

LA VERDAD MATEMÁTICA¹

Paul Benacerraf

Aunque este simposio se titula “La verdad matemática”, también trataré temas que son algo más amplios pero que, no obstante, tienen la noción de verdad matemática como núcleo, los cuales dependen de cómo explicar adecuadamente la verdad en matemática. El más importante de estos es el conocimiento matemático. Sostengo que dos clases de preocupaciones, bastante distintas, han motivado separadamente las explicaciones de la naturaleza de la verdad matemática: (1) la preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje²,

Recibido: 08/04/05. Aceptado: 10/10/05

¹ Presentado en un simposio sobre la verdad matemática, patrocinado conjuntamente por la American Philosophical Association, Eastern Division, y la Association for Symbolic Logic, el 27 de diciembre de 1973. Varias partes de una versión anterior (1967) de esta ponencia fueron leídas en Berkeley, Harvard, Chicago Circle, John Hopkins, New York University, Princeton y Yale. Estoy agradecido por la ayuda que recibí en estas ocasiones, así como por muchos comentarios de mis colegas de Princeton, tanto de estudiantes como de profesorado. En particular, estoy en deuda con Richard Grandy, Hartry Field, Adam Morton y Mark Steiner. Que estos comentarios no hayan dado como resultado mejoras más significativas se debe totalmente a mi tozudez. La presente versión es un intento de resumir lo esencial de la ponencia más larga, y a la vez de introducir pequeñas mejoras. La versión original fue escrita durante el curso 1967/68 con el generoso apoyo de la fundación John Simon Guggenheim y la Universidad de Princeton. Lo reconozco con agradecimiento. Reimpreso con el amable permiso de los editores del *Journal of Philosophy* 70 (1973): 661-80. [Esto último se refiere a la publicación del artículo en P. Benacerraf y H. Putnam, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Cambridge University Press, 1983 (2ª ed.), versión que hemos tomado como referencia por ser posterior. (T.)]

² Me permito la ficción de que disponemos de una semántica “para el resto del lenguaje”, o, más concretamente, de que los seguidores de las concepciones que toman su impulso en

y (2) la preocupación por que la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable. Mi tesis general consistirá en que casi todas las explicaciones del concepto de verdad matemática pueden identificarse como sirviendo a uno u otro de estos propósitos *a expensas del otro*. Puesto que creo, además, que cualquier explicación adecuada debe abordar ambas preocupaciones, me encuentro profundamente insatisfecho con cualquier paquete de semántica y epistemología que pretenda explicar la verdad y el conocimiento tanto dentro como fuera de la matemática. Ya que, como sugeriré, las explicaciones de la verdad que tratan el discurso matemático y el no-matemático de manera significativamente parecida, lo consiguen al precio de dejar sin explicar cómo podemos tener algún conocimiento matemático en absoluto; mientras aquellas que atribuyen a las proposiciones matemáticas el tipo de condiciones de verdad que está claro que sabemos obtener, lo consiguen a expensas de fracasar a la hora de conectar estas condiciones con algún análisis de los enunciados que muestre cómo las condiciones asignadas son condiciones de su *verdad*. Lo que quiere decir esto debe, en última instancia, explicarse con detalle si he de precisar mi postura, y no puedo esperar realizarlo dentro de este contexto limitado. Pero trataré de dejarlo lo suficientemente claro para permitirles juzgar si hay o no algo de aceptable en mi pretensión.

Considero obvio que cualquier explicación filosóficamente satisfactoria de la verdad, la referencia, el significado y el conocimiento debe abarcar todos estos conceptos y debe ser adecuada para todas las proposiciones a las que estos conceptos se aplican³. Una explicación del conocimiento que *parece* funcionar para ciertas proposiciones empíricas sobre objetos físicos de tamaño medio, pero que falla a la hora de explicar el conocimiento más teórico, es insatisfactoria; no sólo porque sea incompleta, sino porque también puede ser incorrecta, incluso como una explicación de las cosas que

esta preocupación, piensan en ellos mismos como si estuvieran en posesión de tal semántica, al menos para partes del lenguaje filosóficamente importantes.

³ De hecho, no tendré nada que decir sobre el significado en este artículo. Creo que el concepto tiene una mala reputación muy merecida, pero no lo evito por eso. Trabajos recientes, siendo el de Kripke el más notable, sugieren que lo que pasó por ser el significado durante mucho tiempo —a saber, el “sentido” fregeano— tiene menos que ver con la verdad de lo que Frege o sus inmediatos seguidores pensaron que tenía. La referencia es lo que, presumiblemente, está más estrechamente conectado con la verdad, y es por *esta* razón por la que limitaré mi atención a la referencia. Si se concede que puede darse un cambio de referencia sin un cambio correspondiente de significado, y que la verdad es una cuestión de referencia, entonces hablar de significado queda muy lejos del conjunto de problemas que nos ocupan en este artículo. Estos comentarios no pretenden ser argumentos, sólo explicaciones.

(3) Hay al menos tres elementos de FG que tienen la relación R con a , donde ‘Hay al menos tres’ es un cuantificador numérico eliminable del modo habitual por medio de cuantificadores existenciales, variables e identidad, y donde ‘ F ’ y ‘ G ’ han de ser reemplazados por predicados monádicos, ‘ R ’ por un predicado diádico, y ‘ a ’ por el nombre de un elemento del universo de discurso de los cuantificadores? ¿Cuáles son las condiciones de verdad de (1) y (2)? ¿Son significativamente análogas? Ignoremos tanto la vaguedad de ‘grandes’ como la de ‘más antiguas que’ y las peculiaridades de las construcciones atributivo-adjetivas que hacen de una ciudad grande, no una ciudad y algo grande, sino más bien (aunque no exactamente) algo que es grande *para ser* una ciudad. Dejando de lado esas complicaciones, parece claro que (3) refleja correctamente la forma de (1) y, así, que (1) será verdadera si y sólo si la cosa nombrada por la expresión que reemplaza a ‘ a ’ (‘Nueva York’) tiene la relación designada por la expresión que reemplaza a ‘ R ’ (‘① es más antigua que ②’) con al menos tres elementos (del dominio de discurso de los cuantificadores) que satisfacen los predicados que reemplazan a ‘ F ’ y ‘ G ’ (‘grande’ y ‘ciudad’, respectivamente). Esto, infiero, es lo que una definición de verdad apropiada nos diría. Y creo que es correcto. Así, si (1) es verdadera, es porque ciertas ciudades están en ciertas relaciones con las demás, etc.

