FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Disconjugación en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Yaiza Sarrapio Lamas

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Disconjugación en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Yaiza Sarrapio Lamas

07/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Ánalisis matemático
Título: Disconjugación en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Breve descrición do contido
En este trabajo se hará una introducción a la teoría de disconjugación, relacionada con la oscilación máxima de las soluciones de una determinada EDO lineal homogénea en su intervalo de definición. Veremos como caracterizar esta propiedad de forma directa sin más que estudiar el espectro de la EDO considerada, probándose además, a partir de ella, el signo constante de soluciones de problemas no homogéneos. Se presentarán ejemplos concretos, en los que se estudiarán los intervalos de disconjugación de determinadas EDOs.
Recomendacións
Es recomendable tener un buen dominio de las materias de ecuaciones diferenciales de segundo y tercer curso.
Outras observacións

Índice general

Resumen

En este trabajo nos centraremos en la disconjugación de las ecuaciones diferenciales lineales. Se expondrán numerosos resultados sobre esta propiedad. En los tres primeros capítulos definiremos términos como son Wronskiano, sistema de Descartes o función de Green, con el fin de probar que la continuidad, en un intervalo abierto o semiabierto I, de los coeficientes de una ecuación diferencial general de orden n, implica que dicha ecuación es disconjugada si, y solo si, toda solución no trivial tiene menos de n ceros distintos en I, independientemente de su multiplicidad.

Finalmente en el capítulo 4 estableceremos una relación entre la disconjugación de una ecuación diferencial lineal, con un parámetro que puede tomar distintos valores, y sus posibles autovalores, llegando a un teorema que nos proporciona un intervalo de disconjugación para dicho parámetro.

Acabaremos mostrando varios ejemplos de casos particulares en los que caracterizaremos el intervalo de disconjugación utilizando Maple.

Abstract

In this paper we will focus on the disconjugation of linear differential equations. Numerous results will be presented on this property. In the first three chapters we will define terms such as Wronskian, Descartes'system or Green's function, in order to prove that the continuity, in an open or semi-open interval I, of the coefficients of a general differential equation of order n, implies that this equation is disconjugated if, and only if, any non-trivial solution has less than n different zeros in I, regardless of its multiplicity.

Finally, in chapter 4, we will establish a relationship between the disconjugation of a linear differential equation, with a parameter that can take different values, and its possible eigenvalues, which will bring us to a theorem that provides us with a disconjugation interval for this parameter.

We will end by showing several examples of particular cases in which we will characterize the interval of disconjugation using Maple.

Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales ha sido ampliamente estudiado desde finales del siglo $XVII$ por numerosos matemáticos. Este tipo de ecuaciones matemáticas relacionan una función con sus derivadas. Dichas ecuaciones tienen un papel muy significativo en ámbitos como la ingeniería, la física, la economía, la biología o la química. En este trabajo nos centraremos en las ecuaciones diferenciales lineales, en particular en una de sus propiedades más importantes, los ceros de sus soluciones no triviales. Para ello debemos introducir el término de ecuación diferencial disconjugada. Usaremos la referencia [8].

Una ecuación diferencial lineal de orden n

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0 \tag{1}$$

se dice que es disconjugada en un intervalo I si toda solución no trivial tiene menos de n ceros en I, dicho de otra forma, que toda solución no trivial tiene como máximo $n-1$ ceros en I. Por ejemplo la ecuación $y^{(n)} = 0$ es disconjugada en cualquier intervalo, dado que todo polinomio no trivial de grado menor que n tiene menos de n ceros.

En este trabajo realizaremos un estudio de la conexión entre la disconjugación y otras propiedades de las soluciones, y se describirán algunas pruebas sobre la disconjugación.

Estudiaremos el comportamiento de las soluciones de la ecuación (1), con coeficientes reales suficientemente regulares en I. Utilizamos la referencia [13]. En primer lugar, estamos interesados en la disconjugación, y luego en preguntas relacionadas con la distribución de los ceros y el crecimiento de las soluciones. Aquí surgen dos problemas básicos:

1) El estudio de las consecuencias de la disconjugación

2) La búsqueda de métodos efectivos para asegurar que una ecuación es disconjugada en un intervalo dado.

La elaboración de estos problemas conduce al trabajo clásico de Sturm, que se extendió en numerosas investigaciones posteriores. En diferentes momentos y a diferentes grados, Chebyshev, Zhukovskii, Pólya, Mammana, de la Vallé-Poussin, Chaplygin, Bernstein, Krein, Mikusinskii, Hartman, Wintner, Azbelev, Kondrat'ev, Bellman y muchos otros han prestado atención a los problemas que nos interesan (véase [1], [2], [3], [7], [9], [10], [11],

[12], [14], [15], [16], [17], [18]). A primera vista, algunos de estos artículos parecen tener poco en común, pero en un examen más preciso se hace evidente que todo un complejo de preguntas aparentemente diversas están estrechamente relacionadas con la disconjugación, como por ejemplo: desigualdades diferenciales, la representación de (1) como producto de n operadores de primer orden, la resolución del problema del valor límite interpolacional, preguntas sobre la alternancia de los ceros, zonas de estabilidad de Lyapunov para la ecuación de Hill, propiedades de los sistemas de funciones de Chebyshev y Cartesian, oscilación de Gantmakber-Kerin de las funciones de Green de problemas de frontera, teoremas del valor medio, etc. Por tanto podríamos decir que la disconjugación ocupa una de las posiciones centrales en la teoría cualitativa de la ecuación real (1).

Capítulo 1

Sistemas de Markov y Descartes

En los tres primeros capítulos de este trabajo emplearemos el libro [8].

Definición 1.1. Las funciones $y_1(t), \ldots, y_n(t) \in \mathcal{C}^n$ se dice que forman un sistema de Chebyshev en el intervalo I si toda combinación lineal no trivial de $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ tiene menos de n ceros.

Definición 1.2. Se dice que forman un sistema de Markov si los n Wronskianos

$$W(y_1, \ldots, y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

son positivos en todo I.

Definición 1.3. Se dice que forman un sistema de Descartes si todo Wronskiano ordenado

$$W(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) = \begin{vmatrix} y_{i_1} & \cdots & y_{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i_1}^{(k-1)} & \cdots & y_{i_k}^{(k-1)} \end{vmatrix} \quad (1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n; k = 1, \ldots, n)$$

es positivo en todo I.

Es evidente que la ecuación $L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0$ es disconjugada en el intervalo I si y solo si alguno, y luego, todo sistema fundamental es un sistema de Chebyshev. A continuación enunciaremos unos resultados previos.

Lema 1.4. *Si $r(t) \neq 0$ entonces $W(ry_1, \ldots, ry_k) = r^k W(y_1, \ldots, y_k)$. Además, si $y_1 \neq 0$ y $z_i = \left(\dfrac{y_{i+1}}{y_1}\right)'$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ entonces $W(y_1, y_2, \ldots, y_k) = y_1^k W(z_1, \ldots, z_{k-1})$.*

Lema 1.5. *Si* $W(y_1, \ldots, y_{k-1}) \neq 0$ *y* $W(y_1, \ldots, y_k) \neq 0$ *en I, entonces*

$$\left[\frac{W(y_1, \ldots, y_{k-1}, y)}{W(y_1, \ldots, y_k)}\right]' = \frac{W(y_1, \ldots, y_{k-1}) W(y_1, \ldots, y_k, y)}{[W(y_1, \ldots, y_k)]^2}$$

.

Lema 1.6. *Si* $W(y_1, \ldots, y_{k-1}) \neq 0$ *y* $W(y_2, \ldots, y_k) \neq 0$ *en I entonces*

$$\begin{gathered} W(y_2, \ldots, y_k) W(y_1, \ldots, y_{k-1}, y) = \\ W(y_1, \ldots, y_{k-1}) W(y_2, \ldots, y_k, y) + W(y_2, \ldots, y_{k-1}, y) W(y_1, \ldots, y_k). \end{gathered}$$

Utilizaremos este último resultado para mostrar que el número de de Wronskianos que se suponen positivos en la definición de un sistema de Descartes puede reducirse sustancialmente.

Proposición 1.7. *Las funciones* $y_1, \ldots, y_n$ *forman un sistema de Descartes en el intervalo* I *si todos los Wronskianos consecutivos* $W(y_i, y_{i+1}, \ldots, y_j)$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ *son positivos en* I.

Demostración. Si usamos inducción en n, entonces se verifica $W(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) > 0$ para $1 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Tenemos que ver que ocurre lo mismo para $i_1 = 1$. Esto se verifica para $k = 1$ y lo asumimos cierto para cualquier valor menor que k siendo $k > 1$. Suponemos los conjuntos de índices $(i_2, \ldots, i_k)$ con el orden lexicográfico. Así el primer conjunto es $(2, \ldots, k)$ y $W(y_1, y_2, \ldots, y_k) > 0$. Asumimos que $i_k > k$ y el resultado se sostiene para todos los conjuntos anteriores. Sea j el último entero tal que $i_j > j$. Se sigue del Lema 1.6 que

$$\begin{gathered} W(y_2, \ldots, y_j, y_{i_j}, \ldots, y_{i_{k-1}}) W(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{k-1}}, y) = \\ W(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{k-1}}) W(y_2, \ldots, y_j, y_{i_j}, \ldots, y_{i_{k-1}}, y) + \\ W(y_{i_2}, \ldots, y_{i_{k-1}}, y) W(y_1, \ldots, y_j, y_{i_j}, \ldots, y_{i_{k-1}}) \end{gathered}$$

Substituyendo y_{i_k} por y obtenemos de las hipótesis de inducción $W(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) > 0$. □

El siguiente resultado pone de manifiesto la importancia de los sistemas de Markov. Nos dice que si $y_1, \ldots, y_n$ es un sistema de Markov, entonces $y_1, \ldots, y_k$ es un sistema de Chebyshev para $k = 1, \ldots, n$.

Proposición 1.8. *Sean* $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ *funciones en* $\mathcal{C}^n(I)$. *Entonces el número de ceros de una combinación lineal arbitraria no trivial* $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k$ *es menor que* k *para* $k = 1, \ldots, n$ *si, y solo si, los Wronskianos* $W(y_1, \ldots, y_k)$ *no se anulan en* I *para* $k = 1, \ldots, n$.

Demostración. La condición suficiente es inmediata ya que si $W(y_1,\ldots,y_k)$ se anula en algún punto c hay una combinación lineal no trivial de $y_1,\ldots,y_k$ que tiene un cero en c con multiplicidad al menos k.
Suponemos, por otro lado, que los n Wronskianos no se anulan, así que, en particular, $y_1 \neq 0$. Ya que el resultado se cumple para $n=1$, suponemos que se verifica para sistemas de menos de n ecuaciones siendo $n>1$. Si la combinación lineal $y=\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ny_n$ tiene al menos n ceros, entonces, por el teorema de Rolle entre dos ceros consecutivos y por la fórmula del producto de Leibniz en un cero múltiple, $\left(\dfrac{y}{y_1}\right)'$ tiene al menos $n-1$ ceros. Pero si ponemos $z_k=\left(\dfrac{y_{k+1}}{y_1}\right)'$ $(k=1,\ldots,n-1)$ entonces $\left(\dfrac{y}{y_1}\right)'=\alpha_2z_2+\cdots+\alpha_nz_{n-1}$, y por el Lema 1.4, $W(z_1,\ldots,z_k)\neq 0$ $(k=1,\ldots,n-1)$. En consecuencia, por la hipótesis de inducción, $\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. Así $y=\alpha_1y_1$, la cual se anula únicamente si $\alpha_1=0$. $\square$

El siguiente resultado pone de manifiesto la importancia de los sistemas de Descartes. Nos dice que si $y_1,\ldots,y_n$ es un sistema de Descartes, entonces cualquier subconjunto es un sistema de Chebyshev.

Proposición 1.9. *Sean $y_1(t),\ldots,y_n(t)$ funciones en $\mathcal{C}^n(I)$. Entonces el número de ceros de una combinación lineal arbitraria no trivial $y=\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ky_k$ es como máximo igual al número de cambios de signo en la sucesión de coeficientes $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ si, y solo si, el Wronskiano $W(y_{i_1},\ldots,y_{i_k})$, donde $1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n$, no se anula en I, y cualesquiera dos Wronskianos correspondientes al mismo valor de k tienen el mismo signo.*

Demostración. Suponemos primero que el número de ceros es como máximo igual al número de cambios de signo. Si el Wronskiano $W(y_{i_1},\ldots,y_{i_k})$ se anulase en c, alguna combinación lineal no trivial $y=\alpha_1y_{i_1}+\cdots+\alpha_ky_{i_k}$ tendría un cero de multiplicidad mayor o igual que k en c, mientras que la sucesión de coeficientes tiene como máximo $k-1$ cambios de signo. Por tanto $W(y_{i_1},\ldots,y_{i_k})\neq 0$. Así existen constantes $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ tal que

$$\begin{aligned}
\alpha_1y_{i_1}(c)+\alpha_2y_{i_2}(c)+\cdots+\alpha_ky_{i_k}(c) &= 0\\
&\vdots\\
\alpha_1y_{i_1}^{(k-2)}(c)+\alpha_2y_{i_2}^{(k-2)}(c)+\cdots+\alpha_ky_{i_k}^{(k-2)}(c) &= 0\\
\alpha_1y_{i_1}^{(k-1)}(c)+\alpha_2y_{i_2}^{(k-1)}(c)+\cdots+\alpha_ky_{i_k}^{(k-1)}(c) &= 0
\end{aligned}$$

Entonces $y=\alpha_1y_{i_1}+\cdots+\alpha_ky_{i_k}$ tiene un cero de multiplicidad $k-1$ en c. Por tanto la sucesión de coeficientes $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ tiene exactamente $k-1$ cambios de signo. Pero $\alpha_jW(y_{i_1},\ldots,y_{i_k})=(-1)^{j+k}W(y_{i_1},\ldots,\widehat{y}_{i_j},\ldots,y_{i_k})$, donde $\widehat{y}_{i_j}$ denota que y_{i_j} es omitido. Por tanto los Wronskianos obtenidos de $W(y_{i_1},\ldots,y_{i_k})$ al omitir una función tienen todos el mismo signo. Además, se pueden obtener cualesquiera dos Wronskianos de $k-1$ funciones a partir de otro cambiando repetidamente una función a la vez.

Supongamos ahora que la condición del Wronskiano se satisface. Como el resultado es trivial para $n = 1$, suponemos que $n > 1$ y que el resultado también es válido para sistemas de menos de n funciones. Las funciones $y_1, \ldots, y_n$ tienen el mismo signo en I y podemos suponer sin pérdida de generalidad que son positivos. Sea $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ cualquier combinación lineal no trivial de ellas con V cambios de signos en la sucesión de coeficientes. Claramente y no tiene ceros si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tienen el mismo signo, es decir, si $V = 0$. Por tanto podemos asumir que hay al menos un cambio de signo, digamos que es α_h.
Denotemos

$$z_i = \begin{cases} -(\frac{y_i}{y_h})' & \text{para } 1 \le i < h \\ (\frac{y_{i+1}}{y_h})' & \text{para } h \le i < n. \end{cases}$$

Así $z_1, \ldots, z_{n-1}$ satisfacen las mismas condiciones que $y_1, \ldots, y_n$, ya que si
$1 \le i < \ldots < i_j < h < i_{j+1} < \ldots < i_k \le n$, entonces
$W(y_{i_1}, \ldots, y_{i_j}, y_h, y_{i_{j+i}}, \ldots, y_{i_k}) = y_h^{k+1} W(z_{i_1}, \ldots, z_{i_j}, z_{i_{j+1}}, \ldots, z_{i_k})$.

Ya que, $z \equiv \left(\dfrac{y}{y_h}\right)' = -\alpha_1 z_1 - \cdots - \alpha_{h-1} z_{h-1} + \alpha_{h+1} z_h + \cdots + \alpha_n z_{n-1}$, el número de cambios de signo en la sucesión de coeficientes para z es $V - 1$. Así, por la hipótesis de inducción, z tiene como máximo $V - 1$ ceros. Se sigue que y tiene como máximo V ceros. □

Veamos ahora la conexión entre los sistemas de Markov y Descartes y las ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.10. *La ecuación diferencial lineal* (1) *tiene un sistema fundamental de soluciones de Markov si, y solo si, el operador L tiene la representación*

$$Ly \equiv v_1 v_2 \cdots v_n D \frac{1}{v_n} D \cdots D \frac{1}{v_2} D \frac{1}{v_1} y \tag{1.1}$$

donde $D = \dfrac{d}{dt}$, $v_k > 0$ y $v_k \in \mathcal{C}^{n-k+1}$ $(k = 1, \cdots, n)$.

Demostración. Sea $y_1, \ldots, y_n$ un sistema de Markov, así que $W_k = W(y_1, \ldots, y_k) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$. La ecuación diferencial con coeficiente principal 1 que tiene a $y_1, \ldots, y_k$ como sistema fundamental de soluciones viene dada por

$$L_k y \equiv \frac{W(y_1, \ldots, y_k, y)}{W_k}.$$

Pongamos

$$1 = W_0,\ v_1 = W_1,\ v_k = \frac{W_k W_{k-2}}{W_{k-1}^2}\ (k = 2, \ldots, n),$$

así que

$$\frac{W_k}{W_{k-1}} = v_1 v_2 \cdots v_k.$$

Probaremos por inducción que

$$L_k y \equiv v_1 \cdots v_k D \frac{1}{v_k} D \cdots D \frac{1}{v_1} y.$$

Es trivial para $k = 1$. Supongamos que es cierto para k. Entonces

$$\begin{aligned} v_1 \cdots v_{k+1} D \frac{1}{v_{k+1}} D \frac{1}{v_k} D \cdots D \frac{1}{v_1} y = \\ v_1 \cdots v_{k+1} D \frac{1}{v_1 \cdots v_k v_{k+1}} L_k y = \\ \frac{W_{k+1}}{W_k} D \left(\frac{W_k}{W_{k+1}} L_k y \right) = \\ \tfrac{W_{k+1}}{W_k} D \left(\frac{W(y_1, \ldots, y_k, y)}{W_{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Por el Lema 1.5 tenemos que

$$D \left(\frac{W(y_1, \ldots, y_k, y)}{W_{k+1}} \right) = \frac{W_k W(y_1, \ldots, y_{k+1}, y)}{W_{k+1}^2}$$

y por tanto, substituyendo en lo anterior, obtenemos que

$$v_1 \cdots v_{k+1} D \frac{1}{v_{k+1}} D \frac{1}{v_k} D \cdots D \frac{1}{v_1} y = \frac{W(y_1, \ldots, y_{k+1}, y)}{W_{k+1}}.$$

Por el contrario supongamos que L tiene la representación del enunciado. Definimos $y_1, \ldots, y_n$ por inducción estableciendo $y_1 = v_1$ y tomando y_k como una solución de la ecuación

$$\frac{W(y_1, \ldots y_{k-1}, y)}{W_{k-1}} = v_1 v_2 \cdots v_k \ (k = 2, \ldots, n).$$

Así, $y_1, \ldots, y_n$ es un sistema fundamental de soluciones de (1).

Se verifica fácilmente que si $v_k > 0$ y $v_k \in \mathcal{C}^{n-k+1}$, entonces

$$(D - r_n) \cdots (D - r_1) y \equiv v_1 \cdots v_n D \frac{1}{v_n} D \cdots D \frac{1}{v_1} y, \tag{1.2}$$

donde

$$r_k = \left(\frac{v_1'}{v_1} \right) + \cdots + \left(\frac{v_k'}{v_k} \right), \ (k = 1, \ldots, n).$$

Por otro lado, para cualquier función $r_k \in \mathcal{C}^{n-k}$, (1.2) se verifica

$$v_k(t) = e^{\displaystyle\int^t [r_k(s) - r_{k-1}(s)] ds} \quad (k = 1, \ldots, n; r_0 \equiv 0).$$

Así la representación del enunciado es equivalente a una factorización de L en factores lineales. □

Si la ecuación (1) tiene un sistema fundamental de Markov de soluciones en el intervalo I, entonces es disconjugada en I, ya que cualquier sistema de Markov es un sistema de Chebyshev.

