USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Homología persistente de la red cósmica

Pablo Navares Ferreiro

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Homología persistente de la red cósmica

Pablo Navares Ferreiro

Julio de 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Geometría y Topología
Título: Homología persistente de la red cósmica
Breve descrición do contido
El trabajo consistirá en introducir los conceptos de homología persistente y exponer cómo se está utilizando para el estudio de la topología de la red cósmica. Nos guiaremos por el preprint aparecido en arXiv Georg Wilding, Keimpe Nevenzeel, et al. (2021), *Persistent homology of the cosmic web – I. Hierarchical topology in* Λ*CDM cosmologies*, *MNRAS* **507**, 2968–2990.

Índice

Resumen viii

Introducción xi

1. Complejos simpliciales **1**

1.1. Complejos simpliciales geométricos 1

1.2. Aplicaciones simpliciales 4

1.3. Complejos simpliciales abstractos 5

1.4. Homología de complejos simpliciales 6

1.5. Números de Betti 7

1.6. Homomorfismos de cadenas inducidos por aplicaciones simpliciales 10

1.7. Homología persistente 11

2. Paso de nube de puntos a una filtración de complejos **17**

2.1. Motivación general 17

2.2. Complejos de Cech y de Vietoris-Rips 18

2.3. Densidad y filtración 20

3. Cálculo de la homología persistente **23**

3.1. Preámbulo 23

3.2. Reconstrucción del campo de densidad desde la muestra 23

3.3. Valor crítico y filtración 26

3.4. Algoritmo de la homología persistente 27

4. Diagramas de persistencia y curvas de Betti de la red cósmica 33

4.1. Introducción 33

4.2. Análisis de los diagramas: Curvas de Betti 35

4.3. Análisis de los diagramas: Diagramas de persistencia 37

Bibliografía 41

Resumen

En los últimos años ha habido un gran desarrollo de técnicas topológicas para su aplicación para el análisis de datos. Dichas técnicas se engloban en lo que se suele llamar *Topological Data Analysis (TDA)*. En este trabajo, además de dar las nociones elementales para su comprensión, describiremos las herramientas matemáticas inspiradas en la topología así como su uso que, para el estudio de la red cósmica, se presentan en el artículo Georg Wilding, Keimpe Nevenzeel, et al. (2021), *Persistent homology of the cosmic web – I. Hierarchical topology in* Λ*CDM cosmologies*, *MNRAS* **507**, 2968–2990.

Abstract

In recent years a large number of topological inspired tools are being developed for their application in data analysis. These tools are included in what is known *Topological Data Analysis (TDA)*. In this work, in addition to the basic notions for its understanding, we will describe the mathematical techniques inspired by topology as well as its use, for the study of the cosmic web, presented in the article Georg Wilding, Keimpe Nevenzeel, et al. (2021), *Persistent homology of the cosmic web – I. Hierarchical topology in* Λ*CDM cosmologies*, *MNRAS* **507**, 2968–2990.

Introducción

Nuestro objetivo en este trabajo es presentar las herramientas matemáticas y el uso que hacen de ellas en el articulo [1] donde estudian la evolución del universo, así como sus componentes a gran escala a partir de una fuente de datos obtenida tanto por observación como por simulación.

El campo matemático al que se acogen las herramientas matemáticas de este trabajo es el de la topología algebraica, concretamente el análisis topológicos de datos. Las herramientas de esta rama permiten considerar una gran cantidad de puntos y transformarlos en un objeto topológico, al que le aplicaremos una filtración para ir estudiando sus propiedades y sobre todo, los cambios en su forma.

En particular en el artículo citado anteriormente, transforman los datos obtenidos por observación astronómica en un complejo simplicial, sobre el que describen un campo de densidades continuo. Posteriormente calculan la homología persistente y obtienen información relevante sobre los invariables topológicos, como por ejemplo sus componentes conexas, sus agujeros y sus cavidades, que en términos astronómicos podríamos asociar con los nodos o cúmulos de materia esparcidos puntualmente por el espacio, filamentos que unen estos nodos, y grandes vacíos.

La memoria está estructura de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 introduciremos los complejos simpliciales, el objeto geométrico fundamental sobre la que se asientan las bases del trabajo. Después describiremos lo que es la homología de un complejo simplicial y definiremos los números de Betti. Posteriormente, hablaremos de las filtraciones de complejos simpliciales, lo que es la homología persistente y terminaremos presentando los diagramas de persistencia, principal herramienta de este trabajo que nos permite observar la evolución de sus invariantes topológicos. Siguiendo con el Capítulo 2 veremos distintos métodos sobre como asociamos a una nube de puntos en un espacio métrico una filtración de complejos simpliciales sobre los que después se calculará la homología persistente.

Ya llegados al Capítulo 3 podemos encontrar encontrar la adaptación que hacen los autores del articulo de las herramientas descritas en los capítulos anteriores para poderlas aplicar a su problema particular. Así por ejemplo la filtración de complejos la harán a través del *Estimador*

de Campo de Teselación de Delaunay o *DTFE*. Dicho estimador produce un campo definido a trozos continuo y lineal de los valores de densidad definidos en la triangulación de Delaunay generada por la distribución de los puntos muestrales, estos últimos funcionan como los vértices del teselado. A continuación estará la explicación del algoritmo que siguen para el cálculo de la persistencia, reduciendo una matriz de partida que produce directamente los pares nacimiento y muerte necesarios para los distintos diagramas de persistencia. Dichos diagramas junto con las curvas de Betti los exponemos en el Capítulo 4, que trata sobre las conclusiones y explicaciones que consiguen con estos gráficos, evaluando y analizando los aspectos topológicos de la distribuciones de la masa cosmológica.

Capítulo 1

Complejos simpliciales

En este capítulo presentaremos los complejos simpliciales así como sus principales características ya que es un concepto matemático básico sobre el que se asienta el trabajo. Para escribir tanto las definiciones como los resultados que veremos a continuación nos hemos apoyado en el libro *Elements of Algebraic Topology* de Munkres ([2]).

1.1. Complejos simpliciales geométricos

Comenzaremos introduciendo una definición esencial para la explicación geométrica de símplice, el cual es el elemento principal sobre el que asentaremos nuestra base teórica.

Definición 1.1. Dado un conjunto no vacío de puntos $\{a_0, ..., a_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, este conjunto es *geométricamente independiente* si para cualesquiera escalares reales t_i que verifican:

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0$$

se tiene que $t_0 = t_1 = ... = t_n = 0$

Definición 1.2. Sea $\{a_0, ..., a_n\}$ un conjunto de puntos geométricamente independientes de $\mathbb{R}^n$. Definimos el *n-símplice σ geométrico* generado por $a_0, ..., a_n$ como todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que verifican

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \quad \text{y} \quad t_i \geq 0 \; \forall i$$

A los puntos $a_0, ..., a_n$ se les conoce como *vértices* de σ; al número n la *dimensión* de σ. A cualquier símplice generado por un subconjunto de $\{a_0, ..., a_n\}$ se llama *cara* de σ.

Ejemplo 1.3. Algunos ejemplos de símplices geométricos para $n = 0, 1, 2, 3$ son los que vemos en la siguiente figura donde, según su dimensión los nombraremos como:

- 0-símplice o “punto”.
- 1-símplice o “segmento”.
- 2-símplice o “triángulo”.
- 3-símplice o “tetraedro”.

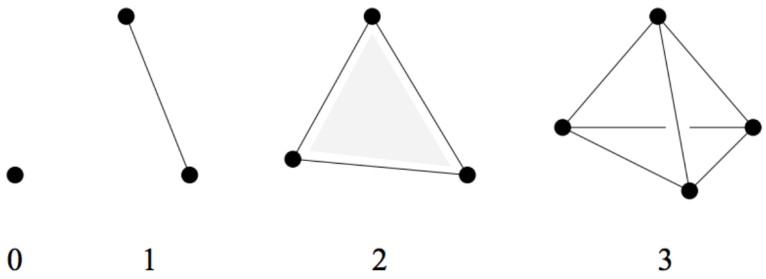

Figura 1.1: 0-símplice, 1-símplice, 2-símplice y 3-símplice (Link de la imagen)

Al estar trabajando sobre un espacio métrico de dimensión 3, solo nos aparecerán hasta 3-símplices.

En nuestro trabajo trataremos con colecciones grandes pero finitas de símplices, también conocidas como *complejos simpliciales geométricos finitos*

Definición 1.4. Un *complejo simplicial geométricos finito* K en $\mathbb{R}^n$ es una colección finita de símplices en $\mathbb{R}^n$ que verifica:

1. Cada cara de un símplice de K está en K.
2. La intersección no vacía de cualesquiera dos símplices de K es una cara de cada uno de ellos.

A partir de ahora K denotará un complejo simplicial finito. Con el objetivo de facilitar el entendimiento del texto, nos apoyaremos en un ejemplo que será común para los siguientes apartados y sobre el que explicaremos las siguientes definiciones.

Ejemplo 1.5. En la siguiente figura presentamos un ejemplo de complejo simplicial geométrico formado por vértices (0-símplices), aristas (1-símplices) y caras (2-símplices).

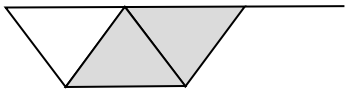

Figura 1.2: Complejo simplicial geométrico K.

Para definir las aplicaciones entre símplices necesarias para el desarrollo de nuestra herramienta matemática, vamos a introducir primero los conceptos de *subcomplejo* y *p-esqueleto* con sus consiguientes ejemplos sobre K.

Definición 1.6. Si L es una subcolección de K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es en si mismo un complejo simplicial geométrico, llamado subcomplejo de K.

Ejemplo 1.7. Siguiendo el ejemplo anterior, mostramos aquí uno de sus subcomplejos, L.

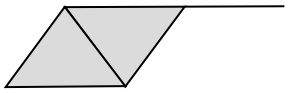

Figura 1.3: Subcomplejo L de K

Los p-esqueletos, son un caso de subcomplejo como veremos a continuación.

Definición 1.8. Llamamos p-esqueleto de K también denotado $K^{(p)}$ al subcomplejo de K formado por todos los símplices de dimensión menor o igual a p con $p \in \mathbb{N}$.

Observación 1.9. Destacamos en caso $p = 0$, esto es, $K^{(0)}$ que como cabe esperar es la colección de todos los 0-símplices que contiene K, es decir, sus vértices.

Ejemplo 1.10. En la siguiente figura vemos de nuevo nuestro complejo simplicial geométrico K y a su derecha su 1-esqueleto $K^{(1)}$.

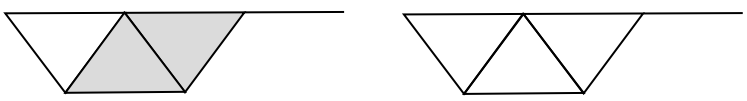

Figura 1.4: A la izquierda K y a la derecha el 1-esqueleto de K o $K^{(1)}$

1.2. Aplicaciones simpliciales

Con el objetivo de llegar a definir el concepto de homología persistente, definiremos y haremos un breve ejemplo sobre las *aplicaciones simpliciales*.

Sean K y L dos complejos y $f : K^0 \to L^0$ una aplicación. Supongamos que cada vez que los vértices $a_0, ..., a_n$ de K generan un símplice en K, $f(v_0), ..., f(v_n)$ son vértices que generan otro símplice en L. A partir de esta previa aplicación entre vértices y utilizando la Definición 1.1 es inmediato extenderla a una aplicación entre complejos simpliciales, $f : K \to L$ y que por construcción verifica que para cada símplice $\sigma \in K$ su imagen $f(\sigma) = \tau$ es un símplice de L.

Definición 1.11. Llamaremos *aplicación simplicial* que seguiremos denotando $f : K \to L$ a la aplicación de complejos simpliciales que lleva símplices en símplices.

Observación 1.12. Nótese que para describir una aplicación simplicial basta conocer la aplicación entre los vértices.

Ejemplo 1.13. En el siguiente ejemplo ilustramos una aplicación simplicial f entre dos complejos simpliciales, K y L donde primero daremos la aplicación entre vértices y continuaremos con la aplicación simplicial que esta induce.

