \end{aligned}$$

Por ser el cuerpo de característica diferente de 2, obtenemos la igualdad.

- Veamos que se cumple **B4**)

Sean  $a \in C_0$ ,  $x \in \ker(s)$ , probemos que  $\{a, \partial_t x\} = a \cdot x$ .

Se tiene la siguiente igualdad:

$$\{a, \partial_t x\} = \frac{e([a, \partial_t x]) - \tau_{a, \partial_t x}}{2} = -\frac{e([\partial_t x, a]) - (-\tau_{a, \partial_t x})}{2}$$

Si vemos que  $\tau_{a, \partial_t x} = -\tau_{\partial_t x, a}$  entonces, usando el apartado anterior,  $\{a, \partial_t x\} = -\{\partial_t x, a\} = -(-a \cdot x) = a \cdot x$ .

Veamos por tanto que  $\tau_{a, \partial_t x} = -\tau_{\partial_t x, a}$ .

Es claro que  $[x, e(a)]: [s(x), a] \rightarrow [t(x), a]$  y  $[e(a), x]: [a, s(x)] \rightarrow [a, t(x)]$ .

Por ello, usando **T2**) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} k(([x, e(a)], \tau_{t(x),a})) &= k((\tau_{s(x),a}, [e(a), x])), \\ k(([e(a), x], \tau_{a,t(x)})) &= k((\tau_{a,s(x)}, [x, e(a)]). \end{aligned}$$

Sumando ambas y usando la linealidad de  $k$  obtenemos:

$$\begin{aligned} &k((([x, e(a)] + [e(a), x], \tau_{t(x),a} + \tau_{a,t(x)})) \\ &= k((\tau_{s(x),a} + \tau_{a,s(x)}, [e(a), x] + [x, e(a)]). \end{aligned}$$

Como  $s(x) = 0$  por hipótesis y  $\tau$  es  $K$ -bilineal se tiene que  $\tau_{s(x),a} = \tau_{0,a} = 0 = \tau_{a,0} = \tau_{a,s(x)}$ . Usando esto en la igualdad anterior junto que  $k$  es  $K$ -lineal se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= k(0 + 0, 0) = k((([x, e(a)] + [e(a), x], \tau_{t(x),a} + \tau_{a,t(x)})) \\ &= k((0, \tau_{t(x),a} + \tau_{a,t(x)})) = k((e(0), \tau_{t(x),a} + \tau_{a,t(x)})) \\ &= \tau_{t(x),a} + \tau_{a,t(x)}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado **I6**) en la última igualdad. De la igualdad anterior se saca, despejando, que  $\tau_{a, \partial_t x} = -\tau_{\partial_t x, a}$ , como se quería demostrar.

- Verifiquemos **B5**).

Sean  $a, b, c \in C_0$  veamos que  $\{a, [b, c]\} = \{[a, b], c\} - \{[a, c], b\}$ .

$$\begin{aligned}
\{a, [b, c]\} &= \frac{e([a, [b, c]]) - \tau_{a,[b,c]}}{2} \\
&= \frac{e(-[b, [c, a]] - [c, [a, b]]) - \tau_{[a,b],c} + \tau_{[a,c],b}}{2} \\
&= \frac{-e([[a, c], b]) + e([[a, b], c]) - \tau_{[a,b],c} + \tau_{[a,c],b}}{2} \\
&= \frac{e([[a, b], c]) - \tau_{[a,b],c}}{2} - \frac{e([[a, c], b]) - \tau_{[a,c],b}}{2} \\
&= \{[a, b], c\} - \{[a, c], b\}.
\end{aligned}$$

Donde se ha usado el Axioma **T3**) en la primera igualdad.

- Por último veamos que se cumple **B6**). Sean  $a, b, c \in C_0$  comprobemos que  $\{[a, b], c\} = \{a, [b, c]\} - \{b, [a, c]\}$ .

$$\begin{aligned}
\{[a, b], c\} &= \frac{e([[a, b], c]) - \tau_{[a,b],c}}{2} \\
&= \frac{e(-[[b, c], a] - [[c, a], b]) - \tau_{a,[b,c]} + \tau_{b,[a,c]}}{2} \\
&= \frac{e([a, [b, c]]) - e([b, [a, c]]) - \tau_{a,[b,c]} + \tau_{b,[a,c]}}{2} \\
&= \frac{e([a, [b, c]]) - \tau_{a,[b,c]}}{2} - \frac{e([b, [a, c]]) - \tau_{b,[a,c]}}{2} \\
&= \{a, [b, c]\} - \{b, [a, c]\}.
\end{aligned}$$

Donde hemos usado el Axioma **T4**). □

**Definición 2.26.** Sea  $((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  una  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada.

Se denomina  $K$ -módulo cruzado trenzado de álgebras de Lie asociado a  $((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  a la 5-pla ordenada  $(\ker(s), C_0, \cdot, \partial_t, \{-, -\})$ , donde se tiene que  $(\ker(s), C_0, \cdot, \partial_t)$  es el módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie asociado a  $(C_1, C_0, s, t, e, k)$  y  $\{-, -\}$  es la trenza dada por la Proposición 2.25.

**Definición 2.27.** Sean  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  y  $(M', N', *, \partial', \{-, -\}')$  dos módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Se dirá que  $(f_1, f_2): (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}) \rightarrow (M', N', *, \partial', \{-, -\}')$  es un *homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie* si se tiene que  $f_1, f_2 \in \text{Arw}(\mathbf{LieAlg}_K)$ ,  $f_1: M \rightarrow M'$  y  $f_2: N \rightarrow N'$ , y además se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{BH1)} \quad f_1(n \cdot m) = f_2(n) * f_1(m) \quad \forall m \in M, \forall n \in N.$$

$$\text{BH2)} \quad f_2 \circ \partial = \partial' \circ f_1.$$

$$\text{BH3) } \{f_2(n), f_2(n')\}' = f_1(\{n, n'\}) \quad \forall n, n' \in N.$$

**Proposición 2.28.** Sean  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ ,  $\mathcal{X}' = (M', N', *, \partial', \{-, -\})'$  y  $\mathcal{X}'' = (M'', N'', \star, \partial'', \{-, -\})''$  tres módulos cruzados trenzados de álgebras de Lie. Entonces:

- Si  $\mathcal{X} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}' \xrightarrow{(g_1, g_2)} \mathcal{X}''$  son homomorfismos de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie, entonces  $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.
- $(\text{Id}_M, \text{Id}_N): (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}) \rightarrow (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados  $K$ -álgebras de Lie.

*Demostración.* Es inmediata. □

*Observación 2.29.* La proposición anterior afirma que si  $(f_1, f_2)$  y  $(g_1, g_2)$  son homomorfismos de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie y  $f_1, f_2$  son tienen respectivamente, como codominio el dominio de  $g_1, g_2$ ; entonces puede definirse la composición  $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) := (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2)$ .

Esta composición es asociativa por construcción, ya que proviene de la composición de una categoría, y tiene como identidad a los morfismos de la forma  $(\text{Id}_M, \text{Id}_N)$  con  $M$  y  $N$   $K$ -álgebras de Lie. Este último par es homomorfismo de módulos cruzados trenzados, también por la proposición anterior. Esto permite dar la siguiente definición.

**Definición 2.30.** Denotaremos por  $\mathbf{BXLieAlg}_K$  a la categoría que tiene como objetos los módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie, como flechas los homomorfismos de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie y como composición e identidad las mencionadas en la observación anterior.

**Definición 2.31.** Sean  $((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  y  $((C'_1, C'_0, s', t', e', k'), \tau')$  dos  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas.

Un funtor interno  $F = (F_1, F_0): (C_1, C_0, s, t, e, k) \rightarrow (C'_1, C'_0, s', t', e', k')$  se dice *funtor interno trenzado* (o *funtor interno trenzado de  $K$ -álgebras de Lie*) entre  $((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  y  $((C'_1, C'_0, s', t', e', k'), \tau')$  si cumple:

$$F_1(\tau_{a,b}) = \tau'_{F_0(a), F_0(b)}, \quad \forall a, b \in C_0.$$

**Proposición 2.32.** Sean  $(\mathcal{C}, \tau) \xrightarrow{F=(F_1, F_0)} (\mathcal{C}', \tau') \xrightarrow{G=(G_1, G_0)} (\mathcal{C}'', \tau'')$  dos funtores internos trenzados. Entonces  $(\mathcal{C}, \tau) \xrightarrow{G \circ F=(G_1 \circ F_1, G_0 \circ F_0)} (\mathcal{C}'', \tau'')$  es un funtor interno trenzado.

Sea  $(\mathcal{C}, \tau)$  un  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada. Entonces el funtor interno identidad pensado entre  $(\mathcal{C}, \tau)$  y sí misma es un funtor interno trenzado. Es decir  $\text{Id}_{\mathcal{C}} = (\text{Id}_{C_1}, \text{Id}_{C_0}): (\mathcal{C}, \tau) \rightarrow (\mathcal{C}, \tau)$  es un funtor interno trenzado.

*Demostración.* Es consecuencia directa de las definiciones. □

**Definición 2.33.** Denotaremos por  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$  a la categoría que tiene como objetos las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas, como flechas los funtores internos trenzados, como composición la composición de funtores internos y como identidades los funtores internos identidad (entendidos ambos con dominio y codominio una  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada).

## Capítulo 3

# Equivalencia entre módulos cruzados trenzados y álgebras de Lie categóricas trenzadas

En este capítulo se mostrará la equivalencia entre las categorías  $BXLieAlg_K$  y  $BICat(LieAlg_K)$  (cuando la característica de  $K$  es diferente de 2) definidas en el capítulo anterior.

**Proposición 3.1.**  $\Delta: BXLieAlg_K \rightarrow BICat(LieAlg_K)$  definido como:

$$\Delta((M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}) \xrightarrow{(f_1, f_2)} (M', N', *, \partial', \{-, -\}')) = \mathcal{C} \xrightarrow{(f_1 \times f_2, f_2)} \mathcal{C}',$$

donde  $\mathcal{C} = ((M \rtimes N, N, s, t, e, k), \tau)$ ,  $\mathcal{C}' = ((M' \rtimes N', N', s', t', e', k'), \tau')$  son las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas asociadas respectivamente a los módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie y  $f_1 \times f_2: M \rtimes N \rightarrow M' \rtimes N'$  es la aplicación dada por  $f_1 \times f_2((m, n)) = (f_1(m), f_2(n))$  con  $(m, n) \in M \rtimes N$ ; es un funtor.

*Demostración.* En primer lugar veamos que está bien definido, es decir, que  $(f_1 \times f_2, f_2)$  es un funtor interno trenzado.

Es claro que  $f_2: N \rightarrow N'$  es homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie por construcción, por lo que hemos de ver que  $f_1 \times f_2$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

Es  $K$ -lineal por ser lineal en cada componente, por lo que solo tenemos que ver que conserva los corchetes.

Sea  $(m, n), (m', n') \in M \rtimes N$ , entonces:

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2([(m, n), (m', n')]) &= f_1 \times f_2([(m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']]) \\ &= (f_1([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m), f_2([n, n']]) \\ &= (f_1[m, m'] + f_1(n \cdot m') - f_1(n' \cdot m), [f_2(n), f_2(n')]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ([f_1(m), f_1(m')] + f_2(n) * f_1(m') - f_2(n') * f_1(m), [f_2(n), f_2(n')]) \\
&= [(f_1(m), f_2(n)), (f_1(m'), f_2(n'))] = [f_1 \times f_2(m, n), f_1 \times f_2(m', n')].
\end{aligned}$$

Veamos que cumple los axiomas de funtor interno.

- Se cumple **FI1**), es decir  $f_2 \circ s = s' \circ f_1 \times f_2$ .

Para verlo consideremos  $(m, n) \in M \times N$ .

$$f_2 \circ s((m, n)) = f_2(n) = s'((f_1(m), f_2(n))) = s' \circ f_1 \times f_2((m, n)).$$

- Verifiquemos **FI2**), veamos que  $f_2 \circ t = t' \circ f_1 \times f_2$ .

Sea  $(m, n) \in M \times N$ :

$$\begin{aligned}
f_2 \circ t((m, n)) &= f_2(\partial m + n) = f_2(\partial m) + f_2(n) \\
&= \partial' f_1(m) + f_2(n) = t'(f_1(m), f_2(n)) = t' \circ f_1 \times f_2((m, n)).
\end{aligned}$$

- Comprobemos **FI3**), es decir, que  $f_2 \times f_1 \circ e = e' \circ f_2$ .

Sea  $n \in N$ , entonces:

$$f_1 \times f_2 \circ e(n) = f_1 \times f_2((0, n)) = (0, f_2(n)) = e'(f_2(n)) = e' \circ f_2(n).$$

- Por último veamos que se cumple **FI4**), es decir, se tiene que  $f_1 \times f_2 \circ k = k' \circ (f_1 \times f_2) \times_{f_2} (f_1 \times f_2)$ , donde esta segunda aplicación viene dada por la propiedad universal del pullback de la definición de funtor interno.

Veamos esto, tomemos  $((m, n), (m', n')) \in (M \times N) \times_N (M \times N)$ , es decir,  $\partial m + n = t((m, n)) = s((m', n')) = n'$ .

$$\begin{aligned}
f_1 \times f_2 \circ k(((m, n), (m', n')))) &= f_1 \times f_2((m + m', n)) \\
&= (f_1(m + m'), f_2(n)) = (f_1(m) + f_1(m'), f_2(n)).
\end{aligned}$$

Notemos que  $t'(f_1(m), f_2(n)) = \partial' f_1(m) + f_2(n) = f_2(\partial m) + f_2(n) = f_2(\partial m + n) = f_2(n') = s'(f_1(m'), f_2(n'))$ , por lo que tiene sentido hablar de  $k'(((f_1(m), f_2(n)), (f_1(m'), f_2(n')))) = (f_1(m) + f_1(m'), f_2(n))$ . Usando esto último podemos acabar de probar la igualdad:

$$\begin{aligned}
(f_1(m) + f_1(m'), f_2(n)) &= k'(((f_1(m), f_2(n)), (f_1(m'), f_2(n')))) \\
&= k'((f_1 \times f_2((m, n)), f_1 \times f_2((m', n')))) \\
&= k' \circ (f_1 \times f_2) \times_{f_2} (f_1 \times f_2)((m, n), (m', n')).
\end{aligned}$$

Hemos visto por tanto que se trata de un funtor interno. Para concluir que se trata de un funtor interno trenzado veamos que funciona bien con la trenza, es decir, que se cumple la igualdad  $f_1 \times f_2(\tau_{n, n'}) = \tau_{f_2(n), f_2(n')}$  para todo  $n, n' \in N$ .

$$\begin{aligned}
f_1 \times f_2(\tau_{n, n'}) &= f_1 \times f_2((-2\{n, n'\}, [n, n'])) = (f_1(-2\{n, n'\}), f_2([n, n'])) \\
&= (-2f_1(\{n, n'\}), [f_2(n), f_2(n')]) = (-2\{f_2(n), f_2(n')\}, [f_2(n), f_2(n')]) \\
&= \tau_{f_2(n), f_2(n')}.
\end{aligned}$$

Tras ver que está bien definido, veamos que  $\Delta$  es, en efecto, un funtor.

Sea  $\mathcal{X} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{X}}} \mathcal{X}$  el morfismo identidad del módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ . Si esto es así se tiene que  $\text{Id}_{\mathcal{X}} = (\text{Id}_M, \text{Id}_N)$  y por tanto  $\Delta(\text{Id}_{\mathcal{X}}) = (\text{Id}_M \times \text{Id}_N, \text{Id}_N)$ .

Sea  $\Delta(\mathcal{X}) = ((M \rtimes N, N, s, t, e, k), \tau)$  su  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada asociada. Entonces su funtor interno trenzado identidad viene dado por el par  $\text{Id}_{\Delta(\mathcal{X})} = (\text{Id}_{M \rtimes N}, \text{Id}_N)$ .

Por tanto, para probar que  $\Delta$  conserva identidades hemos de probar que  $(\text{Id}_M \times \text{Id}_N, \text{Id}_N) = (\text{Id}_{M \rtimes N}, \text{Id}_N)$ , es decir, tenemos que ver que  $\text{Id}_M \times \text{Id}_N = \text{Id}_{M \rtimes N}$ , pero esto es inmediato de la definición, por lo que  $\Delta$  conserva identidades.

Ya que  $(g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2) = (g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2)$ , se obtiene que conserva composiciones. □

**Proposición 3.2.** *Sea  $K$  un cuerpo de característica diferente de 2. Entonces:*

$\Theta: \mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K) \rightarrow \mathbf{BXLieAlg}_K$  *definido como:*

$$\Theta(((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau) \xrightarrow{(F_1, F_0)} ((C'_1, C'_0, s', t', e', k'), \tau')) = \mathcal{X} \xrightarrow{(F_1^s, F_0)} \mathcal{X}',$$

donde  $\mathcal{X} = (\ker(s), C_0, \cdot, \partial_t, \{-, -\})$ ,  $\mathcal{X}' = (\ker(s'), C'_0, *, \partial_{t'}, \{-, -\})'$  son los módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie asociados respectivamente a las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas y  $F_1^s: \ker(s) \rightarrow \ker(s')$  es la aplicación dada por  $F_1^s(x) = F_1(x)$  para todo  $x \in \ker(s)$ ; es un funtor.

*Demostración.* Veamos en primer lugar que está bien definido, es decir,  $(F_1^s, F_0)$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Se tiene que  $F_1^s$  está bien definido, pues si  $x \in \ker(s)$ ,  $s' \circ F_1(x) = s' \circ F_1(x) = F_0 \circ s(x) = F_0(0) = 0$  y por tanto  $F_1(x) \in \ker(s')$  si  $x \in \ker(s)$ .

Sabemos que  $F_0$  es homomorfismo de álgebras de Lie por ser uno de los datos, además, dado que  $F_1^s$  es substancialmente  $F_1$ , esta última aplicación es también un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

Para ver que  $(F_1^s, F_0)$  es un homomorfismo de módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, veamos que cumple los axiomas.

- Cumple **BH1**), es decir  $F_1^s(a \cdot x) = F_0(a) * F_1^s(x)$  para todo  $a \in C_0$ ,  $x \in \ker(s)$ .

$$\begin{aligned} F_1^s(a \cdot x) &= F_1([e(a), x]) = [F_1(e(a)), F_1(x)] = [e'(F_0(a)), F_1(x)] \\ &= F_0(a) * F_1(x) = F_0(a) * F_1^s(x). \end{aligned}$$

- Se verifica **BH2**), es decir,  $F_0 \circ \partial_t = \partial_{t'} \circ F_1^s$ .

Sea  $x \in \ker(s)$ . Entonces:

$$F_0 \circ \partial_t(x) = F_0(t(x)) = t'(F_1(x)) = \partial_{t'} \circ F_1^s(x).$$

- Se cumple **BH3**), es decir,  $\{F_0(a), F_0(b)\}' = F_1^s(\{a, b\})$  para  $a, b \in C_0$ .

$$\begin{aligned} F_1^s(\{a, b\}) &= F_1\left(\frac{e([a, b]) - \tau_{a,b}}{2}\right) = \frac{F_1(e([a, b])) - F_1(\tau_{a,b})}{2} \\ &= \frac{e'(F_0([a, b])) - \tau_{F_0(a), F_0(b)}}{2} = \frac{e'([F_0(a), F_0(b)]) - \tau_{F_0(a), F_0(b)}}{2} \\ &= \{F_0(a), F_0(b)\}. \end{aligned}$$

Tras ver que está bien definida veamos que es, en efecto, un functor. Para ello es necesario ver que conserva identidades y composiciones.

Es inmediato que  $\text{Id}_{C_1}^s = \text{Id}_{\ker(s)}$  y  $(G_1 \circ F_1)^s = G_1^{s'} \circ F_1^s$  siendo estas las aplicaciones correspondientes  $\ker(s) \xrightarrow{F_1^s} \ker(s') \xrightarrow{G_1^{s'}} \ker(s'')$  (con las aplicaciones dominio  $s, s', s''$  de tres categorías internas de la categoría de  $K$ -álgebras de Lie).

Usando eso se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \Theta(\text{Id}_{\mathcal{C}}) &= \Theta(\text{Id}_{C_1}, \text{Id}_{C_0}) = (\text{Id}_{C_1}^s, \text{Id}_{C_0}) = (\text{Id}_{\ker(s)}, \text{Id}_{C_0}) = \text{Id}_{\Theta(\mathcal{C})}. \\ \Theta((G_1, G_0) \circ (F_1, F_0)) &= \Theta((G_1 \circ F_1, G_0 \circ F_0)) = ((G_1 \circ F_1)^s, G_0 \circ F_0) \\ &= (G_1^{s'} \circ F_1^s, G_0 \circ F_0) = (G_1^{s'}, G_0) \circ (F_1^s, F_0) = \Theta((G_1, G_0)) \circ \Theta((F_1, F_0)). \end{aligned}$$

Donde  $\mathcal{C} = ((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  es una  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada y  $\mathcal{C} \xrightarrow{(F_1, F_0)} \mathcal{C}' \xrightarrow{(G_1, G_0)} \mathcal{C}''$  son funtores internos trenzados.

Por tanto queda probado que  $\Theta$  es un functor.  $\square$

*Observación 3.3.* Sea  $K$  un cuerpo de característica diferente de 2.

Veamos como es  $\Theta \circ \Delta: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{BXLieAlg}_K$ , siendo estos funtores los definidos en las Proposiciones 3.1 y 3.2.

Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un objeto en dicha categoría.

Tras aplicar el functor  $\Delta$  obtenemos la  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada asociada  $((M \rtimes N, N, s, t, e, k), \tau)$ . A esta última le aplicamos el functor  $\Theta$ , obteniendo el objeto de la categoría  $(\ker(s), N, \cdot, \partial_t, \{-, -\}_\rtimes)$  (donde hay un pequeño abuso de lenguaje, pues  $\cdot$  no es la misma aplicación en los dos casos. Hemos denotado la segunda trenza por  $\{-, -\}_\rtimes$  para mencionar su codominio, pues al tener las dos trenzas el mismo dominio podría causar confusión llamarles con el mismo nombre).

Veamos cuales son estos conjuntos y aplicaciones en función de nuestros datos iniciales:

- $\ker(s) := \{(m, n) \in M \rtimes N \mid n = 0\}$ . Es el conjunto de los pares ordenados de la forma  $(m, 0)$  con  $m \in M$ , Por ello denotaremos  $(M, 0) := \ker(s)$ .
- Si  $(m, 0) \in (M, 0)$  y  $n \in N$ , entonces:

$$n \cdot (m, 0) = [e(n), (m, 0)] = [(0, n), (m, 0)] = (n \cdot m, 0).$$

- Si  $(m, 0) \in (M, 0)$  entonces  $\partial_t(m, 0) = \partial m + 0 = \partial m$ .

- Si  $n, n' \in N$ , entonces:

$$\begin{aligned} \{n, n'\}_\times &= \frac{e([n, n']) - \tau_{n, n'}}{2} = \frac{[e(n), e(n')] - (-2\{n, n'\}, [n, n'])}{2} \\ &= \frac{[(0, n), (0, n')] + (2\{n, n'\}, -[n, n'])}{2} = \frac{(0, [n, n']) + (2\{n, n'\}, -[n, n'])}{2} \\ &= \frac{(2\{n, n'\}, 0)}{2} = (\{n, n'\}, 0). \end{aligned}$$

Se observa que las aplicaciones funcionan de igual modo en la primera componente, la cual es esencialmente  $m$ .

Veamos ahora que pasa con las aplicaciones.

Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}) \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}'$  un morfismo en la categoría. Entonces  $\Theta \circ \Delta((f_1, f_2)) = \Theta((f_1 \times f_2), f_2) = ((f_1 \times f_2)^s, f_2)$ . Veamos cual es esta primera aplicación.

Sea  $(m, 0) \in (M, 0)$  (el dominio de  $(f_1 \times f_2)^s$ ), entonces:

$$(f_1 \times f_2)^s(m, 0) = (f_1(m), f_2(0)) = (f_1(m), 0).$$

Por tanto esta aplicación es, en esencia,  $f_1$ .

Se hace el siguiente lema previo para hablar del primer isomorfismo natural.

**Lema 3.4.** *Sea  $(f_1, f_2): (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}) \rightarrow (M', N', *, \partial', \{-, -\}')$  un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.*

*Si tanto  $f_1$  como  $f_2$  son biyectivos, entonces  $(f_1, f_2)$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Al ser  $f_1$  y  $f_2$  biyectivos podemos hablar de sus aplicaciones inversas  $f_1^{-1}: M' \rightarrow M$  y  $f_2^{-1}: N' \rightarrow N$ . Si vemos que el par  $(f_1^{-1}, f_2^{-1})$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie entre los módulos correspondientes, por la definición de identidad y composición tendremos que, en efecto, es un isomorfismo.

Veamos en primer lugar que  $f_i$  con  $i \in \{1, 2\}$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

- Es lineal. Si  $\lambda, \mu \in K$ ,  $x, y \in Z$  con  $Z = M'$  si  $i = 1$  y  $Z = N'$  si  $i = 2$ , entonces:

$$f_i(f_i^{-1}(\lambda x + \mu y)) = \lambda f_i(f_i^{-1}(x)) + \mu f_i(f_i^{-1}(y)) = f_i(\lambda f_i^{-1}(x) + \mu f_i^{-1}(y)).$$

Como  $f_i$  es inyectiva se cumple que  $f_i^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda f_i^{-1}(x) + \mu f_i^{-1}(y)$ .

- Conserva los corchetes de Lie. Si  $x, y \in Z$  con  $Z = M'$  si  $i = 1$  y  $Z = N'$  si  $i = 2$ , entonces:

$$f_i(f_i^{-1}([x, y])) = [f_i(f_i^{-1}(x)), f_i(f_i^{-1}(y))] = f_i([f_i^{-1}(x), f_i^{-1}(y)]).$$

Como  $f_i$  es inyectiva se tiene que  $f_i^{-1}([x, y]) = [f_i^{-1}(x), f_i^{-1}(y)]$ .

