



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# El teorema de aproximación de Weierstrass

Laura Martínez García

Curso 2022/2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

# El teorema de aproximación de Weierstrass

Laura Martínez García

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Análisis Matemático</b>
<b>Título: El teorema de aproximación de Weierstrass</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
<p>La aproximación de una función dada por otras más regulares es una técnica recurrente en análisis matemático.</p> <p>En este trabajo se revisarán los resultados sobre la convergencia puntual y uniforme de sucesiones funcionales (estudiados en la materia de Series funcionales e integración de Riemann en varias variables reales) para, después, probar el teorema de aproximación de Weierstrass. Dicho resultado establece que cualquier función continua definida en un intervalo compacto se puede aproximar uniformemente por una sucesión de polinomios. Además, se estudiarán algunas generalizaciones de dicho teorema, como por ejemplo, el teorema de Stone-Weierstrass.</p>
<b>Recomendaciones</b>
<b>Otras observaciones</b>



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Conceptos previos</b>	<b>1</b>
1.1. Sucesiones funcionales . . . . .	1
1.2. Un poco de series funcionales . . . . .	6
<b>2. Teorema de aproximación de Weierstrass</b>	<b>9</b>
2.1. Los polinomios de Bernstein . . . . .	9
2.2. Demostración alternativa mediante series de Fourier . . . . .	18
2.2.1. El teorema de Fejér . . . . .	21
2.3. Otra demostración elemental . . . . .	24
<b>3. Teorema de Stone-Weierstrass</b>	<b>29</b>
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>



## Resumen

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el teorema de aproximación de Weierstrass de múltiples alternativas, en las que se usarán los polinomios de Bernstein y el teorema de Fejér. A continuación, se demostrará el teorema de Stone-Weierstrass, una de las generalizaciones más importantes del teorema de Weierstrass. Finalmente, se aplicará el teorema mencionado anteriormente para probar el teorema de Cauchy-Peano.

## Abstract

The main objective of this paper is to prove the Weierstrass approximation theorem of multiple alternatives, in which Bernstein polynomials and Fejér's theorem will be used. Next, the Stone-Weierstrass theorem, one of the most important generalizations of the Weierstrass theorem, will be proved. Finally, the above theorem will be applied to prove the Cauchy-Peano theorem.



# Introducción

El teorema de aproximación de Weierstrass, desarrollado por el notable matemático alemán Karl Weierstrass en la segunda mitad del siglo XIX, es un hito en el campo del análisis matemático que ha dejado una marca significativa en la historia de las matemáticas. Este teorema marcó un antes y un después en el desarrollo del análisis matemático y sentó las bases para numerosas investigaciones y aplicaciones posteriores. También revolucionó nuestra comprensión de las funciones continuas y su aproximación mediante polinomios.

El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) fue reconocido por su rigor y precisión en el análisis matemático. Sus trabajos y contribuciones reflejaban su enfoque detallado y riguroso, y fue en este contexto donde desarrolló y demostró el teorema de aproximación que lleva su nombre. El teorema de Weierstrass tuvo muchas aplicaciones prácticas y fue un logro teórico notable ya que sus efectos se extendieron a una amplia gama de disciplinas científicas e ingenieriles. El teorema de Weierstrass, por ejemplo, sirvió como base sólida para el desarrollo de métodos de aproximación de funciones en la computación y el procesamiento de señales por lo que este teorema ha sido fundamental para el estudio y la modelización de fenómenos físicos complejos en la física matemática, ya que permite aproximaciones precisas de las funciones que describen estos fenómenos.

Al examinar la evolución del teorema de aproximación de Weierstrass, es crucial resaltar los factores que contribuyeron a su creación. Antes de Weierstrass, otros matemáticos como Cauchy, Fourier y Dirichlet habían hecho contribuciones significativas a la investigación de las series de Fourier y las expansiones en polinomios. Estos progresos pusieron las bases del trabajo de Weierstrass y ayudaron a comprender las funciones continuas y su aproximación mediante polinomios. Sin embargo, Weierstrass construyó una sucesión de polinomios convergentes a una función continua dada utilizando herramientas del análisis matemático, como la teoría de series y el concepto de continuidad uniforme, para demostrar el teorema. Su demostración, basada en técnicas de aproximación rigurosas y métodos constructivos, fue un logro en sí misma y consolidó su reputación como uno de los matemáticos más destacados de su época.

En el presente trabajo se realizará un estudio exhaustivo sobre el teorema de aproximación

de Weierstrass, el cual será estructurado en cuatro capítulos distintos.

El primer capítulo de este trabajo se dedicará a la exposición de los conceptos fundamentales que serán necesarios para comprender los capítulos subsiguientes. En particular, se prestará especial atención a las sucesiones funcionales, dado que la noción de convergencia uniforme desempeña un papel crucial en el desarrollo del tema. Asimismo, se abordará de manera concisa el estudio de las series funcionales.

El segundo capítulo, el más extenso del trabajo, se enfoca en los polinomios de Bernstein, los cuales desempeñan un papel fundamental en la demostración del teorema de aproximación de Weierstrass. Este teorema establece que toda función continua definida en un intervalo compacto puede ser aproximada de manera uniforme por polinomios en el mismo intervalo. A continuación, se presenta una demostración alternativa del teorema de Weierstrass utilizando el teorema de Fejér. Previamente, se introducen conceptos básicos sobre series de Fourier. Finalmente, se demuestra el teorema de aproximación de Weierstrass mediante un enfoque más elemental.

En el tercer capítulo, se presenta la generalización más significativa del teorema de aproximación de Weierstrass, conocido como el teorema de Stone-Weierstrass. En este capítulo, se sustituye el intervalo  $[0, 1]$  por un espacio topológico compacto denotado como  $X$ . Se enunciará y se demostrará dicho teorema, el cual establece que si una subálgebra  $\mathcal{A}$  de  $C(X)$  (el espacio de funciones continuas en  $X$ ) contiene funciones constantes y separa los puntos de  $X$ , entonces la clausura de  $\mathcal{A}$  (denotada como  $\bar{\mathcal{A}}$ ) es igual a  $C(X)$ , es decir,  $\mathcal{A}$  es un subconjunto denso de  $C(X)$ . Además, se exploran las consecuencias y aplicaciones de este teorema.

En el último capítulo, se abordará una aplicación del teorema de Stone-Weierstrass en el ámbito de las ecuaciones diferenciales para demostrar el teorema de Cauchy-Peano a partir del teorema del teorema de Picard-Lipschitz.

# Capítulo 1

## Conceptos previos

En este primer capítulo vamos a introducir conceptos de series funcionales que serán necesarios posteriormente y que podemos encontrar en [1].

### 1.1. Sucesiones funcionales

**Definición 1.1.** Sean  $E \subset \mathbb{R}$  y  $\mathcal{F}$  el conjunto de todas las funciones reales definidas en  $E$ . Una aplicación

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow f_n \in \mathcal{F}$$

se denomina *sucesión de funciones definidas en  $E$*  y se denota por  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$  se denomina *término  $n$ -ésimo* o (*término general*) de la sucesión funcional  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Además, es evidente que para cada  $x \in E$ , la sucesión anterior da lugar a una sucesión de números reales.

**Definición 1.2.** Sean  $E \subset \mathbb{R}$  y  $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Diremos que la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *converge puntualmente a  $f$  en  $E$*  si, para cada  $x \in E$ , la sucesión numérica  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(x)$ , es decir, si para cada  $x \in E$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = f(x)$ , lo que se denotará por  $f_n \xrightarrow{p} f$  en  $E$ .

En otras palabras, la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $f$  en  $E$  si se cumple la siguiente condición:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \mid n \geq N(\varepsilon, x), n \in \mathbb{N} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

En ese caso diremos que  $f$  es el *límite puntual* de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $E$ .

**Definición 1.3.** El conjunto  $C = \{x \in E : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$  se denomina *campo de convergencia* de la sucesión funcional  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y además es el mayor subconjunto de  $E$  en el cual la sucesión es puntualmente convergente.

Si  $C \neq \emptyset$ , la *función límite puntual* de la sucesión funcional  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la siguiente función:

$$f : x \in C \longrightarrow f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

**Ejemplo 1.4.** Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $f_n(x) = x^n$  solo converge puntualmente en el conjunto  $C = (-1, 1]$ , siendo  $f(x) = 0$  si  $x \in (-1, 1)$  y  $f(1) = 1$  el límite puntual de la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida en  $C$ .

Vamos a plantearnos diferentes cuestiones sobre la transferencia de las propiedades de los términos de la sucesión,  $f_n$ , a la función límite,  $f$ , nos centraremos en la continuidad y en la integrabilidad en el sentido de Riemann:

- ¿Podemos realizar el siguiente intercambio de límites?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

- Si las funciones  $f_n$  son Riemann-integrables en  $[a, b]$  y  $f_n \xrightarrow{p} f$  en  $[a, b]$  entonces, ¿la función  $f$  es una función Riemann-integrable en  $[a, b]$ ? En caso afirmativo, ¿se cumplirá que

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n?$$

La respuesta a todas las preguntas anteriores es negativa, para ello veamos algún ejemplo.

**Ejemplo 1.5.** Considerando de nuevo la sucesión funcional del ejemplo 1.4, se tiene que aunque las funciones  $f_n$  sean continuas en  $(-1, 1]$ , su límite puntual no es una función continua en  $(-1, 1]$ .

**Ejemplo 1.6.** Sea  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de los números racionales en el intervalo  $[0, 1]$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos el conjunto  $A_n = \{r_1, \dots, r_n\}$  y consideramos la sucesión funcional  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida en el intervalo  $[0, 1]$  dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A_n, \\ 0, & \text{si } x \notin A_n. \end{cases}$$

Todos los términos de la sucesión son funciones Riemann-integrables en  $[0, 1]$  por tener un número finito de discontinuidades, y tienen integral nula en  $[0, 1]$ . La sucesión converge a la función de Dirichlet definida en el intervalo  $[0, 1]$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

que no es Riemann-integrable en  $[0, 1]$ .