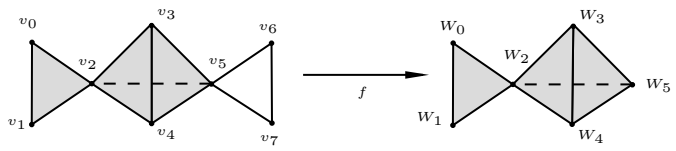

Figura 1.5: Aplicación f entre los complejos K y L.

Considerando la siguiente aplicación entre vértices $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$

$$f : K^{(0)} \mapsto L^{(0)}$$
$$v_0 \mapsto w_0$$
$$v_1 \mapsto w_1$$
$$v_2 \mapsto w_2$$
$$v_3 \mapsto w_3$$
$$v_4 \mapsto w_4$$
$$v_5 \mapsto w_5$$
$$v_6 \mapsto w_3$$
$$v_7 \mapsto w_4$$

Definimos la aplicación simplicial $f : K \to L$ que en nuestro caso lleva el triangulo vacío de K por f en la frontera del 2-símplice generado por w_3, w_4, w_5. El resto, el tetraedro vacío de K que es llevado por f en el tetraedro vacío de L así como el 2-símplice generado por v_0, v_1, v_2 tiene como imagen por f el 2-símplice generado por w_0, w_1, w_2. Así, podríamos denominar esta aplicación como un colapso.

1.3. Complejos simpliciales abstractos

Hasta ahora hemos tratado a los complejos simpliciales como algo geométrico, pero necesitaremos trabajar con ellos desde una forma combinatoria, por lo que daremos la definición de complejo simplicial abstracto y como el esquema de vértices se relaciona con el complejo simplicial geométrico.

Definición 1.14. Dado un conjunto finito $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, un *complejo simplicial abstracto* definido sobre V es una colección $S \subseteq \mathcal{P}(V)$ de subconjuntos de V tal que:

$$\text{si} \quad \sigma \in S \quad \text{y} \quad \sigma' \subseteq \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma' \in S$$

Observación 1.15. A los elementos del conjunto V les llamaremos *vértices* del complejo simplicial abstracto S.

Todo lo definido en los apartados anteriores se puede entender también para complejos simpliciales abstractos como veremos a continuación con algunas definiciones.

Definición 1.16. Dado un complejo simplicial abstracto S y un símplice σ de S, la *dimensión* de σ será su cardinal menos uno.

Definición 1.17. Dado un complejo simplicial abstracto S, se define su p-esqueleto como el conjunto de símplices de S con dimensión menor o igual a p.

Tras este par de definiciones, pasaremos a otra fundamental con el objetivo de relacionar los complejos simpliciales geométricos y abstractos.

Definición 1.18. Sea K un complejo simplicial (geométrico) y V el conjunto de sus vértices. El *esquema de vértices* de K es la colección de todos los subconjuntos de V tales que dichos vértices generan un símplice en K.

Ejemplo 1.19. Así por ejemplo, para el siguiente complejo K:

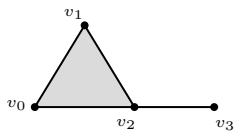

Figura 1.6: Complejo simplicial K

Sea su conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Su esquema de vértices es la colección

$$S = \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}.$$

En este caso podemos comprobar fácilmente que el esquema de vértices verifica las condiciones para ser un complejo simplicial abstracto.

Por ultimo veremos que es equivalente hablar de complejo simplicial abstracto como geométrico, la prueba se puede encontrar en [2]

Proposición 1.20. *Cada complejo simplicial abstracto S es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K.*

A partir de aquí siempre que nos refiramos a un complejo simplicial será abstracto, pues tiene un mayor interés desde el punto de vista combinatorio.

1.4. Homología de complejos simpliciales

Es habitual en topología algebraica asociar a espacios topológicos una colección de objetos algebraicos que son invariantes por homotopía y así utilizar las técnicas algebraicas para estudiar propiedades topológicas.

En esta sección veremos como se definen los módulos de homología de los complejos simpliciales. Como primer paso vamos a definir el *D-módulo de p-cadenas de K*, donde D es un dominio de ideales principales, pero en nuestro caso, usaremos siempre el cuerpo $\mathbb{R}$. A continuación, definamos una notación sobre los símplices orientados.

Notación 1.21. Sea S un complejo simplicial y $\sigma \in S$ uno de sus símplices tal que $\sigma = \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}\}$. Si $i_0 < i_1 < \ldots < i_p$ escribiremos el símplice orientado como $\sigma = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}]$

Definición 1.22. Sea K un complejo simplicial orientado, esto es, un complejo simplicial sobre el que hemos impuesto una orientación. Definimos para $p \in Z$, el *Módulo de p-cadenas de K*, $C_p(K)$ como el módulo libre generado por el conjunto de p-símplices orientados de K. Las *p-cadenas* son los elementos de $C_p(K)$ y las escribimos como sumas formales finitas $\sum_{i=0}^{n} r_i\sigma_i$, donde $r_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes y σ_i son p-símplices orientados de K.

A continuación, concretaremos el operador borde para cada dimensión p, necesario para definir los módulos de *p-ciclos* y *p-bordes*.

Definición 1.23. Sea K un complejo simplicial orientado y $\{C_p(K)\}_{p\in Z}$ la familia de módulos de p-cadenas de K. Definimos el homomorfismo *operador borde* $\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ y dado

un símplice orientado $\sigma = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_p}]$, su imagen por dicha aplicación es

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p[v_{i_0}, ..., v_{i_p}] = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j [v_{i_0}, ..., \hat{v_{i_j}}, ..., v_{i_p}]$$

donde $\hat{v_{i_j}}$ denota que se omite el elemento v_{i_j}.

Un pequeño lema pero importante para el desarrollo de la construcción es el siguiente, cuya demostración puede encontrarse en [2]

Lema 1.24. $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Con esta aplicación y denotando $C_i = C_i(K)$ a los módulos de i-cadenas de K para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos construir una sucesión de homomorfismos de los módulos, que denominaremos *complejo de cadenas* como:

$$... \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} ... \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Definición 1.25. El núcleo de $C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ le llamaremos el módulo de *p-ciclos*, denotado como $Z_p(K)$. A la imagen de $C_{p+1}(K) \to C_p(K)$ módulo de *p-bordes*, también denotado como $B_p(K)$. Por el lema anterior, cada borde de una $p+1$ cadena es automáticamente un p-ciclo. Así, $B_p(K) \subset Z_p(K)$. Conoceremos como *p-ésimo módulo de homología* de K al siguiente cociente:

$$H_p(K) = Z_p(K) \setminus B_p(K)$$

Observación 1.26. A lo largo de esta sección partimos de un orden sobre los vértices. Se puede demostrar que aunque apliquemos un cambio de orden sobre los vértices nos da módulos isomorfos.

1.5. Números de Betti

A partir de aquí trabajaremos sobre un cuerpo entonces en vez de módulos hablaremos de espacios vectoriales. Un elemento fundamental en nuestro trabajo son los *números de Betti*, invariantes de la topología que nos muestran diversas características del espacio que estemos estudiando.

Definición 1.27. Conocemos como *p-ésimo número de Betti* a la dimensión del p-ésimo espacio vectorial de homología:

$$\beta_p = dim(H_p(K)). \tag{1.1}$$

Podríamos decir que el p-ésimo número de Betti nos dice el número de agujeros p-dimensionales en una superficie topológica, donde un agujero p-dimensional es un p-ciclo que no es un $p+1$-borde de nuestra superficie topológica. Visto de una forma mas informal, definamos los tres primeros números de Betti como sigue:

Definición 1.28. Sea β_k el k-ésimo numero de Betti, para $k \in \{1, 2, 3\}$

1. β_0: es el número de componentes conexas.
2. β_1: es el número de agujeros .
3. β_2: es el número de vacíos o cavidades.

Veamos gráficamente en un ejemplo los tres primeros números de Betti y a continuación como calcularlos numéricamente.

Ejemplo 1.29. En este complejo podemos observar una única componente conexa, el complejo formado por hasta 2-símplices, por lo que el primer numero de Betti será $\beta_0 = 1$.
Por otro lado, vemos que hay un único agujero, que es el triángulo vacío generado por los vértices v_0, v_1, v_3, el otro de triángulos está "lleno", así qué el segundo número de Betti es $\beta_1 = 1$.
Para finalizar en este complejo no tenemos ninguna cavidad al ser una figura completamente plana, así pues $\beta_2 = 0$.

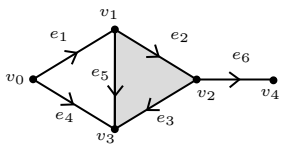

Figura 1.7: Complejo S para el calculo de los números de Betti

Nuestro complejo simplicial abstracto puede escribirse como la siguiente colección $\{\{v_0\}, \{v_1\}$ $\{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$.
Para este complejo simplicial orientado se tiene el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

En este caso los espacios vectoriales de p-cadenas C_p orientados son:
$C_0 \cong \mathbb{R}^5 =< [v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4] >$
$C_1 \cong \mathbb{R}^6 =< [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_0, v_3], [v_2, v_3], [v_2, v_4] >$
$C_2 \cong \mathbb{R} =< [v_1, v_2, v_3] >$

Calculemos ahora $H_0(S), H_1(S), H_2(S)$:
$H_0(S) := \ker(0)/\mathrm{Im}(\partial_1) = C_0(S)/\mathrm{Im}(\partial_1) =< v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 > / < v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_3 - v_0, v_3 - v_1, v_4 - v_2 > \cong \mathbb{R}$
$H_1(S) := \ker(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2) = \ker(\partial_1)/ < e_3 - e_5 + e_2 > \cong \mathbb{R}$
$H_2(S) := \ker(\partial_2)/\mathrm{Im}(\partial_3) = \ker(\partial_2) \cong 0$

Así pues, los sucesivos números de Betti son la dimensión de estos $H_p(K)$, quedando así:
$\beta_0 = \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$

Veamos como es la dimensión de por ejemplo $H_1(S)$. Por un lado sabemos que

$$\dim(H_1(S)) = \dim(\ker(\partial_1)) - \dim(\mathrm{Im}(\partial_2))$$

Ahora bien, como ya hemos calculado $\mathrm{Im}(\partial_2)$ y su generador esta formado por un único elemento no nulo, sabemos que $\dim(\mathrm{Im}(\partial_2)) = 1$.

Por otro lado, para calcular $\dim(\ker(\partial_1))$ usaremos el *Teorema de las Dimensiones* que dice:

Teorema 1.30. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces*

$$dim\, V = dim(ker(f)) + dim(Im(f)$$

Aplicándolo a nuestro caso tenemos que, dada $\partial_1 : C_1 \to C_0$ entonces

$$\dim(C_1) = \dim(\ker(\partial_1)) + \dim(\mathrm{Im}(\partial_1)$$

Como sabemos, $C_1 \cong \mathbb{R}^6$ por lo tanto $\dim(C_1) = 6$. Además la aplicación ∂_1 al ser lineal podemos expresarla en forma matricial según las bases de C_1 y C_0 como:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1.8: Matriz de ∂_1

Estudiemos el rango de esta matriz para así conocer la dimensión de la imagen de ∂_1.
Por un lado, es trivial que el rango es mayor o igual que cuatro, pues con la primera, segunda, tercera y sexta columna nos queda una matriz de 4×4 cuyo determinante es no nulo, pues es una matriz triangular superior con todo unos en la diagonal, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1.9: Submatriz 4×4 de ∂_1

Veamos que el rango es menor que cinco. Si sumamos las columnas de la siguiente forma $c_1 - c_4 + c_5$ y $c_1 + c_2 + c_3 - c_4$ obtenemos una nueva matriz del mismo rango pero con dos columnas completas de ceros en la que no existe ninguna submatriz 5×5 con determinante no nulo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1.10: Matriz equivalente tras operaciones elementales por columnas.

Así pues el rango es cuatro y la dimensión de $C_1 = 6$, teniéndose así que $\dim(\ker(\partial_1)) = 2$ y por último el resultado que buscábamos $\dim(H_1(S)) = 2 - 1 = 1$.

