FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

DESIGUALDADES EN PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

Julio Vázquez Zavalza

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

DESIGUALDADES EN PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS

Julio Vázquez Zavalza

Setembro, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Álxebra
Título: Desigualdades en problemas de olimpíadas
Breve descrición do contido
Calquera libro con problemas ou material de preparación para as olimpíadas matemáticas inclúe desigualdades. A idea deste traballo é facer unha presentación das desigualdades numéricas (entre elas: medias aritmética e xeométrica, Cauchy-Schwarz, Hölder, reordenación, Chebyshev, Schur, Minkowski, e, por suposto, Jensen). Facer unha recollida de enunciados das distintas fases da Olimpíada Matemática Española e da IMO e presentar unha escolma de problemas resoltos.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo

O obxectivo principal deste traballo será presentar as diferentes desigualdades matemáticas empregadas para resolver moitos dos problemas propostos nas distintas competicións de Olimpiadas Matemáticas, desde o nivel local ou autonómico até o internacional –e a relativamente nova EGMO, a nivel feminino. Ademáis, recóllese unha escolma de problemas resoltos mediante o uso de unha ou varias destas desigualdades, facendo notar a potencia que teñen para aproximar ou resolver cada problema.

Deste xeito, o traballo está divido en 3 capítulos. O primeiro deles é a introducción e caracaterísticas das diferentes competicións olímpicas. No segundo pasamos a definir e demostrar as desigualdades máis importantes e empregadas: a desigualdade triangular, a desigualdade das medias, desigualdades de reordenación –entre as que atopamos Cauchy-Schwarz, Chebyshev ou Nesbitt–, a desigualdade de Holder, a de Minkowski, a importante desigualdade de Jensen para funcións convexas, o teorema de Muirhead e as desigualdades de Schur e de Erdos-Mordell. Unha vez familiarizados con elas, damos unha serie de problemas de cada competición. Na última sección veñen as solucións a cada problema. Moitas veces as solucións non son únicas, ou non están todas incluídas; pero sempre se trata de resaltar a utilización das devanditas desigualdades.

Abstract

The main goal of this work is to present the different inequalities used to solve many of the problems proposed in the different Mathematical Olympiad competitions, from the regional level to the international –and the relatively new EGMO, at a female level. In adition, we present a selection of solved problems using one or more off these inequalities, noting the power they have to aproximate or solve each problem.

In this way, the work is divided in 3 chapters. The first one, is the introduction and charac-

teristics of the different Olympic competitions. In the second we are going to define and prove the most important and used inequalities: the triangular inequality, the inequality of the means, rearrangement inequalities –among which we find Cauchy-Schwarz, Chebyshev or Nesbitt–, the Holder inequality, the Minkowski inequality, the important Jensen inequality for convex functions, the Muirhead theorem and the Schur and Erdos-Mordell inequalities. Once familiar with them, we give a series of problems from each competition. The last section contains the solutions to each problem. Often the solutions are not unique, or not all of them are included; but the aim is always to highlight the use of these inequalities.

Introdución

As olimpíadas matemáticas son competicións académicas que teñen como obxectivo principal despertar, fomentar e premiar o interese polas matemáticas entre o estudantado, especialmente no ámbito preuniversitario. Nelas, propóñense unha serie de problemas matemáticos que requiren creatividade, razoamento lóxico e unha comprensión profunda dos conceptos, máis aló das técnicas estándar ensinadas nas aulas.

A nivel nacional, a Real Sociedade Matemática Española (RSME, [4]) organiza a **Olimpiada Matemática Española** (OME, [7]) en colaboración coas universidades públicas e o Ministerio de Educación co obxectivo de estimular o interese polas matemáticas entre o estudantado de ensino secundario e bacharelato, así como identificar e apoiar o talento matemático novo. A OME é a máis antigua, e a máis importante, das olimpíada científicas españolas. Vense celebrando ininterrumpidamente dende o ano 1964 –coa única excepción do ano 1978, xa que no curso 1977-78 rematou a implantación do BUP, que engadíu un ano máis á formación preuniversitaria.

A nivel internacional, a *International Mathematical Olympiad* (IMO, [6]) celebrouse pola primeira vez en 1959, en Romanía, coa participación de sete países do leste de Europa: Romanía, Bulgaria, Checoslovaquia, Hungría, Polonia, República Democrática Alemá e Unión Soviética. Progresivamente foise abrindo a máis países ata consolidarse como a competición matemática máis antiga e prestixiosa a nivel mundial para estudantes de ensino secundario. Na 44^{th} IMO, celebrada en Madrid en 2008, houbo un total de 535 participantes en representación de 97 países. Estes números medraron ata acadar os 125 países e 609 participantes na 65^{th} IMO celebrada en 2024 en Bath, Reino Unido.

España participa na IMO desde 1983, enviando un equipo de seis estudantes cada ano, que compiten resolvendo problemas de alta complexidade matemática.

Especialmente intersante é tamén a Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), na que participan países de fala hispana e portuguesa de América, así como España e Portugal. Esta olimpíada busca fortalecer os lazos entre os países participantes e promover o intercambio académico e cultural a través das matemáticas.

España participa na OIM dende a súa fundación en 1985 e organizou a XIX OIM, no ano 2004, en Castellón, e, conxuntamente con Portugal, a XXXIII no 2018, na Rábida.

En 2012 botou a andar a *European Girls' Mathematical Olympiad* (EGMO, [8]), unha competición específica para mozas, que busca fomentar a participación feminina nas matemáticas e visibilizar o talento matemático das rapazas. España participa na EGMO desde o 2016, contribuíndo activamente á promoción da igualdade de xénero no ámbito científico.

A Olimpíada Matemática Española celébrase en varias fases:

- A Fase Local (Fase de Distrito ou Fase Autonómica)

  Celébrase á final do primeiro trimestre en cada Comunidade Autónoma ou Distrito Universitario e poden participar alumnos matriculados no sistema educativo español en Bacharelato, ou de 3º e 4º da ESO con excelentes capacidades; Consta de dúas probas escritas nas que se deben resolver un total de seis problemas. En Galicia, a fase Autonómica é a Olimpíada Matemática Galega (OMG, [9]).

- A Fase Nacional

  Nesta fase, ou concurso final, participa unha selección das mellores puntuacións das Fases Autonómicas (a contía fíxase para cada Comunidade/Cidade Autónoma) e consta de dúas probas escritas de tres horas e media cada unha, nas que teñen que facer fronte a un total de seis problemas propostos por un xurado. ([7])

  A OME chegou este ano á súa sexaxésimo primeira edición, dúas delas en Galicia (a primeira, en Santiago de Compostela, en 2005, e a segunda, en Ourense, en 2019).

- Olimpíadas Internacionais

  As seis mellores puntuacións con nacionalidade española da Fase Final recibirán unha medalla de ouro e terán dereito a participar, representando a España, na Olimpíada Internacional de Matemáticas (IMO) [6]. Por certo, este ano, o Equipo Olímpico que represenou a España na 66^{th} IMO en Sunshine Coast, Australia, contou con dous representantes galegos,Miguel Cores Mejuto e Pablo Freire Fernández, quen acadou unha medalla de prata.

  Unha selección de catro destes gañadores participará posteriormente na Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas (Ibero).

  O equipo que representa a España na Olimpíada Matemática Europea Feminina (EGMO) selecciónase na Olimpíada Feminina Española de Matemáticas ([5]), que este ano acadou a súa segunda edición..

Capítulo 1

Desigualdades importantes

A continuación enunciaremos e demostraremos algunhas das desigualdades máis importantes. A meirande parte delas empregaranse en varios dos problemas escolleitos e trascenden a tódolos campos das matemáticas.

En xeral, as desigualdades son difíciles de resolver, pero presentan aproximacións e interpretacións a problemas que doutro xeito quedarían irresolubeis ou incompletos.

1.1. Desigualdade Triangular

Unha das máis importantes e intuitivas desigualdades. Establece que a suma das lonxitudes de dous lados dun triángulo é sempre maior ou igual que a lonxitude do terceiro lado. Para a interpretación xeométrica non temos máis que pensar que o camiño máis curto entre dous puntos calesquera é a liña recta.

Teorema. Para calesquera números reais, a e b, tense que $|a+b| \leq |a|+|b|$. A igualdade dase se, e só se, $ab \geq 0$.

Proba. Como $|a+b|$ e $|a|+|b|$ son non negativos, abonda probar a desigualdade para os seus cadrados:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \leq |a|^2+|b|^2+2|ab| = (|a|+|b|)^2.$$

Observar que únicamente aparece unha desigualdade, $ab \leq |ab|$, e teremos unha igualdade cando $ab \geq 0$, que ocorre cando os dous teñen o mesmo signo ou un deles é nulo.