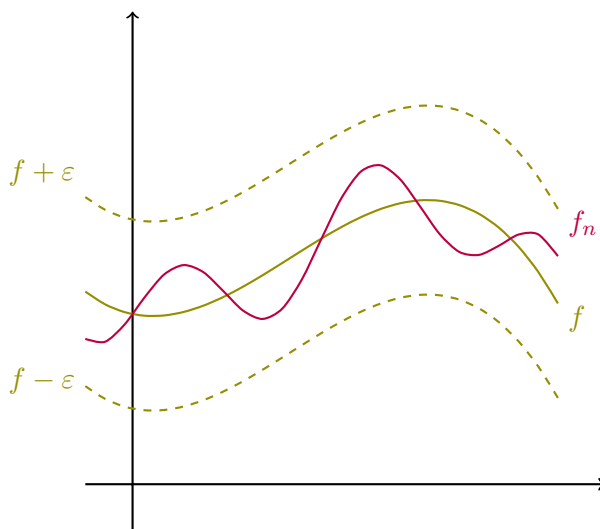
Como vimos en los anteriores ejemplos la convergencia puntual no es útil para intercambiar los procesos de paso al límite ni de transmitir las propiedades de los términos de una sucesión puntualmente convergente a su función límite y es por ello que introduciremos nuevos conceptos de convergencia.

**Definición 1.7.** Sean  $E \subset \mathbb{R}$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $E$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a la función  $f$  en  $E$  si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E.$$

Utilizaremos la siguiente notación para indicar que la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en  $E$ :  $f_n \xrightarrow{u} f$  en  $E$  o  $f_n \rightrightarrows f$  en  $E$ .

Veamos la interpretación geométrica a través de la definición anterior, lo que significa que dado  $\varepsilon > 0$ , existe un número natural  $N_\varepsilon$  de manera que las gráficas de las funciones  $f_n$  están situadas en la banda determinada por las funciones  $f - \varepsilon$  y  $f + \varepsilon$  para cualquier  $n \geq N_\varepsilon$ .



*Observación 1.8.* Si una sucesión es uniformemente convergente, también es puntualmente convergente a la misma función. Por lo tanto, si una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en un conjunto  $E$ , entonces su límite uniforme en  $E$  coincide con su límite puntual.

**Proposición 1.9.** Sean  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $E$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente convergente a  $f$  en  $E$ , entonces existe una constante  $M \geq 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  de manera que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq M, \quad \forall x \in E, \quad \forall n \geq N.$$

**Definición 1.10.** Dadas las funciones  $h_n : E \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , diremos que la sucesión  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es *uniformemente limitada* en  $E$  si existe una constante  $M \geq 0$  tal que

$$|h_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Estamos eliminando un número finito de términos de la sucesión y esto no modifica el carácter con respecto a la convergencia, por lo vamos a suponer que si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión uniformemente convergente a una función  $f$ , entonces  $\{f_n - f\}_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente limitada.

**Teorema 1.11.** Sean  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $E$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Equivalen:

1. La sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en  $E$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$ .

*Demostración.* Por la definición de convergencia uniforme sabemos que dada  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $E$  convergente a  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E,$$

es decir,

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

lo que es lo mismo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$ . □

Veamos un par de ejemplos donde utilizamos el teorema 1.11 para estudiar la convergencia uniforme de una sucesión funcional.

**Ejemplo 1.12.** La sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}$$

con  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [0, 1]$  converge puntualmente en  $[0, 1]$  a la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vamos a ver que la convergencia no es uniforme en  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{nx + 1}$$

así que,

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{nx+1} \right| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

por ser cada función  $f_n$  decreciente en el intervalo  $(0, 1)$  y por lo tanto tenemos que la convergencia no es uniforme en  $(0, 1)$ .

**Ejemplo 1.13.** La sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$$

con  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [0, 1]$ , converge puntualmente a la función  $f(x) = x$  en  $[0, 1]$ . Veamos que la convergencia también es uniforme. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x+x^2}{1+n+x}$$

así que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

obtenemos dicha cota al maximizar el numerador y minimizar el denominador lo cual se obtiene sustituyendo la  $x$  por 1 y 0 respectivamente.

A continuación vamos a enunciar dos teoremas que muestran que la convergencia uniforme es suficiente para transmitir la continuidad y la integrabilidad de Riemann de los términos de una sucesión funcional a su función límite.

**Teorema 1.14.** Sean  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $E$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Si la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en  $E$  y cada función  $f_n$  es continua en  $x_0 \in E$ , entonces  $f$  es continua en  $x_0$ .

**Teorema 1.15.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones integrables según Riemann en un intervalo  $[a, b]$ . Si la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ . Además

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Por último, vamos a enunciar y demostrar el teorema de Dini que será necesario en el capítulo 3 para probar un resultado previo al teorema de Stone-Weierstrass.

**Teorema 1.16 (Dini).** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto y sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones continuas en  $[a, b]$ . Si la sucesión converge puntualmente a una función  $f$  continua en  $[a, b]$ , y además, la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona, entonces la convergencia es uniforme en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente, por lo que  $f(x) \geq f_n(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Fijemos un  $\varepsilon > 0$  arbitrario.

De la definición de convergencia puntual se tiene que para cada  $x \in [a, b]$  existe un natural  $n_x$  tal que

$$\forall n \geq n_x \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, por la continuidad de  $f$  y  $f_{n_x}$  se tiene que para todo  $x \in [a, b]$  existe un entorno  $V_x$  de  $x$  tal que

$$y \in V_x \implies |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Utilizando la desigualdad triangular se obtiene que para todo  $y \in V_x$  se cumple:

$$|f(y) - f_{n_x}(y)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad (1.1)$$

Como  $[a, b] = \bigcup_{x \in [a, b]} V_x$ , y como  $[a, b]$  es compacto, existen  $x_1, \dots, x_m \in [a, b]$  tales que:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}. \quad (1.2)$$

Tomamos  $n_0 = \max\{n_{x_i} : i = 1, \dots, m\}$ . Aplicando la igualdad obtenida en (1.2), dado  $y \in [a, b]$  debe existir  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $y$  pertenece a  $V_{x_i}$ . Juntando este hecho con (1.1) y la monotonía se tiene que para  $n \geq n_0$ :

$$|f(y) - f_n(y)| = f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{n_0}(y) \leq f(y) - f_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon,$$

y así hemos comprobado que la sucesión converge uniformemente en  $[a, b]$ . □

## 1.2. Un poco de series funcionales

Sean  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones definidas en  $E$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . A partir de la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construimos una nueva sucesión funcional  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde

$$S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

**Definición 1.17.** El par de sucesiones  $(\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  se denomina *serie funcional* y se denota por  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  siendo  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la *sucesión de sumas parciales* de la serie.

**Definición 1.18.** Diremos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  *converge uniformemente* a  $f$  en  $E$  si la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente convergente a  $f$  en  $E$ .

Vistas estas definiciones, vamos a centrarnos en las *series de potencias*.

**Definición 1.19.** Una *serie de potencias* de centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  es una serie funcional de la forma  $f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , donde  $f_0$  y  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones definidas como

$$f_0(x) = e_0, \quad f_n(x) = e_n(x - x_0)^n,$$

para ciertos números reales  $e_0$  y  $e_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Vamos a denotar a la serie anterior como  $\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x - x_0)^n$ .

**Definición 1.20.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x - x_0)^n$  una serie de potencias, a cada una de ellas le asociaremos un valor  $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  denominado *radio de convergencia* que se define como

$$R = \frac{1}{\lambda} \equiv \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|e_n|} \right)^{-1}.$$

El intervalo abierto  $(x_0 - R, x_0 + R)$  se denomina *intervalo de convergencia de la serie*.

**Teorema 1.21.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x - x_0)^n$  una serie de potencias de centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  y sea  $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  su radio de convergencia. Entonces,

1. Si  $R = 0$ , la serie converge únicamente en el punto  $x_0$ .
2. Si  $0 < R < +\infty$ , la serie converge absolutamente en el intervalo  $(x_0 - R, x_0 + R)$  y diverge en el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > R\}$ .
3. Si  $R = +\infty$ , la serie converge absolutamente en  $\mathbb{R}$ .

Además, la serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto del intervalo de convergencia.

*Observación 1.22.* Las series de Taylor centradas en  $x_0 = 0$  para el seno y coseno son series de potencias de la siguiente forma:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



## Capítulo 2

# Teorema de aproximación de Weierstrass

En el presente capítulo, se abordará el teorema clásico de Weierstrass, para posteriormente explorar en el capítulo 3 la generalización propuesta por Stone.

El teorema de Weierstrass establece que toda función continua definida en un intervalo compacto puede ser aproximada de manera uniforme mediante polinomios. La demostración de este teorema será realizada utilizando los polinomios de Bernstein, y posteriormente se presentarán dos demostraciones alternativas, una de ellas basada en el teorema de Fejér.

La demostración utilizando los polinomios de Bernstein se encuentra en la referencia [4], mientras que toda la información abarcada en la sección 2.2 puede ser consultada en [5]. Finalmente, el contenido expuesto en el último apartado de este capítulo se encuentra detallado en la referencia [7].

### 2.1. Los polinomios de Bernstein

**Definición 2.1.** Dada una función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos el *polinomio  $n$ -ésimo de Bernstein* de la función  $f$  como

$$B_n(f; x) = \sum_{r=0}^n c_r h_r(x), \quad x \in [0, 1],$$

donde los  $h_r(x)$  son elementos de la distribución binomial respecto de la variable  $x$  y los  $c_r$  son los elementos que queremos aproximar, siendo  $c_r = f\left(\frac{r}{n}\right)$  y  $h_r(x) = \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}$  donde

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  y así la fórmula desarrollada es la siguiente:

$$B_n(f; x) = \sum_{r=0}^n f\left(\frac{r}{n}\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}, \quad x \in [0, 1].$$

Para la demostración del teorema de Weierstrass es fundamental conocer los polinomios de Bernstein de las funciones  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$  y  $f_3(x) = x^2$ . Con el fin de llevar a cabo dicha tarea, procederemos a calcularlos en lo que sigue.