1.6. Homomorfismos de cadenas inducidos por aplicaciones simpliciales

Como sabemos, una aplicación simplicial $f : K \to L$ lleva p-símplices de K en símplices de dimensión menor o igual de L. A partir de esto, definimos un homomorfismo que lleva sumas formales $\sum m_i\sigma_i$ de p-símplices orientados de K en sumas formales $\sum m_i f(\sigma_i)$ de sus imágenes, así, esta aplicación inducirá homomorfismos entre grupos de homología, como veremos a continuación:

Definición 1.31. Sea $f : K \to L$ una aplicación simplicial. Recordamos que si $v_0, ..., v_p$ vértices de K generan un símplice en K entonces $f(v_0), ..., f(v_p)$ generan otro símplice en L. Definimos el homomorfismo $f_\# : C_p(K) \to C_p(L)$ como sigue:

$$f_\#([v_0, ..., v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), ..., f(v_p)] & \text{si } f(v_0), ..., f(v_p) \text{ son distintos.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Lema 1.32. *El homomorfismo $f_\#$ conmuta con ∂. Así, $f_\#$ induce el homomorfismo $f_* : H_p(K) \to H_p(L)$.*

Por último veremos un par de resultados donde en uno podemos comprobar que H_p asigna a cada complejo simplicial su p-ésimo espacio vectorial de homología y en el otro donde $*$ asigna a cada aplicación simplicial una familia de homomorfismos entre módulos:

Teorema 1.33. *Sean K, L y M complejos simpliciales, se tiene que:*

1. *Sea $id : K \to K$ la aplicación simplicial identidad. Entonces id: $H_p(K) \to K_p(K)$ es el homomorfismo identidad*
2. *Sean $f : K \to L$ y $g : L \to M$ aplicaciones simpliciales. Entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ y por tanto el siguiente diagrama conmuta:*

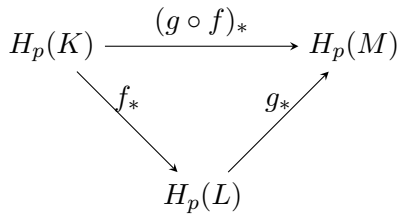

Figura 1.11: Esquema del teorema

1.7. Homología persistente

Por último, utilizando las cadenas de complejos simpliciales y sus módulos de homología introduciremos la noción de homología persistente, la cual nos permite extraer información de los complejos simpliciales y su evolución a lo largo de la filtración. Esta filtración es un elemento de especial interés pues estudiaremos los números de Betti en cada etapa de la filtración y con ello poder sacar conclusiones sobre la forma del complejo, sus agujeros o cavidades. Esto lo haremos a través de las que llamaremos *curvas de Betti*. Comenzaremos explicando lo que es una filtración de subcomplejos.

Definición 1.34. Dado un complejo simplicial K definimos una *filtración de subcomplejos simpliciales* como una familia de complejos $R = \{R_i\}_{i=0}^n$ tal que $R_i \subset R_{i+1}$ $\forall i$ con $R_n = K$

Podaríamos pensar que inicialmente tenemos R_0 como una colección de únicamente vértices a la que le vamos añadiendo en cada subcomplejo un nuevo símplice, así tendríamos la siguiente composición de aplicaciones simpliciales con la inclusión:

$$R_0 \overset{i}{\hookrightarrow} R_1 \overset{i}{\hookrightarrow} \ldots \overset{i}{\hookrightarrow} R_{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} R_n$$

Nosotros trabajaremos con la secuencia de los espacios vectoriales de homología pues es la que nos aporta una evolución topológica. Como hemos visto en la sección anterior, ya sabemos que cada aplicación simplicial entre complejos induce un homomorfismo entre sus espacios vectoriales de homología, con lo cual el diagrama anterior quedaría de la siguiente forma:

$$H_p(R_0) \overset{i_*}{\hookrightarrow} H_p(R_1) \overset{i_*}{\hookrightarrow} \ldots \overset{i*}{\hookrightarrow} H_p(R_i) \overset{i_*}{\hookrightarrow} H_p(R_{i+1}) \overset{i_*}{\hookrightarrow} \ldots \overset{i*}{\hookrightarrow} H_p(R_{n-1}) \overset{i*}{\hookrightarrow} H_p(R_n)$$

Cuando avanzamos de $H_p(R_i)$ a $H_p(R_j)$ con $i < j$, al ser estos espacios, pueden aparecer o desaparecer clases de homología. Estas clases que *nacen* en un complejo anterior y *mueren* en uno posterior de la filtración generan un espacio vectorial.

Definición 1.35. Para cada par de índices $i < j$, llamamos *p-ésimo modulo de homología persistente* a la imagen del homomorfismo inducido por la inclusión $R_i \overset{i}{\hookrightarrow} R_j$. Lo denotaremos como $H_p^{i,j} := Im(i_*)$ donde $i_* : H_p(R_i) \to H_p(R_j)$

El *p-ésimo modulo de homología persistente* contiene las clases de homología que nacieron en R_i y que todavía se mantienen en R_j.

Diremos que una clase de equivalencia de $H_p(R_i)$ *nace* en R_i si dicha clase no pertenece a $H_p^{i-1,i}$. Además, diremos que una clase *muere* en R_j si se fusiona con otra clase en el paso de R_{j-1} a R_j.

Definición 1.36. Si una clase nace en el complejo R_i y muere en el R_j, llamaremos a $j-i$ *índice de persistencia*.

Observación 1.37. Si la clase nace en R_i pero nunca muere, diremos que su índice de persistencia es infinito.

Observación 1.38. Cuando dos clases se fusionan seguiremos el criterio de que muere la mas joven, esto es, la que nació mas tarde.

Ejemplo 1.39. Veamos el estudio de la persistencia a través del siguiente ejemplo:

En primer lugar tomaremos una filtración $R = \{R_i\}_{i=0}^n$, de forma que $R_n = K$. En este caso, la filtración serán los cuatro complejos que vemos en la imagen, tal que $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$. El primero, R_0, está formado solo por la colección de vértices de K, R_1, por los 1-símplices generados por v_0, v_1, v_3, luego R_2 podría considerarse el 1-esqueleto de K y por último R_3 tenemos que es igual a K.

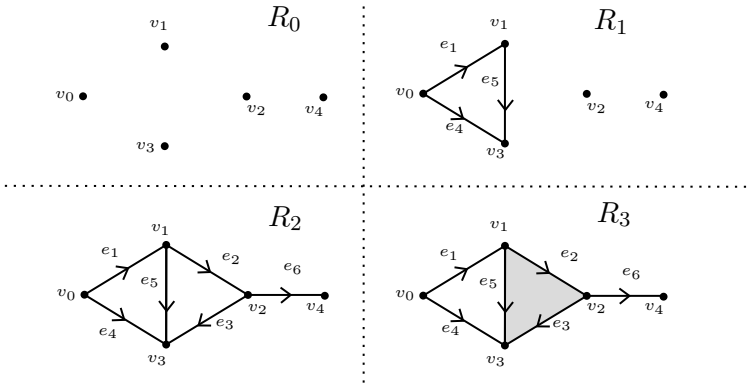

Figura 1.12: Filtración de K

Procedemos a calcular los espacios vectoriales de homología para cada uno de los complejos. Para abreviar notación recordemos que dado un complejo L, su p-espacio vectorial de homología $K_p(L) = Z_p(L)/B_p(L) = \ker(\partial_p)_L/\mathrm{Im}(\partial_p + 1)_L$. También recordamos que:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(R_i) \xrightarrow{\partial_2} C_1(R_i) \xrightarrow{\partial_1} C_0(R_i) \xrightarrow{\partial_0} 0 \qquad \forall i \in \{0,1,2,3\}$$

Por lo tanto escribiremos los submódulos auxiliares:

1. Para el complejo R_0 tenemos los siguientes:
   $Z_0(R_0) = C_0(R_0) = \langle v_0, \ldots, v_4 \rangle$
   $Z_1(R_0) = 0$
   $Z_2(R_0) = 0$
   $B_0(R_0) = B_1(R_0) = B_2(R_0) = 0$

2. Para el complejo R_1 tenemos los siguientes:
   $Z_0(R_1) = C_0(R_1) = \langle v_0, \ldots, v_4 \rangle$
   $Z_1(R_1) = \langle [e_1 + e_5 - e_4] \rangle$
   $Z_2(R_1) = 0$
   $B_0(R_1) = \langle v_1 - v_0, v_3 - v_1, v_3 - v_0 \rangle$
   $B_1(R_1) = B_2(R_1) = 0$

3. Para el complejo R_2 tenemos los siguientes:
   $Z_0(R_2) = C_0(R_2) = \langle v_0, \ldots, v_4 \rangle$
   $Z_1(R_2) = \langle e_1 + e_5 - e_4, e_2 + e_3 - e_5 \rangle$
   $Z_2(R_2) = 0$
   $B_0(R_2) = \langle v_1 - v_0, v_3 - v_1, v_3 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_4 - v_2 \rangle$

$B_1(R_2) = B_2(R_2) = 0$

4. Por último para el complejo R_3 tenemos los siguientes:
   $Z_0(R_3) = C_0(R_3) = \langle v_0, \ldots, v_4 \rangle$
   $Z_1(R_3) = \langle e_1 + e_5 - e_4, e_2 + e_3 - e_5 \rangle$
   $Z_2(R_3) = 0$
   $B_0(R_3) = \langle v_1 - v_0, v_3 - v_1, v_3 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_2, v_4 - v_2 \rangle$
   $B_1(R_3) = \langle e_2 + e_3 - e_5 \rangle$
   $B_2(R_3) = 0$

Definimos ahora los p-módulos de homología para cada complejo:

1. Para R_0 tendremos que $H_0(R_0) = \langle v_0, \ldots, v_4 \rangle \cong \mathbb{R}^5$, mientras que $H_1(R_0) = H_2(R_0) = 0$ ya que todos los complejos de p-cadenas son 0.

2. Para R_1 tendremos que $H_0(R_1) = \langle v_0, v_2, v_4 \rangle \cong \mathbb{R}^3$. Por otro lado $H_1(R_1) = \langle e_1 + e_5 - e_4 \rangle \cong \mathbb{R}$. Finalmente $H_2(R_1) = 0$

3. Para R_2 tendremos que $H_0(R_2) = \langle v_0 \rangle \cong \mathbb{R}$.Por otro lado $H_1(R_2) = \langle e_1 + e_5 - e_4, e_2 + e_3 - e_5 \rangle \cong \mathbb{R}^2$. Finalmente $H_2(R_2) = 0$

4. Para R_3 tendremos que $H_0(R_3) = \langle v_0 \rangle \cong \mathbb{R}$.Por otro lado $H_1(R_3) = \langle e_1 + e_5 - e_4, e_2 + e_3 - e_5 \rangle / \langle e_2 + e_3 - e_5 \rangle = \langle e_1 + e_5 - e_4 \rangle \cong \mathbb{R}$. Finalmente $H_2(R_3) = 0$. Como observamos son los mismos cálculos que realizamos en el Ejemplo 1.29.

Analizando como varían los módulos de cadenas a lo largo de la filtración podemos ver como varía la homología. Para los 0-módulos, comenzamos teniendo 5 clases distintas en el primer complejo, pasando a ser una única clase en el último. Con los 1-módulos ocurre algo mas curioso, al principio es nulo, pero luego va variando a lo largo de la filtración, mas adelante entenderemos a que se debe esto viendolo para cada complejo. Por ultimo, todos los 2-módulos son nulos. Así pues los números de Betti para cada complejo de la filtración serían:

	R_0	R_1	R_2	R_3
β_0	5	3	1	1
β_1	0	1	2	1
β_2	0	0	0	0

Figura 1.13: Tabla con los números de Betti de cada complejo de la filtración

Presentamos ahora la primera de nuestras herramientas para el estudio topológico de nuestros datos, el *diagrama de persistencia*. Un diagrama de persistencia es una representación de una serie de puntos en un plano con dos ejes. Cada punto representa la vida de una de nuestras clases de homología, siendo su valor en el eje X el momento en el que nace dicha clase y su valor en el eje Y cuando esta clase muere.

Observación 1.40. En un capitulo posterior explicaremos cual será la unidad de estos ejes y según que criterio avanzará la filtración y con ella el nacimiento y muerte de clases.

Haremos el diagrama de persistencia sobre el Ejemplo 1.39. Cada diagrama se corresponde con los p-módulos de homología de la filtración, por lo tanto nos harán falta p diagramas, como vemos en la Figura 1.14.