Pero, ¿qué decir de (2)? ¿Podemos usar (3) de la misma manera como matriz a la hora de explicar con detalle las condiciones de su verdad? Eso parece una pregunta tonta cuya respuesta obvia es: “por supuesto”. Con todo, la historia de la materia (la filosofía de la matemática) ha contemplado muchas otras respuestas. Algunos (incluido uno de mis yoes pasados y presentes⁴), reacios a afrontar las consecuencias de combinar lo que llamaré una explicación semántica “estándar” con una concepción platonista de la naturaleza de los números, han temido la suposición de que los numerales sean nombres y, así, por implicación, la de que (2) tenga la forma de (3). David Hilbert (1926) eligió una aproximación distinta, pero igualmente divergente, en su intento de alcanzar una explicación satisfactoria del uso de la noción de infinito en matemática. Desde cierta perspectiva, Hilbert separa una clase de métodos y enunciados, los de la matemática “intuitiva”, como aquellos que no necesitan más justificación. Supongamos que todos ellos sean “finitamente verificables” en algún sentido no especifi-

⁴ Véase mi “What Numbers Could Not Be”. *The Philosophical Review* 74 (1965), 47-73. [También incluido en la compilación de Putnam y Benacerraf mencionada en la nota 1. Hay traducción castellana de X. Arnavat y F. Rodríguez Consuegra en *Mathesis* 9 (1993), 317-343 (T).]

cado de manera precisa. Hilbert ve los enunciados de la aritmética que no comparten esta propiedad (típicamente, los que contienen cuantificadores) como instrumentos para pasar de enunciados “reales” o “finitamente verificables” a enunciados “reales”, en gran medida como un instrumentalista considera las teorías en las ciencias naturales como una forma de pasar de enunciados observacionales a enunciados observacionales. A estos enunciados matemáticamente “teóricos”, Hilbert los denominó “elementos ideales”, asemejando su introducción a la de los puntos “en el infinito” de la geometría proyectiva: se introducen como un recurso cómodo para hacer más simple y más elegante la teoría de las cosas que realmente nos importan. Si no llevan a contradicción y si tienen estos otros usos, entonces su introducción está justificada: de ahí la búsqueda de una prueba de consistencia para el sistema completo de la aritmética de primer orden.

Si ésta es una explicación razonable, aunque esquemática, de la concepción de Hilbert, ello indica que no consideró por igual, semánticamente, a todos los enunciados cuantificados. Dar una semántica para la aritmética como él la concibió sería difícil. Pero, difícil o no, seguro que no trataría el cuantificador en (2) de la misma manera que en (1). La concepción de Hilbert, bosquejada así, representa una negación categórica de que (3) sea el modelo de acuerdo con el cual se construye (2).

En otras explicaciones de este estilo, las condiciones de verdad para los enunciados de la aritmética son proporcionadas a modo de derivabilidad formal a partir de conjuntos de axiomas especificados. Cuando se unieron al deseo de atribuir un valor de verdad a cada enunciado cerrado de la aritmética, estas concepciones fueron torpedeadas por los teoremas de incompletud. Pudieron restaurarse al menos en lo que respecta a la consistencia interna, bien mediante la liberalización de lo que cuenta como derivabilidad (p. ej., incluyendo la aplicación de una regla- ω en derivaciones permisibles) o bien mediante el abandono del deseo de completud. Llamaré a tales concepciones, por carecer de un término mejor y porque casi invariablemente encajan en las características sintácticas (combinatorias) de los enunciados, concepciones “combinatorias” de los determinantes de la verdad matemática. La idea principal de las concepciones combinatorias es la de asignar valores de verdad a los enunciados de la aritmética sobre la base de ciertos hechos sintácticos (generalmente demostrativistas⁵) sobre ellos. A menudo,

⁵ Traducimos “proof-theoretic” de este modo por no recurrir a una expresión más larga, apoyándonos también en su similitud con las traducciones, habitualmente aceptadas, de “set-theoretic” por “conjuntista”, y de “model-theoretic” por “modelista” (T).

la verdad se define como la derivabilidad (formal) a partir de ciertos axiomas. (Frecuentemente se formula una pretensión mucho más modesta, la de la verdad-en-*S*, donde *S* es el sistema particular en cuestión.) De todos modos, en tales casos está claro que la verdad no se explica en términos de referencia, denotación o satisfacción. El predicado “verdad” se define sintácticamente.

De manera similar, ciertas concepciones de la verdad en la aritmética en las cuales los axiomas de Peano se reivindicaban como “analíticos” del concepto de número son también “combinatorios” en mi sentido del término. Y lo mismo pasa con las explicaciones convencionalistas, pues lo que las distingue como convencionalistas es el contraste entre ellas y la explicación “realista” que analiza (2) asimilándolo a (1), vía (3).

Finalmente, haciendo una distinción ulterior, una concepción no es automáticamente “combinatoria” si interpreta que las proposiciones matemáticas versan sobre asuntos combinatorios, bien sean autorreferenciales, bien de otro modo. Pues tal concepción podría analizar las proposiciones matemáticas de manera “estándar” en términos de los nombres y cuantificadores que puedan contener y en términos de las propiedades que adscriben a los objetos dentro de sus dominios de discurso (lo cual es decir que el concepto subyacente de *verdad* es esencialmente el de Tarski). La diferencia es que sus defensores, aunque realistas en sus análisis del lenguaje matemático, se separan de los platonistas construyendo el universo matemático como formado exclusivamente por objetos matemáticos heterodoxos: la matemática para ellos se limita a la metamatemática, y ésta a la sintaxis.