Lema 1.11. *Si la ecuación* (1) *es disconjugada en el intervalo I y $a \in I$, entonces tiene un sistema fundamental de Markov de soluciones para $t > a$.*

Demostración. Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones de (1) satisfaciendo las condiciones iniciales de la forma

$$y_k(a) = y_k'(a) = \cdots = y_k^{(n-k-1)}(a) = 0,\, y_k^{(n-k)}(a) \neq 0.$$

Sabemos que las soluciones $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes. Si el Wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)$ se anula en algún punto $c > a$, entonces una combinación lineal no trivial tendría un cero en c de multiplicidad mayor o igual que k. Ya que cualquier combinación lineal tiene un cero en a de multiplicidad mayor o igual que $n-k$, tenemos una contradicción con la disconjugación de (1). Reemplazando y_k por $-y_k$ si es necesario, podemos asegurar que $W(y_1, \ldots, y_k) > 0$ para $t > a$ y $k = 1, \ldots, n$. □

Lema 1.12. *Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto. Si la ecuación* (1) *es disconjugada en el subintervalo $[a_1, b_1]$ entonces es también disconjugada en el intervalo $[a_1 - \varepsilon, b_1 - \varepsilon]$.*

Teorema 1.13. *La ecuación diferencial lineal* (1) *tiene un sistema fundamental de soluciones de Markov en el intervalo compacto $I = [a, b]$ si y solo si es disconjugada en I.*

Demostración. Estableciendo $p_k(t) = p_k(a)$ para $t < a$ podemos extender el dominio de definición de los coeficientes de (1) al intervalo $(-\infty, b]$. Por el Lema 1.12, la ecuación (1) es disconjugada en el intervalo $[c, b]$ si c es menor que a y está suficientemente cerca de a. Por el lema 1.11, la ecuación (1) tiene un sistema fundamental de soluciones de Markov en el intervalo $(c, b]$, y por tanto en el intervalo $[a, b]$. □

Proposición 1.14. *Suponemos que la ecuación* (1) *es disconjugada en el intervalo compacto $I = [a, b]$. Si $y \in \mathcal{C}^n$ tiene $n + 1$ ceros en I, no todos coincidentes, entonces Ly tiene al menos un cero en el intervalo abierto (a, b).*

Proposición 1.15. *Si las ecuaciones $L_1 y = 0$, $L_2 y = 0$ son disconjugadas en el intervalo I, entonces la ecuación compuesta $L_1(L_2 y) = 0$ es también disconjugada en I.*

Demostración. Es suficiente probarlo para el caso de I compacto. Entonces, por el Teorema 1.13, ambas ecuaciones tienen sistemas fundamentales de Markov. Por tanto, por el Teorema 1.10, los operadores lineales L_1 y L_2 tienen representaciones en la forma (1.1). El operador compuesto L_1L_2 también tiene dicha representación, y en consecuencia, de nuevo por el Teorema 1.10, la ecuación $L_1L_2y = 0$ es disconjugada en I. □

Podemos convertir el conjunto de todas las ecuaciones (1) en un intervalo compacto I en un espacio métrico definiendo la distancia entre dos ecuaciones como

$$\sup_{t\in I} \sum_{k=1}^{n} |p_{k,1}(t) - p_{k,2}(t)| \,.$$

Proposición 1.16. *El conjunto de todas las ecuaciones disconjugadas en un intervalo I es conexo y abierto.*

Cambiamos ahora a sistemas de Descartes.

Lema 1.17. *Si $y_1, \ldots, y_n$ es un sistema de Markov en el intervalo I tal que, para algún a en I, y_k tiene un cero en a con multiplicidad $k-1$ $(k = 1, \ldots, n)$ entonces $y_1, \ldots, y_n$ es un sistema de Descartes para $t > a$.*

Lema 1.18. *Si* (1) *tiene un sistema fundamental de Markov de soluciones en el intervalo I, entonces, para cualquier a en I,* (1) *tiene un sistema fundamental de Markov de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ tal que y_k tiene un cero en a de multiplicidad $k-1$ $(k = 1, \ldots, n)$.*

Combinando los dos lemas anteriores obtenemos el siguiente

Lema 1.19. *Si* (1) *tiene un sistema fundamental de Markov de soluciones en el intervalo I y $a \in I$, entonces* (1) *tiene un sistema fundamental de Descartes de soluciones para $t > a$.*

La existencia de un sistema fundamental de soluciones de Markov de (1) es equivalente a una factorización de L de la forma (1.1). Si L viene dado por (1.1) entonces un sistema fundamental de Markov $y_1, \ldots, y_n$ tal que y_k tiene un cero en a de multiplicidad $k-1$ está dado explícitamente por

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= v_1(t) \\
y_2(t) &= v_1(t) \int_a^t v_2(t_1)dt_1 \\
&\vdots \\
y_n(t) &= v_1(t) \int_a^t v_2(t_1) \ldots \int_a^{t_{n-2}} v_n(t_{n-})dt_{n-1} \ldots dt_1.
\end{aligned}$$

De hecho $W(y_1, \ldots, y_k) = v_1^k v_2^{k-1} \ldots v_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. En consecuencia las funciones $y_1, \ldots, y_n$ así definidas forman un sistema de Descartes para $t > a$.

Teorema 1.20. *Si la ecuación* (1) *tiene un sistema fundamental de soluciones de Markov en el intervalo* $I = [a, b]$ *o* $[a, b)$ *entonces tiene un sistema fundamental de soluciones de Descartes en* I.

Demostración. Extendemos el dominio de definición de los coeficientes de (1) estableciendo $p_k(t) = p_k(a)$ para $t < a$. Si $y_1, \ldots, y_n$ es un sistema fundamental de soluciones de Markov en I, entonces las desigualdades $W(y_1, \ldots, y_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ se siguen manteniendo en el intervalo $J = [c, b]$ o $[c, b)$, donde c es menor que a y está suficientemente cerca de a. Por tanto, por el Lema 1.19, la ecuación (1) tiene un sistema fundamental de soluciones de Descartes en I. $\square$

Combinando los dos teoremas anteriores obtenemos el siguiente.

Teorema 1.21. *La ecuación* (1) *tiene un sistema fundamental de soluciones de Descartes en el intervalo compacto* $I = [a, b]$ *si, y solo si, es disconjugada en I.*

Demostración. Combinando las demostraciones de los Teoremas 1.13 y 1.20 podemos construir un sistema fundamental de soluciones de Descartes. Extendemos el dominio de definición de los coeficientes de (1) poniendo $p_k(t) = p_k(a)$ para $t < a$ y $p_k(t) = p_k(b)$ para $t > b$. Entonces (1) sigue siendo disconjugada en algún intervalo $J = [a_1, b_1]$, donde $a_1 < a < b < b_1$. Sea $y_k(t)$ la única solución de (1) que satisface las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y(a_1) = y'(a_1) = \cdots = y^{(k-2)}(a_1) = 0,\ y^{(k-1)}(a_1) &= 1, \\ y(b_1) = y'(b_1) = \cdots = y^{(n-k-1)}(b_1) &= 0. \end{aligned}$$

Veremos que $y_1, \ldots, y_n$ forman un sistema de Descartes en el intervalo abierto (a_1, b_1). Ya que y_k tiene un cero de multiplicidad $k - 1$ en a_1 $(k = 1, \ldots, n)$ es suficiente ver que $y_1, \ldots, y_n$ forman un sistema de Markov en $[a_1, b_1]$. Como cualquier combinación lineal no trivial de $y_1, \ldots, y_n$ tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que $n-k$ en b_1, no puede tener un cero de multiplicidad mayor o igual que k en $t < b_1$ y por tanto el Wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)(t)$ no puede anularse para $t < b_1$. Y ya que $W(y_1, \ldots, y_n)(a_1) = 1$ se sigue que $W(y_1, \ldots, y_k)(t) > 0$ para $a_1 \leq t < b_1$ $(k = 1, \ldots, n)$. Así se completa la demostración. $\square$

Capítulo 2

Puntos conjugados

En esta sección estudiaremos una de las propiedades más importantes de los ceros de las soluciones, su multiplicidad. Enunciaremos y demostraremos numerosos resultados que relacionan la ecuación disconjugada (1) con la multiplicidad de sus ceros. Para ello necesitaremos introducir conceptos como el de punto conjugado por la derecha y por la izquierda. En toda esta sección el intervalo I será abierto.

El siguiente lema es una consecuanecia del Lema 1.12

Lema 2.1. *Para cualquier a en I existe $\delta = \delta(a) > 0$ tal que la ecuación*

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0 \tag{2.1}$$

es disconjugada en el subintervalo $[a-\delta, a+\delta]$.

Definición 2.2. Diremos que la solución no trivial $y(t)$ de (2.1) tiene la propiedad (k, a, b), donde $1 \leq k \leq n-1$, si tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que k en b y un cero de multiplicidad mayor o igual que $n-k$ en a.

Sea $y_k(t,a)$ una solución de (2.1) que satisface las condiciones iniciales $y_k^{(n-k)}(a) = 1$, $y_k^{(n-j)}(a) = 0$ $(j = 1, \ldots, n; j \neq k)$.

Denotemos el Wronskiano de $y_1(t,a), \ldots, y_k(t,a)$ por

$$W_k(t,a) = \begin{vmatrix} y_1(t,a) & \cdots & y_k(t,a) \\ y_1'(t,a) & \cdots & y_k'(t,a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(t,a) & \cdots & y_k^{(k-1)}(t,a) \end{vmatrix}$$

Por la dependencia continua de las soluciones en los valores iniciales, W_k es una función continua en $(t,a) \in I \times I$.

Se sigue de inmediato el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Existe una solución con la propiedad (k, a, b) si, y solo si, $W_k(b, a) = 0$.*

De hecho la solución tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que $n - k$ en a si, y solo si, es una combinación lineal de $y_1(t, a), \ldots, y_k(t, a)$. Dicha combinación lineal tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que k en b si y solo si $W_k(b, a) = 0$.

Suponemos ahora que la ecuación (2.1) no es disconjugada en I. Entonces para algún a en I existe $b > a$ en I tal que (2.1) no es disconjugada en $[a, b]$. Además si a tiene esta propiedad, también la tiene $a_0 < a$ en I.

Definición 2.4. Denotemos por $\eta_+(a) = \eta(a)$ el supremo de todo $c > a$ tal que (2.1) es disconjugada en $[a, c]$. Llamamos a $\eta(a)$ el primer punto conjugado por la derecha de a.

Nótese que si $\eta(a)$ está definido, también lo está $\eta(a_0)$ para cualquier $a_0 < a$ en I y $\eta(a_0) \leq \eta(a)$.

Sea también $\omega_+(a) = \omega(a)$ el menor $b > a$ en I, si existe, en el cual uno de los Wronskianos $W_1(b, a), \ldots, W_{n-1}(b, a)$ se anula. Cabe señalar que $W_n(b, a)$ nunca se anula porque las soluciones $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes. Veamos el siguiente resultado que nos relaciona ambos puntos.

Proposición 2.5. $\eta(a) = \omega(a)$.

Demostración. Por el Lema 2.3 y la definición de $\eta(a)$, tenemos que $\eta(a) \leq \omega(a)$. Suponemos $\eta(a) < \omega(a)$ y tomamos $c \in I$ así que $\eta(a) < c < \omega(a)$. Por el Lema 2.1, la ecuación (2.1) es disconjugada en el intervalo $[a - \delta, a + \delta]$, donde $\delta > 0$. Dado que las funciones W_k son continuas y $W_k(t, a) \neq 0$ para $a < t < \omega(a)$, podemos escoger $\delta_0 < \dfrac{\delta}{2}$ tal que $W_k(t, s) \neq 0$ para $a - \delta_0 \leq s \leq a + \delta_0$, $a + \dfrac{\delta}{2} \leq t \leq c$ y $k = 1, \ldots, n - 1$. Por el Lema 2.3 no podemos tener $W_k(t, a - \delta_0) = 0$ para cualquier $t \in (a - \delta_0, a + \dfrac{\delta}{2})$ y cualquier k, porque la ecuación (2.1) es disconjugada en $[a - \delta, a + \delta]$. Así $W_k(t, a - \delta_0) \neq 0$ para $a - \delta_0 < t \leq c$. Por lo tanto la ecuación (2.1) tiene un sistema fundamental de soluciones de Markov, y en consecuencia es disconjugada en el intervalo $(a - \delta_0, c]$. Pero esto implica $\eta(a) \geq c$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\eta(a) = \omega(a)$. □

Proposición 2.6. *Sea $b = \eta(a)$ y sea k el menor entero tal que $W_k(b, a) = 0$. La solución correspondiente $y(t)$ de (2.1) con la propiedad (k, a, b) está únicamente determinada por un factor constante, y no se anula en el intervalo abierto (a, b).*

Demostración. Debemos tener $y^{(n-k)}(a) \neq 0$, ya que de lo contrario la solución $y(t)$ tendría la propiedad $(k - 1, a, b)$. Si otra solución $z(t)$ tiene la propiedad (k, a, b), entonces $u(t) = y^{(n-k)}(a) z(t) - z^{(n-k)}(a) y(t)$ es cero o tiene la propiedad $(k - 1, a, b)$. Como esto último no puede ser por la definición de k, se sigue que $y(t)$ y $z(t)$ son linealmente dependientes.

Como $y(t)$ tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que $n-k$ en a podemos escribir $y(t) = \alpha_1 y_1(t,a) + \cdots + \alpha_k y_k(t,a)$. Además $\alpha_k \neq 0$, como $W_{k-1}(b,a) \neq 0$ y $y(t)$ tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que k en b. Suponemos $y(c) = 0$ con $c \in (a,b)$. La ecuación diferencial

$$L_{k-1}y \equiv \begin{vmatrix} y_1(t,a) & \cdots & y_{k-1}(t,a) & y \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(t,a) & \cdots & y_{k-1}^{(k-1)}(t,a) & y^{(k-1)} \end{vmatrix} = 0$$

tiene las soluciones $y_1(t), \ldots, y_{k-1}(t)$. Por el Teorema 1.10, el operador L_{k-1} tiene una factorización de la forma (1.1) en el intervalo $[c,b]$. Como $y(t)$ tiene un cero en c y un cero de multiplicidad mayor o igual que k en b se sigue de la Proposición 1.14 que $L_{k-1}y$ se anula en algún punto $c' \in (c,b)$. Reemplazando $y(t)$ por su expresión como combinación de $y_1(t,a), \ldots, y_k(t,a)$ concluimos que $W_k(c',a) = 0$. Pero esto contradice la definición de $b = \eta(a)$. $\square$

Teorema 2.7. *$\eta(a)$ es una función creciente de a.*

Demostración. Ya sabemos que $\eta(a)$ no es una función decreciente. Suponemos $a_1 < a_2$ y $\eta(a_1) = \eta(a_2) = b$. Entonces $\eta(t) = b$ para $a_1 \leq t \leq a_2$ y para cada t hay un entero k tal que $W_k(t,b) = 0$. Denotemos por S_k el conjunto de todos los t en $[a_1,a_2]$ tales que $W_k(t,b) = 0$, $(k = 1, \ldots, n-1)$. Entonces S_k es cerrado y el intervalo $[a_1,a_2]$ es la unión de $S_1, \ldots, S_{n-1}$.

Suponemos que, para algún k, S_k contiene un subintervalo de $[a_1,a_2]$. Sea $h+1$ el menor valor de k con esta propiedad y sea $[b_1,b_2]$ un subintervalo contenido en S_{h+1}. Así

$$W_{h+1}(t,b) \equiv \begin{vmatrix} y_1(t,b) & \cdots & y_{h+1}(t,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(h)}(t,b) & \cdots & y_{h+1}^{(h)}(t,b) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{con } (b_1 \leq t \leq b_2)$$

Por definición de $h+1$ existe un intervalo $[c_1,c_2] \subset [b_1,b_2]$ en el cual

$$W_h(t,b) \equiv \begin{vmatrix} y_1(t,b) & \cdots & y_h(t,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(h-1)}(t,b) & \cdots & y_h^{(h-1)}(t,b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Consideremos ahora la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} y_1(t,b) & \cdots & y_h(t,b) & y \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(h)}(t,b) & \cdots & y_h^{(h)}(t,b) & y^{(h)} \end{vmatrix} = 0$$

en el intervalo $[c_1, c_2]$. Claramente es una ecuación lineal de orden h con $y_1, \ldots, y_h$ como soluciones linealmente independientes. También tiene la solución y_{h+1}, así que y_{h+1} es combinación lineal de $y_1, \ldots, y_h$ en $[c_1, c_2]$, lo cual es una contradicción porque $y_1, \ldots, y_n$ es un sistema fundamental de soluciones de (2.1). □

Suponemos de nuevo que la ecuación (2.1) no es disconjugada en I. Entonces para algún b en I existe $a < b$ en I tal que la ecuación (2.1) no es disconjugada en $[a, b]$. Además si b tiene esta propiedad, también la tiene $b_0 > b$ en I.

Definición 2.8. Denotamos por $\eta_-(b)$ el ínfimo $c < b$ tal que (2.1) es disconjugada en $[c, b]$. Llamamos a $\eta_-(b)$ el primer punto conjugado por la izquierda de b.

Nótese que si $\eta_-(b)$ está definido, $\eta_-(b_0)$ también lo está para cualquier $b_0 > b$ en I y $\eta_-(b_0) \geq \eta_-(b)$.

Como antes podemos ver que $\eta_-(b)$ es una función creciente.

Lema 2.9. *Si $b = \eta_+(a)$, entonces $a = \eta_-(b)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.5 y el Lema 2.3 existe una solución con la propiedad (k, a, b) para algún k tal que $1 \leq k \leq n$. Como esta solución también tiene la propiedad $(n-k, b, a)$, se sigue que $c = \eta_-(b) \geq a$. Similarmente, existe una solución con la propiedad $(n-h, b, c) = (h, c, b)$ y por tanto $\eta_+(c) \leq b$. Si tuviésemos $c > a$ tendríamos $\eta_+(c) > \ \eta_+(a) = b$. Así $c = a$. □

Teorema 2.10. *La función $\eta(a)$ es continua y su dominio es un subintervalo abierto de I.*

Demostración. Se deduce del teorema anterior que las funciones η_+ y η_- son inversas una de la otra. Como sus dominios de definición son intervalos, sus rangos también son intervalos. Por tanto, dado que son funciones crecientes, son continuas. Supongamos que $I = (a_1, b_1)$. Si el dominio de η_+ fuese un intervalo $I = (a_1, a]$, entonces cualquier $b > \eta_+(a)$ en I no pertenecería al rango de η_+ y, por tanto, no pertenecería al dominio de η_-. Pero esto es imposible porque el dominio de η_- es un intervalo cuyo punto final es b_1. □

Teorema 2.11. *La ecuación (2.1) es disconjugada en el intervalo $[a, b)$ si, y solo si, es disconjugada en su interior (a, b).*

Demostración. Extendemos el dominio de definición de los coeficientes de (2.1) estableciendo $p_k(t) = p_k(a)$ para $t < a$. Entonces los resultados anteriores se pueden aplicar al intervalo abierto $I = (-\infty, b)$. Si la ecuación (2.1) es disconjugada en (a, b) pero no en $[a, b)$, entonces $\eta(a)$ está definida pero no $\eta(c)$ para algún $c > a$. Sin embargo esto contradice el Teorema 2.10. □

Finalmente enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.12. *Si toda solución no trivial tiene menos de n ceros distintos en el intervalo $[a, b)$, entonces toda solución no trivial tiene menos de n ceros, contando multiplicidades.*

Capítulo 3

Funciones de Green

Durante esta sección supondremos que la ecuación (2.1) es disconjugada en el intervalo compacto $I = [a, b]$. Sea f una función continua en I, sean $a_1 < \ldots < a_m$ puntos de I y sean $r_1, \ldots, r_m$ enteros positivos con suma n.

Teorema 3.1. *El problema de frontera multipunto*

$$Ly = f(t) \quad t \in I \tag{3.1}$$

$$y^{(\nu_i)}(a_i) = 0 \quad (\nu_i = 0, 1, \ldots, r_{i-1};\ i = 1, \ldots, m) \tag{3.2}$$

tiene una única solución $y(t)$.

Demostración. Esta solución puede ser representada en la forma

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds \tag{3.3}$$

donde la función de Green $G(t, s)$ está definida por las siguientes propiedades:

(g_1) En función de t, $G(t, s)$ es solución de la ecuación (2.1) en los intervalos $[a, s)$ y $(s, b]$, satisfaciendo las condiciones de contorno $G^{(\nu_i)}(a_i, s) = 0$ ($\nu_i = 0, 1, \ldots, r_{i-1};\ i = 1, \ldots, m$).

(g_2) En función de t, $G(t, s)$ y sus primeras $n-2$ derivadas son continuas en $t = s$, mientras $G^{(n-1)}(s^+, s) - G^{(n-1)}(s^-, s) = 1$.

De hecho, se verifica fácilmente, diferenciando bajo el signo integral, que si G tiene estas propiedades entonces la función $y(t)$ definida por (3.3) es la solución del problema de los valores en la frontera (3.1)-(3.2). Queda por demostrar que hay una única función G con las propiedades citadas.