Por tanto, para concluir, veamos que también se verifican los axiomas de homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

- Verifiquemos **BH1**). Sea  $m \in M'$ ,  $n \in N'$ , entonces:

$$f_1(f_1^{-1}(n * m)) = f_2(f_2^{-1}(n)) * f_1(f_1^{-1}(m)) = f_1(f_2^{-1}(n) \cdot f_1^{-1}(m)).$$

Como  $f_1$  es inyectiva, tenemos que  $f_1^{-1}(n * m) = f_2^{-1}(n) \cdot f_1^{-1}(m)$ .

- Comprobemos **BH2**).

$$\partial \circ f_1^{-1} \circ f_1 = f_2^{-1} \circ f_2 \circ \partial = f_2^{-1} \circ \partial' \circ f_1$$

Por ser  $f_1$  sobreyectiva sacamos que  $\partial \circ f_1^{-1} = f_2^{-1} \circ \partial'$ .

- Probemos **BH3**). Sea  $n, n' \in N'$ , entonces:

$$f_1(f_1^{-1}(\{n, n'\}')) = \{f_2(f_2^{-1}(n)), f_2(f_2^{-1}(n'))\}' = f_1(\{f_2^{-1}(n), f_2^{-1}(n')\}).$$

Por ser  $f_1$  inyectiva se tiene que  $f_1^{-1}(\{n, n'\}')) = \{f_2^{-1}(n), f_2^{-1}(n')\}$ .

Por tanto queda probado que  $(f_1, f_2)$  es isomorfismo en la categoría.  $\square$

**Proposición 3.5.** *Sea  $K$  un cuerpo de característica diferente de 2.*

*Sean  $\Delta$  y  $\Theta$  los funtores dados en las Proposiciones 3.1 y 3.2.*

*Entonces la correspondencia que a cada módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie,  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ , le asocia el isomorfismo en la categoría  $\Phi_{\mathcal{X}} = (\varphi_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N): \mathcal{X} \rightarrow \Theta(\Delta(\mathcal{X}))$ , donde  $\varphi_{\mathcal{X}}: M \rightarrow (M, 0)$  está dada por  $\varphi_{\mathcal{X}}(m) = (m, 0)$ , es un isomorfismo natural  $\Phi: \text{Id}_{\mathbf{BXLieAlg}_K} \rightarrow \Theta \circ \Delta$ .*

*Demostración.* En primer lugar tenemos que ver que  $\Phi_{\mathcal{X}}$  es un morfismo en la categoría.

Es obvio que  $\text{Id}_N$  es homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Veamos que  $\varphi_{\mathcal{X}}$  es también un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

Es claro que es lineal por ser lineal en cada una de sus componentes, por lo que solo hemos de ver que conserva los corchetes.

Sea  $m, m' \in M$ , entonces:

$$\begin{aligned} [\varphi_{\mathcal{X}}(m), \varphi_{\mathcal{X}}(m')] &= [(m, 0), (m', 0)] = ([m, m'] + 0 \cdot m' + 0 \cdot m, [0, 0]) \\ &= ([m, m'], 0) = \varphi_{\mathcal{X}}([m, m']). \end{aligned}$$

Por tanto conserva el corchete de Lie.

Veamos ahora que el par  $(\varphi_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N)$  cumple los axiomas de homomorfismos de módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Para ello usemos como es la construcción de  $\Theta \circ \Delta(\mathcal{X})$  dada en la Observación 3.3.

- Verifiquemos **BH1**). Sean  $n \in N$ ,  $m \in M$ , entonces:

$$\varphi_{\mathcal{X}}(n \cdot m) = (n \cdot m, 0) = n \cdot (m, 0) = \text{Id}_N(n) \cdot \varphi_{\mathcal{X}}(m).$$

- Comprobemos **BH2**). Sea  $m \in M$ , entonces:

$$\text{Id}_N \circ \partial(m) = \partial m = \partial_t(m, 0) = \partial_t \circ \varphi_{\mathcal{X}}(m).$$

- Por último veamos **BH3**). Sea  $n, n' \in N$ , se tiene:

$$\{\text{Id}_N(n), \text{Id}_N(n')\}_{\times} = \{n, n'\}_{\times} = (\{n, n'\}, 0) = \varphi_{\mathcal{X}}(\{n, n'\}).$$

Por tanto  $(\varphi_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N)$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Es claro que  $\text{Id}_N$  es biyectiva. Además  $\varphi_{\mathcal{X}}$  es inyectiva y sobreyectiva de modo inmediato.

Por el Lema 3.4 se tiene por tanto que  $\Phi_{\mathcal{X}}$  es un isomorfismo para todo módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie  $\mathcal{X}$ .

Para ver que la correspondencia es un isomorfismo natural es también necesario que verifique, para todo homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie  $\mathcal{X} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}'$ , el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{X}}} & \Theta \circ \Delta(\mathcal{X}) \\ \downarrow (f_1, f_2) & & \downarrow ((f_1 \times f_2)^s, f_2) \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{X}'}} & \Theta \circ \Delta(\mathcal{X}'). \end{array}$$

Para ver esto tomemos  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  como en las hipótesis, y usemos de nuevo la expresión de  $(f_1 \times f_2)^s$  dada en la Observación 3.3, para ver como se compone en la primera componente.

Sea  $m \in M$  se tiene:

$$(f_1 \times f_2)^s \circ \varphi_{\mathcal{X}}(m) = (f_1 \times f_2)^s((m, 0)) = (f_1(m), 0) = \varphi_{\mathcal{X}'} \circ f_1(m).$$

Por tanto, para concluir, se tiene que:

$$\begin{aligned} ((f_1 \times f_2)^s, f_2) \circ \Phi_{\mathcal{X}} &= ((f_1 \times f_2)^s, f_2) \circ (\varphi_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N) \\ &= ((f_1 \times f_2)^s \circ \varphi_{\mathcal{X}}, f_2 \circ \text{Id}_N) = (\varphi_{\mathcal{X}'} \circ f_1, \text{Id}_{N'} \circ f_2) \\ &= (\varphi_{\mathcal{X}'}, \text{Id}_{N'}) \circ (f_1, f_2) = \Phi_{\mathcal{X}'} \circ (f_1, f_2), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{X}' = (M', N', *, \partial', \{-, -\}')$ .

Es decir,  $\Phi: \text{Id}_{\mathbf{BXLieAlg}_K} \rightarrow \Theta \circ \Delta$  es un isomorfismo natural.

□

*Observación 3.6.* Sea  $K$  un cuerpo de característica diferente de 2.

Veamos como es  $\Delta \circ \Theta: \mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K) \rightarrow \mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ , siendo estos funtores los definidos en las Proposiciones 3.2 y 3.1.

Sea  $((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  un objeto en dicha categoría.

Para empezar aplicamos  $\Delta$  para obtener el módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie asociada  $(\ker(s), C_0, \cdot, \partial_t, \{-, -\})$ . Obtenido esto le aplicamos el funtor  $\Delta$ , cuyo resultado es de nuevo un objeto en la categoría  $((\ker(s) \rtimes C_0, C_0, \bar{s}, \bar{t}, \bar{e}, \bar{k}), \bar{\tau})$  (donde hemos cambiado la escritura de las aplicaciones de la categoría interna para diferenciarlas de las iniciales). En primer lugar veamos como es el corchete de  $\ker(s) \rtimes C_0$ .

Sean  $(x, a), (y, b) \in \ker(s) \rtimes C_0$ , entonces:

$$[(x, a), (y, b)] = ([x, y] + a \cdot y - b \cdot x, [a, b]) = ([x, y] + [e(a), y] - [e(b), x], [a, b]).$$

Veamos ahora como son las nuevas aplicaciones:

- Sea  $(x, a) \in \ker(s) \rtimes C_0$ . Se tiene lo siguiente para  $\bar{s}, \bar{t}: \ker(s) \rtimes C_0 \rightarrow C_0$ :

$$\begin{aligned}\bar{s}((x, a)) &= a, \\ \bar{t}((x, a)) &= \partial_t x + a = t(x) + a.\end{aligned}$$

- Sea  $a \in C_0$ . Entonces para  $\bar{e}: C_0 \rightarrow \ker(s) \rtimes C_0$ :

$$\bar{e}(a) = (0, a).$$

- Veamos como viene dado  $\bar{k}: (\ker(s) \rtimes C_0) \times_{C_0} (\ker(s) \rtimes C_0) \rightarrow \ker(s) \rtimes C_0$ . Sean  $((x, a), (y, b)) \in (\ker(s) \rtimes C_0) \times_{C_0} (\ker(s) \rtimes C_0)$ , es decir,  $t(x) + a = \bar{t}((x, a)) = \bar{s}((y, b)) = b$ , entonces:

$$\bar{k}(((x, a), (y, b)))) = (x + y, a).$$

- Veamos por último como es  $\bar{\tau}: C_0 \times C_0 \rightarrow \ker(s) \rtimes C_0$ . Sean  $a, b \in C_0$ , entonces:

$$\bar{\tau}_{a,b} = (-2\{a, b\}, [a, b]) = (-2\frac{e([a, b]) - \tau_{a,b}}{2}, [a, b]) = (-e([a, b]) + \tau_{a,b}, [a, b]).$$

Sea  $((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau) \xrightarrow{(F_1, F_0)} \mathcal{C}'$  un morfismo en la categoría. Entonces veamos que aplicación es  $\Delta \circ \Theta((F_1, F_0)) = \Delta(F_1^s, F_0) = (F_1^s \times F_0, F_0)$ . Veamos como funciona la primera aplicación.

Sea  $(x, a) \in \ker(s) \rtimes C_0$  (el dominio de  $F_1^s \times F_0$ ), entonces:

$$F_1^s \times F_0((x, a)) = (F_1(x), F_0(a)).$$

**Lema 3.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con pullbacks.*

*Sea  $(F_1, F_0): (C_1, C_0, s, t, e, k) \rightarrow (C'_1, C'_0, s', t', e', k')$  un funtor interno de la categoría  $\mathcal{C}$ , es decir, una flecha de  $\mathbf{ICat}(\mathcal{C})$ .*

*Si tanto  $F_1$  como  $F_0$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}$ , entonces  $(F_1, F_0)$  es un isomorfismo en  $\mathbf{ICat}(\mathcal{C})$ .*

*Demostración.* Por ser tanto  $F_1$  como  $F_0$  isomorfismos existen  $F_1^{-1}$  y  $F_0^{-1}$  fechas en  $\mathcal{C}$ .

Veamos que el par  $(F_1^{-1}, F_0^{-1})$  es un funtor interno verificando los axiomas.

Para hacerlo omitiremos los paréntesis de la composición, haciendo uso de la propiedad asociativa.

- Veamos que se verifican **FI1**) y **FI2**). Sean  $f$  y  $f'$  las flechas  $s$  y  $s'$  o las flechas  $t$  y  $t'$ , entonces:

$$\begin{aligned} F_0^{-1} \circ f' &= F_0^{-1} \circ f' \circ \text{Id}_{C'_1} = F_0^{-1} \circ f' \circ F_1 \circ F_1^{-1} \\ &= F_0^{-1} \circ F_0 \circ f \circ F_1^{-1} = \text{Id}_{C_0} \circ f \circ F_1^{-1} = f \circ F_1^{-1}. \end{aligned}$$

Donde se ha usado, dependiendo de la elección, los axiomas **FI1**) y **FI2**).

- La prueba del axioma **FI3**) es la misma que el caso anterior, intercambiando el papel de  $F_0$  y  $F_1$ , colocando las respectivas identidades y tomando  $e = f$ ,  $e' = f'$ .
- Veamos que se cumple el axioma **FI4**).

Por cumplirse **FI1**) y **FI2**), podemos hablar de  $F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1}$ , flecha en  $\mathcal{C}$  dada por el tipo de pullback de la definición de los funtores internos.

Veamos que  $F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1}$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}$  cumpliendo que  $(F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1})^{-1} = F_1 \times_{F_0} F_1$ , siendo esta última la flecha dada por la definición de funtor internos para  $F_1$  y  $F_0$ .

Veamos que  $F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} \circ F_1 \times_{F_0} F_1 = \text{Id}_{C_1 \times_{C_0} C_1}$  usando la propiedad universal.

Se dan las siguientes igualdades para  $i \in \{1, 2\}$ .

$$\begin{aligned} \pi_i \circ F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} \circ F_1 \times_{F_0} F_1 &= F_1^{-1} \circ \pi'_i \circ F_1 \times_{F_0} F_1 \\ &= F_1^{-1} \circ F_1 \circ \pi_i = \text{Id}_{C_1} \circ \pi_i = \pi_i. \end{aligned}$$

Dado que  $\pi_i \circ \text{Id}_{C_1 \times_{C_0} C_1} = \pi_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ , la unicidad de la flecha dada por la definición de pullback nos afirma que se tiene la igualdad requerida.

La demostración de que  $F_1 \times_{F_0} F_1 \circ F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} = \text{Id}_{C'_1 \times_{C'_0} C'_1}$  es idéntica a la anterior sin más que cambiar el papel de los objetos  $C_1 \times_{C_0} C_1$  y  $C'_1 \times_{C'_0} C'_1$ .

Por tanto, en efecto,  $F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1}$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}$  cumpliendo que  $(F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1})^{-1} = F_1 \times_{F_0} F_1$ .

Usando esto veamos que se cumple **FI4**).

$$\begin{aligned} k \circ F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} &= \text{Id}_{C_1} \circ k \circ F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} \\ &= F_1^{-1} \circ F_1 \circ k \circ F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} = F_1^{-1} \circ k' \circ F_1 \times_{F_0} F_1 \circ F_1^{-1} \times_{F_0^{-1}} F_1^{-1} \\ &= F_1^{-1} \circ k' \circ \text{Id}_{C'_1 \times_{C'_0} C'_1} = F_1^{-1} \circ k'. \end{aligned}$$

Por tanto el par  $(F_1^{-1}, F_0^{-1}): (C'_1, C'_0, s', t', e', k') \rightarrow (C_1, C_0, s, t, e, k)$  es un funtor interno.

Veamos que  $(F_1, F_0)$  es un isomorfismo con flecha inversa  $(F_1^{-1}, F_0^{-1})$ .

Denotemos  $\mathcal{C} = (C_1, C_0, s, t, e, k)$  y  $\mathcal{C}' = (C'_1, C'_0, s', t', e', k')$

$$(F_1, F_0) \circ (F_1^{-1}, F_0^{-1}) = (F_1 \circ F_1^{-1}, F_0 \circ F_0^{-1}) = (\text{Id}_{C'_1}, \text{Id}_{C'_0}) = \text{Id}_{\mathcal{C}'},$$

$$(F_1^{-1}, F_0^{-1}) \circ (F_1, F_0) = (F_1^{-1} \circ F_1, F_0^{-1} \circ F_0) = (\text{Id}_{C_1}, \text{Id}_{C_0}) = \text{Id}_{\mathcal{C}}.$$

Con lo que concluye la demostración.  $\square$

**Lema 3.8.** *Sea  $(F_1, F_0): ((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau) \rightarrow ((C'_1, C'_0, s', t', e', k'), \tau')$  un funtor interno trenzado de  $K$ -álgebras de Lie.*

*Si tanto  $F_1$  como  $F_0$  son aplicaciones biyectivas, entonces  $(F_1, F_0)$  es un isomorfismo en la categoría  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .*

*Demostración.* Por ser  $F_1$  como  $F_0$  aplicaciones biyectivas existen las aplicaciones  $F_1^{-1}$  y  $F_0^{-1}$ . Por la misma demostración que el principio de la demostración del Lema 3.4 se tiene que  $F_1^{-1}$  y  $F_0^{-1}$  son homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie, y por tanto  $F_1$  y  $F_0$  son isomorfismos en la categoría  $\mathbf{LieAlg}_K$ .

Por el lema 3.7 se tiene, por tanto, que el par  $(F_1^{-1}, F_0^{-1})$  es un funtor interno y es el inverso del funtor interno  $(F_1, F_0)$ .

Hemos de ver, además, que  $(F_1^{-1}, F_0^{-1})$  conserva las trenzas.

Sea  $a, b \in C'_0$ , entonces:

$$F_1 \circ F_1^{-1}(\tau'_{a,b}) = \tau'_{a,b} = \tau'_{F_0 \circ F_0^{-1}(a), F_0 \circ F_0^{-1}(b)} = F_1(\tau'_{F_0^{-1}(a), F_0^{-1}(b)}).$$

Como  $F_1$  es inyectiva se tiene que  $F_1^{-1}(\tau'_{a,b}) = \tau'_{F_0^{-1}(a), F_0^{-1}(b)}$ .

Por tanto  $(F_1, F_0)$  es un isomorfismo en  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .  $\square$

**Proposición 3.9.** *Sea  $K$  un cuerpo de característica diferente de 2.*

*Sean  $\Theta$  y  $\Delta$  los funtores dados en las Proposiciones 3.2 y 3.1.*

*Entonces la correspondencia que a cada  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada,  $\mathcal{C} = ((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$ , le asocia  $\Psi_{\mathcal{C}} = (\psi_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{C_0}): \mathcal{C} \rightarrow \Delta(\Theta(\mathcal{C}))$ , flecha de la categoría  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ , donde  $\psi_{\mathcal{C}}: C_0 \rightarrow \ker(s) \times C_0$  viene dada por  $\psi_{\mathcal{C}}(x) = (x - e(s(x)), s(x))$  para  $x \in C_1$ , es un isomorfismo natural  $\Psi: \text{Id}_{\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)} \rightarrow \Delta \circ \Theta$ .*

*Demostración.* Primero veamos que  $\psi_{\mathcal{C}}$  es funtor interno trenzado de  $K$ -álgebras de Lie.

Comprobemos que está bien definido, es decir,  $x - e(s(x)) \in \ker(s)$  para  $x \in C_1$

$$s(x - e(s(x))) = s(x) - s(e(s(x))) = s(x) - s(x) = 0.$$

Por lo que está bien definida.

Veamos que es lineal. Sean  $x, y \in C_1$  y  $\lambda, \mu \in K$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathcal{C}}(\lambda x + \mu y) &= ((\lambda x + \mu y) - e(s(\lambda x + \mu y), s(\lambda x + \mu y))) \\ &= (\lambda x + \mu y - \lambda e(s(x), s(x)) - \mu e(s(y), s(y)), \lambda s(x) + \mu s(y)) \\ &= \lambda(x - e(s(x), s(x))) + \mu(y - e(s(y), s(y))) = \lambda\psi_{\mathcal{C}}(x) + \mu\psi_{\mathcal{C}}(y).\end{aligned}$$

Probemos que conserva los corchetes de Lie. Sean  $x, y \in C_1$ .

$$\begin{aligned}[\psi_{\mathcal{C}}(x), \psi_{\mathcal{C}}(y)] &= [x - (e(s(x)), s(x)), y - (e(s(y)), s(y))] \\ &= ([x - e(s(x)), y - e(s(y))] + [e(s(x)), y - e(s(y))] - [e(s(y)), x - e(s(x))], \\ &\hspace{15em} [s(x), s(y)]) \\ &= ([x, y] - [e(s(x)), y] - [x, e(s(y))] + [e(s(x)), e(s(y))] + [e(s(x)), y] \\ &\hspace{10em} - [e(s(x)), e(s(y))] - [e(s(y)), x] + [e(s(y)), e(s(x))], s([x, y])) \\ &= ([x, y] - [e(s(x)), e(s(y))], s([x, y])) = ([x, y] - e(s([x, y])), s([x, y])) \\ &= \psi_{\mathcal{C}}([x, y]).\end{aligned}$$

Por tanto es un homomorfismo de álgebras de Lie, al igual que  $\text{Id}_{C_0}$ , lo cual permite preguntarnos si el par  $(\psi_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{C_0})$  es un funtor interno trezado de  $K$ -álgebras de Lie, es decir, una flecha de **BICat(LieAlg $_K$ )**.

Veamos en primer lugar que se trata de un funtor interno verificando los axiomas.

- Comprobemos **FI1**). Sea  $x \in C_1$ , se tiene:

$$\bar{s} \circ \psi_{\mathcal{C}}(x) = \bar{s}((x - e(s(x)), s(x))) = s(x) = \text{Id}_{C_0} \circ s(x).$$

- Verifiquemos **FI2**). Sea  $x \in C_1$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{t} \circ \psi_{\mathcal{C}}(x) &= \bar{t}((x - e(s(x)), s(x))) = t(x - e(s(x))) + s(x) \\ &= t(x) - t(e(s(x))) + s(x) = t(x) - s(x) + s(x) = t(x) = \text{Id}_{C_0} \circ t(x).\end{aligned}$$

- Probemos **FI3**). Sea  $a \in C_0$ , se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathcal{C}} \circ e(a) &= (e(a) - e(s(e(a))), s(e(a))) = (e(a) - e(a), a) = (0, a) \\ &= \bar{e}(a) = \bar{e} \circ \text{Id}_{C_0}(a).\end{aligned}$$

- Veamos que se cumple **FI4**).

Sea  $(x, y) \in C_1 \times_{C_0} C_1$ , es decir,  $x, y \in C_1$  con  $t(x) = s(y)$ , entonces:

$$\begin{aligned}k' \circ \psi_{\mathcal{C}} \times_{\text{Id}_{C_0}} \psi_{\mathcal{C}}((x, y)) &= k'(x - (e(s(x)), s(x)), y - (e(s(y)), s(y))) \\ &= (x - e(s(x)) + y - e(s(y)), s(x)), \\ \psi_{\mathcal{C}} \circ k((x, y)) &= (k((x, y)) - e(s(k((x, y)))), s(k((x, y)))) \\ &= (k((x, y)) - e(s(x)), s(x)).\end{aligned}$$

Por tanto, concluiremos la prueba de este axioma si probamos que para todo  $(x, y) \in C_1 \times_{C_0} C_1$  se cumple la siguiente igualdad:

$$k((x, y)) = x + y - e(s(y)).$$

Veamos que es cierta. Tomemos  $(x, y) \in C_1 \times_{C_0} C_1$ , es decir,  $t(x) = s(y)$ . Entonces se tiene que de modo inmediato que  $(x, e(s(y))), (e(t(x)), e(s(y))), (e(t(x)), y) \in C_1 \times_{C_0} C_1$  ya que  $t(x) = s(y) = s(e(s(y))), s(e(t(x))) = t(x) = s(y) = s(e(s(y)))$  y  $t(e(t(x))) = t(x) = s(y)$ . Por tanto se tiene la siguiente igualdad, donde se usarán la linealidad de  $k$  y los axiomas de categoría interna asociados a la composición:

$$\begin{aligned} k((x, y)) &= k((x + e(t(x)) - e(t(x)), y + e(s(y)) - e(s(y)))) \\ &= k((x, e(s(y)))) - k((e(t(x)), e(s(y)))) + k((e(t(x)), y)) = x - e(s(y)) + y. \end{aligned}$$

Y por ello se cumple el axioma **FI4**).

Ahora que sabemos que  $(\psi_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{C_0})$  es un funtor interno, veamos que es trenzado, es decir, que conserva la trenza.

Sean  $a, b \in C_0$ , entonces:

$$\psi_{\mathcal{C}}(\tau_{a,b}) = (\tau_{a,b} - e(s(\tau_{a,b})), s(\tau_{a,b})) = (\tau_{a,b} - e([a, b]), [a, b]) = \bar{\tau}_{\text{Id}_{C_0}(a), \text{Id}_{C_0}(b)}.$$

Por tanto, el par  $(\psi_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{C_0})$  es, en efecto, una flecha en  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

Veamos que es un isomorfismo. Para ello, usando el Lema 3.8, llega ver que  $\psi_{\mathcal{C}}$  y  $\text{Id}_{C_0}$  son aplicaciones biyectivas. Como ya es sabido que  $\text{Id}_{C_0}$  es biyectiva, sólo hemos de probar que  $\psi_{\mathcal{C}}$  es biyectiva.

Para ver esto, veamos que es invertible como aplicación.

Consideremos  $\phi: \ker(s) \times C_0 \rightarrow C_1$  dado por  $\phi((x, a)) = x + e(a)$  para  $(x, a) \in \ker(s) \times C_0$ . Veamos que son aplicaciones inversas.

Sean  $x \in C_1$ ,  $(y, a) \in \ker(s) \times C_0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{C}} \circ \phi((y, a)) &= \psi_{\mathcal{C}}(y + e(a)) = (y + e(a) - e(s(y + e(a))), s(y + e(a))) \\ &= (y + e(a) - e(s(y)) - e(s(e(a))), s(y) + s(e(a))) \\ &= (y + e(a) - e(0) - e(a), 0 + a) = (y, a) = \text{Id}_{\ker(s) \times C_0}((y, a)), \\ \phi \circ \psi_{\mathcal{C}}(x) &= \phi((x - e(s(x)), s(x))) = x - e(s(x)) + e(s(x)) = x = \text{Id}_{C_1}(x). \end{aligned}$$

Donde se ha usado que  $y \in \ker(s)$  en la primera composición.

Por tanto  $\psi_{\mathcal{C}}$  es biyectiva y, por ello, el par  $(\psi_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{C_0})$  es, en efecto, un isomorfismo en  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

Veamos ahora la naturalidad. Para ello hemos de probar que para todo funtor interno trenzado  $\mathcal{C} \xrightarrow{(F_1, F_0)} \mathcal{C}'$ , entre  $k$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas, el siguiente diagrama conmutativo se cumple:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{C}}} & \Delta \circ \Theta(\mathcal{C}) \\ \downarrow (F_1, F_0) & & \downarrow (F_1^s \times F_0, F_0) \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{C}'}} & \Delta \circ \Theta(\mathcal{C}'). \end{array}$$

Por tanto hemos de probar que  $\Psi_{\mathcal{C}'} \circ (F_1, F_0) = (F_1^s \times F_0, F_0) \circ \Psi_{\mathcal{C}}$ .

