



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Introdución ao modelo de Black-Scholes

Martiño Fernández Prado

Maio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Introdución ao modelo de Black-Scholes

Martíño Fernández Prado

Maio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Estatística e Investigación operativa</b>
<b>Título: Introducción ao modelo de Black-Scholes</b>
<b>Breve descripción do contido</b>
<p>O traballo de fin de grao centrarase en proporcionar unha introdución ao modelo de Black-Scholes, de gran relevancia no contexto da estatística financeira. Para iso, explicaranse distintos conceptos financeiros mediante ecuacións matemáticas, facilitando a súa comprensión e a súa aplicación práctica. Explorarase conceptos fundamentais dos procesos estocásticos clásicos, establecendo a súa relevancia na predición de prezos de activos financeiros. Todo isto permitirá motivar a introdución da ecuación de Black-Scholes. Presentarase un caso práctico para ilustrar a utilidade deste modelo na valoración de activos financeiros. Ademais, discutirase as limitacións do modelo e a súa importancia na análise financeira contemporánea.</p>
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>IX</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>1. Conceptos financeiros</b>	<b>1</b>
1.1. Opcións financeiras . . . . .	3
1.2. Outros conceptos financeiros relevantes . . . . .	6
<b>2. Lema de Itô</b>	<b>9</b>
2.1. Movemento browniano . . . . .	11
2.2. Modelado do proceso aleatorio . . . . .	17
<b>3. Modelo Black-Scholes</b>	<b>25</b>
3.1. Hipóteses do modelo Black-Scholes . . . . .	25
3.2. Ecuación de Black-Scholes . . . . .	26
3.3. Solución explícita . . . . .	29
3.3.1. Paridade <i>put-call</i> . . . . .	36
3.4. Aplicación práctica da fórmula de Black-Scholes . . . . .	38
<b>4. Limitacións e posibles extensións do modelo Black-Scholes</b>	<b>41</b>
4.1. Limitacións do modelo de Black-Scholes . . . . .	41
4.2. Modificacións e extensións do modelo de Black-Scholes . . . . .	42

---

4.2.1. Modelo de Merton con saltos . . . . .	44
4.2.2. Modelo de Heston . . . . .	45
4.3. Conclusiones . . . . .	46
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>





## Resumo

Publicado no ano 1973, o modelo de Black-Scholes supuxo un importante avance na teoría de valoración de opcións financeiras, xa que explicitaba unha solución para o prezo teórico das opcións europeas. O obxectivo deste traballo é realizar unha introdución a este modelo. O documento comeza explicando conceptos financeiros básicos e, posteriormente, aborda os fundamentos matemáticos necesarios sobre os que se sustenta o modelo. Destacan o movemento browniano xeométrico e o Lema de Itô.

A continuación, co apoio destas ferramentas, dedúcese formalmente a ecuación diferencial de Black-Scholes para, seguidamente, presentar a fórmula explícita para opcións europeas. Tamén se exemplifica un caso práctico no que se pode apreciar a utilidade deste modelo en casos reais. Por último, preséntanse unha serie de factores que limitan o modelo en escenarios reais actuais, así como se discuten posibles extensións e modificacións do mesmo que se adapten a estas situacións.

## Abstract

Published in 1973, the Black-Scholes model represented a significant breakthrough in the theory of financial option pricing, as it provided an explicit solution for the theoretical price of European options. The objective of this paper is to present an introduction to this model. The document begins by explaining basic financial concepts and then addresses the necessary mathematical foundations on which the model is based, particularly highlighting the geometric Brownian motion and Itô's Lemma.

Subsequently, with the support of these tools, the Black-Scholes differential equation is formally derived, followed by the presentation of the explicit formula for European options. A practical case is also included to illustrate the usefulness of this model in real-world situations. Finally, the paper presents a series of factors that limit the model's applicability in today's financial markets, and discusses possible extensions and modifications designed to adapt the model to these realities.



# Introdución

No século XIX comezan a xurdir os primeiros mercados de derivados, uns novos instrumentos financeiros entre os que destacan as opcións, os futuros ou os *swaps*. Porén, xa na antiga Grecia existen rexistros de contratos similares ás opcións actuais. Entre estes mercados destaca a *Chicago Board of Trade (CBOT)*, unha das institucións máis importantes nesa época. Os derivados financeiros eran moi útiles xa daquela, porque permitían aos axentes económicos manexar o risco asociado aos cambios bruscos no prezo dos activos subxacentes. Ao longo do século XX, coa chegada da tecnoloxía e a globalización, estes instrumentos comezaron a sofisticarse, á vez que aumentaba a súa complexidade. Isto deu lugar a novos retos, como por exemplo a correcta valoración destes produtos derivados.

Ata a década dos setenta, non había un modelo matemático rigoroso que permitise valorar adecuadamente o prezo xusto dunha opción. Foi en 1973 cando dous economistas estadounidenses, Fischer Black e Myron Scholes (Black and Scholes, 1973), publicaron un modelo que cambiaría para sempre o paradigma da valoración das opcións financeiras. Os autores propuxeron unha fórmula explícita para o cálculo do prezo das opcións europeas, supoñendo que o prezo do activo subxacente seguía un movemento browniano xeométrico. A partir da aplicación do lema de Itô, entre outras técnicas de cálculo estocástico, obtiveron a seguinte ecuación diferencial (cuxa notación explicárase máis adiante no traballo) que o prezo teórico da opción debía satisfacer:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

O modelo de Black-Scholes, dende ese momento ata o día de hoxe, segue sendo referencia nas finanzas, servindo para a valoración de opcións e como base de modelos matemáticos máis complexos. Scholes, por esta achega, e Robert Merton (1973), recibiron o Premio Nobel de Economía en 1997, galardón que Black non puido obter debido ao seu falecemento en anos anteriores.

Este documento ten como obxectivo dar unha introdución ao modelo de Black-Scholes, partindo dos conceptos financeiros máis fundamentais, ata chegar á fórmula final de Black-Scholes, explicando o proceso matemático coa rigorosidade técnica necesaria.

O manuscrito está estruturado da seguinte maneira. Comézase co Capítulo 1, onde se explican conceptos financeiros fundamentais; definición de produtos financeiros básicos así como unha explicación en profundidade das dinámicas das opcións. Posteriormente, na Sección 1.2 deste capítulo, revísanse termos financeiros que serán de gran utilidade para as hipóteses do modelo de Black-Scholes, e explícase o concepto de risco en finanzas.

No Capítulo 2, o obxectivo fundamental será demostrar o Lema de Itô. Comézase cunha análise da dinámica do prezo do activo subxacente, explicando na primeira sección todo o relativo a movementos brownianos que se emprega neste traballo; a súa definición, características fundamentais e a distribución asociada a eles. Seguidamente, na segunda sección deste capítulo, trátase de simplificar e modelar o proceso estocástico que describe a evolución dos prezos, introducindo a notación  $O_p(\cdot)$  e empregando distintos resultados matemáticos que conducirán finalmente ao Lema de Itô.

No Capítulo 3, o obxectivo é obter a fórmula explícita para as opcións europeas e por iso, en primeiro lugar, formularanse algunhas hipóteses sobre as que se sustentará o modelo de Black-Scholes, como por exemplo a ausencia de arbitraje e a posibilidade de cobertura continua. Na segunda sección, formalizarase o problema diferencial empregando o Lema de Itô e chegarase á ecuación diferencial de Black-Scholes. Na Sección 3.3, realizarase a demostración da solución explícita desta ecuación diferencial, mediante a súa transformación nunha ecuación tipo calor, cuxa solución é coñecida. Finalmente, este capítulo remata coa aplicación do modelo de Black-Scholes a un caso real, comparando o prezo teórico obtido coa fórmula co prezo real dunha opción no mercado.

O modelo de Black-Scholes presenta certas limitacións ao supoñer condicións ideais que non se cumpren nos mercados reais. Por este motivo, o capítulo final dedícase a analizar estas limitacións e a presentar posibles modificacións do modelo que tentan paliar as súas deficiencias. Dentro destas extensións destácanse dous modelos moi empregados actualmente na valoración de opcións como son o de Heston e o de Merton con saltos. Finalmente, o documento remata cunhas breves conclusións, explicando os obxectivos do traballo así como posibles continuacións deste estudo.

# Capítulo 1

## Conceptos financeiros

Neste capítulo introduciremos algunhas definicións básicas de terminoloxía económica que nos serán de gran utilidade ao longo de todo o traballo. En primeiro lugar, é necesario explicar o concepto de activo, xa que sobre el se basea toda teoría económica.

**Definición 1.1.** Un **activo** é calquera ben que posúe e ten valor económico (accións, un inmo-ble...). Este valor económico, ao que denotaremos coa letra  $S$ , considérase unha variable aleatoria que pode tomar valores numéricos reais e positivos durante todo o documento.

En particular, definiremos a continuación acción e bono, por seren dous dos activos máis usados no ámbito da inversión.

**Definición 1.2.** As **accións** son pequenas porcións de empresas que un inversor pode adquirir. Basicamente, unha empresa pon á venda unha porción de si mesma para conseguir capital e a cambio a persoa que a compra convértese en propietaria minoritaria da entidade, o que lle reportará ingresos polos beneficios da empresa (dividendos) se estes se reparten ou simplemente se a empresa aumenta o seu valor, a súa parte como propietario minoritario tamén se revalorizará, podendo vendela por un prezo maior ao da compra, obtendo así un beneficio.

**Definición 1.3.** Os **bonos** son títulos emitidos por unha entidade nos que o titular presta diñeiro polo valor do bono a un organismo público, empresa ou sociedade a cambio da devolución futura do capital investido máis os correspondentes intereses. As entidades emisoras emiten bonos co obxectivo de recadar capital a pesar de ter que endebedarse para isto. Este concepto pódese ver en profundidade en Mobius (2012).

Unha vez definidos estes dous conceptos, introduciremos un anglicismo amplamente utilizado en teoría económica e neste traballo, que fai referencia á carteira de activos dun suxeito económico.

**Definición 1.4.** Un *portfolio* (carteira de activos) é o anglicismo co que se denomina ao conxunto dos activos e inversións que compoñen un fondo de inversión ou patrimonio persoal dunha persoa ou entidade.

Con estas definicións previas xa explicadas, chegamos agora á volatilidade, un concepto fundamental na análise financeira. Máis especificamente, a predición do prezo dos activos verá afectada a súa precisión pola volatilidade, o que motiva á procura de mecanismos para protexer as inversións fronte a ela.

**Definición 1.5.** A **volatilidade** é a variabilidade da rendibilidade dun activo respecto á súa media nun período de tempo determinado. Matematicamente este concepto pode entenderse como a desviación típica dos rendementos dun activo financeiro, isto é, a medida na que se dispersan estes rendementos con respecto á súa media. A volatilidade por tanto, é a raíz cadrada da varianza. Graficamente, a volatilidade asóciase á amplitude das fluctuacións na rendibilidade (Medina and Pinzón, 2010). Por exemplo, o ouro e os inmobles son activos moi pouco volátiles, mentres que Bitcoin e as accións son activos con moita volatilidade.

**Definición 1.6.** **Bitcoin** é unha criptomoeda descentralizada que permite realizar transaccións económicas de maneira directa entre usuarios, sen necesidade de intermediarios como bancos ou institucións oficiais. Emprega unha tecnoloxía chamada *blockchain*, que garante a seguridade das operacións. Ao non estar regulada por autoridades financeiras nin suxeita a políticas monetarias, ofrece certas vantaxes (posibilidade de manter o anonimato, custos de xestión máis baixos...). Con todo, esta ausencia de regulación tamén implica riscos adicionais para os usuarios, xa que non conta coa protección legal que si teñen outros métodos de pago tradicionais, o que en parte explica a súa volatilidade intrínseca. A definición e propiedades deste activo pódense ver máis detalladamente en Segendorf (2014).

Na Figura 1.1 vemos a evolución do prezo por día dos últimos 10 anos de Bitcoin e do ouro. Nesta comparativa, podemos ver como Bitcoin (Figura 1.1a), debido a súa natureza volátil, presenta unha gráfica con fortes fluctuacións, mentres que o ouro (Figura 1.1b) mantén un crecemento máis constante, o que o converte na reserva de valor por excelencia como se explica en Bernstein (2012), onde tamén se da un contexto histórico.

Unha vez comprendido o concepto de volatilidade, resulta evidente que os activos máis volátiles son os que ofrecen a posibilidade de obter maiores ganancias nun período curto de tempo. Pola contra, tamén pode ser que con este tipo de activos se perda capital moi rapidamente, por iso, é habitual buscar maneiras de cubrirse ante este risco de perda.



(a) Evolución do prezo de Bitcoin nos últimos 10 anos.



(b) Evolución do prezo do ouro nos últimos 10 anos.

Figura 1.1: Evolución comparativa do prezo de Bitcoin (a) e do ouro (b) entre 2015 e 2025. No eixo X móstranse os anos e no eixo Y, o prezo en dólares do activo.