Sea $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.1), es decir, el sistema determinado por las condiciones iniciales

$$y_k^{(i-1)} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Entonces debido a que G es solución de (2.1) en $[a, s) \cup (s, b]$, deducimos que

$$G(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(s)y_1(t) + \cdots + \alpha_n(s)y_n(t) & \text{para } t \leq s \\ \beta_1(s)y_1(t) + \cdots + \beta_n(s)y_n(t) & \text{para } t \geq s, \end{cases}$$

donde los coeficientes $\alpha_i(s)$, $\beta_i(s)$ están determinados por la regularidad de G en $t = s$ y por las condiciones de frontera.
Si denotamos $\gamma_i(s) = \beta_i(s) - \alpha_i(s)$, de la regularidad de G en $t = s$ deducimos que

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(s) y_i^{(j)}(s) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n-2)$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(s) y_i^{(n-1)}(s) = 1.$$

El determinante de este sistema de ecuaciones lineales es el Wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)$. Por lo tanto, las diferencias $\gamma_i(s)$ están únicamente determinadas y son funciones continuas de s. Si substituimos $\beta_i(s) = \alpha_i(s) + \gamma_i(s)$ las ecuaciones de contorno en la propiedad (g_1) proporcionan n ecuaciones lineales para las n incógnitas $\alpha_i(s)$. Estas ecuaciones tienen una única solución porque las correspondientes ecuaciones homogéneas no tienen solución no trivial. □

Vamos a estudiar ahora los ceros de la función de Green $G(t, s)$ para s fijo. Denotemos

$$p(t) = (t - a_1)^{r_1} \ldots (t - a_m)^{r_m}. \tag{3.4}$$

Lema 3.2. *Con $a \leq t, s \leq b$ tenemos que $G(t, s)p(t) \geq 0$.*

Demostración. Sea c cualquier punto de I distinto de $a_1, \ldots, a_m$. Si la función $G(c, s)$ no fuese de signo constante en I, podríamos encontrar una función continua $f(t) > 0$ en I tal que

$$y(t) = \int_a^b G(c, s) f(s) ds = 0.$$

Entonces la solución $y(t)$ del problema de los valores en la frontera (3.1)-(3.2) tendría n ceros en los puntos a_i $(i = 1, \ldots, m)$ y un cero más en c. Por lo tanto, por la Proposición 1.14, la función $Ly = f$ tiene al menos un cero más en I, lo cual es una contradicción pues como mucho puede tener n ceros y aquí tiene $n+1$. Así $G(c,s)$ es de signo constante en I. Para determinar este signo, definimos el operador L, que tiene la representación

$$Ly \equiv v_{n+1} D \frac{1}{v_n} D \cdots D \frac{1}{v_1} y,$$

donde $D = \dfrac{d}{dt}$, $v_k > 0$ y $v_k \in \mathcal{C}^{n-k+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, y $v_{n+1} = v_1 \cdots v_n$. El operador L se puede conectar al operador D^n mediante la ruta

$$L^{(\lambda)} = v_{n+1}^{\lambda} D \frac{1}{v_n^{\lambda}} \cdots D \frac{1}{v_1^{\lambda}} \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Si las condiciones de frontera (3.2) se mantienen fijas, la función de Green correspondiente, $G^{(\lambda)}(t,s)$ es una función continua de λ, por la manera en la cual ha sido construida. Por lo tanto, $G(c,s) = G^{(1)}(c,s)$ tiene el mismo signo constante que $G^{(0)}(c,s)$. Pero la solución de la ecuación $D^n y = 1$ que satisface las condiciones de frontera es $y(t) = \dfrac{p(t)}{n!}$. De

$$y(t) = \int_a^b G^{(0)}(t,s)ds$$

se sigue que $G(c,s)$ tiene el mismo signo que $p(c)$. □

Lema 3.3. *Si $a_1 < s < a_m$, cada cero de $g(t) = G(t,s)$ es aislado.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe una sucesión t_ν de puntos de I tal que t_ν tiende a c y $g(t_\nu) = 0$. Asumiremos que $c \geq s$ y $t_\nu > s$, pues los otros casos son análogos. Entonces $g(t)$ coincide en el intervalo $(s,b]$ con la solución de la ecuación (2.1), la cual tiene infinitos ceros. Por lo tanto $g(t) = 0$ para $t \geq s$. Del hecho de que $g^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$ es continua en $t = s$ se sigue que $g(t)$ coincide en el intervalo (a,s) con la solución de la ecuación (2.1), la cual tiene un cero de multiplicidad mayor o igual que $n-1$ en s. Como $g(a_1) = 0$ y la ecuación (2.1) es disconjugada en el intervalo $[a,s]$, esto implica que $g(t) = 0$ para $t \leq s$. Por tanto $g(t) \equiv 0$, lo cual es imposible porque $g^{(n-1)}(t)$ tiene una discontinuidad de salto en $t = s$. □

A pesar de que $g(t)$ tiene únicamente ceros aislados, algunas funciones relacionadas con ella pueden anularse a lo largo de un intervalo. Es conveniente considerar tal intervalo como un solo cero.

Definición 3.4. La componente cero de una función continua es el máximo intervalo donde la función se anula.

Por ser disconjugado sabemos que el operador L tiene la factorización $Ly = \rho_{n+1} D \rho_n D \ldots D \rho_1 y$, donde $\rho_k > 0$ y $\rho_k \in \mathcal{C}^{n-k+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, y $\rho_{n+1} = (\rho_1 \cdots \rho_n)^{-1}$. Pongamos $L_0 y = y$, $L_k y = D(\rho_k L_{k-1} y)$ $(k = 1, \ldots, n)$, así $Ly = \rho_{n+1} L_n y$.

Lema 3.5. *Si $a < s < b$ y $g(t) = G(t,s)$, entonces $L_{n-2}g(t)$ tiene como máximo dos componentes cero en el intervalo $(a,b]$. Si tiene dos, entonces cada una es un cero simple.*

Demostración. En cada uno de los intervalos $[a,s)$ y $(s,b]$, $g(t)$ es solución de la ecuación $L_n y = 0$. Por tanto $D(\rho_n L_{n-1}g) = 0$ y $\rho_n L_{n-1}g$ es constante en cada uno de los intervalos $[a,s)$ y $(s,b]$. Por tanto en dichos intervalos, $D(\rho_{n-1}L_{n-2}g)$ tiene signo constante o es cero, y $\rho_{n-1}L_{n-2}g$ es estrictamente monótona o constante. Así se sigue el resultado. □

Teorema 3.6. $\dfrac{G(t,s)}{p(t)} > 0$ *para $a_1 < s < a_m$ y $a_1 \leq t \leq a_m$.*

Demostración. Denotemos por $J = [a_1, a_m]$.
Veamos primero que $G(t,s) \neq 0$ para $a_1 < t, s < a_m$ y $t \neq a_2, \ldots, a_{m-1}$. Supongamos, por el contrario, que para algún s en (a_1, a_m) la función $g(t) = G(t,s)$ se anula en un punto de J distinto de $a_1, \ldots, a_m$. Entonces $g(t)$ tiene al menos $n+1$ ceros en J, incluyendo $m+1$ ceros distintos. Por lo tanto, por el Teorema de Rolle, $L_1 g$ tiene al menos m componentes cero, cada una contenida en el interior de un intervalo comprendido entre dos ceros consecutivos de g. Sea m_1 el número de puntos distintos a_k que son ceros de g con multiplicidad mayor o igual que dos. Todos esos puntos son ceros de $L_1 g$ con multiplicidad total $n - m$. Así $L_1 g$ tiene al menos $m + m_1$ componentes cero y al menos n ceros. Por el Teorema de Rolle, $L_2 g$ tiene al menos $m + m_1 - 1$ componentes cero, además de esos puntos a_k que son ceros de g de multiplicidad mayor o igual que tres. Sea m_2 el número de dichos puntos. Ellos son todos los ceros de $L_2 g$ con multiplicidad total $n - m - m_1$. Así $L_2 g$ tiene al menos $m + m_1 + m_2 - 1$ componentes cero y al menos $n - 1$ ceros. Continuando por este camino, vemos que $L_{n-2}g$ tiene al menos $m + m_1 + \cdots + m_{n-2} - (n-3)$ componentes cero. Pero $m + m_1 + \cdots + m_{n-2} = n$, ya que en la suma cada punto a_k se cuenta r_k veces. Así $L_{n-2}g$ tiene al menos tres componentes cero, lo cual contradice el Lema 3.5.

Similarmente podemos ver que $G^{(r_k)}(a_k, s) \neq 0$. Si para algún s en (a_1, a_m) y algún k $(1 \leq k \leq m)$ esto no fuese así, entonces los ceros aislados a_j de $g(t)$ tienen al menos multiplicidad total $n+1$. Por aplicaciones sucesivas del Teorema de Rolle tenemos que $L_{n-2}g$ tiene al menos dos componentes cero y al menos 3 ceros, lo que contradice de nuevo el Lema 3.5.

Así $G(t,s)$ y $p(t)$ tienen los mismos ceros con las mismas multiplicidades. En consecuencia, el radio $\dfrac{G(t,s)}{p(t)}$ es finito y de signo estrictamente constante. Finalmente, por el Lema 3.2 obtenemos que es positivo. □

Proposición 3.7. *Supongamos que la ecuación (2.1) es disconjugada en el intervalo I. Supongamos además que y no se anula en ningún subintervalo de I, que tiene al menos dos ceros distintos y que $Ly \geq 0$ en I. Entonces y tiene como máximo n ceros en I. Además,* *si* y *tiene ceros* $a_1 < \ldots < a_m$ *con multiplicidades* $r_1, \ldots, r_m$ *donde* $r_1 + \cdots + r_m = n$ *y* $m > 1$, *entonces* $\dfrac{y(t)}{p(t)} > 0$ *en* I.

Demostración. Denotemos $f = Ly$ y supongamos que y tiene ceros $a_1, \ldots, a_m$ con multiplicidades mayores o iguales que $r_1, \ldots, r_m$ respectivamente, donde $r_1 + \cdots + r_m = n$. Entonces para $a_1 \leq t \leq a_m$,

$$y(t) = \int_{a_1}^{a_m} G(t,s)f(s)ds.$$

Si $f(t) \equiv 0$ en el subintervalo $J = [a_1, a_m]$, entonces $y(t)$ es una solución de la ecuación (2.1) con n ceros en J. Por tanto $y(t) \equiv 0$ en J, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto $f(s) > 0$ para cualquier s en J. Se sigue del Teorema 3.6 que $\dfrac{y(t)}{p(t)} > 0$ se verifica para $a_1 \leq t \leq a_m$. Así los ceros a_k tienen multiplicidades exactamente iguales a r_k $(k = 1, \ldots, m)$ y no hay más ceros en I. Como $p(t)$ tampoco tiene más ceros, la desigualdad continúa verificándose en I. $\square$

Capítulo 4

Caracterización de la disconjugación

La información de este capítulo la hemos tomado de las referencias [5] y [6]. El objetivo de este capítulo consiste en la caracterización de la disconjugación del operador diferencial lineal de grado n: $u^{(n)}(t)+a_1(t)\,u^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\,u'(t)+a_n(t)\,u(t)$, con $a_i \in C^{n-i}(I)$, en un intervalo dado $I=[a,b]$.

Teniendo en cuenta que el coeficiente de u puede descomponerse únicamente como

$$a_n(t) = \tilde{a}_n(t) + \frac{1}{b-a}\int_a^b a_n(s)\,ds, \quad t \in I,$$

es obvio que tal problema es equivalente a estudiar el conjunto de parámentros M para los cuales la ecuación diferencial lineal

$$T_n[M]\,u(t) \equiv u^{(n)}(t) + a_1(t)\,u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\,u'(t) + (a_n(t)+M)\,u(t) = 0 \quad t \in I, \tag{4.1}$$

es disconjugada en I.

Con esta finalidad, suponemos que dicho conjunto es no vacío, es decir, existe al menos un $\bar{M}$ tal que $T_n[\bar{M}]\,u(t)=0$ es disconjugada en I.

Utilizaremos la siguiente notación en toda esta sección.

Notación 4.1.

$$X_k = \left\{ u \in C^n(I) \ \mid u(a) = \cdots = u^{(k-1)}(a) = u(b) = \cdots = u^{(n-k-1)}(b) = 0 \right\}. \tag{4.2}$$

$$\eta_M(a) = \sup\{b > a \quad \text{tal que la ecuación (4.1) es disconjugada en } [a,b]\} \in (a,\infty).$$

A continuación veremos unos resultados previos, y para ello introducimos dos condiciones sobre la función de Green $g_M(t,s)$:

(P_g) Supongamos que existe una función continua $\phi(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)$ y $k_1,\ k_2 \in \mathcal{L}^1(I)$, tal que $0 < k_1(s) < k_2(s)$ para cada $s \in I$, satisfaciendo

$$\phi(t)\, k_1(s) \leq g_M(t,s) \leq \phi(t)\, k_2(s)\,, \quad \text{para cada } (t,s) \in I \times I\,.$$

(N_g) Supongamos que existe una función continua $\phi(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)$ y $k_1,\ k_2 \in \mathcal{L}^1(I)$, tal que $k_1(s) < k_2(s) < 0$ para cada $s \in I$, satisfaciendo

$$\phi(t)\, k_1(s) \leq g_M(t,s) \leq \phi(t)\, k_2(s)\,, \quad \text{para cada } (t,s) \in I \times I\,.$$

Las siguientes definiciones de inverso positivo e inverso negativo las podemos encontrar en el libro [4].

Definición 4.2. Sea $X(k)$ un subespacio de X_k. Diremos que el operador diferencial lineal de orden n, L_n, es inverso positivo en $X(k)$ si, y solo si, para todo $y \in X(k)$ se tiene la siguiente propiedad:

$$L_n y(t) \geq 0 \text{ con } t \in I \text{ implica que } y(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in I.$$

Lema 4.3. *El operador L_n es inverso positivo en X_k si, y solo si, la función de Green relacionada con el problema (3.1)-(3.2) es no negativa.*

Definición 4.4. Sea $X(k)$ un subespacio de X_k. Diremos que el operador diferencial lineal de orden n, L_n, es inverso negativo en $X(k)$ si, y solo si, para algún $y \in X(k)$ se tiene la siguiente propiedad:

$$L_n y(t) \geq 0 \text{ con } t \in I \text{ implica que } y(t) \leq 0 \text{ para todo } t \in I.$$

Lema 4.5. *El operador L_n es inverso negativo en X_k si, y solo si, la función de Green relacionada con el problema (3.1)-(3.2) es no positivo.*

El siguiente resultado, nos da una propiedad del operador bajo la hipótesis de disconjugación. Lo encontramos en el libro [4]

Lema 4.6. *Sea $\bar{M} \in \mathbb{R}$ tal que $T_n[\bar{M}]\, u(t) = 0$ es disconjugada en I. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- *Si $n-k$ es par, entonces $T_n[\bar{M}]$ es un operador inverso negativo en X_k y su función de Green satisface (P_g).*
- *Si $n-k$ es impar, entonces $T_n[\bar{M}]$ es un operador inverso negativo en X_k y su función de Green satisface (N_g).*

El siguiente resultado, muestra una propiedad de los autovalores de un operador disconjugado.

Teorema 4.7. *Sea $\bar{M} \in \mathbb{R}$ tal que $T_n[\bar{M}]\,u(t) = 0$ es disconjugada en I. Entonces*

- *Si $n-k$ es par, no hay ningún autovalor $T_n[\bar{M}]$ en X_k tal que $\lambda < 0$.*
- *Si $n-k$ es impar, no hay ningún autovalor $T_n[\bar{M}]$ en X_k tal que $\lambda > 0$.*

Los dos resultados siguientes aseguran la existencia del autovalor principal en diferentes casos y dan información fundamental sobre el signo de la función de Green.

Teorema 4.8. *Sea $\bar{M} \in \mathbb{R}$ fijado. Si el operador $T_n[\bar{M}]$ es invertible en X_k y su función de Green satisface (P_g), entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Existe $\lambda_1 > 0$, el menor autovalor en valor absoluto del operador $T_n[\bar{M}]$ en X_k. Por otra parte, existe la autofunción de signo constante no trivial correspondiente al autovalor λ_1.*
- *La función de Green relacionada con el operador $T_n[\bar{M}]$ es mayor o igual que cero en $I \times I$ para todo $M \in (\bar{M} - \lambda_1, \bar{M}]$.*
- *La función de Green relacionada con el operador $T_n[\bar{M}]$ no puede ser mayor o igual que cero en $I \times I$ para ningún $M < \bar{M} - \lambda_1$.*

Teorema 4.9. *Sea $\bar{M} \in \mathbb{R}$ fijado. Si el operador $T_n[\bar{M}]$ es invertible en X_k y su función de Green satisface la condición (N_g), entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Existe $\lambda_2 < 0$, el menor autovalor en valor absoluto del operador $T_n[\bar{M}]$ en X_k. Por otra parte, existe la autofunción de signo constante no trivial correspondiente al autovalor λ_2.*
- *La función de Green relacionada con el operador $T_n[\bar{M}]$ es menor o igual que cero en $I \times I$ para todo $M \in [\bar{M}, \bar{M} - \lambda_2)$.*
- *La función de Green relacionada con el operador $T_n[\bar{M}]$ no puede ser menor o igual que cero $I \times I$ para ningún $M > \bar{M} - \lambda_2$.*

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente teorema, en el que se caracteriza el conjunto de disconjugación de una ecuación, en función de los autovalores de problemas asociados.

Teorema 4.10. *Supongamos que $\bar{M} \in \mathbb{R}$ y $n \geq 2$ son tales que $T_n[\bar{M}]\,u(t) = 0$ es una ecuación disconjugada en I. Entonces, $T_n[M]\,u(t) = 0$ es una ecuación disconjugada en I si, y solo si, $M \in (\bar{M} - \lambda_1, \bar{M} - \lambda_2)$, donde*

- $\lambda_1 = +\infty$ *si* $n = 2$ *y, para* $n > 2$, $\lambda_1 > 0$ *es el menor de los autovalores positivos de* $T_n[\bar{M}]$ *en* X_k*, con* $n-k$ *par.*

- $\lambda_2 < 0$ *es el mayor de los autovalores negativos en* $T_n[\bar{M}]$ *de* X_k*, con* $n-k$ *impar.*

Demostración. Sea $n > 2$. Primero veamos que el intervalo óptimo de disconjugación, $D_{\bar{M}}$, debe ser necesariamente un subconjunto de $(\bar{M}-\lambda_1, \bar{M}-\lambda_2)$.

Usando el Lema 3.2 y el Teorema 3.6, sabemos que si $M \in D_{\bar{M}}$, la función de Green relacionada con el operador $T_n[M]$ en X_k es de signo constante, positivo si $n-k$ es par y negativo si $n-k$ es impar.

Sea $\widehat{k} \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $n - \widehat{k}$ sea par y sea λ_1 el menor autovalor positivo de $T_n[\bar{M}]$ en $X_{\widehat{k}}$. Usando el Lema 4.6 y el Teorema 4.8, podemos afirmar que $g_{\widehat{M},\widehat{k}}$ cambia el signo en $I \times I$ para $\widehat{M} \leq \bar{M} - \lambda_1$, entonces $\widehat{M} \notin D_{\bar{M}}$ para cada $\widehat{M} \leq \bar{M} - \lambda_1$.

De manera análoga, sea $\widetilde{k} \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $n - \widetilde{k}$ es impar y sea λ_2 el mayor autovalor negativo de $T_n[\bar{M}]$ en $X_{\widetilde{k}}$. Usando los mismos argumentos, con el Lema 4.6 y el Teorema 4.9, podemos afirmar que $g_{\widetilde{M},\widetilde{k}}$ no tiene signo constante en $I \times I$ para $\widetilde{M} \geq \bar{M} - \lambda_2$, entonces $\widetilde{M} \notin D_{\bar{M}}$ para cada $\widetilde{M} \geq \bar{M} - \lambda_2$.

Por tanto, hemos probado que $D_{\bar{M}} \subset \big(\bar{M} - \lambda_1, \bar{M} - \lambda_2\big)$.

Veamos ahora que $D_{\bar{M}} = \big(\bar{M} - \lambda_1, \bar{M} - \lambda_2\big)$. Denotamos $M_1 = \inf D_{\bar{M}}$ y $M_2 = \sup D_{\bar{M}}$. Por la Proposición 1.16, $D_{\bar{M}}$ debe ser un intervalo abierto, en particular $M_j \neq \bar{M}$ para $j = 1, 2$.