Si  $\mathcal{C} = ((C_1, C_0, s, t, e, k), \tau)$  y  $\mathcal{C}' = ((C'_1, C'_0, s', t', e', k'), \tau')$ , esto es lo mismo que probar que  $(\psi_{\mathcal{C}'}, \text{Id}_{C'_0}) \circ (F_1, F_0) = (F_1^s \times F_0, F_0) \circ (\psi_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{C_0})$ .

Es claro que la segunda componente conmuta, por lo que solo hemos de probar que es cierta la igualdad  $\psi_{\mathcal{C}'} \circ F_1 = (F_1^s \times F_0) \circ \psi_{\mathcal{C}}$ . Sea  $x \in C_1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{C}'} \circ F_1(x) &= \psi_{\mathcal{C}'}(F_1(x)) = (F_1(x) - e'(s'(F_1(x))), s'(F_1(x))) \\ &= (F_1(x) - e'(F_0(s(x))), F_0(s(x))) = (F_1(x) - F_1(e(s(x))), F_0(s(x))) \\ &= (F_1(x - e(s(x))), F_0(s(x))) = (F_1^s(x - e(s(x))), F_0(s(x))) \\ &= F_1^s \times F_0((x - e(s(x))), s(x)) = (F_1^s \times F_0) \circ \psi_{\mathcal{C}}(x). \end{aligned}$$

Donde se ha usado que  $x - e(s(x)) \in \ker(s)$  para poder usar  $F_1^s$ . Se tiene, por tanto, que  $\Psi: \text{Id}_{\mathbf{BICat}(\text{LieAlg}_K)} \rightarrow \Delta \circ \Theta$  es un isomorfismo natural.  $\square$

*Observación 3.10.* Se ha probado, en la demostración anterior, el resultado siguiente:

Si  $\mathcal{C} = (C_1, C_0, s, t, e, k)$  es una  $K$ -álgebra de Lie categórica, entonces para todo  $(x, y) \in C_1 \times_{C_0} C_1$  se cumple la siguiente igualdad:

$$k((x, y)) = x + y - e(s(y)) = x + y - e(t(x)).$$

Es decir,  $k$  depende completamente de  $s$  y de  $t$ , así como de la operación en  $C_1$ .

**Corolario 3.11.** *Si  $K$  es un cuerpo de característica diferente de 2, entonces  $\mathbf{BXLieAlg}_K$  y  $\mathbf{BICat}(\text{LieAlg}_K)$  son equivalentes.*

*Demostración.* Los funtores  $\Delta$  y  $\Theta$  definidos en las Proposiciones 3.1 y 3.2 son equivalencias, usando los resultados de las Proposiciones 3.5 y 3.9.  $\square$

*Observación 3.12.* Omitiendo las trenzas se llega, mediante la misma demostración, a que la categoría de álgebras de Lie categóricas y la categoría de módulos cruzados de álgebras de Lie son equivalentes, sin importar la característica del cuerpo sobre el que se piensa. Esto es así, ya que la restricción de la característica a diferente de 2 es debida a las trenzas.



## Capítulo 4

# Ejemplos de Módulos cruzados trenzados

### 4.1. Las álgebras de Lie y los módulos cruzados trenzados

Para empezar, tomemos como ejemplo el motivante para nuestra definición de trenza, el cual se basa en que, en la teoría de módulos cruzados trenzados de grupos, si tomamos como módulo cruzado la identidad en un grupo  $G$  y como acción de  $G$  en  $G$  la conjugación, entonces una trenza es el conmutador. Esto puede comprobarse en las definiciones de Conduché [3] y Martins y Picken [5] (esta última es tomar en su definición de 2-módulo cruzado de grupos con el último grupo trivial).

En nuestro caso el corchete de Lie representa el conmutador, pues en las  $K$ -álgebras asociativas  $[x, y] = xy - yx$ , por lo que tomaremos el corchete como trenza. Como acción se tomará también el corchete pues, si en el caso de grupos la acción era llevar  $(g, h)$  en  $g \cdot h = \text{Conj}(g)(h)$ , donde  $\text{Conj}(g)$  es la aplicación conjugar por  $g$ , entonces es lógico pensar que, en nuestro caso, el par  $(x, y)$  debe de ir en  $\text{Ad}(x)(y)$  donde  $\text{Ad}(x)$  es la aplicación lineal adjunción por  $x$ , y se define por llevar cada  $y$  en  $\text{Ad}(x)(y) = [x, y]$ .

**Ejemplo 4.1.** Sea  $M$  una  $K$ -álgebra de Lie con corchete  $[\cdot, \cdot]$ , veamos que  $(M, M, [\cdot, \cdot], \text{Id}_M, [\cdot, \cdot])$  es un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie.

Es claro que las aplicaciones dichas son  $K$ -lineales o  $K$ -bilineales según se necesite.

Primero veamos que  $[\cdot, \cdot]$  es una acción. Para ver su similitud con las condiciones de la definición se denotará  $n \cdot m = [n, m]$ . Sean  $m, n, m', n' \in M$ , entonces:

- Se verifica **A1)**:

$$\begin{aligned} [n, n'] \cdot m &= [[n, n'], m] = -[[n', m], n] - [[m, n], n'] \\ &= [n, [n', m]] - [n', [n, m]] = n \cdot (n' \cdot m) - n' \cdot (n \cdot m). \end{aligned}$$

- Se verifica **A2)**:

$$\begin{aligned} n \cdot [m, m'] &= [n, [m, m']] = -[m, [m', n]] - [m', [n, m]] \\ &= [m, [n, m']] + [[n, m], m'] = [m, n \cdot m'] + [n \cdot m, m']. \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que se cumplen los axiomas de módulo cruzado, para ello denotaremos  $\partial = \text{Id}_M$ . Sean  $m, m', n \in M$ , se tiene:

- Se verifica **M1)**:

$$\partial(n \cdot m) = \text{Id}_M([n, m]) = [n, m] = [n, \text{Id}_M(m)] = [n, \partial m].$$

- Se verifica **M2)**:

$$\partial m \cdot m' = [\text{Id}(m), m'] = [m, m'].$$

Por último verifiquemos los axiomas de trenza.

Para ello denotemos  $\{-, -\} = [\cdot, \cdot]$  y tomemos  $m, m', n, n', n'' \in M$ :

- Se verifica **B1)**:

$$\partial\{n, n'\} = \text{Id}_M([n, n']) = [n, n'].$$

- Se cumple **B2)**:

$$\{\partial m, \partial m'\} = [\text{Id}_M(m), \text{Id}_M(m')] = [m, m'].$$

- Se tiene **B3)**:

$$\{\partial m, n\} = [\text{Id}_M(m), n] = [m, n] = -[n, m] = -n \cdot m.$$

- Se cumple **B4)**:

$$\{n, \partial m\} = [n, \text{Id}_M(m)] = [n, m] = n \cdot m.$$

- Se verifica **B5)**:

$$\begin{aligned} \{n, [n', n'']\} &= [n, [n', n'']] = -[n', [n'', n]] - [n'', [n, n']] \\ &= -[[n, n''], n'] + [[n, n'], n''] = \{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\}. \end{aligned}$$

- Se tiene **B6)**:

$$\begin{aligned} \{[n, n'], n''\} &= [[n, n'], n''] = -[n'', [n, n']] = [n, [n', n'']] + [n', [n'', n]] \\ &= [n, [n', n'']] - [n', [n, n'']] = \{n, [n', n'']\} - \{n', [n, n'']\}. \end{aligned}$$

**Definición 4.2.** Diremos que  $(M, M, [\cdot, \cdot], \text{Id}_M, [\cdot, \cdot])$  es el *módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie inducido por la  $K$ -álgebra de Lie  $M$*  (de corchete  $[\cdot, \cdot]$ ) y lo denotaremos por  $\mathcal{X}(M)$ .

Uno podría pensar que otro modo de introducir las  $K$ -álgebras de Lie en los módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie podrían venir dados por  $M \rightarrow \{0\}$  y  $\{0\} \rightarrow N$ , en los que todas las aplicaciones son la aplicación  $K$ -lineal o  $K$ -bilineal 0 por tener como dominio o codominio el espacio vectorial  $\{0\}$  (cuya trenza como álgebra de Lie viene dada de modo obvio por  $[0, 0] = 0$ ).

Pero esto no es posible, pues la trenza 0 contradice **B3**) en el primer caso ( $\{\partial m, \partial m'\} = \{0, 0\} = 0 \neq [m, m']$ ) y **B1**) en el segundo ( $\partial\{n, n'\} = \partial 0 = 0 \neq [n, n']$ ); ya que el corchete no es 0 en general (si lo fuese, la  $K$ -álgebra de Lie se diría abeliana).

Por tanto el ejemplo dado es el modo de ver las  $K$ -álgebras de Lie como módulos cruzados trenzados y, como se verá en la siguiente proposición, es una generalización.

**Proposición 4.3.** *La correspondencia  $\mathcal{X}: \text{LieAlg}_K \rightarrow \text{BXLieAlg}_K$  dada por  $\mathcal{X}(M \xrightarrow{f} N) = \mathcal{X}(M) \xrightarrow{(f, f)} \mathcal{X}(N)$  es un funtor.*

*Además se tiene que, si  $M$  y  $N$  son dos  $K$ -álgebras de Lie, todo morfismo de  $\mathcal{X}(M)$  a  $\mathcal{X}(N)$  es de la forma  $(f, f)$  con  $f: M \rightarrow N$  morfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Por ello,  $M \simeq N$  como  $K$ -álgebras de Lie si y solo si  $\mathcal{X}(M) \simeq \mathcal{X}(N)$  como módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.*

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{X}(N)$  son módulos cruzados trenzados llega ver que el par  $(f, f)$  es, en efecto un homomorfismo en la categoría, ya que de ser así es obvio por definición que  $\mathcal{X}(\text{Id}_M) = (\text{Id}_M, \text{Id}_M) = \text{Id}_{\mathcal{X}(M)}$  y, si el codominio de  $f$  es el dominio de  $g$ , además  $\mathcal{X}(g \circ f) = (g \circ f, g \circ f) = (g, g) \circ (f, f) = \mathcal{X}(g) \circ \mathcal{X}(f)$ .

Por la elección de nuestra primera categoría el par  $(f, f)$  es un par de homomorfismos de  $K$ -álgebras y están bien definidos, al estar en el dominio el par  $(M, M)$  y en el codominio el par  $(N, N)$ . Por tanto solo tenemos que ver que se cumplen los axiomas de morfismo.

En ambos casos se notará el corchete de  $M$  y  $N$  mediante el mismo signo, pero si lo pensamos como acción en  $M$  lo denotaremos por  $\cdot$  y si es como acción en  $N$  por  $*$ . Además denotaremos  $\partial = \text{Id}_M$ ,  $\partial' = \text{Id}_N$  y las trenzas de  $\mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{X}(N)$  por  $\{-, -\}$  y  $\{-, -\}'$  de modo respectivo (aunque el corchete que las representa lo denotemos igual). Sean  $m, n, n' \in M$ , entonces:

- Se cumple **BH1**):  $f(n \cdot m) = f([n, m]) = [f(n), f(m)] = f(n) * f(m)$ .
- Se cumple **BH2**):  $f \circ \partial = f \circ \text{Id}_M = \text{Id}_N \circ f = \partial' \circ f$ .
- Se cumple **BH3**):  $\{f(n), f(n')\}' = [f(n), f(n')] = f([n, n']) = f(\{n, n'\})$ .

Nótese que en este caso  $f_1 = f_2 = f$ . Por tanto es un funtor.

Veamos ahora la segunda parte. Supongamos  $\mathcal{X}(M) \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}(N)$  es un morfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Usando **BH2**) obtenemos:  $f_1 = \text{Id}_N \circ f_1 = \partial' \circ f_1 = f_2 \circ \partial = f_2 \circ \text{Id}_M = f_2$ .

Tenemos por tanto que cualquier morfismo entre  $\mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{X}(N)$  es de la forma  $(f, f)$  con  $f$  un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

En particular, si  $\mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{X}(N)$  son isomorfos, entonces el isomorfismo es de la forma  $(f, f)$  y, usando la demostración del Lema 3.4 se tiene que  $f: M \rightarrow N$  es un isomorfismo.

La otra implicación es inmediata al usar la Proposición 1.11.  $\square$

## 4.2. Álgebras de Lie y álgebras de Lie categóricas trenzadas

Tras ver que el concepto de módulo cruzado trenzado  $K$ -álgebras de Lie generaliza el concepto de  $K$ -álgebra de Lie, nos interesa que el concepto de  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada generalice el concepto de  $K$ -álgebra de Lie. Para ello usamos el functor  $\Delta$  definido en la Proposición 3.1 e introducimos  $\mathcal{X}(M)$  en  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

**Ejemplo 4.4.** Sea  $\mathcal{X}(M) = (M, M, [\cdot, \cdot], \text{Id}_M, [\cdot, \cdot])$  el módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie inducido por la  $K$ -álgebra de Lie  $M$ . Veamos que forma tiene su categoría interna asociada.

Aplicando el functor  $\Delta$  obtenemos  $((M \rtimes M, M, s, t, e, k), \tau)$  donde:

- El corchete en  $M \rtimes M$  viene dado por:

$$\begin{aligned} [(m, n), (m', n')] &= ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']) \\ &= ([m, m'] + [n, m'] - [n', m], [n, n']) \\ &= ([m, m'] + [n, m'] + [m, n'] + [n, n'] - [n, n'], [n, n']) \\ &= ([m + n, m' + n'] - [n, n'], [n, n']) \end{aligned}$$

- $s: M \rtimes M \rightarrow M$  está dada por  $s((m, n)) = n$
- $t: M \rtimes M \rightarrow M$  está dada por  $t((m, n)) = m + n$
- $(M \rtimes M) \times_M (M \rtimes M)$  es el conjunto de pares ordenados  $((m, n), (m', n'))$  donde  $n' = s(m', n') = t(m, n) = m + n$ .

En este caso  $k(((m, n), (m', m + n))) = (m + m', n)$ .

Una vez que sabemos cual es la aplicación dominio y codominio podemos hacer el siguiente argumento. Tomemos  $x, y \in M$  y veamos supongamos que  $f: x \rightarrow y$  es una flecha en la categoría interna. Si esto es así  $f = (m, n) \in M \rtimes M$  cumpliendo que  $n = s(f) = x$  y  $m + n = t(f) = y$ ; por tanto,  $f = (y - x, x)$ . Dado que este par es una flecha entre  $x$  e  $y$ , concluimos que dados dos objetos en esta categoría interna existe siempre una única flecha entre ellos y esta flecha viene dada por la construcción anterior.

De este modo podemos obtener la identidad, pues esta debe de ser la única flecha que, fijado  $x \in M$ , tiene como dominio y codominio  $x$ .

Por tanto  $\text{Id}_x = (x - x, x) = (0, x) = e(x)$ , como cabía esperar, pero nótese que este es el único modo de dar identidades en este caso.

Lo mismo ocurre con la composición. Sean  $x \xrightarrow{(y-x, x)} y \xrightarrow{(z-y, y)} z$  dos flechas en la categoría interna. La composición será la única flecha con dominio  $x$  y como codominio  $z$ , por tanto

$$(z - y, y) \circ (y - x, x) = (z - x, x) = (z - y + y - x, x) = k((z - y, y), (z - x, x)).$$

Por tanto, el saber que es una categoría interna en este caso trivial nos llega tener como datos el dominio y codominio para recuperar las demás operaciones.

Recuperemos la trenza con estos datos para ver que es la única posible. Sean  $a, b \in M$ . Sabemos que  $\tau_{a,b}: [a, b] \rightarrow [b, a]$  y por tanto argumentando como hemos hecho hasta ahora  $\tau_{a,b} = ([b, a] - [a, b], [a, b]) = (-2[a, b], [a, b])$ , lo cual coincide con la construcción, ya que la trenza en  $\mathcal{X}(M)$  venía dada por el corchete.

**Definición 4.5.** La  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada  $\Delta \circ \mathcal{X}(M)$  se denomina  *$K$ -álgebra de Lie categórica trenzada inducida por la  $K$ -álgebra de Lie  $M$*

Tras introducir las  $K$ -álgebras de Lie en las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas, veamos que esta segunda es, en efecto, una generalización.

**Corolario 4.6.** *Sea  $K$  un cuerpo de característica diferente de 2.*

*Entonces el funtor composición  $\Delta \circ \mathcal{X}: \mathbf{LieAlg}_K \rightarrow \mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$  cumple que  $M$  es isomorfo a  $N$  como  $K$ -álgebra de Lie si y solo si  $\Delta \circ \mathcal{X}(M)$  es isomorfo a  $\Delta \circ \mathcal{X}(N)$  como  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada.*

*Demostración.* Sabemos, por la Proposición 4.3, que  $M \simeq N$  si y solo si son isomorfos  $\mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{X}(N)$ . Además como  $\Delta$  es una equivalencia en este caso por el Corolario 3.11 (se dice en la demostración), se tiene que  $\mathcal{X}(M)$  y  $\mathcal{X}(N)$  son isomorfos si y solo si  $\Delta \circ \mathcal{X}(M)$  y  $\Delta \circ \mathcal{X}(N)$  son isomorfos.  $\square$

El siguiente ejemplo muestra otro modo de introducir las  $K$ -álgebras de Lie en las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas.

**Ejemplo 4.7.** Sea  $M$  una  $K$ -álgebra de Lie con corchete  $[\cdot, \cdot]$ .

Tomemos como álgebra de Lie de objetos el propio  $M$ , y como álgebra de Lie de flechas el producto  $M \times M$  con el corchete del producto usual.

Si tenemos dos objetos  $x, y \in M$ , queremos que haya una única flecha  $f \in M \times M$  de modo que  $f: x \rightarrow y$ . Por simplicidad tomamos, en vez de  $(y - x, x)$ , como en el ejemplo anterior, el par  $(x, y)$ . Es decir, definimos como aplicación dominio la primera proyección (la cual denotaremos por  $s_\pi$ ) y como aplicación codominio la segunda proyección (que denotaremos por  $t_\pi$ ). Ambas son homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie por ser las proyecciones.

Tenemos que definir la composición, la identidad y la trenza. Al igual que en el ejemplo anterior usemos que conocemos los morfismos dominio y codominio:

- Se tiene que  $(M \times M) \times_M (M \times M)$  es el conjunto de cuaternas de  $M$ ,  $((x, y), (z, w))$  de modo que  $z = s_\pi(z, w) = t_\pi(x, y) = y$ . Además, si tomamos  $(x, y): x \rightarrow y$  y  $(y, z): y \rightarrow z$ , entonces su composición es la única flecha que tiene como dominio  $x$  y como codominio  $z$ , y por tanto definimos  $k: (M \times M) \times_M (M \times M) \rightarrow M \times M$  como  $k((x, y), (y, z)) = (x, z)$ .
- Si  $x \in M$ , entonces su morfismo identidad es la única cuyo dominio y codominio es  $x$ , y por tanto, definimos  $e: M \rightarrow M \times M$  como  $e(x) = (x, x)$
- Si  $a, b \in M$  entonces la trenza es el único morfismo interno que tiene como dominio  $[a, b]$  y como codominio  $[b, a]$ , y por tanto podemos definir  $\tau_{a,b}: M \times M \rightarrow M \times M$  como  $\tau_{a,b} = ([a, b], [b, a])$ .

Es fácil de ver que  $((M \times M, M, s_\pi, t_\pi, e, k), \tau)$  es una  $K$ -álgebra de Lie categórica por construcción, ya que se usan los axiomas **I1**), **I2**), **I3**) e **I4**) para definir, a partir del dominio y codominio, la composición y la identidad, por lo que se verifican trivialmente. También se verifican los axiomas **I5**) (este axioma es la asociatividad, la cual se da, ya que  $(z, w) \circ ((y, z) \circ (x, y)) = (x, w) = ((z, w) \circ (y, z)) \circ (x, y)$ ) e **I6**) (existencia de identidad, pues es obvio que  $k(((x, x), (x, y))) = (x, y) = k(((x, y), (y, y)))$ ).

En relación a la trenza, sabemos que, por construcción se cumple **T1**); además por la unicidad de los morfismos internos, se cumple **T2**). Por tanto solo hemos de verificar **T3**) y **T4**).

- Veamos que se cumple **T3**). Sean  $a, b, c \in M$ , entonces:

$$\begin{aligned} \tau_{[a,b],c} - \tau_{[a,c],b} &= ([[a, b], c], [c, [a, b]]) - ([[a, c], b], [b, [a, c]]) \\ &= (-[c, [a, b]] - [b, [c, a]], -[[a, b], c] - [[c, a], b]) = ([a, [b, c]], [[b, c], a]) \\ &= \tau_{a,[b,c]}. \end{aligned}$$

- Comprobemos **T4**), para ello tomemos  $a, b, c \in M$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_{a,[b,c]} - \tau_{b,[a,c]} &= ([a, [b, c]], [[b, c], a]) - ([b, [a, c]], [[a, c], b]) \\ &= (-[[b, c], a] - [[c, a], b], -[a, [b, c]] - [b, [c, a]]) = ([[a, b], c], [c, [a, b]]) \\ &= \tau_{[a,b],c}. \end{aligned}$$

Por tanto  $((M \times M, M, s_\pi, t_\pi, e, k), \tau)$  es una  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada.

**Definición 4.8.** Diremos que  $((M \times M, M, s_\pi, t_\pi, e, k), \tau)$ , definido en el ejemplo anterior, es la  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada asociada a la  $K$ -álgebra de Lie  $M$  y lo denotaremos por  $\mathcal{C}(M)$ .

La siguiente proposición prueba, usando una construcción diferente, que las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas generalizan las  $K$ -álgebras de Lie.

**Proposición 4.9.** La correspondencia  $\mathcal{C}: \mathbf{LieAlg}_K \rightarrow \mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$  dada por  $\mathcal{C}(M \xrightarrow{f} N) = \mathcal{C}(M) \xrightarrow{(f \times f, f)} \mathcal{C}(N)$ , donde  $f \times f: M \times M \rightarrow N \times N$  viene dada por  $f \times f((x, y)) = (f(x), f(y))$  para  $(x, y) \in M \times M$ , es un funtor.

*Demostración.* Es claro que, como  $f$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie,  $f \times f$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie (por la estructura del producto), y se comprueba fácilmente que el par  $(f \times f, f)$  es funtor interno entre álgebras de Lie categóricas trenzadas.

Es claro que, por construcción, si  $M$  es una  $K$ -álgebra de Lie,  $\text{Id}_M \times \text{Id}_M = \text{Id}_{M \times M}$ . Además si consideramos  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$  dos morfismos de  $K$ -álgebras de Lie entonces, de nuevo por definición, es inmediato que  $(g \times g) \circ (f \times f) = (g \circ f) \times (g \circ f)$ , como ya usamos anteriormente. Usando esto es inmediato, ya que la composición es componente a componente, que  $\mathcal{C}$  es un funtor.  $\square$

Uno puede, por tanto, introducir las  $K$ -álgebras de Lie en las  $K$ -álgebras de Lie categóricas trenzadas mediante la  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada asociada y la inducida. Puede parecer que introducir el concepto mediante  $K$ -álgebra de Lie categórica trenzada asociada es un modo mas intuitivo que por medio de la inducida, pues esta segunda tiene unas definiciones que pueden parecer algo artificiosas (a pesar de venir de un ejemplo fundamental, las aplicaciones parecen menos obvias si nos olvidamos de cual fue la idea inicial). La siguiente proposición intenta aclarar las dudas con respecto a este problema.

**Proposición 4.10.** *Los funtores  $\mathcal{C}$  y  $\Delta \circ \mathcal{X}$  son naturalmente isomorfos mediante el isomorfismo natural  $\Upsilon$  que a cada álgebra de Lie  $M$  le asocia el funtor interno  $\Upsilon_M = (v_M, \text{Id}_M): \mathcal{C}(M) \rightarrow \Delta \circ \mathcal{X}(M)$ , donde  $v_M: M \times M \rightarrow M \rtimes M$  viene dado por  $v_M((x, y)) = (y - x, x)$  para  $(x, y) \in M \times M$ .*

*Demostración.* La aplicación  $\text{Id}_M$  es homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie al tratarse de la identidad en  $M$ .

La aplicación  $v_M$  es homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Es  $K$ -lineal por serlo en cada componente (como espacio vectorial  $M \rtimes M = M \times M$ ), por lo que hemos de ver si conserva el corchete. Recordemos que el corchete en  $M \rtimes M$  viene dado por  $[(m, n), (m', n')] = ([m + n, m' + n'] - [n, n'], [n, n'])$  para  $(m, n), (m', n') \in M \rtimes M$ . Tomemos  $(x, y), (z, w) \in M \times M$ , se cumple:

$$\begin{aligned} v_M([(x, y), (z, w)]) &= v_M([([x, z], [y, w])) = ([y, w] - [x, z], [x, z]) \\ &= ([y - x + x, w - z + z] - [x, z], [x, z]) = [(y - x, x), (w - z, z)] \\ &= [v_M((x, y)), v_M((z, w))]. \end{aligned}$$

$\text{Id}_M$  es trivialmente biyectiva y se tiene que  $v_M$  es también biyectiva, ya que puede verse que tiene inversa, y ésta viene dada por  $v_M^{-1}((x, y)) = (y, x + y)$ .

$$\begin{aligned} v_M^{-1} \circ v_M((x, y)) &= v_M^{-1}((y - x, x)) = (x, y - x + x) = (x, y), \\ v_M \circ v_M^{-1}((x, y)) &= v_M((y, x + y)) = (x + y - y, y) = (x, y). \end{aligned}$$

Por tanto si vemos que se trata de un funtor interno trenzado habremos probado, usando el Lema 3.8, que es un isomorfismo en nuestra categoría.

Para esto denotemos  $\mathcal{C}(M) = ((M \times M, M, s_\pi, t_\pi, e_\pi, k_\pi), \tau^\pi)$  y  $\Delta \circ \mathcal{X}(M) = ((M \rtimes M, M, s, t, e, k), \tau)$ .