Como hemos mencionado anteriormente, denotamos por  $h_r(x) = \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}$ , y para simplificar la notación vamos a reescribir la fórmula del  $n$ -ésimo polinomio de Bernstein dada en la definición 2.1 como

$$B_n(f; x) = \sum_{r=0}^n f\left(\frac{r}{n}\right) h_r(x).$$

Calculemos los polinomios de las funciones que hemos mencionado anteriormente, siendo el de la función  $f_1$  el siguiente:

$$B_n(1; x) = \sum_{r=0}^n h_r(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = (x + (1-x))^n = 1. \quad (2.1)$$

Para la función  $f_2$  tenemos que su polinomio de Bernstein viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} B_n(x; x) &= \sum_{r=0}^n \frac{r}{n} h_r(x) = \sum_{r=0}^n \frac{r}{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \\ &= x \sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} x^{r-1} (1-x)^{n-r} \\ &= x \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} x^s (1-x)^{n-1-s} \\ &= x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por último, para la función  $f_3$  tenemos que su polinomio de Bernstein viene dado por:

$$\begin{aligned} B_n(x^2; x) &= \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n}\right)^2 h_r(x) \\ &= \frac{x}{n} \sum_{r=1}^n r \binom{n-1}{r-1} x^{r-1} (1-x)^{n-r} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\ &= \frac{n-1}{n} x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} + \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Una vez que se han calculado los polinomios de Bernstein de las funciones mencionadas anteriormente, estamos en condiciones de demostrar el teorema de Weierstrass.

**Teorema 2.2** (Weierstrass). *Dada una función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in C[0, 1]$  y cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un número natural  $N$  tal que*

$$|f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ y todo } n \geq N$$

o, dicho de otra manera, los polinomios de Bernstein para una función  $f$  que es continua en el intervalo  $[0, 1]$  convergen uniformemente a  $f$  en  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Sabemos que como  $f$  es continua, también es uniformemente continua en  $[0, 1]$ . Fijado  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  que depende de  $\varepsilon$  y  $f$ , tal que

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } x, x' \in [0, 1].$$

Por otro lado, tenemos la siguiente identidad

$$\left(\frac{r}{n} - x\right)^2 = \left(\frac{r}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{n}\right)x + x^2$$

y multiplicamos cada término por  $\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}$  y sumamos desde  $r = 0$  hasta  $n$  para obtener

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n} - x\right)^2 \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = \\ & = \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n}\right)^2 \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} - 2x \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n}\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + x^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \\ & = B_n(x^2; x) - 2xB_n(x; x) + x^2 B_n(1; x). \end{aligned}$$

Del cálculo de los polinomios  $B_n(x^2; x)$ ,  $B_n(x; x)$  y  $B_n(1; x)$ , obtenido en (2.1), (2.2) y (2.3) se sigue que

$$\sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n} - x\right)^2 \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x - 2x^2 + x^2 = -\frac{1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x = \frac{1}{n}x(1-x). \quad (2.4)$$

Sea cualquier  $x \in [0, 1]$ , vamos a estimar la suma de los polinomios  $h_r(x)$  sobre todos los valores de  $r$  para los que  $r/n$  no es próximo a  $x$ . Para el valor de  $\delta$  fijado anteriormente definimos como  $S_\delta$  el conjunto de todos los valores de  $r$  que satisfacen  $|\frac{r}{n} - x| \geq \delta$  lo que implica que

$$\frac{1}{\delta^2} \left(\frac{r}{n} - x\right)^2 \geq 1. \quad (2.5)$$

Consideremos la suma de los polinomios  $h_r(x)$  con  $r \in S_\delta$ .

De (2.5), se tiene que

$$\sum_{r \in S_\delta} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{r \in S_\delta} \left(\frac{r}{n} - x\right)^2 \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}.$$

Esta última suma no es mayor que la suma de la misma expresión de todas las  $r$ , y usando (2.4) se tiene que

$$\frac{1}{\delta^2} \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n} - x\right)^2 \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Como  $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  en  $[0, 1]$ , tenemos que

$$\sum_{r \in S_\delta} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \leq \frac{1}{4n\delta^2}. \quad (2.6)$$

Estimemos la diferencia entre  $f(x)$  y los polinomios de Bernstein, usando (2.1) se sigue que

$$f(x) - B_n(f; x) = \sum_{n=0}^r \left(f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}.$$

Por lo tanto,

$$f(x) - B_n(f; x) = \sum_{r \in S_\delta} \left(f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \sum_{r \notin S_\delta} \left(f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}.$$

Obtenemos la siguiente desigualdad

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \sum_{r \in S_\delta} \left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \sum_{r \notin S_\delta} \left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}.$$

Como  $f \in C[0, 1]$  está acotada en  $[0, 1]$ , así que existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Por lo tanto podemos escribir

$$\left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \leq 2M$$

para cualquier  $r \in \{1, \dots, n\}$  y  $x \in [0, 1]$ . Entonces

$$\sum_{r \in S_\delta} \left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \leq 2M \sum_{r \in S_\delta} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}.$$

Usando (2.6) obtenemos

$$\sum_{r \in S_\delta} \left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \leq \frac{M}{2n\delta^2}. \quad (2.7)$$

Con respecto a la otra suma en la que  $r \notin S_\delta$ , por la continuidad uniforme de  $f$  deducimos que

$$\sum_{r \notin S_\delta} \left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r \notin S_\delta} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r},$$

y por lo tanto, utilizando (2.1), tenemos que

$$\sum_{r \notin S_\delta} \left|f(x) - f\left(\frac{r}{n}\right)\right| \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.8)$$

Combinando (2.7) y (2.8), se obtiene que

$$|f(x) - B_n(f; x)| < \frac{M}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.9)$$

Finalmente de (2.9) deducimos que si elegimos  $N > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$ , entonces

$$|f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N \text{ y todo } x \in [0, 1],$$

y así hemos llegamos al resultado deseado.  $\square$

Habiendo presentado la demostración correspondiente al intervalo  $[0, 1]$ , procederemos a explicar de manera concisa cómo es posible extender el teorema de Weierstrass a cualquier intervalo compacto  $[a, b]$ . Esta extensión se encuentra detallada en la página 172 de la referencia [1].

**Teorema 2.3.** *Sea  $f$  una función continua en un intervalo compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y con valores en  $\mathbb{R}$ . Entonces  $f$  puede aproximarse uniformemente mediante polinomios.*

*Demostración.* Si  $f$  está definida en  $[a, b]$ , entonces la función  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$g(t) = f((b-a)t + a), t \in [0, 1],$$

es continua debido a que es una composición de la función continua  $f$  y una función lineal  $((b-a)t + a)$ .

Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, sabemos que  $g$  puede ser aproximada uniformemente en  $[0, 1]$  mediante polinomios de Bernstein. Por lo tanto, existen polinomios de Bernstein  $B_n(g; t)$  que convergen uniformemente a  $g$  en  $[0, 1]$ .

Ahora, vamos a hacer un cambio de variable en los polinomios de Bernstein para obtener una aproximación polinómica a  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Consideremos la transformación lineal  $T : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  definida como

$$T(t) = (b-a)t + a, t \in [0, 1].$$

Aplicando esta transformación a los polinomios de Bernstein  $B_n(g; t)$ , obtenemos los polinomios  $P_n(x) = B_n\left(g; \frac{x-a}{b-a}\right)$  definidos en  $[a, b]$ .

Dado que  $g(t) = f((b-a)t + a)$ , podemos reescribir  $P_n(x)$  como:

$$P_n(x) = B_n\left(g; \frac{x-a}{b-a}\right) = B_n(T^{-1}(x)).$$

Por lo tanto,  $P_n(x)$  es una aproximación polinómica de  $f$  en  $[a, b]$  y así hemos concluido la demostración.  $\square$

A continuación, presentaremos dos ejemplos prácticos para ilustrar el cálculo de los polinomios de Bernstein y su capacidad para aproximar funciones continuas en intervalos específicos. En el primer ejemplo, calcularemos los polinomios de la función exponencial de grado 1, 2 y 3 en el intervalo  $[0, 1]$ . Mostraremos gráficamente cómo estos polinomios de Bernstein se acercan a la función exponencial en dicho intervalo. En el segundo ejemplo, calcularemos los polinomios de la función valor absoluto de grado 1, 2, 3, 4 y 5 en el intervalo  $[-1, 1]$ . También ilustraremos gráficamente cómo estos polinomios se aproximan a la función valor absoluto en dicho intervalo. Este ejemplo es interesante porque la función valor absoluto no es de clase 1, pero veremos como ambos ejemplos nos permiten visualizar de manera intuitiva el comportamiento de los polinomios de Bernstein y su capacidad para aproximar funciones continuas en un intervalo dado.