Dejaré para secciones posteriores mi valoración de los méritos relativos de estas diversas aproximaciones a la verdad de enunciados tales como (2). En este punto sólo deseo introducir la distinción entre, por una parte, aquellas concepciones que atribuyen la sintaxis obvia (y la semántica obvia) a los enunciados de la matemática, y, por otra, aquellas que, ignorando la sintaxis y la semántica aparentes, tratan de establecer las condiciones de verdad (o de especificar y dar cuenta de la distribución existente de los valores de verdad) sobre la base de lo que evidentemente son consideraciones sintácticas asemánticas. Por último, argüiré que cada tipo de explicación tiene sus virtudes y sus defectos: cada una se dirige hacia un componente importante de una explicación filosófica coherente y global de la verdad y del conocimiento.

Pero, ¿qué son esos componentes, y cómo se relacionan entre sí?

II. Dos condiciones

A. El primer componente de tal concepción global se interesa más directamente por el concepto de verdad. Para nuestro propósito, lo podemos enunciar como el requisito de que haya una teoría global de la verdad en términos de la cual pueda certificarse que la explicación de la verdad matemática sea realmente una explicación de la *verdad* matemática. La explicación debería implicar condiciones de verdad para las proposiciones matemáticas que sean condiciones de su verdad de manera evidente (y no *simplemente*, digamos, de su carácter de teorema en algún sistema formal). Lo que no supone *negar* que ser un teorema de algún sistema pueda ser una condición de verdad para una proposición dada o una clase de proposiciones. Supone, más bien, requerir que cualquier teoría que ofrezca como condición de verdad el carácter de teorema explique también *la conexión entre la verdad y el carácter de teorema*.

Otra manera de expresar este primer requisito es reclamar que cualquier teoría de la verdad matemática sea conforme a una teoría general de la verdad —una teoría de las teorías de la verdad, si se quiere— que certifique que la propiedad de los enunciados que la explicación llama “verdad” sea verdad realmente. Me parece que esto sólo puede hacerse sobre la base de alguna teoría general que abarque al menos el lenguaje en su conjunto (asumo que eludimos las paradojas de alguna manera apropiada). Tal vez la aplicabilidad de este requisito al caso presente equivalga sólo a la petición de que el aparato semántico de la matemática se vea como parte del aparato semántico del lenguaje natural en que se hace y, así, de que cualquier explicación semántica que seamos proclives a proporcionar de los nombres o, de manera más general, de los términos singulares, predicados y cuantificadores en la lengua materna, incluya esas partes de la lengua materna que clasificamos como matemáticas.

Sugiero que, si hemos de cumplir este requisito, no deberíamos estar satisfechos con una explicación que fracase al tratar (1) y (2) de manera similar, en base al modelo de (3). Puede que haya diferencias, pero espero que emerjan en el nivel del análisis de la referencia de los términos singulares y los predicados. Considero que sólo tenemos una explicación de ese estilo: la de Tarski, y que su característica esencial es la de definir la verdad en términos de referencia (o satisfacción) sobre la base de un tipo particular de análisis sintáctico-semántico del lenguaje, y así que cualquier supuesto análisis genuino de la verdad matemática debe ser el análisis de un concepto que sea un concepto de verdad por lo menos en el sentido de Tarski. Elaborado de manera apropiada, creo que este requisito es inconsistente con

todas las explicaciones que he denominado “combinatorias”. Por otra parte, la explicación que asimila (2) a (1) y (3) cumple obviamente esta condición, como la cumplen muchas variantes de ella.

B. Mi segunda condición para tal concepción global presupone que poseemos conocimiento matemático y que tal conocimiento no es menos conocimiento por ser matemático. Ya que nuestro conocimiento lo es de verdades, o puede ser así interpretado, una explicación de la verdad matemática, para ser aceptable, debe ser consistente con la posibilidad de poseer conocimiento matemático: las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas no pueden hacernos imposible el saber que se satisfacen. Lo que no supone sostener que no pueda haber verdades incognoscibles, sino sólo que no todas las verdades pueden ser incognoscibles, pues conocemos algunas.

El requisito mínimo, entonces, es que una explicación satisfactoria de la verdad matemática debe ser consistente con la posibilidad de que algunas de tales verdades sean cognoscibles. Dicho más claramente, el concepto de verdad matemática, tal como lo he explicado, debe encajar en una explicación global del conocimiento, de manera que haga inteligible cómo poseemos el conocimiento matemático que poseemos. Una semántica aceptable para la matemática debe encajar en una epistemología aceptable. Por ejemplo, si sé que Cleveland está entre Nueva York y Chicago, es porque existe una cierta relación entre las condiciones de verdad de ese enunciado y mi actual estado “subjetivo” de creencia (Cualesquiera puedan ser nuestras explicaciones de la verdad y el conocimiento, deben conectarse de esta manera.). Similarmente, en matemática debe ser posible acoplar lo que es para p ser verdadera con mi creencia de que p . Aunque esto es extremadamente vago, pienso que uno puede ver cómo la segunda condición tiende a excluir explicaciones que satisfacen la primera, y a admitir muchas que no la satisfacen. Pues una explicación “estándar” típica (por lo menos en el caso de la teoría de números o de la teoría de conjuntos) representará las condiciones de verdad en términos de condiciones respecto a objetos cuya naturaleza, como se concibe normalmente, les sitúa más allá del alcance de los medios del conocimiento humano que comprendemos mejor (p. ej., la percepción sensorial y otros por el estilo). Las explicaciones “combinatorias”, por otra parte, surgen por lo general del ser sensibles precisamente a este hecho, y están por tanto casi siempre motivadas por preocupaciones epistemológicas. Su virtud reside en proporcionar una explicación de las proposiciones matemáticas basada en los procedimientos que seguimos al justificar las pretensiones de verdad en matemática: a saber, las demostraciones. No es sorprendente que, en el modelo de tales explicaciones de la verdad ma-

temática, haya poco misterio sobre cómo podemos obtener conocimiento matemático. Sólo necesitamos dar cuenta de nuestra capacidad de producir y examinar demostraciones formales⁶. Sin embargo, estrujar el globo por este lado lo hace aparentemente hincharse por el lado de la verdad: cuanto más finamente precisamos el concepto de demostración, cuanto más estrechamente vinculamos la definición de demostración a características combinatorias (antes que semánticas), más difícil es conectarlo con la verdad de lo que así resulta “demostrado”, o así al menos parece.