- Verifica **FI1**) y **FI2**) ya que, si tomamos  $(x, y) \in M \times M$ , entonces:

$$\begin{aligned}\text{Id}_M \circ s_\pi((x, y)) &= x = s((y - x, x)) = s \circ v_M((x, y)), \\ \text{Id}_M \circ t_\pi((x, y)) &= y = y - x + x = t((y - x, x)) = t \circ v_M((x, y)).\end{aligned}$$

- Se cumple **FI3**), pues si tomamos  $x \in M$ , se tiene:

$$v_M \circ e_\pi(x) = v_M(x, x) = (0, x) = e(x) = e(\text{Id}_M(x)) = e \circ \text{Id}_M(x).$$

- Comprobemos **FI4**). Para ello tomemos  $((x, y), (y, z)) \in (M \times M) \times_M (M \times M)$ , se cumple:

$$\begin{aligned}k \circ (v_M \times_{\text{Id}_M} v_M)((x, y), (y, z)) &= k(((y - x, x), (z - y, y))) = (z - x, x) \\ &= v_M((x, z)) = v_M(k_\pi((x, y), (y, z))) = v_M \circ k_\pi((x, y), (y, z)).\end{aligned}$$

Visto que es un funtor interno, veamos que es trenzado, es decir, que conserva las trenzas. Tomemos  $a, b \in M$ :

$$v_M(\tau_{a,b}^\pi) = v_M([a, b], [b, a]) = ([b, a] - [a, b], [a, b]) = (-2[a, b], [a, b]) = \tau_{a,b}$$

Por tanto  $\Upsilon_M$  es un isomorfismo en  $\mathbf{BICat}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

Para ver que es un isomorfismo natural nos falta ver que cumple el diagrama siguiente para todo homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie  $f: M \rightarrow N$ :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(M) & \xrightarrow{\Upsilon_M} & \Delta \circ \mathcal{X}(M) \\ \downarrow cf & & \downarrow \Delta \circ \mathcal{X}f \\ \mathcal{C}(N) & \xrightarrow{\Upsilon_N} & \Delta \circ \mathcal{X}(N).\end{array}$$

Donde  $\mathcal{C}(f) = (f \times f, f)$  y  $\Delta \circ \mathcal{X}f = \Delta((f, f)) = (f \times f, f)$ .

Para ver que el diagrama es conmutativo necesitamos ver que conmuta en cada componente de los pares de flechas (por la definición de composición). Es decir, tenemos que probar que  $(f \times f) \circ v_M = v_N \circ (f \times f)$  y que  $f \circ \text{Id}_M = \text{Id}_N \circ f$ .

La veracidad de la segunda composición es obvia, veamos la primera. Tomemos  $(x, y) \in M \times M$ :

$$\begin{aligned}(f \times f) \circ v_M((x, y)) &= f \times f((y - x, x)) = (f(y - x), f(x)) \\ &= (f(y) - f(x), f(x)) = v_N((f(x), f(y))) = v_N \circ (f \times f)((x, y)).\end{aligned}$$

De este modo se prueba que  $\Upsilon: \mathcal{C} \rightarrow \Delta \circ \mathcal{X}$  es un isomorfismo natural.  $\square$

*Observación 4.11.* Se tiene por tanto, usando la Observación 1.12 se tiene que  $M$  es isomorfo a  $N$  como  $K$ -álgebras de Lie si y solo si  $\mathcal{C}(M)$  es isomorfo a  $\mathcal{C}(N)$ , ya que  $\mathcal{C} \cong \Delta \circ \mathcal{X}$  y este último funtor cumple que cualquier isomorfismo entre las imágenes de los objetos procede de un isomorfismo mediante la imagen  $\Delta \circ \mathcal{X}$ , pudiendo aplicar la observación, ya que todos los isomorfismos posibles son de la forma  $\Delta \circ \mathcal{X}(f)$ .

Para concluir esta sección cabe hacer el siguiente comentario:

Uno podría plantearse un modo más elemental de introducir las  $K$ -álgebras de Lie en las  $K$ -álgebras de Lie categóricas, el cual sería uno de los siguientes: O bien tomar como objetos el conjunto  $\{0\}$  y flechas la  $K$ -álgebra de Lie  $M$ , lo que fallaría en las trenzas, pues sea cual sea el  $k$  necesario la trenza tendría el valor cero (por ser bilineal), y por tanto coincidiría con la identidad ( $\tau_{0,0} = 0 = e(0)$ ), por lo que se tiene que el axioma **T2**) indicaría que  $[x, y] = [y, x]$  lo cual no es cierto en general; o bien tomar  $M$  como flechas,  $M$  como objetos y como  $s, t$  y  $e$  la identidad, pero esto provocaría que solo hubiese flechas entre un elemento y sí mismo. Como  $[x, y] \neq [y, x]$  en general, esto último impediría construir las trenzas, pues éstas están definidas entre objetos diferentes por **T1**).

Es decir, ninguno de esos planteamientos que podrían parecer más simples podría funcionar en el caso trenzado.

Puede verse, de modo inmediato, que en el caso no trenzado, estos planteamientos son los correspondientes, en ese orden, a los casos de  $M \rightarrow \{0\}$  y  $\{0\} \rightarrow M$  que afirmamos que no eran posibles en la sección anterior.

### 4.3. Trenzas y 2-módulos cruzados

Las secciones anteriores muestran el motivo de haber elegido los axiomas **B1**, **B2**), **B3**) y **B4**), pues de este modo obtenemos el ejemplo trivial al coger el corchete como la trenza (además de la forma intuitiva que toman **T1**) y **T2**)). Sin embargo no explican la elección de los axiomas **B5**) y **B6**), pues en este ejemplo se reducen a la identidad de Jacobi, y otra reformulación de esta puede diferentes axiomas (por ejemplo los axiomas de trenza dados en este caso por Ulualan en [6] son compatibles con el ejemplo trivial, así como también lo son los axiomas resultantes de hacer el argumento de esta sección a los últimos axiomas del levantamiento de Peiffer de Ellis [4]).

En esta sección se muestra el concepto de 2-módulo para explicar el por qué de la elección de estos dos axiomas. Cabe destacar que hemos tomado la definición dada por Martins y Picken en [5] pues, como queremos que los 2-módulos de  $K$ -álgebras de Lie generalicen los módulos trenzados cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, queremos en particular que, en la construcción que veremos a continuación, el levantamiento de Peiffer con  $\delta = 0$ , nos devuelva nuestros 4 primeros axiomas de trenza (y por tanto el levantamiento de Peiffer sea una generalización de ésta) y esta definición (frente a la dada en [4] por Ellis y en [2] por Akça y Arvasi) verifica la afirmación.

**Definición 4.12.** Un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie es un 8-pla ordenada  $(M, N, P, *, \star, \partial, \delta, \{-, -\})$  donde:

- $M \xrightarrow{\partial} N \xrightarrow{\delta} P$  son homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie verificando que  $\delta \circ \partial = 0$ ,
- $*$ :  $P \times M \rightarrow M$  y  $\star$ :  $P \times N \rightarrow N$  son respectivamente una acción de  $P$  sobre  $M$  y una acción de  $P$  en  $N$  que verifican:

$$\mathbf{2M1)} \quad \partial(p * m) = p * \partial m, \quad \forall m \in M, \quad \forall p \in P,$$

$$\mathbf{2M2)} \quad \delta(p * n) = [p, \delta n], \quad \forall n \in N, \quad \forall p \in P,$$

- $\{-, -\}: N \times N \rightarrow M$  es una aplicación  $K$ -bilineal (denotaremos al igual que en trenzas  $\{-, -\}((n, n')) = \{n, n'\}$ ) denominada *levantamiento de Peiffer* que verifica:

$$\mathbf{PL1)} \quad \partial\{n, n'\} = [n, n'] - \delta(n) * n', \quad \forall n, n' \in N.$$

$$\mathbf{PL2)} \quad \{\partial(m), \partial(m)\} = [m, m'], \quad \forall m, m' \in M.$$

$$\mathbf{PL3)} \quad \{\partial(m), n\} + \{n, \partial(m)\} = -\delta(n) * m, \quad \forall n \in N, \quad m \in M.$$

$$\mathbf{PL4)} \quad p * \{n, n'\} = \{p * n, n'\} + \{n, p * n'\}, \quad \forall n, n' \in N, \quad p \in P.$$

$$\mathbf{PL5)} \quad \{n, [n', n'']\} = \{[n, n'] - \delta(n) * n', n''\} - \{[n, n''] - \delta(n) * n'', n'\}, \\ \forall n, n', n'' \in N.$$

$$\mathbf{PL6)} \quad \{[n, n'], n''\} = \delta(n) * \{n', n''\} + \{n, [n', n'']\} - \delta(n') * \{n, n''\} \\ - \{n', [n, n'']\}, \quad \forall n, n', n'' \in N.$$

*Observación 4.13.* Nótese que si  $\delta = 0$  el axioma **PL1)** recupera **B1)**, **PL2)** devuelve **B2)**, **PL5)** coincide con **B5)** y **PL6)** se convierte en **B6)**. Si además pedimos que  $P = 0$  (lo cual implica que  $\delta = 0$ ) el axioma **PL4)** desaparece, al ser trivialmente  $0 = 0$ . De este modo se observa que podemos recuperar la trenza como caso particular (y se explica el origen de **B5)** y **B6)**).

Sin embargo no hemos recuperado aún **B3)** y **B4)**, dado que aún no tenemos una acción de  $N$  en  $M$ , por ello se hace la siguiente proposición.

**Proposición 4.14.** Si  $(M, N, P, *, \star, \partial, \delta, \{-, -\})$  es un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie, entonces  $(M, N, \cdot, \partial)$ , donde  $\cdot: N \times M \rightarrow M$  viene dado por  $n \cdot m := \cdot((n, m)) = -\{\partial(m), n\}$  (o, equivalentemente por  $n \cdot m = \{n, \partial(x)\} + \delta(n) * m$  por **PL3)**), es un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.

*Demostración.* Empecemos comprobando que  $\cdot$  es una acción.

Es claro que es  $K$ -bilineal por ser esta aplicación el levantamiento con cambio de signo tener una aplicación  $K$ -lineal en cada componente, por lo que llega a comprobar los dos axiomas de acción.

- Se verifica **A1)**. Para ello tomemos  $n, n' \in N, m \in M$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} [n, n'] \cdot m &= -\{\partial(m), [n, n']\} \\ &= -\{[\partial(m), n] - \delta(\partial(m)) * n, n'\} + \{[\partial(m), n'] - \delta(\partial(m)) * n', n\} \\ &= -\{\partial\{\partial(m), n\}, n'\} + \{\partial\{\partial(m), n'\}, n\} \\ &= -\{\partial(-\{\partial(m), n'\}), n\} - (-\{\partial(-\{\partial(m), n\}), n'\}) \\ &= n \cdot (n' \cdot m) - n' \cdot (n \cdot m) \end{aligned}$$

Donde se ha usado **PL5)** en la segunda igualdad, **PL1)** en la 3 y en 4 la  $K$ -bilinealidad.

- Comprobemos ahora **A2**). Sea  $n \in N$ ,  $m, m' \in M$ , entonces:

$$\begin{aligned}
n \cdot [m, m'] &= -\{\partial[m, m'], n\} = -\{\partial(m), \partial(m')\}, n\} \\
&= -\delta(\partial(m)) * \{\partial(m'), n\} - \{\partial(m), [\partial(m'), n]\} + \delta(\partial(m')) * \{\partial(m), n\} \\
&\quad + \{\partial(m'), [\partial(m), n]\} \\
&= -\{\partial(m), [\partial(m'), n]\} + \{\partial(m'), [\partial(m), n]\} \\
&= -\{\partial(m), \partial(m')\} - \delta(\partial(m)) * \partial(m'), n\} \\
&+ \{\partial(m), n\} - \delta(\partial(m)) * n, \partial(m')\} + \{\partial(m'), \partial(m)\} - \delta(\partial(m')) * \partial(m), n\} \\
&\quad - \{\partial(m'), n\} - \delta(\partial(m')) * n, \partial(m)\} \\
&= -\{\partial\{\partial(m), \partial(m')\}, n\} + \{\partial\{\partial(m), n\}, \partial(m')\} + \{\partial\{\partial(m'), \partial(m)\}, n\} \\
&\quad - \{\partial\{\partial(m'), n\}, \partial(m)\} \\
&= -\{\{\partial[m, m']\}, n\} + \{\{\partial(m), n\}, m'\} + \{\partial[m', m], n\} - \{\{\partial(m'), n\}, m\} \\
&= -\{\{\partial[m, m']\}, n\} + [m', -\{\partial(m), n\}] - \{\partial[m, m'], n\} + [-\{\partial(m'), n\}, m] \\
&= 2(n \cdot [m, m']) + [m', n \cdot m] + [n \cdot m', m] \\
&= 2(n \cdot [m, m']) - [n \cdot m, m'] - [m, n \cdot m'].
\end{aligned}$$

Donde en la 2ª igualdad se usa **PL2**), en la igualdad 3 **PL6**), que  $\delta \circ \partial = 0$  en la 4, **PL5**) en la 5, **PL1**) en la 6 y usando **PL2**) de nuevo en la 7.

Despejando se obtiene que  $n \cdot [m, m'] = [n \cdot m, m'] + [m, n \cdot m']$ , por tanto se trata de una acción.

Veamos ahora que  $(M, N, \cdot, \partial)$  es un módulo cruzado. Verifiquemos los axiomas:

- Veamos **M1**). Sean  $n \in N$ ,  $m \in M$ , entonces:

$$\partial(n \cdot m) = \partial(-\{\partial(m), n\}) = -[\partial(m), n] + \delta(\partial(m)) * n = [n, \partial(m)].$$

Usando **PL1**) y que  $\delta \circ \partial = 0$

- Veamos ahora **M2**), tomemos  $m, m' \in M$ , entonces:

$$\partial(m) \cdot m' = -\{\partial(m'), \partial(m)\} = -[m', m] = [m, m'].$$

Sin más que usar **PL2**).

□

*Observación 4.15.* Con la acción anterior se tiene, por definición, la siguiente igualdad  $n \cdot m = -\{\partial(m), n\}$  y, por tanto  $\{\partial(m), n\} = -n \cdot m$ . recuperando el axioma **B3**). También hemos visto, usando **PL3**) que  $n \cdot m = \{n, \partial(x)\} + \delta(n) * m$  y haciendo  $\delta = 0$  obtenemos el axioma **B4**) con lo que se tiene que, en efecto, todos los axiomas de trenza salen del levantamiento de Peiffer en el caso  $\delta = 0$ . Además añadiendo la condición de que  $n \cdot m = -\{\partial(m), n\}$  sea una acción podemos substituir las dos igualdades anteriores por **PL3**). Por tanto todos los axiomas de trenza surgen del levantamiento de Peiffer cuando  $\delta = 0$  (además de obtener uno a mayores que desaparece cuando  $P = 0$ ).

Consecuencia de las observaciones anteriores tenemos las siguientes proposiciones.

**Proposición 4.16.** *Si  $(M, N, P, *, \star, \partial, \delta, \{-, -\})$  es un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie, entonces si  $\delta = 0$  se tiene que  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ , donde  $\cdot: N \times M \rightarrow M$  viene dado por  $n \cdot m := \cdot((n, m)) = -\{\partial(m), n\}$  es un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.*

Esto nos da una idea de como introducir los módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie en los 2-módulos de  $K$ -álgebras de Lie, como se verá a continuación.

**Proposición 4.17.** *Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie. Entonces  $(M, N, \{0\}, 0, 0, \partial, 0, \{-, -\})$  (donde  $\{0\}$  denota la  $K$ -álgebra de Lie trivial, y tenemos la acción 0 y el homomorfismo 0) es un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.*

**Definición 4.18.** Diremos que  $(M, N, \{0\}, 0, 0, \partial, 0, \{-, -\})$  es el 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie inducido por el módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  y lo denotaremos por  $\mathcal{X}'_2((M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}))$ .

Queremos ver que es funtorial, por lo que se mostrará a continuación la categoría de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie. La definición de los morfismos dada a continuación es la dada por Martins y Picken en [5].

**Definición 4.19.** Consideremos dos 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie  $(M, N, P, *, \star, \partial, \delta, \{-, -\})$  y  $(M', N', P', *', \star', \partial', \delta', \{-, -\}')$ .

$(f_1, f_2, f_3): (M, N, P, *, \star, \partial, \delta, \{-, -\}) \rightarrow (M', N', P', *', \star', \partial', \delta', \{-, -\}')$  se dice un *homomorfismo de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie* si  $f_1, f_2, f_3 \in \text{Arw}(\mathbf{LieAlg}_K)$ ,  $f_1: M \rightarrow M'$ ,  $f_2: N \rightarrow N'$  y  $f_3: P \rightarrow P'$ , y se verifican:

$$\mathbf{2H1)} \quad f_1(p * m) = f_3(p) *' f_1(m) \quad \forall m \in M, \forall p \in P.$$

$$\mathbf{2H2)} \quad f_1(p \star n) = f_3(p) \star' f_2(n) \quad \forall n \in N, \forall p \in P.$$

$$\mathbf{2H3)} \quad f_2 \circ \partial = \partial' \circ f_1.$$

$$\mathbf{2H4)} \quad f_3 \circ \delta = \delta' \circ f_2.$$

$$\mathbf{2H5)} \quad \{f_2(n), f_2(n')\}' = f_1(\{n, n'\}) \quad \forall n, n' \in N.$$

*Observación 4.20.* Se tiene que si  $\mathcal{X}_2 = (M, N, P, *, \star, \partial, \delta, \{-, -\})$  es un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie, entonces  $(\text{Id}_M, \text{Id}_N, \text{Id}_P): \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_2$  es homomorfismo de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie y se denotará  $\text{Id}_{\mathcal{X}_2} := (\text{Id}_M, \text{Id}_N, \text{Id}_P)$ .

Se tiene también que si  $\mathcal{X}_2 \xrightarrow{(f_1, f_2, f_3)} \mathcal{X}'_2 \xrightarrow{(g_1, g_2, g_3)} \mathcal{X}''_2$  son homomorfismos de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, entonces  $\mathcal{X}_2 \xrightarrow{(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, g_3 \circ f_3)} \mathcal{X}''_2$  es homomorfismo de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie y lo denominaremos composición denotando  $(g_1, g_2, g_3) \circ (f_1, f_2, f_3) := (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, g_3 \circ f_3)$ .

**Definición 4.21.** Denotaremos por  $\mathbf{2XLieAlg}_K$  a la categoría que tiene como objetos los 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, como flechas los homomorfismos de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie y como composición e identidad las construidas en la observación anterior.

*Observación 4.22.* Usando los mismos argumentos que en el Lema 3.4 se llega al mismo resultado, es decir el homomorfismo de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie  $(f_1, f_2, f_3)$  es un isomorfismo si y solo si  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  son aplicaciones biyectivas.

Veamos por tanto que es, en efecto, una generalización:

**Proposición 4.23.** *La correspondencia  $\mathcal{X}'_2: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{2XLieAlg}_K$  dada por  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{M}') = \mathcal{X}'_2(\mathcal{M}) \xrightarrow{(f_1, f_2, 0)} \mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  es un funtor.*

*Además se tiene que, si  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  son dos módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie, todo morfismo de  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M})$  a  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  es de la forma  $(f_1, f_2, 0)$  con  $\mathcal{M} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{M}'$  homomorfismo de módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie. Por ello,  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$  como módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie si y solo si  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  como 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.*

*Demostración.* Como ya se probó  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M})$  y  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  son 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, llega ver que el trío  $(f_1, f_2, 0)$  es, en efecto, un morfismo en la categoría, ya que de ser así es obvio que se trata de un funtor.

Por la elección de la categoría dominio, el trío  $(f_1, f_2, 0)$  es un trío de homomorfismos de  $K$ -álgebras y están bien definidos. Por tanto, solo tenemos que ver que se cumplen los axiomas de morfismo.

Tomemos  $\mathcal{M} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  y  $\mathcal{M}' = (M', N', \cdot', \partial', \{-, -\}')$ . Sean  $m \in M$ ,  $n, n' \in N$ ,  $p = 0 \in 0$ , entonces si denotamos  $0 = f_3$ , y las aplicaciones y acciones con la nomenclatura usual  $(*, \star, \delta)$  a pesar de ser todas 0, se tiene:

- Se cumple **2H1**):  $f_1(p * m) = f_1(0) = 0 = f_3(p) *' f_1(m)$ .
- Se verifica **2H2**):  $f_1(p \star n) = f_1(0) = 0 = f_3(p) \star' f_2(n)$ .
- Se da **2H3**):  $f_2 \circ \partial = \partial' \circ f_1$ , por **BH2**).
- Se cumple **2H4**):  $f_3 \circ \delta = 0 = \delta' \circ f_2$ .
- Comprobemos **2H5**):  $\{f_2(n), f_2(n')\}' = f_1(\{n, n'\})$ , por **BH3**).

Por tanto es un funtor.

Veamos ahora la segunda parte. Supongamos  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}) \xrightarrow{(f_1, f_2, f_3)} \mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  es un morfismo de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Dado que  $P = P' = 0$  obtenemos que  $f_3 = 0$  y por tanto tenemos que cualquier morfismo entre  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M})$  y  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  es de la forma  $(f_1, f_2, 0)$ .

Veamos que el par  $(f_1, f_2)$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie. Ya sabemos que se verifica **BH2**) y **BH3**) al cumplirse **2H3**) y **2H5**).

Veamos que se cumple **BH1**). Sean  $\mathcal{M} = (M, N, \cdot, N)$  y  $\mathcal{M}' = (M', N', \cdot', N')$ , usando el axioma de trenza **B4**) se tiene que  $n \cdot m = \{n, \partial m\}$  (de igual modo  $n \cdot' m = \{n, \partial' m\}'$ ) para  $n \in N$ ,  $m \in M$ . Usando esto junto **2H3**) y **2H5**) se cumple lo siguiente para  $n \in N$ ,  $m \in M$

$$\begin{aligned} f_1(n \cdot m) &= f_1(\{n, \partial m\}) = \{f_2(n), f_2(\partial m)\}' = \{f_2(n), \partial' f_1(m)\}' \\ &= f_2(n) \cdot' f_1(m). \end{aligned}$$

Lo cual es **BH1**).

Tenemos por tanto que cualquier morfismo entre  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M})$  y  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  es de la forma  $(f_1, f_2, 0)$  con  $(f_1, f_2)$  un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

En particular, si  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M})$  y  $\mathcal{X}'_2(\mathcal{M}')$  son isomorfos, entonces el isomorfismo es de la forma  $(f_1, f_2, 0)$ . Por la observación 4.22  $f_1$  y  $f_2$  son biyectivas por lo que usando el Lema 3.4 se tiene que  $(f_1, f_2): \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  es un isomorfismo.

La otra implicación es inmediata al usar la Proposición 1.11.  $\square$

*Observación 4.24.* Ya hemos visto que si  $P = 0$  se recupera el concepto de módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie. Se tiene también de modo inmediato que si  $M = 0$  entonces  $(N, P, \star, \delta)$  es un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie. Esto es cierto ya que  $\star$  es una acción, **2M2**) recupera **M1**) y el único axioma del levantamiento de Peiffer que no se anula, **PL1**) recupera **M2**), al ser  $\partial = 0$ .

## 4.4. Trenzas equivariantes y 2-módulos cruzados

El modo de introducir los módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie en los 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, no es el único modo de hacerlo, pero se ha tomado esta elección por su simplicidad. En esta sección se dará otro modo de hacer dicha introducción que no requiera pedir  $P = 0$  (lo cual hacía falta para anular **PL4**) y **2M1**)), pues en un futuro podría darse que el ejemplo con  $P = 0$  (al igual que el módulo cruzado  $M \rightarrow \{0\}$ ) no fuese suficientemente bueno (en el caso dicho no podían meterse trenzas, a pesar de que es el ejemplo mas trivial de módulo cruzado).

Para ello necesitamos algo que nos permita recuperar **PL4**) y **2M1**), para lo que se introduce la siguiente definición:

**Definición 4.25.** Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie. Sea  $P$  una  $K$ -álgebra de Lie y  $\ast: P \times M \rightarrow M$ ,  $\star: P \times N \rightarrow N$  dos acciones verificando  $\partial(p \ast m) = p \ast \partial m$  y  $p \ast (n \cdot m) = (p \star n) \cdot (p \ast m)$  (se dice en este caso que  $P$  actúa en  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ ).

Entonces se dirá que la trenza es  $(P, \ast, \star)$ -equivariante si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

$$p \ast \{n, n'\} = \{p \star n, n'\} + \{n, p \star n'\}, \quad \forall p \in P, \forall n, n' \in N.$$

Esta definición recupera el axioma **PL4**) sin requerir que  $P = 0$ , por ello se cumple la siguiente proposición:

**Proposición 4.26.** *Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie. Entonces si la trenza es  $(P, *, \star)$ -equivariante se tiene que  $(M, N, P, *, \star, \partial, 0, \{-, -\})$  es un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.*

Tenemos, por tanto, otro modo de introducir los módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie en los 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, y este viene dado por tomar  $P = N$ , la acción de  $N$  en  $M$  dada por el módulo cruzado trenzado y la acción de  $N$  en  $N$  dada por el corchete. Veamos por tanto el siguiente lema, que permite dicha construcción:

**Lema 4.27.** *Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie. Entonces la trenza es  $(N, \cdot, [\cdot, \cdot])$ -equivariante.*

*Demostración.* Es claro que  $\cdot$  es una acción y se probó en el ejemplo del módulo cruzado trenzado inducido que el corchete es una acción.

Denotando  $*$  =  $\cdot$  y  $\star$  =  $[\cdot, \cdot]$  se tiene por el axioma **M1**) que  $\partial(p * m) = \partial(p \cdot m) = [p, \partial m] = p \star \partial m$  para  $p \in N$ ,  $m \in M$  por lo que hemos de probar la última propiedad.