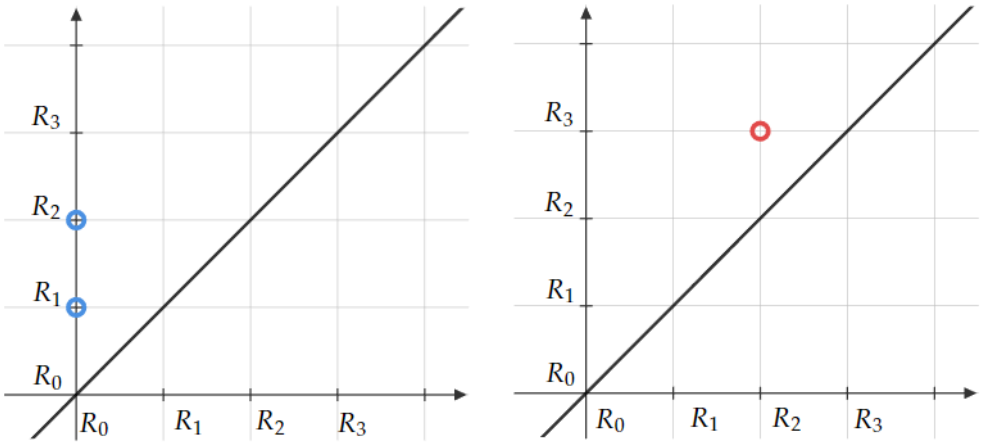

Figura 1.14: Diagramas de persistencia

Hemos omitido el diagrama de los 2-módulos pues son todos nulos. En los ejes tenemos los distintos complejos de la filtración,R_0, R_1, R_2, R_3 marcando cada paso de uno a otro en su segmento. La linea diagonal implica a partir de que momento pueden nacer las clases, teniendo que aparecer los puntos forzosamente encima de esta.

Empezando por la gráfica de la izquierda, referente a los 0-módulos de homología. Aparece un punto en (R_0, R_1) esto es, hay clases que nacen en R_0 que están muriendo en R_1, que se refieren a las dos clases $[v_1]$ y $[v_3]$ que han muerto, como vemos en la Figura 1.12 al pasar a R_1 se unen los tres vértices formando triángulo. Fijándonos en los módulos de homología podemos ver que $H_0(R_0)$ está generado por 5 elementos y que luego $H_0(R_1)$ está generado por 3 clases de homología.

El siguiente punto en (R_0, R_2) indica la muerte de las clases $[v_2]$ y $[v_4]$. Observamos que el modulo $H_0(R_2)$ está generado por una única clase. Gráficamente en la Figura 1.12 vemos que

ya todos los vértices se han unido en R_2. El criterio que estamos siguiendo para saber que clase sobrevive es arbitrario, pues todas las clases han nacido a la vez. Por último habría un punto en (R_0, ∞) pues esta última clase $[v_0]$ nunca muere.

Por otro lado observando ahora la gráfica de la derecha, que se refiere a los 1-módulos de homología. Vemos que hay un punto en (R_2, R_3), diciéndonos que ha nacido una clase en R_2, que posteriormente ha muerto en R_3, esto lo vemos en $H_1(R_2)$ que está generado por dos elementos, seguido por $H_1(R_3)$ generado por un único elemento, dejando así claro que ha muerto una clase. Gráficamente vemos en la Figura 1.12 que el triangulo vacío de la derecha de R_2 se rellena en R_3. De nuevo, habría un punto en (R_1, ∞) pues la clase que sobrevive no muere.

Capítulo 2

Paso de nube de puntos a una filtración de complejos

2.1. Motivación general

Nuestro objetivo en este capítulo es explicar como, a partir de lo que definiremos como *nube de puntos* construiremos una filtración de complejos, para así poder calcular sus módulos de homología y con ellos la persistencia. Primero lo presentaremos en un carácter más general, con los métodos mas habituales y luego introduciremos el criterio que seguiremos para el caso de la red cósmica, en el que necesitaremos definir una densidad para usar como umbral con el que generar los subcomplejos necesarios.

Comenzaremos con una colección de puntos que serán nuestros datos de partida, obtenidos a través de observación, como puede ser de una simulación.

Definición 2.1. Llamamos *nube de puntos* a cualquier colección finita de puntos en un espacio métrico. En nuestro caso utilizaremos a partir de ahora el espacio métrico $\mathbb{R}^m$, con $m > 0$.

Como ya hemos dicho, en nuestro trabajo estos puntos serán las partículas de la simulación que se ha realizado, de las que buscamos obtener un objeto de dimensión mayor, la *red cósmica*. Podemos ver un ejemplo a continuación:

Ejemplo 2.2. En la siguiente figura podemos ver una nube de puntos proveniente de un objeto de dimensión mayor, una circunferencia, en la que solo hemos podido recuperar algunos puntos de ella. Después de aplicar alguno de los procesos que veremos en las siguientes secciones para asociar los vértices entre ellos, podemos ver como se forma el complejo simplicial. Si hiciésemos un análisis de sus propiedades topológicas, como por ejemplo, el estudio de sus números de Betti, obtendríamos que es congruente con la circunferencia, como queríamos reconstruir.

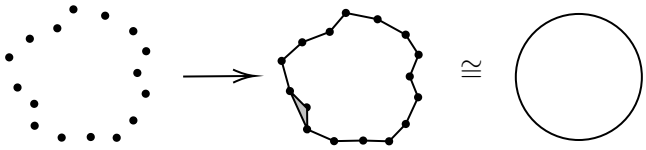

Figura 2.1: Paso de una nube de puntos a un objeto topológico

2.2. Complejos de Cech y de Vietoris-Rips

A continuación veremos varios métodos capaces de, a partir de esta nube de puntos, generar símplices y con ello complejos simpliciales.

Definición 2.3. Dado una colección de puntos $\{x_i\}_{i=0}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y ϵ^+, definimos para cada ϵ el *complejo de Cech*, denotado como C_ϵ, como el complejo simplicial abstracto en el cual sus p-símplices, con $p \in \mathbb{Z}$ están determinados mediante p+1 puntos distintos $\{x_i'\}_{i=0}^p \subset \{x_i\}_{i=0}^n$ tal que todas las bolas cerradas centradas en esos puntos y de radio $\epsilon/2$ tienen intersección no vacía.

Definición 2.4. Dado una colección de puntos $\{x_i\}_{i=0}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y ϵ^+, definimos para cada ϵ el *complejo de Vietoris-Rips*, denotado como R_ϵ, como el complejo simplicial abstracto en el cual sus p-símplices, con $p \in \mathbb{Z}$ están generados por p+1 puntos distintos $\{x_i'\}_{i=0}^p \subset \{x_i\}_{i=0}^n$ que por pares distan menos de ϵ.

Ejemplo 2.5. Mostramos a continuación un ejemplo de como construir los complejos de Cech y Vietoris-Rips a partir de una nube de putos.

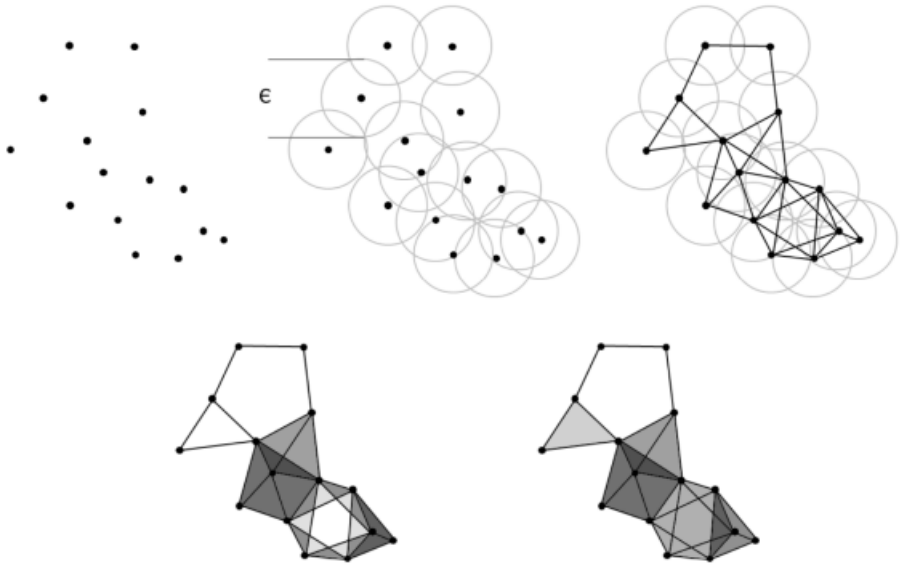

Figura 2.2: Complejo de Cech (abajo izquierda) y de Vietoris-Rips (Abajo derecha)

Primero, creamos las bolas de radio $\epsilon/2$ centradas en cada punto. Expliquemos la elaboración de cada uno de los complejos:

- Para la construcción de C_ϵ: la figura de abajo a la izquierda, definimos cada uno de sus p-símplices de la siguiente manera: sean $\{x_i\}_{i=0}^{p}$ los vértices tales que la intersección de sus correspondientes bolas es distinta del vacío, por lo tanto, se añade el p-símplice que generan al complejo C_ϵ. Lógicamente entonces, si dos bolas se intersecan tendremos un 1-símplice o arista entre esos vértices.
- Para la construcción de R_ϵ: la figura de abajo a la derecha, en este caso para añadir un p-símplice al complejo, la bola de radio ϵ de cada uno de los p puntos ha de contener a los puntos restantes.

Vemos por lo tanto que la elección del ϵ es determinante a la hora de generarse el complejo simplicial, para un épsilon demasiado pequeño solo tendremos los puntos como 0-símplices mientras que, para un épsilon demasiado grande, todos los símplices se habrán unido y no tendremos varias componentes conexas, agujeros ni vacíos, que son la información que deseamos extraer. La elección del épsilon es por lo tanto crucial pudiendo aparecer unos símplices u otros, y cambiando con ello las características topológicas del complejo. Esto lo podemos ver mejor en el siguiente diagrama:

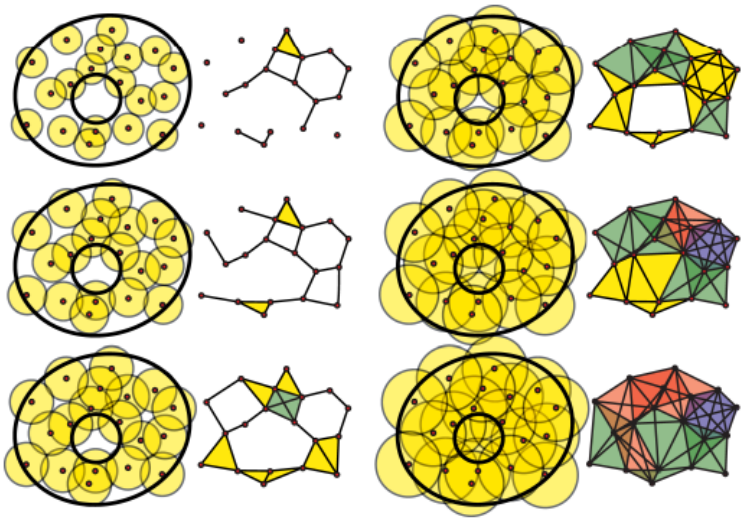

Figura 2.3: Evolución de una filtración

Aquí podemos ver como afecta el crecimiento de ϵ a la cadena de complejos, esta vez la nube de puntos fue extraída de un anillo en el que se eligieron puntos de forma aleatoria. Vemos en la primera y tercera columna de figuras el crecimientos de las bolas de radio $\epsilon/2$, siendo por lo

tanto un ejemplo de un complejo de Cech. Observamos que a medida que aumentamos el épsilon aparecen y desaparecen agujeros, pero por lo general se van añadiendo mas símplices al complejo, desapareciendo componentes conexas. El épsilon que mejor se ajusta es el de la primera figura de la cuarta columna, donde se diferencia un único gran agujero. En este ejemplo es fácil encontrar el épsilon, pues sabemos el objeto topológico de partida, pero en nuestro caso, desconocemos la forma de la red cósmica de antemano, por lo que será interesante trabajar el concepto de *ruido*. Este se refiere a todos los agujeros que aparecen y desaparecen rápido, siendo información de poca relevancia, que en nuestro contexto teórico vendrán por clases con una pequeña persistencia, pues nacen y mueren casi de seguido.