Estos son, entonces, los dos requisitos. Por separado, parecen suficientemente inocuos. En el resto del artículo los defenderé más detenidamente y desarrollaré el argumento de que, conjuntamente, parecen excluir casi todas las explicaciones de la verdad que se han propuesto. Consideraré sucesivamente las dos aproximaciones básicas a la verdad matemática que he mencionado más arriba, sopesando sus ventajas relativas a la luz de los dos principios fundamentales que propongo. Mientras lo hago, espero que los principios mismos reciban algo de luz y de apoyo.

III. La “concepción estándar”

Llamo “concepción estándar” a la explicación “platonista” que analiza (2) como si tuviera la forma de (3). Tiene muchas virtudes, y vale la pena enumerarlas con algún detalle antes de pasar a considerar sus defectos.

Como ya he señalado, esta explicación asimila la forma lógica de las proposiciones matemáticas a la de las empíricas, aparentemente similares: tanto las proposiciones matemáticas como las empíricas contienen predicados, términos singulares, cuantificadores, etc.

Pero, ¿qué decir de los enunciados que no están compuestos (o no son correctamente analizables como estando compuestos) de nombres, predicados, y cuantificadores? Más concretamente, ¿qué decir de los enunciados que no pertenecen al tipo de lenguaje para el que Tarski nos ha mostrado cómo definir la verdad? Yo diría que para tales lenguajes (si hay alguno) necesitamos una explicación de la verdad del tipo que Tarski proporcionó para lenguajes “referenciales”. Asumo que las condiciones de verdad para el lenguaje (p. ej., el castellano) al que el matemático parece pertenecer, han

⁶ Hecha adecuadamente, ésta es por supuesto una tarea enorme. No obstante, deja de lado el dar cuenta de la carga acarreada por la semántica del sistema y por nuestra comprensión de él, concentrándose en su lugar en nuestra capacidad de determinar que ciertos objetos formales poseen ciertas propiedades sintácticamente definidas.

de ser elaboradas principalmente sobre las bases que sentó Tarski. Por tanto, hasta cierto punto, la cuestión planteada en la sección previa (¿Cómo han de explicarse las condiciones de verdad de (2)?) podría interpretarse como preguntando si el sublenguaje del castellano en que se hace matemática ha de analizarse del mismo modo que supongo apropiado para bastantes de las restantes partes del castellano. Si esto es así, entonces las dudas que esquematizaré en la próxima sección, concernientes a cómo encajar el conocimiento matemático en una epistemología global, se aplican claramente, aunque puede que las despejemos mediante una modificación apropiada de la teoría. Si, por otra parte, el matemates no ha de analizarse sobre bases referenciales, entonces tendremos claramente la necesidad, no sólo de una explicación de la verdad (esto es, de una semántica) para esta nueva clase de lenguaje, sino además de una nueva *teoría de las teorías de la verdad* que relacione la verdad para los lenguajes referenciales (cuantificacionales) con la verdad para estos nuevos (nuevamente analizados) lenguajes. Dada tal explicación, la tarea de dar cuenta del conocimiento matemático estaría aún pendiente; pero sería presumiblemente una tarea más fácil, ya que la nueva imagen semántica del matemates se habría inspirado, en la mayoría de los casos, en consideraciones epistemológicas. Sin embargo, no consideraré seriamente esta alternativa en el artículo porque no creo que nadie la haya escogido realmente nunca. Pues escogerla es considerar y *rechazar* explícitamente la interpretación “estándar” del lenguaje matemático, a pesar de su plausibilidad inicial y superficial, y proporcionar entonces una alternativa semántica como sustituto⁷. Los teóricos “combinatorios” que considero, o menciono, han pretendido generalmente nadar y guardar la ropa: no se han dado cuenta de que las condiciones de verdad para el lenguaje matemático, que su explicación proporciona, no han estado conectadas con la semántica referencial que asumen como *también* apropiada para ese lenguaje. Tal vez el candidato más cercano a una excepción sea Hilbert, en la concepción que esquematice brevemente en las primeras páginas de este artículo. Pero seguir por esta vía aquí nos llevaría demasiado lejos. Volvamos por tanto a nuestro elogio de la “concepción estándar”.

Una de sus ventajas principales es que las definiciones de la verdad para las teorías matemáticas individuales así interpretadas dispondrán de las mismas cláusulas recursivas que las empleadas por sus primos empíricos menos nobles. Dicho de otra manera, todas ellas pueden considerarse como

⁷ A veces pienso que ésta es una de las cosas que Hilary Putnam quiere hacer en su estimulante artículo “Mathematics without foundations”, *Journal of Philosophy*, 64/1 (1967): 5-22.

parte del mismo lenguaje para el que suministramos una sola explicación de los cuantificadores, sin tener en cuenta la subdisciplina en consideración. Las disciplinas matemáticas y empíricas no serán distinguidas en cuanto a la gramática lógica. Ya he recalcado la importancia de esta ventaja: significa que la teoría lógico-gramatical que empleamos en dominios menos recónditos y más tratables nos servirá bien aquí. Podemos arreglarnos con una explicación uniforme, y no necesitamos inventar otra para la matemática; lo cual debería ser válido en prácticamente cualquier teoría gramatical equipada con la semántica necesaria para explicar la verdad. Mi predisposición en pro de lo que llamo una teoría tarskiana resulta simplemente del hecho de que Tarski nos ha proporcionado la única explicación sistemática general viable de la verdad que poseemos. Así, una consecuencia del ahorro que comporta la concepción estándar es que las relaciones lógicas están sujetas a un tratamiento uniforme: son invariantes respecto a la disciplina en cuestión. De hecho, ayudan a definir el concepto de “disciplina en cuestión”. Podrían usarse las mismas reglas de inferencia y su uso explicarse con la misma teoría que nos proporciona nuestra explicación ordinaria de la inferencia, evitando así un doble estándar. Si rechazamos la concepción estándar, la inferencia matemática necesitará una explicación nueva y específica. En realidad, los usos estándar de las inferencias cuantificacionales se justifican mediante algún tipo de demostración de validez. La formalización de teorías en lógica de primer orden requiere, para *su* justificación, la seguridad (suministrada por el teorema de completud) de que todas las consecuencias lógicas de los postulados aparecerán como teoremas. La explicación estándar proporciona tales garantías. Las respuestas obvias parecen funcionar. Rechazar la concepción estándar es descartar tales respuestas: habría que hallar otras nuevas.