Desigualdade Triangular Xeneralizada. Aplicación a espazos normados, nos que a norma da suma de dous vectores é menor ou igual á suma das normas individuais.

Teorema. Sexan $x_1, \dots, x_n$ números reais. Entón verifícase

$$|x_1| + \cdots + |x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

A igualdade dase se, e só se, tódolos x_i's teñen o mismo signo.

1.2. Desigualdade das Medias

A máis coñecida e frecuente desigualdade é a Media Aritmética-Media Xeométrica (MA-MX de agora en diante). É a combinación deses dous termos: a media aritmética maila xeométrica. Establece que a media aritmética dun conxunto de números reais positivos é sempre maior ou igual que a súa media xeométrica.

Defínese a media aritmética de dous números a e b mediante $\frac{a+b}{2}$. De forma similiar, definimos a media xeométrica entre a e b como $\sqrt{ab}$..

A expresión máis sinxela da MA-MX é a seguinte:

Desigualdade MA-MX básica. Para reais positivos. a e b,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Proba Tomamos cadrados,

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

que é equivalente a

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Esto é obviamente certo para números positivos como o esiximos de a e b. A igualdade dase se, e só se, $a = b$.

A continuación, mostramos un exemplo, que seguirá a estructura de resolución empregada para a escolma de problemas.

Exemplo 1. Para números reais, a, b e c, proba que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Primeira solución. Temos as seguintes desigualdades,

$$a^2 + b^2 \geq 2abb^2 + c^2 \geq 2bcc^2 + a^2 \geq 2ac$$

Sumando as tres desigualdades e dividindo por dous obtense o resultado. A igualdade dase se, e só se, $a = b = c$.

Segunda solución. A desigualdade é equivalente a

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

o cal é obvio por ter sumandos cuadráticos.

Desigualdade MA-MX xeral. Para números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tense a seguinte desigualdade

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ ,$$

onde a igualdade dase se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Desigualdade da media xeométrica-harmónica(MX-MH). Defínese a media harmónica como a inversa da media aritmética dos inversos dos valores. Sexan $a_1, \ldots, a_n$ números positivos. Entón,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Desigualdade das medias ponderadas. A media ponderada é unha media artimética que asigna diferentes pesos ou importancias a cada valor promediado. Dados $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ e $w_1, \ldots, w_n$ tales que $w_1 + \cdots + w_n = 1$, tense que

$$w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} + \cdots + a_n^{w_n}.$$

1.3. Teorema de Muirhead

A seguinte desigualdade é moi popular nos círculos olímpicos. Trátase dunha xeneralización da desigualdade da media aritmética contra a media xeométrica.

Dada unha n-pla de números reais, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e dados calesquera números reais $x_1, \ldots, x_n$, definimos a media-p, tamén chamada media simétrica de $x_1, \ldots, x_n$ mediante

$$[p] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n}$$

onde S_n denota o conxunto de tódalas permutacións do conxunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Observemos que na definición de $[p]$ podemos manter a orde dos $x_1, \ldots, x_n$ e permutar os expoñentes, chegando ó mesmo resultado. Dados $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $q = (q_1, \ldots, q_n)$ decimos que p **maiora** q, denotando $p \succ q$, se se cumpren estas tres condicións:

- $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ e $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n$
- $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = q_1 + \cdots + 1_n$
- $p_1 + \cdots + p_k \geq q_1 + \cdots + q_k$, para todo $k \leq n$

Teorema de Muirhead. Dadas $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $q = (q_1, \ldots, q_n)$ dúas n-uplas de números reais non negativos,

$$p \succ q \text{ equivale a } [\mathrm{p}] \geq [\mathrm{q}],$$

é dicir, p maiora q se, e só se, a media p de calquera n números reais positivos, $x_1, \ldots, x_n$ é maior ou igual ca súa media q.

1.4. Desigualdades de Reordenación

Desigualdade de reordenación. Sexan $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ secuencias de números positivos crecentes ou decrecentes. Isto é, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$. Entón para calquera permutación (c_n) de números (b_n) temos as seguintes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \geq \sum_{i=1}^{n}(a_i c_i) \geq \sum_{i=1}^{n}(a_i b_{n-i+1})$$

Por tanto, o máximo da suma dase cando emparellamos o maior co maior, o segundo maior co segundo maior e así sucesivamente.O mínimo dase cando emparellamos o maior co menor,o segundo maior co segundo menor e así sucesivamente.

Proba. Denotemos por S á suma de $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ e por S' a $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_xb_y + \cdots + a_yb_x + \cdots + a_nb_n$. Entón

$$S - S' = a_xb_x + a_yb_y - a_xb_y - a_yb_x = (a_x + a_y)(b_x - b_y) \geq 0.$$

Tanto $a_x - a_y$ coma $b_x - b_y$ son positivos ou negativos, según as secuencias do enunciado. Por tanto, a suma faise pequena se o fai algún dos dous sumandos. A outra parte da desigualdade é análoga.

Desigualdade de Chebyshev É consecuencia directa da desigualdade de reordenamento. Establece o seguinte:

Sexan $(a_i)_{i=1}^n$ e $(b_i)_{i=1}^n$ secuencias de números positivos. Entón:

(i) se as secuencias son do mismo tipo,

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

(ii) se as secuencias son de tipo contrario,

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

Proba. Só probaremos a primeira inecuación, pois a outra dedúcese de igual maneira. Pola desigualdade de reordenación,

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\ &\vdots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} \end{aligned}$$

Sumando as desigualdades darriba,

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

como queriamos probar.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz. É unha potentísima desigualdade, moi útil na resolución de desigualdades cíclicas e simétricas. Ademáis, o caso especial da igualdade tamén é importante. Establece que para calesquera números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tense a seguinte desigualdade

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2,$$

onde a igualdade dáse se a secuencia é proporcional. Isto é, se

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Primeira Proba. Esta é a proba clásica da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Sexa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_ix)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2a_ib_ix + b_i^2x^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \Big(2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)x + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)x^2$$

Evidentemente $f(x) \geq 0$ por ser unha función cuadrática. Isto implica que, como moito, ten unha raíz e o seu discriminante é menor ou igual a 0:

$$\sum_{i=1}^{n}(2a_ib_i)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i^2)\sum_{i=1}^{n}(b_i^2)$$

co que queda probada a desigualdade.

A igualdade dase cando $f(x) = 0$, o cal ocorre se

$$x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$$

Segunda proba. Usamos a **desigualdade MA-MX**,

$$\frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_1^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2a_1b_1}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}}$$

$$\frac{a_2^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_2^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2a_2b_2}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_n^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2a_nb_n}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}}$$

Sumando tódalas desigualdades obtemos,

$$2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n (2a_ib_i)}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}}$$

Que é a expresión buscada:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$$

Desigualdade de Nesbitt Se a,b,c son números reais positivos, entón

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

A demostración de esta desigualdade vén proposta como exercicios nas IMO do ano 1968. Demostrámola aquí e a empregaremos nalgún exercicio proposto.

Proba. Supoñamos, sen perda de xeneralidade que $a \leq b \leq c$, co que $a+b \leq c+a \leq b+c$, e $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$.

Pola primeira desigualdade de reordenación:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$$

e

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b},$$

polo que, ao sumar ambas desigualdades,

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}=3$$

1.5. Desigualdade de Holder

Trátase dunha desigualdade fundamental entre integrais, ademáis dunha ferramenta indispensable para o estudo de espazos Lp. Sexan a_{ij}, con $1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$ reais non negativos e p,q positivos tales que $(\frac{1}{p})+(\frac{1}{q})=1$, entón

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leq\sqrt[p]{a_1^p+\cdots+a_n^p}\ \sqrt[q]{b_1^q+\cdots+b_n^q}$$

A igualdade dase se, e só se, $a_i=b_{i,}$, para $i=1,2,\ldots,n$

Notemos que a desigualdade de Cauchy correspóndese co caso $p=q=2$.

1.6. Desigualdade de Jensen

Unha das máis empregadas. Establece que, para unha función convexa, o valor esperado da función aplicada a unha variable aleatoria é maior ou igual que a función do valor esperado da variable aleatoria.

Sexa $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Diremos que f é convexa no intervalo $I=[a,b]$ si para cada $t\in[0,1]$ tense a desigualdade

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Vexamos agora a desigualdade de Jensen. Supoñamos que f é unha función convexa en $[a,b]$. Daquela, a desigualdade

$$\frac{f(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}\leq\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

é verdade para tódolos $a_i\in[a,b]$. De forma similar, si f é cóncava nese intervalo o signo da desigualdade cambia.