Los complejos simpliciales que acabamos de estudiar son los mas frecuentes cuando se trata de analizar las características topológicas de un objeto, así como la evolución de su filtración. De todas maneras, en el presente trabajo utilizaremos uno distinto, el *Complejo de Delaunay* que veremos más adelante.

2.3. Densidad y filtración

Como veremos en el Capítulo 3, gracias a la que presentaremos como *Teselación de Delaunay* y al *Delaunay Tessellation Field Estimator* o *DTFE* seremos capaces de generar un campo de densidades para realizar nuestra filtración.

Esto nos interesa, pues en vez de usar un ϵ que hace crecer una bola, trabajaremos un con umbral de densidad, ya que nuestro cuerpo a estudiar está compuesto por partículas distribuidas en un espacio. Al conjunto de todas nuestras partículas le llamaremos $\mathbb{M}$ y le aplicaremos una campo de densidad $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ para a cada punto asignarle un valor, con el cual poder generar nuestros *conjuntos de nivel* $\mathbb{M}_v = \{x \in \mathbb{M} \mid f(x) \geq v\}$ siendo v el umbral de densidad. A medida que vayamos disminuyendo el umbral, se irán añadiendo más partículas x a la filtración, al igual que sucedía con los símplices y los complejos, quedando de la siguiente forma la filtración:

$$\emptyset = \mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{M}_m = \mathbb{M}$$

A continuación en las dos siguientes figuras podemos ver la comparación entre una filtración de subcomplejos (Figura 2.4), como las que ya hemos estudiado, y un conjunto de nivel (Figura 2.5) creciente a medidas que disminuimos el umbral de densidad.

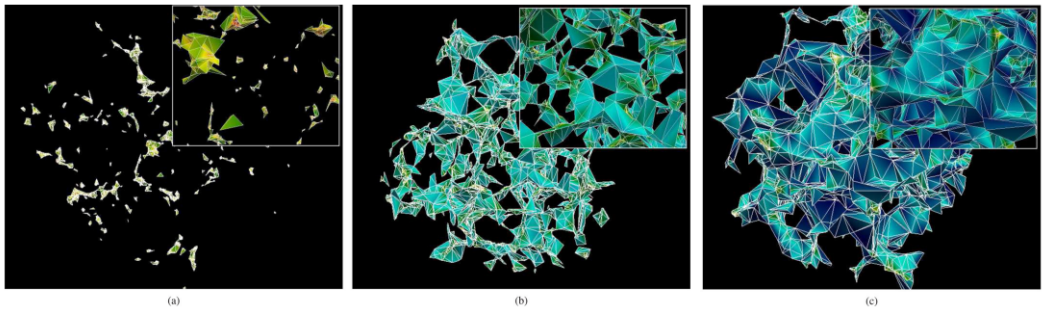

Figura 2.4: Crecimiento de conjuntos de nivel de una filtración de un complejo simplicial generado a partir de una nube de puntos. Desde el panel (a) al (c) hemos ido disminuyendo el valor de la densidad haciendo que cada vez se añaden más símplices del complejo final.

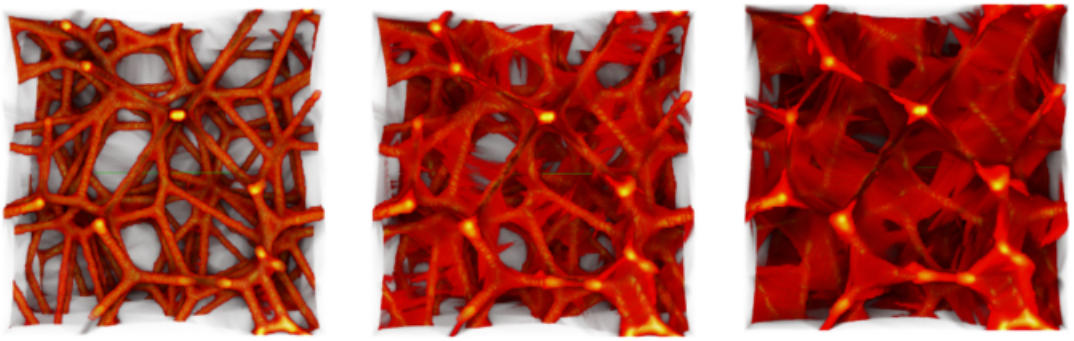

Figura 2.5: Crecimiento del conjunto de nivel de un renderizado de la filtración a medida que disminuimos el umbral de densidad de izquierda a derecha.

Capítulo 3

Cálculo de la homología persistente

3.1. Preámbulo

En esta sección, describiremos los principios del algoritmo que se presentan en el artículo objeto de estudio para el cálculo de la persistencia y proporcionamos la conexión entre las matemáticas, los datos y los resultados calculados. El marco computacional de nuestro estudio involucra tres componentes:

- La primera componente se refiere a la definición y cálculo del campo de densidad sobre el que aplicamos la filtración.
- La segunda componente en nuestra linea computacional es el algoritmo utilizado para calcular la homología persistente. Esto implica construir una filtración y posteriormente un cálculo de la homología persistente en esta filtración.
- El tercer aspecto se refiere a la representación de los resultados de la homología y homología persistente. Los resultados principales son los diagramas de persistencia y las curvas de Betti de las muestras analizadas, que forman tanto la representación visual como el resumen de homología persistente y homología.

3.2. Reconstrucción del campo de densidad desde la muestra

Usaremos el anteriormente mencionado *Delaunay Tessellation Field Estimator* que podemos definir de la siguiente manera:

El *Delaunay Tessellation Field Estimator* o *DTFE* a partir de ahora, es una herramienta matemática para reconstruir a partir de una nube de puntos, un campo continuo de densidad.

El formalismo del DTFE implica el cálculo de la teselación de Delaunay de las partículas en $\mathbb{M}$, la determinación de estimaciones de densidad basadas en teselaciones, y la interpolación lineal de los valores de densidad en los vértices de Delaunay lo que produce un campo $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$.

Procedemos a ver como se realiza el proceso del DTFE detalladamente, donde nos apoyaremos en la siguiente figura:

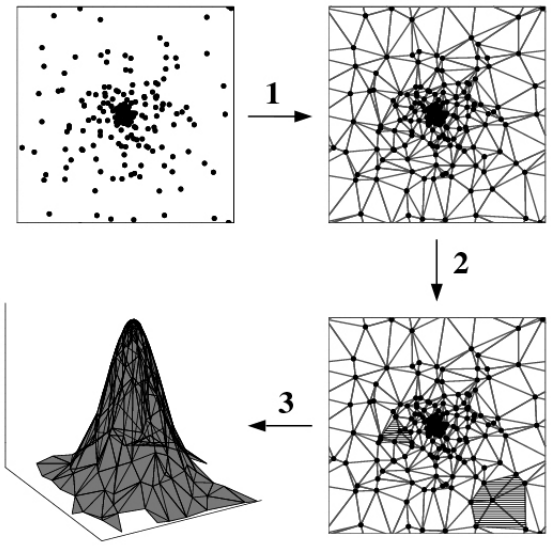

Figura 3.1: Pasos de proceso de creación que realiza el DTFE (imagen extraída de [6])

1. En un primer paso calculado la triangulación de Delaunay a partir de la nube de puntos, definiendo esta de la siguiente manera:

   Definición 3.1. Una triangulación de Delaunay (Figura 3.2) es una red de triángulos que cumple la condición de Delaunay, la cual consiste en:

   - **Condición de Delaunay** (de un triángulo): La circunferencia circunscrita en el mismo no debe contener ningún otro vértice de la triangulación en su interior, si se admite si es sobre la misma circunferencia.

   Observación 3.2. La triangulación de Delaunay maximiza el ángulo mínimo de los triángulos, haciéndolos lo más equiláteros posibles

   Éste tipo de triangulación es especialmente práctica porque evita errores de redondeo al realizar cálculos con ángulos pequeños. En nuestro caso debido al gran numero de puntos que manejamos, para el cálculo del teselado de Delaunay utilizamos un software en la biblioteca *CGAL*.

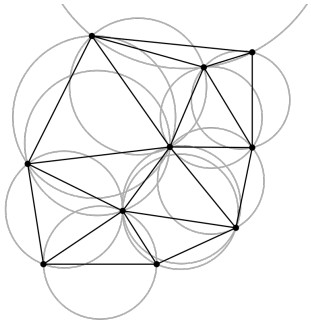

Figura 3.2: Ejemplo de una triangulación de Delaunay (Link de la imagen)

2. En un segundo paso, calculamos el valor de densidad DTFE para cada vértice, u, de la teselación de Delaunay. El valor de densidad DTFE en los vértices es el inverso del volumen de su estrella, por lo que conviene dar una definición más formal de esta:

   Definición 3.3. La *estrella* de un vértice u es el conjunto de todos los símplices que contienen a u como vértice.

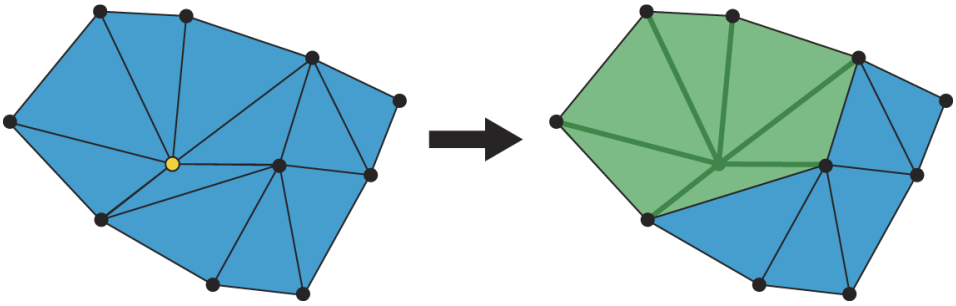

Figura 3.3: A la izquierda, el complejo simplicial y el vértice y a la derecha, la estrella de ese vértice. (Link de la imagen)

   Como vemos en la figura para el vértice marcado en amarillo, su estrella está formada por todos los 1-símplices y 2-símplices que lo contienen, esto es, la zona sombreada, a parte de el mismo.

   Observación 3.4. Es remarcable fijarnos que al no añadir la condición de que cada cara de los símplices de la estrella tienen que estar en la estrella, la estrella no tiene porqué ser un complejo simplicial, como vemos en el ejemplo, no se incluye los 1-símplices que cierran la zona sombreada, que son caras de los 2-símplices que sí están.

3. Finalmente, usamos la interpolación lineal para cada punto, asumiendo que dentro de cada triángulo, la densidad varía de forma lineal y así conseguimos definir $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$.

3.3. Valor crítico y filtración

En esta sección utilizaremos la *Teoría de Morse*, que permite estudiar la topología de variedades analizando los conjuntos de nivel de ciertas funciones diferenciables de esa variedad en $\mathbb{R}$. Si M es una variedad diferenciable llamaremos *función de Morse* a una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ que no tiene puntos críticos degenerados (esto es, los hessianos de todos sus puntos críticos son no singulares).

El teorema de Morse afirma que para una función de Morse los puntos críticos son aislados y que el tipo de homotopía de los conjuntos de nivel $f^{-1}(-\infty, a]$ solo cambia en el momento en el que a es un valor crítico (entendiendo como valor crítico la imagen de un punto crítico). Esto se puede ver en mas profundidad en [3]

Por lo tanto el conjunto de nivel no cambia el tipo de homotopía siempre que no se pase un valor crítico de la función, por lo que ajustaremos a nuestro caso ese concepto de punto crítico para adaptarlo a nuestras funciones lineales por partes (funciones de densidad). Lo haremos de la forma más lógica: miraremos cómo varía la función en el *enlace* de un vértice.