Si $D_{\bar{M}} \neq (\bar{M} - \lambda_1, \bar{M} - \lambda_2)$ entonces, al menos una de las desigualdades siguientes se verifica: $M_1 > \bar{M} - \lambda_1$ o $M_2 < \bar{M} - \lambda_2$.

Supongamos que se cumple la primera desigualdad (la prueba es análoga si se verifica la segunda).

Como $T_n[M_1]\, u(t) = 0$ no es una ecuación disconjugada en el intervalo I, se tiene que $c = \eta_{M_1}(a) \leq b$.

Usando el Lema 2.3 y la Proposición 2.5, podemos asegurar que existe $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que existe una solución no trivial de $T_n[M_1]\, u(t) = 0$, satisfaciendo las condiciones de contorno $(n-\ell, \ell)$ en $[a, c]$. Eligiendo el menor ℓ que verifica la afirmación anterior, de la Proposición 2.6 podemos afirmar que la solución que satisface las condiciones de contorno $(n-\ell, \ell)$ en $[a, c]$ está únicamente determinada por un factor constante y no se anula en (a, c).

Si $c = b$, tenemos que $\bar{M} - M_1 \in (\lambda_2, \lambda_1)$ será un autovalor de $T_n[\bar{M}]$ en $X_{n-\ell}$, y contradice la definición de λ_1 cuando ℓ es par y λ_2 cuando ℓ es impar.

Entonces, tenemos que $c < b$.

Usando el Lema 2.3, sabemos que $W_\ell^n[M_1](c) = 0$.

Y, dado que $T_n[M]\,u(t) = 0$ es una ecuación disconjugada en I para $M \in (M_1, M_2)$, podemos afirmar que

$$W_\ell^n[M_1+\delta](t) \neq 0\,, \quad t \in (a,b] \text{ para todo } 0 < \delta < M_2 - M_1.$$

Sea $W_\ell^n[M](t)$ una función continua de M, podemos afirmar que $W_\ell^n[M_1](t)$ es de signo constante en un entorno de c, así que tiene un cero de multiplicidad doble en c en función de t.

Usando la expresión de la derivada del Wronskiano, sabemos que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} W_\ell^n[M_1](t)_{|t=c} = \begin{vmatrix} y_1[M_1](c) & \dots & y_\ell[M_1](c) \\ & \vdots & \\ y_1^{(\ell-2)}[M_1](c) & \dots & y_\ell^{(\ell-2)}[M_1](c) \\ y_1^{(\ell)}[M_1](c) & \dots & y_\ell^{(\ell)}[M_1](c) \end{vmatrix}. \tag{4.3}$$

Tomamos la siguiente solución de (4.1)

$$y(t) = \begin{vmatrix} y_1[M_1](c) & \dots & y_\ell[M_1](c) \\ & \vdots & \\ y_1^{(\ell-2)}[M_1](c) & \dots & y_\ell^{(\ell-2)}[M_1](c) \\ y_1[M_1](t) & \dots & y_\ell[M_1](t) \end{vmatrix}.$$

Como es una combinación lineal de $y_1[M_1], \dots, y_\ell[M_1]$, es obvio que tiene $n-\ell$ ceros en a.

Siendo $W_\ell^n[M_1](c) = 0$, y verifica trivialmente las condiciones de contorno $(n-\ell, \ell)$ en $[a,c]$. Y, por la Proposición 2.6, ya que $c = \eta_{M_1}(a)$, sabemos que no se anula en el intervalo abierto (a,c).

Debido a la igualdad (4.3) no es difícil comprobar que dicha función también verifica las condiciones de contorno $(n-\ell-1, \ell+1)$ en $[a,c]$.

Si $\ell = n-1$, esto no es posible, porque no puede existir ninguna solución no trivial con n ceros en c.

Por otro lado, si $\ell < n-1$, denotando como $g_{\bar{M},n-\ell}$ y $g_{\bar{M},n-\ell-1}$, las funciones de Green relacionadas con el problema (4.1) – (4.2), para $M = \bar{M}$, $b = c$ y $k = \ell$ o $k = \ell+1$, respectivamente, deducimos las siguientes ecuaciones para todo $t \in [a,c]$:

$$y(t) = \int_a^c g_{\bar{M},n-\ell}(t,s)\,(\bar{M} - M_1) y(s) ds,$$

$$y(t) = \int_a^c g_{\bar{M},n-\ell-1}(t,s)\,(\bar{M} - M_1) y(s) ds.$$

Por el Lema 3.2 y el Teorema 3.6 sabemos que $g_{\bar{M},n-\ell}(t,s)$ y $g_{\bar{M},n-\ell-1}(t,s)$ tienen un signo constante diferente en $[a,c]\times(a,c)$, así las últimas igualdades no pueden satisfacerse a la vez. Entonces podemos afirmar que $M_1=\bar{M}-\lambda_1$.

De manara análoga concluimos que $M_2=\bar{M}-\lambda_2$.

Finalmente, consideramos el caso $n=2$. Es inmediato ver que los argumentos relacionados con λ_2 son los mismos que en el caso anterior. Supongamos, por el contrario, que $\lambda_1<+\infty$. Por tanto, sea $M_1:=\inf\{D_{\bar{M}}\}\in(-\infty,\bar{M})$. Por definición, tenemos que $c_1:=\eta_{M_1}(a)\leq b$. Así que, si $c_1=b$ tenemos que hay un autovalor positivo de $T_2[\bar{M}]$ en X_1, lo cual contradice el Teorema 4.7.

Ahora, dado que $c_1<b$, podemos proceder análogamente al caso $n>2$ y llegar a una contradicción. Así el resultado queda probado. $\square$

Casos particulares

.1. Ejemplos de orden 2

Dado que $u^{(n)}(t) = 0$ siempre es una ecuación disconjugada en cualquier intervalo, podemos aplicar este resultado a los operadores $T_n[M]u(t) = u^{(n)}(t) + Mu(t)$. Entonces, para hallar el intervalo óptimo de disconjugación, solo necesitamos calcular los autovalores más cercanos a cero de los problemas $(k, n-k)$.

Veamos un primer ejemplo de orden 2. Consideremos la ecuación $u'' + Mu = 0$. La única posibilidad que tenemos es $u(0) = u(1) = 0$, así $n = 2$ y $k = 1$, es decir $n-k$ impar, por lo que todos los autovalores son negativos. Como $u'' = -Mu$ y todos los autovalores son negativos solo tenemos que considerar el caso $M > 0$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^2 + m^2$ y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 \cos(mt) + C_2 \sin(mt).$$

Con las condiciones de contorno que tenemos llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 \sin(m) &= 0 \end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t) = 0$. También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ \sin(m) &= 0 \end{aligned}$$

Debemos buscar el menor m tal que $\sin(m) = 0$ con $m > 0$, que nos devolverá $m = \pi$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $-\pi^2$ y así el intervalo óptimo de disconjugación será $(-\infty, \pi^2)$.

Veamos ahora un segundo ejemplo de orden 2. Consideremos en este caso la ecuación $u'' + 2u' + (1 + M)u = 0$. Sabemos que es disconjugada para $M = 0$ pues es composición de $L_1 u = u' - u$ y $L_2 u = u' - u$ que son disconjugados en $[0, 1]$. La única posibilidad que tenemos es $u(0) = u(1) = 0$, así $n = 2$ y $k = 1$, es decir $n - k$ impar, por lo que todos los autovalores son negativos, por tanto solo tenemos que considerar el caso $M > 0$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^2 + 2x + 1 + m^2$, que son

$$-1 + im, -1 - im$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{-t} \sin(mt) + C_2 e^{-t} \cos(mt).$$

Con las condiciones de contorno que tenemos llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 e^{-1} \sin(m) &= 0 \end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t) = 0$. También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ e^{-1} \sin(m) &= 0 \end{aligned}$$

Debemos buscar el menor m tal que $e^{-1} \sin(m) = 0$ con $m > 0$, que nos devolverá $m = \pi$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $-\pi^2$ y así el intervalo óptimo de disconjugación será $(-\infty, \pi^2)$.

.2. Ejemplos de orden 3

Contemplaremos ahora un ejemplo sencillo de orden 3. Consideraremos la ecuación $u''' + Mu = 0$. En primer lugar veremos que ocurre si $M > 0$. Como $u''' = -Mu$ y $M > 0$, los autovalores son negativos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n - k$ impar. La única posibilidad que tenemos es $n = 3$ y $k = 2$, así las condiciones de frontera son $u(0) = u'(0) = 0 = u(1)$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^3 + m^3$, que nos dan

$$-m, \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} \frac{i}{2} \right) m$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}\sin(ct) + C_3 e^{bt}\cos(ct),$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -m \\ b &= \frac{m}{2} \\ c &= \sqrt{3}\frac{m}{2} \end{aligned}$$

Con las condiciones de contorno que tenemos llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_3 \\ C_2 &= -\sqrt{3}C_3 \\ -C_3e^a - \sqrt{3}C_3e^b\sin(c) + C_3e^b\cos(c) &= 0 \end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t) = 0$. También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 \\ C_2 &= -\sqrt{3} \\ -e^a - \sqrt{3}e^b\sin(c) + e^b\cos(c) &= 0 \end{aligned}$$

Debemos buscar el menor m tal que $-e^a - \sqrt{3}e^b\sin(c) + e^b\cos(c) = 0$ con $m > 0$, que nos devolverá $m = 4{,}233207192$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $-4{,}233207192^3$.

En segundo lugar veamos que ocurre si $M < 0$. Como $u''' = -Mu$ y $M < 0$, los autovalores son positivos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n - k$ par. La única posibilidad que tenemos es $n = 3$ y $k = 1$, así las condiciones de frontera son $u(0) = 0 = u(1) = u'(1)$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^3 - m^3$, que nos dan

$$m, \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\frac{i}{2}\right)m$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}\sin(ct) + C_3 e^{bt}\cos(ct),$$

donde

$$\begin{aligned} a &= m \\ b &= -\frac{m}{2} \\ c &= \sqrt{3}\frac{m}{2} \end{aligned}$$

Con las condiciones de contorno que tenemos llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned}
C_1 &= -C_3\\
C_2 &= \frac{C_3\left(2e^{\frac{3m}{2}}+\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)}\\
0 &= -C_3e^a+\frac{C_3\left(2e^{\frac{3m}{2}}+\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)}e^b\sin(c)+C_3e^b\cos(c)
\end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0\\
C_2 &= 0\\
C_3 &= 0
\end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t)=0$. También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned}
C_1 &= -1\\
C_2 &= \frac{\left(2e^{\frac{3m}{2}}+\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)}\\
0 &= -e^a+\frac{\left(2e^{\frac{3m}{2}}+\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)}e^b\sin(c)+e^b\cos(c)
\end{aligned}$$

Debemos buscar el menor m tal que

$$-e^a+\frac{\left(2e^{\frac{3m}{2}}+\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}\right)}e^b\sin(c)+e^b\cos(c)=0$$

con $m<0$, que nos devolverá $m=-4{,}233207192$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $4{,}233207192^3$ y así el intervalo óptimo de disconjugación será $(-4{,}233207192^3, 4{,}233207192^3)$.

Veamos un segundo ejemplo de orden 3. Consideremos la ecuación $u'''+u'+Mu=0$. Si $M=0$ tenemos que es disconjugada pues $u'''+u'=0$ es composición de $L_1u=\ u'$ y $L_2u=\ u''+u$ que son disconjugados en $[0,1]$. Nótese que el operador $u''+M^2u$ es disconjugado en $[0,1]$ para $M<\pi$. Ahora veremos que ocurre si $M>0$. Como $u'''+\ u'=\ -\ Mu$ y $M>0$, los autovalores son negativos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n-k$ impar. La única posibilidad que tenemos es $n=3$ y $k=2$, así las condiciones de frontera son $u(0)=u'(0)=0=u(1)$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico x^3+x+m^3, que nos dan

$$\frac{-\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6}+\frac{2}{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}{12}-\frac{1}{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}\pm$$
$$\frac{i\sqrt{3}\left(\frac{-\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6}-\frac{2}{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)}{2},$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t)=C_1e^{at}+C_2e^{bt}\sin(ct)+C_3e^{bt}\cos(ct),$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{-\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6}+\frac{2}{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}\\
b &= \frac{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}{12}-\frac{1}{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}\\
c &= \frac{\sqrt{3}\left(\frac{-\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6}-\frac{2}{\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)}{2}
\end{aligned}$$

Con las condiciones de contorno que tenemos llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_3 \\ C_2 &= \frac{C_3\left(\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{2}{3}}-12\right)\sqrt{3}}{108m^3+12\sqrt{81m^6+12}} \\ 0 &= -C_3e^a+\frac{C_3\left(\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{2}{3}}-12\right)\sqrt{3}}{108m^3+12\sqrt{81m^6+12}}e^b\sin(c)+C_3e^b\cos(c) \end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t) = 0$. También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 \\ C_2 &= \frac{\left(\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{2}{3}}-12\right)\sqrt{3}}{108m^3+12\sqrt{81m^6+12}} \\ 0 &= -e^a+\frac{\left(\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{2}{3}}-12\right)\sqrt{3}}{108m^3+12\sqrt{81m^6+12}}e^b\sin(c)+e^b\cos(c) \end{aligned}$$

Debemos buscar el menor m tal que

$$-e^a+\frac{\left(\left(108m^3+12\sqrt{81m^6+12}\right)^{\frac{2}{3}}-12\right)\sqrt{3}}{108m^3+12\sqrt{81m^6+12}}e^b\sin(c)+e^b\cos(c) = 0$$

con $m > 0$, que nos devolverá $m = 4{,}172914962$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $-4{,}172914962^3$.

En tercer lugar veamos que ocurre si $M < 0$. Como $u''' + u' = -Mu$ y $M < 0$, los autovalores son positivos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n-k$ par. La única posibilidad que tenemos es $n = 3$ y $k = 1$, así las condiciones de frontera que consideramos son $u(0) = 0 = u(1) = u'(1)$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico

$x^3 + x - m^3$, que nos dan

$$\frac{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6} - \frac{2}{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

$$-\frac{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}{12} + \frac{1}{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}} \pm$$

$$\frac{i\sqrt{3}\left(\frac{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6} + \frac{2}{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)}{2},$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} \sin(ct) + C_3 e^{bt} \cos(ct),$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6} - \frac{2}{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ b &= -\frac{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}{12} + \frac{1}{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ c &= \frac{\sqrt{3}\left(\frac{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}{6} + \frac{2}{\left(108m^3 + 12\sqrt{81m^6 + 12}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)}{2} \end{aligned}$$

Con las condiciones de contorno que tenemos y siguiendo el mismo procedimiento que en el caso $M > 0$, llegamos a unas igualdades que nos proporcionan la solución trivial $u(t) = 0$ y la solución no trivial. Sustituimos las constantes en $u(t)$ y representamos $u(1)$ buscando el menor m tal que $u(1) = 0$ con $m < 0$, que nos devolverá $m = -4{,}172914962$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $4{,}172914962^3$ y así el intervalo óptimo de disconjugación será $(-4{,}172914962^3, 4{,}172914962^3)$.

.3. Ejemplos de orden 4

Consideremos la ecuación $u'''' + Mu = 0$. En primer lugar veremos que ocurre si $M > 0$. Como $u'''' = -Mu$ y $M > 0$, los autovalores son negativos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n - k$ impar. Así tenemos dos posibilidades, $n = 4$ y $k = 3$, y por otro lado $n = 4$ y $k = 1$, así las condiciones de frontera son $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 = u(1)$ en el primer caso y $u(0) = 0 = u(1) = u'(1) = u''(1)$ en el segundo.
Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 + m^4$, que nos dan

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) m, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) m$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{at}\cos(bt) + C_2 e^{at}\sin(bt) + C_3 e^{ct}\cos(dt) + C_4 e^{ct}\sin(dt),$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -\frac{m}{\sqrt{2}} \\ b &= \frac{m}{\sqrt{2}} \\ c &= \frac{m}{\sqrt{2}} \\ d &= \frac{m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones de contorno del caso $n = 4$ y $k = 3$, que son las siguientes: $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 = u(1)$, llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned} C_1 &= C_4 \\ C_2 &= C_4 \\ C_3 &= -C_4 \\ 0 &= C_4 e^a\cos(b) + C_4 e^a\sin(b) - C_4 e^c\cos(d) + C_4 e^c\sin(d) \end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t) = 0$.
También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= 1 \\ C_3 &= -1 \\ 0 &= e^a\cos(b) + e^a\sin(b) - e^c\cos(d) + e^c\sin(d) \end{aligned}$$

Observamos que la última ecuación es

$$\tan\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right) = \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)$$

Por tanto debemos buscar el menor m tal que $\tan\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right) = \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)$ con $m > 0$, que nos devolverá $m = 5{,}553054244$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $-5{,}553054244^4$.

Utilizando ahora las condiciones de contorno del caso $n = 4$ y $k = 1$, que son las siguientes: $u(0) = 0 = u(1) = u'(1) = u''(1)$, llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{2C_4e^{m\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)e^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}\\
C_2 &= -\frac{C_4e^{m\sqrt{2}}\left(2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) + e^{m\sqrt{2}} + 1\right)}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)e^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}\\
C_3 &= \frac{2C_4e^{m\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)e^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}
\end{aligned}$$

Cuando sustituimos estas constantes en

$$C_1e^{at}\cos(bt) + C_2e^{at}\sin(bt) + C_3e^{ct}\cos(dt) + C_4e^{ct}\sin(dt) = 0$$

y simplificamos poniendo $t = 1$ llegamos a la igualdad

$$\cos(m)\cosh(m) = 1$$

Si ponemos

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0\\
C_2 &= 0\\
C_3 &= 0\\
C_4 &= 0
\end{aligned}$$

tenemos la solución trivial $u(t) = 0$. También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{2e^{m\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)e^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1} \\
C_2 &= -\frac{e^{m\sqrt{2}}\left(2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) + e^{m\sqrt{2}} + 1\right)}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)e^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1} \\
C_3 &= \frac{2e^{m\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)e^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1} \\
1 &= \cos(m)\cosh(m)
\end{aligned}$$

Por tanto debemos buscar el menor m tal que $\cos(m)\cosh(m) = 1$ con $m > 0$, que nos devolverá $m = 5{,}553054244$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $-5{,}553054244^4$.

En segundo lugar veamos que ocurre si $M < 0$. Como $u'''' = -Mu$ y $M < 0$, los autovalores son positivos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n - k$ par. La única posibilidad que tenemos es $n = 4$ y $k = 2$, así las condiciones de frontera son $u(0) = u'(0) = 0 = u(1) = u'(1)$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 - m^4$, que nos dan

$$\pm m, \pm im$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} + C_3 e^{ct}\cos(dt) + C_4 e^{ct}\sin(dt)$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= -m \\
b &= m \\
c &= 0 \\
d &= m
\end{aligned}$$

Con las condiciones de contorno que tenemos llegamos a las igualdades

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{C_4\left(\sin(m)-\cos(m)+e^m\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}\\
C_2 &= -\frac{C_4\left(-\sin(m)-\cos(m)+e^{-m}\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}\\
C_3 &= \frac{C_4\left(-2\cos(m)+e^{-m}+e^m\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}\\
0 &= -\frac{C_4\left(\sin(m)-\cos(m)+e^m\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}e^a-\frac{C_4\left(-\sin(m)-\cos(m)+e^{-m}\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}e^b+\\
&+\frac{C_4\left(-2\cos(m)+e^{-m}+e^m\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}e^c\cos(d)+C_4e^c\sin(d)
\end{aligned}
$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 0\\
C_2 &= 0\\
C_3 &= 0\\
C_4 &= 0
\end{aligned}
$$

que nos da la solución trivial $u(t)=0$. También nos proporcionan las soluciones

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{\left(\sin(m)-\cos(m)+e^m\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}\\
C_2 &= -\frac{\left(-\sin(m)-\cos(m)+e^{-m}\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}\\
C_3 &= \frac{\left(-2\cos(m)+e^{-m}+e^m\right)}{e^{-m}-e^m-2\sin(m)}\\
0 &= \frac{-2e^{2m}\cos(m)+4e^m-2\cos(m)}{e^{2m}+2\sin(m)e^m-1}
\end{aligned}
$$

Debemos buscar el menor m tal que

$$\frac{-2e^{2m}\cos(m)+4e^m-2\cos(m)}{e^{2m}+2\sin(m)e^m-1}=0$$

con $m<0$, que nos devolverá $m=-4{,}730040745$. Tenemos entonces que el primer autovalor es $4{,}730040745^4$ y así el intervalo óptimo de disconjugación será $(4{,}730040745^4, 5{,}553054244^4)$.