Para ello probemos que si  $n, n', n'' \in N$ , entonces  $\{[n', n''], n\} = -\{n, [n', n'']\}$  (lo cual recupera los dos axiomas finales dados por Ellis y Ulualan para **B5**) y **B6**) (este segundo en el caso particular de  $\delta = 0$ ) dadas en [6] y [4]).

$$\begin{aligned} \{[n, n'], n''\} &= \{n, [n', n'']\} - \{n', [n, n'']\} \\ &= \{n, [n', n'']\} - \{[n', n], n''\} + \{[n', n''], n\} \\ &= \{n, [n', n'']\} + \{[n, n'], n''\} + \{[n', n''], n\} \\ &\Rightarrow 0 = \{n, [n', n'']\} + \{[n', n''], n\} \end{aligned}$$

Donde se han usado **B6**) y **B5**).

Tomemos  $p, n, n' \in N$ . Entonces:

$$\begin{aligned} p * \{n, n'\} &= p \cdot \{n, n'\} = \{p, \partial\{n, n'\}\} = \{p, [n, n']\} = \{[p, n], n'\} - \{[p, n'], n\} \\ &= \{[p, n], n'\} + \{n, [p, n']\} = \{p \star n, n'\} + \{n, p \star n'\}. \end{aligned}$$

Donde se ha usado **B4**) en la 3ª igualdad, **B1** en la 4 y **B5**) en la 5.  $\square$

*Observación 4.28.* Usando la Proposición 4.26 y el Lema 4.27 se tiene que si  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  es un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie, entonces  $(M, N, N, \cdot, [\cdot, \cdot], \partial, 0, \{-, -\})$  es un 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.

**Definición 4.29.** Diremos que  $(M, N, N, \cdot, [\cdot, \cdot], \partial, 0, \{-, -\})$  es el 2-módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie asociado al módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  y lo denotaremos por  $\mathcal{X}_2((M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}))$ .

Veamos que es funtorial:

**Proposición 4.30.** *La correspondencia  $\mathcal{X}_2: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{2XLieAlg}_K$  dada por  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{M}') = \mathcal{X}_2(\mathcal{M}) \xrightarrow{(f_1, f_2, f_2)} \mathcal{X}_2(\mathcal{M}')$  es un funtor.*

*Además  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$  como módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie si y solo si  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{X}_2(\mathcal{M}')$  como 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.*

*Demostración.* Llega con ver que el trío  $(f_1, f_2, f_2)$  es, en efecto, un morfismo en la categoría.

Por la elección de la categoría dominio el trío  $(f_1, f_2, f_3)$  es un trío de homomorfismos de  $K$ -álgebras y están bien definidos. Por tanto solo tenemos que ver que se cumplen los axiomas de morfismo.

Tomemos  $\mathcal{M} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  y  $\mathcal{M}' = (M', N', \cdot', \partial', \{-, -\}')$ . Sean  $m \in M$ ,  $p, n, n' \in N$ , entonces con las aplicaciones y acciones con la nomenclatura usual  $(*, \star, \delta)$ , denominando  $f_3 = f_2$  se tiene:

- Se cumple **2H1**):  $f_1(p * m) = f_1(p \cdot m) = f_2(p) \cdot' f_1(m) = f_3(p) *' f_1(m)$ , por **BH1**).
- Se verifica **2H2**):  $f_1(p \star n) = f_1([p, n]) = [f_2(p), f_2(n)] = f_3(p) \star' f_2(n)$ .
- Se da **2H3**):  $f_2 \circ \partial = \partial' \circ f_1$ , por **BH2**).
- Se cumple **2H4**):  $f_3 \circ \delta = 0 = \delta' \circ f_2$ .
- Se tiene **2H5**):  $\{f_2(n), f_2(n')\}' = f_1(\{n, n'\})$ , por **BH3**).

Por tanto es un funtor.

Veamos ahora la segunda parte. Supongamos  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M}) \xrightarrow{(f_1, f_2, f_3)} \mathcal{X}_2(\mathcal{M}')$  es un morfismo de 2-módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Veamos que el par  $(f_1, f_2)$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie. Ya sabemos que se verifica **BH2**) y **BH3**) al cumplirse **2H3**) y **2H5**).

Veamos que se cumple **BH1**). Sean  $\mathcal{M} = (M, N, \cdot, N, \{-, -\})$  y  $\mathcal{M}' = (M', N', \cdot', N', \{-, -\}')$ , usando el axioma de trenza **B4**) se tiene que  $n \cdot m = \{n, \partial m\}$  (de igual modo  $n \cdot' m = \{n, \partial' m\}'$ ) para  $n \in N$ ,  $m \in M$ . Usando esto junto **2H3**) y **2H5**) se cumple lo siguiente para  $n \in N$ ,  $m \in M$

$$\begin{aligned} f_1(n \cdot m) &= f_1(\{n, \partial m\}) = \{f_2(n), f_2(\partial m)\}' = \{f_2(n), \partial' f_1(m)\}' \\ &= f_2(n) \cdot' f_1(m). \end{aligned}$$

Lo cual es **BH1**).

Tenemos por tanto que si  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M})$  y  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M}')$  son isomorfos, entonces el isomorfismo es de la forma  $(f_1, f_2, f_3)$ . Por la observación 4.22  $f_1$  y  $f_2$  son biyectivas por lo que usando el Lema 3.4 se tiene que  $(f_1, f_2): \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  es un isomorfismo.

La otra implicación es inmediata al usar la Proposición 1.11.  $\square$

*Observación 4.31.* Al contrario de proposiciones anteriores no se tiene que los únicos morfismos entre  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M})$  y  $\mathcal{X}_2(\mathcal{M}')$  sean de la forma  $(f_1, f_2, f_2)$  ya que, por ejemplo, también sería morfismo  $(f_1, f_2, 0)$ . Esta elección no es válida para un funtor, ya que  $N \neq \{0\}$  implica  $\text{Id}_N \neq 0$ .

## Capítulo 5

# Objetos simpliciales reducidos de longitud $n$

En este capítulo se darán definiciones previas para probar una última equivalencia de la categoría de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie.

### 5.1. Objetos simpliciales y Complejo de Moore

**Definición 5.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero (la definición de este tipo de objetos puede verse en [1]).

Un *objeto simplicial* de  $\mathcal{C}$  es una familia ordenada de ternas ordenadas  $\mathbf{S} = \{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde, si denotamos  $S_{-1} = 0$ , con 0 un objeto cero, se tiene que:

- $S_n$  son objetos de  $\mathcal{C}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- $d_i^n: S_n \rightarrow S_{n-1}$  son morfismos de  $\mathcal{C}$  para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  y se denominan *morfismos cara* (nótese que  $d_0^0 = 0$  siempre).
- $s_i^n: S_n \rightarrow S_{n+1}$  son morfismos de  $\mathcal{C}$  para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  y se denominan *morfismos degeneración*.
- Se satisfacen las identidades simpliciales:

$$\begin{aligned}d_i^{n-1} \circ d_j^n &= d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n, & 0 \leq i < j \leq n, \\s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n, & 0 \leq i \leq j \leq n, \\d_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j-1}^{n+1} \circ d_i^n, & 0 \leq i < j \leq n, \\d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \text{Id}_{S_n}, & i = j \text{ o } i = j + 1, \\s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_j^{n+1} \circ s_i^n, & 0 \leq j < i - 1 \leq n.\end{aligned}$$

Diremos que  $\mathbf{S}$  es un *objeto simplicial reducido* si y solo si  $S_0$  es un objeto cero.

**Definición 5.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero.

Sean dos objetos simpliciales  $\mathbf{S} = \{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\mathbf{S}' = \{(S'_n, \{d'_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s'_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{C}$ . Un *homomorfismo de objetos simpliciales*  $\mathbf{f}: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$  es una familia  $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde:

- $f_n: S_n \rightarrow S'_n$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ .
- $d_i^n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_i^n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall i \in \{0, \dots, n\}$ .
- $f_{n+1} \circ s_i^n = s'_i^n \circ f_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Proposición 5.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero. Entonces:

- Dado un par de homomorfismos de objetos simpliciales  $\mathbf{S} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{S}' \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{S}''$ , se cumple que la familia  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} := \{g_n \circ f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un homomorfismo de objetos simpliciales  $\mathbf{S} \xrightarrow{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}} \mathbf{S}''$ .
- Si  $\mathbf{S} = \{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un objeto simplicial de  $\mathcal{C}$ , entonces la familia  $\text{Id}_{\mathbf{S}} := \{\text{Id}_{S_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un homomorfismo de objetos simpliciales  $\mathbf{S} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{S}}} \mathbf{S}$ .

*Demostración.* Es inmediata. □

*Observación 5.4.* Por ser la composición e identidades las usuales dentro de las familias, se cumple de modo inmediato la asociatividad de la composición y la existencia de unidades lo cual permite dar la siguiente definición.

Los objetos simpliciales reducidos son un caso particular de objetos simpliciales, por lo que la misma definición de composición e identidad son válidas lo cual permite la segunda parte de la siguiente definición, donde denotamos por homomorfismo de objetos simpliciales reducidos a los homomorfismos de objetos simpliciales entre objetos simpliciales reducidos.

**Definición 5.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero.

Se denota por  $\mathbf{Simp}(\mathcal{C})$  a la categoría que tiene como objetos los objetos simpliciales de  $\mathcal{C}$ , como morfismos los homomorfismos de objetos simpliciales y como identidad y composición la dada por la Proposición 5.3.

Se denomina por  $\mathbf{RedSimp}(\mathcal{C})$  a la categoría que tiene como objetos los objetos simpliciales reducidos de  $\mathcal{C}$ , como morfismos los homomorfismos de objetos simpliciales reducidos y como identidad y composición la dada por la misma proposición.

**Ejemplo 5.6.** La categoría  $\mathbf{LieAlg}_K$  tiene objeto cero y este viene dado por el espacio vectorial  $\{0\}$ . Además la aplicación cero viene dada por la aplicación llevar todo al 0,  $0: M \rightarrow N$ .

**Definición 5.7.** Denominaremos  $K$ -álgebra de Lie simplicial a un objeto de la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

De igual modo, una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida es un objeto de  $\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)$ .

**Definición 5.8.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero.

Un *complejo de cadenas de objetos de  $\mathcal{C}$*  es un par  $(\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$  donde la primera familia está formada por objetos de  $\mathcal{C}$ ,  $C_n$  y  $\delta_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$  son morfismos de  $\mathcal{C}$  verificando  $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 5.9.** Sea  $\mathbf{L} = \{(L_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  una  $K$ -álgebra de Lie simplicial (en particular una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida).

Entonces el par de familias  $(\{NL_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$  donde:

1.  $NL_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i^n)$  para  $n \geq 1$ ,  $NL_0 = L_0$  y  $NL_n = 0$  para  $n < 0$ .
2.  $\partial_n: NL_n \rightarrow NL_{n-1}$  viene dada por  $\partial_n(x) = d_n^n(x)$  para  $n \geq 1$  (es la aplicación cero en los demás casos).

es un complejo de cadenas de objetos de  $\mathbf{LieAlg}_K$ .

*Demostración.* Es inmediato que  $NL_n$  son  $K$ -álgebras de Lie para  $n \geq 1$ . Además, si están bien definidos, es obvio que los  $\partial_n$  son homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie, al serlo  $d_n^n$ .

Veamos que  $\partial_n$  está bien definido, es decir, fijado  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  comprobemos que si  $x \in NL_n$ , entonces  $d_n^n(x) \in NL_{n-1}$ . Para  $n = 1$  es inmediato, pues  $NL_0 = L_0$  que es el codominio de  $d_1^1$ . Supongamos por tanto  $n \geq 2$ .

Sea  $x \in NL_n$ . Por definición  $d_j^n(x) = 0$  para todo  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Veamos que  $d_n^n(x) \in NL_{n-1}$ , es decir, comprobemos que  $d_i^{n-1}(d_n^n(x)) = 0$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ .

Fijemos  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ . Por la definición de objeto simplicial sabemos que  $d_i^{n-1} \circ d_j^n = d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$  cuando  $0 \leq i < j \leq n$ . Tomando  $j = n$  obtenemos que (dado que  $i \leq n-2 < n = j$ ):

$$d_i^{n-1} \circ d_n^n(x) = d_{n-1}^{n-1} \circ d_i^n(x) = d_{n-1}^{n-1}(0) = 0.$$

Donde hemos usado que  $d_i^n(x) = 0$  cuando  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  (y por tanto cuando  $i \leq n-2$ ).

Veamos ahora que se trata de un complejo de cadenas, es decir, veamos que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Para  $n \leq 1$  es claro, ya que en este caso  $\partial_{n-1} = 0$ . Supongamos por tanto que  $n > 1$ .

Usando de nuevo  $d_i^{n-1} \circ d_j^n = d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$  cuando  $0 \leq i < j \leq n$ , para  $i = n-1 < j = n$  obtenemos, si  $x \in NL_n$  (y por tanto  $d_i^n(x) = 0$  para  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ):

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(x) = d_{n-1}^{n-1} \circ d_n^n(x) = d_{n-1}^{n-1} \circ d_{n-1}^n(x) = d_{n-1}^{n-1}(0) = 0.$$

Con lo que se concluye la demostración.  $\square$

**Definición 5.10.** Si  $\mathbf{L} = \{(L_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una  $K$ -álgebra de Lie simplicial, se define su *complejo de Moore* como el complejo de cadenas de  $K$ -álgebras de Lie dado en la Proposición 5.9.

Se dirá que el complejo de Moore de una  $K$ -álgebra de Lie simplicial tiene longitud  $n \in \mathbb{N}$  (o de modo resumido que la  $K$ -álgebra de Lie simplicial tiene longitud  $n \in \mathbb{N}$ ) si y solo si  $NL_i = 0$  para todo  $i > n$ .

*Observación 5.11.* Poner condiciones en la longitud de una  $K$ -álgebra de Lie simplicial solo es una restricción a en los objetos, por lo que la misma composición e identidad valen para definir las categorías siguientes.

**Definición 5.12.** Se denota por  $\mathbf{Simp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq n}$  a la categoría que tiene como objetos las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales de longitud  $n$ , como morfismos los homomorfismos de objetos simpliciales entre ellas, como identidad y composición las dadas anteriormente.

Se denomina por  $\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq n}$  a la categoría que tiene como objetos las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas de longitud  $n$ , como morfismos los homomorfismos de objetos simpliciales reducidos entre ellas y la identidad y composición anteriores.

## 5.2. Objetos simpliciales truncados

**Definición 5.13.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero.

Un *objeto simplicial truncado en  $m$*  de  $\mathcal{C}$  es una familia de la forma

$$\{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m-1\}} \cup \{(S_m, \{d_i^m\}_{i \in \{0, \dots, m\}})\},$$

donde, si denotamos  $S_{-1} = 0$  con  $0$  un objeto cero, se tiene que:

- $S_n$  son objetos de  $\mathcal{C}$  para todo  $n \in \{0, \dots, m\}$ .
- $d_i^n : S_n \rightarrow S_{n-1}$  son flechas de  $\mathcal{C}$  para  $n \in \{0, \dots, m\}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  (nótese que  $d_0^0 = 0$  siempre).
- $s_i^n : S_n \rightarrow S_{n+1}$  son morfismos para  $n \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
- Se satisfacen las identidades simpliciales (cuando estas tengan sentido):

$$\begin{aligned} d_i^{n-1} \circ d_j^n &= d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n, & 0 \leq i < j \leq n, \\ s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n, & 0 \leq i \leq j \leq n, \\ d_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j-1}^{n+1} \circ d_i^n, & 0 \leq i < j \leq n, \\ d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \text{Id}_{S_n}, & i = j \text{ o } i = j + 1, \\ d_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n, & 0 \leq j < i - 1 \leq n. \end{aligned}$$

Diremos que  $\mathbf{S}$  es un *objeto simplicial reducido truncado en  $m$*  si y solo si  $S_0$  es un objeto cero.

A pesar de que  $s_i^m$  carece de sentido, por simplicidad denotaremos los objetos simpliciales (reducidos) por  $\{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$ .

*Observación 5.14.* Como se verá a continuación, las álgebras de Lie simpliciales truncadas  $\{(L_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$  que nos interesan son las que cumplen la siguiente propiedad:

$$\forall I, J \neq \emptyset \text{ cumpliendo } I \cap J = \emptyset, I \cup J = \{0, \dots, m\},$$

$$\text{se cumple } \left[ \bigcap_{i \in I} \ker(d_i^m), \bigcap_{j \in J} \ker(d_j^m) \right] = 0.$$

**Definición 5.15.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero.

Tomemos como datos  $\mathbf{S} = \{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$  y  $\mathbf{S}' = \{(S'_n, \{d'_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s'_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$ , dos objetos simpliciales truncados en  $m$  de la categoría  $\mathcal{C}$ . Un *homomorfismo de objetos simpliciales truncados*  $\mathbf{f}: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$  es una familia  $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$  donde:

- $f_n: S_n \rightarrow S'_n$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ .
- $d_i^n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_i^n, \forall n \in \{0, \dots, m\} \setminus \{0\}, \forall i \in \{0, \dots, n\}$ .
- $f_{n+1} \circ s_i^n = s'_i^n \circ f_n, \forall n \in \{0, \dots, m-1\}, \forall i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Observación 5.16.* Las siguientes categorías son posibles por el mismo resultado de composición e identidad que las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales (reducidas) dada por la Proposición 5.3, restringida ahora a un caso de familias finitas.

**Definición 5.17.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero.

Se denota por  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{Simp}(\mathcal{C})$  a la categoría que tiene como objetos los objetos simpliciales truncados en  $m$  de  $\mathcal{C}$ , como morfismos los homomorfismos de objetos simpliciales truncados y como identidad y composición la dada por la Proposición 5.3 (restringida a un numero finito de morfismos).

Se denomina por  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{RedSimp}(\mathcal{C})$  a la categoría que tiene como objetos los objetos simpliciales reducidos de  $\mathcal{C}$ , como morfismos los homomorfismos de objetos simpliciales reducidos y como identidad y composición la dada por la misma proposición.

Para el caso de que  $\mathcal{C} = \mathbf{LieAlg}_K$  se da, además, la siguiente definición:

Denominaremos por  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{Simp}(\mathcal{C})^P$  y  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{RedSimp}(\mathcal{C})^P$  a las categorías resultante de restringir los objetos (y por tanto las flechas) de las categorías  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{Simp}(\mathcal{C})$  y  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{RedSimp}(\mathcal{C})$  a los objetos que cumplen la propiedad dada en la Observación 5.14.

*Observación 5.18.* Dadas las definiciones de las categorías  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{Simp}(\mathcal{C})$  y  $\mathbf{Tr}_m \mathbf{RedSimp}(\mathcal{C})$  es inmediato observar que existen funtores, denominados funtores truncamiento en  $m$  y denotados por  $Tr_m$  como sigue:

$$Tr_m: \mathbf{Simp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Tr}_m \mathbf{Simp}(\mathcal{C}) \quad \text{y}$$

$$Tr_m: \mathbf{RedSimp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Tr}_m \mathbf{RedSimp}(\mathcal{C}),$$

definidos en ambos casos como quedarse solo con el trozo definido hasta el nivel  $m$ , es decir:

El funtor truncamiento en  $m$  manda  $\{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  a su correspondiente truncado  $\{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$  y un morfismo  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a  $\{f_n\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$ .

Los siguientes resultados fueron dados por Conduché en [3] para grupos simpliciales, pero la demostración es válida para cualquier categoría semiabeliana, siendo por tanto válidos para  $K$ -álgebras de Lie simpliciales. Escribiremos por tanto estos resultados para nuestro caso:

**Teorema 5.19** ([3]). *Se tienen los siguientes resultados:*

- La restricción  $Tr_2: \mathbf{Simp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2} \rightarrow \mathbf{Tr}_2 \mathbf{Simp}(\mathbf{LieAlg}_K)^P$  está bien definido y es una equivalencia.
  - El funtor que permite ver que  $Tr_2$  es una equivalencia, es decir, el que compuesto con  $Tr_2$  es isomorfo de modo naturales a la identidad, es el funtor 3-coesqueleto, restringiendo la imagen de un objeto truncado, a partir del elemento de truncación, a la parte generada por elementos degenerados (se habla del  $n$ -coesqueleto en [3] y [4]). Denotaremos este funtor por  $DCSk_3$ .
  - Como  $DCSk_3$  añade elementos a partir de  $L_2$  se tiene la igualdad  $Tr_2 \circ DCSk_3 = \text{Id}_{\mathbf{Tr}_2 \mathbf{Simp}(\mathbf{LieAlg}_K)^P}$ .

*Observación 5.20.* El teorema es cierto substituyendo las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales por  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas, ya que estas solo difieren en que  $S_0 = 0$ .

## Capítulo 6

# Equivalencia entre módulos cruzados trenzados y álgebras de Lie simpliciales reducidas de longitud 2

En este capítulo se probará la equivalencia entre las categorías de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie y la categoría de  $K$ -álgebras de Lie simpliciales (de complejo de Moore) de longitud 2.

Para dar un primer funtor  $\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2} \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{BXLieAlg}_K$  observemos como es el complejo de Moore de un objeto simplicial reducido de longitud 2 de  $K$ -álgebras de Lie.

Si  $\mathbf{L} = \{(L_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida de longitud 2, obtenemos un complejo de Moore donde  $NL_0 = 0 = NL_i$ ,  $i \geq 3$ , y por tanto una cadena de la forma:

$$\dots 0 \leftarrow NL_0 = 0 \xleftarrow{0=d_1} NL_1 \xleftarrow{\partial_2} NL_2 \xleftarrow{\partial_3=0} NL_3 = 0 \leftarrow 0 \dots$$

Por tanto toda la información del complejo de Moore queda determinada por la aplicación  $NL_2 \xrightarrow{\partial_2} NL_1$ . Notemos además que  $NL_1 = \ker(d_0^1) = \ker(0) = L_1$  por lo que la aplicación en realidad es  $NL_2 \xrightarrow{\partial_2=d_2^2|_{NL_2}} L_1$ .

Para obtener un módulo cruzado trenzado hemos de usar  $s_1^1$  y  $s_0^1$ . La equivalencia con las  $K$ -álgebras de Lie categóricas da la idea de que si identificáramos  $e$  con  $s_1^1$  entonces una posible acción viene dada por  $n \cdot m = [s_1^1(n), m]$ ,  $n \in L_1$ ,  $m \in NL_2$  (la elección de  $s_1^1$  frente a  $s_0^1$  se basa en que, por la definición de objeto simplicial  $d_2^2 \circ s_1^1 = \text{Id}_{L_2}$ , además se verá que  $[s_0^1(n), m] = 0$  para todo  $n$  y  $m$ ).

Por el trabajo de Ellis [4] sacamos la idea de que la trenza podría venir dada como el levantamiento de Peiffer, por  $\{n, n'\} = [s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]$  (hemos invertido el signo para compensar el cambio de signo en sus axiomas).

Veamos que esta construcción es válida.

**Nota 6.1.** En las siguientes demostraciones se usarán las distintas fórmulas de la definición de objeto simplicial con valores numéricos para  $i$ ,  $j$  y  $n$ . Solo mostraremos que la fórmula es válida en su primera aparición. El resto de apariciones se pondrá la fórmula sin mostrar su procedencia.

**Proposición 6.2.** Sea  $\mathbf{L} = \{(L_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida de longitud 2.

Entonces  $(NL_2, L_1, \cdot, \partial_2, \{-, -\})$  donde:

- $NL_2 = \ker(d_0^2) \cap \ker(d_1^2)$  y  $\partial_2 = d_2^2|_{NL_2}: NL_2 \rightarrow L_1$ ,
- $\cdot: L_1 \times NL_2 \rightarrow NL_2$  definida como  $\cdot((n, m)) := n \cdot m = [s_1^1(n), m]$  para  $n \in L_1, m \in NL_2$ ,
- $\{-, -\}: L_1 \times L_1 \rightarrow NL_2$  definida como  $\{-, -\}((n, n')) := \{n, n'\} = [s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]$  con  $n, n' \in L_1$ ,

es un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie.

*Demostración.* Ya sabemos que  $L_1$  y  $NL_2$  son  $K$ -álgebras de Lie.

Veamos que  $\cdot$  es una acción. Si estuviera bien definida sería  $K$ -bilineal por ser lineal en cada componente del corchete. Comprobemos que está bien definida. Dado que  $[s_1^1(n), m] \in L_2$  por construcción necesitamos probar que  $d_i^2([s_1^1(n), m]) = 0$  para  $i \in \{0, 1\}$ . En este caso sabemos, como  $m \in NL_2$ , que:

$$d_i^2([s_1^1(n), m]) = [d_i^2(s_1^1(n)), d_i^2(m)] = [d_i^2(s_1^1(n)), 0] = 0.$$

Probemos que se verifican **A1)** y **A2)**.

- Se da **A1)**, es decir  $[n, n'] \cdot m = n \cdot (n' \cdot m) - n' \cdot (n \cdot m)$  para  $n, n' \in L_1, m \in NL_2$ .

$$\begin{aligned} [n, n'] \cdot m &= [s_1^1([n, n']), m] = [[s_1^1(n), s_1^1(n')], m] \\ &= -[[s_1^1(n'), m], s_1^1(n)] - [[m, s_1^1(n)], s_1^1(n')] \\ &= [s_1^1(n), [s_1^1(n'), m]] - [s_1^1(n'), [s_1^1(n), m]] = n \cdot (n' \cdot m) - n' \cdot (n \cdot m). \end{aligned}$$

- Se tiene **A2)**, es decir  $n \cdot [m, m'] = [n \cdot m, m'] + [m, n \cdot m']$  para  $n \in L_1, m, m' \in NL_2$ .

$$\begin{aligned} n \cdot [m, m'] &= [s_1^1(n), [m, m']] = -[m, [m', s_1^1(n)]] - [m', [s_1^1(n), m]] \\ &= [m, [s_1^1(n), m']] + [[s_1^1(n), m], m'] = [n \cdot m, m'] + [m, n \cdot m']. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que se trata de la misma demostración que la usada para  $e$ , lo que justifica nuestra observación anterior.