Proba. Por inducción:

Se $n=1$ é claro que $f(a_1)\leq f(a_1)$

Se $n=2$: tendo en conta a convexidade da función, tomamos $x=a_1$,$y=a_2$ e $t=1/2$.Así

$$f\left(\frac{1}{2}a_1+(1-\frac{1}{2})a_2\right)\leq\frac{1}{2}f(a_1)+(1-\frac{1}{2})f(a_2)$$

é dicir,

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \leq \frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}.$$

Consideremos certo o caso $n = k$, é decir, cúmprese que

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right) \leq \frac{f(a_1)+\cdots+f(a_k)}{k}$$

e comprobemos que se cumpre o caso $n = k+1$, isto é,

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right) \leq \frac{f(a_1)+\cdots+f(a_{k+1})}{k+1}$$

.

Considerando a definición de función convexa, tomamos $0 \leq t = \frac{k}{k+1} \leq 1 \Rightarrow 1-t = \frac{1}{k+1}, x = \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}$ e $y = a_{k+1}$. Daquela

$$f\left(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k} + \frac{1}{k+1}\cdot a_{k+1}\right) \leq \frac{k}{k+1}f\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} + \frac{1}{k+1}f(a_{k+1})\right)$$

E, pola hipótese inductiva,

$$\frac{k}{k+1}f\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} + \frac{1}{k+1}f(a_{k+1})\right) \leq \frac{k}{k+1}\cdot\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_k)}{k}+\frac{f(a_{k+1})}{k+1} = \frac{f(a_1+)+\cdots+f(a_{k+1})}{k+1}$$

Chegamos pois a

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right) \leq \frac{f(a_a)+\cdots+f(a_{k+1})}{k+1}$$

como queríamos probar.

1.7. Desigualdade de Minkowski

Establece que os espazos Lp son espazos vectoriais con norma. Sexan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números positivos e sexa $p \geq 1$.Entón

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p)} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(a_i^p)} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(b_i^p)}$$

Proba. Observemos que podemos escribir

$$(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$$

polo que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{p} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}$$

e, se tomamos q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, podémoslle aplicar **Holder** a cada un destes sumandos para obter estas dúas expresións

$$\sum_{i=1}^{p} a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\sum_{i=1}^{p} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

co que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Basta agora pasar o factor común ao lado esquerdo e observar que, pola elección de q, $(p-1)q = p$ e $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

1.8. Desigualdade de Schur

Estamos ante outra desigualdade moi útil na resolución de problemas, especialmente no ámbito das Olimpiadas Matemáticas. Sexan x, y, z reais positivos e n enteiro positivo. Tense a seguinte desigualdade:

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-x)(y-z) + z^n(z-x)(z-y)$$

onde a igualdade dase se, e só se, $a = b = c$, ou, $x, y, z = 0$ e permutacións.

Proba. Como a desigualdade é simétrica, suporemos sen perda de xeralidade que $x \geq y \geq z$. Así, a desigualdade anterior equivale á seguinte:

$$(x-y)(x^n(x-z) - y^n(y-z)) + z^n(x-z)(y-z) \geq 0,$$

que obviamente é certo.

1.9. Desigualdade de Erdos-Mordell

Establece que para calquera triángulo ABC e un punto P interior ao triángulo, a suma das distancias de P aos lados do triángulo é menor ou igual á metade da suma da distancia de P aos vértices. Sexa P un punto interior a un triángulo ABC, e sexan Q, R, S puntos de corte de P con BC, con CA e con AB respecticamente. Daquela,

$$PA + PB + PC \geq 2(PQ + PR + RS),$$

onde a igualdade dase se, e só se, ABC é un triángulo rectángulo de centro o punto P.

Capítulo 2

Escolma de Problemas

Nesta sección recollemos unha selección de problemas das Olimpiadas Matemáticas nas que interveñen dalgunha forma as desigualdades que vimos de definir. Como se trata de desigualdades, contentarémonos con aproximacións nalgúns casos; ademáis non incluímos a solución a tódolos problemas, mais solo o enunciado abonda neses casos para dar unha idea da profundidade de moitos resultados. Ademáis moitas das solucións dadas aquí non son únicas.

Daremos primeiro o enunciado dos problemas escolleitos, para dar as solucións á maioría deles na seguinte sección.

Dado que, como vimos na introducción, hai varias competicións Olímpicas, cada unha coas súas particularidades, agruparemos os distintos problemas segundo pertenzan a cada unha das competicións.

Neste sentido, cabe sinalar que case tódalas competicións constan de seis problemas, que van de menor a maior dificultade- non todas: a EGMO por exemplo consta de oito; o que non cambia é a orde ascendente de dificultade. Así, antes de cada enunciado, caracterizaremos cada problema sinalando a competición na que foi proposto, o ano en que tivo lugar e máis o número do problema, para darnos unha idea da dificultade do mesmo. Asimismo, dentro de cada competición, a orde será a dificultade antes ca o ano.

Debemos facer notar que hai dous problemas que non están caracterizados segundo esta notación. Pertencen a un conxunto de problemas chamados "long list", é dicir, a unha primeira recolección de problemas divididos por áreas:álxebra, combinatoria, **desigualdades** etc. que non superaron a criba que dá lugar á "short list", esto é, aos definitivos problemas de cada ano e competición.

Tamén observar que, dadas as datas de entrega deste traballo, houbo tempo de incluír problemas deste ano. É o caso do **problema 5 das IMO**, que tivo lugar en Australia este mes de xullo e mailo **problema 6 das EGMO** .

2.1. Enunciados Problemas

2.1.1. Olimpíada Matemática Galega (OMG)

Problema 1. 2015

Demostrar que

$$(ax + by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para calquera $x, y \in \mathbb{R}$ e calquera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b = 1, a, b \geq 0$. En qué casos se dá a igualdade?

Problema 5. 2013

Resolve esta ecuación exponencial

$$2^x \cdot 3^{5^{-x}} + \frac{3^{5^x}}{2^x} = 6.$$

2.1.2. Olimpiada Matemática Española

Problema 3. 2012

Sexan a, b, c números reais positivos. Proba que:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Problema 5. 2009

Sexan a,b,c números reais positivos tales que $abc = 1$. Proba a seguinte desigualdade

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

.

Problema 6. 2016

Sexa $n \geq 2$. Determinar o menor número real positivo γ de xeito que para calesquera números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e calesquera números reais $y_1, y_2, \cdots, y_n$, con $0 \leq y_1, y_2, \cdots, y_n \leq \frac{1}{2}$, verificando $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$ tense que

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \gamma(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)$$

2.1.3. International Mathematical Olympiads

Problema 1. 1991

Dado un triángulo ABC, sexa I o seu círculo inscrito. Os ángulos das bisectrices interiores A, B, C se cortan nos lados opostos A', B', C' respectivamente. Probar que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

Problema 2. 1995

Sexan a, b, c números reais positivos tales que $abc = 1$. Probar

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

.

Problema 3. 1987

Sexan $x_1, \ldots, x_n$ números reais que satisfacen,

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

Probar que para todo enteiro $k \geq 2$, existen enteiros $a_1, \ldots, a_n$, non todos nulos, tales que $\mid a_i \mid \leq k - 1$ para todo i, e ademáis

$$\mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \mid \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

Problema 5. 1978

Sexa a_k, $k = 1, 2, ...$ unha secuencia de números enteiros positivos. Probar que para todo número natural n,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{k^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)$$

Problema 5. 2025

Alicia e Brais xogan ao xogo Koala, un xogo para dous xogadores cuxas regras dependen dun número real positivo λ, que os dous xogadores coñecen. No n-ésimo cambio de quenda (a partir de $n = 1$) sucede o seguinte o seguinte:

a) Se n é impar, Alicia escolle un número real non negativo tal que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n$.

b) Se n é un par, Brais elixe un número real non negativo tal que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$.

Se un dos xogadores non pode escoller un número x_n, o xogo remata e o outro xogador gaña. Se o xogo continúa indefinidamente, ningún dos xogadores gaña. Os dous xogadores sempre saben que números escolleu o seu contrario.

Determinar tódolos valores λ para os que Alicia ten unha estratexia gañadora e todos aqueles outros λ para os que Brais ten unha estratexia gañadora.