Veamos otro ejemplo de orden 4. Consideremos la ecuación $u''''-8u''+Mu=0$. En primer lugar veremos que es disconjugada si $M=0$. En efecto pues $u''''-8u''=0$ es la composición de $L_1u=u''$ y $L_2u=u''-8u$, que son disconjugados en $[0,1]$.

En segundo lugar veamos que ocurre si $M>0$. Tenemos que separar los casos $0<M<2$ y $2<M$ pues el polinomio característico nos dará diferentes raíces. Como $u''''-8u''=-Mu$ y $M>0$, los autovalores son negativos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n-k$ impar. Así tenemos dos posibilidades, $n=4$ y $k=3$, y por otro lado $n=4$ y $k=1$,

así las condiciones de frontera son $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 = u(1)$ en el primer caso y $u(0) = 0 = u(1) = u'(1) = u''(1)$ en el segundo.
Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 - 8x^2 + m^4$ con $0 < m < 2^4$, que nos dan

$$\pm\sqrt{4 \pm \sqrt{-m^4 + 16}}$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} + C_3 e^{ct} + C_4 e^{dt},$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} \\
b &= -\sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} \\
c &= \sqrt{4 - \sqrt{-m^4 + 16}} \\
d &= -\sqrt{4 - \sqrt{-m^4 + 16}}
\end{aligned}$$

Utilizando las condiciones de contorno $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 = u(1)$ que corresponden al caso $n = 4$ y $k = 3$, llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} C_4}{m^4} \\
C_2 &= -\frac{\left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} C_4}{m^4} \\
C_3 &= -C_4 \\
0 &= \frac{C_4 \left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}{m^4} + \\
&+ \frac{C_4 \left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}{m^4} + \\
&+ C_4 \left(e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} - e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\right)
\end{aligned}$$

las cuales nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0 \\
C_2 &= 0 \\
C_3 &= 0 \\
C_4 &= 0
\end{aligned}$$

que nos da la solución trivial $u(t) = 0$.
También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}}}{m^4} \\
C_2 &= -\frac{\left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}}}{m^4} \\
C_3 &= -1 \\
0 &= \frac{\left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}{m^4} + \\
&+ \frac{\left(4 - \sqrt{-m^4 + 16}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}} e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}{m^4} + \\
&+ \left(e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} - e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto debemos buscar el menor m para el que se verifica la última ecuación con $0 < m < 2^4$, que nos devolverá $m = 2$. Tenemos entonces que el primer autovalor es -2^4.

Utilizando ahora las condiciones de contorno del caso $n = 4$ y $k = 1$, que son las siguientes: $u(0) = 0 = u(1) = u'(1) = u''(1)$, llegamos a las igualdades

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{C_4 \sqrt{4 - \sqrt{-m^4 + 16}} e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}}} \\
C_2 &= -\frac{C_4 \sqrt{4 - \sqrt{-m^4 + 16}} e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} \sqrt{4 + \sqrt{-m^4 + 16}}} \\
C_3 &= -e^{-2\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} C_4
\end{aligned}$$

Cuando sustituimos estas constantes en

$$C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} + C_3 e^{ct} + C_4 e^{dt} = 0$$

y simplificamos poniendo $t = 0$ llegamos a la igualdad

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

Si ponemos

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0 \\
C_2 &= 0 \\
C_3 &= 0 \\
C_4 &= 0
\end{aligned}$$

tenemos la solución trivial $u(t) = 0$.
También nos proporcionan las soluciones

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} \\
C_2 &= -\frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} \\
C_3 &= -e^{-2\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} \\
0 &= \frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} - \frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} - e^{-2\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} + 1
\end{aligned}$$

Por tanto debemos buscar el menor m que verifica la última ecuación con $0 < m < 2^4$, que nos devolverá $m = 2$. Tenemos entonces que el primer autovalor es -2^4.

Como el menor m que encontramos es $m = 2$, ese será el menor autovalor que se busca, por tanto no hará falta estudiar el caso $2 < M$.

En tercer lugar veamos que ocurre si $M < 0$. Como $u'''' = -Mu$ y $M < 0$, los autovalores son positivos, por tanto solo hay que buscarlos para el caso $n - k$ par. La única posibilidad que tenemos es $n = 4$ y $k = 2$, así las condiciones de frontera son $u(0) = u'(0) = 0 = u(1) = u'(1)$. Primero calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 - 8x^2 - m^4$, que nos dan

$$\pm\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}, \pm i\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}$$

y escribimos la solución general de la ecuación que viene dada por

$$u(t) = C_1e^{at} + C_2e^{bt} + C_3e^{ct}\cos(dt) + C_4e^{ct}\sin(dt)$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
b &= -\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
c &= 0 \\
d &= \sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}
\end{aligned}$$

Realizando cálculos análogos se obtiene la expresión de las distintas constantes en cada caso, si bien esta es demasiado complicada. De esta forma se llega a que el primer autovalor es $4{,}946180870^4$. Por tanto tenemos que el intervalo óptimo de disconjugación es $(-2^4, 4{,}946180870^4)$.

Anexo

restart
#Vamos a estudiar la disconjugación de la ecuación u''+Mu=0
#En este caso la única posibilidad es u(0)=0=u(1), con lo cual tenemos n=2 y k=1, por tanto n-k=1 es impar. Así solo hay que considerar el caso M>0
#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^2 + m^2$
$eq := x^2 + m^2$:
$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$\mathrm{I}\, m,\ -\mathrm{I}\, m \tag{1}$$

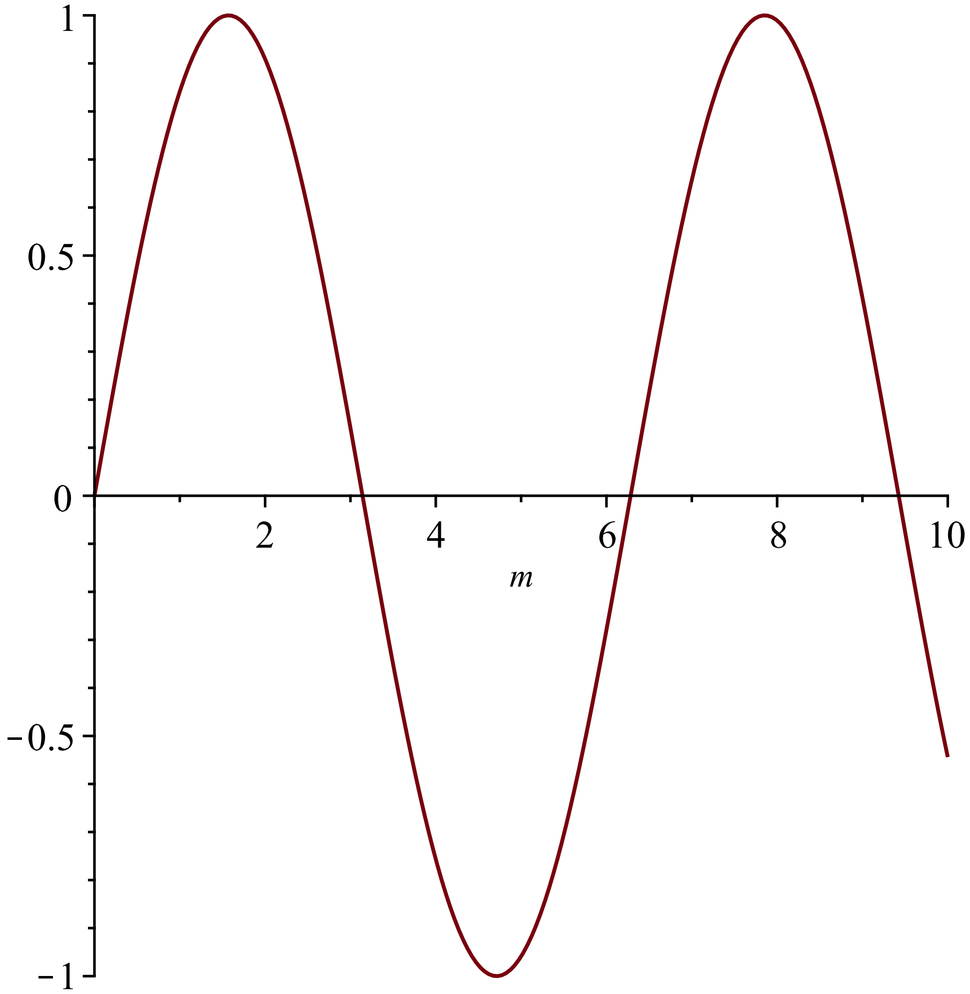
#Escribimos la solución general
$u := (t, m, C1, C2) \rightarrow C1 \cdot \cos(m \cdot t) + C2 \cdot \sin(m \cdot t)$:
#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u(1)=0
$solve(u(0, m, C1, C2), C1)$

$$0 \tag{2}$$

#Substituímos las constantes
$v := (t, m) \rightarrow \sin(m \cdot t)$:
$v(1, m)$

$$\sin(m) \tag{3}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0
$plot(v(1, m), m = 0 ..10)$



$fsolve(v(1, m) = 0, m = 2 ..4)$

$$3.141592654 \tag{4}$$

#Por tanto la ecuación es disconjugada en (- $\infty, \pi^2)$

restart

#Vamos a estudiar la disconjugación de la ecuación u''+2u'+(1+M)u=0

#En este caso la única posibilidad es u(0)=0=u(1), con lo cual tenemos n=2 y k=1, por tanto n-k=1 es impar. Así solo hay que considerar el caso M>0.

#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^2 + 2\cdot x + 1 + m^2$

$eq := x^2 + 2\cdot x + 1 + m^2$:

$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$-1 + \mathrm{I}\, m,\ -1 - \mathrm{I}\, m \tag{1}$$

#Escribimos la solución general

$u := (t, m, C1, C2) \rightarrow C1\cdot \exp(-t)\cdot \sin(m\cdot t) + C2\cdot \exp(-t)\cdot \cos(m\cdot t)$:

#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u(1)=0

$solve(u(0, m, C1, C2), C2)$

$$0 \tag{2}$$

#Substituímos las constantes

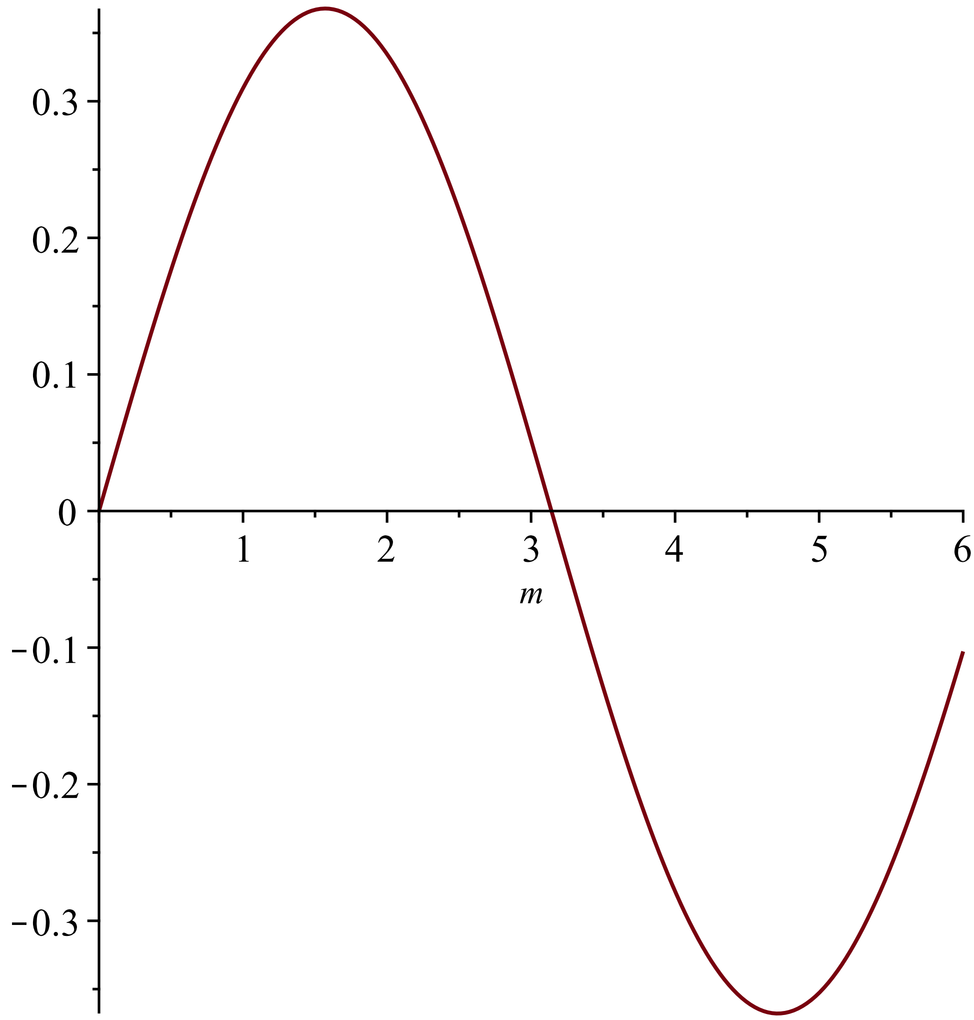
$v := (t, m) \rightarrow \exp(-t)\cdot \sin(m\cdot t)$:

$v(1, m)$

$$\mathrm{e}^{-1} \sin(m) \tag{3}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

$plot(v(1, m), m = 0\,..6)$



$fsolve(v(1, m), m = 1\,..4)$

$$3.141592654 \tag{4}$$

#Por tanto la ecuación es disconjugada en $(-\infty,\pi^2)$

restart

#Vamos a estudiar la disconjugación de la ecuación u'''+Mu=0

#Caso M>0

#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^3 + m^3$

$eq := x^3 + m^3:$

$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$-m, \left(\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}\right) m, \left(\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}\right) m \tag{1}$$

#Escribimos la solución general y su derivada

$a := -m:$

$b := \frac{m}{2}:$

$c := \frac{\mathrm{sqrt}(3) \cdot m}{2}:$

$u := (t, m, a, b, c, C1, C2, C3) \rightarrow C1 \cdot \exp(a \cdot t) + C2 \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \sin(c \cdot t) + C3 \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \cos(c \cdot t):$

$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, C1, C2, C3), t)$

$$u1 := -C1\, m\, e^{-m t} + \frac{C2\, m\, e^{\frac{m t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} + \frac{C2\, e^{\frac{m t}{2}} \sqrt{3}\, m \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} + \frac{C3\, m\, e^{\frac{m t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} - \frac{C3\, e^{\frac{m t}{2}} \sqrt{3}\, m \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} \tag{2}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{1}{2}\left(m\, e^{-m t}\left(e^{\frac{3 m t}{2}} \left(\sqrt{3}\, C2 + C3\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right) + e^{\frac{3 m t}{2}} \left(-\sqrt{3}\, C3 + C2\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right) - 2\, C1\right)\right) \tag{3}$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k impar porque u'''=-Mu y M>0, es decir los autovalores son negativos

#Estamos en el caso n=3 y k=2

#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u'(0)=0=u(1)

$solve(\{u(0, m, a, b, c, C1, C2, C3) = 0, simplify(subs(t = 0, u1)) = 0\}, \{C1, C2\})$

$$\left\{C1 = -C3, C2 = -\sqrt{3}\, C3\right\} \tag{4}$$

#Substituímos las constantes

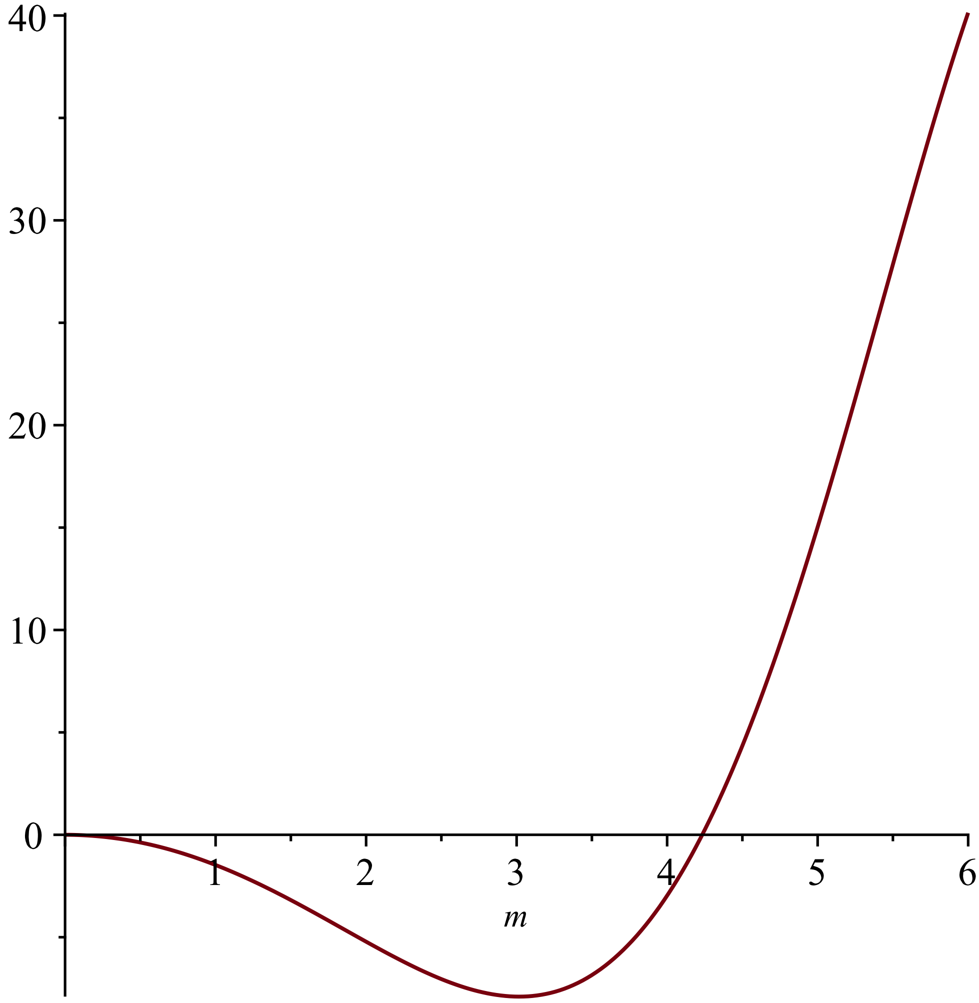
$v := (t, m) \rightarrow u(t, m, a, b, c, -1, -\mathrm{sqrt}(3), 1):$

$v(1, m)$

$$-e^{-m} - \sqrt{3}\, e^{\frac{m}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + e^{\frac{m}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) \tag{5}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

$plot(v(1, m), m = 0..6)$



$fsolve(v(1, m), m = 4..5)$

$$4.233207192 \quad (6)$$

#Caso M<0
restart
#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^3 - m^3$

$eq := x^3 - m^3 :$

$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$m, \left(-\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}\right) m, \left(-\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}\right) m \quad (7)$$

#Escribimos la solución general y su derivada

$a := m :$

$b := -\frac{m}{2} :$

$c := \frac{\mathrm{sqrt}(3) \cdot m}{2} :$

$u := (t, m, a, b, c, C1, C2, C3) \rightarrow C1 \cdot \exp(a \cdot t) + C2 \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \sin(c \cdot t) + C3 \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \cos(c \cdot t) :$

$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, C1, C2, C3), t)$

$$u1 := C1\, m\, e^{m t} - \frac{C2\, m\, e^{-\frac{m t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} + \frac{C2\, e^{-\frac{m t}{2}} \sqrt{3}\, m \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} - \frac{C3\, m\, e^{-\frac{m t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} - \frac{C3\, e^{-\frac{m t}{2}} \sqrt{3}\, m \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right)}{2} \quad (8)$$

simplify(%)

$$-\frac{1}{2}\left(\left(-e^{-\frac{m t}{2}}\left(\sqrt{3}\, C2 - C3\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right) + e^{-\frac{m t}{2}}\left(\sqrt{3}\, C3 + C2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m\, t}{2}\right) - 2\, C1\, e^{m t}\right) m\right) \quad (9)$$

#*Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k par porque u'''=-Mu y M<0, es decir los autovalores son positivos*

#*Estamos en el caso n=3 y k=1*

#*Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=0=u(1)=u'(1)*

solve({*u*(0, *m*, *a*, *b*, *c*, *C1*, *C2*, *C3*) = 0, *simplify*(*subs*(*t* = 1, *u1*)) = 0}, {*C1*, *C2*})

$$\left\{C1 = -C3,\ C2 = \frac{C3\left(e^{-\frac{m}{2}}\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + e^{-\frac{m}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + 2\, e^{m}\right)}{e^{-\frac{m}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)\right)}\right\} \quad (10)$$

simplify(%)

$$\left\{C1 = -C3,\ C2 = \frac{\left(2\, e^{\frac{3 m}{2}} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)\right) C3}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)}\right\} \quad (11)$$