Hasta aquí respecto a las virtudes obvias de esta explicación. ¿Cuáles son sus defectos?

Como he sugerido más arriba, el defecto principal de la explicación estándar es que parece violar el requisito de que nuestra explicación de la verdad matemática sea susceptible de integración en nuestra explicación global del conocimiento. De manera bastante obvia, para construir un argumento persuasivo a estos efectos sería necesario esquematizar la epistemología que considero al menos aproximadamente correcta, y sobre cuya base las verdades matemáticas, interpretadas de manera estándar, no parecen constituir conocimiento. Esto requeriría dar un largo rodeo a través de los problemas

generales de la epistemología. Lo dejaré para otra ocasión, contentándome aquí con presentar un breve resumen de los aspectos destacados de esa concepción que tienen que ver con nuestro problema de manera más inmediata.

IV. El conocimiento

Soy partidario de una explicación causal del conocimiento en la que, para que X sepa que S es verdadero, se requiere que alguna relación causal se de entre X y los referentes de los nombres, predicados y cuantificadores de S . Además, creo en una teoría causal de la *referencia*, enlazando así con mi afirmación deliberada de que S es *doblemente* causal. Espero que lo que sigue disipe parte de la niebla que envuelve a esta formulación.

Para Hermione, saber que el objeto negro que sostiene es una trufa es para ella (o al menos requiere de ella) estar en un cierto estado (tal vez psicológico)⁸. También requiere de la cooperación del resto del mundo, al menos hasta el punto de permitir que el objeto que sostiene sea una trufa. Además —y ésta es la parte en la que haría hincapié— en el caso normal, que el objeto que sostiene sea una trufa debe figurar, de manera apropiada, en una explicación causal de su creencia en que el objeto negro que sujeta es una trufa. Pero, ¿qué es una “manera apropiada”? No trataré de decirlo. Una serie de autores han publicado concepciones que parecen apuntar en esta dirección⁹, y, a pesar de las diferencias entre ellos, parecen compartir una intuición central que creo correcta, aunque muy difícil de concretar.

Lo que diríamos en las siguientes circunstancias es un indicio de que alguna concepción tal debe ser correcta y subyacente a nuestra visión del

⁸ Si fuera posible, me gustaría evitar tomar postura respecto al grupo de problemas de filosofía de la mente o de psicología relativos a la naturaleza de los estados psicológicos. Cualquier concepción en la que Hermione pueda aprender que el gato está en el felpudo mirando un gato real en un felpudo real servirá para mi propósito. Si mirar a un gato en un felpudo deja a Hermione en cierto estado y ustedes desean llamar a ese estado un estado físico, o psicológico, o incluso fisiológico, no me opondré siempre que se entienda que tal estado, si es un estado de conocimiento, se relaciona causalmente de manera apropiada con que el gato haya estado en el felpudo cuando ella ha mirado. Si no hay tal estado, entonces tanto peor para mi concepción.

⁹ Por citar sólo unos pocos: Gilbert H. Harman, *Thought* (Princeton N.J.: University Press, 1973); Alvin I. Goldman, “A Causal Theory of Knowing,” *The Journal of Philosophy* LXIV, 12 (1967): 357-72; Brian Skyrms, “The Explication of ‘X knows that p ,’” *ibid.*, 373-89.

conocimiento. Se pretende que X sabe que p . Pensamos que X no podría saber que p . ¿Qué razones podemos ofrecer en apoyo de nuestra concepción? Si nos satisface que X tenga poderes deductivos normales, que p sea de hecho verdadera, etc., dependemos a menudo de argüir que X no podría haber llegado a poseer las evidencias o razones relevantes: que el gusano espacio-temporal cuatridimensional de X no hace el contacto necesario (causal), con el fundamento de la verdad de la proposición, para que X esté en posesión de la evidencia adecuada para apoyar la inferencia (si la inferencia era relevante). La proposición p pone restricciones a cómo puede ser el mundo. Nuestro conocimiento del mundo, combinado con nuestra comprensión de las restricciones puestas por p , dadas por las condiciones de verdad de p , nos dirá a menudo que un individuo dado no podría haber llegado a poseer la evidencia suficiente para llegar a conocer p , y así negaremos su pretensión de conocimiento.

Como explicación de nuestro conocimiento presente sobre objetos de tamaño medio, ésta descansa sobre buena base. Involucrará, causalmente, alguna referencia directa a los hechos conocidos, y, a través de ella, una referencia a los objetos mismos. Además, tal conocimiento (de casas, árboles, trufas, perros y paneras) representa el caso más claro y más fácil de tratar.

Otros casos de conocimiento pueden explicarse como estando basados en inferencias sobre casos similares, aunque evidentemente debe haber interdependencias. Lo que se supone incluye nuestro conocimiento de las leyes generales y las teorías, y, a través de ellas, nuestro conocimiento del futuro y de bastante del pasado. Esta explicación sigue de cerca la líneas propuestas por los empiristas, pero con la modificación crucial introducida por la condición explícitamente causal mencionada más arriba, aunque a menudo excluida de las explicaciones modernas, en gran medida a causa de los intentos de trazar una distinción cuidadosa entre “descubrimiento” y “justificación”.

En suma, en conjunción con nuestro otro conocimiento, usamos p para determinar la gama de posible evidencia relevante. Usamos lo que sabemos de X (el supuesto sujeto cognoscente) para determinar si podría haber habido un tipo apropiado de interacción, si la creencia actual de X de que p se relaciona causalmente de manera apropiada con lo que es el caso porque p es verdadera, si su evidencia se traza a partir de la gama definida por p . Si no, entonces X no podría saber que p . La conexión entre lo que debe ser el caso si p es verdadera y las causas de la creencia de X pueden variar mucho. Pero siempre hay *alguna* conexión, y la conexión relaciona los fundamentos de la creencia de X con el contenido de p .