## 1.1. Opcións financeiras

Como se mencionou anteriormente, existen diversas formas de intentar cubrirse da volatilidade á hora de investir. Unha destas estratexias é precisamente a estudada neste traballo: as opcións. Dada a importancia destes produtos financeiros, ofrecerase a súa definición e exemplos representativos. Antes de explicar este concepto, é importante destacar que as opcións son un tipo de derivado financeiro, termo moi usado no ámbito económico e financeiro, cuxa definición se presenta a continuación:

**Definición 1.7.** Un **derivado financeiro** é un contrato cuxo valor depende ou se deriva do comportamento doutro activo, denominado activo subxacente. O activo subxacente pode ser unha acción, un índice bursátil, un tipo de cambio, unha materia prima ou outro activo financeiro. Estes produtos permiten aos investidores cubrirse fronte a movementos adversos no mercado. Entre os derivados máis utilizados atópanse as opcións, os futuros, os *forwards* e os *swaps*. Para ver máis detalladamente este concepto, consultar en Comisión Nacional del Mercado de Valores (2025).

Agora, imos explicar en profundidade o concepto de opción, que é fundamental no modelo de Black-Scholes.

**Definición 1.8.** As **opcións** son contratos nos que se especifican a data de vencemento na que o comprador da opción **pode** e o vendedor **debe** realizar unha determinada transacción do activo previamente acordado (accións, bonos, etc). Esta operación terá o seu prezo prefixado no momento da firma do contrato, que se coñece como prezo de exercicio. Se a transacción consiste na compra do activo, a opción denomínase *call*; se, pola contra, se trata dunha venda, denomínanse *put*. Cabe destacar que existen varios tipos de opcións, entre as que destacan as

	Call	Put
Comprador	Paga a prima e adquire o dereito a comprar o activo a un prezo determinado	Paga a prima e adquire o dereito a vender o activo a un prezo determinado
Vendedor	Recibe a prima e asume a obriga de vender o activo se o comprador exerce a opción	Recibe a prima e asume a obriga de comprar o activo se o comprador exerce a opción

Cadro 1.1: Roles de comprador e vendedor en opcións *call* e *put*.

opcións americanas (pódese exercer a opción en calquera momento ata a data de vencemento) e as europeas (solo se poden exercer na data de vencemento).

A modo de clarificación no Cadro 1.1, descríbense as distintas posicións posibles nas opcións, diferenciando os roles de comprador e vendedor tanto en opcións *call* como *put*.

A continuación, presentarase un exemplo práctico para ilustrar mellor o funcionamento dunha opción financeira e facilitar así a súa comprensión.

**Exemplo 1.1.** Supoñamos que quero comprar un piso para investir ao seu dono cuxo valor de mercado son 200.000€ e, ademais, sei que o fillo do propietario quere facer un mestrado de 20.000€ co inconveniente de que a familia non dispón dos cartos necesarios. Neste caso proponho ao dono do piso chegar a un acordo no que eu lle pago 20.000€ (en concepto de prima no momento de firmar a opción) a cambio de que en 10 anos (data de vencemento) me venda o seu piso por 220.000€ (prezo prefixado). Neste caso eu sería o posuidor da opción. A especificación da obriga ou non das dúas partes é moi importante xa que se en 10 anos o piso baixa de valor (supoñamos a 180.000€) eu non estaría obrigado a compralo polos 220.000€ e podería adquirilo polo seu valor de mercado. En cambio, se o piso se revaloriza a 250.000€, o dono do piso si estaría obrigado a venderme o piso polos 220.000€ acordados. Este é un caso de opción *call* e, se a transacción fose de venda en vez de compra, sería *put*.

En xeral, as perdas e ganancias dunha opción serán da forma que se describe no Cadro 1.2. Nas opcións *call*, como se pode intuír da fórmula máx (Valor de mercado - Prezo do exercicio, 0), canto maior sexa o valor de mercado do activo (tamén coñecido como prezo subxacente ou prezo do activo subxacente), maior será o beneficio do comprador, así como a perda do vendedor. Por tanto, no caso das opcións *call*, o comprador ten expectativas de que o valor de mercado do activo suba (é dicir ten expectativas alcistas) ata polo menos un punto no que a diferenza co

	CALL		PUT	
	Comprador	Vendedor	Comprador	Vendedor
Beneficio	$\max(\text{Valor de mercado} - \text{Prezo do exercicio}, 0)$	A prima	$\max(\text{Prezo do exercicio} - \text{Valor de mercado}, 0)$	A prima
Perda	A prima	$\max(\text{Valor de mercado} - \text{Prezo do exercicio}, 0)$	A prima	$\max(\text{Prezo do exercicio} - \text{Valor de mercado}, 0)$

Cadro 1.2: Beneficios e perdas en opcións *call* e *put* para o comprador e o vendedor.

prezo do exercicio sexa maior que a prima, mentres que o vendedor ten perspectivas baixistas (que o prezo baixará), ou polo menos, non tan alcistas como o comprador, podendo así conservar a prima. Seguindo a mesma lóxica no caso das opcións *put*, o comprador é o que ten expectativas baixistas e o vendedor, alcistas, ou polo menos non tan baixistas coma o comprador.

**Definición 1.9.** O **punto de equilibrio** (ou *break-even point*) é o prezo do activo subxacente no que o comprador (e vendedor) dunha opción nin gaña nin perde diñeiro, cubrindo así a prima.

Cabe destacar que, en ambos tipos de opción, a prima representa a máxima perda do comprador e o máximo beneficio do vendedor. No caso das opcións *call*, o beneficio e a perda do comprador e do vendedor respectivamente, son potencialmente infinitos xa que o prezo do activo subxacente pode subir infinitamente. No caso das opcións *put*, o beneficio e a perda máximos respectivos, serán o prezo do exercicio, se o valor do activo en mercado baixa ata cero, como se pode deducir da fórmula  $\max(\text{Prezo do exercicio} - \text{Valor de mercado}, 0)$ . Deste xeito, a compra-venda de opcións é un xogo de suma cero, é dicir, o beneficio dunha parte equivale á perda da outra.

Partindo destas definicións e a utilidade das opcións pode xurdir a seguinte cuestión. Se fose capaz de saber con anterioridade a evolución do prezo dun activo, podería adquirir unha opción acorde con esta predición e así, obter todo o beneficio que desexe. Para isto, existe un único inconveniente: a predición do comportamento que terán os prezos dos activos e dos derivados financeiros é imposible. No seguinte capítulo, explícase a teoría que apoia esta afirmación, quedando en evidencia que é inviable realizar estas predicións.

## 1.2. Outros conceptos financeiros relevantes

Ademais dos activos e derivados financeiros xa descritos anteriormente, existen algúns conceptos fundamentais na análise de derivados e na construción de modelos financeiros que convén definir. Estes conceptos permiten comprender o funcionamento dos mercados, identificar oportunidades e establecer as condicións e supostos sobre os que se formulan os modelos teóricos. Isto último será importante máis adiante neste traballo.

**Definición 1.10.** O **retorno** financeiro ou retorno da inversión (ROI) mide a ganancia ou a perda dunha inversión respecto ao seu custo inicial.

**Definición 1.11.** A **arbitraxe** é a práctica de obter un beneficio instantáneo e sen risco aproveitando diferenzas de prezo dun mesmo activo entre distintos mercados. En mercados eficientes, estas oportunidades desaparecen rapidamente polo axuste automático dos prezos.

**Definición 1.12.** A **venda en curto** é unha práctica que consiste en pedir un activo prestado para vendelo ao prezo vixente, coa intención de compralo máis adiante a un prezo inferior e así obter a diferenza como ganancia. É unha estratexia especulativa ou de cobertura fronte a baixadas de prezos.

**Definición 1.13.** O **hedging** ou **cobertura** trátase de adquirir simultaneamente varios activos ou posicións opostas para protexer un portfolio fronte á volatilidade e riscos do mercado. Por exemplo, combinando activos con movementos inversos ou contratando derivados que limiten as perdas potenciais.

Un principio fundamental da teoría financeira que xustifica o uso de estratexias como o *hedging* é a proporcionalidade directa entre o risco asumido nunha inversión e a súa rendibilidade esperada. Segundo este principio, en situacións normais, os investimentos con maiores niveis de risco ofrecen tamén rendementos potenciais máis elevados como compensación polo risco asumido. Pola contra, os investimentos máis seguros adoitan proporcionar rendementos máis baixos.

O risco asóciase habitualmente coa volatilidade dun activo, que mide canto se desvían os seus rendementos respecto á súa media nun determinado período de tempo. Canto máis volátil é un activo, máis incerta será a súa evolución futura e maior será a rendibilidade que os investidores adoitan esixir para decidirse a investir nel. Esta relación, como se explica en Lettau and Ludvigson (2010), é unha das ideas básicas que condiciona as decisións de investimento e o uso de instrumentos financeiros destinados a xestionar o risco nos mercados.

Na Figura 1.2 vemos distintos activos segundo esta análise risco-rendibilidade. Como vemos os activos máis volátiles son dos que se esperan máis rendementos (Bitcoin) e dos menos volátiles (ouro, bonos...), menos rendibilidade. Desde este punto de vista, os mellores activos serán os que

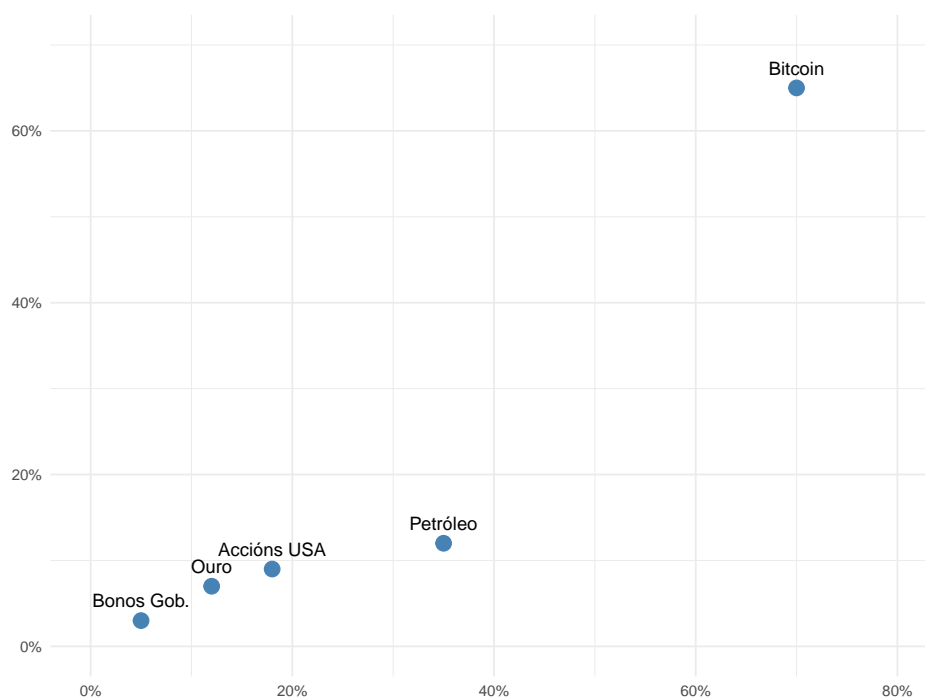


Figura 1.2: Relación entre o risco e a rendibilidade de distintos activos. No eixo X móstrase o risco en termos de volatilidade anual e, no eixo Y, a rendibilidade anual.

combinan unha rendibilidade alta cunha volatilidade baixa, é dicir, os que se atopan o máis á esquerda e o máis arriba posible na gráfica.

Con esta motivación de xestionar o risco nas inversións xorde o modelo de Black-Scholes, que permite aos investidores limitar as súas perdas mediante as opcións.



## Capítulo 2

# Lema de Itô

Como mencionamos anteriormente no Capítulo 1, a predición exacta dos prezos dos activos é inviable por ser estes aleatorios. A pesar disto, imos modelar o problema matematicamente para intentar determinar, na medida que sexa posible, como evolucionarán os prezos.

Sexa  $S(t)$  o prezo dunha variable que depende nun tempo  $t$ , denotamos por  $dS(t)$  o incremento infinitesimal no prezo da variable durante o período de tempo  $dt$ . Antes de continuar, é importante destacar que o prezo dun activo nun instante inmediatamente posterior, solo depende do prezo actual e non dos seus valores pasados. Este tipo de procesos coñécense como procesos de Markov.

**Definición 2.1.** Unha **cadea ou proceso de Markov** ten a característica fundamental de que o futuro é condicionado solo polo presente, sen influencia do pasado.

Neste contexto, coñecer o prezo final transcorrido un tempo  $dt$  é equivalente a saber a taxa de incremento nese intervalo, que se expresa como  $dS(t)/S(t)$ . En finanzas, este valor denomínase retorno (ver Definición 1.10).

Para isto podemos considerar o crecemento esperado do prezo do activo e sumarlle unha variable aleatoria na que incluiremos factores externos que podan afectar a este crecemento (como crises financeiras, guerras, decisións políticas...). A inclusión desta variable aleatoria converte a evolución do prezo do activo  $S(t)$  nun proceso estocástico e, por tanto, é o que fai que predicir o prezo dun activo con certeza sexa imposible.

**Definición 2.2.** Os **procesos estocásticos** son procesos formados por variables aleatorias que dependen doutra variable, habitualmente o tempo.

É dicir, estes procesos son impredecibles e aleatorios e, nos casos que nos ocupan, dependerán do tempo, xa que imos estudar a evolución dos prezos de distintos activos.

Ao crecemento esperado medio ou tendencia do activo subxacente denotarémolo por  $\mu$  (na fórmula multiplicarase por  $dt$  para axustalo ao período de tempo considerado) e ás variacións no prezo, atribuídas a factores externos e incontrolables, serán representadas por  $\sigma_S dX(t)$ , quedando entón a fórmula:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma_S dX(t). \quad (2.1)$$

O parámetro  $\sigma_S$  é a volatilidade do activo subxacente (pode ser unha constante ou unha función) e  $dX(t)$  é un incremento infinitesimal dun movemento browniano estándar, que contén a incerteza dos activos. Na seguinte sección, abordaremos este aspecto con maior profundidade, explicando detalladamente que é este concepto e as propiedades que fan adoitada a súa inclusión nesta ecuación.