Veamos que  $(NL_2, L_1, \cdot, \partial_2)$  es un módulo cruzado de  $K$ -álgebras de Lie.

- Se verifica **M1**), es decir  $\partial_2(n \cdot m) = [n, \partial_2 m]$  para  $m \in NL_2$ ,  $n \in L_1$ .

$$\partial_2(n \cdot m) = d_2^2([s_1^1(n), m]) = [d_2^2(s_1^1(n)), d_2^2(m)] = [n, \partial_2 m].$$

Donde hemos usado  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$  cuando  $i = j$  o  $i = j + 1$  y, en nuestro caso ( $n = 1, 2 = i = j + 1$ ), se tiene que  $d_2^2 \circ s_1^1 = \text{Id}_{L_1}$  para la segunda igualdad.

- Se cumple **M2**):  $\partial_2(m) \cdot m' = [m, m']$  para  $m, m' \in NL_2$ .

Tomando  $j = 1 < 3 - 1 = i - 1$  se tiene, aplicando  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n$  para  $n = 2$ , la fórmula  $d_3^3 \circ s_1^2 = s_1^1 \circ d_2^2$ .

$$\partial_2(m) \cdot m' = [s_1^1(d_2^2(m)), m'] = [d_3^3 \circ s_1^2(m), m'].$$

Queremos ver que  $[d_3^3 \circ s_1^2(m), m'] = [m, m']$  o, lo que es equivalente, que  $[d_3^3 \circ s_1^2(m) - m, m'] = 0$ .

Usando que  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$  cuando  $i = j$  o  $i = j + 1$  y tomando  $n = 2$ ,  $j = 2$ ,  $i = 3$  se tiene  $d_3^3 \circ s_2^2 = \text{Id}_{L_2}$ . Aplicando esto en la primera parte de la fórmula anterior se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [d_3^3 \circ s_1^2(m) - m, m'] &= [d_3^3 \circ s_1^2(m) - d_3^3 \circ s_2^2(m), d_3^3 \circ s_2^2(m')] \\ &= d_3^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]). \end{aligned}$$

Buscamos por tanto que  $d_3^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

Si vemos que  $[s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')] \in NL_3$  entonces, como  $NL_3 = \{0\}$  por hipótesis en la longitud del complejo de Moore, se tendrá la igualdad  $[s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')] = 0$ . Aplicando ahora  $d_3^3$ , al ser lineal, se tendría lo deseado.

Por tanto hemos de probar que  $[s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')] \in NL_3$  para concluir este apartado.

Empecemos viendo que  $d_0^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

$$\begin{aligned} d_0^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) &= [d_0^3(s_1^2(m)) - d_0^3(s_2^2(m)), d_0^3(s_2^2(m'))] \\ &= [s_0^1 \circ d_0^2(m) - s_0^1 \circ d_0^2(m), s_0^1 \circ d_0^2(m')] = [0 - 0, 0] = 0. \end{aligned}$$

Donde tomando  $i = 0 < j \in \{1, 2\}$  podemos usar  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$  para  $n = 2$  para obtener  $d_0^3 \circ s_j^2 = s_{j-1}^1 \circ d_0^2$ , usado en la segunda igualdad. La tercera igualdad se da al ser  $m, m' \in NL_2$  y, por tanto, estar en el núcleo de  $d_0^2$ .

Veamos ahora que  $d_1^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

$$\begin{aligned} d_1^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) &= [d_1^3(s_1^2(m)) - d_1^3(s_2^2(m)), d_1^3(s_2^2(m'))] \\ &= [m - s_1^1 \circ d_1^2(m), s_1^1 \circ d_1^2(m')] = [m - 0, 0] = 0. \end{aligned}$$

Donde hemos tomado  $i = 1 < j = 2$  para, al usar  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$  para  $n = 2$ , para obtener  $d_1^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_1^2$  en la segunda igualdad, a la vez que se ha usado que  $d_1^3 \circ s_1^2 = \text{Id}_{L_2}$  ( $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$  para  $n = 2$ ,  $i = j = 1$ ). La tercera igualdad se da, de nuevo, al ser  $m, m' \in NL_2$ .

Comprobemos para acabar que  $d_2^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

$$\begin{aligned} d_2^3([s_1^2(m) - s_2^2(m), s_2^2(m')]) &= [d_2^3(s_1^2(m)) - d_2^3(s_2^2(m)), d_2^3(s_2^2(m'))] \\ &= [m - m, m'] = [0, m'] = 0. \end{aligned}$$

Donde hemos usado en la segunda igualdad  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$  tomando  $n = 2$ ,  $i = 2$  y  $j \in \{1, 2\}$  (y por tanto  $j = i$  o  $i = j + 1$  lo que permite emplear la fórmula), obteniendo que  $d_2^3 \circ s_j^2 = \text{Id}_{L_2}$ .

Por tanto se concluye que  $\partial_2(m) \cdot m' = [m, m']$ .

Visto que  $(NL_2, L_1, \cdot, \partial_2)$  es un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie, veamos que  $\{n, n'\} = [s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]$  es una trenza.

Es claro que si estuviera bien definida sería  $K$ -bilineal, por ser  $K$ -lineal en cada componente del corchete. Por ello veamos que esta bien definida, es decir, veamos que si  $n, n' \in L_1$ , entonces  $[s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')] \in NL_2$ .

Veamos para empezar que  $d_0^2([s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]) = 0$

$$\begin{aligned} d_0^2([s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]) &= [d_0^2 \circ s_1^1(n) - d_0^2 \circ s_0^1(n), d_0^2 \circ s_1^1(n')] \\ [s_0^0 \circ d_0^1(n) - n, s_0^0 \circ d_0^1(n')] &= [0 - n, 0] = 0. \end{aligned}$$

Donde, tomando  $i = 0 < j = 1$  sacamos de la fórmula  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$  para  $n = 1$  la igualdad  $d_0^2 \circ s_1^1 = s_0^0 \circ d_0^1$ , y para  $i = 0 = j$  obtenemos, de nuevo para  $n = 1$ , de la fórmula  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$  la fórmula  $d_0^2 \circ s_0^1 = \text{Id}_{L_1}$ ; usamos ambas en la segunda igualdad. La tercera igualdad sale del hecho de que al ser  $L_0 = 0$ , tanto  $s_0^0$  como  $d_0^1$  son la aplicación cero.

Veamos ahora que  $d_1^2([s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]) = 0$

$$\begin{aligned} d_1^2([s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]) &= [d_1^2 \circ s_1^1(n) - d_1^2 \circ s_0^1(n), d_1^2 \circ s_1^1(n')] \\ [n - n, n'] &= [0, n'] = 0. \end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad hemos tomado la fórmula  $d_i^2 \circ s_j^1 = \text{Id}_{L_1}$ , la cual surge de tomar  $i = 1$ ,  $j \in \{0, 1\}$  (por tanto  $i = j$  o  $i = j + 1$ ) y  $n = 1$  en la igualdad  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$ .

Por tanto se tiene que está bien definida, es decir,  $\{n, n'\} \in NL_2$ .

Veamos para concluir que se verifican los axiomas de trenza:

- Se verifica **B1**), es decir,  $\partial_2\{n, n'\} = [n, n']$  para  $n, n' \in L_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_2\{n, n'\} &= d_2^2([s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]) \\ &= [d_2^2 \circ s_1^1(n) - d_2^2 \circ s_0^1(n), d_2^2 \circ s_1^1(n')] \\ &= [n - s_0^0 \circ d_1^1(n), n'] = [n - 0, n'] = [n, n']. \end{aligned}$$

Hemos usado  $d_2^2 \circ s_1^1 = \text{Id}_{L_1}$ ,  $d_2^2 \circ s_0^1 = s_0^0 \circ d_1^1$  ( $j = 0 < 2 - 1 = i - 1$ ,  $n = 1$  en  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$ ) y que  $L_0 = 0$ .

- Comprobemos **B2)**,  $\{\partial_2 m, \partial_2 m'\} = [m, m']$  para  $m, m' \in NL_2$ .

$$\{\partial_2 m, \partial_2 m'\} = [s_1^1(d_2^2(m)) - s_0^1(d_2^2(m)), s_1^1(d_2^2(m'))].$$

Usando  $d_3^3 \circ s_1^2 = s_1^1 \circ d_2^2$  y  $d_3^3 \circ s_0^2 = s_0^1 \circ d_2^2$  ( $j = 0 < 3 - 1 = i - 1$ ,  $n = 2$ ,  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n$ ) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \{\partial_2 m, \partial_2 m'\} &= [d_3^3 \circ s_1^2(m) - d_3^3 \circ s_0^2(m), d_3^3 \circ s_1^2(m')] \\ &= d_3^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')]). \end{aligned}$$

Por tanto hemos de ver que  $d_3^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')]) = [m, m']$ , o lo que es equivalente, que  $d_3^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')]) - [m, m'] = 0$ .

Usando que  $d_3^3 \circ s_2^2 = \text{Id}_{L_2}$ , como ya se ha visto, tenemos que demostrar que  $d_3^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ . De nuevo, es suficiente probar que  $[s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')] \in NL_3 = \{0\}$  para concluir. Comprobemos esto último:

Veamos que  $d_0^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

$$\begin{aligned} &d_0^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) \\ &= [d_0^3 \circ s_1^2(m) - d_0^3 \circ s_0^2(m), d_0^3 \circ s_1^2(m')] - [d_0^3 \circ s_2^2(m), d_0^3 \circ s_2^2(m')] \\ &= [s_0^1 \circ d_0^2(m) - m, s_0^1 \circ d_0^2(m')] - [s_1^1 \circ d_0^2(m), s_1^1 \circ d_0^2(m')] \\ &= [0 - m, 0] - [0, 0] = 0. \end{aligned}$$

Donde hemos usado  $d_0^3 \circ s_j^2 = s_{j-1}^1 \circ d_0^2$  con  $j \in \{1, 2\}$  y que  $d_0^3 \circ s_0^2 = \text{Id}_{L_2}$  ( $i = j = 0$ ,  $n = 2$  podemos usar  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$ ). También hemos usado que  $m, m' \in NL_2$ .

Observemos que  $d_1^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

$$\begin{aligned} &d_1^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) \\ &= [d_1^3 \circ s_1^2(m) - d_1^3 \circ s_0^2(m), d_1^3 \circ s_1^2(m')] - [d_1^3 \circ s_2^2(m), d_1^3 \circ s_2^2(m')] \\ &= [m - m, m'] - [s_1^1 \circ d_1^2(m), s_1^1 \circ d_1^2(m')] = [m - m, m'] - [0, 0] = 0. \end{aligned}$$

Donde usamos  $d_1^3 \circ s_1^2 = \text{Id}_{L_2}$ ,  $d_1^3 \circ s_0^2 = s_1^1 \circ d_1^2$  y que  $d_1^3 \circ s_0^2 = \text{Id}_{L_2}$  ( $i = j + 1 = 1$ ,  $n = 2$  permite usar  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = \text{Id}_{L_n}$ ). Al final se ha usado que  $m$  y  $m'$  pertenecen a  $NL_2$ .

Comprobemos que  $d_2^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) = 0$ .

$$\begin{aligned} &d_2^3([s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')]) \\ &= [d_2^3 \circ s_1^2(m) - d_2^3 \circ s_0^2(m), d_2^3 \circ s_1^2(m')] - [d_2^3 \circ s_2^2(m), d_2^3 \circ s_2^2(m')] \\ &= [m - s_0^1 \circ d_2^2(m), m'] - [m, m'] = [m - 0, m'] - [m, m'] = 0. \end{aligned}$$

Se ha usado  $d_2^3 \circ s_j^2 = \text{Id}_{L_2}$  cuando  $j \in \{1, 2\}$  y que  $d_2^3 \circ s_0^2 = s_0^1 \circ d_2^2$  ( $0 = j < i - 1 = 2 - 1$  con  $n = 2$  permite usar  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n$ ). Hemos usado que  $m \in NL_2$ .

Por tanto  $[s_1^2(m) - s_0^2(m), s_1^2(m')] - [s_2^2(m), s_2^2(m')] \in NL_3 = \{0\}$  y se concluye el apartado.

- Verifiquemos **B3**), es decir:  $\{\partial_2 m, n\} = -n \cdot m$  para  $m \in NL_2$ ,  $n \in L_1$ .

Se tiene la siguiente igualdad:

$$\{\partial_2 m, n\} = [s_1^1(\partial_2 m) - s_0^1(\partial_2 m), s_1^1(n)] = [d_3^3 \circ s_1^2(m) - d_3^3 \circ s_0^2(m), s_1^1(n)].$$

Se ha usado que  $s_1^1 \circ d_2^2 = d_3^3 \circ s_1^2$  y que  $s_0^1 \circ d_2^2 = d_3^3 \circ s_0^2$ .

Queremos ver por tanto que  $[d_3^3 \circ s_1^2(m) - d_3^3 \circ s_0^2(m), s_1^1(n)] = [m, s_1^1(n)]$  ya que  $[m, s_1^1(n)] = -[s_1^1(n), m] = -n \cdot m$ .

Usando que  $d_3^3 \circ s_2^2 = \text{Id}_{L_2}$  se tiene que lo anterior es equivalente a demostrar que  $[d_3^3 \circ s_1^2(m) - d_3^3 \circ s_0^2(m), d_3^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n)] - [d_3^3 \circ s_2^2(m), d_3^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n)] = 0$  y por tanto hay que probar que  $d_3^3([s_1^2(m) - s_0^2(m) - s_2^2(m), s_2^2 \circ s_1^1(n)]) = 0$  por la  $K$ -bilinealidad.

Es suficiente ver que  $[s_1^2(m) - s_0^2(m) - s_2^2(m), s_2^2 \circ s_1^1(n)] \in NL_3 = \{0\}$ . Comprobemos esto:

$$\begin{aligned} & d_0^3([s_1^2(m) - s_0^2(m) - s_2^2(m), s_2^2 \circ s_1^1(n)]) \\ &= [d_0^3 \circ s_1^2(m) - d_0^3 \circ s_0^2(m) - d_0^3 \circ s_2^2(m), d_0^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n)] \\ &= [s_0^1 \circ d_0^2(m) - m - s_1^1 \circ d_0^2(m), s_1^1 \circ d_0^2 \circ s_1^1(n)] \\ &= [0 - m - 0, s_1^1 \circ d_0^2 \circ s_1^1(n)] = [-m, s_1^1 \circ s_0^0 \circ d_0^1(n)] = [-m, 0] = 0. \end{aligned}$$

Hemos usado  $d_0^3 \circ s_j^2(m) = s_{j-1}^1 \circ d_0^2$  con  $j \in \{1, 2\}$  y  $d_0^3 \circ s_0^2(m) = \text{Id}_{L_2}$  en la segunda igualdad. En la cuarta igualdad se ha usado  $d_0^2 \circ s_1^1 = s_0^0 \circ d_0^1$ . Se ha usado que  $m \in NL_2$  y que  $L_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} & d_1^3([s_1^2(m) - s_0^2(m) - s_2^2(m), s_2^2 \circ s_1^1(n)]) \\ &= [d_1^3 \circ s_1^2(m) - d_1^3 \circ s_0^2(m) - d_1^3 \circ s_2^2(m), d_1^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n)] \\ &= [m - m - s_1^1 \circ d_1^2(m), s_1^1 \circ d_1^2 \circ s_1^1(n)] = [0 - 0, s_1^1(n)] = 0. \end{aligned}$$

Se ha empleado que  $d_1^3 \circ s_j^2 = \text{Id}_{L_2}$  para  $j \in \{0, 1\}$  y  $d_1^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_1^2$  en la segunda igualdad. En la cuarta se ha usado que  $d_1^2 \circ s_1^1 = \text{Id}_{L_1}$ . Hemos usado que  $m \in NL_2$ .

$$\begin{aligned} & d_2^3([s_1^2(m) - s_0^2(m) - s_2^2(m), s_2^2 \circ s_1^1(n)]) \\ &= [d_2^3 \circ s_1^2(m) - d_2^3 \circ s_0^2(m) - d_2^3 \circ s_2^2(m), d_2^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n)] \\ &= [m - s_0^1 \circ d_2^2(m) - m, s_1^1(n)] = [m - 0 - m, s_1^1(n)] = 0. \end{aligned}$$

Se ha usado  $d_2^3 \circ s_j^2 = \text{Id}_{L_2}$  con  $j \in \{1, 2\}$  y  $d_2^3 \circ s_0^2 = s_0^1 \circ d_2^2$  en la segunda igualdad. Se ha empleado que  $m \in NL_2$ .

Por tanto se da la igualdad requerida.

- Comprobemos **B4**),  $\{n, \partial_2 m\} = n \cdot m$  para  $m \in NL_2$ ,  $n \in L_1$ .

Se tiene la siguiente igualdad:

$$\{n, \partial_2 m\} = [s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(\partial_2 m)] = [s_1^1(n) - s_0^1(n), d_3^3 \circ s_1^2(m)].$$

Se ha usado que  $s_1^1 \circ d_2^2 = d_3^3 \circ s_1^2$ .

Queremos ver por tanto que  $[s_1^1(n) - s_0^1(n), d_3^3 \circ s_1^2(m)] = [s_1^1(n), m]$  ya que  $[s_1^1(n), m] = n \cdot m$ .

Usando que  $d_3^3 \circ s_2^2 = \text{Id}_{L_2}$  se tiene que es equivalente a demostrar que  $[d_3^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n) - d_3^3 \circ s_2^2 \circ s_0^1(n), d_3^3 \circ s_1^2(m)] - [d_3^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n), d_3^3 \circ s_2^2(m)] = 0$ .

Es suficiente ver que  $[s_2^2 \circ s_1^1(n) - s_2^2 \circ s_0^1(n), s_1^2(m)] - [s_2^2 \circ s_1^1(n), s_2^2(m)] \in NL_3 = \{0\}$ . Comprobemos esto:

$$\begin{aligned} & d_0^3([s_2^2 \circ s_1^1(n) - s_2^2 \circ s_0^1(n), s_1^2(m)] - [s_2^2 \circ s_1^1(n), s_2^2(m)]) \\ &= [d_0^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n) - d_0^3 \circ s_2^2 \circ s_0^1(n), d_0^3 \circ s_1^2(m)] - [d_0^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n), d_0^3 \circ s_2^2(m)] \\ &= [s_1^1 \circ d_0^2 \circ s_1^1(n) - s_1^1 \circ d_0^2 \circ s_0^1(n), s_0^1 \circ d_0^2(m)] - [s_1^1 \circ d_0^2 \circ s_1^1(n), s_1^1 \circ d_0^2(m)] \\ &= [s_1^1 \circ s_0^0 \circ d_0^1(n) - s_1^1(n), 0] - [s_1^1 \circ s_0^0 \circ d_0^1(n), 0] = [-s_1^1(n), 0] - [0, 0] = 0. \end{aligned}$$

Se ha usado  $d_0^3 \circ s_j^2(m) = s_{j-1}^1 \circ d_0^2$  con  $j \in \{1, 2\}$  en la segunda igualdad. En la tercera igualdad hemos usado  $d_0^2 \circ s_1^1 = s_0^0 \circ d_0^1$  y  $d_0^2 \circ s_0^1 = \text{Id}_{L_1}$ . Se ha usado que  $m \in NL_2$  y que  $L_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} & d_1^3([s_2^2 \circ s_1^1(n) - s_2^2 \circ s_0^1(n), s_1^2(m)] - [s_2^2 \circ s_1^1(n), s_2^2(m)]) \\ &= [d_1^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n) - d_1^3 \circ s_2^2 \circ s_0^1(n), d_1^3 \circ s_1^2(m)] - [d_1^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n), d_1^3 \circ s_2^2(m)] \\ &= [s_1^1 \circ d_1^2 \circ s_1^1(n) - s_1^1 \circ d_1^2 \circ s_0^1(n), m] - [s_1^1 \circ d_1^2 \circ s_1^1(n), s_1^1 \circ d_1^2(m)] \\ &= [s_1^1(n) - s_1^1(n), m] - [s_1^1(n), 0] = [0, m] - [s_1^1(n), 0] = 0. \end{aligned}$$

Se ha empleado que  $d_1^3 \circ s_j^2 = \text{Id}_{L_2}$  para  $j \in \{0, 1\}$  y  $d_1^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_1^2$  en la segunda igualdad. En la cuarta se ha usado que  $d_1^2 \circ s_j^1 = \text{Id}_{L_1}$  con  $j \in \{0, 1\}$ . Hemos usado que  $m \in NL_2$ .

$$\begin{aligned} & d_2^3([s_2^2 \circ s_1^1(n) - s_2^2 \circ s_0^1(n), s_1^2(m)] - [s_2^2 \circ s_1^1(n), s_2^2(m)]) \\ &= [d_2^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n) - d_2^3 \circ s_2^2 \circ s_0^1(n), d_2^3 \circ s_1^2(m)] - [d_2^3 \circ s_2^2 \circ s_1^1(n), d_2^3 \circ s_2^2(m)] \\ &= [s_1^1(n) - s_0^1(n), m] - [s_1^1(n), m] = -[s_0^1(n), m]. \end{aligned}$$

Se ha usado  $d_2^3 \circ s_j^2 = \text{Id}_{L_2}$  con  $j \in \{1, 2\}$  en la segunda igualdad.

Tenemos que comprobar para concluir este apartado que  $[s_0^1(n), m] = 0$  para  $n \in L_1, m \in NL_2$ .

Se tiene que, por definición  $m \in \ker(d_0^2) \cap \ker(d_1^2)$ . Además puede verse que  $d_2^2 \circ s_0^1(n) = s_0^0 \circ d_1^1(n) = 0$  al ser  $L_0 = 0$ . Por tanto  $s_0^1(n) \in \ker(d_2^2)$ . Usando estos dos datos se tiene las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} d_0^3([s_1^2 \circ s_0^1(n), s_2^2(m)]) &= [d_0^3 \circ s_1^2 \circ s_0^1(n), s_1^1 \circ d_0^2(m)] = 0. \\ d_1^3([s_1^2 \circ s_0^1(n), s_2^2(m)]) &= [d_1^3 \circ s_1^2 \circ s_0^1(n), s_1^1 \circ d_1^2(m)] = 0. \\ d_3^3([s_1^2 \circ s_0^1(n), s_2^2(m)]) &= [s_1^1 \circ d_2^2 \circ s_0^1(n), d_3^3 \circ s_2^2(m)] = 0. \end{aligned}$$

Donde se ha usado  $d_0^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_0^2$ ,  $d_1^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_1^2$  y  $d_3^3 \circ s_1^2 = s_1^1 \circ d_2^2$ .

Por tanto  $[s_1^2 \circ s_0^1(n), s_2^2(m)] \in \ker(d_0^3) \cap \ker(d_1^3) \cap \ker(d_3^3) := NL_{\{0,1,3\}}$ . Además  $d_2^3([s_1^2 \circ s_0^1(n), s_2^2(m)]) = [s_0^1(n), m] \in d_2^3(NL_{\{0,1,3\}})$  (se ha usado que  $d_2^3 \circ s_j^1 = \text{Id}_{L_2}$  con  $j \in \{1, 2\}$ ).

Si vemos que  $d_2^3(NL_{\{0,1,3\}}) = d_3^3(NL_3)$  habremos acabado, pues en ese caso  $d_2^3(NL_{\{0,1,3\}}) = \{0\}$  y por tanto  $[s_0^1(n), m] = 0$ .

Dado que  $d_3^3(NL_3) = \{0\}$  una inclusión es obvia. Veamos la otra inclusión.

Sea  $x \in d_2^3(NL_{\{0,1,3\}})$ . Existe  $y \in NL_{\{0,1,3\}}$  de modo que  $d_2^3(y) = x$ . Consideremos el elemento  $s_2^2 \circ d_2^3(y) - y \in L_3$ . Veamos que dicho elemento está en  $NL_3$ .

$$\begin{aligned} d_0^3(s_2^2 \circ d_2^3(y) - y) &= d_0^3(s_2^2 \circ d_2^3(y)) - d_0^3(y) = s_1^1 \circ d_0^2 \circ d_2^3(y) - 0 \\ &= s_1^1 \circ d_1^2 \circ d_0^3(y) = 0. \end{aligned}$$

Hemos usado  $d_0^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_0^2$  y que  $d_0^2 \circ d_2^3 = d_1^2 \circ d_0^3$  ( $0 = i < j = 2, n = 3$  para usar  $d_i^{n-1} \circ d_j^n = d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$ ).

$$\begin{aligned} d_1^3(s_2^2 \circ d_2^3(y) - y) &= d_1^3(s_2^2 \circ d_2^3(y)) - d_1^3(y) = s_1^1 \circ d_1^2 \circ d_2^3(y) - 0 \\ &= s_1^1 \circ d_1^2 \circ d_1^3(y) = 0. \end{aligned}$$

Se ha utilizado  $d_1^3 \circ s_2^2 = s_1^1 \circ d_1^2$  y que  $d_1^2 \circ d_2^3 = d_1^2 \circ d_1^3$  ( $1 = i < j = 2, n = 3$  para usar  $d_i^{n-1} \circ d_j^n = d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n$ ).

$$d_2^3(s_2^2 \circ d_2^3(y) - y) = d_2^3(s_2^2 \circ d_2^3(y)) - d_2^3(y) = d_2^3(y) - d_2^3(y) = 0.$$

Se ha usado  $d_2^3 \circ s_2^2 = \text{Id}_{L_2}$ .

Se tiene por ello que  $s_2^2 \circ d_2^3(y) - y \in NL_3$ . Además, usando  $d_3^3 \circ s_2^2 = \text{Id}_{L_2}$  se obtiene:

$$d_3^3(s_2^2 \circ d_2^3(y) - y) = d_2^3(y) - d_3^3(y) = x - 0 = x.$$

Por lo que  $x \in d_3^3(NL_3)$ , y por ello  $x = 0$ .