#*Substituímos las constantes*

$$v := (t, m) \rightarrow u\left(t, m, a, b, c, -1, \frac{2\, e^{\frac{3 m}{2}} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)}, 1\right):$$

v(1, *m*)

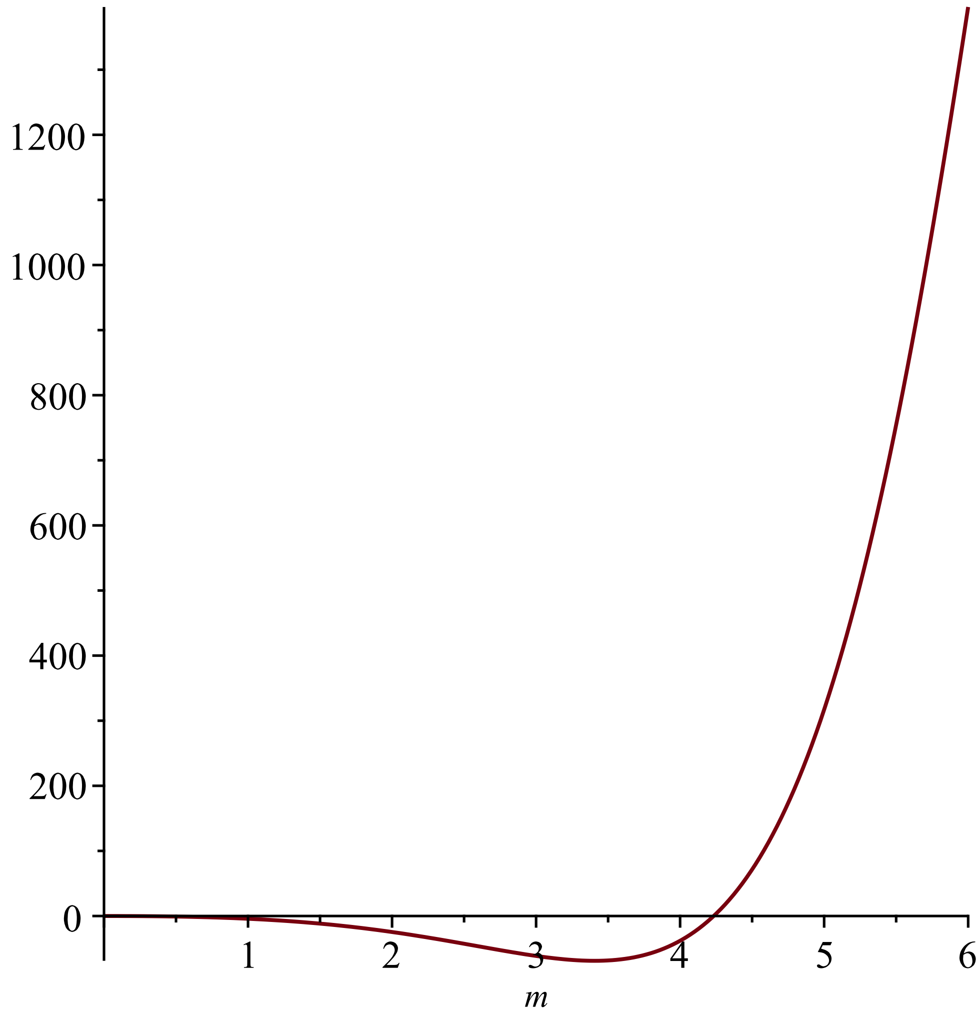
$$-e^{m} + \frac{\left(2\, e^{\frac{3 m}{2}} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)\right) e^{-\frac{m}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)} + e^{-\frac{m}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) \quad (12)$$

simplify(%)

$$\frac{e^{m} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) \sqrt{3} - 3\, e^{m} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) - e^{-\frac{m}{2}} \sqrt{3}}{-\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right)} \tag{13}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

$$plot\left(e^{m} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) \sqrt{3} - 3\, e^{m} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, m}{2}\right) - e^{-\frac{m}{2}} \sqrt{3}, m = 0..6\right)$$



$fsolve(v(1, m), m = 4..5)$

$$4.233207192 \tag{14}$$

restart

#Vamos a estudiar la disconjugación de la ecuación u'''+u'+Mu=0

#Caso M>0

#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^3 + x + m^3$

$eq := x^3 + x + m^3 :$

$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$-\frac{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} + \frac{2}{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}},\ \frac{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{12} - \frac{1}{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{3}\left(-\frac{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} - \frac{2}{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)}{2},\ \frac{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{12} - \frac{1}{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{3}\left(-\frac{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} - \frac{2}{\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)}{2} \tag{1}$$

#Escribimos la solución general y su derivada

$$a := \frac{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} - \frac{2}{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}} :$$

$$b := -\frac{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{12} + \frac{1}{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}} :$$

$$c := -\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} + \frac{2}{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)}{2} :$$

$u := (t, m, a, b, c, C1, C2, C3) \rightarrow C1 \cdot \exp(a \cdot t) + C2 \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \sin(c \cdot t) + C3 \cdot \exp(b \cdot t) \cdot \cos(c \cdot t) :$

$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, C1, C2, C3), t)$

$$u1 := C1\left(\frac{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} - \frac{2}{\left(-108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right) \tag{2}$$

$$e^{\left(\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)t}-C2\left(\right.$$

$$-\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\left.\right)$$

$$e^{\left(-\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)t}\sin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(1/6\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)t\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(C2\,e^{\left(-\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)t}\right.$$

$$\sqrt{3}\left(1/6\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\left(\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{6}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{2}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)t\right)\right)\right)+C3\left(\right.$$

$$-\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\left.\right)$$

$$e^{\left(-\frac{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^{3}+12\sqrt{81\,m^{6}+12}\right)^{1/3}}\right)t}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right.\right.$$

$$\left(1/6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)t\Bigg)\Bigg)$$

$$-\frac{1}{2}\Bigg(C3\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)t}$$

$$\sqrt{3}\left(1/6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\left(\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{2}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)t\right)\right)\Bigg)$$

simplify(%)

$$\frac{1}{6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\Bigg(-\frac{1}{2}\Bigg(\mathrm{e}^{-\frac{\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)t}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\Big(\big(C2\sqrt{3} \qquad \textbf{(3)}$$

$$+C3\big)\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\,C2\sqrt{3}-12\,C3\Big)$$

$$\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)t}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)$$

$$+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)t}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\left(\left(-C3\sqrt{3}+C2\right)\left(-108\,m^3\right.\right.\right.$$

$$\left.+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\,C3\sqrt{3}-12\,C2\Big)$$

$$\left.\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)t}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\right)$$

$$\left.+C1\,e^{\frac{\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)t}{6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)\right)$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k impar porque u'''+u'=-Mu y M>0, es decir los autovalores son negativos
#Estamos en el caso n=3 y k=2
#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u'(0)=0=u(1)
$solve(\{u(0, m, a, b, c, C1, C2, C3) = 0, simplify(subs(t = 0, u1)) = 0\}, \{C1, C2\})$

$$\left\{C1=-C3,\ C2=-\frac{C3\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)\sqrt{3}}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12}\right\} \tag{4}$$

#Substituímos las constantes

$$v := (t, m)\rightarrow u\left(t, m, a, b, c, -1, -\frac{\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)\cdot\sqrt{3}}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12}, 1\right):$$

$v(1, m)$

$$-e^{\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}} \tag{5}$$

$$+\frac{1}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12}\left(\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}\right.\right.$$

$$\left.-12\right)$$

$$\sqrt{3}\ \mathrm{e}^{-\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\ \sin\Bigg(\frac{1}{2}\Bigg($$

$$\sqrt{3}\left(1/6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

$$+\,\mathrm{e}^{-\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\ \cos\Bigg(\frac{1}{2}\Bigg(\sqrt{3}$$

$$\left(1/6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)$$

simplify(%)

$$\frac{1}{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12}\Bigg(\Big(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3} \tag{6}$$

$$-\,12\Big)$$

$$\sqrt{3}\ \mathrm{e}^{-\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\ \sin\Bigg(\frac{1}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\Big($$

$$\sqrt{3}\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)\Big)\Bigg)\Bigg)+\Big(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}$$

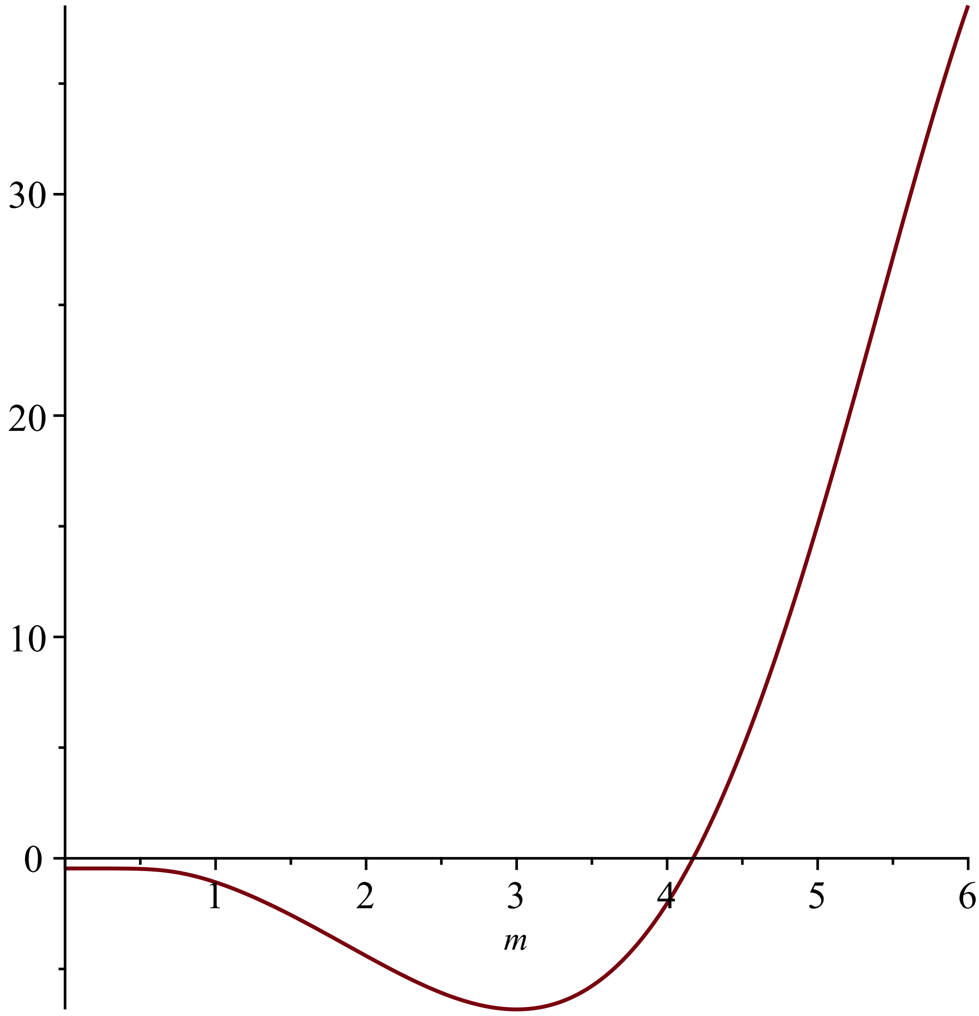
$$+\,12\Big)$$

$$\Bigg(\mathrm{e}^{-\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\ \cos\Bigg(\frac{1}{12\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\Big($$

$$\sqrt{3}\,\left(\left(\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)\right)\Bigg)-\mathrm{e}^{\frac{\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{6\left(-108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\Bigg)\Bigg)$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

plot$(v(1, m), m=0..6)$



fsolve$(v(1, m)=0, m=4..5)$

$$4.172914962 \tag{7}$$

restart

#Caso M<0

#Calculamos las raíces del polinomio característico x^3+x-m^3

$eq := x^3+x-m^3$:

solve(eq, x) assuming $m>0$

$$\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}, \tag{8}$$

$$-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}+\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}+\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)}{2},$$

$$-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}-\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}+\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

#Escribimos la solución general y su derivada

$$a:=\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}:$$

$$b:=-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}:$$

$$c:=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}+\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)}{2}:$$

$u:=(t,m,a,b,c,C1,C2,C3)\rightarrow C1\cdot\exp(a\cdot t)+C2\cdot\exp(b\cdot t)\cdot\sin(c\cdot t)+C3\cdot\exp(b\cdot t)\cdot\cos(c\cdot t):$

$u1:=diff(u(t,m,a,b,c,C1,C2,C3),t)$

$$u1:=C1\left(\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\mathrm{e}^{\left(\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)t}+C2\left(-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\tag{9}$$

$$e^{\left(-\frac{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}{12}+\frac{1}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t}\sin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(1/6\,(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}+\frac{2}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(C2\,e^{\left(-\frac{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}{12}+\frac{1}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t}\sqrt{3}\left(1/\right.\right.$$

$$\left.6\,(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}+\frac{2}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)$$

$$\left.\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\frac{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}{6}+\frac{2}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t}{2}\right)\right)$$

$$+C3\left(-\frac{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}{12}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)$$

$$e^{\left(-\frac{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}{12}+\frac{1}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(1/6\,(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}+\frac{2}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(C3\,e^{\left(-\frac{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}{12}+\frac{1}{(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12})^{1/3}}\right)t}\sqrt{3}\left(1/\right.\right.$$

$$6\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}\Bigg)$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}{6}+\frac{2}{\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}\right)t}{2}\right)\Bigg)$$

simplify(%)

$$\frac{1}{6\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}\Bigg(\frac{1}{2}\Bigg(\left(\left(C2\sqrt{3}-C3\right)\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{2/3}\right. \tag{10}$$

$$\left.+12\, C2\sqrt{3}+12\, C3\right)$$

$$e^{-\frac{\left(\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)t}{12\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}}\cos\Bigg(\frac{1}{12\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}\Big(\sqrt{3}$$

$$\left(\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)t\Big)\Bigg)\Bigg)-\frac{1}{2}\Bigg(\left(\left(C3\sqrt{3}+C2\right)\left(108\, m^3\right.\right.$$

$$\left.\left.+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{2/3}+12\, C3\sqrt{3}-12\, C2\right)$$

$$e^{-\frac{\left(\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)t}{12\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}}\sin\Bigg(\frac{1}{12\left(108\, m^3+12\sqrt{81\, m^6+12}\right)^{1/3}}\Big(\sqrt{3}$$

$$\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)t\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

$$+\,C1\,\mathrm{e}^{\frac{\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)t}{6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)\Bigg)$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k par porque u'''+u'=-Mu y M<0, es decir los autovalores son positivos

#Estamos en el caso n=3 y k=1

#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=0=u(1)=u'(1)

solve({ *u*(0, *m*, *a*, *b*, *c*, *C1*, *C2*, *C3*) = 0, *simplify*(*subs*(*t* = 1, *u1*)) = 0 }, { *C1*, *C2* })

$$\Bigg\{C1=-C3,\ C2=\Bigg(C3\Bigg(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/} \tag{11}$$

$$^3\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}+\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/}$$

$$^3\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}$$

$$+\,2\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}\mathrm{e}^{\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}$$

$$+\,12\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)$$

$$e^{-\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{2/3} - 12}{12\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{1/3}}}$$

$$-12\, e^{-\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{2/3} - 12}{12\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{1/3}}} \cos\left(\frac{1}{12\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right($$

$$\sqrt{3}\left(\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} + 12\right)\Bigg)\Bigg) - 24\, e^{-\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{2/3} - 12}{6\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{1/3}}}\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg/ \Bigg(e^{-\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{2/3} - 12}{12\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{1/3}}} \Bigg(\sqrt{3}\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/}$$

$$^{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} + 12\right)}{12\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right) - \left(108\, m^3\right.$$

$$\left. + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} + 12\right)}{12\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)$$

$$+ 12\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} + 12\right)}{12\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)$$

$$+ 12 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} + 12\right)}{12\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg\}$$

simplify(%)

$$\Bigg\{ C1 = -C3,\ C2 \tag{12}$$

$$= \Bigg(2\, C3 \Bigg(\frac{1}{2}\Bigg(\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{2/3} + 12\right)}{12\left(108\, m^3 + 12\sqrt{81\, m^6 + 12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg(\Bigg(108\, m^3$$

$$+ 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3} + 12\Big)\Bigg) + \frac{1}{2}\Bigg(\Big(\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3}$$

$$- 12\Big)\Bigg(2\,\mathrm{e}^{\frac{\left(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3} - 12}{4\left(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}$$

$$+ \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\sqrt{3}\,\Big(\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3}$$

$$+ 12\Big)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{1/3}}\right) - \Big(\Big(108\,m^3$$

$$+ 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3} - 12\Big)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg\}$$

#Substituímos las constantes

$$v := (t, m) \rightarrow u\Bigg(t, m, a, b, c, -1,$$

$$2\Bigg(\Bigg(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108\,m^3 + 12\sqrt{81\,m^6 + 12}\,\Big)^{1/3}}\right)\right)\Big(\Big(108\,m^3$$

$$+ 12 \sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big)\Bigg) + \frac{1}{2}\Bigg(\Big(\Big(108 m^3 + 12 \sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3}$$

$$- 12\Big)\left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6+12}\right)^{2/3} - 12}{4\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6+12}\right)^{1/3}}}\right.$$

$$+ \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\sqrt{3}\,\Big(\Big(108 m^3$$

$$+ 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{1/3}}\right)$$

$$- \Big(\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3}$$

$$- 12\Big)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg), 1\Bigg):$$

$$v(1, m)$$

$$-\mathrm{e}^{\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{1/3}}{6} - \frac{2}{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\right)^{1/3}}}$$

$$+ \Bigg(\Bigg(\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,\Big(\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big)}{12\,\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{1/3}}\right)\Big(\Big(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6 + 12}\Big)^{2/3} + 12\Big) -$$

$$- 12\Big)\left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6+12}\right)^{2/3} - 12}{4\left(108 m^3 + 12\sqrt{81 m^6+12}\right)^{1/3}}}\right.$$

$$+\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)$$

$$e^{-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\sin\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\left(1/\right.\right.\right.$$

$$6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}\right.$$

$$\left.+12\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)-\left(\left(108\,m^3\right.\right.$$

$$\left.+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\Big)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)$$

$$+e^{-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}{12}+\frac{1}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right.\right.$$

$$\left(1/6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

simplify(%)

$$\Bigg(-\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}\right. \tag{14}$$

$$\left.+12\right)$$

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\right.$$

$$\left.-\mathrm{e}^{-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\right)\sqrt{3}$$

$$+3\,\mathrm{e}^{\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\sin\left(\frac{1}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\left(\sqrt{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)\right)\right)\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)\Bigg)$$

$$\Bigg/\left(\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}\right.\right.$$

$$\left.+12\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)-\left(\left(108\,m^3\right.\right.$$

$$\left.\left.+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\Bigg)$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