A continuación, imos ver como é extremadamente importante incluír un termo que contemple os factores externos que podan afectar ao prezo mediante un exemplo moi recente.

**Exemplo 2.1.** O 2 de abril de 2025, xa mundialmente coñecido como o *liberation day*, o presidente dos Estados Unidos, Donald Trump, anunciou a imposición de aranceis do 10% a todas as importacións, con taxas máis elevadas para países con grandes déficits comerciais cos Estados Unidos, como China, que afrontou aranceis do 34%. Pódese ver a noticia completa en Kurtzleben (2025).

Este anuncio afectou notablemente á cotización bolsista dalgunhas das empresas mais importantes do mundo. Por exemplo, Apple que depende significativamente da súa cadea de subministración en China, viu como o prezo das súas accións caía notablemente tras este anuncio. Un exemplo semellante pode verse con Boeing que, como líder mundial na industria aeroespacial, veuse gravemente afectada pola imposición de aranceis sobre os materiais clave que utiliza na fabricación de aeronaves, como o aceiro e o aluminio.

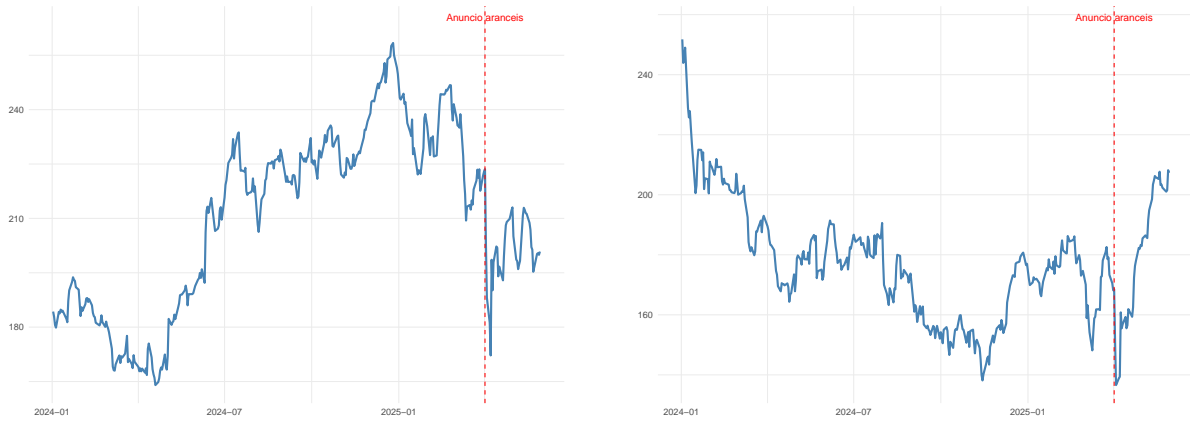
Vemos na Figura 2.1a que Apple presentou a maior caída no último ano e medio. Pola súa parte, na Figura 2.1b obsérvase que, aínda que non tan pronunciada como no caso de Apple, a baixada no prezo das accións de Boeing tamén é moi notable. Ambas caídas son atribuíbles principalmente ao anuncio dos aranceis.

Matematicamente, no caso de Apple, a compañía tecnolóxica ten un retorno medio anual nos últimos 15 anos do 24% aproximadamente, segundo datos obtidos de FinanceCharts (2025). Se non incluísemos o termo estocástico, a ecuación diferencial quedaría:

$$dS(t) = \mu S(t) dt,$$

e, resolvéndoa para  $t \in (t_0, t_1)$ :

$$S(t_1) = S(t_0) e^{\mu \Delta t}. \quad (2.2)$$



(a) Evolución do prezo das accións de Apple.

(b) Evolución do prezo das accións de Boeing.

Figura 2.1: Impacto do anuncio de aranceis sobre as accións de Apple e Boeing o 2 de abril de 2025. No eixo X móstranse as datas (tempo) e, no eixo Y, o prezo en dólares das accións.

Tomando  $t_0$  o 1 de abril de 2025 e  $t_1$  o 5 de abril de 2025, temos que  $S(t_0) = 178\$$ , polo que  $\Delta t = \frac{4}{252}$  (divídese entre 252 por haber 252 hábiles na bolsa americana). Agora, calculando  $S(t_1)$  pola Ecuación (2.2) temos:

$$\mu\Delta t = 0,24 \times \frac{4}{252} = 0,00381,$$

$$e^{\mu\Delta t} = e^{0,00381} \approx 1,00382,$$

$$S(t_1) \approx 178 \times 1,00382 \approx 178,68\$.$$

Pola contra, o prezo real dunha acción de Apple o día 5 de abril de 2025 era de 163\$.

Este exemplo ilustra por que é esencial incluír o termo aleatorio  $\sigma_S dX(t)$  para modelar de forma realista a evolución dos prezos dos distintos activos financeiros (sería prescindible en activos que non tiveran volatilidade, o cal non existe nos mercados financeiros actuais).

Volvendo ao termo  $dX(t)$ , que é o único que falta por explicar da Ecuación (2.1), este representa o incremento infinitesimal dun movemento browniano estándar. Entender a natureza deste movemento, así como porque se escolle unha distribución normal para modelalo, é clave para acadar un entendemento completo do modelo de Black-Scholes.

## 2.1. Movemento browniano

O movemento browniano é un concepto amplamente estudado e complexo debido a súa relevancia en diversos campos da ciencia, con orixe no campo da botánica. Nesta sección, restrinxiremos a análise ao ámbito financeiro, centrándonos na definición dos termos fundamentais e na

exposición dalgunhas das súas propiedades básicas. Para un estudo máis profundo e detallado do movemento browniano no ámbito matemático, recoméndase a consulta de Karatzas and Shreve (2012).

Previo a entender o termo  $dX(t)$ , é necesario definir o proceso  $X(t)$ , así como a súa derivada, e detallar as propiedades e distribucións estatísticas que os caracterizan. En primeiro lugar, a función  $X(t)$ , que representa a incerteza na evolución do prezo dos activos, denomínase movemento browniano estándar, un tipo de camiño aleatorio. A continuación, explicaremos estes dous conceptos para achegarnos a unha comprensión máis profunda do modelo.

**Definición 2.3.** Un **camiño aleatorio** é un proceso estocástico que describe unha sucesión de pasos aleatorios onde, en cada paso, a posición actualízase segundo unha regra de probabilidade. Matematicamente, un camiño aleatorio defínese como unha sucesión de variables aleatorias  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ( $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} + \{0\}$ ) tal que  $S_0 = 0$  e, para cada  $n \geq 1$ ,  $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ , onde  $\{\xi_n\}$  é unha secuencia de variables aleatorias. Pódese ver máis detalladamente este concepto en Lawler and Limic (2010).

O exemplo máis básico de camiño aleatorio é o camiño aleatorio simétrico unidimensional, onde cada  $\xi_n$  toma o valor  $+1$  ou  $-1$  con probabilidade igual a  $0,5$ .

Na Figura 2.2 represéntanse varios camiños aleatorios simétricos unidimensionais. Por definición, todos eles parten da posición inicial  $0$ , e, en cada paso, a súa posición actualízase sumando ou restando  $1$  con igual probabilidade ( $0,5$ ). A gráfica permite visualizar a evolución aleatoria destes camiños ao longo de  $n = 100$  pasos, ofrecendo unha representación intuitiva do comportamento deste tipo de procesos estocásticos.

Agora, procedemos a definir o que é un movemento browniano estándar, que, como se mencionou antes, non é máis que un tipo de camiño aleatorio.

**Definición 2.4.** A familia de variables aleatorias  $\{X(t), t \geq 0\}$  defínese **movemento browniano estándar** (ou **proceso de Wiener**) se cumpre as seguintes tres condicións:

1. **Incrementos independentes.** Para calquera conxunto de tempos  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , os incrementos:

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

son variables aleatorias independentes.

2. **Incrementos estacionarios e normais:** Para calquera  $s, t \geq 0$ , o incremento  $X(t+s) -$

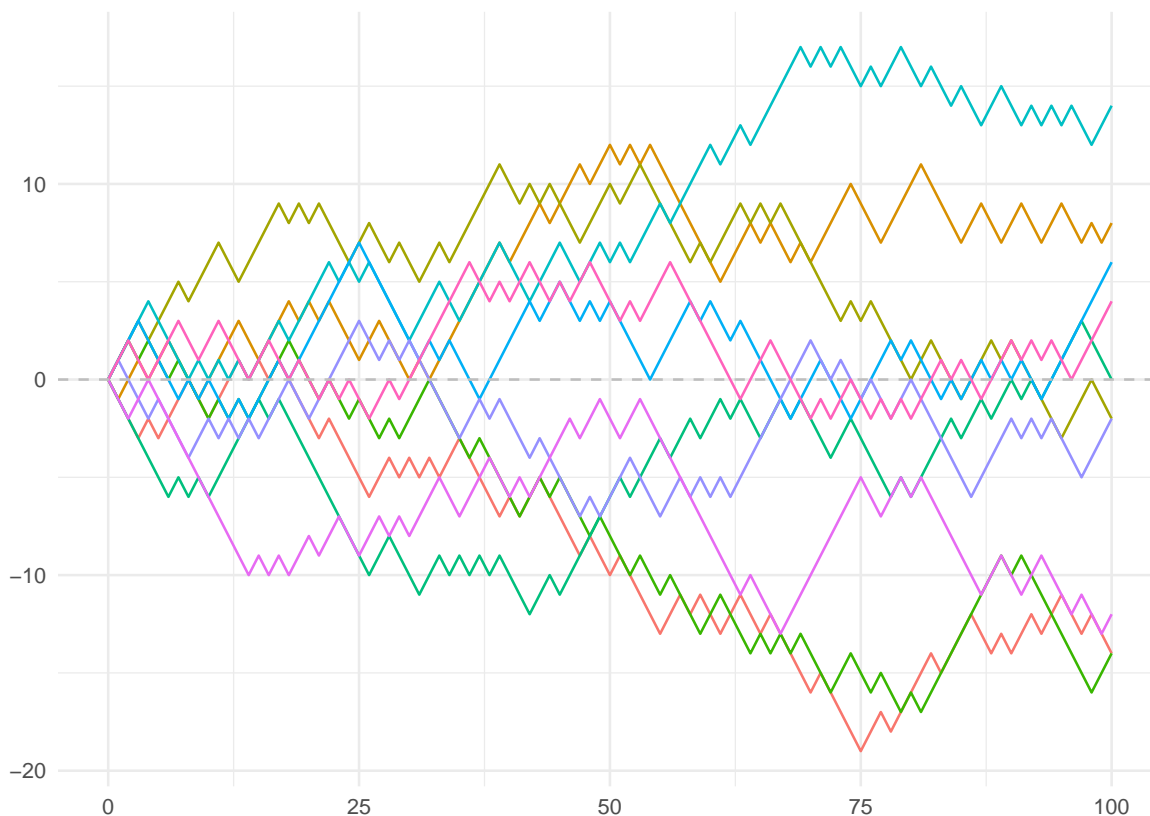


Figura 2.2: Simulación de varios camiños aleatorios simétricos unidimensionais. No eixo X móstranse os pasos do camiño e, no eixo Y, a súa posición.

$X(s)$  segue unha distribución normal con media 0 e varianza  $t^1$ , é dicir:

$$X(t + s) - X(s) \sim N(0, t).$$

3. **Traxectorias continuas.** A función  $X(t)$  non presenta saltos nin discontinuidades, é dicir, é continua.

Recordemos ademais que, como un movemento browniano estándar é un tipo de camiño aleatorio, por definición  $X(0) = 0$ .

<sup>1</sup>A distribución normal,  $N(\mu, \sigma^2)$ , defínese pola función de densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $\mu$  é a media e  $\sigma^2$  a varianza.

Esta distribución posúe propiedades como a simetría respecto da súa media (os incrementos positivos e negativos teñen igual probabilidade en ausencia de tendencia) que a fan especialmente adecuada para modelar movemento browniano estándar.