Inequalities Problems I1. Klamkin

Atopa o valor máximo de $S = \text{sen}^2(\theta_1) + \cdots + \text{sen}^2(\theta_n)$
suxeito a $0 \leq \theta_i \leq \pi$ e $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \pi$

Algebra Problems A7. 2011

Sexan a,b e c números reais positivos tales que $min(a+b, b+c, c+a) > \sqrt{2}$ e $a^2+b^2+c^2 = 3$. Probar

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geq \frac{3}{(abc)^2}$$

2.1.4. European Girl's Mathematical Olympiad

Problema 1. 2023

Dados $n \geq 3$ e unha secuencia $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Para cada $1 \leq i \leq n$ sexa $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ e definimos a_0 como a_n e a_{n+1} como a_1. Consideramos que para todo i e j entre 1 e n, temos $a_i \leq a_j$ se, e só se, $b_i \leq b_j$.

Entón $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Problema 6. 2025

En cada cela dun taboleiro de 2025×2025, escríbese un número real non negativo de tal xeito que a suma dos números de cada fila sexa igual a 1 e a suma dos números de cada columna sexa igual a 1. Define f_i como o valor máis grande da fila i e sexa $F = f_1 + f_2 + \cdots + f_{2025}$. De xeito similar, define c_i como o valor máis grande da columna i e sexa $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$. Cal é o valor máis grande posible de F/C?

2.2. Solucións

2.2.1. Olimpiada Galega Matemática

Problema 1. 2015
Demostrar que
$$(ax+by)^2 \leq ax^2+by^2$$
para calquera $x, y \in \mathbb{R}$ e calquera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1, a, b \geq 0$. En qué casos se dá a igualdade?

Primeira Solución. A **desigualdade de Cauchy-Schwarz** aplicada a $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ e $(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)$ dinos que
$$ax^2+by^2 = \left(ax^2+by^2\right)\cdot(a+b) \geq (ax+by)^2,$$
que equivale a desigualdade proposta, habida conta de que $a+b=1$.

A desigualdade será unha igualdade se $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ e $(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y)$ son proporcionais, o que sucede se a ou b son nulas, ou ben, se $x=y$.

*Segunda Solución*A función $f(z)=z^2$ é claramente convexa, polo que, pola **desigualdade de Jensen**, para calquera números reais a, b, x e y, con $a, b \geq 0$ temos
$$(ax+by)^2 = f(ax+by) \leq \frac{af(x)+bf(y)}{a+b} = \frac{ax^2+by^2}{a+b}.$$
Usando que $a+b=1$, obtemos o resultado solicitado, manténdose a igualdade se un dos dous puntos "desaparece" (é dicir, $a=0$ ou $b=0$), ou se ambos os puntos coinciden (é dicir, $x=y$).

Problema 5. 2013
Resolve esta ecuación exponencial
$$2^x \cdot 3^{5^{-x}} + \frac{3^{5^x}}{2^x} = 6.$$

Dado que o produto $\left(2^x \cdot 3^{5^{-x}}\right) \cdot \left(\dfrac{3^{5^x}}{2^x}\right)$ queda unha potencia de 3, parece axeitado utilizar a **desigualdade entre as medias aritmética e xeométrica**,
$$6 = 2^x 3^{5^{-x}} + 2^{-x} 3^{5^x} \geq 2\sqrt{2^x 3^{5^{-x}} 2^{-x} 3^{5^x}} = 2\sqrt{3^{5^{-x}+5^x}},$$
obténdose a igualdade cando os números promediados sexan iguais. Agora, de novo pola **desigualdade MA-MX**, para a suma dun número e o seu inverso, $(\frac{1}{5^x}+5^x \geq 2)$, coa igualdade cando $5^x = 5^{-x} = 1$, obtemos
$$6 = 2^x 3^{5^{-x}} + 2^{-x} 3^{5^x} \geq 2\sqrt{2^x 3^{5^{-x}} 2^{-x} 3^{5^x}} \geq 2\sqrt{3^2} = 6,$$

obriga a que $2^x 3^{5^{-x}} = 2^{-x} 3^{5^x}$ e $5^x = 5^{-x} = 1$, é dicir, $x = -x = 0$, que será a única solución.

2.2.2. Olimpiada Matemática Española

Problema 3. 2012
Sexan a, b, c números reais positivos. Proba que:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Expandindo o segundo membro:

$$\begin{aligned} ab(a+b) &= a^2b + ab^2 \\ bc(b+c) &= b^2c + bc^2 \\ ca(c+a) &= c^2a + ca^2, \end{aligned}$$

e sumando:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

Agora, para probarmos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2,$$

podemos aplicar o **Teorema de Muirhead**, pois

a) O lado esquerdo é a suma simétrica dos monomios do tipo $(3, 0, 0)$, mentres que o dereito é a suma simétrica dos monomios do tipo $(2, 1, 0)$,

b) $(3, 0, 0) \succ (2, 1, 0)$, e

c) os coeficientes son positivos e os termos son simétricos en tres variables positivas.

Polo tanto,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2,$$

e queda probada a desigualdade.

Problema 5. 2009

Sexan a,b,c números reais positivos tales que $abc = 1$. Proba a seguinte desigualdade

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

.

Como $abc = 1$ temos que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 = \left(\frac{ca}{abc+c}\right)^2 = \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2,$$

e análogamente obtemos as demáis fórmulas por permutación circular. A desigualdade que debemos achar convértese en

$$\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2 \geq \frac{3}{4},$$

que é equivalente a

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right]} \geq \frac{1}{2}$$

Usando a **desigualdade entre as medias aritmética e cuadrática**, obtense

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right]} \geq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right],$$

polo que abonda con demostrar que

$$\left[\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{1+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{1+c}\right)^2\right] \geq \frac{3}{2},$$

que equivale a

$$\frac{abc}{c(1+a)} + \frac{abc}{a(1+b)} + \frac{abc}{b(1+c)} \geq \frac{3}{2},$$

e á súa vez é

$$\frac{1}{c(1+a)} + \frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Se poñemos $a = \frac{\beta}{\alpha}$, $b = \frac{\gamma}{\beta}$ e $c = \frac{\alpha}{\gamma}$, temos a coñecida **desigualdade de Nesbitt**

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

.

A igualdade cúmprese para $a = b = c = 1$.

Problema 6. 2016

Sexa $n \geq 2$. Determinar o menor número real positivo γ de xeito que para calesquera números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e calesquera números reais $y_1, y_2, \cdots, y_n$, con $0 \leq y_1, y_2, \cdots, y_n \leq \frac{1}{2}$, verificando $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$ tense que

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \gamma(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)$$

Sexan $M = x_1 x_2 \cdots x_n$ e $X_i = \dfrac{M}{x_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Consideremos a función $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \frac{M}{t}$ que é convexa, como é doado de probar. Como os números non negativos $y_i, (1 \leq i \leq n)$, son tales que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$, entón, aplicando a **desigualdade de Jensen** á función φ, tense

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi\left(x_i\right)$$

e dicir,

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right)^{-1} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{M}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i X_i. \tag{1}$$

Trátase, agora, de atopar a menor cota superior do termo da dereita de (1). Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Entón temos que $X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_n$ como se comproba inmediatamente.

Aplicando a **desigualdade de reordenación**, sabemos que entre tódalas sumas da forma $\sum_{i=1}^{n} y_i X_i$ a que alcanza o valor máximo é a que se obtén cando $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ e $X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_n$.

Agora observamos que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i X_i = y_1 X_1 + \left(y_2 X_2 + \cdots + y_n X_n\right) \leq y_1 X_1 + \left(y_2 + \cdots + y_n\right) X_2 = y_1 X_1 + \left(1 - y_1\right) X_2.$$

Ao ser $0 \leq y_1 \leq 1/2$ e $X_1 \geq X_2$, tense que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i X_i &\leq \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x_1 + x_2\right) x_3 \cdots x_n\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x_1 + x_2\right) + x_3 + \cdots + x_n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

onde se utilizou a **desigualdade entre as medias aritmética e xeométrica** xunto coa condición $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Do anterior e de (1), resulta

$$M \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i X_i\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right)$$

e, así,

$$\gamma \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Tomando $x_1 = x_2 = \frac{1}{2(n-1)}, x_3 = x_4 = \cdots = x_n = \frac{1}{n-1}$ e $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = y_4 = \cdots = y_n = 0$, tense que

$$M = x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}(y_1x_1 + y_2x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i,$$

polo que se alcanza a cota e concluímos que

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

2.2.3. International Mathematical Olympiads

Problema 1. 1991

Dado un triángulo ABC, sexa I o seu círculo inscrito. Os ángulos das bisectrices interiores A, B, C se cortan nos lados opostos A', B', C' respectivamente. Probar que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

O segmento CI é bisectriz do ángulo C no triángulo ACA', e do mesmo xeito BI bisectriz do ángulo B no triángulo ABA'. Así, I divide o segmento AA' mediante $A'I/AI = A'C/AC = A'B/AB$.