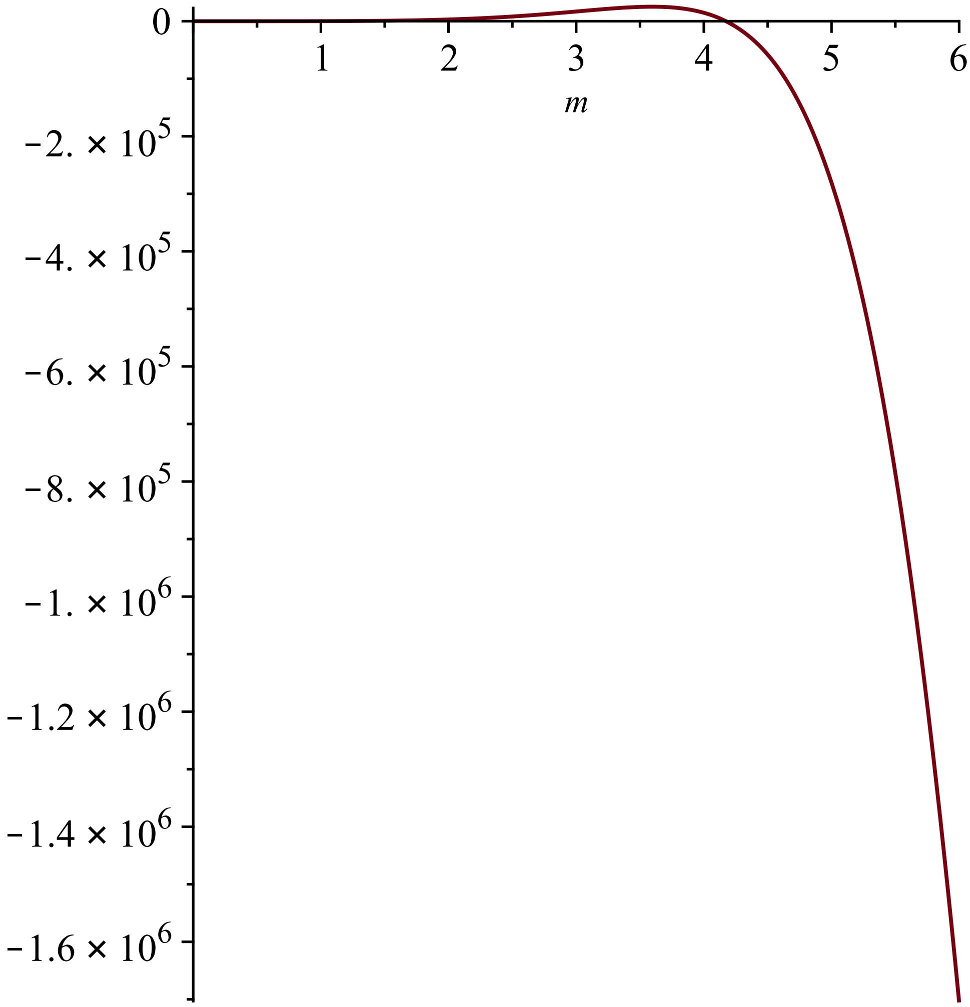
$$plot\left(-\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}\right.\right.$$

$$\left.+12\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\right.$$

$$\left.-\mathrm{e}^{-\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}\right)\sqrt{3}$$

$$+3\sin\left(\frac{\sqrt{3}\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}+12\right)}{12\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12}{6\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{1/3}}}$$

$$\left.\left(\left(108\,m^3+12\sqrt{81\,m^6+12}\right)^{2/3}-12\right),\ m=0..6\right)$$



$fsolve(v(1, m) = 0, m = 4..5)$

$$4.172914962 \tag{15}$$

restart
#Vamos a estudiar la disconjugación de la ecuación u''''+Mu=0
#Caso M>0
#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 + m^4 = 0$

$eq := x^4 + m^4 :$

$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right) m, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right) m, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right) m, \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right) m \qquad \textbf{(1)}$$

#Escribimos la solución general, su primera derivada y su segunda derivada

$a := -\frac{m}{\mathrm{sqrt}(2)} :$

$b := \frac{m}{\mathrm{sqrt}(2)} :$

$c := \frac{m}{\mathrm{sqrt}(2)} :$

$d := \frac{m}{\mathrm{sqrt}(2)} :$

$u := (t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) \rightarrow C1 \cdot \exp(a \cdot t) \cdot \cos(b \cdot t) + C2 \cdot \exp(a \cdot t) \cdot \sin(b \cdot t) + C3 \cdot \exp(c \cdot t) \cdot \cos(d \cdot t) + C4 \cdot \exp(c \cdot t) \cdot \sin(d \cdot t) :$

$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4), t)$

$$u1 := -\frac{C1\, m \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} - \frac{C1\, \mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\, m \sqrt{2} \sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} - \frac{C2\, m \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} \sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} + \frac{C2\, \mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\, m \sqrt{2} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} + \frac{C3\, m \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} - \frac{C3\, \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\, m \sqrt{2} \sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} + \frac{C4\, m \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} \sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} + \frac{C4\, \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\, m \sqrt{2} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

$simplify(\%)$

$$-\frac{1}{2}\left(m\left(\left((C1 - C2)\,\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}(C3 + C4)\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right) + \sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\left((C1 + C2)\,\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}(C3 - C4)\right)\right)\sqrt{2}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

$$u2 := diff\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(m\sqrt{2}\left(\left((C1 - C2)\,\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}(C3 + C4)\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\right.\right.\right.$$

$$+\sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\left((C1+C2)\,e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}+e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,(C3-C4)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg], t\Bigg)$$

$$u2 := -\frac{1}{2}\Bigg(m\Bigg(\Bigg(-\frac{(C1-C2)\,m\sqrt{2}\,e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}}{2} - \frac{m\sqrt{2}\,e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,(C3+C4)}{2}\Bigg)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right) - \frac{\left((C1-C2)\,e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}-e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,(C3+C4)\right)m\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)}{2} + \frac{m\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\left((C1+C2)\,e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}+e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,(C3-C4)\right)}{2} + \sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\left(-\frac{(C1+C2)\,m\sqrt{2}\,e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}}{2}+\frac{m\sqrt{2}\,e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,(C3-C4)}{2}\right)\Bigg)\sqrt{2}\Bigg) \qquad \textbf{(4)}$$

simplify(%)

$$-m^2\left(\sin\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\left(e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,C3-e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,C1\right)-\left(e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,C4-e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}\,C2\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}\right)\right) \qquad \textbf{(5)}$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k impar porque u''''=-Mu y M>0, es decir los autovalores son negativos, es decir tenemos los casos n=4 y k=3, y el caso n=4 y k=1
#Primero resolveremos el caso n=4 y k=3
#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u'(0)=u''(0)=0=u(1)

$solve(\{u(0, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) = 0, simplify(subs(t=0, u1)) = 0, simplify(subs(t=0, u2)) = 0\}, \{C1, C2, C3\})$

$$\{C1 = C4, C2 = C4, C3 = -C4\} \qquad \textbf{(6)}$$

#Substituímos las constantes

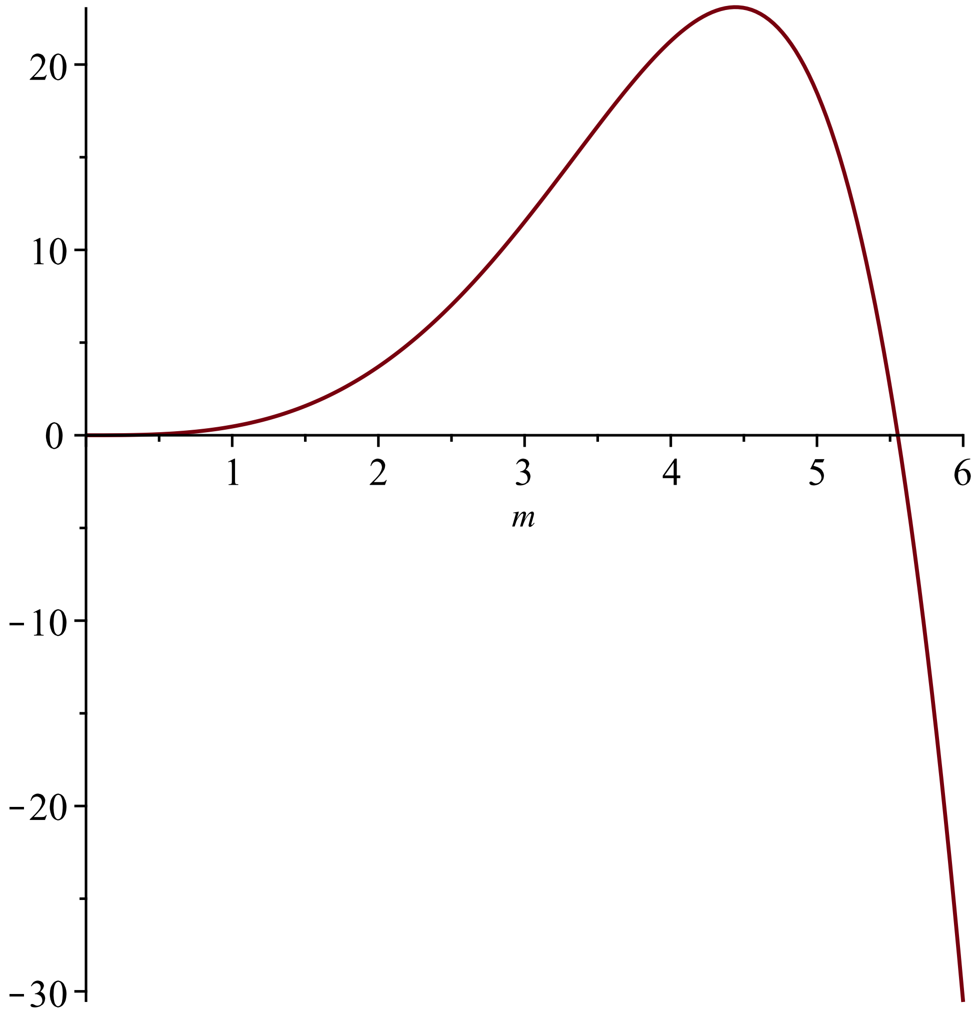
$v := (t, m) \rightarrow u(t, m, a, b, c, d, 1, 1, -1, 1) :$

$v(1, m)$

$$e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)+e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)-e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)+e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \textbf{(7)}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

$plot(v(1, m), m = 0..6)$



$fsolve(v(1, m) = 0, m = 5..6)$

$$5.553054244 \tag{8}$$

#Segundo resolveremos el caso n=4 y k=1

$clear(C1, C2, C3, C4, m)$:

#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=0=u(1)=u'(1)=u''(1)

$solve(\{u(0, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) = 0, simplify(subs(t = 1, u1)) = 0, simplify(subs(t = 1, u2)) = 0\}, \{C1, C2, C3\})$

$$\Bigg\{ C1 = \left(2 \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 C4\, e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\right) \Bigg/ \left(\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}} + \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}} \right. \tag{9}$$

$$\left. - 2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2\right.$$

$$+\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\Bigg)\Bigg), C2 = \Bigg(C4\,\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\Bigg(\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}$$

$$+\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}+2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\Bigg(\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}+\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}$$

$$-2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}$$

$$+\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\Bigg)\Bigg), C3 = -\left(2\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}C4\,\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\right)\Bigg/$$

$$\Bigg(\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}+\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}-2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\mathrm{e}^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\Bigg)\Bigg\}$$

simplify(%)

$$\left\{C1 = -\frac{2\,C4\,\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^{2}}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)-\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}-1}, C2 =\right. \qquad \mathbf{(10)}$$

$$-\frac{C4\, e^{m\sqrt{2}} \left(2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) + e^{m\sqrt{2}} + 1\right)}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}, C3$$

$$= \frac{2\, C4\, e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}\Bigg\}$$

#Substituímos las constantes

$$w := (t, m) \rightarrow u\left(t, m, a, b, c, d, -\frac{2\, e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1},\right.$$
$$-\frac{e^{m\sqrt{2}} \left(2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) + e^{m\sqrt{2}} + 1\right)}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1},$$
$$\left.\frac{2\, e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}, 1\right):$$

$w(1, m)$

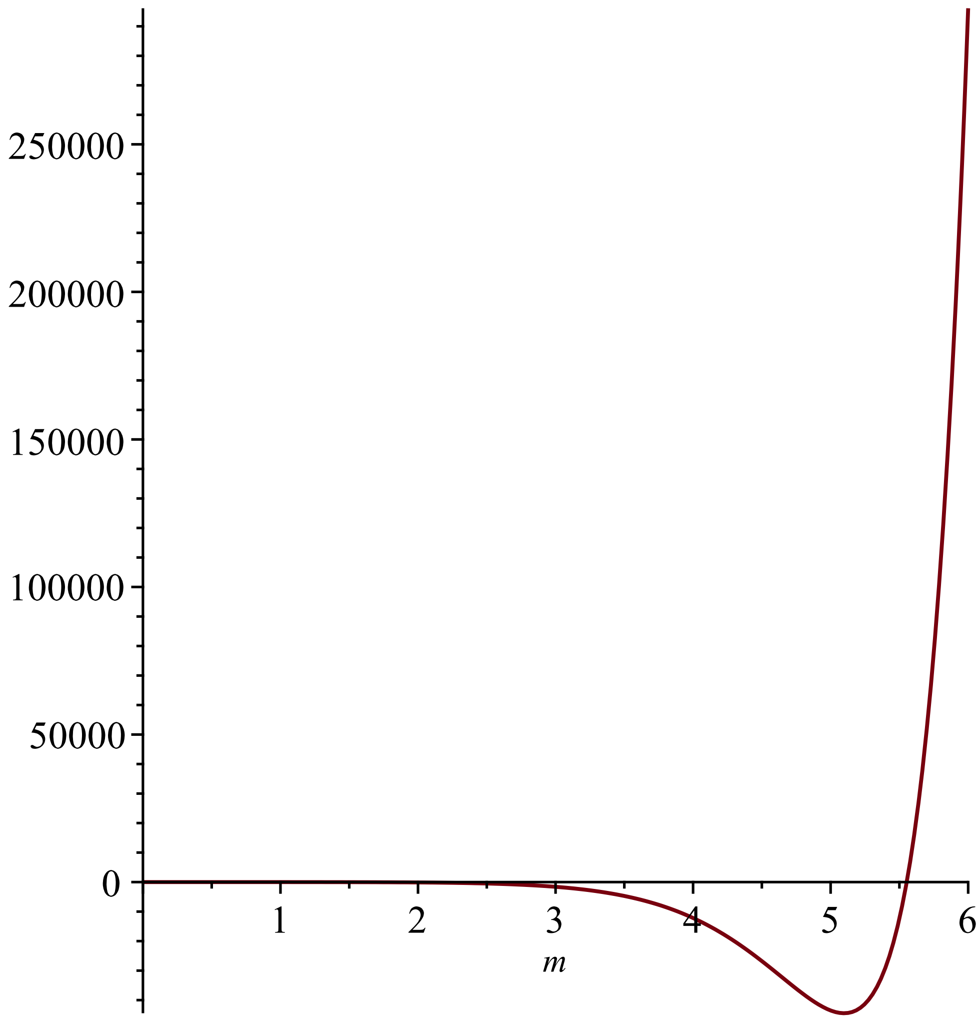
$$-\frac{2\, e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^3 e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}}}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}$$
$$-\frac{e^{m\sqrt{2}} \left(2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) + e^{m\sqrt{2}} + 1\right) e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}} \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1}$$
$$+\frac{2\, e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^3 e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}}{2 \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) e^{m\sqrt{2}} \cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) - e^{m\sqrt{2}} - 1} + e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}} \sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \tag{11}$$

simplify(%)

$$\frac{2\,\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}\left(\left(\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}-1\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)-\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}+1\right)\right)}{2\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)-\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}-1} \tag{12}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

$$plot\left(2\left(\left(\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}-1\right)\cos\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)-\sin\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathrm{e}^{m\sqrt{2}}+1\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{m\sqrt{2}}{2}}, m=0..6\right)$$



$fsolve(w(1, m) = 0, m = 5..6)$

$$5.553054244 \tag{13}$$

restart

#Caso M<0

#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 - m^4 = 0$

$eq := x^4 - m^4 :$

$solve(eq, x)$ assuming $m > 0$

$$m, -m, \mathrm{I}\,m, -\mathrm{I}\,m \tag{14}$$

#Escribimos la solución general y su derivada

$a := -m :$

$b := m:$
$c := 0:$
$d := m:$
$u := (t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) \rightarrow C1 \cdot \exp(a \cdot t) + C2 \cdot \exp(b \cdot t) + C3 \cdot \exp(c \cdot t) \cdot \cos(d \cdot t) + C4 \cdot \exp(c \cdot t) \cdot \sin(d \cdot t):$
$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4), t)$

$$u1 := -C1\, m\, e^{-m t} + C2\, m\, e^{m t} - C3\, m \sin(m t) + C4\, m \cos(m t) \tag{15}$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k par porque u''''=-Mu y M<0, es decir los autovalores son positivos
#Estamos en el caso n=4 y k=2
#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u'(0)=0=u(1)=u'(1)
$solve(\{u(0, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) = 0, simplify(subs(t = 0, u1)) = 0, simplify(subs(t = 1, u1)) = 0\}, \{C1, C2, C3\})$

$$\left\{C1 = -\frac{C4\,(\sin(m) - \cos(m) + e^{m})}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)}, C2 = -\frac{C4\,(e^{-m} - \sin(m) - \cos(m))}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)}, C3 = \frac{C4\,(e^{-m} + e^{m} - 2\cos(m))}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)}\right\} \tag{16}$$

#Substituímos las constantes
$$v := (t, m) \rightarrow u\left(t, m, a, b, c, d, -\frac{(\sin(m) - \cos(m) + e^{m})}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)}, -\frac{(e^{-m} - \sin(m) - \cos(m))}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)}, \frac{(e^{-m} + e^{m} - 2\cos(m))}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)}, 1\right):$$

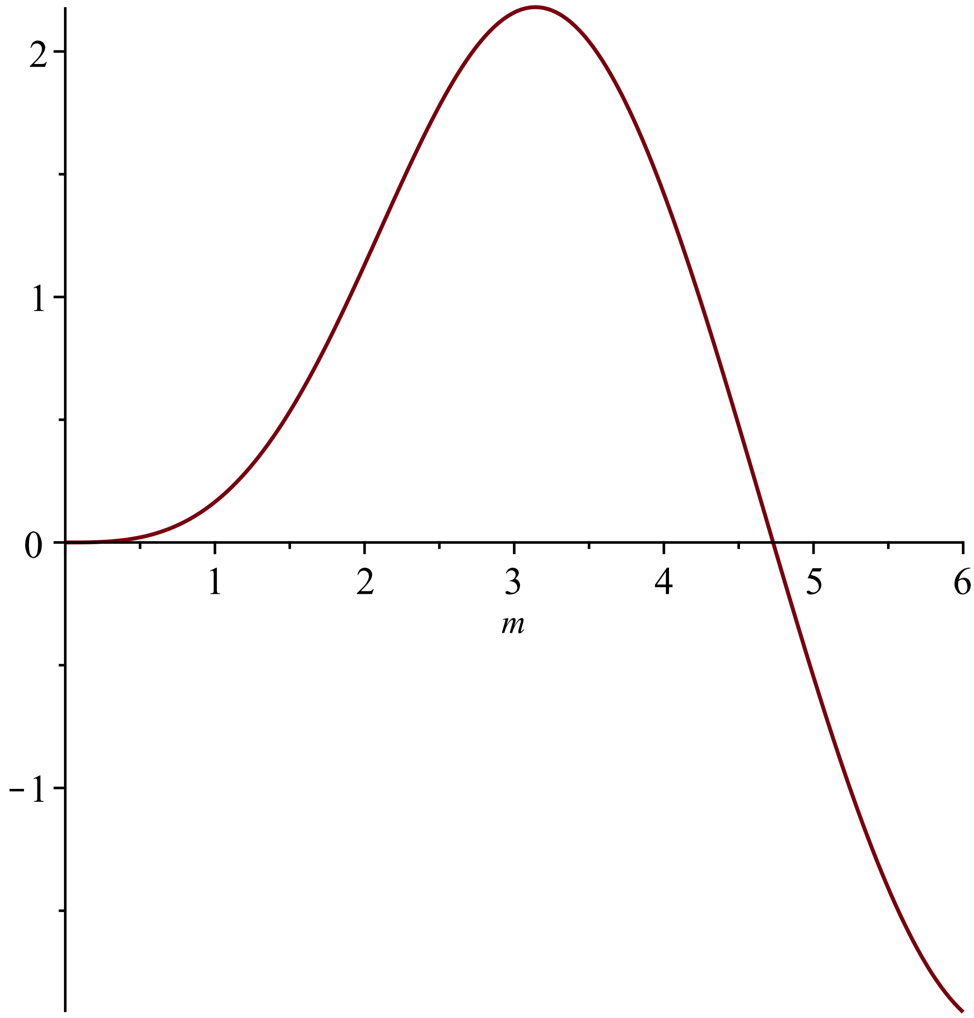
$v(1, m)$

$$-\frac{(\sin(m) - \cos(m) + e^{m})\, e^{-m}}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)} - \frac{(e^{-m} - \sin(m) - \cos(m))\, e^{m}}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)} + \frac{(e^{-m} + e^{m} - 2\cos(m))\cos(m)}{e^{-m} - e^{m} - 2\sin(m)} + \sin(m) \tag{17}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{-2\, e^{2m}\cos(m) + 4\, e^{m} - 2\cos(m)}{e^{2m} + 2\sin(m)\, e^{m} - 1} \tag{18}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0
$plot(v(1, m), m = 0..6)$



$fsolve(v(1, m) = 0, m = 4..5)$

$$4.730040745 \tag{19}$$

restart
#Vamos a estudiar la disconjugación de la ecuación u''''-8u''+Mu=0
#Caso M>0
#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^4 - 8x^2 + m^4 = 0$