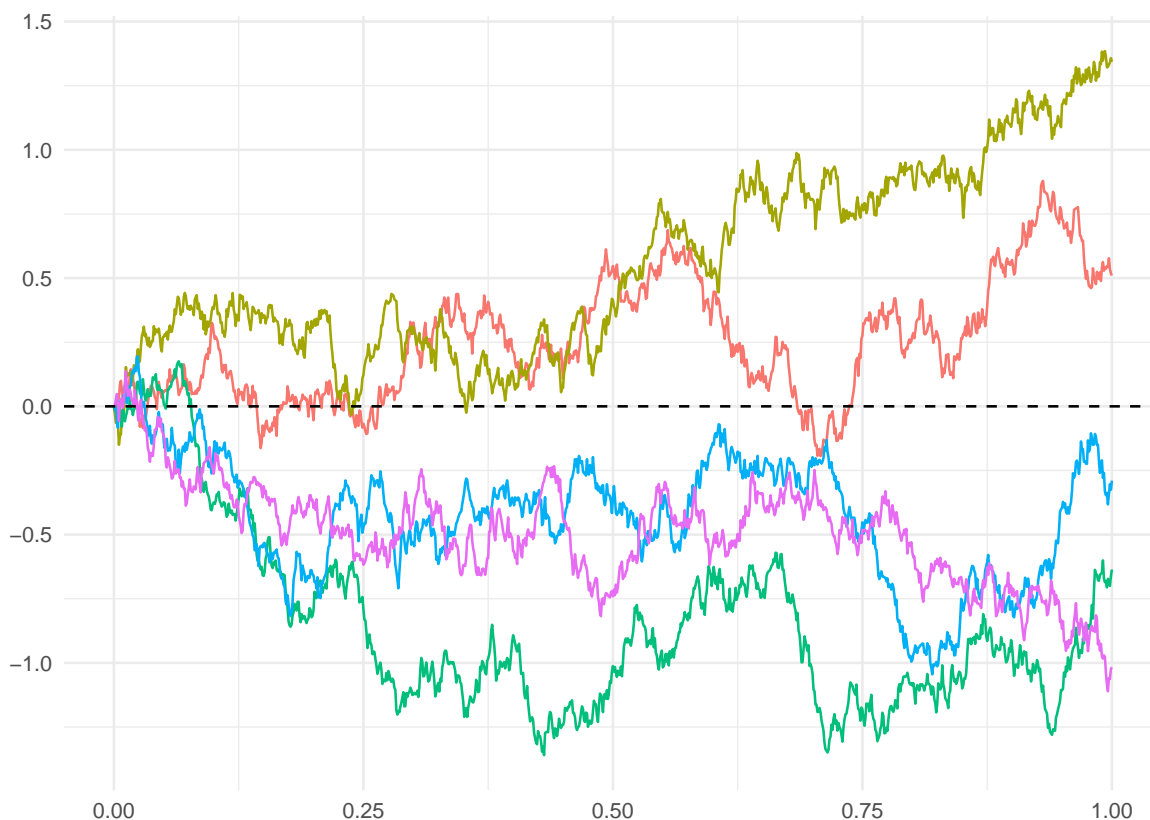


Figura 2.3: Simulación de varios camiños de movemento browniano estándar. No eixo X móstrase o tempo  $t$  e, no eixo Y, a posición do movemento browniano estándar  $X(t)$ .

Na Figura 2.3 represéntanse cinco traxectorias simuladas dun movemento browniano estándar. Nesta gráfica vemos a natureza altamente irregular e continua destes procesos. Obsérvase como, a pesar de partir todas do mesmo punto inicial, as distintas simulacións seguen camiños distintos, reflectindo a variabilidade crecente co tempo na dispersión progresiva das traxectorias, o que resulta coherente co comportamento esperado segundo a definición previamente exposta. Esta representación gráfica proporciona unha interpretación intuitiva das traxectorias continuas e erráticas que caracterizan o movemento browniano, en contraste cos saltos discretos do camiño aleatorio sinxelo unidimensional que se observa na Figura 2.2.

O movemento browniano estándar é moi adoitado para o tipo de procesos que queremos modelar xa que a traxectoria continua é coherente coa evolución progresiva dos prezos dos activos financeiros ao longo do tempo. Ademais, os incrementos independentes son tamén moi adoitados, debido á natureza estocástica da evolución do prezo dun activo. Por último, é axeitado modelar os incrementos cunha normal de media cero e varianza proporcional ao tempo, por dous motivos principais; en primeiro lugar, as variacións pequenas son máis frecuentes que as grandes (como vimos no caso do *Liberation Day*, as variacións grandes son causadas por fenómenos extraor-

dinarios), polo que unha distribución normal de media cero é adoitada debido á simetría desta respecto a súa media. En segundo lugar, como a incerteza sobre o prezo futuro dun activo aumenta co tempo, xa que canto maior sexa o horizonte temporal que se tome, máis difícil será saber cal é o prezo, modelar os incrementos cunha normal cuxa varianza sexa o tempo é coherente con este razoamento. Alén destes argumentos intuitivos, o teorema central do límite é un coñecido resultado estadístico que apoia a escolla desta distribución. Asegúranos que a distribución da suma de variables aleatorias tende a una distribución normal cando a cantidade de variables é o suficientemente grande, independentemente da súa distribución de orixe.

**Teorema 2.5 (Teorema Central do Límite).** *Sexan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independentes e idénticamente distribuídas con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Entón, cando  $n$  tende a infinito:*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

*É dicir, a distribución da suma  $\sum_{i=1}^n X_i$  pode aproximarse por unha distribución normal con media  $n\mu$  e varianza  $n\sigma^2$  para valores de  $n$  suficientemente grandes.*

*Demostración.* Ver no terceiro capítulo de Díez (2022). □

Con todo, a elección desta distribución presenta os seus inconvenientes, sendo o principal que en movementos de curto prazo moi acentuados nunha dirección ou noutra, a distribución normal non é a que mellor captura estas variacións extremas, mais si é unha aproximación suficientemente válida.

Visto o movemento browniano estándar, agora imos explicar  $dX(t)$ , que non é máis que os pequenos incrementos deste movemento.

**Definición 2.6.** O termo  $dX(t)$  representa o incremento infinitesimal de  $X(t)$  no intervalo de tempo infinitesimal  $[t, t + dt]$ .

Como se pode deducir das propiedades e da definición de  $X(t)$ , tense que  $\mathbb{E}[dX(t)] = 0$ ,  $\text{Var}[dX(t)] = dt$  e os incrementos son independentes entre si. Na Figura 2.4 represéntanse os incrementos simulados  $dX(t)$  dun movemento browniano estándar. Vemos que os valores se dispersan arredor do cero, sen tendencia aparente, con flutuacións tanto positivas como negativas de pequena magnitude, o que resulta coherente coa esperanza nula teórica. Destaca tamén a amplitude cambiante destes incrementos, que é a clave para explicar a irregularidade característica das traxectorias de  $X(t)$ . Esta gráfica resulta útil para comprender a estrutura dun movemento browniano, posto que a acumulación destes pequenos incrementos aleatorios é a que xera as traxectorias irregulares e continuas do proceso  $X(t)$  mostradas previamente na Figura 2.3.

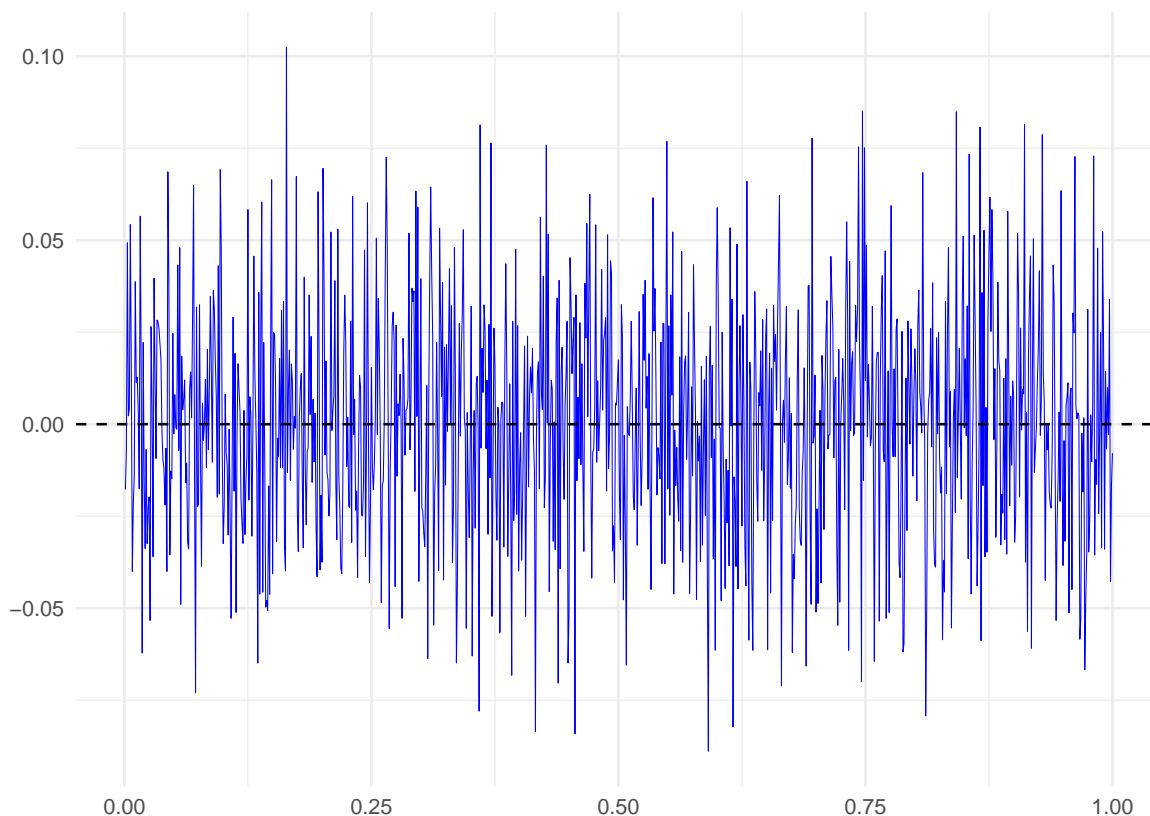


Figura 2.4: Simulación dos incrementos  $dX(t)$  dun movement browniano estándar. No eixo X móstrase o tempo  $t$  e, no eixo Y, a posición dos incrementos  $dX(t)$ .

Como se segue da Definición 2.4, a distribución de  $dX(t)$  é unha normal, xa que:

$$dX(t) = X(t + dt) - X(t) \stackrel{\text{prop. 3}}{\sim} N(0, dt).$$

Agora, unha vez definido o proceso  $X(t)$  e demostrado que  $dX(t) \sim N(0, dt)$ , cabe destacar, no plano teórico, que a solución da Ecuación (2.1) corresponde co que se coñece como movemento browniano xeométrico.

**Definición 2.7.** Un **movemento browniano xeométrico (MBX)** é un proceso estocástico continuo no tempo cuxa definición é:

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t + \sigma_S X(t) \right).$$

A súa ecuación diferencial estocástica asociada é a Ecuación (2.1).

Supoñendo unha media de crecemento anual  $\mu = 0,5$ , unha volatilidade  $\sigma = 0,25$  e un prezo inicial  $S(0) = 100\$$ , simulamos graficamente algúns posibles movementos brownianos xeométricos

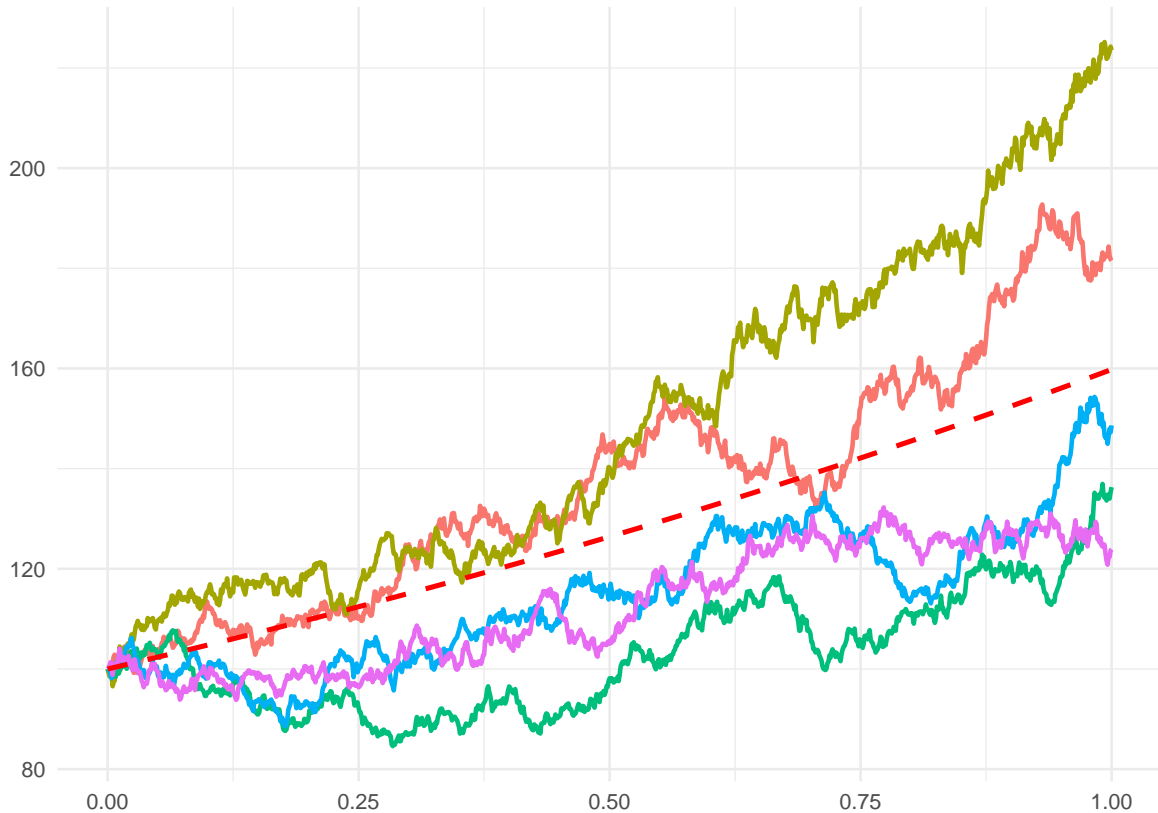


Figura 2.5: Simulación de varios movimientos brownianos xeométricos. No eixo X móstrase o tempo  $t$  e, no eixo Y, o prezo do activo,  $S(t)$ .

no software estatístico R (R Core Team, 2025). Observamos na Figura 2.5 seis liñas; cinco continuas e unha liña constante e discontinua. As liñas continuas son as cinco simulacións de movementos brownianos xeométricos con  $S(0) = 100\$$ . A liña vermella discontinua representa a tendencia determinista común a todos os camiños, dada pola expresión  $S(0) \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$  sendo  $\mu = 0,5$  e  $\sigma_S = 0,25$ . Sobre a tendencia, cada camiño incorpora unha compoñente aleatoria,  $\sigma_S X(t)$ , que provoca que os prezos se desvíen de forma diferente en cada simulación. Vemos así, como a variabilidade entre camiños aumenta progresivamente, debido á acumulación dos incrementos aleatorios ao longo do tempo, mentres a tendencia media de crecemento permanece constante.