Denotamos por a, b e c ás lonxitudes dos lados BC, CA e AB respectivamente, obtemos

$$a = A'C + A'B = (b+c) \cdot \frac{A'I}{AI}$$

Polo tanto,

$$\frac{AA'}{AI} = \frac{AI + A'I}{AI} = 1 + \frac{A'I}{AI} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Conseguiremos expresións análogas para BB'/BI e para CC'/CI.

Por tanto, o problema redúcese a probar

$$1/4 < \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{c+a}{a+b+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \leq \frac{8}{27} \tag{1}$$

para a,b,c lados dun triángulo.

Estas son desigualdades cíclicas moi comúns. Hai moitas formas de probalo. Por exemplo, mediante a **desigualdade de Jensen** podemos intentar unha aproximación. Porén empregaremos unha substitución ben elemental, rematada elegantemente coa **desigualdade das medias**.

Pois ben, a substitución

$$x = \frac{-a+b+c}{a+b+c}, \quad y = \frac{a-b+c}{a+b+c}, \quad z = \frac{a+b-c}{a+b+c},$$

resulta

$$\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1+x}{2}, \frac{c+a}{a+b+c} = \frac{1+y}{2}, \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{1+z}{2}$$

leva (1) a

$$2 < (1+x)(1+y)(1+z) \leq \frac{64}{27}, \tag{2}$$

para x, y, z números positivos tales que $x+y+z=1$.

Para a desigualdade da esquerda- de feito, ben podiamos facelo así para ambas- non tivemos máis que multiplicar os tres factores da substitución tal cual aparecen en (1).

Para a desigualdade da dereita usamos a **MA-MX**:

$$(1+x)(1+y)(1+z) \leq \left(\frac{(1+x)+(1+y)+(1+z)}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

Problema 2. 1995

Sexan a, b, c números reais positivos tales que $abc = 1$. Probar

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

.

Primeira Solución. Básicamente, tódalas aproximacións desta desigualdade comeza coa substitución $a = \frac{1}{x}$,$b = \frac{1}{y}$,$c = \frac{1}{z}$. As novas variables x, y, z tamén toman valores positivos e satifacen a condición $xyz = 1$. Pola **desigualdade MA-MX**, $x+y+z \geq 3$. Por tanto

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{y^{-1}+z^{-1}} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}$$

,

e o resultado quedaría probado se se ten

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}. \tag{1}$$

Nótese que (1) é unha desigualdade homoxénea; probaremos que se verifica para calesquera reais positivos x, y, z.

Usando a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**

$$(kp + lq + mr)^2 \le (k^2 + l^2 + m^2)(p^2 + q^2 + r^2)$$

e tomamos

$$k = \sqrt{y+z},\ l = \sqrt{z+x}, m = \sqrt{x+y},\ p = \frac{x}{k},\ q = \frac{y}{l},\ r = \frac{z}{m},$$

para obtermos

$$(x+y+z)^2 \le (2x+2y+2z)\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right);$$

de onde se segue (1) inmediatamente.

Segunda Solución. Coma na primeira solución, reducimos a desigualdade ata (1). Daquela, para calesquea positivos α, β, γ,

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = 3 + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \ge 9$$

.

Chamando $\alpha = y+z$, $\beta = z+x$,$\gamma = x+y$, de xeito que $\alpha+\beta+\gamma = 2(x+y+z)$. A última desigualdade reescríbese como

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \ge \frac{9}{2} \tag{2}$$

Como

$$\frac{x^2}{y+z} = \frac{(x+y+z)^2}{y+z} - (2x+y+z),$$

obtemos (1):

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= (x+y+z)^2\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) - 4(x+y+z)\\ &\ge (x+y+z)\left(\frac{9}{2} - 4\right) = \frac{x+y+z}{2}.\end{aligned}$$

Terceira Solución. Volvemos reducir a desigualdade a (1). Asumimos sen perda de xeneralidade que $x \ge y \ge z$. O seguinte razonamiento baséase na fórmula (2) e na coñecida desigualdade

$$xu + yv + zw \ge \frac{(x+y+z)(u+v+w)}{3}, \tag{3}$$

para calesquera reais $x \ge y \ge z$ e $u \ge v \ge w$.

Esta desigualdade provén da **desigualdade de Chebyshev**

$$x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \ge \frac{(x_1 + \cdots + x_n)(u_1 + \cdots + u_n)}{n}$$

para calesquera $x_1 \geq \cdots \geq x_n, u_1, \ldots, u_n$. Para $n = 3$ tense (3), cuxa proba damos a continuación: a diferencia, multiplicada por 3, da parte esquerda e a dereita, convértese en

$$(x-y)(u-v) + (y-z)(v-w) + (z-x)(w-u)$$

que claramente é non negativo.

Volvemos ao exercicio. Chamamos

$$u = \frac{x}{y+z},\ v = \frac{y}{z+x},\ w = \frac{z}{x+y}$$

e usando (2) temos

$$\begin{aligned} u+v+w &= \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \\ &= \Big(\frac{x+y+z}{y+z} - 1\Big) + \Big(\frac{x+y+z}{z+x} - 1\Big) + \Big(\frac{x+y+z}{x+y} - 1\Big) \\ &= (x+y+z)\Big(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\Big) - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Os números u, v, w satisfacen a condición $u \geq v \geq w$, o que nos permite usar(3):

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)(u+v+w)}{3} \geq \frac{x+y+z}{2};$$

co que chegamos a (1).

Cuarta Solución Novamente, reducimos o problema a (1). Para un valor fixado da suma $s = x + y + z$ consideramos a función

$$f(t) = \frac{t^2}{s-t}, \text{para } t \in (0, s).$$

A súa derivada

$$f'(t) = \frac{2t(s-t) + t^2}{(s-t)^2} = 2\Big(\frac{s}{s-t} - 1\Big) + \Big(\frac{s}{s-t} - 1\Big)^2$$

é unha función creciente en t no intervalo $(0, s)$. Por tanto, f é unha función convexa nese intervalo, e podemos aplicar a **desigualdade de Jensen**

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) = 3f\Big(\frac{s}{3}\Big).$$

O valor da última expresión é $\frac{s}{2}$, polo que obtemos (1).

Problema 3. 1987

Sexan $x_1, \dots, x_n$ números reais que satisfacen,

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

Probar que para todo enteiro $k \geq 2$, existen enteiros $a_1, \dots, a_n$, non todos nulos, tales que $| a_i | \leq k - 1$ para todo i, e ademáis

$$| a_1 x_1 + \dots + a_n x_n | \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que os x_i's negativos, se os hai, están ao final da secuencia, polo que hai un m tal que $x_1, \dots, x_m \geq 0$ e $x_{m+1}, \dots, x_n < 0$ (se tódolos x_i's son negativosm entón $m = 0$; si todos son non negativos, entón $m = n$). De esta forma, veladamente, estamos reordenando a secuencia, o que nos permitirá máis adiante empregar unha das desigualades de reordenación.

Definimos C como a n-tupla $(c_1, \dots, c_n)$ con termos enteiros $c_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Consideramos tódolos valores da suma

$$S = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

Os valores mínimo e máximo de S obteñense, respectivamentem mediante,

$$(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0, k-1, \dots, k-1),$$

$$(c_1, \dots, c_n) = (k-1, \dots, k-1, 0, \dots, 0)$$

Denotemos eses valores extremos por A e B respectivamente. Así

$$B - A = (k-1)(x_1 + \dots + x_m) - (k-1)(x_{m+1} + \dots + x_n) = (k-1)(|x_1| + \dots + |x_n|)$$

Por hipótese $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, polo que

$$|x_1| + .. + |x_n| \leq \sqrt{n},$$

pola desigualdade de **Cauchy-Schwarz**. Entón $B - A \leq (k-1)\sqrt{n}$.