**Ejemplo 2.4.** Para calcular dichos polinomios vamos a seguir la definición 2.1. Primero calculemos el polinomio de Bernstein de grado 1 que es el siguiente

$$B_1(e^x; x) = \sum_{r=0}^1 e^r \binom{1}{r} x^r (1-x)^{1-r} = (1-x) + ex.$$

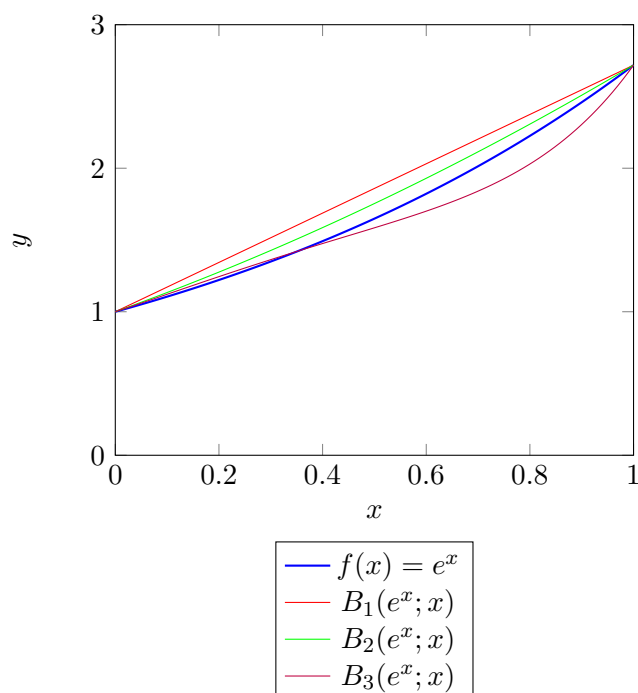
Además, tenemos que el polinomio de Bernstein de grado 2 viene dado por:

$$\begin{aligned} B_2(e^x; x) &= \sum_{r=0}^2 e^{\frac{r}{2}} \binom{2}{r} x^r (1-x)^{2-r} \\ &= e^{\frac{0}{2}} \binom{2}{0} x^0 (1-x)^{2-0} + e^{\frac{1}{2}} \binom{2}{1} x(1-x) + e^{\frac{2}{2}} \binom{2}{2} x^2 \\ &= (1-x)^2 + 2e^{\frac{1}{2}} x(1-x) + ex^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, el polinomio de Bernstein de grado 3 es:

$$\begin{aligned} B_3(e^x; x) &= \sum_{r=0}^3 e^{\frac{r}{3}} \binom{3}{r} x^r (1-x)^{3-r} \\ &= e^{\frac{0}{3}} \binom{3}{0} x^0 (1-x)^{3-0} + e^{\frac{1}{3}} \binom{3}{1} x(1-x)^2 + e^{\frac{2}{3}} \binom{3}{2} x^2(1-x) + e^{\frac{3}{3}} \binom{3}{3} x^3 \\ &= (1-x)^3 + 3e^{\frac{1}{3}} x(1-x)^2 + 3e^{\frac{2}{3}} x^2(1-x) + ex^3. \end{aligned}$$

La representación gráfica de los polinomios anteriores es la siguiente:



En conclusión, los polinomios de Bernstein de grado 1, 2 y 3 ofrecen una aproximación significativa de la función exponencial. A medida que aumenta el grado de los polinomios de Bernstein, la aproximación se vuelve más precisa, lo que ilustra el teorema de aproximación de Weierstrass en el caso específico de la función exponencial.

**Ejemplo 2.5.** Realizando cálculos análogos al ejemplo anterior, tenemos que los polinomios de Bernstein de  $f(x) = |x|$  vienen dados por:

$$B_1(|x|; x) = x,$$

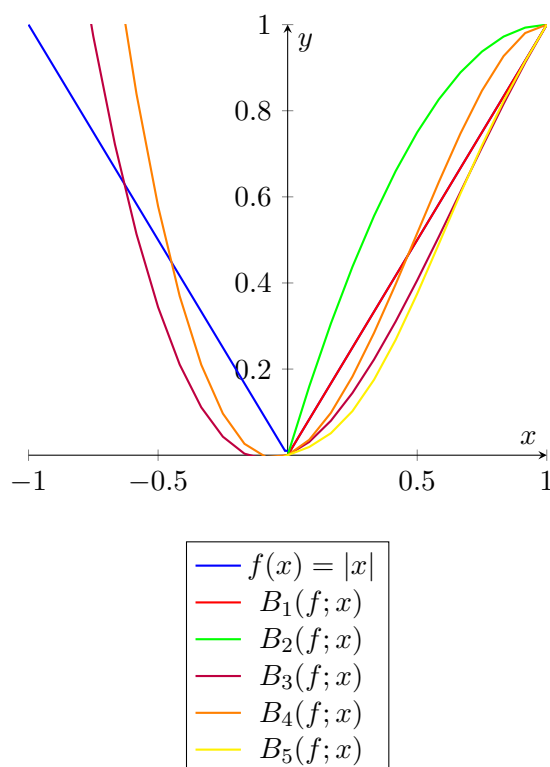
$$B_2(|x|; x) = 2x - x^2,$$

$$B_3(|x|; x) = \frac{1}{3}x(1-x)^2 + 2x^2(1-x) + x^3,$$

$$B_4(|x|; x) = \frac{1}{4}x(1-x)^3 + 3x^2(1-x)^2 + 4x^3(1-x) + x^4,$$

$$B_5(|x|; x) = \frac{1}{5}x(1-x)^4 + \frac{4}{5}x^2(1-x)^3 + 6x^3(1-x)^2 + 4x^4(1-x) + x^5.$$

La representación gráfica de los polinomios calculados es la siguiente:



Como se mencionó en el ejemplo anterior, a medida que incrementamos el grado de los polinomios de Bernstein, la aproximación se ajusta cada vez más a la función objetivo. En nuestro caso, consideramos la función valor absoluto, la cual es continua pero no es derivable. A pesar de esta característica, los polinomios de Bernstein logran una buena aproximación de la función, en consonancia con el teorema de aproximación de Weierstrass.

Realizaremos una observación acerca de las condiciones necesarias en cuanto al dominio de las funciones continuas, analizando qué ocurriría si no exigimos que el intervalo dado sea cerrado y, posteriormente, si el mismo no está acotado.

*Observación 2.6.* El teorema de aproximación de Weierstrass deja de ser cierto si intercambiamos el intervalo compacto  $[a, b]$  por un intervalo de la forma  $(a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, \infty)$ ....

Véamoslo por ejemplo para el primer caso, definamos la función  $\phi : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\phi(x) = (x - a)^{-1}$ . De esta manera  $\phi$  es continua en el intervalo  $(a, b]$ , y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \phi(x) = \infty.$$

Por lo tanto, considerando que todo polinomio (en este caso de Bernstein pero no tendría por qué serlo) es continuo en  $a$ , tendremos que

$$\sup_{x \in (a, b]} |\phi(x) - B_n(\phi; x)| = \infty.$$

Por lo tanto el conjunto  $A = \{|\phi(x) - B_n(\phi; x)|, x \in (a, b]\}$  no está acotado superiormente para ningún  $n \in \mathbb{N}$ , lo que implica que la sucesión  $B_n(\phi; x)$  no converge uniformemente a  $\phi$  en  $(a, b]$ .

Ahora supongamos que el dominio no es un intervalo acotado. Por ejemplo, un intervalo de la forma  $[a, \infty)$  y definimos la función  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\varphi(x) = e^{-x}$ . Por un lado tenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

y por otro lado tenemos que todo polinomio de grado  $m$  definido de la siguiente manera

$$p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_0 > 0, \\ -\infty, & \text{si } a_0 < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{-x} - p(x)| = +\infty,$$

lo que implica que

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |e^{-x} - p(x)| = +\infty.$$

Entonces el conjunto  $B = \{|\varphi(x) - p(x)|, x \in [0, +\infty)\}$  no está acotado superiormente.

Podemos extender el teorema de aproximación de Weierstrass a un intervalo acotado (no tiene que ser necesariamente cerrado) pidiendo que la función sea uniformemente continua en lugar de continua, para verlo vamos a introducir el siguiente resultado.

**Corolario 2.7.** *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua en  $I$ . Entonces  $f$  puede aproximarse uniformemente por una sucesión de polinomios en  $I$ .*

*Demostración.* Por ser  $f$  uniformemente continua en  $I$ , admite una extensión continua a  $\bar{I}$ , es decir, existe  $\hat{f} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tal que  $\hat{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ .

Entonces  $\bar{I} = [a, b]$  para ciertos  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Por el teorema 2.3,  $\hat{f}$  puede aproximarse uniformemente por polinomios. Como  $I \subset \bar{I}$  y  $\hat{f}(x) = f(x)$  para  $x \in I$ , se tiene que esos polinomios aproximan uniformemente a la función  $f$  en  $I$ .  $\square$

Finalmente, vamos a introducir una observación en la que explicaremos que ocurre en el teorema de Weierstrass si relajamos la hipótesis de continuidad.

*Observación 2.8* (Hipótesis de continuidad). La hipótesis de continuidad sobre la función  $f$  en el teorema de Weierstrass no se puede relajar, pues si  $f$  es una función tal que existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente a  $f$  en cierto conjunto  $E$ , al ser dichos polinomios funciones continuas, necesariamente  $f$  también será una función continua en  $E$ . Es decir, no somos capaces de aproximar uniformemente funciones discontinuas por polinomios.

## 2.2. Demostración alternativa mediante series de Fourier

Como se mencionó previamente, la demostración de nuestro resultado principal se llevará a cabo utilizando el teorema de Fejér. Para ello, es necesario introducir conceptos relacionados con las series de Fourier.

Las series de Fourier se presentan de forma más simple en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , y su definición para intervalos compactos arbitrarios se puede obtener mediante un cambio de variable de manera sencilla.

Un conjunto de funciones en el cual la definición de las series de Fourier tiene sentido es el conjunto de funciones integrables en el sentido de Lebesgue. Este conjunto abarca una amplia gama de funciones. Consideremos dicho espacio

$$\mathcal{L}^1(-\pi, \pi) = \left\{ f : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ medible y } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < +\infty \right\}.$$

**Definición 2.9.** La *serie de Fourier* de una función  $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$  se define formalmente como

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ;
- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Los números  $a_0, a_k, b_k$  con  $k \in \mathbb{N}$  se llaman *coeficientes de Fourier* de la función  $f$ .

**Definición 2.10.** Consideremos las *sumas parciales de la serie de Fourier* de la función  $f$  en su forma compleja como  $S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ , donde  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$  son los *coeficientes*

de Fourier. Escribimos

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy$$

donde a  $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$  se le llama *núcleo de Dirichlet*.

**Definición 2.11.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones integrables en todo  $\mathbb{R}$ , definimos su *convolución*  $h$  siempre que tenga sentido de la siguiente forma

$$h(x) = (f * g)(x) = \int f(y) g(x-y) dy.$$

**Lema 2.12.** La convolución de funciones  $f$  y  $g$ , ambas  $2\pi$ -periódicas, es conmutativa.

*Demostración.* Notemos que para una función integrable  $2\pi$ -periódica, se cumple la igualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = \int_{b-\pi}^{b+\pi} F(t) dt$$

para cualquier valor de  $b$ . La conmutatividad se sigue de la definición de convolución con el cambio de variables  $t = x - y$  (donde  $dt = -dy$ ), obteniendo

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy \\ &= \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) g(t) (-1) dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) g(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f(x-t) dt \\ &= (g * f)(x), \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado el hecho de que las funciones son  $2\pi$ -periódicas.  $\square$

De aquí en adelante, supondremos que  $f$  es una función continua y  $2\pi$ -periódica, entonces gracias al lema 2.12, podemos afirmar que  $S_n f(x) = f * D_n(x) = D_n * f(x)$ . Resolviendo la serie para  $D_n$ , obtenemos

$$D_n(t) = \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ para } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Verifiquemos dicha igualdad.