- Comprobemos las igualdades **B5)** y **B6)**, es decir, probemos que se cumple lo siguiente:  $\{n, [n', n'']\} = \{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\} + \{[n, n'], n''\} = \{n, [n', n'']\} - \{n', [n, n'']\}$  para  $n, n', n'' \in L_1$ :

$$\begin{aligned} &\{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\} \\ &= [s_1^1([n, n']) - s_0^1([n, n']), s_1^1(n'')] - [s_1^1([n, n'']) - s_0^1([n, n']), s_1^1(n')] \\ &= [[s_1^1(n), s_1^1(n'), s_1^1(n'')] - [[s_0^1(n), s_0^1(n'), s_1^1(n'')] \\ &\quad - [[s_1^1(n), s_1^1(n''), s_1^1(n')] + [[s_0^1(n), s_0^1(n''), s_1^1(n')] \\ &= -[[s_1^1(n'), s_1^1(n''), s_1^1(n)] - [[s_1^1(n''), s_1^1(n)], s_1^1(n')] \\ &\quad - [[s_0^1(n), s_0^1(n'), s_1^1(n'')] - [[s_1^1(n), s_1^1(n''), s_1^1(n')] + [[s_0^1(n), s_0^1(n''), s_1^1(n')] \\ &= [s_1^1(n), [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]] - [[s_0^1(n), s_0^1(n'), s_1^1(n'')] + [[s_0^1(n), s_0^1(n''), s_1^1(n')] \\ &= [s_1^1(n), [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]] - [s_0^1(n), [s_0^1(n'), s_1^1(n'')]] \\ &\quad - [s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_0^1(n)]] + [[s_0^1(n), s_0^1(n''), s_1^1(n')]. \end{aligned}$$

Veamos que  $[s_0^1(n), [s_0^1(n'), s_1^1(n'')]] = [s_0^1(n), [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]]$ . Esto es equivalente a probar que  $[s_0^1(n), [s_0^1(n'), s_1^1(n'')]] - [s_1^1(n'), s_1^1(n'')] = 0$ . Si vemos que  $[s_0^1(n'), s_1^1(n'')] - [s_1^1(n'), s_1^1(n'')] \in NL_2$  habremos probado esto, ya que  $[s_0^1(n), m] = 0$  para  $n \in L_1$ ,  $m \in NL_2$ , como probamos en el apartado anterior. Veamos por tanto la pertenencia.

$$\begin{aligned} & d_0^2([s_0^1(n'), s_1^1(n'')] - [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]) \\ &= [n', s_0^0 \circ d_0^1(n'')] - [s_0^0 \circ d_0^1(n'), s_0^0 \circ d_0^1(n'')] = [n', 0] - [0, 0] = 0. \end{aligned}$$

Donde se ha usado que  $d_0^2 \circ s_0^1 = \text{Id}_{L_1}$  y que  $d_0^2 \circ s_1^1 = s_0^0 \circ d_0^1$  junto que  $L_0 = 0$ .

$$d_1^2([s_0^1(n'), s_1^1(n'')] - [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]) = [n', n''] - [n', n''] = 0.$$

Se ha utilizado que  $d_1^2 \circ s_j^1 = \text{Id}_{L_1}$  cuando  $j \in \{0, 1\}$ .

Por tanto, al darse la igualdad, substituyendo en la igualdad anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\} \\ &= [s_1^1(n), [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]] - [s_0^1(n), [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]] \\ &\quad - [s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_0^1(n)]] + [[s_0^1(n), s_0^1(n'')], s_1^1(n')] \\ &= [s_1^1(n) - s_0^1(n), [s_1^1(n'), s_1^1(n'')]] - [s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_0^1(n)]] \\ &\quad + [[s_0^1(n), s_0^1(n'')], s_1^1(n')] \\ &= \{n, [n', n'']\} - [s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_0^1(n)]] + [s_1^1(n'), [s_0^1(n''), s_0^1(n)]]. \end{aligned}$$

Usando, al igual que antes y anticonmutatividad,  $[s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_0^1(n)]] = [s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_1^1(n)]]$  obtenemos:

$$\begin{aligned} & \{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\} \\ &= \{n, [n', n'']\} - [s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_1^1(n)]] + [s_1^1(n'), [s_0^1(n''), s_0^1(n)]]. \end{aligned}$$

Sumando y restando  $[s_1^1(n'), [s_1^1(n''), s_1^1(n)]]$  se tiene:

$$\begin{aligned} & \{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\} \\ &= \{n, [n', n'']\} + [s_1^1(n') - s_0^1(n'), [s_1^1(n''), s_1^1(n)]] \\ &\quad + [s_1^1(n'), [s_0^1(n''), s_0^1(n)] - [s_1^1(n''), s_1^1(n)]] \\ &= \{n, [n', n'']\} + \{n', [n'', n]\} + \{[n'', n], n'\}. \end{aligned}$$

Por la anticonmutatividad del corchete se tiene que podemos suprimir  $\{[n, n''], n'\}$  a ambos lados de la igualdad, obteniendo:

$$\{[n, n'], n''\} = \{n, [n', n'']\} + \{n', [n'', n]\}.$$

Usando la anticonmutatividad del corchete verificamos que se cumple **B6**). Veamos ahora **B5**). Si vemos que  $\{n', [n'', n]\} + \{[n'', n], n'\} = 0$ , entonces

$\{[n, n'], n''\} - \{[n, n''], n'\} = \{n, [n', n'']\} + \{n', [n'', n]\} + \{[n'', n], n'\}$  recupera dicho axioma, por lo que se concluiría el apartado. Comprobemos por tanto que  $\{n', [n'', n]\} + \{[n'', n], n'\} = 0$ .

Usando **B1)**, **B3)** y **B4)** se tiene:

$$\begin{aligned} \{n', [n'', n]\} + \{[n'', n], n'\} &= \{n', \partial_2\{n'', n\}\} + \{\partial_2\{n'', n\}, n'\} \\ &= n' \cdot \partial_2\{n'', n\} - n' \cdot \partial_2\{n'', n\} = 0. \end{aligned}$$

Por lo que se prueba **B5)** y se concluye la demostración.  $\square$

*Observación 6.3.* Una demostración más general del hecho que permitió decir que  $[s_0^1(n), m] = 0$  puede verse en [2], y afirma que si  $I, J \subset \{0, n-1\}$  de modo que  $I \cup J = \{0, n-1\}$ ,  $I \neq \emptyset \neq J$  y  $L_n$  está generado por elementos degenerados (nuestro  $L_3$  lo cumple, pues  $L_3 = \{0\}$ ), entonces:

$$\left[ \bigcap_{j \in J} \ker(d_j^{n-1}), \bigcap_{i \in I} \ker(d_i^{n-1}) \right] \subset \partial_n(NL_n).$$

Nuestro caso es un caso particular con  $n = 3$ ,  $J = \{2\}$  e  $I = \{0, 1\}$ .

*Notación 6.4.* Para simplificar notación se denotará a un objeto simplicial  $\{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \mathbb{N}}$  como  $\{(S_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}$ .

De igual modo, si  $\{(S_n, \{d_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}, \{s_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}})\}_{n \in \{0, \dots, m\}}$  es un objeto simplicial truncado, se simplificará a escribir  $\{(S_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}_m$ .

**Definición 6.5.** Sea  $\{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}$  una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida con complejo de Moore de longitud 2. Se dirá que el módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie  $(NL_2, L_1, \cdot, \partial_2, \{-, -\})$  construido en 6.2 es el *módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie asociado a  $\{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}$ .*

**Proposición 6.6.**  $\Gamma: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2}$  definido como

$$\Gamma(\{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}) \xrightarrow{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}} \{(L'_n, \{d'_i^n\}, \{s'_i^n\})\} = \mathcal{X} \xrightarrow{(f_2^N, f_1)} \mathcal{X}',$$

donde  $\mathcal{X} = (NL_2, L_1, \cdot, \partial_2, \{-, -\})$ ,  $\mathcal{X}' = (NL'_2, L'_0, *, \partial'_2, \{-, -\}')$  son los módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie asociados respectivamente a las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas con complejo de Moore de Longitud 2 y  $f_2^N: NL_2 \rightarrow NL'_2$  es la aplicación dada por  $f_2^N(x) = f_2(x)$  para todo  $x \in NL_2$ , es un funtor.

*Demostración.* Veamos para empezar que está bien definido, es decir, comprobemos que  $(f_2^N, f_1)$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie. Es claro que, de estar  $f_2^N$  bien definido, ambos serían homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie, ya que uno lo es por hipótesis y el otro lo es al ser  $f_2$  restringido.

Veamos que si  $m \in NL_2$ , entonces  $f_2^N(x) \in NL_2'$  para probar que está bien definido. Tomemos  $m \in NL_2$ ,  $i \in \{0, 1\}$  (por tanto  $d_i^2(m) = 0$ ), entonces usando la conmutación de las aplicaciones cara con  $\{f_n\}$  se obtiene:

$$d_i'^2(f_2^N(m)) = d_i'^2(f_2(m)) = f_1(d_i^2(m)) = f_1(0) = 0.$$

Al anularse para ambas aplicaciones se prueba que  $f_2(m) \in NL_2'$ .

Para ver que  $(f_2^N, f_1)$  es un homomorfismo de módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie, comprobemos que cumple los axiomas.

- Se verifica **BH1**), es decir  $f_2^N(n \cdot m) = f_1(n) * f_2^N(m)$  para  $n \in L_1$ ,  $m \in NL_2$ .

$$\begin{aligned} f_2^N(n \cdot m) &= f_2([s_1^1(n), m]) = [f_2(s_1^1(n)), f_2(m)] = [s_1^1(f_1(n)), f_2(m)] \\ &= f_1(n) * f_2(m) = f_1(n) * f_2^N(m). \end{aligned}$$

Hemos usado la conmutación de las aplicaciones degeneración con la familia  $\{f_n\}$ .

- Se da **BH2**), es decir,  $f_1 \circ \partial_2 = \partial_2' \circ f_2^N$ . Tomemos  $m \in NL_2$ . Entonces:

$$f_1 \circ \partial_2(m) = f_1(d_2^2(m)) = d_2'^2(f_2(m)) = \partial_2' \circ f_2^N(m).$$

- Se cumple **BH3**), es decir,  $\{f_1(n), f_1(n')\}' = f_2^N(\{n, n'\})$  para  $n, n' \in L_1$ .

$$\begin{aligned} f_2^N(\{n, n'\}) &= f_2([s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')]) \\ &= [f_2(s_1^1(n)) - f_2(s_0^1(n)), f_2(s_1^1(n'))] \\ &= [s_1^1(f_1(n)) - s_0^1(f_1(n)), s_1^1(f_1(n'))] = \{f_1(n), f_1(n')\}'. \end{aligned}$$

Hemos visto que la correspondencia objeto a objeto y flecha a flecha está bien definida veamos que es, en efecto, un funtor comprobando que conserva identidades y composiciones.

Es inmediato por la definición que  $\text{Id}_{L_2}^N = \text{Id}_{NL_2}$  y  $(g_2 \circ f_2)^N = g_2^N \circ f_1^N$  siendo estas las aplicaciones asociadas a los homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas con complejo de Moore de longitud 2

$$\{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\} \xrightarrow{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}} \{(L'_n, \{d_i'^n\}, \{s_i'^n\})\} \xrightarrow{\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}} \{(L''_n, \{d_i''^n\}, \{s_i''^n\})\}$$

. Usando esto y denotando  $\mathbf{L} := \{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}$  se prueban las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{Id}_{\mathbf{L}}) &= \Gamma(\{\text{Id}_{L_n}\}_{n \in \mathbb{N}}) = (\text{Id}_{L_2}^N, \text{Id}_{L_1}) = (\text{Id}_{NL_2}, \text{Id}_{L_1}) = \text{Id}_{\Gamma(\mathbf{L})}. \\ \Gamma(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \circ \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}) &= \Gamma(\{g_n \circ f_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = ((g_2 \circ f_2)^N, g_1 \circ f_1) \\ &= (g_2^N \circ f_2^N, g_1 \circ f_1) = (g_2^N, g_1) \circ (f_2^N, f_1) = \Gamma(\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \circ \Gamma(\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Se concluye que  $\Gamma$  es un funtor.  $\square$

A continuación se trata de dar un funtor para probar la equivalencia, por lo que necesitamos recuperar un complejo simplicial a partir de un módulo cruzado trenzado. Para hacer esto lo haremos primero hacia  $\mathbf{Tr}_2 \mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)^P$  y lo compondremos con  $DCSk_3$ , el cual se ha tratado en el Teorema 5.19, pero con la restricción a las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas.

**Proposición 6.7.** *Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un módulo cruzado trenzado  $K$ -álgebras de Lie. Entonces la familia  $\{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}_2$ , donde*

- $L_0 = 0$ , además por necesidad de definición  $d_0^0 = 0$ .
- $L_1 = N$ . Por ser  $L_0 = 0$  tomamos  $d_0^1 = d_1^1 = 0$  y  $s_0^0 = 0$ .
- $L_2 = (M \rtimes N) \rtimes N$  donde  $M \rtimes N$  es el producto semidirecto de  $M$  con  $N$  mediante la acción  $\cdot$  y  $(M \rtimes N) \rtimes N$  es el producto semidirecto de  $M \rtimes N$  por  $N$  mediante la acción  $*$ :  $N \times (M \rtimes N) \rightarrow M \rtimes N$  definida como  $n' * (m, n) = (-\{n', n\}, [n', n])$ . Para este nivel, las aplicaciones cara y degeneración son las siguientes:

- $d_0^2: L_2 \rightarrow L_1$  definida por  $d_0^2(((m, n), n')) = n'$ ,
- $d_1^2: L_2 \rightarrow L_1$  definida por  $d_1^2(((m, n), n')) = n + n'$ ,
- $d_2^2: L_2 \rightarrow L_1$  definida por  $d_2^2(((m, n), n')) = \partial m + n$ ,
- $s_0^1: L_1 \rightarrow L_2$  definida como  $s_0^1(n) = ((0, 0), n)$ ,
- $s_1^1: L_1 \rightarrow L_2$  definida como  $s_1^1(n) = ((0, n), 0)$ ,

es una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida truncada en 2 que verifica la propiedad dada en la Observación 5.14.

*Demostración.* Es claro que, de ser una  $K$ -álgebra de Lie simplicial, es reducida, pues se toma  $L_0 = 0$ .

Además el primer nivel, dado por  $L_1$  y  $L_0$ , está bien definido ya que todas las aplicaciones son la aplicación 0 y por tanto son homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie. Las identidades simpliciales posibles se verifican por ser todas las aplicaciones la aplicación cero, incluida la identidad de  $L_0 = 0$ .

Estudiemos ahora el nivel 2, dado por  $L_1$  y  $L_2$  y sus respectivas aplicaciones cara y degeneración. Veamos para empezar que  $L_2$  está bien definido. Por hipótesis  $M \rtimes N$  está bien definido, ya que  $\cdot$  es una acción.

Veamos por tanto que  $*$ :  $N \times (M \rtimes N) \rightarrow M \rtimes N$  definida como  $n' * (m, n) = (-\{n', n\}, [n', n])$  es una acción para ver que  $(M \rtimes N) \rtimes N$  está bien definido (es  $K$ -bilineal, usando la misma demostración que la dada para la trenza en la Proposición 2.23).

- Veamos **A1**, es decir,  $[n', n''] * (m, n) = n' * (n'' * (m, n)) - n'' * (n' * (m, n))$

para  $n', n'' \in N$ ,  $(m, n) \in M \rtimes N$ :

$$\begin{aligned}
[n', n''] * (m, n) &= (-\{[n', n''], n\}, [[n', n''], n]) \\
&= (-\{n', [n'', n]\} + \{n'', [n', n]\}, -[[n, n'], n''] - [[n'', n], n']) \\
&= (-\{n', [n'', n]\} + \{n'', [n', n]\}, [n', [n'', n]] - [n'', [n', n]]) \\
&= (-\{n', [n'', n]\}, [n', [n'', n]]) - (-\{n'', [n', n]\}, [n'', [n', n]]) \\
&= n' * (-\{n'', n\}, [n'', n]) - n'' * (-\{n', n\}, [n', n]) \\
&= n' * (n'' * (m, n)) - n'' * (n' * (m, n)).
\end{aligned}$$

Donde hemos usado **B6**) en la igualdad 2.

- Se cumple **A2**). Para ver esto comprobemos que se cumple la propiedad de que  $n'' * [(m, n), (m', n')] = [n'' * (m, n), (m', n')] + [(m, n), n'' * (m', n')]$  cuando  $(m, n), (m', n') \in M \rtimes N$ ,  $n'' \in N$ .

$$\begin{aligned}
&[n'' * (m, n), (m', n')] + [(m, n), n'' * (m', n')] \\
&= [(-\{n'', n\}, [n'', n]), (m', n')] + [(m, n), (-\{n'', n'\}, [n'', n'])] \\
&= ([-\{n'', n\}, m'] + [n'', n] \cdot m' - n' \cdot (-\{n'', n\}), [[n'', n], n']) \\
&+ ([m, -\{n'', n'\}] + n \cdot (-\{n'', n'\}) - [n'', n'] \cdot m, [n, [n'', n']]) \\
&= (-n' \cdot (-\{n'', n\}), [[n'', n], n']) + (n \cdot (-\{n'', n'\}), [n, [n'', n']]) \\
&= (n' \cdot \{n'', n\}, [[n'', n], n']) - (n \cdot \{n'', n'\}, [n, [n'', n']]) \\
&= (-\{[n'', n], n'\}, [[n'', n], n']) - (-\{[n'', n'], n\}, -[[n'', n'], n]) \\
&= (-\{[n'', n], n'\} + \{[n'', n'], n\}, [[n'', n], n'] - [[n'', n'], n]) \\
&= (-\{n'', [n, n']\}, -[[n, n''], n'] - [[n'', n'], n]) \\
&= (-\{n'', [n, n']\}, [[n', n], n'']) = (-\{n'', [n, n']\}, [n'', [n, n']]) \\
&= n'' * ([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n']) = n'' * [(m, n), (m', n')].
\end{aligned}$$

Se ha usado en la igualdad 3 que  $\{[n'', n], m\} = \{\partial\{n'', n\}, \partial(m)\} = \{[n'', n], \partial(m)\} = [n'', n] \cdot m$  (se prueba usando en orden **B2**), **B1**) y **B4**) junto con la  $K$ -bilinealidad para quitar el signo dentro del primer sumando y la anticonmutatividad para usarla el segundo sumando. Se usan en la igualdad 5 los axiomas **B3**) y **B1**) (ya que  $n' \cdot \{n'', n\} = -\{\partial\{n'', n\}, n'\} = -\{[n'', n], n'\}$ ). Se usa **B5**) en la igualdad 7.

Por tanto  $L_2 = (M \rtimes N) \rtimes N$  está bien definido. Veamos a continuación que los morfismos cara y degeneración son, en efecto, homomorfismos de  $K$ -álgebras de Lie.

- Es claro que  $d_0^2$  es  $K$ -lineal, ya que a la altura de espacios vectoriales es una segunda proyección desde el producto cartesiano. Veamos que es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Tomemos  $((m, n), n'), ((m', n''), n''') \in L_2$ :

$$\begin{aligned}
&d_0^2([(m, n), n'], ((m', n''), n''')) \\
&= d_0^2([(m, n), (m', n'')] + n' * (m', n'') - n''' * (m, n), [n', n'''])) \\
&= [n', n'''] = [d_0^2([(m, n), n']), d_0^2([(m', n''), n'''))].
\end{aligned}$$

- Veamos en primer lugar que  $d_1^2$  es  $K$ -lineal.

Sean  $\lambda, \mu \in K$ ,  $((m, n), n'), ((m', n''), n''') \in L_2$ :

$$\begin{aligned} d_1^2(\lambda((m, n), n') + \mu((m', n''), n''')) &= d_1^2((\lambda m + \mu m', \lambda n + \mu n''), \lambda n' + \mu n''') \\ &= \lambda n + \mu n'' + \lambda n' + \mu n''' = \lambda(n + n') + \mu(n'' + n''') \\ \lambda d_1^2(((m, n), n')) + \mu d_1^2(((m', n''), n''')) & \end{aligned}$$

Veamos ahora que la aplicación es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Sea para ello  $((m, n), n'), ((m', n''), n''') \in L_2$ .

$$\begin{aligned} & d_1^2([((m, n), n'), ((m', n''), n''')]) \\ &= d_1^2([(m, n), (m', n'')] + n' * (m', n'') - n''' * (m, n), [n', n''']) \\ &= d_1^2([(m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n'']) + (-\{n', n''\}, [n', n'']) \\ & \quad - (-\{n''', n\}, [n''', n]), [n', n''']) \\ &= d_1^2([(m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m - \{n', n''\} + \{n''', n\}, \\ & \quad [n, n'']) + [n', n''] - [n''', n]), [n', n''']) \\ &= [n, n''] + [n', n''] - [n''', n] + [n', n'''] \\ &= [n + n', n''] + [n, n'''] + [n', n'''] = [n + n', n'' + n'''] \\ &= [d_1^2(((m, n), n')), d_1^2(((m', n''), n'''))]. \end{aligned}$$

- Se tiene que  $d_2^2$  es  $K$ -lineal pues a nivel de  $K$ -espacios vectoriales la aplicación es hacer primero la primera proyección y a continuación la aplicación  $t$  de la Proposición 2.13, siendo ambas aplicaciones  $K$ -lineales.

Veamos que conserva los corchetes:

$$\begin{aligned} & d_2^2([((m, n), n'), ((m', n''), n''')]) \\ &= d_2^2([(m, n), (m', n'')] + n' * (m', n'') - n''' * (m, n), [n', n''']) \\ &= d_2^2([(m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n, n'']) + (-\{n', n''\}, [n', n'']) \\ & \quad - (-\{n''', n\}, [n''', n]), [n', n''']) \\ &= d_2^2([(m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m - \{n', n''\} + \{n''', n\}, \\ & \quad [n, n'']) + [n', n''] - [n''', n]), [n', n''']) \\ &= \partial([m, m'] + n \cdot m' - n' \cdot m - \{n', n''\} + \{n''', n\}) + [n, n''] \\ & \quad + [n', n''] - [n''', n] \\ &= [\partial m, \partial m'] + \partial(n \cdot m') - \partial(n' \cdot m) - \partial\{n', n''\} + \partial\{n''', n\} \\ & \quad + [n, n''] + [n', n''] - [n''', n] \\ &= [\partial m, \partial m'] + [n, \partial m'] - [n', \partial m] - [n', n''] + [n''', n] + [n, n''] \\ & \quad + [n', n''] - [n''', n] \\ &= [\partial m, \partial m'] + [n, \partial m'] + [\partial m, n'] + [n, n''] = [\partial m + n, \partial m' + n''] \\ &= [d_2^2(((m, n), n')), d_2^2(((m', n''), n'''))]. \end{aligned}$$

Donde hemos usado **A1**) de  $\cdot$  y **B1**) de la trenza.

- Es claro que  $s_0^1$  es  $K$ -lineal, pues lo es en cada componente, solo hemos de ver que se conservan los corchetes. Tomemos  $n, n' \in L_1$ :

$$\begin{aligned} [s_0^1(n), s_0^1(n')] &= [((0, 0), n), ((0, 0), n')] \\ &= [((0, 0), (0, 0)) + n * (0, 0) - n' * (0, 0), [n, n']] \\ &= ((0, 0), [n, n']) = s_0^1([n, n']). \end{aligned}$$

- Se tiene que  $s_1^1$  es  $K$ -lineal al serlo en cada componente. Veamos que es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Consideremos  $n, n' \in L_1$ , entonces:

$$\begin{aligned} [s_1^1(n), s_1^1(n')] &= [((0, n), 0), ((0, n), 0)] \\ &= [((0, n), (0, n')) + 0 * (0, n') - 0 * (0, n), [0, 0]] = [((0, n), (0, n')), 0] \\ &= (([0, 0] + n \cdot 0 - n' \cdot 0, [n, n']), 0) = ((0, [n, n']), 0) = s_1^1([n, n']). \end{aligned}$$

Queda por tanto ver que se cumplen a este nivel las identidades simpliciales.

- Se tiene de modo inmediato que  $d_i^1 \circ d_j^2 = d_{j-1}^1 \circ d_i^2$ , cuando  $0 \leq i < j \leq 2$ , ya que  $d_i^1 = 0$  para todo  $i \in \{0, 1\}$ .
- Se cumple que  $s_i^1 \circ s_j^0 = s_{j+1}^1 \circ s_i^0$  para  $0 \leq i \leq j \leq 0$  ya que el único caso posible es  $i = j = 0$  y  $s_0^1 \circ s_0^0 = s_1^1 \circ s_0^0$  al ser  $s_0^0 = 0$ .
- Veamos que  $d_i^2 \circ s_j^1 = s_{j-1}^0 \circ d_i^1$  cuando  $0 \leq i < j \leq 1$ , es decir, veamos la veracidad para  $i = 0, j = 1$ . Dado que  $s_0^0 = 0$  y  $d_0^1 = 0$  tenemos que probar que  $d_0^2 \circ s_1^1 = 0$ . Tomemos  $n \in L_1$ , entonces:

$$d_0^2 \circ s_1^1(n) = d_0^2(((0, n), 0)) = 0.$$

- $d_i^2 \circ s_j^1 = \text{Id}_{L_1}$  cuando  $i = j$  o  $i = j + 1$ . Tomemos  $n \in L_1$  y veamos esto:

$$\begin{aligned} d_0^2 \circ s_0^1(n) &= d_0^2(((0, 0), n)) = n = \text{Id}_{L_1}(n), \\ d_1^2 \circ s_0^1(n) &= d_1^2(((0, 0), n)) = 0 + n = \text{Id}_{L_1}(n), \\ d_1^2 \circ s_1^1(n) &= d_1^2(((0, n), 0)) = n + 0 = \text{Id}_{L_1}(n), \\ d_2^2 \circ s_1^1(n) &= d_2^2(((0, n), 0)) = \partial(0) + n = n = \text{Id}_{L_1}(n). \end{aligned}$$

- Comprobemos que  $d_i^2 \circ s_j^1 = s_j^0 \circ d_{i-1}^1$ , cuando  $0 \leq j < i - 1 \leq 1$ . En este caso solo puede darse que  $j = 0$  e  $i - 1 = 1$ , por lo que  $i = 2$ . Tenemos por tanto que probar que  $d_2^2 \circ s_0^1 = s_0^0 \circ d_1^1$ . Como  $s_0^0 = 0$  y  $d_1^1 = 0$  tenemos que probar que  $d_2^2 \circ s_0^1 = 0$ . Veamos esto último tomando  $n \in L_1$  y operando:

$$d_2^2 \circ s_0^1(n) = d_2^2(((0, 0), n)) = \partial(0) + 0 = 0.$$

Por lo que se dan las identidades simpliciales para las aplicaciones contenidas entre  $L_1$  y  $L_2$ .