Definición 3.5. Dado K un complejo simplicial y $\sigma \in K$. Definimos el *enlace* de σ como sigue:

$$Enlace_\sigma(K) = \{\tau \in K \mid \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cap \sigma \in K\} \tag{3.1}$$

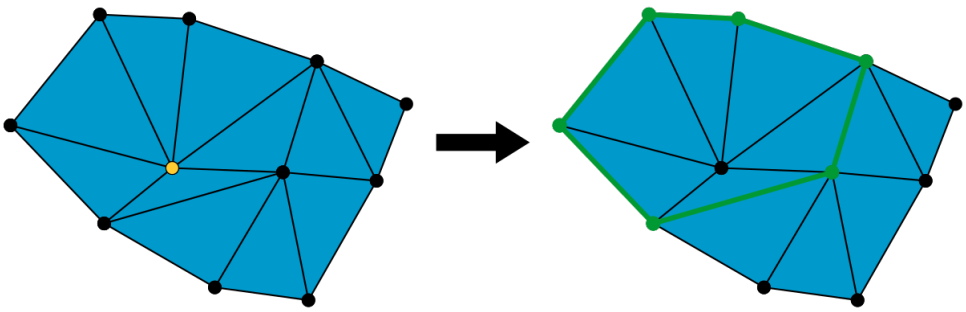

Figura 3.4: Enlace del vértice marcado en amarillo, (Link de la imagen extraída)

Observación 3.6. Dicho de otro modo, el enlace de un vértice u es el conjunto de símplices τ que no intersecan u, pero que $u \cup \tau$ es un símplice.

Viéndolo en términos de la estrella, el enlace de un vértice consta de todas las caras de los simples en la estrella que no pertenecen a la estrella. De hecho, la topología puede cambiar solo cuando pasa el valor de un vértice, por lo que basta con considerar un solo valor entre cualquiera de los dos valores de vértice contiguos. Para describir esto, llamemos n al número de vértices en el complejo simplicial y asumamos que $v_i = f(u_i) < v_{i+1} = f(u_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, consideramos conjuntos de nivel en los valores de la secuencia:

$$r_0 > v_1 > r_1 > v_2 > \ldots > v_n > r_n \tag{3.2}$$

Si fuésemos a construir estos conjuntos de nivel y calcular su homología en cada uno de los vértices no sería viable debido al gran número de datos que manejamos. Por suerte, hay atajos que podemos tomar para acelerar los cálculos sin tener ningún efecto sobre los resultados calculados. Para ello, definimos K_v como el subcomplejo K que consta de todos los vértices tales que $f(u_i) > v$ y todos los símplices que los conectan. Ahora bien, tomaremos una definición alternativa de K_v que nos va a resultar mas conveniente computacionalmente. Para ello, definamos:

Definición 3.7. La *estrella superior* de un vértice u es el conjunto de todos los símplices de la estrella para los cuales u es el vértice con el menor valor de densidad.

Por lo tanto K_v será la unión de las estrellas superiores de todos los vértices con $f(u_i) > v$. Gracias a esto podemos ver que para obtener $K_{r_{i+1}}$ basta con añadir a k_{r_i} los símplices de la estrella superior de u_{i+1}.

3.4. Algoritmo de la homología persistente

Pasemos ahora al cálculo de la homología persistente, donde nuestro objetivo es reducir una matriz de partida Δ de dimensión $(m \times m)$ donde m es el número de símplices de nuestro complejo simplicial K. Hablando sobre esta matriz de partida, Δ , sus filas que constan de todos los símplices que estarán en un orden especial, en concreto de forma de dimensión creciente, así pues, para cualquier j, $K_j = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j$ es un complejo simplicial, donde cada símplice tiene detrás cada una de sus caras. Ahora bien, definamos el contenido de la matriz de la siguiente forma:

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma_i \text{ es cara de } \sigma_j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{3.3}$$

Observación 3.8. Cabe apreciar que la i-ésima fila representa la estrella de σ_i

En nuestra búsqueda por los pares de nacimiento-muerte, el algoritmo de reducción nos otorga la forma reducida de Δ, donde cada fila contiene la menor entrada no negativa de a lo sumo una columna, si tenemos cuidado con no permutar las filas e ir añadiendo las columnas de izquierda a derecha, de nuevo, el menor elemento no negativo corresponde con la información que necesitábamos. A continuación vemos el algoritmo y lo explicamos:

Algorithm 1 Matrix Reduction

```
1: R = Δ
2: for j = 1 to m do
3:     while there exists j_0 < j with low(j_0) = low(j) do
4:         add column j_0 to column j
5:     end while
6: end for
```

Figura 3.5: Algoritmo de reducción de la matriz Δ (Imagen extraída de [4])

En el algoritmo, low(j)= i si i es el máximo índice de fila del elemento no negativo de la columna j en otro caso low(j)=0 si toda la columna está compuesta por 0. Esto lo veremos en un ejemplo práctico mejor.

Ejemplo 3.9. A continuación veremos la construcción de la filtración, de la matriz borde y su reducción a través de un ejemplo con un triángulo que sera nuestro complejo simplicial de entrada K, con sus 0-símplices o vértices, 1-símplices o aristas y su único 2-símplice.

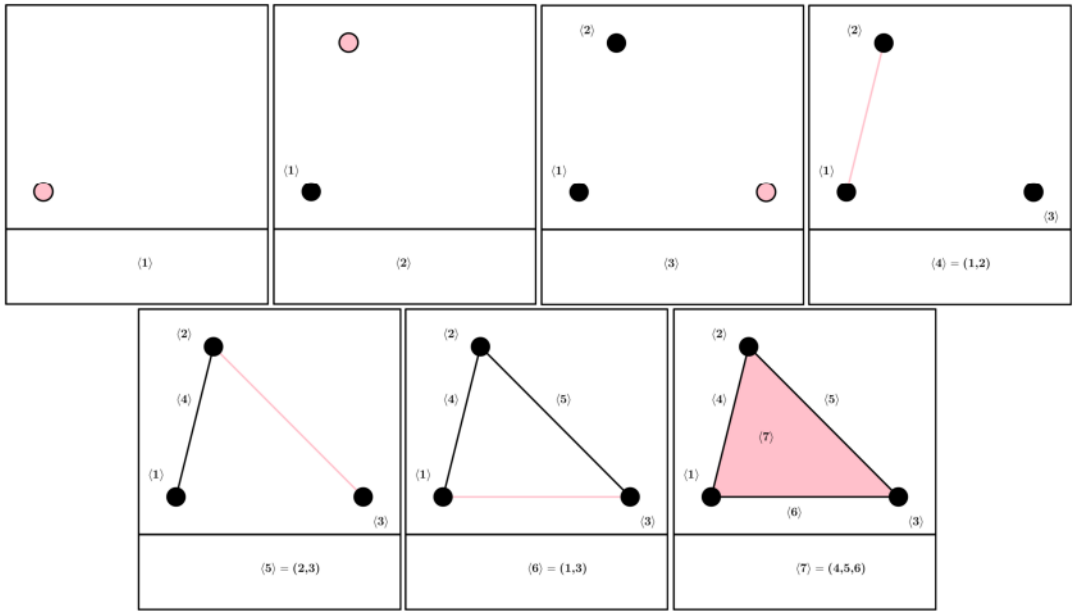

Figura 3.6: Filtración de un triángulo, apareciendo cada uno de sus símplices en cada paso (Imagen extraída de [4])

Partimos del supuesto de que hay una función definida en cada uno de los siete símplices que componen el triángulo. Esta función, que juega el papel de densidad, nos induce una ordenación que podemos ver en la figura, siguiendo de forma numérica cual aparece primero. Estudiemos ahora tanto la filtración mientras seguimos los eventos de nacimiento y muerte de las clases.

Primero, aparece el vértice $\langle 1\rangle$, comenzando así con el nacimiento de una componente conexa. A continuación con la aparición de los vértices $\langle 2\rangle$ y $\langle 3\rangle$, aumentamos el número de componentes conexas hasta 3. A esto le sigue la aparición de las aristas, siendo la primera $\langle 4\rangle$, que une los vértices $\langle 1\rangle$ y $\langle 2\rangle$ convirtiéndolos en una única componente conexa y con ello , muriendo la componente que llevaba menos tiempo viva. Dicho de otra forma, la arista $\langle 4\rangle$ mata al vértice $\langle 2\rangle$ creando el primer par de nacimiento-muerte de persistencia $\{\langle 2\rangle, \langle 4\rangle\}$ que aparecería en el diagrama de persistencia de β_0. Aclaramos que a la componente conexa formada por la unión de $\langle 1\rangle$ y $\langle 2\rangle$ se denominará únicamente $\langle 1\rangle$.

Seguimos con la aparición de la siguiente arista $\langle 5\rangle$, que une la componente conexa $\langle 1\rangle$ con $\langle 3\rangle$ y generando un nuevo par de persistencia $\{\langle 3\rangle, \langle 5\rangle\}$. Con la aparición de $\langle 6\rangle$ nace el primer agujero 1 dimensional, este es, la frontera del triángulo. Este agujero muere en el siguiente paso, pues cuando aparece el último símplice $\langle 7\rangle$ y paso final de la filtración se crea el par de persistencia $\{\langle 6\rangle, \langle 7\rangle\}$ correspondiente a β_1. En resumen tenemos tres pares de persistencia, los equivalentes a la componentes conexas : $\{\langle 2\rangle, \langle 4\rangle\}$ y $\{\langle 3\rangle, \langle 5\rangle\}$ y el correspondiente al agujero 1-dimensional: $\{\langle 6\rangle, \langle 7\rangle\}$.

Para la construcción de la matriz borde y su reducción ya hemos enumerado todos los símplices, por ejemplo , el borde del símplice $\langle 7\rangle$ consiste de las aristas $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$ y $\langle 6\rangle$. En este caso, la matriz será de dimensión 7×7, y recordamos que el si el símplice i es una cara del símplice j entonces el elemento $(i, j) = 1$. Por lo tanto tenemos la siguiente matriz de partida:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.7: Matriz frontera ∂

Como vemos la estrella del vértice $\langle 1\rangle$ son los símplices $\langle 4\rangle$ y $\langle 6\rangle$ siendo esto representado por la fila 1 y un uno en los elementos $(1, 4)$ y $(1, 6)$. Visto de otro modo $\langle 1\rangle$ es cara de $\langle 4\rangle$ y $\langle 6\rangle$. También si nos fijamos por columnas podemos saber quienes son las caras de cada símplice, como veníamos diciendo, la columna 7 tiene unos en las posiciones 4,5 y 6, las aristas que forman su frontera.

Calculemos ahora la matriz reducida R, utilizando el algoritmo anteriormente dado. Escribimos primero los cálculos partiendo de que $j \in 1, \ldots, 7$ siendo j el índice de cada columna:

$j = j_*$: Mientras $\exists\, j_0 < j_* \mid low(j_0) = low(j_*)$ $\Rightarrow$ sumamos columna j_0 a la columna j_*

Ahora antes de hacer las sumas calculamos $low(j)$ para cada j:

$$low(1) = low(2) = low(3) = 0,\ low(4) = 2,\ low(5) = 3,\ low(6) = 3,\ low(7) = 6$$

Observación 3.10. Los tres primeros son nulos pues son columnas formadas por todos 0 y por ejemplo $low(5) = 3$ pues en la columna 5, el elemento con mayor índice no negativo es el $(3, 5)$.

- Para $j = 1$ no hay ningún $j_0 < 1$.
- Para $j = 2$ tenemos que $j_0 = 1$ con $low(1) = low(2) = 0$ pero sumamos dos columnas formadas por solo 0.
- Para $j = 3$ ocurre lo mismo que en el anterior, sumamos ambas columnas nulas.
- Para $j = 4$ no hay j_0 con $low(j_0) = low(4) = 2$, pues $low(1) = low(2) = low(3) = 0$ y no sumamos columnas.
- Para $j = 5$ sucede igual que en el anterior, no hay ningún j_0 valido.
- Para $j = 6$ si tenemos $j_0 = 5$ con $low(5) = low(6) = 3$ por lo tanto sumamos la columna 5 a la columna 6. Ahora $low(6) = 2$ y de nuevo tenemos $j_0 = 4$ tal que $low(6) = low(4) = 2$ y sumamos la columna 4 ala columna 6. Por último $low(6) = 0$ y solo le sumamos las columnas vacías, quedando igual.
- Para $j = 7$ tenemos que no hay j_0 con $low(j_0) = low(7) = 6$

Observación 3.11. Nos fijamos que sumamos de forma binaria o módulo 2, esto es $1 + 1 = 0$ y $1 + 0 = 1$.