**Lema 2.13.** Se cumple que el núcleo de Dirichlet de orden  $n$  se puede expresar como

$$D_n(t) = \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ para } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Considerando que  $\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$ , se tiene que

$$\sum_{k=-n}^{-1} e^{ikt} = \sum_{k=1}^n e^{-ikt} = \frac{e^{-i(n+1)t} - 1}{e^{-it} - 1} - 1,$$

donde la segunda suma se puede simplificar a

$$\sum_{k=-n}^{-1} e^{ikt} = \frac{e^{-int} - 1}{1 - e^{it}}.$$

Entonces se tiene que

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1}.$$

Si multiplicamos numerador y denominador por  $e^{it/2}$  tenemos

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n-1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}.$$

Por un lado tenemos que el denominador es:

$$\begin{aligned} e^{it/2} - e^{-it/2} &= \cos\left(\frac{t}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\cos\left(-\frac{t}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) i. \end{aligned}$$

Por otro lado, realizando cuentas análogas se tiene que el numerador es:

$$e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t} = 2 \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) i.$$

Entonces, combinando el numerador y denominador obtenemos el resultado deseado.  $\square$

**Lema 2.14.**  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$ .

*Demostración.* Para esta demostración tenemos que usar la identidad que se establece en el lema 2.13 para observar que las funciones  $D_n$  son pares y  $2\pi$ -periódicas. Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} &= e^{-int} + e^{i(n-1)t} + \dots + e^{-it} + 1 + e^{it} + \dots + e^{i(n-1)t} + e^{int} \\ &= 1 + (e^{it} + e^{-it}) + (e^{i2t} + e^{-i2t}) + \dots + (e^{int} + e^{-int}) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt), \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado que por la identidad de Euler se tiene  $e^{it} + e^{-it} = 2 \cos(t)$ .

Entonces, si integramos lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt + 2 \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt \\ &= 2\pi + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{sen}(kt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

y despejando obtenemos así el resultado deseado.  $\square$

### 2.2.1. El teorema de Fejér

Nuestro objetivo es demostrar la aproximación uniforme de toda función continua en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  mediante polinomios trigonométricos. Para lograr esto, introducimos el concepto de *sumabilidad de Cesàro*, que implica tomar el límite de la media aritmética de ciertas funciones. Con la sumabilidad de Cesàro, podemos obtener una aproximación precisa de una función continua en el intervalo dado. Para ello, definimos

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(x).$$

Si usamos la convolución, se sigue que

$$\sigma_N f(x) = K_N * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x-y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) f(x-t) dt$$

donde  $K_N$  (denominado *núcleo de Fejér*) es

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t).$$

A continuación, enunciaremos algunas propiedades de  $K_N$  que serán utilizadas más adelante en la demostración del teorema de Fejér.

**Lema 2.15.** *El núcleo de Fejér cumple las siguientes propiedades:*

1. Para  $x \in [-\pi, \pi]$ , se tiene que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{1 - \cos(N+1)x}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

si  $x \neq 0$ . Además,  $K_N(0) = N+1$ .

2.  $K_N(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\}$ .
3.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt = 1$ .
4.  $K_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \left( \frac{2}{1-\cos(\delta)} \right)$  para  $0 < \delta \leq x \leq \pi$ .

*Demostración.* Demostraremos la primera propiedad, ya que las propiedades 2 y 4 se siguen de las fórmulas relacionadas con la propiedad 1, y la propiedad 3 se sigue del lema 2.14.

Volvemos a escribir el núcleo de Dirichlet como

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Observamos que  $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ , y aplicando esto con  $a = \left(n + \frac{1}{2}\right)x$  y  $b = \frac{x}{2}$ , tenemos

$$D_n(x) = \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{N+1} \left( \frac{1 - \cos(N+1)x}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right). \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$ , podemos deducir que  $2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$ . Si aplicamos esto a  $a = \frac{x}{2}$ , obtenemos la primera fórmula para  $K_N(x)$ , y si lo aplicamos a  $a = (N+1)\frac{x}{2}$ , obtenemos la segunda fórmula. Así hemos demostrado la propiedad 1.  $\square$

**Teorema 2.16** (Fejér). *Sea  $f$  una función continua  $2\pi$ -periódica. Entonces la media de Cesàro  $\sigma_N f$  converge uniformemente a  $f$ , es decir,*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_N f(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos demostrar que existe  $M = N_0$  tal que para  $N \geq M$  se cumple

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilizando la propiedad 3 de  $K_N$  del lema anterior, tenemos

$$\sigma_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) f(x-t) dt - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) [f(x-t) - f(x)] dt. \quad (2.10)$$

Debido a que  $f$  es continua en  $[-\pi, \pi]$ , también es uniformemente continua en ese intervalo. Además, como  $f$  es  $2\pi$ -periódica, es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ . Esto significa que existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } |t| \leq \delta \quad \text{y } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos a dividir la integral en dos partes:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt = A_N(x) + B_N(x),$$

donde

$$A_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt,$$

$$B_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} K_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt.$$

Vamos a hacer una estimación para  $A_N$  que sea válida para cualquier  $N$ . Se tiene que

$$|A_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |K_N(t)| |f(x-t) - f(x)| dt < \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_N(t) dt \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

utilizando las propiedades de  $K_N$ . Como este resultado es válido para cualquier  $N$ , podemos elegir  $N$  lo suficientemente grande para estimar la segunda parte de la integral, es decir,  $B_N(x)$ .

Ahora, utilizamos la última propiedad de  $K_N$  para poder estimar la integral cuando  $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ . Utilizaremos la siguiente cota:

$$|f(x-t) - f(x)| \leq |f(x-t)| + |f(x)| \leq 2M,$$

donde

$$M = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Entonces, tenemos

$$|B_N(x)| \leq 2M \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \frac{1}{N+1} \left( \frac{2}{1 - \cos(\delta)} \right) dt \leq \frac{1}{N+1} \left( \frac{4M}{1 - \cos(\delta)} \right).$$

Dado que  $\frac{1}{N+1} \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , podemos elegir  $N_0$  de manera que para  $N \geq N_0$ , la cantidad

$$\frac{1}{N+1} \left( \frac{4M}{1 - \cos(\delta)} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto nos dice que para  $N \geq N_0$ , tanto  $|A_N(x)|$  como  $|B_N(x)|$  son menores que  $\frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $x$ .

En resumen,

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_N f(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para } N \geq N_0,$$

es decir,  $\sigma_N f$  converge uniformemente a  $f$ . □

A continuación, procederemos a demostrar el teorema de Weierstrass utilizando los resultados anteriores, veámoslo:

**Teorema 2.17** (Weierstrass). *Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $[a, b]$ . Entonces,  $f$  puede ser aproximada uniformemente por polinomios en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , demostraremos que existe un polinomio  $P$  (que solo depende de  $\varepsilon$ ) tal que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Consideremos el caso en el que  $[a, b] = [0, 1]$ . Extendemos la función  $f$  a una función continua  $F$  en  $[-\pi, \pi]$  de la siguiente manera: definimos  $F(x) = f(x)$  para  $x \in [0, 1]$  y  $F(-\pi) = F(\pi) = 0$ . Luego, extendemos  $F$  a una función continua  $2\pi$ -periódica en todo  $\mathbb{R}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , según el teorema de Fejér, podemos encontrar un polinomio trigonométrico

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

tal que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, la serie de Taylor para el seno y el coseno converge uniformemente en todo intervalo compacto. Por lo tanto, podemos encontrar un polinomio  $P$  tal que

$$\max_{x \in [0, 1]} |T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando las dos últimas ideas utilizando la desigualdad triangular, y considerando que  $f = F$  en  $[0, 1]$ , obtenemos

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |F(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

lo cual completa la prueba. □

### 2.3. Otra demostración elemental

Finalmente, procederemos a demostrar de manera alternativa el teorema de Weierstrass, aunque antes presentaremos el enunciado y la demostración de un lema que resultará fundamental en la verificación de dicho teorema.

**Lema 2.18.** *Si  $0 < a < b < c$  y dados  $0 < \varepsilon < \frac{m}{2}$ , existe un polinomio  $Q(x)$  que es creciente en el intervalo  $[-c, 0]$  y es decreciente en  $[0, c]$ , tal que  $Q(x)$  está entre  $m - \varepsilon$  y  $m$  cuando  $x \in [-a, a]$  y tal que  $Q(x)$  está entre  $0$  y  $\varepsilon$  cuando  $x \in [-c, -b] \cup [b, c]$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $m = 2$ . Observemos que

$$\int_0^1 (n+1)(1-y^2)^n 2y dy = (1-y^2)^{n+1} \Big|_0^1 = 1,$$

como  $y \leq 1$  en el intervalo  $[0, 1]$ , entonces

$$\int_0^1 2(n+1)(1-y^2)^n dy > 1.$$

Sea  $k_n < n+1$  tal que

$$\int_0^1 2k_n(1-y^2)^n dy = 1.$$

Vamos a considerar la función

$$P_n(z) = \int_z^1 2k_n(1-y^2)^n dy.$$

Se tiene que  $P_n$  es un polinomio de  $z$  tal que  $P_n(1) = 0$ ,  $P_n(0) = 1$  y  $P_n(-1) = 2$  debido a la simetría de  $(1-y^2)^n$  en el eje  $y$ . Además,  $P_n(z)$  es decreciente en  $(-1, 1)$  por ser la derivada negativa en dicho intervalo.