## 2.2. Modelado do proceso aleatorio

Unha vez vista a teoría respecto aos movementos brownianos, imos intentar modelar o camiño aleatorio que segue a Ecuación (2.1). Como é inviable calcular o comportamento do proceso tras

cada pequeno incremento de tempo  $dt$ , pola gran cantidade de datos a manexar que iso implicaría, enfocamos a modelaxe tratando de saber que ocorre cando  $dt \rightarrow 0$ .

Antes de comezar co modelado introduciremos a notación matemática  $O_p(\cdot)$ , moi útil para este contexto.

**Definición 2.8.** Sexa unha sucesión de variables aleatorias  $X_n$  e unha sucesión  $a_n \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , dise que  $X_n = O_p(a_n)$  se  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists M > 0$  constante tal que:

$$P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > M\right) < \varepsilon,$$

para  $n$  suficientemente grande.

Se isto se cumpre, dicimos que  $X_n/a_n$  está acoutada en probabilidade, concepto que se explica en Shapiro (2019). Aplicado a  $dX(t)$ , como sabemos que segue unha distribución normal de media 0 e varianza  $dt$ , podemos escribir que  $dX(t) = O_p(\sqrt{dt})$ . Intuitivamente, a desviación típica dunha distribución é a que indica o tamaño dos cambios da variable, que serán proporcionais a ela, entón é claro que o cociente  $dX(t)/\sqrt{dt}$  non tenderá a infinito (por ser  $\sqrt{dt}$  a desviación típica de  $dX(t)$ ), que precisamente é o que denota a notación asintótica en probabilidade  $O_p(\cdot)$ . Esta afirmación pódese atopar en diversos textos que estudan este tema, como por exemplo en Lawler (2010).

A notación  $O_p(\cdot)$  ten unha propiedade moi importante que usaremos máis adiante, pero que convén explicar e demostrar para que quede clara antes de comezar o modelado.

*Observación 2.9.* O produto de dúas cantidades  $O_p(1)$  segue sendo  $O_p(1)$ . Demóstrase directamente da definición de  $O_p(\cdot)$ : sexan  $Z_n = O_p(1)$  e  $Y_n = O_p(1)$ , entón, para todo  $\varepsilon > 0$ , existen  $M_1, M_2 > 0$  tales que

$$P(|Z_n| > M_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad P(|Y_n| > M_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando  $M = M_1 M_2$ , tense que se  $|Z_n| \leq M_1$  e  $|Y_n| \leq M_2$ , entón  $|Z_n Y_n| \leq M$ . Polo contrarrecíproco, se  $|Z_n Y_n| > M$ , entón  $|Z_n| > M_1$  ou  $|Y_n| > M_2$ , e polo tanto:

$$P(|Z_n Y_n| > M) \leq P(|Z_n| > M_1) + P(|Y_n| > M_2) < \varepsilon,$$

e así  $Z_n Y_n = O_p(1) O_p(1) = O_p(1)$ .

**Proposición 2.10.** Se  $X_n = O_p(a_n)$ , entón  $X_n^2 = (O_p(a_n))^2 = O_p(a_n^2)$ .

*Demostración.* En primeiro lugar, é sinxelo probar que  $(O_p(a_n))^2 = O_p(a_n^2)$ . Sabendo que  $O_p(a_n) = a_n O_p(1)$  por van der Vaart (2000), Sección 2.2, entón é inmediato:

$$(O_p(a_n))^2 = O_p(a_n) O_p(a_n) = a_n a_n O_p(1) O_p(1) \stackrel{\text{Obs. 2.9}}{=} a_n^2 O_p(1) = O_p(a_n^2).$$

Agora, para probar a implicación  $X_n = O_p(a_n) \Rightarrow X_n^2 = O_p(a_n^2)$ , se  $X_n = O_p(a_n)$ , por definición temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tal que } P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > M\right) < \epsilon,$$

pero como

$$\left|\frac{X_n^2}{a_n^2}\right| = \left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right|\right)^2,$$

para ese mesmo  $M$ , tense:

$$P\left(\left|\frac{X_n^2}{a_n^2}\right| > M^2\right) = P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > M\right) < \epsilon,$$

e polo tanto  $X_n^2 = O_p(a_n^2)$ . □

Comezando co modelado, en primeiro lugar imos ver que ocorre con  $(dS(t))^2$  no límite  $dt \rightarrow 0$ , xa que isto simplificará as contas máis adiante. A partir da Ecuación (2.1) temos que:

$$(dS(t))^2 = (\mu S(t)dt + \sigma_S S(t)dX(t))^2,$$

$$(dS(t))^2 = \mu^2(S(t))^2 dt^2 + \sigma_S^2(S(t))^2 (dX(t))^2 + 2\mu(S(t))^2 \sigma_S dt dX(t), \quad (2.3)$$

e, como  $dX(t) = O_p(\sqrt{dt})$ , sabemos pola Proposición 2.10 que  $(dX(t))^2 = (O_p(\sqrt{dt}))^2 = O_p((\sqrt{dt})^2) = O_p(dt)$ .

Agora, examinando os termos da Ecuación (2.3), vemos que cada un ten unha orde en probabilidade diferente cando  $dt \rightarrow 0$ :

- $\mu^2(S(t))^2 dt^2 = O_p(dt^2)$ .
- $\sigma_S^2(S(t))^2 (dX(t))^2 = O_p(dt)$ , pois  $(dX(t))^2 = O_p(dt)$ .
- $2\mu\sigma_S(S(t))^2 dt dX(t) = O_p(dt \cdot \sqrt{dt}) = O_p(dt^{3/2})$ .

Dado que  $dt^2$  e  $dt^{3/2}$  tenden a cero máis rápido ca  $dt$  cando  $dt \rightarrow 0$ , o termo dominante en  $(dS(t))^2$  é  $\sigma_S^2(S(t))^2 (dX(t))^2$ , polo que podemos simplificar a ecuación da seguinte maneira:

$$(dS(t))^2 = \sigma_S^2(S(t))^2 (dX(t))^2 + O_p(dt^{3/2}). \quad (2.4)$$

Para rematar esta parte do modelado, estudaremos o comportamento de  $(dX(t))^2$  cando  $dt \rightarrow 0$ . En primeiro lugar imos calcular a esperanza e varianza de  $(dX(t))^2$ , para o que nos apoiaremos en que  $dX(t) \sim N(0, dt)$ . Temos que:

$$\mathbb{E}[(dX(t))^2] = \text{Var}(dX(t)) + (\mathbb{E}[dX(t)])^2,$$

e como  $\mathbb{E}[dX(t)] = 0$

$$\mathbb{E}[(dX(t))^2] = \text{Var}(dX) = dt.$$

Ademais, se  $dX(t) = \sqrt{dt} \cdot Z$  con  $Z \sim N(0, 1)$  sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{Var}((dX(t))^2) &= \mathbb{E}[(dX(t))^4] - (\mathbb{E}[(dX(t))^2])^2, \\ \text{Var}((dX(t))^2) &= dt^2 \mathbb{E}[Z^4] - dt^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, para calcular  $\mathbb{E}[Z^4]$ , por definición do momento de orde 4:

$$\mathbb{E}[Z^4] = \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

e, como  $z^4 e^{-\frac{z^2}{2}}$  é unha función par podemos escribir:

$$\mathbb{E}[Z^4] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^4 e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Realizando o cambio de variable  $u = \frac{z^2}{2}$ , temos que  $z = \sqrt{2u}$  e  $dz = \frac{du}{\sqrt{2u}}$ . Substituíndo na integral:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{2}} u^{3/2} e^{-u} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{3/2} e^{-u} du.$$

Vemos que a integral resultante é unha función Gamma.

*Observación 2.11.* A **función Gamma** (que se denota por  $\Gamma(s)$ ) defínese da seguinte maneira:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du.$$

Aplicado ao noso caso,  $s = \frac{5}{2}$ . Caben destacar dúas importantes propiedades cuxa demostración se pode ver en Artin (2015), que son:

- (a)  $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ ,
- (b)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

Tendo isto en conta, podemos expresar a integral resultante como:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \stackrel{(a)}{=} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{(b)}{=} \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{\pi}}{4 \cdot \sqrt{\pi}} = 3.$$

onde en (a) e (b) usamos as propiedades da función Gamma descritas na Observación 2.11. Unha vez sabemos que  $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ , volvendo á Ecuación (2.5) temos que:

$$\text{Var}((dX(t))^2) = dt^2 \mathbb{E}[Z^4] - dt^2 = 3dt^2 - dt^2 = 2dt^2.$$

Agora que sabemos que  $\mathbb{E}[(dX(t))^2] = dt$  e  $\text{Var}((dX(t))^2) = 2dt^2$  aplicaremos o desigualdade de Chebyshev para saber que ocorre con  $(dX(t))^2$  cando  $dt \rightarrow 0$ .

**Definición 2.12.** Dise que unha sucesión de variables aleatorias  $Y_n$  **converxe en probabilidade** a  $c$  e denótase como  $Y_n \xrightarrow{P} c$  se  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - c| \geq \varepsilon) = 0.$$

No noso caso imos comprobar que  $(dX)^2 \xrightarrow{P} dt$  cando  $dt \rightarrow 0$ .

**Teorema 2.13 (Desigualdade de Chebyshev).** Para calquera variable aleatoria  $Y$  con varianza finita,  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$P(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

*Demostración.* Para a demostración deste resultado empregaremos a **desigualdade de Markov**, cuxa demostración se pode atopar en Alsmeyer (2011); para calquera variable aleatoria non negativa  $X$  e  $\forall a > 0$ :

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a},$$

e tomando  $X = (Y - \mathbb{E}[Y])^2$  que é non negativa e  $a = \varepsilon^2$  temos:

$$P((Y - \mathbb{E}[Y])^2 \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]}{\varepsilon^2},$$

pero se sabemos que  $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ , obtemos substituíndo:

$$P(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{\varepsilon^2},$$

que é o que queríamos probar. □

Aplicando esta desigualdade a  $Y = (dX(t))^2$  tense:

$$P(|(dX(t))^2 - dt| \geq \varepsilon) \leq \frac{2dt^2}{\varepsilon^2},$$

e, cando  $dt \rightarrow 0$  o lado dereito da desigualdade tende a 0, é dicir,  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} P(|(dX(t))^2 - dt| \geq \varepsilon) = 0,$$

e vemos que coincide coa Definición 2.12 de converxencia en probabilidade polo que podemos afirmar que  $(dX)^2 \xrightarrow{P} dt$  cando  $dt \rightarrow 0$ .

Consecuentemente, tomando a Ecuación (2.4) podemos afirmar que:

$$(dS(t))^2 \xrightarrow{P} \sigma_S^2(S(t))^2 dt.$$

No cálculo de Itô, é habitual traballar directamente coa identidade diferencial sempre que se cumpra esta converxencia en probabilidade, polo que, facendo este abuso de notación, adóitase escribir:

$$(dS(t))^2 = \sigma_S^2(S(t))^2 dt. \tag{2.6}$$

Por outro lado, supoñamos agora que existe unha función  $f$  que depende do prezo dun activo  $S(t)$  e do tempo  $t$ ,  $f = f(S(t), t)$ . Se aumentamos o prezo do activo nunha pequena cantidade  $dS(t)$  e transcorre un intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ ,  $f$  tamén variará. Podemos estudar esta variación mediante a expansión en serie de Taylor da diferenza de  $f$  ao redor do punto  $(S(t), t)$ . Consideramos entón a diferenza  $df(S(t), t) = f(S+dS, t+dt) - f(S(t), t)$  e aplicamos a expansión de Taylor en dúas variables ao redor do punto  $(S(t), t)$ :

$$\begin{aligned} df(S(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) dS(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S(t), t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S(t), t) (dS(t))^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t}(S(t), t) dS(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(S(t), t) (dt)^2 + R(t), \end{aligned}$$

sendo  $R(t)$  o termo de resto tal que  $R(t) = O_p(dt^{3/2})$  cando  $dt \rightarrow 0$ .

Realizando un razoamento análogo ao que facíamos na Ecuación (2.6), cando analizabamos a orde en probabilidade dos distintos termos, podemos concluír que todos os termos a partir de  $(dS(t))^2$  tenden a cero máis rápido ca  $dt$  cando  $dt \rightarrow 0$ , xa que:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t}(S(t), t) dS(t) dt = O_p(dt\sqrt{dt}) = O_p(dt^{3/2})$  e
- $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(S(t), t) dt^2 = O_p(dt^2)$ .