Tódolos posibles valores de S caen no intervalo $[A, B]$. Partímolo en $N = k^n - 1$ subintervalos iguais, de lonxitude $\frac{B-A}{N}$

O conxunto C contén k^n tuplas: polo que podemos atopa dúas distintas n-tuplas $(c'_1, \dots, c'_n)$ e $(c''_1, \dots, c''_n)$ con valores da suma S dentro do mesmo subintervalo. Denotamos eses valores por S' e S'':

$$S' = c'_1 x_1 + \dots + c'_n x_n,$$

$$S'' = c_1''x_1 + \cdots + c_n''x_n;$$

daquela

$$| S' - S'' | \leq \frac{B-A}{N}$$

Tomando $a_i = c_i' - c_i''$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ obtemos unha secuencia de enteiros $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ satifacendo as desigualdades $| a_i | \leq k-1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ e

$$| a_1x_1 + \cdots + a_nx_n | = | S' - S'' | \leq \frac{B-A}{N} \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1};$$

co que atopamos enteiros $a_1, \ldots, a_n$ coas propiedades desexadas .

Problema 5. 1978

Sexa $\{a_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ unha secuencia de números enteiros positivos. Probar que para todo número natural n,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Se temos unha secuencia monótona $\{m_n\}$ de positivos enteiros, *i.e.*, $m_i < m_j$ para $i < j$, entón, temos $m_k \geq k$. Por tanto $m_k/k^2 \geq 1/k$ e así

$$\sum_{1}^{n} \frac{m_k}{k^2} \geq \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n.$$

O problema é que a $\{a_i\}$ do noso problema non é necesariamente monótona. Basta, pois, con ter en conta as **desigualdades de reordenación** .

Neste problema, reordenamos como segue:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq$$

("a máis pequeno") $\cdot \frac{1}{1^2}$ + ("segundo a máis pequeno") $\cdot \frac{1}{2^2} + \cdots +$ ("a máis grande") $\cdot \frac{1}{n^2}$

Agora a monotonía da sucesión é evidente. Como o "a máis pequeno"é maior ou igual a 1, o "segundo a máis pequeno"é maior ou igual a 2 e así sucesivamente até o "a máis grande", que é maior ou igual a n; resulta que a suma é maior ou igual a

$$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Problema 5. 2025

Alicia e Brais xogan ao xogo Koala, un xogo para dous xogadores cuxas regras dependen dun número real positivo λ, que os dous xogadores coñecen. No n-ésimo cambio de quenda (a partir de $n = 1$) sucede o seguinte o seguinte:

a) Se n é impar, Alicia escolle un número real non negativo tal que $x_1+x_2+\cdots+x_n \leq \lambda n$.

b) Se n é un par, Brais elixe un número real non negativo tal que $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq \lambda n$.

Se un dos xogadores non pode escoller un número x_n, o xogo remata e o outro xogador gaña. Se o xogo continúa indefinidamente, ningún dos xogadores gaña. Os dous xogadores sempre saben que números escolleu o seu contrario.
Determinar tódolos valores λ para os que Alicia ten unha estratexia gañadora e todos aqueles outros λ para os que Brais ten unha estratexia gañadora.

É doado darse conta de que se λ é "grande", entón Alicia pode facer que Brais perda xa na quenda $n = 2$. Chega con que poida escoller $a_1 \leq \lambda$ tal que $a_1^2 > 2$, é dicir, que $\lambda > \sqrt{2}$. Suporemos, logo, que $\lambda \leq \sqrt{2}$.

Agora, Alicia ten que xogar $x_1 \leq \lambda \leq \sqrt{2}$ e Brais, para elixir o seu x_2 tal que $x_1 + x_2 \leq 2$ ten de marxe $x_2 \leq \sqrt{2 - x_1^2}$. Se opta por $x_2 = \sqrt{2 - x_1^2}$, tendo en conta que $(x_1 + x_2)^2 \geq x_1^2 + x_2^2$, por tratarse de números non negativos, terase que $x_1 + x_2 \geq \sqrt{2}$ e Alicia quedarase sen marxe para xogar se $\sqrt{2} > 3\lambda$, é dicir, Alicia perde na quenda $n = 3$ se $\lambda < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Se $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \leq \lambda \leq \sqrt{2}$, Alicia pode escoller x_3 tal que $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\lambda$, como $x_1 + x_2 \geq \sqrt{2}$, será con $x_3 \leq 3\lambda - \sqrt{2} = \lambda - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda\right) 2 \leq \lambda \leq \sqrt{2}$, que, de novo, lle permitirá xogar a Brais con $x_4 \leq \sqrt{2 - x_3^2}$, pois $x_1^2 + x_2^2 = 2$ e así $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 4$.

Coma no caso anterior, $x_3 + x_4 \geq \sqrt{2}$ e Alicia quedará sen marxe pa xogar se $2\sqrt{2} > 5\lambda$, é dicir, se $\lambda < \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. Vese que o proceso é xeneralizable e que se Brais xoga $x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$, terase

$$k\sqrt{2} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k-1} + x_{2k}$$

e Alicia perderá se $k\sqrt{2} > (2k + 1)\lambda$, é dicir, se $\lambda < \dfrac{k\sqrt{2}}{2k + 1}$.

Se pode xogar, será con

$$x_{2k+1} \leq (2k + 1)\lambda - k\sqrt{2} = \lambda - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda\right) 2k \leq \lambda \leq \sqrt{2},$$

e o proceso continúa coma antes, e Brais pode facer que Alicia perda na súa quenda $n = 2k + 1$ sempre que $\lambda < \dfrac{k\sqrt{2}}{2k = 1}$.

Como a sucesión $\frac{2\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\frac{4\sqrt{2}}{7}, \dots, \frac{k\sqrt{2}}{2k-1}, \dots$ ten por límite $\frac{2\sqrt{2}}{2}$, se $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$, existe un k con $\lambda < \frac{k\sqrt{2}}{2k-1}$ e Brais gañará.

Vexamos agora que sucede se $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Neste caso, Alicia pode optar por xogar con $x_n = 0$ e, dado que Brais, como moito, pode xogar con $\sqrt{2}$, teremos unha situación:

$$x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{2n}^2 \leq 2k,$$

e, pola **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

$$\left(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}\right)^2 \leq \left(x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{2n}^2\right)\left(1^2 + \cdots + 1^2\right) \leq (2k)k,$$

e, así, $x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n} \leq k\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}(2k+1)$ e o xogo pode continuar indefinidamente, sen que nin Alicia nin Brais gañen.

Falta por ver que sucede se $\lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Neste caso, se Alicia continúa coa estratexia de xogar $x_n = 0$, vimos antes que para calquera xogada de Brais, a marxe de Alicia para x_{2k+1} era $(2k+1)\lambda - k\sqrt{2} = \left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2k + \lambda$, que é positiva e aumenta con k.

Para un enteiro k tal que $\left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (2k)^2 > 2k + 2$, Alicia pode xogar

$$x_{2k+1} = \left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (2k)^2$$

e Brais quedaráse sen marxe para xogar, perdendo na quenda $n = 2k + 2$.

Resumindo:

- Se $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$, Brais ten unha estratexia gañandora.
- Se $\lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}$, Alicia ten unha estratexia gañandora.
- Se $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nin Alicia nin Brais teñen estratexia gañandora.

Inequalities Problems I1.Klamkin

Atopa o valor máximo de $S = \operatorname{sen}^2(\theta_1) + \cdots + \operatorname{sen}^2(\theta_n)$
suxeito a $0 \leq \theta_i \leq \pi$ e $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \pi$

Xeométricamente, o problema equivale a maximizar a suma dos cadrados dos lados dun polígono inscrito nun círculo. Aquí os ángulos subtendidos nos lados do polígono no centro do círculo son $2\theta_i$. Probemos que o máximo acádase por un triángulo equilátero inscrito.

Se n (o número de vértices do polígono) é maior que tres, entón polo menos un ángulo do polígono é maior de noventa graos (dado que a media dos ángulos é $\frac{(n-2)\pi}{n}$).

Daquela, si A, B, C son vértices consecutivos do polígono con $\angle B \geq 90$ séguese, pola Lei dos Cosenos, que

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2ABBC \cos B$$

e, como $\cos B \leq 0$,

$$AB^2 + BC^2 \leq AC^2.$$

Por tanto, S crecerá ou diminuirá (o mismo) se B coincide con A ou C, o que equivale a que $\theta_i = 0$. Continuando co proceso, vemos que S será máxima para $n = 2$ ou $n = 3$. Para $n = 2$, S_{max} é claramente 2.

Para $n = 3$, tense o problema de maximización $S_3 = \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_3$, onde θ_i son ángulos dun triángulo. Usamos agora as identidades

$$2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

e

$$\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3 = 1 - 4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}\sum(\cos 2\theta_i) &= 2\cos(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos 2(\theta_1 + \theta_2) \\ &= 2\cos(\theta_1 + \theta_2)[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)] - 1 \\ &= -4\cos\theta_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - 1)\end{aligned}$$

Temos

$$S_3 = 2 + 2\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3.$$

Dado que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ e $\theta_i \geq 0$, como moito un ángulo do triángulo debe ser $\geq \frac{\pi}{2}$.Como neste caso $S_3 \leq 2$, é claro que para o máximo tódolos ángulos son agudos.

No intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, a función $\ln \cos \theta$ é cóncava xa que $d^2(\ln \cos x)/dx^2 = \frac{-1}{\cos^2 x} < 0$.

Podemos por tanto empregar a **desigualdade de Jensen** e obtermos

$$\frac{1}{3}(\ln \cos \theta_1 + \ln \cos \theta_2 + \ln \cos \theta_3) \leq \ln \cos \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3},$$

ou

$$\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 \leq (\cos\frac{\pi}{3})^3 = \frac{1}{8},$$

onde a igualdade dáse se, e só se, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 60$.

Isto é, se o triángulo é equilátero.

Algebra Problems A7. 2011
Sexan a,b e c números reais positivos tales que $min(a+b, b+c, c+a) > \sqrt{2}$ e $a^2+b^2+c^2 = 3$. Probar

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geq \frac{3}{(abc)^2} \tag{1}$$

Imos denotar a sumas da forma $f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$ por $\sum f(a,b,c)$

A condición $b + c > \sqrt{2}$ implica $b^2 + c^2 > 1$, así que $a^2 = 3 - (b^2 + c^2) < 2$. É dicir, $a < \sqrt{2} < b + c$. Por consiguiente, $b + c - a > 0$, e tamén será $c + a - b > 0$ e $a + b - c > 0$ polo mesmo razonamiento.

A continuación, empregamos esta variante da **desigualdade de Holder**:

$$\frac{x_1^{p+1}}{y_1^p} + \cdots + \frac{x_n^{p+1}}{y_n^p} \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^{p+1}}{(y_1 + \cdots + y_n)^p},$$

que é certa para todo número real positivo $p, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Aplicámola á parte esqueda de (1) con $p = 2$ e $n = 3$, e obtemos

$$\sum \frac{a}{(b+c-a)^2} = \sum \frac{(a^2)^3}{a^5(b+c-a)^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)}{(\sum a^{5/2}(b+c-a))^2} = \frac{27}{(\sum a^{5/2}(b+c-a))^2} \tag{2}$$

Para estimar o denominador da parte dereita, usamos a **desigualdade de Schur** na seguinte forma

$$\sum a^{3/2}(a-b)(a-c) \geq 0,$$

que podemos reescribir como

$$\sum a^{5/2}(b+c-a) \leq abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Ademáis, pola **desigualdade MA-MX** e a media da cuarta potencia temos

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^4 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 1,$$

isto é, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq 3$.Así, a expresión (2) convértese en

$$\sum \frac{a}{(b+c-a)^2} \geq \frac{27}{(abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}))^2},$$

o que dá a solución ao problema.

Comentario á Solución: Á hora de empregar a **desigualdade de Holder** ben poderiamos ter tomado esta versión:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3$$

e aplicala a

$$\sum \frac{a}{(b+c-a)^2} \cdot \sum a^3(b+c-a) \cdot \sum a^2(b+-a) \geq 27.$$

Despois desto, resta aplicar estas ben coñecidas variantes da **desigualdades de Schur** para completar o exercicio:

$$\sum a^3(b+c-a) \geq (a+b+c)abc$$

e

$$\sum a^2(b+c-a) \leq 3abc$$

2.2.4. EGMO

Problema 1. 2023

Dados $n \geq 3$ e unha secuencia $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Para cada $1 \leq i \leq n$ sexa $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ e definimos a_0 como a_n e a_{n+1} como a_1. Consideramos que para todo i e j entre 1 e n, temos $a_i \leq a_j$ se, e só se, $b_i \leq b_j$.
Entón $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Primeira Solución Supoñamos que non tódolos a_i son iguales. Consideramos o índice i que fai a_i maximal e $a_{i+1} < a_i$. Daquela

$$b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i} < \frac{2a_i}{a_i} = 2$$

Pero como a_i é maximal, b_i tamén o é; polo que deben existir $b_j < 2$ para todo $j \in 1, 2, \cdots, n$. Sen embargo, se consideramos po produto $b_1 b_2 \cdots b_n$ temos

$$\begin{aligned} b_1 b_2 \cdots b_n &= \frac{a_n + a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n} \\ &\geq 2^n \frac{\sqrt{a_n a_2}\sqrt{a_1 a_3} \cdots \sqrt{a_{n-1} a_1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ para $x = a_{i-1}$,$y = a_{i+1}$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ na segunda liña.

Dado que o producto de tódolos b_i é polo menos 2^n , concluímos que polo menos un deles debe ser maior que 2, o que supón unha contradicción coa hipótese inicial.

Por tanto, tódolos a_i son iguales.

Segunda Solución Esta é unha versión da solución 1, pero sen probar por contradicción. Tomamos a_i maximal entre $a_1, \cdots, a_n$ e obtemos $b_i \leq 2$. Así, $b_i \leq 2 \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ A segunda parte da solución 1 que dá $2^n \geq b_1 \cdots b_n \geq 2^n$, xunto coa condición $b_i \leq 2 \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ implica que $b_j = 2 \forall j \in 1, 2, \cdots, n$. Como $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, a condición $a_i \leq a_j \Longleftrightarrow b_i \leq b_j$ nos dá que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Terceira Solución Primeiro vexamos que $b_j \leq 2$ coma na solución anterior. Pois ben

$$\begin{aligned}2n \geq b_1 + \cdots + b_n &= \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_1}{a_n} \\ &\geq 2n \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}} = 2n \cdot 1 = 2n,\end{aligned}$$

onde empregamos a **desigualdade MA-MX**.

Séguese que todos os b_j's son iguales, e como na solución 2, esto dá que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Cuarta Solución Por hipótese $a_i b_i = a_{i-1} + a_{i+1}$ para $i \in 1, 2, \cdots, n$. Daquela,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i$$

. Dado $a_i \leq a_j$ se, e só se, $b_i \leq b_j$, pola **desigualdade de Chebyshev**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 2n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

e, por tanto, $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq 2n$. Por outra banda,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{i-1}}{a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1}}\right)$$

e aquí podemos empregar a **desigualdade MA-MX** para aproximar

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{\frac{a_{i-1}}{a_i} . \frac{a_i}{a_{i-1}}} = 2n$$

. Conclúese que temos a igualdade. Así $\dfrac{a_{i-1}}{a_i} = \dfrac{a_i}{a_{i-1}}$ Deste xeito ten que ser $a_i = a_{i-1}$ para calquera enteiro positivo i.Daquela, tódolos a_i's son iguales.

Quinta Solución Definimos $c_i := \dfrac{a_i}{a_{i+1}}$, entón $b_i = c_i + 1/c_i$. Supoñamos que non tódolos c_i son iguales a 1. Daquela, $\prod_{i=1}^{n} c_i = 1$ e existe un $c_k \geq 1$. Por hipótese tiñamos que $(i, j) = (k, k+1)$ e ademáis

$$c_k \geq 1 \Longleftrightarrow c_{k-1} + \frac{1}{c_k} \geq c_k + \frac{1}{c_{k+1}} \Longleftrightarrow c_{k-1} c_k c_{k+1} + c_{k+1} \geq c_k c_{k+1} + c_k$$

(5)
Agora, dado que $c_{k+1} \leq c_k^2 c_{k+1}$ teremos tamén que

$$c_{i-1}c_ic_{i+1} \geq c_i \Rightarrow (c_{i-1} \geq 1 ou c_{i+1} \geq 1)$$

Por tanto, existe un conxunto de polo menos 2 enteiros consecutivos tales que o seu correspondente c_i é maior ou igual a 1. Pola hipótese inicial, debe existir un índice ι tal que $c_{\iota-1}$,$c_\iota \geq 1$ e $c_{\iota+1} < 1$.Distinguimos dous casos:

Caso 1: $c_\iota > c_{\iota-1} \geq 1$

Pola desigualdade (5) e como $c_{\iota-1}c_\iota c_{\iota+1} < c_\iota^2 c_{\iota+1}$, temos que $c_{\iota+1} > c_\iota \geq 1$, o que supón unha contradicción coa nosa elección de ι.