Debe ser posible establecer un tipo apropiado de conexión entre las condiciones de verdad de p (como proporcionadas por una definición de verdad adecuada para el lenguaje en el que p se expresa) y el fundamento en base al cual se dice que se conoce p , al menos para proposiciones que uno debe llegar a conocer; que no son innatas. En ausencia de esto, ninguna conexión se ha establecido entre *tener ese fundamento* y *creer una proposición que es verdadera*. Tener ese fundamento no puede encajarse en una explicación de *saber que p* . El nexo entre p y la justificación de una creencia en p en base a ese fundamento no puede establecerse. Pero para ese conocimiento, que propiamente se considera como alguna forma de creencia verdadera justificada, el nexo *debe* establecerse (por supuesto no *todo* conocimiento necesita ser creencia verdadera justificada en caso de ser válido).

No resultará sorprendente que esto haya sido un preámbulo para señalar que combinar *esta* concepción del conocimiento con la concepción “estándar” de la verdad matemática hace difícil ver cómo es posible el conocimiento matemático. Si, por ejemplo, los números son el tipo de entidad que normalmente se considera que son, entonces la conexión entre las condiciones de verdad para los enunciados de la teoría de números y cualesquiera acaecimientos relevantes, conectados con quienes se supone que poseen conocimiento matemático, no puede precisarse¹⁰. Será pues imposible explicar cómo alguien conoce alguna proposición propiamente numerista¹¹. Esta segunda condición respecto de la explicación de la verdad matemática no se satisfará, porque no disponemos de una explicación de cómo sabemos que las condiciones de verdad para las proposiciones matemáticas se dan. Una respuesta obvia –que algunas de tales proposiciones son verdaderas si y sólo si son derivables de ciertos axiomas mediante ciertas reglas– no servirá aquí. Pues para estar seguros podemos determinar que *aquellas* condiciones se dan. Pero en tal caso, de lo que carecemos es del vínculo entre verdad y demostración, cuando la verdad se define directamente del modo estándar. En resumen, aunque puede ser una condición de verdad de ciertas proposiciones numeristas que sean derivables a partir de ciertos axiomas mediante ciertas reglas, que ello sea una condición de verdad debe también seguirse de la explicación de la *verdad*, si la condición mencionada ha de ayudar a conectar la verdad y el conocimiento, si es por sus demostraciones por lo que conocemos las verdades matemáticas.

¹⁰ Para una expresión de sano escepticismo relativo a éste y otros puntos relacionados, véase Mark Steiner, “Platonism and the Causal Theory of Knowledge,” *The Journal of Philosophy* LXX, 3 (Feb. 8, 1973): 57-66.

¹¹ En la línea de la nota 5, traducimos “number-theoretical” por “numerista” (T).

Por supuesto, dadas algunas explicaciones conjuntistas de la aritmética, tanto la sintaxis como la semántica de la *aritmética* pueden disponerse para cumplir superficialmente las condiciones que hemos establecido. Pero el regreso a que invita esto es transparente, pues entonces las mismas preguntas deben hacerse sobre la teoría de conjuntos en términos de la cual las respuestas se expresen.

V. Dos ejemplos

Hay muchas explicaciones de la verdad matemática y del conocimiento matemático. Las tesis que he estado defendiendo tienen la finalidad de ser aplicables a todas. Sin embargo, más que intentar ser exhaustivo, dedicaré estas últimas páginas a examinar dos casos representativos: la concepción “estándar” y la concepción “combinatoria”. Veamos primero la estándar, expresada por uno de sus defensores más explícitos y lúcidos, Kurt Gödel.

Gödel es plenamente consciente de que, en una explicación realista (esto es, estándar) de la verdad matemática, nuestra explicación de cómo conocemos los postulados básicos debe estar apropiadamente conectada con nuestra interpretación del aparato referencial de la teoría. Así, al discutir cómo podemos resolver el problema del continuo, una vez se ha mostrado que es indecidible por los axiomas aceptados, presenta el siguiente panorama:

...los objetos de la teoría de conjuntos transfinita... está claro que no pertenecen al mundo físico e incluso que su conexión indirecta con la experiencia física es muy remota... Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro¹².

Encuentro este panorama tan alentador como problemático. Lo que encuentro problemático es que sin una explicación de *cómo* los axiomas mismos “nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos” la analogía con la percepción sensorial y la ciencia física no tiene mucho contenido. Pues lo que falta es *precisamente* lo que exige mi segundo principio: una explicación

¹² GÖDEL, K., *Obras completas*. Traducción de Jesús Mosterín, Alianza, Madrid, 1981, p. 359 (T).

del nexo entre nuestras facultades cognoscitivas y los objetos conocidos. En la ciencia física disponemos al menos de un principio de tal explicación, y es causal. Aceptamos como conocimiento sólo las creencias que podemos relacionar adecuadamente con nuestras facultades cognoscitivas. De forma bastante adecuada, nuestra concepción del conocimiento va de la mano con nuestra concepción de nosotros mismos como sujetos cognoscentes. Por asegurarnos, existe una analogía *superficial*. Pues, como señala Gödel, “verificamos” ciertos axiomas deduciendo de ellos consecuencias acerca de áreas donde parece que tenemos una “percepción” más directa (esto es, intuiciones claras). Pero nunca se nos dice ni siquiera cómo conocemos estas proposiciones más claras. Por ejemplo, las consecuencias verificables de los axiomas de infinitud son proposiciones numeristas (de otro modo indecidibles) que en sí mismas son “verificables” mediante el cálculo hasta cualquier entero dado. Pero esta historia, para sernos de ayuda en cualquier lugar, debe decirnos cómo conocemos los enunciados de la aritmética computacional, *si éstos significan lo que la concepción estándar querría que significaran*. Pero *esto* no se nos dice. Por tanto, en el mejor de los casos la analogía es superficial.