Como  $O_p(dt^{3/2}) + O_p(dt^2) = O_p(dt^{3/2})$ , podemos entón reescribir a expansión de Taylor da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} df(S(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) dS(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S(t), t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S(t), t) (dS(t))^2 + O_p(dt^{3/2}). \end{aligned}$$

Substituíndo agora  $dS(t)$  como na Ecuación (2.1) e aplicando a  $(dS(t))^2$  a Ecuación (2.6) temos:

$$\begin{aligned} df(S(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) (\mu S(t) dt + \sigma_S S(t) dX(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial t}(S(t), t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S(t), t) (\sigma_S^2 S(t)^2 dt) + O_p(dt^{3/2}). \end{aligned}$$

Agrupando os sumando e eliminando  $O_p(dt^{3/2})$  por ser desprezable cando  $dt \rightarrow 0$  en comparación co resto de termos, obtemos:

$$\begin{aligned} df(S(t), t) &= \sigma_S S(t) \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) dX(t) \\ &\quad + \left( \mu S(t) \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S(t), t) \right) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esta ecuación é unha particularización do lema de Itô.

**Teorema 2.14 (Lema de Itô).** *Sexa unha variable aleatoria  $R$  que describe unha ecuación diferencial estocástica tal que:*

$$dR = A(R, t)dX(t) + B(R, t)dt, \quad (2.8)$$

*o lema de Itô establece que, se tomamos  $f(R, t)$  dúas veces diferenciable en  $R$  e unha en  $t$  temos:*

$$df(R, t) = A \frac{\partial f}{\partial R}(R, t) dX + \left( B \frac{\partial f}{\partial R}(R, t) + \frac{1}{2} A^2 \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}(R, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(R, t) \right) dt. \quad (2.9)$$

Para a nosa particularización bastaría tomar como variable aleatoria  $R$  o prezo dun activo  $S(t)$  e as funcións  $A(S(t), t) = S(t)\sigma_S$  e  $B(S(t), t) = S(t)\mu$  respectivamente. Substituíndo na Ecuación (2.8):

$$dS(t) = S(t)\sigma_S dX(t) + S(t)\mu dt,$$

e sacando factor común:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma_S dX(t),$$

que coincide coa Ecuación (2.1). Ademais, tomando unha  $f(S(t), t)$  calquera, se substituímos na Ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} df(S(t), t) &= \sigma_S S(t) \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) dX(t) \\ &+ \left( \mu S(t) \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S(t), t) \right) dt, \end{aligned}$$

que coincide coa  $df(S(t), t)$  da Ecuación (2.7), calculada anteriormente.



## Capítulo 3

# Modelo Black-Scholes

Neste capítulo explicaranse as hipóteses sobre as que se basa o modelo de Black-Scholes. A partir delas, imos construír progresivamente a coñecida ecuación diferencial de Black-Scholes, a cal solucionaremos ata chegar a unha fórmula explícita para a valoración de opcións. Finalmente, expoñeremos un caso práctico, no que se empregará esta fórmula, para ver a súa utilidade nun caso real.

Para comezar, introduciremos notación que será útil de aquí en adiante.

*Notación 3.1.* Denotamos por  $V(S(t), t)$  o valor dunha opción, empregando  $C(S(t), t)$  se é unha opción *call* ou  $P(S(t), t)$  se é *put*. Esta función depende do valor do activo subxacente  $S(t)$  e do tempo  $t$ .

Empregaremos  $E$  para o prezo final prefixado da opción, é dicir, o prezo de exercicio do que se falaba na Definición 1.8.

Finalmente,  $T$  representará o tempo final, é dicir, a data na que a opción vencerá e  $r$  é a taxa de interese instantáneo libre de risco que nos retorna, por exemplo, unha conta de aforros dun banco. Tomamos esta  $r$  como un beneficio garantido sen risco, xa que nos modelo Black-Scholes asúmese que hai certas inversións sen risco e as contas de aforros son instrumentos moi seguros que dan un porcentaxe de interese fixo.

### 3.1. Hipóteses do modelo Black-Scholes

Para deducir a fórmula de Black-Scholes, é necesario asumir unha serie de hipóteses que permiten construír un modelo matemático manexable. Aínda que estas condicións non sempre se cumpren nos mercados reais, son fundamentais para obter unha solución analítica exacta ao problema da valoración de opcións europeas. Antes de determinar o valor dunha opción  $V(S(t), t)$

en calquera tempo  $t$ , é necesario establecer as hipóteses fundamentais do modelo.

- (i) **Dinámica estocástica e propiedades do activo subxacente:** Asumiremos que o prezo do activo subxacente segue un movemento browniano xeométrico (ver Definición 2.7) e  $\sigma_S$  é unha variable coñecida e constante para todo  $t$ . Esta hipótese permite aplicar o Lema de Itô e obter unha ecuación diferencial estocástica ben definida. Supoñemos tamén que o activo subxacente é divisible, isto é, que pode fraccionarse para a súa compravenda, como por exemplo, para a venda de 0,5 accións dunha compañía.
- (ii) **Mercado sen friccións:** O activo subxacente pode comprarse e venderse continuamente no mercado, sen custos de transacción, outros impostos ou comisións. Esta ausencia de friccións no mercado simplifica a análise e permite aplicar técnicas de cobertura continua. Ademais, non pagará dividendos durante a vida da opción.
- (iii) **Venda en curto permitida:** Está permitida a venda en curto, que consiste en pedir un activo prestado para vendelo ao prezo vixente coa intención de compralo máis adiante a un prezo inferior (como se explica na Definición 1.12). Esta asunción é necesaria para evitar oportunidades de arbitraje.
- (iv) **Ausencia de arbitraje:** Recordando a Definición 1.11, a arbitraje é a práctica de obter un beneficio instantáneo e sen risco. Se estas oportunidades existen, non será por un período longo no tempo, porque o movemento dos prezos tenderá a eliminalas rapidamente.
- (v) **Existencia de taxa libre de risco constante:** Neste traballo (como en case toda a teoría financeira) asumiremos que existen inversións sen risco con beneficio garantido, é dicir, activos sen risco que ofrecen unha taxa de interese  $r$  constante e coñecida.
- (vi) **Posibilidade de cobertura continua (*hedging*):** O modelo supón a posibilidade de cubrirse con activos contrarios do risco dun *portfolio* como se explicou na Definición 1.13 de forma continua.

Aínda que estas condicións non sempre se cumpren na realidade, proporcionan unha base sólida para o desenvolvemento teórico do modelo. Tras isto, estamos en posición de calcular o valor dunha opción.

### 3.2. Ecuación de Black-Scholes

En primeiro lugar imos calcular  $V(S(t), t)$  no tempo  $t = T$ , que se pode deducir directamente do Cadro 1.2.

Considerando unha opción *call* temos que se  $S(T) > E$  entón ten sentido exercer a opción obtendo unha ganancia de  $S(T) - E$ . Se  $S(T) < E$ , entón non se exercerá (xa que teríamos unha perda de  $E - S(T)$ ) e polo tanto temos que  $C(S(T), T) = \max(S(T) - E, 0)$ . Agora, considerando unha opción *put* e usando o mesmo argumento, sabemos que obtemos un beneficio de  $E - S(T)$  se  $S(T) < E$  e perdas se  $S(T) > E$ , polo que  $P(S(T), T) = \max(E - S(T), 0)$ . Finalmente deducimos:

$$V(S(T), T) = \begin{cases} \max(S(T) - E, 0) & \text{se é unha opción call,} \\ \max(E - S(T), 0) & \text{se é unha opción put.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Agora calcularemos  $V(S(t), t)$  para calquera tempo  $t$ . Aplicamos o Lema de Itô (Ecuación (2.9)) á función  $V(S(t), t)$ , asumindo que é dúas veces diferenciable en  $S$  e unha vez en  $t$ , como require o teorema:

$$dV(S(t), t) = \sigma_S S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} dX(t) + \left( \mu S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} + \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} \right) dt, \quad (3.2)$$

o que nos describe o valor dunha opción,  $V(S(t), t)$ , tras un incremento de tempo infinitesimal,  $dt$ .

Agora, o noso obxectivo será construír unha carteira cuberta fronte ao risco. Para isto, combinaremos opcións e unha cantidade  $-\Delta$  do activo subxacente, de forma que se controle a exposición ao risco provocado por variacións no prezo do activo subxacente. Consideramos entón unha carteira  $\Pi$ , que dependerá do tempo, polo que notamos  $\Pi(t)$ . Estará composta pola compra dunha opción con valor  $V(S(t), t)$  no tempo  $t$  e a venda de  $\Delta$  unidades de activo subxacente. Aquí cobra importancia a hipótese de venda en curto, xa que é posible vender esta cantidade de activo subxacente instantaneamente. O valor desta carteira é entón:

$$\Pi(t) = V(S(t), t) - \Delta S(t). \quad (3.3)$$

Se agora consideramos un incremento infinitesimal no tempo,  $dt$ , o valor da carteira, asumindo que  $\Delta$  non depende do tempo, será:

$$d\Pi(t) = dV(S(t), t) - \Delta dS(t). \quad (3.4)$$

Agora, aplicando á Ecuación (3.4) a substitución de  $dV(S(t), t)$  como na Ecuación (3.2), e de  $dS(t)$  como na Ecuación (2.1), obtemos:

$$d\Pi(t) = \sigma_S S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} dX(t) + \left( \mu S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} + \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} \right) dt - \Delta (\mu S(t) dt + \sigma_S S(t) dX(t)),$$

e, agrupando términos respecto a  $dX(t)$  e  $dt$ :

$$d\Pi(t) = \sigma_S S(t) \left( \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} - \Delta \right) dX(t) + \left( \mu S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} + \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} - \mu \Delta S(t) \right) dt. \quad (3.5)$$

Vemos que na expresión obtida de  $d\Pi(t)$  hai unha compoñente aleatoria, asociada a  $dX(t)$  e outra determinista, asociada a  $dt$ . A estratexia de Black-Scholes consiste en eliminar a compoñente aleatoria polo que tomaremos un  $\Delta$  con este obxectivo. Escollendo  $\Delta = \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S}$ , conseguimos que a carteira sexa localmente sen risco, xa que o termo multiplicado por  $dX(t)$  desaparece. Substituíndo este valor na Ecuación (3.5), obtemos:

$$d\Pi(t) = \left( \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.6)$$

Vemos que, tomando este valor de  $\Delta$ , conséguese que o valor do *portfolio* no incremento  $dt$  sexa totalmente determinista.

Baseándose agora na hipótese de que non existe a posibilidade de arbitraje, que dinos que en mercados eficientes non poden haber oportunidades de obter beneficio sen risco, ao non ter  $d\Pi(t)$  incerteza, como se ve na Ecuación (3.6), a rendibilidade deste *portfolio* nun tempo  $dt$  debe coincidir coa rendibilidade que se obtería de calquera activo sen risco no que se invista unha cantidade  $\Pi(t)$ .

Para coñecer a rendibilidade dunha carteira sen risco no que se inviste unha cantidade  $\Pi(t)$ , solo temos que recordar que o retorno en finanzas para  $\Pi(t)$ , defínese como  $\frac{d\Pi(t)}{\Pi(t)}$  como se menciona no Capítulo 2, xusto despois da Definición 2.1. Dado que se trata dunha carteira sen risco, a hipótese de ausencia de arbitraje asegúranos que a súa rendibilidade debe coincidir coa dunha inversión libre de risco, é dicir  $r dt$ . Polo tanto, temos que:

$$\frac{d\Pi(t)}{\Pi(t)} = r dt,$$

e, multiplicando a ambos lados por  $\Pi(t)$  obtemos:

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt. \quad (3.7)$$

Agora, igualando as dúas expresións que temos para  $d\Pi(t)$  (Ecuacións (3.6) e (3.7)) obtemos:

$$r\Pi(t)dt = \left( \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.8)$$

Por outro lado, escribiremos  $\Pi(t)$  como na Ecuación (3.3) e, como xa tomáramos  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  podemos reescribir a ecuación como:

$$\Pi(t) = V(S(t), t) - \frac{\partial V}{\partial S} S(t).$$

Multiplicando a ambos lados desta ecuación por  $r dt$  obtemos:

$$r \Pi(t) dt = \left( r V(S(t), t) - r S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} \right) dt. \quad (3.9)$$

Vemos agora que temos dúas expresións para  $r \Pi(t) dt$  (Ecuacións (3.8) e (3.9)) polo que igualámolas:

$$\left( \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} \right) dt = \left( r V(S(t), t) - r S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} \right) dt,$$

e, cancelando os  $dt$  que multiplican a ambos lados da igualdade e trasladando todos os termos ao mesmo lado obtemos:

$$\frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S^2} + r S(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S} - r V(S(t), t) = 0.$$

Eliminando a dependencia explícita dos termos en  $S(t)$  e  $t$  (que non xera confusión xa que solo se eliminan por alixeirar notación) e notando  $\sigma_S$  como  $\sigma$ , obtemos a forma clásica da ecuación de Black-Scholes que se atopa na maioría de libros que tratan este tema, por exemplo en Wilmott et al. (1995):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0. \quad (3.10)$$

### 3.3. Solución explícita

A pesar de que xa temos a ecuación de Black-Scholes, é pouco práctico traballar cunha ecuación diferencial para calcular o valor dunha opción. Por iso nesta sección imos dar a expresión explícita para o prezo teórico das opcións *call* e *put* europeas.