Por un lado, fijado  $\lambda$  tal que  $\lambda \in (0, 1)$ , observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)\lambda^n = 0.$$

Por otro lado, si  $\varepsilon \in (0, 1)$  y si  $\delta \in (0, 1)$ , existe un  $n$  tal que para todo  $y \in [\delta, 1]$ ,

$$(n+1)(1-y^2)^n < \frac{\varepsilon}{2},$$

se tiene que para ese  $n$  resulta que  $P_n(\delta) < \varepsilon$  y de forma análoga se obtiene  $P_n(-\delta) > 2 - \varepsilon$ . Por lo tanto, si  $\varepsilon \in (0, 1)$  y si  $\delta \in (0, 1)$ , entonces existe  $n$  tal que si  $z \in [-1, -\delta]$  tenemos  $P_n(z) \in [2 - \varepsilon, 2]$  y si  $z \in [\delta, 1]$  ocurre que  $P_n(z) \in [0, \varepsilon]$ .

Si  $\varepsilon \in (0, 1)$  y  $0 < a < b < c$ , sea  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{c^2 - a^2}\right)$ , sea  $\beta \in (\alpha a^2, \alpha b^2)$  y sea

$$\delta = \min \{ \beta - \alpha a^2, \alpha b^2 - \beta \}.$$

Entonces, el polinomio  $Q(x) = P_n(\alpha x^2 - \beta)$  satisface las condiciones del teorema.  $\square$

Una vez que hemos establecido el lema en cuestión, procederemos a reiterar el resultado principal de nuestro análisis con el fin de demostrarlo de manera alternativa. En este caso, en lugar de definir la función en el intervalo  $[0, 1]$ , se definirá en un intervalo arbitrario  $[a, b]$ .

**Teorema 2.19** (Weierstrass). *Dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en un intervalo  $[a, b]$  y  $\varepsilon > 0$ , existe un polinomio  $P(x)$  tal que, para todo  $x \in [a, b]$*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $f([a, b]) \subset [0, M]$ , para algún  $M > 0$ . Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces es uniformemente continua en el mismo intervalo y existe  $k$  tal que

$$|x - y| < \frac{b - a}{k} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{M}{10}.$$

Sea  $a = x_0, x_1, \dots, x_k = b$ , una partición del intervalo  $[a, b]$  de norma  $\frac{b-a}{k}$ . Vamos a considerar los subintervalos de esta partición contenidos en  $f^{-1}([\frac{1}{2}M, M])$  y sea  $A$  su unión.

Entonces,  $A$  se puede escribir como una unión disjunta de  $r$  intervalos cerrados  $I_1, \dots, I_r$ , cada  $I_i$  flanqueado por intervalos  $H_i$  y  $J_i$  de longitud  $\frac{b-a}{2k}$  y tales que

$$f(H_i \cup J_i) \subset [0.4M, 0.6M].$$

Aplicando el lema 2.18 con  $m = \frac{M}{2}$  y  $\varepsilon = \frac{M}{10r}$ , para cada  $i$  existe un polinomio  $Q_i$  tal que  $Q_i(x) \in [\frac{M}{2} - \varepsilon, \frac{M}{2}]$  si  $x \in I_i$  y  $Q_i(x) \in [0, \varepsilon]$  en el complementario de  $H_i \cup I_i \cup J_i$ .

Sea  $P_1(x) = Q_1(x) + \dots + Q_r(x) - \frac{M}{5}$  con  $x \in [a, b]$  y veamos que  $(f - P_1)([a, b]) \subset [0, 0.8M]$ , para ello distingamos dos casos:

1. Si  $x \in I_i$  se tiene lo siguiente:

- $f(x) \in [\frac{M}{2}, M]$ ,
- $Q_i(x) \in [\frac{M}{2} - \varepsilon, \frac{M}{2}]$ ,
- $Q_j(x) \in [0, \varepsilon], j \neq i$ .

Por un lado, debemos tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} f(x) - P_1(x) &= f(x) - Q_1(x) - \dots - Q_r(x) + \frac{M}{5} \\ &\leq f(x) - Q_i(x) + \frac{M}{5} \leq M - \left(\frac{M}{2} - \varepsilon\right) + \frac{M}{5} \\ &= \frac{M}{2} + \frac{M}{5} + \varepsilon = \frac{7M}{10} + \frac{M}{10r} \leq \frac{8M}{10}. \end{aligned}$$

Por otro lado, es importante considerar que:

$$\begin{aligned} f(x) - P_1(x) &= f(x) - Q_1(x) - \dots - Q_r(x) + \frac{M}{5} \\ &\geq \frac{M}{2} - \frac{M}{2} - (r-1)\varepsilon + \frac{M}{5} \\ &= \frac{M}{5} - \frac{(r-1)M}{r \cdot 10} \geq \frac{M}{10} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que  $(f - P_1)(x) \in [0, 0.8M]$  si  $x \in I_i$  para algún  $i$ .

2. Si  $x \notin A$  se tiene que  $f(x) \leq 0.6M = \frac{3M}{5}$ . Entonces restando como en el caso anterior las dos funciones obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} f(x) - P_1(x) &= f(x) - Q_1(x) - \cdots - Q_r(x) + \frac{M}{5} \\ &\leq f(x) + \frac{M}{5} \leq \frac{3M}{5} + \frac{M}{5} = \frac{4M}{5} = 0.8M. \end{aligned}$$

Ahora dentro de este caso, distinguiremos otros dos subcasos:

- a) Si  $x$  está en el complementario de  $\bigcup_{i=1}^r H_i \cup J_i$ , entonces

$$Q_j(x) \in [0, \varepsilon] \text{ para todo } j = 1, \dots, r,$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} f(x) - P_1(x) &= f(x) - Q_1(x) - \cdots - Q_r(x) + \frac{M}{5} \\ &\geq \frac{M}{5} - Q_1(x) - \cdots - Q_r(x) \geq \frac{M}{5} - r\varepsilon \\ &= \frac{M}{5} - r \frac{M}{10r} = \frac{M}{10} > 0. \end{aligned}$$

- b) Si  $x \in H_i \cup J_i$  para algún  $i$ , entonces:

- $f(x) \geq 0.4M = \frac{2M}{5}$ ,
- $Q_i(x) \leq \frac{M}{2}$ ,
- $Q_j(x) \in [0, \varepsilon], j \neq i$ .

Así que,

$$\begin{aligned} f(x) - P_1(x) &\geq \frac{2M}{5} + \frac{M}{5} - \frac{M}{2} - (r-1)\varepsilon \\ &= \frac{M}{10} - (r-1) \frac{M}{10r} > 0. \end{aligned}$$

En conclusión,  $f(x) - P_1(x) \in [0, 0.8M]$  para todo  $x \in [a, b] \setminus A$ .

Entonces se cumple que:

$$(f - P_1)([a, b]) \subset [0, 0.8M].$$

Inductivamente, para cada  $j \in \mathbb{N}$  existen polinomios  $P_1, \dots, P_j$  tales

$$(f - P_1 - \cdots - P_j)([a, b]) \subset [0, 0.8^j M].$$

Si  $0.8^j < \varepsilon$ , entonces  $P = P_1 + \cdots + P_j$  es el polinomio buscado. □



## Capítulo 3

# Teorema de Stone-Weierstrass

El teorema de Stone-Weierstrass es una generalización importante del teorema de Weierstrass. Este teorema caracteriza, de manera sencilla, las álgebras de funciones continuas que son uniformemente densas en  $C(X)$ , para  $X$  compacto. En lo que sigue,  $X$  denotará un espacio topológico compacto, en sustitución del intervalo  $[0, 1]$ , que era el espacio marco del capítulo anterior. Para establecer el teorema de Stone-Weierstrass, necesitaremos algunas definiciones y resultados previos, los cuales se pueden encontrar en [3]. Posteriormente vamos a demostrar el teorema de Stone que podemos ver también en [3], así como dos corolarios que son consecuencia directa de dicho teorema.

**Definición 3.1.** Sea  $\mathcal{A}$  una familia de funciones reales definidas en un conjunto  $X$ . Diremos que  $\mathcal{A}$  es un *álgebra* si satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo par de funciones  $f, g \in \mathcal{A}$ , la suma  $f + g$  también pertenece a  $\mathcal{A}$ .
2. Para todo par de funciones  $f, g \in \mathcal{A}$ , el producto  $fg$  también pertenece a  $\mathcal{A}$ .
3. Para toda función  $f \in \mathcal{A}$  y toda constante real  $c$ , el producto por un escalar  $cf$  también pertenece a  $\mathcal{A}$ .

**Definición 3.2.** Sea  $X$  un conjunto no vacío y sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de funciones sobre  $X$ . Diremos que  $\mathcal{A}$  separa los puntos de  $X$  si, siempre que  $x \neq y$  en  $X$ , existe alguna función  $f \in \mathcal{A}$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ . Diremos que  $\mathcal{A}$  no se anula en ningún punto de  $X$  si para cada  $x \in X$  existe alguna función  $f \in \mathcal{A}$  tal que  $f(x) \neq 0$ .

Una vez introducidos dichos conceptos, vamos a demostrar un lema que será empleado para probar el teorema de Stone-Weierstrass.

**Lema 3.3.** *Existe  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polinomios  $p_n(t)$  que converge uniformemente a la función  $\sqrt{t}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .*

*Demostración.* Fijemos  $p_0(t) \equiv 0$ , y definamos

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{t - p_n(t)^2}{2}.$$

Vamos a demostrar por inducción que  $p_n(t) \leq \sqrt{t}$  para todo  $t \in [0, 1]$ . La desigualdad es cierta si  $n = 0$ . Supongamos que es cierto para  $n$  y veamos que es cierto para  $n + 1$ .

Entonces:

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{t - p_n(t)^2}{2} = (\sqrt{t} - p_n(t)) \left(1 - \frac{\sqrt{t} + p_n(t)}{2}\right),$$

y siendo  $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$ , concluimos que  $p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Tenemos que  $p_n(t) \leq p_{n+1}(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , de modo que la sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente y acotada en  $[0, 1]$ . Por lo tanto, la sucesión converge puntualmente, es decir, que existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = v(t)$  para  $t \in [0, 1]$ . Pasando al límite en la igualdad que define  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  observamos que:

$$v(t) = v(t) + \frac{t - v(t)^2}{2},$$

y como  $v(t) \geq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ , concluimos que  $v(t) = \sqrt{t}$ .