Hasta aquí sobre los aspectos problemáticos. Más importante tal vez, y lo que encuentro alentador, es el acuerdo básico evidente que motiva el intento de Gödel de trazar un paralelismo entre matemática y ciencia empírica. Él ve, pienso yo, que debe decirse algo para tender un puente sobre el abismo, creado por su interpretación realista y platónica de las proposiciones matemáticas, entre las entidades que constituyen el objeto de la matemática y el sujeto cognoscente humano. En vez de jugar con la forma lógica de las proposiciones matemáticas, o con la naturaleza de los objetos conocidos, Gödel postula una facultad especial mediante la cual “interaccionamos” con esos objetos. Parece que estamos de acuerdo en el análisis del problema fundamental, pero estamos claramente en desacuerdo sobre la cuestión epistemológica, esto es, sobre qué avenidas tenemos abiertas para poder llegar a conocer las cosas.

Si nuestra explicación del conocimiento empírico es aceptable, debe serlo en parte porque trata de hacer evidente la conexión en el caso de nuestro conocimiento teórico, donde no está claro *prima facie* cómo se ha de completar la explicación causal. Así, cuando llegamos a la matemática, la ausencia de una explicación coherente de cómo se conecta nuestra intuición matemática con la verdad de las proposiciones matemáticas hace insatisfactoria la explicación global.

Por introducir una nota histórica especulativa, con algún fundamento en los textos, no sería irrazonable suponer que Platón recurrió al concepto de

anamnesis al menos en parte para explicar cómo, dada la naturaleza de las formas tal como él las describió, podríamos tener conocimiento de ellas¹³.

La concepción “combinatoria” de la verdad matemática tiene raíces epistemológicas. Comienza con la proposición de que, aparte de lo que los “objetos” de la matemática puedan ser, nuestro conocimiento se obtiene de las demostraciones. Las demostraciones son o pueden ser (para algunas, deben ser) escritas o habladas; los matemáticos pueden examinarlas y llegar al acuerdo de que *son* demostraciones. El conocimiento matemático se obtiene y se transmite en gran medida mediante esas demostraciones. En suma, este aspecto del conocimiento matemático, sus medios de producción y transmisión (esencialmente lingüísticos), da su impulso a la clase de concepciones que llamo “combinatorias”.

Al fijarse en el rol de las demostraciones en la producción del conocimiento, buscan el fundamento de la verdad en las demostraciones mismas. Las concepciones combinatorias reciben un impulso adicional al tomar conciencia de que el platónico arroja un halo de misterio sobre cómo puede obtenerse, en absoluto, el conocimiento. Añadamos esa toma de conciencia a la creencia de que la matemática es una criatura engendrada por nosotros (para tales concepciones el descubrimiento matemático es rara vez el descubrimiento de una realidad independiente), y no es sorprendente que uno busque actos de concepción para explicar el parto. Muchas explicaciones de la verdad matemática caen bajo esta rúbrica, quizá casi todas. He mencionado ya varias veces de pasada la concepción de Hilbert en “Sobre el infinito” y la he discutido muy brevemente.

El ejemplo final que quisiera considerar es el de las explicaciones convencionalistas, el conjunto de concepciones según las cuales las verdades de la lógica y la matemática son verdaderas (o pueden hacerse verdaderas) en virtud de convenciones explícitas, donde las convenciones en cuestión son habitualmente los postulados de la teoría. Una vez más, probablemente será injusto con ellas al agrupar todo un conjunto de concepciones que a sus defensores casi ciertamente les gustaría mantener separadas.

Quine, en su artículo clásico sobre este tema¹⁴, ha considerado de manera clara, convincente y decisiva la concepción de que las verdades de la *lógica* han de explicarse como producto de convenciones, y lo ha hecho

¹³ “El alma, pues, siendo inmortal y habiendo nacido muchas veces, y visto efectivamente todas las cosas, tanto las de aquí como las del Hades, no hay nada que no haya aprendido”. PLATÓN, *Menón*, 81. [Trad. de F. J. Olivieri, Planeta de Agostini, Madrid, 1997 (T).]

¹⁴ W. V. Quine, “Truth by Convention,” en Benacerraf, P. y Putnam, H., *Philosophy of Mathematics* (Englewood Cliffs, N.: Prentice-Hall, 1964).

mucho mejor de lo que yo podría esperar hacerlo aquí. Señaló que, como debemos dar cuenta de un número infinito de verdades, la caracterización de los enunciados elegibles como verdades debe ser al por mayor más que al detalle. Pero la caracterización al por mayor sólo puede proceder mediante principios generales; y, si se supone que no comprendemos ninguna lógica en absoluto, no podemos extraer los ejemplos individuales de los principios generales: necesitaríamos de la lógica para semejante tarea.

A pesar de lo persuasivo que pueda ser esto, me gustaría añadir otro argumento, no porque crea que este caballo muerto necesite más palos, sino porque el argumento de Quine se limita al caso de la lógica y porque no hace que los puntos principales que quisiera resaltar emerjan suficientemente. De hecho, Quine concede al convencionalista ciertos principios que me gustaría negar. Al concluir su alegato contra el convencionalismo acerca de la necesidad de una caracterización al por mayor de infinitas verdades, Quine concede que, si hubiera que contar sólo con un número finito de verdades, el convencionalista podría tener ocasión de defender su postura. Dice:

Si se pudieran hacer asignaciones de verdad una a una, en vez de un número infinito a la vez, la dificultad anterior desaparecería; las verdades de la lógica... se afirmarían individualmente por decreto, y el problema de inferirlas de convenciones más generales no se plantearía.

Así, si se pudiera hallar algún modo de hacer que los enunciados de la lógica llevaran sus valores de verdad en la manga, las objeciones a la explicación convencionalista de la verdad desaparecerían, pues habríamos determinado valores de verdad para todos los enunciados, que es todo lo que podríamos pedir.

Me pregunto, sin embargo, qué lograría semejante pizca de la palabra “verdad”. Para determinar un concepto de verdad, seguro que no puede bastar el asignar valores a todos y cada uno de los enunciados del lenguaje [supongan que el lenguaje es la teoría de conjuntos, en alguna formalización de primer orden] (permitamos a los que tengan un número par de herraduras ser “verdaderos”).