$eq := x^4 - 8x^2 + m^4 :$

$solve(eq, x)$ assuming $0 < m < 2$

$$\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}},\ -\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}},\ \sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}},\ -\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}} \quad \textbf{(1)}$$

$a := \sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}} :$

$b := -\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}} :$

$c := \sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}} :$

$d := -\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}} :$

$u := (t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) \to C1\cdot\exp(a\cdot t) + C2\cdot\exp(b\cdot t) + C3\cdot\exp(c\cdot t) + C4\cdot\exp(d\cdot t) :$

$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4), t)$

$$u1 := C1\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,t} - C2\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,t} + C3\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,t} - C4\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,t} \quad \textbf{(2)}$$

$$u2 := diff\Big(C1\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,t} - C2\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,t} + C3\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,t} - C4\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,t}, t\Big)$$

$$u2 := C1\left(4+\sqrt{-m^4+16}\right)e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,t} + C2\left(4+\sqrt{-m^4+16}\right)e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,t} + C3\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,t} + C4\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,t} \quad \textbf{(3)}$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k impar porque u''''+8u''=-Mu y M>0, es decir los autovalores son negativos, es decir tenemos los casos n=4 y k=3, y el caso n=4 y k=1
#Primero resolveremos el caso n=4 y k=3
#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u'(0)=u''(0)=0=u(1)

$solve(\{u(0, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) = 0, simplify(subs(t=0, u1)) = 0, simplify(subs(t=0, u2)) = 0\}, \{C1, C2, C3\})$

$$\left\{C1 = -\frac{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,\left(-4+\sqrt{-m^4+16}\right)C4}{m^4},\ C2 = \frac{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,\left(-4+\sqrt{-m^4+16}\right)C4}{m^4},\ C3 = -C4\right\} \quad \textbf{(4)}$$

$simplify(\%)$

$$\left\{C1 = \frac{\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)^{3/2}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\,C4}{m^4},\ C2 = \right. \quad \textbf{(5)}$$

$$-\frac{\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)^{3/2}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\ C4}{m^4},\ C3=-C4\Big\}$$

#Substituímos las constantes

$$v := (t,m) \rightarrow u\left(t,m,a,b,c,d,\frac{\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)^{3/2}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}{m^4},\right.$$
$$\left.-\frac{\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)^{3/2}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}{m^4},-1,1\right):$$

$v(1, m)$

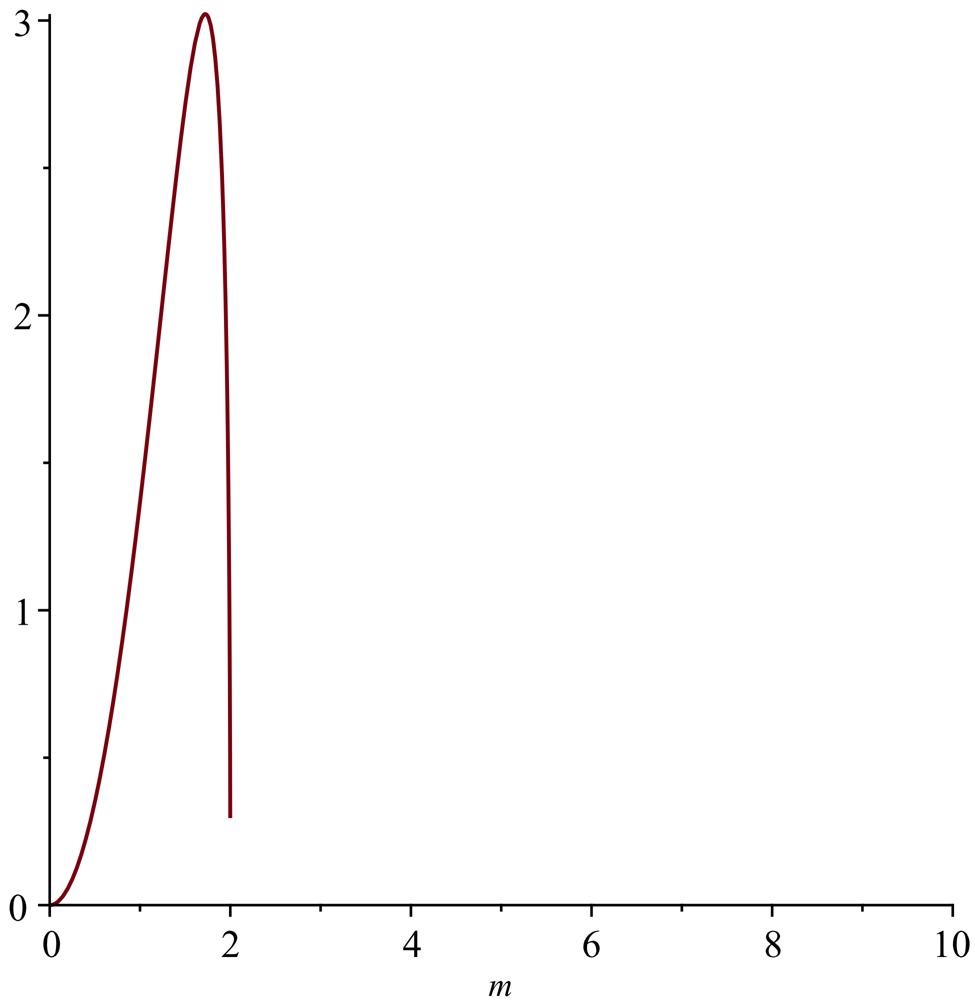
$$\frac{\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)^{3/2}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\ \mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}{m^4} - \frac{\left(4-\sqrt{-m^4+16}\right)^{3/2}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\ \mathrm{e}^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}{m^4} - \mathrm{e}^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}} \tag{6}$$

simplify(%)

$$\frac{1}{m^4}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\, m^4 - \mathrm{e}^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\, m^4 - \sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\right)\left(-4+\sqrt{-m^4+16}\right)\right) \tag{7}$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1) = 0

$plot(v(1, m), m = 0..10)$



fsolve$(v(1, m) = 0, m = 0..2)$

$$2.000000000 \tag{8}$$

clear$(C1, C2, C3, C4, m)$:
#Segundo resolveremos el caso n=4 y k=1
#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=0=u(1)=u'(1)=u''(1)
solve$(\{u(1, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) = 0, simplify(subs(t = 1, u1)) = 0, simplify(subs(t = 1, u2)) = 0\}, \{C1, C2, C3\})$

$$\left\{C1 = \frac{C4\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}, C2 = -\frac{C4\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\,e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}, C3 = -\frac{C4\,e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}\right\} \tag{9}$$

#Substituímos las constantes

$$w := (t, m) \rightarrow u\left(t, m, a, b, c, d, \frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}, -\frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}}, -\frac{e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}, 1\right):$$

$w(0, m)$

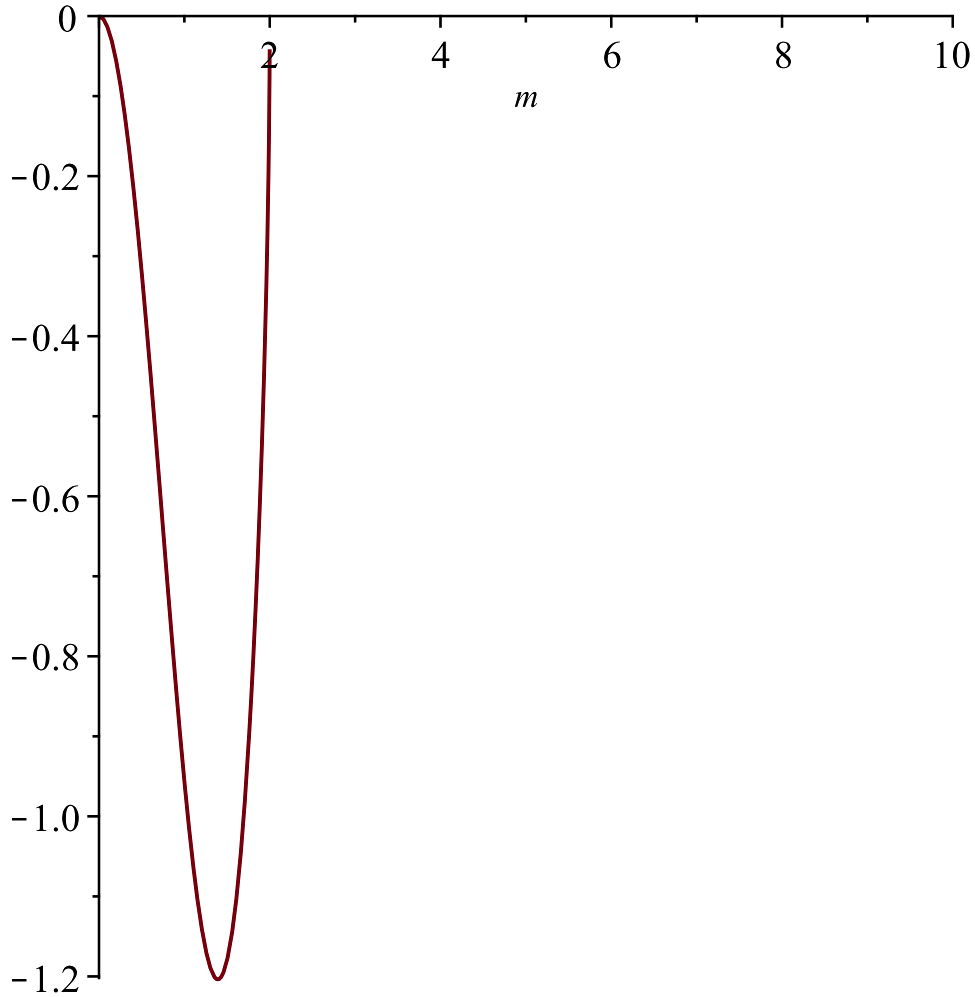
$$\frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} - \frac{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}} - \frac{e^{-\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}}{e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}} + 1 \tag{10}$$

simplify(%)

$$\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}}\left(e^{-2\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\left(\left(e^{\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}-\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}} - e^{\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}+\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\right)\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}} + e^{2\sqrt{4-\sqrt{-m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}} - \sqrt{4+\sqrt{-m^4+16}}\right)\right) \tag{11}$$

#Representación de u(0) y búsqueda del menor M tal que u(0)=0

plot$(w(0, m), m = 0 ..10)$



$fsolve(w(0,m)=0, m=1..3)$

$$2.000000000 \tag{12}$$

restart
#Caso M<0
#Calculamos las raíces del polinomio característico $x^4-8x^2-m^4=0$
$eq := x^4-8x^2-m^4:$
$solve(eq, x)$ assuming $m>0$

$$\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}},\ -\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}},\ \mathrm{I}\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4},\ -\mathrm{I}\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4} \tag{13}$$

#Escribimos la solución general y su derivada
$a := \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}:$
$b := -\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}:$
$c := 0:$
$d := \sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}:$
$u := (t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4) \rightarrow C1\cdot\exp(a\cdot t)+C2\cdot\exp(b\cdot t)+C3\cdot\exp(c\cdot t)\cdot\cos(d\cdot t)+C4\cdot\exp(c\cdot t)\cdot\sin(d\cdot t):$
$u1 := diff(u(t, m, a, b, c, d, C1, C2, C3, C4), t)$

$$u1 := C1\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\, e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\, t} - C2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\, e^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\, t} - C3\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\, t\right) + C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\, t\right) \tag{14}$$

#Solo hay que buscar autovalores para el caso n-k par porque u''''-8u''=-Mu y M<0, es decir los autovalores son positivos

#Estamos en el caso n=4 y k=2

#Calculamos el valor de las constantes para las condiciones de frontera u(0)=u'(0)=0=u(1)=u'(1)

solve({*u*(0, *m*, *a*, *b*, *c*, *d*, *C1*, *C2*, *C3*, *C4*) = 0, *simplify*(*subs*(*t* = 0, *u1*)) = 0, *simplify*(*subs*(*t* = 1, *u1*)) = 0}, {*C1*, *C2*, *C3*})

$$\left\{ C1 = \left(C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\left(e^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} - \sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\right)\right) \Big/ \left(\left(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} - e^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right), C2 = \left(C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\left(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + \sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\right)\right) \Big/ \left(\left(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} - e^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right), C3 = -\left(C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\left(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\right.\right.\right. \tag{15}$$

$$+ e^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - 2\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Big)\Big)\Big) \Big/ \left(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right.$$

$$\left. - e^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Big\}$$

simplify(%)

$$\Big\{ C1 = -\Big(C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\Big(\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} \tag{16}$$

$$+\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Big)\Big) \Big/$$

$$\Big(\Big(e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}$$

$$+2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Big)$$

$$\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Big), C2 = \Big(C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\Big(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}$$

$$+\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}$$

$$-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Big)e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\Big) \Big/$$

$$\Big(\Big(e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}$$

$$+2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Big)$$

$$\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Big), C3 = \Big(C4\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\Big(-e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}$$

$$+2e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)-1\Big)\Big) \Big/$$

$$\left(e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\; e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right)\Big\}$$

#Substituímos las constantes

$$v := (t, m) \rightarrow u\Bigg(t, m, a, b, c, d, -\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\left(\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\; e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} + \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right) e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right)\right) \Big/ \left(\left(e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\; e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right), \left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\left(e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + \sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\right) e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\right) \Big/ \left(\left(e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\; e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right), \left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\left(-e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} + 2\, e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right) - 1\right)\right) \Big/ \left(e^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} + 2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\; e^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} - \sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\right), 1\Bigg):$$

$v(1, m)$

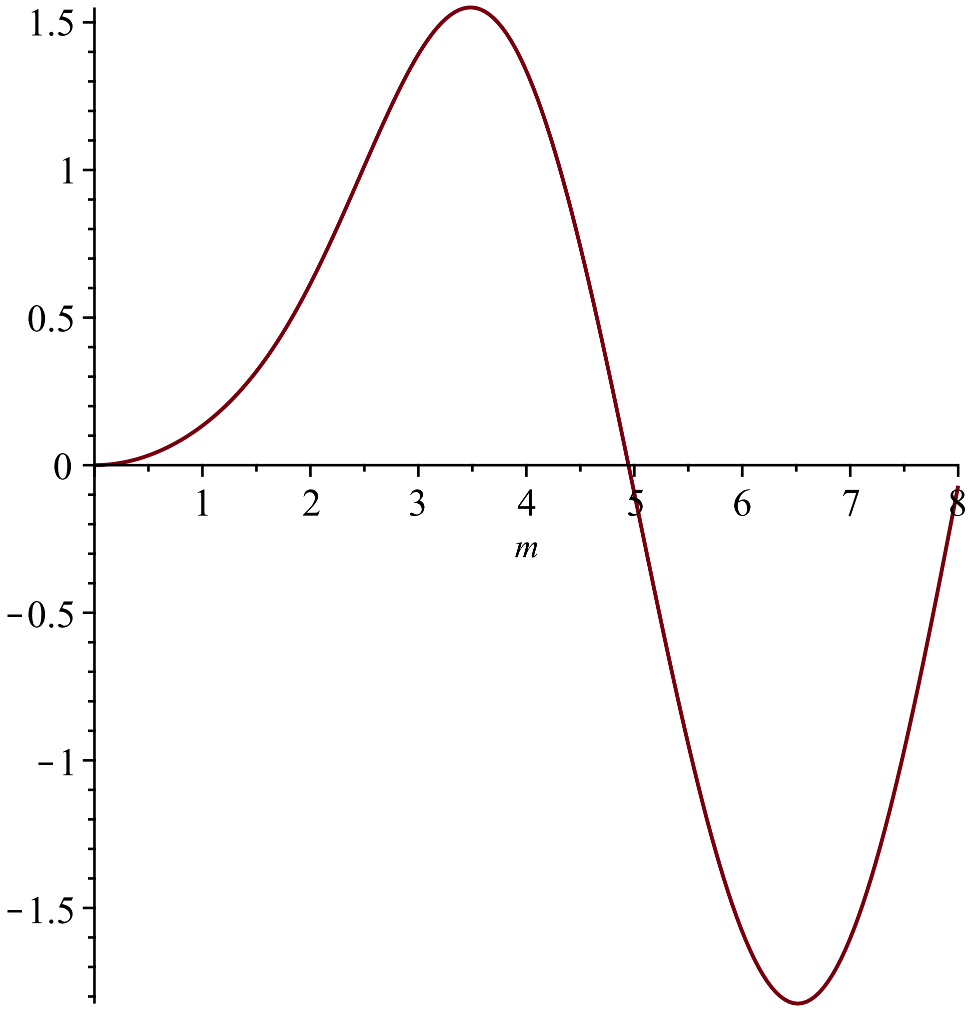
$$
\begin{aligned}
&-\Bigg(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\Bigg(\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\;\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} \\
&\quad+\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\,\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Bigg) \\
&\quad\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\Bigg)\Bigg/\Bigg(\Bigg(\mathrm{e}^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
&\quad+2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\;\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Bigg) \\
&\quad\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Bigg)+\Bigg(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\Bigg(\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
&\quad+\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4} \\
&\quad-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\,\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Bigg)\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\;\mathrm{e}^{-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\Bigg)\Bigg/ \\
&\quad\Bigg(\Bigg(\mathrm{e}^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
&\quad+2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\;\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Bigg) \\
&\quad\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Bigg)+\Bigg(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\Bigg(-\mathrm{e}^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} \\
&\quad+2\,\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)-1\Bigg)\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Bigg)\Bigg/ \\
&\quad\Bigg(\mathrm{e}^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
&\quad+2\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\;\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}-\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\Bigg) \\
&\quad+\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

simplify(%)

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\Bigg(-2\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
&\quad+8\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Bigg)\mathrm{e}^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}} \\
&\quad-2\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\,\cos\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}} \\
&\quad+4\,\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}-8\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\Bigg)\Bigg/ \\
&\quad\Bigg(2\,\mathrm{e}^{\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\sin\left(\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4}\right)\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}\sqrt{\sqrt{m^4+16}-4} \\
&\quad+\mathrm{e}^{2\sqrt{4+\sqrt{m^4+16}}}\left(4+\sqrt{m^4+16}\right)-4-\sqrt{m^4+16}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

#Representación de u(1) y búsqueda del menor M tal que u(1)=0

plot$(v(1,m),\ m=0..8)$



$fsolve(v(1, m) = 0, m = 4 ..5)$

$$4.946180870 \tag{19}$$

Bibliografía

[1] N.V. Azbelev *On the question of an estimate of the number of zeros of solutions of the equation* $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, NOVSh, fiz. -matem. nauki No.3 (1958), 5-7.

[2] R. Bellman *A note on the identification of linear systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 68-71.

[3] S.N. Bernstein *The basis of a Chebyshev system*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. (1938), 499-504.

[4] Cabada, Alberto *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations*, SpringerBriefs in Mathematics. Springer, New York, 2014.

[5] Cabada, Alberto; Saavedra, Lorena *Disconjugacy characterization by means of spetral* $(k, n-k)$ *problems.* Appl. Math. Lett. 52 (2016), 21–29.

[6] Cabada, Alberto; Saavedra, Lorena *The eigenvalue characterization for the constant sign Green's functions of* $(k, n-k)$ *problems.* Bound. Value Probl. 2016, Paper No. 44, 35 pp.

[7] S.A. Chaplygin *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii*, (A new method of approximate integration of differential equations), GTTI, Moscow - Leningrad 1932.

[8] W. A. Coppel, *Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 220. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[9] P. Hartman *Unrestricted n-parameter families*, Rend. Circ. Mat. Palermo 7 (1958), 123-142.

[10] P. Hartman and A. Wintner *Mean value theorems and linear operators*, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 217-222.

[11] V.A. Kondrat'ev *Oscillation of solutions of linear equations of third and fourth order*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. 8 (1959), 259-281.

[12] M.G. Krein *Sur les operateurs differentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symetriques*, Mat. Sb. 2 (1937), 1023-1072.

[13] A. Yu. Levin *Non-Oscillation of solutions of the equations* $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$, Soviet Math. Surveys 24 2 (1969), 43-96.

[14] G. Mammana *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzi ali lineari*, Math. Z. 33 (1931). 186-231.

[15] I. Mikusinski *Sur l'equation* $x(n) + A(t)x = 0$, Ann. Polon. Math. I (1955). 207-221.

[16] G. Pólya *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1924). 312-324.

[17] C. de la Vallee-Poussin *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre* n. J. Math. Pures Appl. 8 (1929), 125-144.

[18] N.F.. Zhukovskli *Conditions of finiteness of integrals of the equation* $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$. Mat. Sb. 3 (1892). 582-591.