Por el teorema de Dini, se tiene que la sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $v$  en  $[0, 1]$ .  $\square$

Ahora enunciaremos y demostraremos el teorema de Stone-Weierstrass dividiendo la prueba en cinco pasos.

**Teorema 3.4** (Stone-Weierstrass). *Si una subálgebra  $\mathcal{A}$  de  $C(X)$  contiene funciones constantes y separa los puntos de  $X$ , entonces  $\bar{\mathcal{A}} = C(X)$ .*

*Demostración. Primer paso* Si  $f \in \bar{\mathcal{A}}$ , entonces  $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$ .

En efecto, si  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión de funciones polinómicas encontradas en el lema anterior, consideramos las funciones  $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas como

$$g_n(u) = \|f\|_\infty p_n \left( \frac{f(u)^2}{\|f\|_\infty^2} \right),$$

y observamos que  $|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  converge uniformemente en  $X$ . Además, las operaciones polinómicas mantienen las funciones en la subálgebra, de modo que  $g_n \in \bar{\mathcal{A}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Segundo paso* Si  $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$ , entonces  $\inf\{f, g\} \in \bar{\mathcal{A}}$  y  $\sup\{f, g\} \in \bar{\mathcal{A}}$ . De hecho, podemos escribir

$$\inf\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}, \quad \sup\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

y concluimos utilizando el primer paso.

*Tercer paso* Dados dos puntos distintos  $x$  e  $y$  de  $X$ , y dados dos números  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , existe una función  $f \in \mathcal{A}$  tal que  $f(x) = \alpha$  y  $f(y) = \beta$ .

Por supuesto, existe una función  $g \in \mathcal{A}$  tal que  $g(x) \neq g(y)$ . Como  $\mathcal{A}$  contiene las funciones constantes, podemos tomar  $f \in \mathcal{A}$  definida como

$$f(u) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{g(u) - g(x)}{g(y) - g(x)}.$$

*Cuarto paso* Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in X$  y  $f \in C(X)$ , existe una función  $g \in \bar{\mathcal{A}}$  tal que  $g(x) = f(x)$ , y  $g(u) \leq f(u) + \varepsilon$  para todo  $u \in X$ .

Utilizando el tercer paso, para cada  $z \in X$  fijo, existe una función  $h_z \in \mathcal{A}$  tal que  $h_z(x) = f(x)$  y  $h_z(z) = f(z)$ . Por continuidad, debe existir un intervalo abierto  $V(z)$  de  $z$  tal que para cada  $u \in V(z)$  se tenga que  $h_z(u) \leq f(u) + \varepsilon$ . Como  $z \in X$ , estos intervalos abiertos  $V(z)$  recubren  $X$ , y como  $X$  es compacto, podemos encontrar un subrecubrimiento finito  $V(z_1), \dots, V(z_m)$ . Definimos  $g = \inf\{h_{z_1}, \dots, h_{z_m}\}$ . Por el segundo paso, tenemos que  $g \in \bar{\mathcal{A}}$ . Además,  $g$  verifica las condiciones requeridas.

*Quinto paso* Dado  $\varepsilon > 0$  y  $f \in C(X)$ , existe una función  $\varphi \in \bar{\mathcal{A}}$  tal que  $f(u) - \varepsilon \leq \varphi(u) \leq f(u) + \varepsilon$  para todo  $u \in X$ .

Utilizando el cuarto paso, para cada  $x \in X$  fijo, existe una función  $g_x \in \bar{\mathcal{A}}$  tal que  $g_x(x) = f(x)$  y  $g_x(u) \leq f(u) + \varepsilon$ . Por continuidad, debe existir un intervalo abierto  $U(x)$  de  $x$  tal que para cada  $u \in U(x)$  se tenga que  $g_x(u) \geq f(u) - \varepsilon$ . Como  $x \in X$ , estos intervalos abiertos  $U(x)$  recubren  $X$ , y como  $X$  es compacto, podemos encontrar un subrecubrimiento finito  $U(x_1), \dots, U(x_m)$ . Definimos  $\varphi = \sup\{g_{x_1}, \dots, g_{x_m}\}$ . Por el segundo paso, tenemos que  $\varphi \in \bar{\mathcal{A}}$ . Además,  $\varphi$  verifica las condiciones requeridas.  $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema de Stone-Weierstrass, podemos establecer lo siguiente:

**Corolario 3.5.** *Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ , entonces toda función continua  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser aproximada uniformemente por una sucesión de funciones polinomiales.*

*Demostración.* Es evidente que el álgebra de polinomios contiene a las constantes. Además, dicha álgebra tiene la propiedad de separar los puntos de  $K$ . Tomemos dos puntos distintos  $x = (x_1, \dots, x_N)$  y  $y = (y_1, \dots, y_N)$  en  $K$ . Existe al menos un índice  $i$  tal que  $x_i \neq y_i$ . Sea  $p(u_1, \dots, u_N) = u_i$  el polinomio correspondiente. Notemos que  $p(x) \neq p(y)$ , lo cual demuestra que el álgebra de polinomios separa los puntos de  $K$ . Por lo tanto, toda función continua en  $K$  puede ser aproximada uniformemente por una sucesión de funciones polinomiales.  $\square$

**Corolario 3.6.** *Toda función continua y periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es el límite uniforme de una secuencia de funciones polinómicas trigonométricas.*

*Demostración.* Sea  $T > 0$  el periodo de la función  $f$ , y consideremos el conjunto  $\mathcal{A}$  de funciones polinómicas trigonométricas de la forma:

$$a_0 + \sum_{k=1}^N \left( a_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) + b_k \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) \right).$$

Se puede observar que  $\mathcal{A}$  forma un álgebra y, cuando se restringe al intervalo compacto  $[0, T]$ , se convierte en una subálgebra de  $C([0, T])$  que contiene las funciones constantes y separa los puntos de  $[0, T]$ . Entonces  $\mathcal{A}$  es denso en  $C[0, T]$ , concluyendo así la prueba.  $\square$

Existen otras familias de funciones que también son densas en el conjunto de las funciones continuas y para ello veamos el siguiente resultado.

**Corolario 3.7.** *Sea  $\mathcal{V}$  el espacio vectorial de  $C[0, 1]$  generado por las funciones  $\{e^{nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ , entonces  $\mathcal{V}$  es uniformemente denso en  $C[0, 1]$ .*

*Demostración.* Para demostrar que el espacio vectorial generado por las funciones  $\{e^{nx} : n \in \mathbb{Z}\}$  es uniformemente denso en  $C[0, 1]$ , utilizaremos el teorema 3.4.

Primero, verifiquemos que el espacio generado denotado como  $\mathcal{V}$  cumple las condiciones de la definición 3.2.

1. **Contiene funciones constantes:** La función constante  $f(x) = 1$  está en el espacio generado, ya que puede ser expresada como  $f(x) = e^{0 \cdot x}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{V}$  contiene funciones constantes.
2. **Separa los puntos:** Tomemos dos puntos distintos  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ . Si tomamos  $n = 1$ , la función  $f(x) = e^x$  cumple  $f(x_1) = e^{x_1} \neq e^{x_2} = f(x_2)$  por ser la función exponencial una función estrictamente creciente. Por lo tanto,  $\mathcal{V}$  separa los puntos.

Ahora, debemos demostrar que la clausura del espacio generado es igual a  $C[0, 1]$ , es decir,  $\bar{\mathcal{V}} = C[0, 1]$ . Para probar esto vamos a demostrar que  $\mathcal{V}$  es una subálgebra y para ello debemos comprobar las 3 condiciones de la definición 3.1. Veámoslo:

1.  $f + g \in \mathcal{V}$ : Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  del espacio vectorial  $\mathcal{V}$  se tiene que la suma de ambas está en  $\mathcal{V}$  por ser  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial.

2.  $fg \in \mathcal{V}$ : Tomemos dos funciones  $f(x) = e^{nx}$  y  $g(x) = e^{mx}$  tal que  $f, g \in \mathcal{V}$ . Definimos la función producto como  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Tenemos:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = e^{nx} \cdot e^{mx} = e^{(n+m)x}.$$

Dado que  $n$  y  $m$  son enteros,  $n + m$  también es un entero. Por lo tanto,  $h(x) \in \mathcal{V}$ .

3.  $cf \in \mathcal{V}$ : Dada una función  $f$  y una constante real  $c$  se tiene que la multiplicación por escalar está en  $\mathcal{V}$  por ser un espacio vectorial.

Entonces, hemos demostrado que  $\mathcal{V}$  es una subálgebra que contiene a la función constante 1 y separa los puntos de  $[0, 1]$ , por lo tanto por el teorema de Stone-Weierstrass se tiene que  $\bar{\mathcal{V}} = C[0, 1]$ . Esto significa que el espacio vectorial generado por las funciones  $\{e^{nx} : n \in \mathbb{Z}\}$  es uniformemente denso en  $C[0, 1]$  y así concluimos la demostración.  $\square$

Como hemos dicho al principio del capítulo el teorema de Stone-Weierstrass es una generalización del teorema de aproximación de Weierstrass y esto lo podemos ver en una breve demostración del teorema de Weierstrass que podemos encontrar en [8].

**Teorema 3.8** (Weierstrass). *Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Dado un  $\varepsilon > 0$ , entonces existe un polinomio*

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, n \in \mathbb{N} \text{ y } a_k \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

tal que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a, b].$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de todos los polinomios  $P(x)$  de la forma (3.1) con dominios restringidos a  $[a, b]$ . Dado que  $[a, b]$  es compacto y  $\mathcal{A}$  es una subálgebra de  $C([a, b])$  que separa puntos  $[P(x) = x]$  y contiene a las funciones constantes  $[P(x) = 1]$ , se sigue del teorema 3.4 que existe algún  $P \in \mathcal{A}$  tal que  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in [a, b]$ .  $\square$

En el Teorema de Stone-Weierstrass, surgió una pregunta interesante sobre si la hipótesis de que el álgebra contenga constantes puede ser reemplazada por una suposición más general. Queremos demostrar que, dado un álgebra  $\mathcal{A}$  y un conjunto no vacío  $X$ , para cualquier  $x \in X$  existe una función  $f \in \mathcal{A}$  tal que  $f(x) \neq 0$ . En la demostración del teorema de Stone-Weierstrass, podemos observar que en los pasos 1, 2, 4 y 5 no se utiliza la hipótesis de que el álgebra contenga funciones constantes. Por lo tanto, vamos a demostrar el paso 3 con esta nueva hipótesis. Para ello, enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema que se puede ver en [8].