¿Qué haría de tal asignación del predicado ‘verdad’ ser la determinación del *concepto de verdad*? ¿Simplemente el uso de tal palabra? Tarski ha sugerido que satisfacer la Convención T es una condición necesaria y suficiente de una definición de verdad para un lenguaje particular¹⁵. Una

¹⁵ TARSKI, A., “The concept of Truth in Formalized Languages,” reimpresso en Tarski 1956 [*Logic, semantics, metamathematics*, Oxford: Clarendon. (T.)]. La Convención T se enuncia en las pp. 187-88 como sigue:

mera distribución (recursiva) de valores de verdad puede reconvertirse en una teoría de la verdad que satisfaga la convención T. Podemos apoyarnos en ello con tal de que estemos listos para una petición de principio en lo que creo esencial, y para ignorar el concepto de traducción que tiene lugar en su formulación (la de la convención T). Lo que faltaría, difícil como es de enunciar, es el aparato teórico empleado por Tarski al proporcionar definiciones de verdad, esto es, el análisis de la verdad en términos de los conceptos “referenciales” de nombrar, predicación, satisfacción y cuantificación. Una definición que no proceda mediante las cláusulas recursivas habituales para las formas gramaticales habituales puede no ser adecuada, incluso si satisface la convención T. La explicación debe proceder mediante la referencia y la satisfacción; además, debe complementarse con una explicación de la referencia misma. Pero la defensa de esta última pretensión es un asunto demasiado complicado como para tratarlo aquí¹⁶.

Al Quine de “Truth by Convention” le pareció que determinar los valores de verdad de todos los contextos que contiene una palabra basta para determinar su referencia. Esto *podría* ser así, si ya tuviéramos el concepto de verdad y localizada la referencia del término que nos interesara mediante la definición de verdad. Pero parece haber algo evidentemente erróneo al tratar de fijar el concepto de verdad *mismo* de este modo. Al hacerlo, echamos a perder la misma muleta que nos permite que ese método funcione para otros conceptos. La verdad y la referencia van de la mano. Nuestro concepto de verdad, en la medida en que disponemos de uno, transcurre a través de la mediación de los conceptos que Tarski ha usado para definirlo para la clase de lenguajes considerados; la esencia de la contribución de Tarski va mucho más allá de la convención T, pero incluye los esquemas para la definición real también: un análisis de la verdad para un lenguaje que no procediera a través de los mecanismos usuales de predicación, cuantificación, etc., no debería satisfacernos.

“CONVENCIÓN T. Una definición formalmente correcta del símbolo ‘Tr’, formulada en el metalenguaje, será llamada *una definición adecuada de verdad si tiene las siguientes consecuencias*:

(a) todos los enunciados que se obtengan a partir de la expresión ‘ $x \in \text{Tr}$ si y sólo si p ’ sustituyendo el símbolo ‘ x ’ por un nombre estructural-descriptivo de cualquier enunciado del lenguaje en cuestión, y el símbolo ‘ p ’ por la expresión que constituye la traducción de este enunciado al metalenguaje;

(b) el enunciado ‘para cualquier x , si $x \in \text{Tr}$, entonces $x \in S$ ’ (en otras palabras, ‘ $\text{Tr} \supset S$ ’).”

¹⁶ Para una presentación excelente de una concepción similar, véase Hartry Field, “Tarski’s Theory of Truth”, *The Journal of Philosophy*, LXIX, 13 (1972), 347-348.

Si esto está a la altura de las circunstancias, entonces debería quedar claro porqué las concepciones “combinatorias” de la naturaleza de la verdad matemática fracasan según mi explicación. Tales concepciones evitan lo que me parece ser la ruta necesaria hacia una explicación de la verdad: a través del contenido de las proposiciones cuya verdad se está definiendo. Motivadas por consideraciones epistemológicas, las concepciones “combinatorias” nos ofrecen condiciones de verdad cuya satisfacción o no satisfacción pueden determinar los simples mortales, pero el precio que pagan es su incapacidad para conectar esas llamadas “condiciones de verdad” con la verdad de las proposiciones para las cuales son condiciones.

Incluso si se concede que las verdades de la lógica de primer orden no resultan de convenciones, se podría pretender que el resto de la matemática (la teoría de conjuntos, para los logicistas; la teoría de conjuntos, la teoría de números, y otras cosas para los no logicistas) consiste en convenciones formalizadas en lógica de primer orden. Esta concepción también está sujeta a la objeción de que tal concepto de convención no necesita llevar consigo la *verdad*¹⁷. De hecho, está claro que no. Pues, incluso ignorando objeciones más generales, una vez la lógica se fija, se hace posible que las convenciones así estipuladas resulten ser inconsistentes. De ahí que no se pueda sostener que establecer las convenciones *garantice* la verdad. Pero si ello no *garantiza* la verdad, ¿qué distingue los casos en que la asegura de aquellos en los que no? La respuesta no puede ser la consistencia. Abogar por ella como tal es *malinterpretar* la significación del hecho de que la *in*-consistencia es una *prueba* de que la verdad no se ha logrado. Una vez más, la razón más profunda es que la estipulación postulacional no establece ninguna conexión entre las proposiciones y aquello de lo que tratan; la estipulación no asegura la verdad. En el mejor de los casos, limita la clase de definiciones de verdad (interpretaciones) consistentes con las estipulaciones. Pero eso no es suficiente.

Por aclarar el asunto, consideren el dicho tan citado de Russell: “El método de ‘postular’ lo que necesitamos tiene muchas ventajas; las mismas que

¹⁷ Argumentos idénticos podrán aplicarse a la concepción, tal vez indistinguible de ésta, de que los postulados constituyen *definiciones implícitas* de conceptos existentes (como opuesta a estipular cómo han de entenderse los nuevos), si ello se propone para explicar cómo sabemos que los axiomas son verdaderos (aprendimos el lenguaje aprendiendo *esos* postulados).

¹⁸ RUSSELL, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*. Londres: Allen & Unwin, 1919, p. 71.

tiene el hurto respecto al trabajo honrado¹⁸.” En la concepción que propongo eso es falso. Pues con el hurto al menos te llevas el botín, mientras que la definición implícita, la postulación convencional, y sus primos, son incapaces de llevar a la verdad. No sólo son moralmente deficientes, sino que también lo son en la práctica.

[Traducción: Pere-Blai Fornés Ferrer y Francisco Santonja Gómez.
Revisión y redacción final: Francisco Rodríguez Consuegra.]