Caso 2: $c_{\iota-1} \geq c_\iota \geq 1$ Novamente, pola desigualdade (5), obtemos

$$c_{\iota-2}c_{\iota-1}c_\iota \geq c_{\iota-1}^2 c_\iota \Leftrightarrow c_{\iota-2} \geq c_{\iota-1}$$

Nótese que soamente empregamos que $c_{\iota-1} \geq c_\iota \geq 1$ para mostrar $c_{\iota-2} \geq c_{\iota-1} \geq 1$.Probaríase facilmente por inducción que $c_{\iota-s-1} \geq c_{\iota-s}$ para calquera s. Así

$$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq c_1$$

que supón unha contradicción coa nosa hipótese inicial. Por tanto, chegamos a que cada un dos a_i's debe ser igual desde o principio.

Problema 6. 2025
En cada cela dun taboleiro de 2025×2025, escríbese un número real non negativo de tal xeito que a suma dos números de cada fila sexa igual a 1 e a suma dos números de cada columna sexa igual a 1. Define f_i como o valor máis grande da fila i e sexa $F = f_1 + f_2 + \cdots + f_{2025}$. De xeito similar, define c_i como o valor máis grande da columna i e sexa $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$. Cal é o valor máis grande posible de F/C?

Probando con algún exemplo parece que a regularidade (simetría) pode xogar un papel importante. Por exemplo, se consideramos a matriz identidade, $f_i = c_i = 1$ para todo i, polo que $C/F = 1$. De igual xeito, traspoñendo a matriz, teriamos que $F'/C' = (F/C)^{-1}$, polo que o problema de buscar a cota superior é equivalente ó de buscar a cota inferior, que será a inversa da anterior.

Á hora de facer investigacións, trataremos de aproveitar o feito de que $2025 = 45^2$ é un número cadrado, polo que, por exemplo, para un taboleiro $3^2 \times 3^2$, tendo en conta que

$$1 = 3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{9},$$

podemos facer o seguinte exemplo

1/3	0	0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
1/3	0	0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
1/3	0	0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
0	1/3	0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
0	1/3	0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
0	1/3	0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
0	0	1/3	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
0	0	1/3	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
0	0	1/3	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9

no que $f_i = 1/3$, para $i = 1, \dots, 9$ e $c_i = 1/3$ para $i = 1, 2, 3$ e $c_i = 1/9$ para $i = 4, \dots, 9$.

Polo tanto $F = 9 \times 1/3$ e $C = 3 \times 1/3 + 6 \times 1/9$ e

$$\frac{F}{C} = \frac{3}{1 + 2/3} = \frac{9}{5}$$

que, para $n^2 \times n^2$, quedaría:

$$\frac{F}{C} = \frac{n^2}{2n - 1} \tag{2.1}$$

e imos ver que esta é a cota superior buscada.

Nun caso xeral, elixamos en cada fila a cela co valor máis grande da fila e marquémola cunha cor, digamos, vermello. Agora, sen perder xeneralidade, podemos reordenar as columnas para xuntar nas k primeiras posicións tódalas columnas con algunha cela vermella, onde, naturalmente, $1 \le k \le n^2$.

Sexa n_j o número de celas vermellas da j–ésima columna, con $1 \le j \le k$, e sexa p_j a suma dos valores destas celas. É claro que c_j, o valor máis alto da columna j, polo menos ten que cumplir $c_j \ge p_j/n_j$, para $1 \le j \le k$, e para as demáis $n^2 - k$ columnas, $c_j \ge 1/n^2$, pois a suma das celas da columna ten que ser 1, e, naturalmente $c_j \le 1$.

Polo tanto,

$$C \ge \frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} + (n^2 - k) \times \frac{1}{n^2}$$

mentres que $F = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$, pois coincide coa suma das celas vermellas, e así:

$$\frac{F}{C} \le \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_k}{\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} + \frac{n^2 - k}{n^2}}.$$

Probaremos agora que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k \le \frac{n^2}{2n - 1} \cdot \left(\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} + \frac{n^2 - k}{n^2} \right). \tag{2.2}$$

Dado que o valor de cada cela vermella ten que ser polo menos $\frac{1}{n^2}$, temos que $p_j \geq \frac{n_j}{n^2}$ e dado que non hai valores negativos, necesariamente $1 \geq p_j \geq \frac{n_j}{n}$, e como a nosa desigualdade é linear en cada un dos p_i, chega con probala para os valores extremos.

Renumerando as columnas, se fose necesario, supoñamos que $p_j = \frac{n_j}{n^2}$, para $1 \leq j \leq t$, e que $p_j = 1$, para $t+1 \leq j \leq k$, onde t é un enteiro tal que $0 \leq t \leq k$.

Primeiro de nada, observar que se $t = k$, entón $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \frac{n_1}{n^2} + \frac{n_2}{n^2} + \cdots + \frac{n_k}{n^2} = 1$ e que $\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} = \frac{k}{n^2}$, co que a desigualdade 2.2 queda $1 \leq \frac{n^2}{2n-1}$, que é certo.

Supoñemos, entón, que $t < k$. Queremos probar que:

$$\frac{n_1 + \cdots + n_t}{n^2} + k - t \leq \frac{n^2}{2n-1} \cdot \left(\frac{t}{n^2} + \frac{1}{n_{t+1}} + \cdots + \frac{1}{n_k} + \frac{n^2 - k}{n^2} \right). \tag{2.3}$$

Pola desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{1}{n_{t+1}} + \cdots + \frac{1}{n_k} \right) \left(n_{t+1} + \cdots + n_k \right) \geq (k-t)^2,$$

de onde

$$\frac{1}{n_{t+1}} + \cdots + \frac{1}{n_k} \geq \frac{(k-t)^2}{n_{t+1} + \cdots + n_k} = \frac{(k-t)^2}{n^2 - (n_1 + \cdots + n_t)}.$$

Entón, chega con probar que

$$\frac{n_1 + \cdots + n_t}{n^2} + k - t \leq \frac{n^2}{2n-1} \cdot \left(\frac{t}{n^2} + \frac{(k-t)^2}{n^2 - (n_1 + \cdots + n_t)} + \frac{n^2 - k}{n^2} \right), \tag{2.4}$$

que, se facemos $q = \frac{n_1 + \cdots + n_t}{n^2}$, quedará

$$q + k - t \leq \frac{1}{2n-1} \cdot \left(t + \frac{(k-t)^2}{1-q)} + n^2 - k \right), \tag{2.5}$$

é dicir,

$$q + s \leq \frac{1}{2n-1} \cdot \left(n^2 - s + \frac{s^2}{1-q} \right), \tag{2.6}$$

ou, reordenando,

$$n^2 + q + \frac{s^2}{1-q} \geq 2(q+s)n, \tag{2.7}$$

sendo $s = k - t$.

Para $q = 0$, é dicir, se $n_1 + \cdots + n_t = 0$, a ecuación 2.6 é certa pola desigualdade entre a medias aritmética e xeométrica, polo que podemos supoñer que algún dos n_i é non nulo, é dicir, que $0 < q < 1$. Pero neste caso, dado que

$$q + \frac{s^2}{1-q} = \frac{q^2}{q} + \frac{s^2}{1-q} \geq (q+s)^2,$$

pola desigualdade de Cauchy-Schwarz, chegará con probar que

$$n^2 + (q + s)^2 \geq 2(q + s)n, \tag{2.8}$$

que é certa, de novo pola desigualdade entre as medias aritmética e xeométrica, e pon fin á proba.

Bibliografía

[1] Titu Andreescu and Zuming Feng (2001). *USA and International Mathematical Olympiads 2000*, Washington DC.

[2] Murray S. Klamkin *International Mathematical Olympiads and forty supplementary problems*, Washington DC, 2002

[3] Martin E. Kuczma (2001). *International Mathematical Olympiads 1986-1999*, Washington DC.

[4] Real Sociedad Matemática Española (2014). *Cincuenta Años de la Olimpiada Matemática Española(1964-2014)*,Madrid.

[5] Web da Olimpíada Femenina Española de Matemáticas , Dispoñible en `https://sites.google.com/ucm.es/ofem-2025/inicio`, [visitado en xullo 2025].

[6] Web da Olimpíada Internacional de Matemáticas, Dispoñible en: `https://www.imo-official.org/?language=es`, [visitado en xullo 2025].

[7] Web da Olimpíada Matemática Española, Dispoñible en: `https://www.rsme.es/olimpiada-matematica-espanola/`, [visitado en xullo 2025].

[8] Web da Olimpíada Matemática Europea Feminina, Dispoñible en: https://www.egmo.org, [visitado en xullo 2025].

[9] Web da Olimpíada Matemática Galega, Dispoñible en: `https://www.usc.gal/olympia/`, [visitado en xullo 2025].