**Teorema 3.9.** *Sea  $X$  un conjunto no vacío y sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de funciones reales en  $X$  que separa los puntos de  $X$  y no se anula en ningún punto de  $X$ . Si  $x \neq y \in X$  y  $a$  y  $b$  son números reales, entonces existe una función  $h \in \mathcal{A}$  tal que  $h(x) = a$  y  $h(y) = b$ .*

*Demostración.* Sean  $x \neq y$ ,  $a$  y  $b$  dados. Sean  $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{A}$  tales que  $f_1(x) \neq f_1(y)$ ,  $f_2(x) \neq 0$ , y  $f_3(y) \neq 0$ .

Supongamos que  $f_1(x) = 0$ . Entonces  $f_1(y) \neq 0$ , y podemos tomar  $h = \alpha f_1 + \beta f_2$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las soluciones del sistema

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = a,$$

$$\alpha f_1(y) + \beta f_2(y) = b.$$

Estas soluciones existen porque el determinante de los coeficientes es  $f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(x) = -f_1(y)f_2(x) \neq 0$ . De manera similar, si  $f_1(y) = 0$ , podemos tomar  $h = \alpha f_1 + \beta f_3$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Finalmente, supongamos que  $f_1(x) \neq 0$  y  $f_1(y) \neq 0$ . Entonces, podemos tomar  $h = \alpha f_1 + \beta f_1^2$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son soluciones del sistema

$$\alpha f_1(x) + \beta f_1(x)^2 = a,$$

$$\alpha f_1(y) + \beta f_1(y)^2 = b.$$

Estas soluciones existen porque el determinante de los coeficientes es  $f_1(x)f_1(y)[f_1(y) - f_1(x)] \neq 0$ .

□

## Capítulo 4

# Aplicaciones

En el presente capítulo, abordaremos una aplicación del teorema de Stone-Weierstrass en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, con el objetivo de demostrar el teorema de Cauchy-Peano. Con este propósito, realizaremos una introducción preliminar a conceptos necesarios para la demostración, tales como las condiciones de equicontinuidad y lipschitzianidad de una función, los iterantes de Picard y el teorema de Ascoli-Arzelà y el teorema fundamental del cálculo integral, lo que podemos ver en [2].

**Definición 4.1.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto y  $S$  un conjunto de funciones definidas en  $I$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $S$  es *equicontinuo* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid x, y \in I, |x - y| < \delta \implies \|g(x) - g(y)\| < \varepsilon \quad \forall g \in S.$$

**Definición 4.2.** Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , diremos que la función  $f$  es (globalmente) Lipschitziana en el subconjunto  $G$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in \Omega.$$

**Definición 4.3.** Para un problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

en el que se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución en un dominio

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, a, b > 0\}$$

es posible construir una solución de forma iterativa de acuerdo a la expresión

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{m-1}(s)) ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a] \text{ y } m \in \mathbb{N},$$

donde  $\varphi_0(t) = x_0$ . A estas iteraciones se les conoce como iterantes de Picard.

**Teorema 4.4** (Ascoli-Arzelà). Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto y  $S$  un conjunto de funciones definidas en  $I$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $S$  es equicontinuo y uniformemente limitado, entonces toda sucesión de elementos de  $S$  tiene alguna subsucesión que converge uniformemente en  $I$ .

**Teorema 4.5** (Fundamental del cálculo integral). Sea  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Riemann-integrable en  $[a, b]$  y  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  su función integral:

$$F(t) = \int_a^t g(s) ds.$$

Si  $f$  es continua en  $\bar{t} \in [a, b]$ , entonces  $F$  es derivable en  $\bar{t}$  y, además  $F'(\bar{t}) = f(\bar{t})$ .

Como ya hemos definido los conceptos mencionados anteriormente, ahora vamos a enunciar y demostrar el teorema de Cauchy-Peano que garantiza la existencia de soluciones para ciertos problemas de valor inicial usando para ello los iterantes de Picard de ciertos problemas modificados y el teorema de Stone-Weierstrass. Dicha demostración puede verse en [2].

**Teorema 4.6** (Cauchy-Peano). Sea  $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un abierto,  $(t_0, x_0) \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $A$ . Entonces existe solución local,  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $D$  es un entorno de  $t_0$  tal que  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in D$ , del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

*Demostración.* Sustituyendo  $x$  por  $x - x_0$  y  $t$  por  $t - t_0$ , podemos suponer que  $t_0 = x_0 = 0$ . Como  $A$  es un abierto, existe un rectángulo  $R = [-t_1, t_1] \times [-x_1, x_1] \subset A$ .

Como  $R$  es compacto y  $f$  continua, tenemos que  $\sup_R |f| \leq C < \infty$  y además por el teorema de Stone-Weierstrass sabemos existe una sucesión de funciones de Lipschitz

$$f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

que converge uniformemente a  $f$  en  $R$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $\sup_R |f_k| \leq 2C$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Definimos los iterantes de Picard para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f_k(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

de la siguiente manera,  $\varphi_{k,n} : D = [-t_2, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $t_2 = \min\{t_1, \frac{x_1}{2C}\}$ . Sabemos que  $\varphi_{k,0}(t) \equiv 0$ , y  $\varphi_{k,n+1}(t) = \int_0^t f_k(s, \varphi_{k,n}(s)) ds$ . Veamos que están bien definidos por inducción, como

$$\begin{aligned} |\varphi_{k,n+1}(t)| &\leq \left| \int_0^t f_k(s, \varphi_{k,n}(s)) ds \right| \\ &\leq |t| \sup_R |f_k| \\ &\leq t_2 \cdot 2C \\ &\leq x_1, \end{aligned}$$

se tiene que  $(s, \varphi_{k,n+1}(s))$  está dentro del rectángulo compacto  $R$ . Tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{k,n+1}(t) - \varphi_{k,n}(t)| &\leq \left| \int_0^t |f_k(s, \varphi_{k,n}(s)) - f_k(s, \varphi_{k,n-1}(s))| ds \right| \\ &\leq L_k \left| \int_0^t |\varphi_{k,n}(s) - \varphi_{k,n-1}(s)| ds \right|, \end{aligned}$$

donde  $L_k$  es la constante de Lipschitz de  $f_k$ . Para que la diferencia sea máxima definimos

$$M_{k,n}(t) = \sup_{s \in [0,t]} |\varphi_{k,n+1}(s) - \varphi_{k,n}(s)|$$

y tenemos la siguiente cota

$$M_{k,n}(t) \leq L_k \left| \int_0^t M_{k,n-1}(s) ds \right|,$$

y además

$$\begin{aligned} M_{k,0}(t) &\leq \left| \int_0^t |f_k(s, 0)| ds \right| \\ &\leq |t| \sup_R |f_k| \\ &\leq 2C|t|. \end{aligned}$$

Por inducción, esto implica que la cota  $M_{k,n}(t) \leq \frac{2CL_k^n |t|^{n+1}}{(n+1)!}$  tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $t \in D$ .

Las familia de funciones  $\varphi_{k,n}$  es equicontinua y además que para  $-t_2 \leq t < s \leq t_2$  tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{k,n+1}(s) - \varphi_{k,n+1}(t)| &\leq \int_t^s |f_k(s', \varphi_{k,n}(s'))| ds' \\ &\leq |s - t| \sup_R |f_k| \\ &\leq 2C|s - t|, \end{aligned}$$

por lo que según el teorema de Ascoli-Arzelà, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe una subsucesión  $\{\varphi_{k,\omega_k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente a la función continua  $\varphi_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Si tomamos el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en

$$\left| \varphi_{k,\omega_k(n)}(t) - \int_0^t f_k(s, \varphi_{k,\omega_k(n)}(s)) ds \right| = |\varphi_{k,\omega_k(n)}(t) - \varphi_{k,\omega_k(n)+1}(t)| \\ \leq M_{k,\omega_k(n)}(t_2),$$

entonces tenemos que  $\varphi_k(t) = \int_0^t f_k(s, \varphi_k(s)) ds$ . De nuevo, la familia de funciones  $\varphi_k$  está en las hipótesis del teorema de Ascoli-Arzelà. Por lo tanto, existe una subsucesión  $\varphi_{\phi(k)}$  que converge uniformemente a la función continua  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $f_{\phi(k)}$  son equicontinuas por el teorema de Ascoli-Arzelà y tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  en  $\varphi_{\phi(k)}(t) = \int_0^t f_{\phi(k)}(s, \varphi_{\phi(k)}(s)) ds$  se tiene que  $\varphi(t) = \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds$ . Entonces, por el teorema fundamental del cálculo integral se tiene que  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  en  $D$ .

□

# Bibliografía

- [1] Bartle, R. G. (1964). *The elements of real analysis* (Vol. 2). New York: Wiley.
- [2] Coddington, E. A., Levinson, N., Teichmann, T. (1956). Theory of *Ordinary Differential Equations*. *Physics Today*, 9(2), 18.
- [3] Fonda, A. (2016). Playing around resonance. In *Playing Around Resonance: An Invitation to the Search of Periodic Solutions for Second Order Ordinary Differential Equations*. Cham: Springer International Publishing.
- [4] Phillips, G. M. (2003). *Interpolation and approximation by polynomials* (Vol. 14). Springer Science Business Media.
- [5] Pouso, R. L. (2019). *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales*. USC Editora.
- [6] Rao, N. V. (2005). The Stone-Weierstrass theorem revisited. *The American Mathematical Monthly*, 112(8), 726-729.
- [7] Schenkman, E. (1972). The Weierstrass approximation theorem. *The American Mathematical Monthly*, 79(1), 65-66.
- [8] Stromberg, K. R. (2015). *An introduction to classical real analysis* (Vol. 376). American Mathematical Soc..