Non proporcionaremos solución para as opcións americanas (ver a diferenza entre opción americana e europea na Definición 1.8) porque normalmente esta calcúlase por métodos numéricos e excede o ámbito deste traballo; para isto, pódese consultar Myneni (1992). Manteremos a notación clásica de Black-Scholes para alixeirar a notación nas expresións desta subsección, xa que serán complexas e extensas.

**Teorema 3.2 (Fórmula de Black-Scholes).** *A solución da Ecuación (3.10) para opcións call europeas é:*

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2). \quad (3.11)$$

*Para opcións put europeas, a solución é:*

$$P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (3.12)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$ :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

e  $N(\cdot)$  a función de distribución dunha variable normal estándar:

$$N(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (3.13)$$

*Demostración.* O noso obxectivo nesta demostración será simplificar a Ecuación (3.10) á ecuación do calor mediante os cambios de variables adecuados, xa que a súa solución é coñecida. Unha vez obtida esta solución, desfaremos os cambios de variable previos e resolveremos as integrais resultantes ata chegar a unha expresión explícita para o valor dunha opción. Realizaremos a demostración para unha opción *call*, sendo o razoamento análogo para unha opción *put*.

Comezaremos a demostración recordando que partimos da Ecuación (3.10). Para poder solucionar esta ecuación, necesitamos unha condición de fronteira, a cal tomaremos da Ecuación (3.1), na que calculábamos o valor dunha opción no instante  $t = T$ . Polo tanto, a nosa condición de fronteira será:

$$C(S, T) = \max(S - E, 0). \quad (3.14)$$

Esta condición de fronteira representa o valor da opción no vencemento, que coincide co seu *payoff*: o beneficio que obtería o comprador se exerce a opción. Agora, realizaremos o primeiro cambio de variable, que é o cambio temporal:

$$\tau = T - t. \quad (3.15)$$

Vemos claramente que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial t}{\partial t} = -1,$$

e, aplicando a regra da cadea:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \tau},$$

polo que substituíndo na Ecuación (3.10) temos:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV. \quad (3.16)$$

O segundo cambio de variable que aplicaremos será:

$$x = \log\left(\frac{S}{E}\right). \quad (3.17)$$

Seguindo o mesmo procedemento que para o cambio de variable temporal (Ecuación (3.15)) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{\partial \log\left(\frac{S}{E}\right)}{\partial S} = \frac{\partial \log(S) - \partial \log(E)}{\partial S} = \frac{1}{S}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial^2 S} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{S}\right)}{\partial S} = -\frac{1}{S^2}, \end{aligned}$$

e, coa regra da cadea novamente, obtemos;

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} &= \frac{\partial V}{\partial S} \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial S} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S} \\ &= -\frac{1}{S^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} = \frac{1}{S^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

polo que substituíndo na Ecuación (3.16) temos:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + r \frac{\partial V}{\partial x} - rV,$$

e, agrupando:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x} - rV. \quad (3.18)$$

O último e terceiro cambio de variable será:

$$V(x, \tau) = E e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau). \quad (3.19)$$

Cómpre sinalar que con este cambio incorremos nun pequeno abuso de notación, habitual no cálculo da fórmula de Black-Scholes. En particular, na Ecuación (3.1) empregábamnos  $V(S, T) = C(S, T)$  para o valor dunha opción *call*.

Neste novo contexto,  $V(x, \tau)$  representa tamén o valor da opción, pero expresado no sistema de variables  $(x, \tau)$ . Máis precisamente, a relación entre as funcións é:

$$V(x, \tau) = C(Ee^x, T - \tau),$$

mais, por motivos de simplicidade e por estar moi establecido nos textos sobre este tema, mantemos o uso de  $V$  para a función expresada coas novas variables, a pesar de que o estrictamente correcto sería distinguir entre funcións con distintas variables.

Aclarado este abuso de notación, aplicamos o mesmo procedemento que nos outros dous cambios de variables e obtemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \tau} &= \beta E e^{\alpha x + \beta \tau} u + E e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = E e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= E e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} &= E e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha^2 u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + E e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right) = E e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u \right),\end{aligned}$$

e substituíndo na Ecuación (3.18) obtemos:

$$Ee^{\alpha x + \beta \tau} \left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 Ee^{\alpha x + \beta \tau} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u \right) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) Ee^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r Ee^{\alpha x + \beta \tau} u,$$

que, tras dividir en ambos lados da igualdade entre  $Ee^{\alpha x + \beta \tau}$  resulta en:

$$\left( \beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u \right) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left( \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - ru,$$

e, agrupando en función das derivadas de primeiro e segundo orden e de termos de  $u$  obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \sigma^2 \alpha + r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \alpha - r - \beta \right) u. \quad (3.20)$$

Vemos que expresándoa así, a Ecuación (3.20) aseméllase á coñecida ecuación do calor ( $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ), que recordemos que era o noso obxectivo neste razoamento. O último paso que nos queda para ter unha expresión idéntica á do calor é escoller axeitadamente  $\alpha$  e  $\beta$ . Vemos claramente que se tomamos:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \alpha - r \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right)^2 + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) - r \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{r}{\sigma^2} + \frac{r^2}{\sigma^4} \right) + \left( \frac{r}{2} - \frac{r^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{4} + \frac{r}{2} \right) - r \\ &= \frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{r^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{4} = -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

e substituímos na Ecuación (3.20), anúlense os termos que acompañan a  $u$  e a  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , obtendo:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.23)$$

Finalmente, temos unha ecuación do calor. Cabe mencionar que os cambios de variable empregados están baseados nos usados en Coelen (2002).

Agora imos axustar a condición de fronteira aos cambios de variable realizados para así poder resolver a Ecuación (3.23). Inicialmente tiñamos que a nosa condición de fronteira era a Ecuación (3.14). Tendo en conta o primeiro cambio de variable (da Ecuación (3.15) obtemos que  $\tau = 0$ ) e o segundo (despexamos da Ecuación (3.17)  $S$ , tal que  $S = Ee^x$ ), reescribimos:

$$C(S, T) = C(Ee^x, T) = \max(Ee^x - E, 0) = E \max(e^x - 1, 0),$$

tal que, en términos de  $x$  e  $\tau$ ;

$$V(x, 0) = E \text{máx}(e^x - 1, 0). \quad (3.24)$$

Por outro lado da Ecuación (3.19) temos que:

$$V(x, 0) = Ee^{\alpha x}u(x, 0), \quad (3.25)$$

e, igualando as Ecuacións (3.24) e (3.25), obtemos:

$$\begin{aligned} Ee^{\alpha x}u(x, 0) &= E \text{máx}(e^x - 1, 0), \\ e^{\alpha x}u(x, 0) &= \text{máx}(e^x - 1, 0), \\ u(x, 0) &= e^{-\alpha x} \text{máx}(e^x - 1, 0), \end{aligned} \quad (3.26)$$

que será a nosa condición de fronteira en términos de  $x$  e  $\tau$ .

Finalmente temos que resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, T], \\ u(x, 0) = e^{-\alpha x} \text{máx}(e^x - 1, 0), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Como se mencionou anteriormente, a solución desta ecuación é coñecida e está amplamente estudada. En Fontalvo (2023), Capítulo 3, pódese atopar un estudo detallado da solución a este problema e, en particular, a solución da Ecuación (3.27) ven dada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, 0) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy. \quad (3.28)$$

Para chegar ata a solución explícita para opcións *call*, en primeiro lugar, substituiremos a condición inicial na Ecuación (3.28):

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y} (e^y - 1) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy,$$

e agora calcularemos as integrais por separado:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)y} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy, \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy. \end{aligned}$$

Como vemos ambas son do tipo:

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^{+\infty} e^{py} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy, \quad (3.29)$$

e, completando cadrados no expoñente, temos:

$$\begin{aligned}
 py - \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau} &= py - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2\sigma^2\tau} = \left(p + \frac{x}{\sigma^2\tau}\right)y - \frac{y^2 - x^2}{2\sigma^2\tau} \\
 &= -\frac{1}{2\sigma^2\tau} (y^2 - 2(x + p\sigma^2\tau)y) - \frac{x^2}{2\sigma^2\tau} \\
 &= -\frac{1}{2\sigma^2\tau} ((y - (x + p\sigma^2\tau))^2 - (x + p\sigma^2\tau)^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2\tau} \\
 &= -\frac{(y - (x + p\sigma^2\tau))^2}{2\sigma^2\tau} + \frac{(x + p\sigma^2\tau)^2 - x^2}{2\sigma^2\tau} \\
 &= -\frac{(y - (x + p\sigma^2\tau))^2}{2\sigma^2\tau} + px + \frac{p^2\sigma^2\tau}{2}.
 \end{aligned}$$

Reescribindo a Ecuación (3.29):

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(px + \frac{p^2\sigma^2\tau}{2}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y - (x + p\sigma^2\tau))^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy. \quad (3.30)$$

Seguidamente, aplicando o cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{y - (x + p\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\
 dz &= \frac{dy}{\sigma\sqrt{\tau}} \implies dy = \sigma\sqrt{\tau}dz, \\
 y = 0 &\implies z_0 = \frac{-x - p\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

e, entón, podemos escribir a Ecuación (3.30) como:

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(px + \frac{p^2\sigma^2\tau}{2}\right) \int_{z_0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\sqrt{\tau} dz, \\
 I(p) &= \exp\left(px + \frac{p^2\sigma^2\tau}{2}\right) \int_{z_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
 \end{aligned}$$

Recordando a función de distribución dunha variable normal estándar (Ecuación (3.13)) temos que:

$$I(p) = \exp\left(px + \frac{p^2\sigma^2\tau}{2}\right) N(-z_0).$$

Substituíndo  $z_0$  como na Ecuación (3.31) obtemos:

$$I(p) = \exp\left(px + \frac{p^2\sigma^2\tau}{2}\right) N\left(\frac{x + p\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

que é o resultado da integral. No noso caso,  $I_1 = I(1 - \alpha)$  e  $I_2 = I(-\alpha)$ .

Para chegar á expresión final, imos ir desfazendo os cambios de variable previamente realizados. En primeiro lugar, desfazemos o cambio de variable da Ecuación (3.19):

$$\begin{aligned} C(S, t) = V(x, \tau) &= Ee^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} (I_1 - I_2) \\ &= Ee^{\alpha x + \beta \tau} \left( e^{(1-\alpha)x + \frac{(1-\alpha)^2 \sigma^2 \tau}{2}} N(d_1) - e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2 \sigma^2 \tau}{2}} N(d_2) \right) \\ &= Ee^x e^{\left( \beta + \frac{(1-\alpha)^2 \sigma^2}{2} \right) \tau} N(d_1) - Ee^{\left( \beta + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} \right) \tau} N(d_2), \end{aligned} \quad (3.32)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x}{\sigma \sqrt{\tau}} + (1 - \alpha) \sigma \sqrt{\tau}, \\ d_2 &= \frac{x}{\sigma \sqrt{\tau}} - \alpha \sigma \sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

Seguidamente, se substituímos os valores de  $\alpha$  (Ecuación (3.21)) e de  $\beta$  (Ecuación (3.22)) na Ecuación (3.32), obtemos:

$$\begin{aligned} C(S, t) &= Ee^x e^{\left( -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)\right)^2 \sigma^2}{2} \right) \tau} N(d_1) \\ &\quad - Ee^{\left( -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 \sigma^2}{2} \right) \tau} N(d_2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$ :

$$d_1 = \frac{x}{\sigma \sqrt{\tau}} + \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right) \sigma \sqrt{\tau} = \frac{x + \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right) \sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} = \frac{x + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad (3.34)$$

$$d_2 = \frac{x}{\sigma \sqrt{\tau}} - \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) \sigma \sqrt{\tau} = \frac{x + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}. \quad (3.35)$$

Agora, simplificaremos os expoñentes da Ecuación (3.33), que denotaremos como:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)\right)^2 \sigma^2}{2}, \\ E_2 &= -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 \sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

Procedemos coa simplificación de  $E_1$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 \sigma^2}{2} = -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{r^2}{\sigma^4}\right) \sigma^2}{2} \\ &= -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \left( \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2\sigma^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

e, análogamente:

$$E_2 = -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{r}{\sigma^2} + \frac{r^2}{\sigma^4}\right) \sigma^2}{2} = -r.$$

Tras esta simplificación, a Ecuación (3.33) redúcese a:

$$C(S, t) = Ee^x N(d_1) - Ee^{-r\tau} N(d_2). \quad (3.36)$$

Finalmente, desfacendo os cambios de variable das Ecuacións (3.15) e (3.17), substituímos na Ecuación (3.36), en  $d_1$  (Ecuación (3.34)) e en  $d_2$  (Ecuación (3.35)) e obtemos:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2),$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$ :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

como queríamos probar.

Para opcións *put* pódese seguir un razoamento análogo. O único que cambia é a condición de fronteira, que en vez de ser como na Ecuación (3.26) é da forma:

$$u(x, 0) = e^{-\alpha x} \max(1 - e^x, 0),$$

polo que a ecuación do calor a resolver será:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, T], \\ u(x, 0) = e^{-\alpha x} \max(1 - e^x, 0), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Seguindo un procedemento idéntico ao realizado coas opcións *call*, desfacendo os cambios de variable e rapidamente chegamos á Ecuación (3.12).  $\square$

### 3.3.1. Paridade *put-call*

Imos introducir un novo concepto que, ademais de proporcionarnos unha demostración alternativa da fórmula para o valor dunha opción *put* europea, constitúe unha importante relación entre as opcións *put* e *call*. Esta relación coñécese como a paridade *put-call*.