La matriz resultante de realizar estas combinaciones lineales es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.8: Matriz reducida, R

Es muy fácil leer la persistencia desde esta matriz, basta con fijarnos en cada columna el 1 con un índice de fila mayor, esto es, el que se encuentra más abajo. Estos son los sombreados en negrita que son $(2,4),(3,5)$ y $(6,7)$ y sus coordenadas son sus pares de nacimiento-muerte esto es, el primer numero es el símplice que da nacimiento al agujero o componente conexa, y el segundo número el símplice que mata este agujero o componente. Como comprobamos coincide con nuestros pares de persistencia ya anteriormente calculados geométricamente: $\{\langle 2\rangle, \langle 4\rangle\}$, $\{\langle 3\rangle, \langle 5\rangle\}$ y $\{\langle 6\rangle, \langle 7\rangle\}$

Como paso final podríamos representarlo en un diagrama de persistencia, como vimos en capítulos anteriores, quedando como sigue:

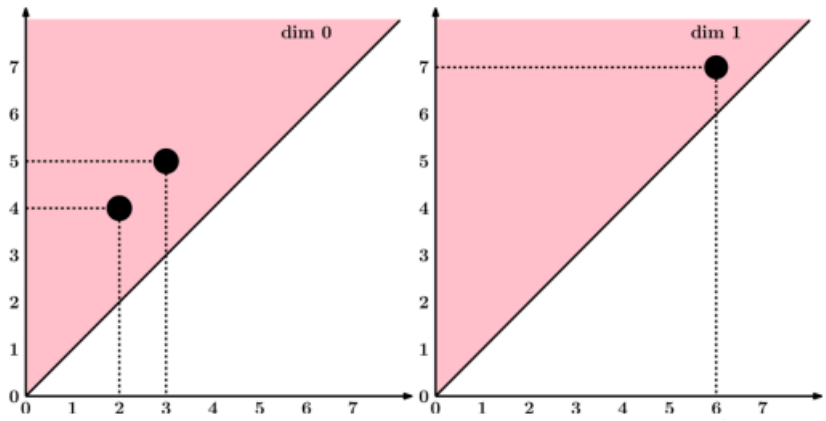

Figura 3.9: Diagramas de persistencia de la filtración del triángulo, a la izquierda las componentes conexas y a la derecha los agujeros 1-dimensionales.

Capítulo 4

Diagramas de persistencia y curvas de Betti de la red cósmica

4.1. Introducción

Antes de pasar a ver algunos diagramas y analizarlos detalladamente, es importante recalcar que es lo que tenemos enfrente y de donde viene. Vamos a estudiar la forma del universo desde sus elementos cosmológicos, estos son, sus nodos, filamentos y vacíos. Nosotros, desde nuestro punto de vista topológico, hablaremos formalmente de k-ciclos, donde al los 0-ciclos nos referiremos como islas o componentes, al los 1-ciclos como lazos o túneles y por ultimo tendremos los 2-ciclos que serán cáscaras o equivalentemente cavidades. Como sabemos, la topología de una estructura en tres dimensiones esta completamente determinada por sus números de Betti: β_0, β_1, β_2 quienes representan el número de elementos independientes así como el tamaño de cada grupo de homología de estos ciclos.

Por lo tanto nuestras tres curvas de Betti, una para cada número, no será mas que la variación del numero de Betti correspondiente a medida que cambiamos el umbral de la densidad, esto es, avanzamos en la filtración, ya que este hace variar la estructura cambiando así su forma y propiedades y con ello cambiando sus invariantes topológicos. A cada una de estos objetos que aparecen al mover el umbral de la densidad son a las que llamamos formalmente *conjuntos de nivel*. Nuestro cometido con estas curvas es analizar la creación/destrucción de características como son las islas, túneles y vacíos y como se conectan. Las islas, por ejemplo, serán los cúmulos o regiones con una densidad de masa excesivamente alta sobre nuestro umbral. Según vamos bajando el umbral irán apareciendo estructuras de una densidad menor, los túneles que conectan las islas pudiendo así estudiar la forma en la que se unen estos filamentos, el número de túneles

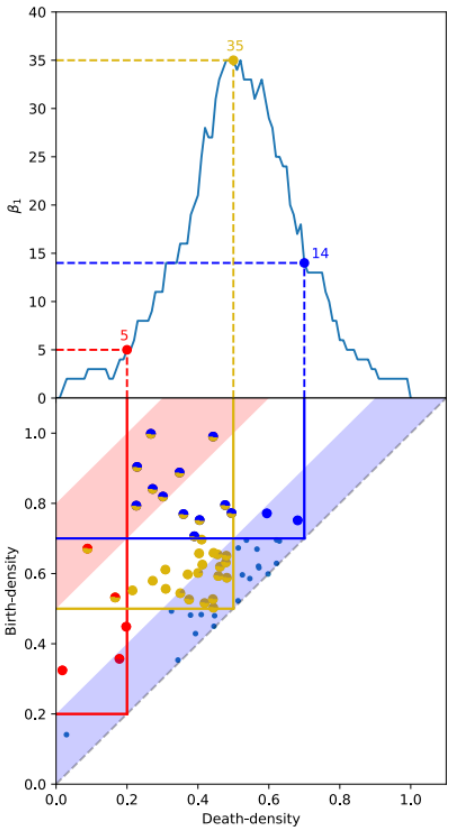

Figura 4.1: Diagrama de persistencia y curva de Betti de una simulación de 60 puntos con una densidad entre 0 y 1. Imagen extraida de [1]

que se conecta con una misma isla, así como si siguen algún patrón relacionado con la densidad o la formación de vacíos, entre muchas otras preguntas. Lo fundamental en este contexto es la característica de no localidad de las medidas topológicas.

Para un análisis mas preciso y centrándonos en la naturaleza de multiescala y la interacción entre las diversas características, trabajaremos también con diagramas de persistencia, los cuales están formados por puntos en un plano donde cada uno representa una característica, cuyas coordenadas en los ejes corresponde con la densidad a la que "nace" y a la que "muere" respectivamente.

Una diferencia entre las curvas de Betti y los diagramas de persistencia es que estos últimos nos muestran características en todos los niveles de densidad, mientras que la curva solo nos muestra las características que para ese momento (esa densidad) están vivas, esto lo veremos mejor en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. En la Figura 4.1 podemos ver 60 puntos generados aleatoriamente con densidades de nacimiento y muerte entre 0 y 1, todos ellos en la parte superior de la diagonal, pues primero

nacen y luego a una densidad menor mueren.

La curva de Betti en la parte superior la podemos calcular dibujando un rectángulo hasta la diagonal, que encierra todas las características vivas en ese momento. Lo vemos para tres densidades distintas, la linea roja en 0,2 con 5 características, la amarilla en 0,5 con 35 y la azul en 0,7 con 14. La zona sombreada de azul es lo que consideramos ruido, clases que nacen y mueren en un periodo muy breve de tiempo, quedando claro debido a su proximidad al la diagonal, y por lo tanto, suelen ser obviadas para sacar conclusiones. En cambio, en la zona sombreada de rojo, vemos una zona de puntos de alta persistencia y por lo tanto fundamentales a la hora de estudiar la filtración del objeto en cuestión.

La persistencia la calcularemos como propusimos en la sección 3, a partir del DTFE y el algoritmo para el calculo de la persistencia, aunque existen ya herramientas que nos facilitan estos pasos como puede ser *Persistent Homology Algorithms Toolbox* (PHAT) el cual devuelve directamente una lista con las características independientes, así como la densidad de nacimiento y muerte de cada uno y su dimensión.

4.2. Análisis de los diagramas: Curvas de Betti

Comenzaremos analizando las curvas de Betti de forma general, presentes en la Figura 4.2. Sus ejes están todos en la misma dimensión para así poder facilitar la comparación, el eje de las abscisas corresponde al valor de la densidad de forma creciente a medida que nos desplazamos cara la derecha, y el eje de las ordenadas el numero de características topológicas independientes vivas en ese momento. Cada uno de los diagramas representa respectivamente las islas (con dimensión cero), túneles o filamentos (dimensión uno) y vacíos (dimensión dos), encontrándonos que tienen un comportamiento bastante similar. Todas son curvas que crecen de forma continua hasta un único máximo bastante centrado y luego decrecen hasta tender a cero, con la diferencia de que lo alcanzan en valores de la densidad distintos. Cuantos mas a la derecha nos encontremos en los diagramas se nos muestran valores de densidad cada vez mayores que nos indica que estas características son más raras,mientras que cuanto mas a la izquierda, disminuiremos la densidad y todas las componentes se empiezan a unir en grandes aglomerados.

Observación 4.2. Cabe destacar que la curva de Betti correspondiente a las islas o componentes conexas tiende hace uno a medida que disminuimos la densidad y no cero, pues para valores muy pequeños de densidad solo hay una única componente con una muerte teórica en $-\infty$. Esto lo obviaremos, ya que queremos mantener una escala logarítmica y al ser un único punto no nos va a afectar.

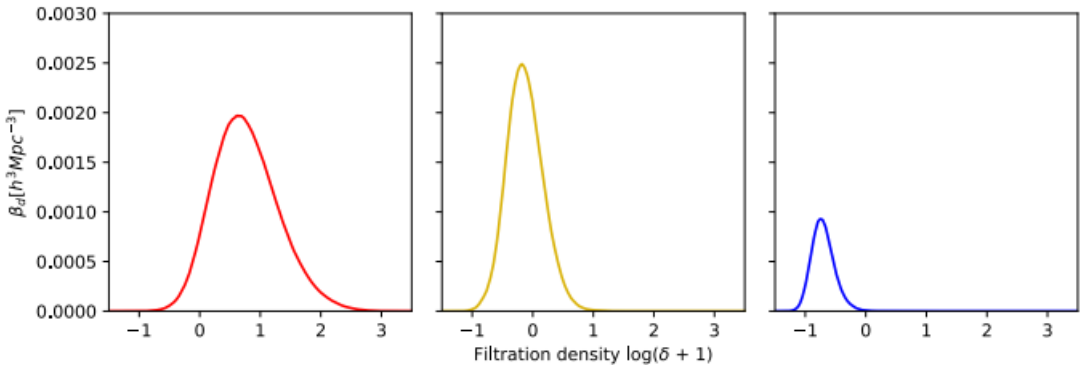

Figura 4.2: Curva de β_0 en rojo, β_1 en amarillo y β_2 en azul.

Analizando globalmente todas las curvas, lo que primero destaca es que la componente mas habitual para su valor máximo son los filamentos (gráfica central de la Figura 4.2), finos conjuntos de materia que se distribuyen a lo largo del universo como caminos entre las islas, dominantes en el valor medio de la densidad para $\delta = 0$. Por otro lado las islas (gráfica de la izquierda en la Figura 4.2) es la curva más "amplía", teniendo presencia a lo largo de un gran abanico de densidades siendo lógicamente mente las ultimas en desaparecer, pues son cúmulos con una gran cantidad de materia en una zona muy pequeña y con un naciendo relativamente temprano, para valores de densidad cerca del $\delta = -0{,}5$. Por último, centrándonos en los vacíos (gráfica de la derecha en la Figura 4.2), como cabe esperar son los primeros en aparecer para densidades muy pequeñas, quedando prácticamente desaparecidos a partir de la densidad media $\delta = 0$, donde podríamos decir que sus cascaras, al ser finas capas de materia a las que llamamos muros o paredes, se rompen o se les crean agujeros a medida que aumentamos su densidad.

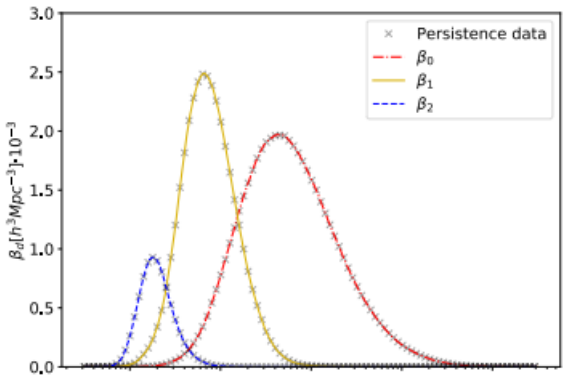

Figura 4.3: Las tres curvas de Betti anteriores superpuestas para una mejor comparación

Fijándonos ahora en las tres curvas superpuestas en la Figura 4.3 y en como estas se intersecan entre si, podemos destacar dos aspectos; primero, las tres grandes zonas bien diferenciadas en donde la característica de cada curva domina sobre las demás, dejándonos paso a lo segundo,

que son las zonas de intersección de estas curvas, donde las más significativas son la intersección entre túneles y islas (esto es, entre las curvas de β_1 y β_0) así como la intersección entre vacíos y filamentos (o bien, las curvas de β_2 y β_1).