Comprobemos que se cumple la propiedad dada en la Observación 5.14. Sea  $((m, n), n') \in (M \rtimes N \rtimes)N$ , entonces:

$$\begin{aligned} ((m, n), n') \in \ker(d_0^2) &\Leftrightarrow n' = 0, \\ ((m, n), n') \in \ker(d_1^2) &\Leftrightarrow n + n' = 0 \Leftarrow -n = n', \\ ((m, n), n') \in \ker(d_2^2) &\Leftrightarrow \partial m + n = 0 \Leftarrow -n = \partial m. \end{aligned}$$

Los casos posibles de  $I$  son los siguientes:  $I = \{1, 2\}$ ,  $I = \{0, 2\}$  e  $I = \{1, 2\}$ , por la anticonmutatividad y tener el conjunto 3 elementos ( $J$  es el complementario de  $I$  en  $\{0, 1, 2\}$ ). Veamos por tanto que se cumple la propiedad:

- Caso  $I = \{1, 2\}$ ,  $J = \{0\}$ . Sea  $((m, -\partial m), \partial m) \in \ker(d_1^2) \cap \ker(d_2^2)$ ,  $((m', n'), 0) \in \ker(d_0^2)$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} & [((m, -\partial m), \partial m), ((m', n'), 0)] \\ &= ([ (m, -\partial m), (m', n') ] + \partial m * (m', n') - 0 * (m, -\partial m), [-\partial m, 0]) \\ &= ([ (m, -\partial m), (m', n') ] + (-\{\partial m, n'\}, [\partial m, n']), 0) \\ &= ([ [m, m'] - \partial m \cdot m' - n' \cdot m, [-\partial m, n'] ] + (-\{\partial m, n'\}, [\partial m, n']), 0) \\ &= ([ [m, m'] - [m, m'] - n' \cdot m + n' \cdot m, 0 ], 0) = ((0, 0), 0). \end{aligned}$$

Donde en la igualdad 4 hemos usado la propiedad **M2**) de módulos cruzados y la propiedad **B3**) de trenzas.

- Caso  $I = \{0, 2\}$ ,  $J = \{1\}$ . Sea  $((m, -\partial m), 0) \in \ker(d_0^2) \cap \ker(d_2^2)$  y el elemento  $((m', n), -n) \in \ker(d_1^2)$ . Se cumple:

$$\begin{aligned} & [((m, -\partial m), 0), ((m', n), -n)] \\ &= ([ (m, -\partial m), (m', n) ] + 0 * (m', n) + n * (m, -\partial m), [0, -n]) \\ &= ([ [m, m'] - \partial m \cdot m' - n \cdot m, [-\partial m, n] ] + (-\{n, -\partial m\}, [n, -\partial m]), 0) \\ &= ([ [m, m'] - [m, m'] - n \cdot m + n \cdot m, 0 ], 0) = ((0, 0), 0). \end{aligned}$$

Hemos usado la anticonmutatividad del corchete en la igualdad 3 para la segunda coordenada de la primera coordenada y para la primera de la primera usamos de nuevo **M2**) y el axioma de trenza **B4**).

- Caso  $I = \{0, 1\}$ ,  $J = \{2\}$ . Sea  $((m, 0), 0) \in \ker(d_0^2) \cap \ker(d_1^2)$  y el par  $((m', -\partial m'), n) \in \ker(d_2^2)$ . Se verifica:

$$\begin{aligned} & [((m, 0), 0), ((m', -\partial m'), n)] \\ &= ([ (m, 0), (m', -\partial m') ] + 0 * (m, -\partial m) - n * (m, 0), [0, n]) \\ &= ([ (m, 0), (m', -\partial m') ] - (-\{n, 0\}, [n, 0]), 0) = ([ (m, 0), (m', -\partial m') ], 0) \\ &= ([ [m, m'] + 0 \cdot m + \partial m' \cdot m, [0, -\partial m] ], 0) = ([ [m, m'] + [m', m], 0 ], 0) \\ &= ((0, 0), 0). \end{aligned}$$

Se ha usado **M2**) en la igualdad 5. □

**Definición 6.8.** Dado un módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie  $\mathcal{X}$ , se define su  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida truncada en 2 asociada y se denota por  $\Omega(\mathcal{X})$  a la  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida truncada en 2 definida a partir de la Proposición 6.7.

**Proposición 6.9.**  $\Omega: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{Tr}_2 \mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)^P$  definido como:

$$\Omega(\mathcal{X} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}') = \Omega(\mathcal{X}) \xrightarrow{\{g_n\}_{n \in \{1, 2, 3\}}} \Omega(\mathcal{X}'),$$

donde  $\Omega(\mathcal{X})$  y  $\Omega(\mathcal{X}')$  son las  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas truncadas en 2 asociadas a  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}'$  respectivamente; si  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  y  $\mathcal{X}' = (M', N', \cdot', \partial', \{-, -\}')$ , los morfismos son  $g_0 = 0: 0 \rightarrow 0$ ,  $g_1 = f_2$  y  $g_2: (M \rtimes N) \rtimes N \rightarrow (M' \rtimes N') \rtimes N'$  definida por  $g_2((m, n), n') = ((f_1(m), f_2(n)), f_2(n'))$  (es decir  $g_2 = (f_1 \times f_2) \times f_2$ ); es un funtor.

*Demostración.* Primero veamos que, en efecto,  $\{g_n\}_{n \in \{1, 2, 3\}}$  es un morfismo en la categoría. Para ello veamos que  $g_2 = (f_1 \times f_2) \times f_2$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie, pues ya sabemos que  $g_0 = 0$  y  $g_1 = f_2$  lo son por ser la aplicación 0 y  $(f_1, f_2)$  se un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie ( $f_2$  es morfismo de álgebras de Lie por ello).

Por construcción ya se verifica la  $K$ -linealidad, pues puede verse como aplicaciones entre productos y cada componente es  $K$ -lineal. Veamos que se conserva el corchete. Tomemos  $((m, n), n')$ ,  $((m', n''), n''') \in (M \rtimes N) \rtimes N$  y veámoslo.

$$\begin{aligned} & g_2([((m, n), n'), ((m', n''), n''')]) \\ &= g_2([((m, n), (m', n'')) + n' * (m', n'') - n''' * (m, n), [n', n''')]) \\ &= g_2([([m, m'] + n \cdot m' - n'' \cdot m, [n, n'']) + (-\{n', n''\}, [n', n'']) \\ &\quad - (-\{n''', n\}, [n''', n]), [n', n''')]) \\ &= g_2([([m, m'] + n \cdot m' - n'' \cdot m - \{n', n''\} + \{n''', n\}, [n, n''] + [n', n'''] \\ &\quad - [n''', n]), [n', n''')]) \\ &= ([f_1(m), f_1(m')] + f_2(n) \cdot' f_1(m') - f_2(n'') \cdot' f_1(m) - \{f_2(n'), f_2(n'')\}' \\ &\quad + \{f_2(n'''), f_2(n')\}', [f_2(n), f_2(n'')] + [f_2(n'), f_2(n'')] - [f_2(n'''), f_2(n)], \\ &\quad [f_2(n'), f_2(n''')]) \\ &= [((f_1(m), f_2(n)), f_2(n')), ((f_1(m'), f_2(n'')), f_2(n'''))]) \\ &= [g_2([((m, n), n'), ((m', n''), n''')])]. \end{aligned}$$

Donde se han usado las propiedades de los homomorfismos de los módulos cruzados trenzados en la igualdad 4. La igualdad 5 es deshacer toda la expansión repitiendo el proceso a la inversa.

Para ver que son morfismos en la categoría debemos ver que conmutan con las aplicaciones cara y degeneración. Ya que  $L_0 = 0 = L'_0$  solo tenemos que probar la conmutación con los morfismos cara y degeneración definidos entre  $L_1$  y  $L_2$ , ya que los primeros conmutan trivialmente al ser siempre tres de ellos (el cuarto es  $g_1$ ), el morfismo cero.

Empecemos comprobando con los morfismos degeneración. Sea  $n \in L_1 = N$ , entonces:

$$\begin{aligned} g_2 \circ s_0^1(n) &= g_2(((0, 0), n)) = ((0, 0), f_2(n)) = s_0^1(f_2(n)) = s_0^1 \circ g_1(n), \\ g_2 \circ s_1^1(n) &= g_2(((0, n), 0)) = ((0, f_2(n)), 0) = s_1^1(f_2(n)) = s_1^1 \circ g_1(n). \end{aligned}$$

Veamos ahora que es cierto para los morfismos cara. Para ello consideremos  $((m, n), n') \in L_2 = (M \times N) \times N$  y veámoslo:

$$\begin{aligned} g_1 \circ d_0^2(((m, n), n')) &= g_1(n') = d_0^2(((f_1(m), f_2(n)), f_2(n'))) \\ &= d_0^2 \circ g_2(((m, n), n')), \\ g_1 \circ d_1^2(((m, n), n')) &= g_1(n + n') = f_2(n) + f_2(n') = d_1^2(((f_1(m), f_2(n)), f_2(n'))) \\ &= d_1^2 \circ g_2(((m, n), n')), \\ g_1 \circ d_2^2(((m, n), n')) &= g_1(\partial m + n) = \partial'(f_1(m)) + f_2(n') \\ &= d_2^2(((f_1(m), f_2(n)), f_2(n'))) = d_2^2 \circ g_2(((m, n), n')). \end{aligned}$$

Se ha usado, en la tercera cadena de igualdades, **BH2**).

Por tanto la correspondencia está bien definida. Veamos que es un funtor.

Sean  $\mathcal{X} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}' \xrightarrow{(h_1, h_2)} \mathcal{X}''$  un par de homomorfismos de módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Dada la forma de dar hacer la composición en ambas categorías y la forma que tiene la identidad llega ver las siguientes igualdades:  $(\text{Id}_M \times \text{Id}_N) \times \text{Id}_N = \text{Id}_{(M \times N) \times N}$  y  $((h_1 \times h_2) \times h_2) \circ ((f_1 \times f_2) \times f_2) = ((h_1 \circ f_1) \times (h_2 \circ f_2)) \times (h_2 \circ f_2)$ , ya que de esta forma se compondrán las tres aplicaciones del modo correcto (por argumentos similares al de funtores anteriores).

Las igualdades son ciertas, pues se usa el producto binario de aplicaciones dos veces y se probó que las igualdades eran ciertas para el producto binario en la Proposición 3.1.

Por tanto es, en efecto, un funtor.  $\square$

**Definición 6.10.** Se define  $\Xi: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2}$  como el funtor composición  $DCSk_3 \circ \Omega$ , siendo estos los funtores dados por el Teorema 5.19 (para el caso de objetos simpliciales reducidos) y la Proposición 6.9.

De ahora en adelante se verá que los funtores son equivalencias.

*Observación 6.11.* Veamos como es  $\Gamma \circ \Xi: \mathbf{BXLieAlg}_K \rightarrow \mathbf{BXLieAlg}_K$ , siendo estos funtores los definidos en las Proposiciones 6.6 y Definición 6.10.

Sea  $(M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$  un objeto en dicha categoría.

Para saber cual es esta composición de funtores hemos de calcular el complejo de Moore de  $\Xi((M, N, \cdot, \partial, \{-, -\}))$

Debido al Teorema 5.19 sabemos que estos coinciden con el complejo de Moore de los datos dados por el truncado, es decir, los tres datos del funtor  $\Omega$ . Con ellos se tiene:  $NL_1 = L_1 = N$  al ser  $L_0 = 0$  y, por la demostración

de la Proposición 6.7 (cuando probamos si cumple la propiedad de la Observación 5.14) que los elementos de  $NL_2$  son de la forma  $((m, 0), 0)$  con  $m \in M$ , por estar simultáneamente en el núcleo de  $d_1^2$  y  $d_0^2$ . Por ello denotaremos, cuando sea preciso  $NL_2 := ((M, 0), 0)$ .

Veamos a continuación la forma de la acción, la aplicación  $\partial_2$  y la trenza tras aplicar ambos funtores. Para evitar ambigüedad denotaremos la acción de la imagen por los funtores como  $\cdot_N$  y a la trenza por  $\{-, -\}_N$ .

- Sea  $((m, 0), 0) \in NL_2$ , sea  $n \in N$ , entonces la acción es la siguiente:

$$\begin{aligned} n \cdot_N ((m, 0), 0) &= [s_1^1(n), ((m, 0), 0)] = [((0, n), 0), ((m, 0), 0)] \\ &= [((0, n), (0, m)) + 0 * (m, 0) - 0 * (0, n), [0, 0]] = [((0, n), (m, 0)), 0] \\ &= ([0, m] + n \cdot m - 0 \cdot 0, [0, 0]), 0 = ((n \cdot m, 0), 0). \end{aligned}$$

- Consideremos  $((m, 0), 0) \in NL_2$ . Veamos cual es su valor al aplicarse  $\partial_2$ :

$$\partial_2(((m, 0), 0)) = \partial m + 0 = \partial m.$$

- Para concluir veamos, si  $n, n' \in N$ , cual es el valor de la trenza.

$$\begin{aligned} \{n, n'\}_N &= [s_1^1(n) - s_0^1(n), s_1^1(n')] = [((0, n), 0) - ((0, 0), n), ((0, n'), 0)] \\ &= [((0, n), -n), ((0, n'), 0)] = [((0, n), (0, n')) - n * (0, n') - 0 * (0, n), [-n, 0]] \\ &= [((0, n), (0, n')) - (-\{n, n'\}, [n, n']), 0] \\ &= ([0, 0] + n \cdot 0 - n' \cdot 0, [n, n']) - (-\{n, n'\}, [n, n']), 0 = ((\{n, n'\}, 0), 0). \end{aligned}$$

Falta ver como es sobre las flechas. Sea  $(f_1, f_2)$  un morfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie. Entonces  $\Gamma \circ \Xi((f_1, f_2)) = (((f_2 \times f_1) \times f_1)^N, f_2)$ . Por tanto hemos de ver como es  $((f_2 \times f_1) \times f_1)^N: ((M, 0), 0) \rightarrow ((M', 0), 0)$  (se supone que  $f_1: M \rightarrow M'$ ). Consideremos  $((m, 0), 0) \in ((M, 0), 0)$ , se tiene:

$$(((f_2 \times f_1) \times f_1)^N)((m, 0), 0) = (f_2 \times f_1) \times f_1(((m, 0), 0)) = ((f_2(m), 0), 0).$$

Por lo que es, en esencia, el par  $(f_1, f_2)$ .

**Proposición 6.12.** Sean  $\Gamma$  y  $\Xi$  los funtores definidos en la Proposición 6.6 y la Definición 6.10.

Entonces la correspondencia que a cada módulo cruzado trenzado de  $K$ -álgebras de Lie,  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ , le asocia el isomorfismo en la categoría  $\theta_{\mathcal{X}} = (\vartheta_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N): \mathcal{X} \rightarrow \Gamma(\Xi(\mathcal{X}))$ , donde  $\vartheta_{\mathcal{X}}: M \rightarrow ((M, 0), 0)$  está dada por  $\vartheta_{\mathcal{X}}(m) = ((m, 0), 0)$ , es un isomorfismo natural  $\theta: \text{Id}_{\mathbf{BXLieAlg}_K} \rightarrow \Gamma \circ \Xi$ .

*Demostración.* En primer lugar tenemos que ver que  $\theta_{\mathcal{X}}$  es un morfismo en la categoría.

Por definición  $\text{Id}_N$  es homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie. Veamos que  $\vartheta_{\mathcal{X}}$  es también un homomorfismo de  $K$ -álgebras de Lie.

Es  $K$ -lineal por serlo cada una de sus componentes, por lo que solo hemos de probar que preserva los corchetes.

Sea  $m, m' \in M$ , entonces:

$$\begin{aligned} [\vartheta_{\mathcal{X}}(m), \vartheta_{\mathcal{X}}(m')] &= [((m, 0), 0), ((m', 0), 0)] \\ &= [((m, 0), (m', 0)) + 0 * (m', 0) + 0 \cdot (m, 0), [0, 0]] \\ &= ([m, m'] + 0 \cdot m' - 0 \cdot m, 0) = (([m, m'], 0), 0) = \vartheta_{\mathcal{X}}([m, m']). \end{aligned}$$

Por tanto conserva el corchete de Lie.

Veamos ahora que el par  $(\vartheta_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N)$  cumple los axiomas de homomorfismos de módulos cruzados de  $K$ -álgebras de Lie.

Usemos para ello la construcción de  $\Gamma \circ \Xi(\mathcal{X})$  dada en la Observación 6.11.

- Comprobemos **BH1**). Sean  $n \in N$ ,  $m \in M$ , entonces:

$$\vartheta_{\mathcal{X}}(n \cdot m) = ((n \cdot m, 0), 0) = n \cdot_N ((m, 0), 0) = \text{Id}_N(n) \cdot \vartheta_{\mathcal{X}}(m).$$

- Probemos **BH2**). Sea  $m \in M$ , entonces:

$$\text{Id}_N \circ \partial(m) = \partial m = \partial_2((m, 0), 0) = \partial_2 \circ \vartheta_{\mathcal{X}}(m).$$

- Demostremos **BH3**). Sea  $n, n' \in N$ , se tiene:

$$\{\text{Id}_N(n), \text{Id}_N(n')\}_N = \{n, n'\}_N = ((\{n, n'\}, 0), 0) = \vartheta_{\mathcal{X}}(\{n, n'\}).$$

Se ha probado que  $(\vartheta_{\mathcal{X}}, \text{Id}_N)$  es un homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie. Es claro que  $\text{Id}_N$  es biyectiva. Además  $\vartheta_{\mathcal{X}}$  es inyectiva y sobreyectiva de modo inmediato, por ello, usando el Lema 3.4 se tiene que  $\Phi_{\mathcal{X}}$  es, en efecto, un isomorfismo en la categoría.

Queda ver que la correspondencia es un isomorfismo natural. Para ello tenemos que ver que para todo homomorfismo de módulos cruzados trenzados de  $K$ -álgebras de Lie  $\mathcal{X} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{X}'$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{X}}} & \Gamma \circ \Xi(\mathcal{X}) \\ \downarrow (f_1, f_2) & & \downarrow (((f_2 \times f_1) \times f_1)^N, f_2) \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{X}'}} & \Gamma \circ \Xi(\mathcal{X}'). \end{array}$$

Para ver esto tomemos  $\mathcal{X} = (M, N, \cdot, \partial, \{-, -\})$ , como en las hipótesis, y usemos de nuevo la expresión de  $((f_2 \times f_1) \times f_1)^N$  dada en la Observación 6.11, para ver como es la composición en la primera componente.

Sea  $m \in M$  se tiene:

$$\begin{aligned} &((f_2 \times f_1) \times f_1)^N \circ \vartheta_{\mathcal{X}}(m) \\ &= ((f_2 \times f_1) \times f_1)^N(((m, 0), 0)) = ((f_1(m), 0), 0) = \vartheta_{\mathcal{X}'} \circ f_1(m). \end{aligned}$$

Dado que la composición conmuta en la segunda componente de modo trivialmente, se concluye la demostración y se tiene, por tanto, que  $\theta: \text{Id}_{\mathbf{BXLieAlg}_K} \rightarrow \Gamma \circ \Xi$  es un isomorfismo natural.  $\square$

Para hacer el otro isomorfismo natural acudimos de nuevo a [3], y tomamos un resultado que el denomina descomposición de un grupo simplicial truncado en 2 en producto semidirecto. Dicho resultado esta escrito para grupos simpliciales, pero la demostración es idéntica para  $K$ -álgebras de Lie simpliciales reducidas (se toma el primer complejo como 0). Dicho resultado se escribirá a continuación.

**Proposición 6.13** ([3]). *Sea  $\mathbf{L} = \{(L_n, \{d_i^n\}, \{s_i^n\})\}$  una  $K$ -álgebra de Lie simplicial reducida. Entonces existe un isomorfismo natural a la altura de la categoría  $\mathbf{Tr}_2 \mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)^P$  de modo que si denotamos por  $NL_1 = L_1 = N$  y  $NL_2 = M'$  se tiene que:*

$$\begin{aligned} L_0 &= 0, \\ L_1 &= N, \\ L_2 &\simeq (M \rtimes N) \rtimes N. \end{aligned}$$

Donde  $(M \rtimes N) \rtimes N$  esta construida del mismo modo que en el funtor  $\Omega$  (sustituyendo mediante el isomorfismo dado en la Proposición 6.12  $((M, 0), 0)$  por  $M$ ) donde la acción  $\cdot$  y la trenza son las dadas para el funtor  $\Gamma$ .

Dicho de otro modo, se tiene que  $\mathbf{Tr}_2 \cong \Omega \circ \Gamma$  siendo estos los funtores definidos en la Proposiciones 6.6 y 6.9.

Usando esta proposición junto con el siguiente lema probaremos la equivalencia.

**Lema 6.14.** *Sean  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  dos categorías. Sean  $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  y  $H, K: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$  cuatro funtores. Entonces se cumple la siguiente propiedad:*

$$F \cong G \text{ y } H \cong K \Rightarrow H \circ F \cong K \circ G.$$

*Demostración.* Sean  $\tau: F \rightarrow G$  y  $\eta: H \rightarrow K$  los isomorfismos naturales.

Se define la correspondencia que asocia a un objeto  $A$  de  $\mathbf{C}$  la flecha de  $\mathbf{E}$   $\nu_A = \eta_{G(A)} \circ H(\tau_A)$ . Esta claro que está bien definida por propiedades de los funtores, ya que  $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$  implica que  $H(\tau_A): H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$  y  $\eta_{G(A)}: H(G(A)) \rightarrow K(G(A))$ .

Por ser  $\eta$  un isomorfismo natural sabemos que  $\eta_{G(A)}$  es un isomorfismo en la categoría. Además, por el mismo motivo  $\tau_A$  es isomorfismo, por lo que por la Proposición 1.11 afirmamos que  $H(\tau_A)$  es un isomorfismo. Por tanto se tiene que  $\nu_A$  es isomorfismo por ser composición de isomorfismos.

Queda ver que  $\nu: H \circ F \rightarrow K \circ G$  es en efecto una transformación natural, ya que, de ser ese el caso, como para cada objeto es un isomorfismo, se trataría de un isomorfismo natural.

Veamos por tanto que conmuta con las flechas. Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathbf{C}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \nu_B \circ H(F(f)) &= \eta_{G(B)} \circ H(\tau_B) \circ H(F(f)) = \eta_{G(B)} \circ H(\tau_B \circ F(f)) \\ &= \eta_{G(B)} \circ H(G(f) \circ \tau_A) = \eta_{G(B)} \circ H(G(f)) \circ H(\tau_A) \\ &= K(G(f)) \circ \eta_{G(A)} \circ H(\tau_A) = K(G(f)) \circ \nu_A. \end{aligned}$$

Donde hemos usado la propiedad de los funtores con respecto a la composición y el hecho de que  $\tau$  y  $\eta$  son transformaciones naturales (hemos omitido los paréntesis usando la propiedad asociativa para simplificar la demostración).  $\square$

**Corolario 6.15.** *Las categorías  $\mathbf{BXLieAlg}_K$  y  $\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2}$  son equivalentes.*

*Demostración.* Sabemos por la Proposición 6.12 que los funtores  $\Gamma$  y  $\Xi$  definidos en la Proposición 6.6 y la Definición 6.10 cumplen  $\text{Id}_{\mathbf{BXLieAlg}_K} \cong \Gamma \circ \Xi$ . Veamos por tanto, para concluir que son equivalentes, que  $\text{Id}_{\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2}} \cong \Xi \circ \Gamma$ .

Sabemos por la Proposición 6.13 que  $Tr_2 \cong \Omega \circ \Gamma$  siendo los funtores restantes introducidos en la Proposición 6.9 y el Teorema 5.19 (en el caso de álgebras de Lie simpliciales reducidas). Usando el Lema 6.14 se tiene lo siguiente:

$$Tr_2 \cong \Omega \circ \Gamma \Rightarrow DCSk_3 \circ Tr_2 \cong DCSk_3 \circ \Omega \circ \Gamma = \Xi \circ \Gamma.$$

Dado que  $DCSk_3 \circ Tr_2 \cong \text{Id}_{\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2}}$  por el Teorema 5.19, se tiene que  $\text{Id}_{\mathbf{RedSimp}(\mathbf{LieAlg}_K)_{L \leq 2}} \cong \Xi \circ \Gamma$  (la composición de isomorfismos naturales es un isomorfismo natural de modo inmediato) con lo que se prueba la equivalencia.  $\square$

# Bibliografía

- [1] J. Adámek, H. Herrlich, G.E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
- [2] I. Akça, Z. Arvasi, *Simplicial and crossed Lie algebras*, Homology, Homotopy Appl. **4**(1) (2002), 43–57.
- [3] D. Conduché, *Modules croisés généralisés de longueur 2*, J. Pure Appl. Algebra **34**(2–3) (1984), 155–178.
- [4] G.J. Ellis, *Homotopical aspects of Lie algebras*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **54**(3) (1993), 393–419.
- [5] J.F. Martins, R. Picken, *The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module*, Differential Geom. Appl. **29**(2) (2011), 179–206.
- [6] E. Ulualan, *Braiding for Categorical and Crossed Lie Algebras and Simplicial Lie Algebras*, Turkish J. Math. **31**(3) (2007), 239–255.
- [7] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213–245.