De nuevo, vemos que para valores de densidad elevados, como por ejemplo $\delta \geq 4$, solo hay islas, pues la densidad es ya tan grande que solo sobreviven aquellas zonas con una gran concentración de masa, dejando casi desaparecidos los finos filamentos y sin ningún vacío. Ocurre lo contrario para densidades pequeñas, como puede ser $\delta \leq -1$, donde apenas hay islas pues están unidas entre ellas, dejando solo los grandes vacíos como protagonistas de este nivel. Sin duda, la zona mas interesante es la primera intersección de la que hablamos antes, donde se encuentran las curvas referidas a las islas con la correspondiente a los filamentos, pues es a partir de este punto (si recorremos el gráfico hacia la izquierda) que las islas empiezan a desaparecer y con ellas tanto los vacíos como los filamentos aumentan de forma drástica. Dichos filamentos son los encargados de conectar las islas y con ello traer la muerte de muchas de ellas al convertirlas en una sola componente conexa. Destacamos que la intersección entre los vacíos y los filamentos corresponde a una situación en la que los túneles son absorbidos y transformados en muros, que recubren los vacíos, generando así más de ellos.

Por último destacamos la zona en $\delta = 0$, momento en el que la mayoría islas han sido conectadas formando una estructura que conocemos como la *red cósmica*

4.3. Análisis de los diagramas: Diagramas de persistencia

Mientras que las curvas de Betti nos proporcionan información sobre la estructura topológica global de nuestro campo de densidad, si quisiéramos una comprensión detallada de la estructura y la correspondiente evolución jerárquica de sus componentes, sólo se podría obtener de los diagramas de persistencia, cuyo contenido es más rico que la información que nos aporta las curvas de Betti.

Los diagramas de persistencia que vemos en la fila inferior de la Figura 4.4 están acompañados de la desviación estándar para cada uno de ellos, tras cinco ejecuciones de la simulación independientes. Los puntos, que recordamos que eran los pares de nacimiento-muerte, tienen una forma triangular apoyada sobre la diagonal principal, donde encontramos la mayor cantidad de puntos. Como decíamos anteriormente, esta zona próxima a la diagonal la consideramos ruido ya que tiene una baja persistencia debido a su corta duración en la filtración. La región más interesante es la zona triangular de la parte superior de cada diagrama. Aquí podemos encontrar el que llamaremos *vértice* del diagrama, punto en el que las dos fronteras del triángulo dibujado por los puntos se intersecan.

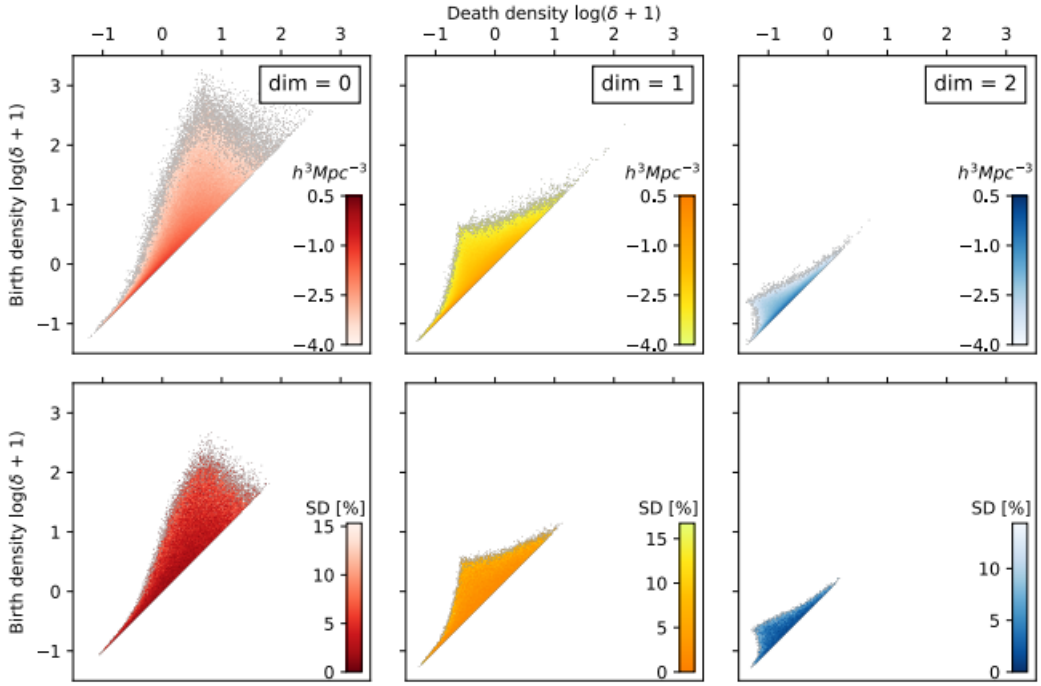

Figura 4.4: Representación los diagramas de persistencia, en rojo los puntos referentes a β_0, en amarillo a β_1 y en azul a β_2. El gradiente se debe a la concentración indicando una mayor cantidad de puntos allá donde el mas fuerte el color (figura obtenida de [1])

Reflejando lo que analizamos en las curvas de Betti, hay una diferencia sustancial en el rango de densidad sobre el cual las características de cero, una y dos dimensiones se encuentran en los diagramas de persistencia. Las islas, unas zonas de gran densidad, están muy distribuidas apareciendo y desapareciendo a lo largo de toda la filtración, mientras que los filamentos o túneles tienen un rango de densidad mucho mas estrecho, centrándose prácticamente en $\delta \approx 1$. Por último los vacíos, las características de dos dimensiones, se limitan principalmente a un rango de densidad aún más estrecho cercano a $\delta \approx 0{,}8$.

La existencia de un vértice sugiere la presencia de una fuerte transición de fase en el proceso de evolución de los elementos que estamos estudiando. Además, encontramos que tal transición funciona de manera diferente para islas, túneles y vacíos pues se ubica en distintos puntos. Fijándonos en el diagrama de arriba a la izquierda de la Figura 4.4, en el caso de las islas el vértice nos marca la zona con una mayor cantidad de nacimiento de clases, correspondiente con cúmulos de gran densidad que debido a procesos gravitacionales evolucionaron a varios grupos de alta densidad. El hecho de que se encuentren en el vértice sugiere que todos ellos mueren a la vez, es decir, como si todas estas islas se unen en un gran aglomerado justo en el valor de densidad $\delta \approx 5$, valor a partir del cual la materia se separa de la expansión de *Hubble* y las contracciones gravitacionales como citan los autores del artículo [1].

Mirando ahora el diagrama de arriba en el centro, el de los agujeros 1- dimensionales, observamos que el triángulo que contiene la mayor cantidad de las características tiene uno de sus bordes casi horizontal y muy borroso, lo cual nos sugiere que no hay muchos filamentos que nazcan mas allá de $\delta \geq 5$, aproximadamente al mismo nivel al que aparece su vértice.

Las transiciones que observamos en los diagramas de cero y una dimensión nos representan el nacimiento de la red cósmica. $\delta \approx 5$ nos marca el nivel donde notamos una transición clave en la que las islas se conectan en aglomeraciones masivas mientras que a su vez también observamos el nacimiento de muchos filamentos y túneles. Esto nos indica que la unión de estas islas se debe a la conexión entre ellas mediante los filamentos. El vértice del diagrama de persistencia de dimensión cero indica que los cúmulos de densidad que se unen en la red de filtración de la red cósmica son las que desacoplan de la expansión del *Hubble* y sufren una contracción gravitatoria.

Concentremos nuestra atención ahora en el diagrama de persistencia bidimensional, ubicado arriba a la derecha. Vemos que su forma es algo distinta que en los casos anteriores. Lo que más destaca es que tiene un vértice afilado, concentrándose los nacimientos con muy poca variación al rededor de $\delta \approx -0{,}8$. Esta es de hecho la densidad característica de los vacíos en la galaxia y distribución de la materia. La pequeña muesca que hace el borde antes del vértice nos refleja el hecho de que no existen vacíos de baja densidad de tamaño pequeño. Si nos fijamos más hacia la derecha, podemos ver reflejado que los vacíos en realidad son grades superficies con muy poca materia, lo que les otorga muy poca densidad y por ello el diagrama está tan abajo.

En resumen, los vacíos más significativos que podemos identificar son los que aparecen en un umbral de densidad $\delta \approx -0{,}8$. A mayor densidad la mayoría de estos vacíos se conectan en un vacío mas grande a medida que la filtración filtración crece, es decir, disminuye la densidad.

Una vez estudiados los diagramas referentes a las islas y los vacíos, estamos preparados para analizar el que corresponde a los filamentos, los 1-dimensionales y establecer una relación entre ellos y la distribución de la masa. Estos filamentos se ubican en una densidad media y podemos observar algunas características de su diagrama como es por ejemplo la presencia de un vértice claro en distinta posición que los dos anteriores, así como la simetría que presenta su diagrama. El vértice se forma a una densidad de $\delta \approx 5$ y se elimina en una densidad de $\delta \approx -0{,}7$.

Nos centraremos principalmente en el borde horizontal superior ligeramente inclinado, que como ya aprendimos anteriormente, marca el proceso de formación de la red cósmica a lo largo de la filtración y coincide con una transición topológica clave. Para entender esto mejor ampliemos una zona de nuestra muestra de partículas y veamos como se distribuyen sus filamentos.

La comparación entre la estructura de filamentos en el panel central con la distribución de partículas del panel izquierdo, muestra que gracias a la selección cuidadosa del umbral de

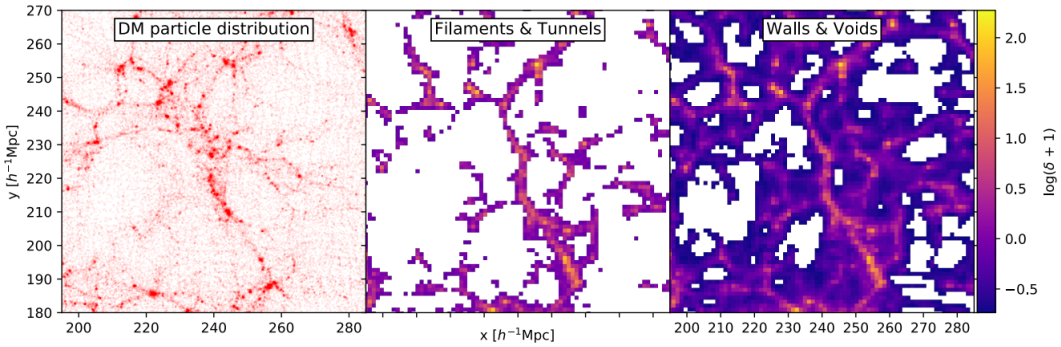

Figura 4.5: Un zoom en una zona de la red cósmica, pudiendo observar con claridad los filamentos y los nodos (figura extraída de [1])

densidad, podemos mejorar la visualización de una determinada componente de la red cósmica. Esto también es posible para la representación de los muros cósmicos aunque de una forma menos clara. En la Figura 4.5 podemos ver que los filamentos están justo en el punto donde comienzan a conectar islas, fusionándolas con la red.

Bibliografía

[1] Georg Wilding, Keimpe Nevenzeel, et al. (2021), *Persistent homology of the cosmic web – I. Hierarchical topology in ΛCDM cosmologies*, *MNRAS* **507**, 2968–2990.

[2] J. R. Munkres, 1984, *Elements of Algebraic Topology*, *Addison-Wesley.*

[3] Matsumoto, Yukio, (2002), *An Introduction to Morse Theory*, *AMS*

[4] Pratyush Pranav, Herbert Edelsbrunner, et al. (2017), *The topology of the cosmic web in terms of persistent Betti numbers*, *MNRAS* **465**, 4281–4310.

[5] R. Ghrist, (2007), *Barcodes: The persistent topology of data*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **45**

[6] Schaap, Willem Egbert, (2007), *DTFE : the Delaunay Tessellation Field Estimator.*

[7] Václav Snášel, JanaNowaková et al. (2017), *Geometrical and topological approaches to Big Data*, *Future Generation Computer Systems*, **67**, 286-296.