Sexa un *portfolio*  $\psi$  tal que, nun tempo  $t$ , o seu valor ven dado por:

$$\psi(t) = P(S, t) - C(S, t) + S(t), \quad (3.37)$$

da Ecuación (3.1) sabemos que, no tempo  $t = T$ :

$$\psi(T) = P(S, T) - C(S, T) + S(T) = \max(E - S(T), 0) - \max(S(T) - E, 0) + S(T).$$

Agora, separamos en dous casos:

$$\begin{cases} E \geq S(T) \implies \psi(T) = (E - S(T)) - 0 + S(T) = E, \\ E < S(T) \implies \psi(T) = 0 - (S(T) - E) + S(T) = E. \end{cases}$$

Vemos que en ambos casos,  $\psi(T) = E$ . Pola hipótese da non arbitraxe, como este *portfolio* sempre vale  $E$  na data de vencemento, concluímos que o seu retorno instantáneo ten que equivaler ao de calquera inversión sen risco, é dicir:

$$\frac{d\psi(t)}{\psi(t)} = r dt.$$

Resolvendo a ecuación diferencial temos:

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{d\psi(u)}{\psi(u)} &= \int_t^T r du, \\ \log(\psi(T)) - \log(\psi(t)) &= r(T - t), \\ \frac{\psi(T)}{\psi(t)} &= e^{r(T-t)}, \\ \psi(t) &= Ee^{-r(T-t)}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Como temos dúas expresións para  $\psi(t)$  (Ecuacións (3.37) e (3.38)), igualámolas e obtemos:

$$P(S, t) - C(S, t) + S(t) = Ee^{-r(T-t)},$$

e, despexando  $P(S, t)$ :

$$P(S, t) = C(S, t) - S(t) + Ee^{-r(T-t)}, \tag{3.39}$$

que é o que se coñece como paridade das opcións *put-call* europeas. Pódese consultar unha análise máis detallada en Klemkosky and Resnick (1979).

Como se mencionou ao comezo desta subsección, poderíase calcular a fórmula para unha opción *put* europea a partir da Ecuación (3.39). Substituíndo o valor de  $C(S, t)$  como na Ecuación (3.11) obtemos:

$$\begin{aligned} P(S, t) &= SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ee^{-r(T-t)} \\ &= S(N(d_1) - 1) + Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)). \end{aligned}$$

Como  $N(d_1) = P(Z \leq d_1)$ , aplicando propiedades básicas da función de distribución dunha variable normal estándar obtemos:

$$N(d_1) - 1 = P(Z \leq d_1) - 1 = -(1 - P(Z \leq d_1)) = -(P(Z > d_1)) = -(P(Z \leq -d_1)) = -N(-d_1),$$

e, analogamente;

$$1 - N(d_2) = 1 - P(Z \leq d_2) = P(Z > d_2) = P(Z \leq -d_2) = N(-d_2), \tag{3.40}$$

polo que:

$$P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}(N(-d_2)) - S(N(-d_1)),$$

que coincide coa Ecuación (3.12), como queríamos demostrar.

### 3.4. Aplicación práctica da fórmula de Black-Scholes

Nesta sección expoñeráse un exemplo de valoración de opcións mediante o modelo de Black-Scholes. Máis concretamente, vanse valorar opcións *put* da empresa internacional americana de tecnoloxía Nvidia.

**Exemplo 3.1.** O día 25 de xuño de 2025 a cotización en bolsa das accións de Nvidia era, segundo Google Finance (2025), de 154,31\$, é dicir,  $S = 154,31\$$ . Queremos saber o valor dunha opción *put* cuxo prezo de exercicio sexa  $E = 155\$$  a día 18 de xuño de 2026, polo que  $T = 246$  días hábiles  $= \frac{246 \text{ días}}{252 \text{ ano}} \approx 0,976$  anos. Para este cálculo de días hábiles hai que ter en conta que aos días entre ambas datas réstanse festivos e fines de semana. Seguindo a mesma lóxica asumimos que un ano ten 252 días en vez de 365.

Consultando en MarketBeat (2025), sabemos que a volatilidade implícita de Nvidia é  $\sigma^2 = 42,37\% = 0,4237$ . Ademais, tomando os bonos do tesouro americano a 1 ano como a taxa de interese sen risco sabemos, segundo datos de U.S. Department of the Treasury (2025), que  $r = 3,99\% = 0,0399$ . Finalmente, temos todos os datos para calcular o valor teórico da opción *put* pola fórmula de Black-Scholes. Substituíndo na Ecuación (3.12) temos:

$$P = 155 \cdot e^{-0,0399 \cdot 0,976} (N(-d_2)) - 154,31 \cdot (N(-d_1)),$$

sendo  $d_1$  (Ecuación (3.34)) e  $d_2$  (Ecuación (3.35)):

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{154,31}{155}\right) + \left(0,0399 + \frac{0,4237^2}{2}\right) \cdot 0,976}{0,4237 \cdot \sqrt{0,976}} \approx 0,2917,$$

$$d_2 = 0,2917 - 0,4237 \cdot \sqrt{0,976} = -0,1269,$$

e, empregando as táboas da distribución normal e a igualdade  $N(-x) = 1 - N(x)$ , que deducimos da Ecuación (3.40), temos:

$$N(-0,2917) = 1 - N(0,2917) = 1 - 0,6141 \approx 0,3859,$$

$$N(-(-0,1269)) = N(0,1269) \approx 0,5517.$$

Finalmente, obtemos que:

$$P \approx 155 \cdot 0,9618 \cdot 0,5517 - 154,31 \cdot 0,3859 \approx 82,25 - 59,55 = 22,70\$.$$

Concluimos que, segundo o modelo de Black-Scholes, o prezo teórico que debería ter a opción é de 22,70\$. Consultando novamente en MarketBeat (2025), o prezo real da opción é de 23,157\$.

Vemos que o modelo de Black-Scholes, a pesar de ofrecernos unha boa aproximación, non coincide exactamente co valor real da opción no mercado. A diferenza de 0,457\$ explícase, a parte de porque é unha estimación, pola asunción de hipóteses da Sección 3.1; factores como os custos de transacción, as distintas comisións que existen nos mercados ou os custos de financiamento para vender en curto, son condicionantes que encarecen directamente o prezo e que o modelo teórico de Black-Scholes non ten en conta.



## Capítulo 4

# Limitacións e posibles extensións do modelo Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes é unha das ferramentas máis empregadas en valoración de opcións debido a súa simplicidade e á posibilidade de obter unha solución analítica exacta. Non obstante, como vimos no Exemplo 3.1, o modelo non sempre predí con total exactitude o valor dunha opción. Esta discrepancia débese a que as hipóteses idealizadas que se presentan na Sección 3.1, rara vez se cumpren integramente nos mercados reais. Neste capítulo, analizaremos algunhas das principais limitacións de asumir esas hipóteses e veremos as solucións e extensións que se propuxeron na literatura para intentar dar un marco máis amplo e realista ao modelo de Black-Scholes.

### 4.1. Limitacións do modelo de Black-Scholes

Un dos principios fundamentais do modelo de Black-Scholes, é a hipótese de volatilidade constante. No modelo, para facilitar o cálculo de prezos, asúmese que a volatilidade é constante ao longo do tempo, mais isto supón unha grande limitación. Nos mercados financeiros reais a volatilidade implícita do activo subxacente (a volatilidade do subxacente que os inversores esperan durante a vida da opción), pode variar substancialmente debido a factores externos ou simples cambios na valoración do activo dos inversores. Ao asumir que o prezo do activo segue un movemento browniano xeométrico, con volatilidade fixa, é imposible captar estes cambios.

Precisamente, asumir que os prezos dos activos seguen un movemento browniano xeométrico, constitúe outra limitación. Que os prezos sigan este movemento implica que a súa evolución será continua, sen grandes saltos mais, como se veu no Exemplo 2.1, no mercado real en ocasións

sucedan acontecementos externos que causan estes saltos bruscos na evolución dos prezos.

Outra hipótese fundamental do modelo é a non existencia teórica de custos de transacción e outras comisións no mercado. Na práctica, si existen este tipo de custos asociados á compravenda de opcións e afectan á rendibilidade das mesmas. Ademais, o modelo de Black-Scholes non considera o pago de dividendos ou outros fluxos que poda reportar o activo subxacente, o cal é un factor moi limitativo á hora de calcular o valor dunha opción cuxo subxacente sexa unha acción con dividendos por exemplo.

Seguidamente, cabe destacar un dos piares do modelo de Black-Scholes: a ausencia de oportunidades de arbitraje. Aínda que este feito é comunmente aceptado no plano teórico, poden xurdir situacións no mercado real nas que se den certas oportunidades que si permitan o arbitraje, se ben estas tenden a eliminarse rapidamente.

Ademais outra hipótese do modelo Black-Scholes que non se axusta á realidade dos mercados é que a taxa de interese libre de risco pode variar ao longo do tempo de vida da opción. En ocasións, para axustarse a certos obxectivos de inflación ou outros factores, os gobernos ou outros axentes económicos poden variar os tipos de interese, o que afecta ao prezo real da opción.

Por último, focalizándonos no *hedging* dunha carteira, esta baséase na cobertura continua e sen restricións mediante distintas estratexias como a venda en curto ou a dispoñibilidade de liquidez para acometer calquera tipo de operación de forma inmediata. Pero, na práctica, en ocasións existen limitacións ou, directamente, prohibicións sobre algunhas destas estratexias que o modelo de Black-Scholes non contempla. Sen ir máis lonxe, en España o 16 de marzo de 2020, entrou en vigor unha prohibición pola cal non se permitía a venda en curto (Comisión Nacional del Mercado de Valores, 2020).

Estas limitacións impostas de cara a facilitar o cálculo e desenvolvemento do modelo de Black-Scholes, dan lugar a novos modelos que intenten acoutar e superar estas limitacións. Na seguinte sección, ademais de estudar algúns deses modelos, imos explicar como modificar a fórmula de Black-Scholes para solucionar algunhas das limitacións expostas.

## 4.2. Modificacións e extensións do modelo de Black-Scholes

Como mencionamos anteriormente, co obxectivo de intentar superar as limitacións descritas na sección anterior, xorden extensións e modificacións da fórmula de Black-Scholes, desenvoltas por diferentes autores. Nesta sección, faremos unha revisión destes novos modelos e as súas vantaxes respecto ao modelo orixinal. Centrarémonos, no caso de facer modificacións ao modelo de Black-Scholes, nas opcións *call*, xa que o razoamento sería análogo para as *put*.

Unha das principais ramas de estudo dos autores posteriores ao modelo de Black-Scholes que traballaron na valoración de opcións foi intentar solucionar o problema da taxa libre de risco cambiante. Neste contexto, temos dous modelos moi semellantes entre sí, que son o modelo de Vasicek (1977) e o modelo de Cox et al. (1985), CIR. Ambos asumen que a taxa libre de risco segue unha ecuación diferencial estocástica da forma:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r f(r(t)) dX_r(t). \quad (4.1)$$

No modelo de Vasicek,  $f(r(t)) = 1$  e no modelo CIR,  $f(r(t)) = \sqrt{r(t)}$ .  $\kappa$  é o coeficiente de reversión á media, é dicir, a velocidade coa que a taxa de interese tende a volver a súa media. En termos financeiros, un  $\kappa$  grande implica que a taxa de interese volve rapidamente a súa media, mentres que un  $\kappa$  pequeno significa que  $r(t)$  tarde máis en regresar a súa media.  $\theta$  é a media a longo prazo da taxa de interese. Estes novos parámetros serán estimados no modelo, mediante métodos como por exemplo o de máxima verosimilitude. Para ver máis en profundidade que significan os termos en cada modelo así como as súas demostracións xerais, pódense consultar os artigos orixinais correspondentes citados anteriormente nos que se desenvolveron estes modelos. Neste traballo limitámonos a explicar como interactúan co modelo de Black-Scholes para a valoración de opcións.

Desta forma teríamos que resolver un sistema de ecuacións diferenciais estocásticas, que constaría da Ecuación (4.1) e da (2.1), coa substitución nesta última de  $\mu$  por  $r(t)$ , xa que, ao supoñer que non hai arbitrxes, a media esperada de retorno dun activo ten que coincidir coa taxa libre de risco. Polo tanto, obtemos:

$$\begin{cases} dS(t) = r(t)S(t) dt + \sigma_S S(t) dX_S(t), \\ dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r f(r(t)) dX_r(t). \end{cases}$$

A solución deste sistema de ecuacións, así como o cálculo da valoración de opcións seguindo este procedemento, excede os obxectivos deste traballo.

Ao longo desta sección atoparémolos co problema de resolver sistemas de ecuacións diferenciais estocásticas bastante frecuentemente. A modo de anotación este tipo de sistemas adoitan resolverse co método de Montecarlo, que consiste en simular un número moi elevado de camiños para as variables estocásticas consideradas no sistema e, dende aí, aproximar unha solución. Un libro de referencia sobre o método de Montecarlo é Glasserman (2004), e, especialmente no terceiro capítulo, trátase a aplicación deste método ao movemento browniano xeométrico se se consideran distintos termos como estocásticos (a volatilidade, a taxa de interese...).

Cabe destacar que nos casos nos que o *hedging* continuo non sexa posible, xa sexa pola existencia de custos de transacción, porque non se permita a venda en curto ou por outro tipo de friccións no mercado, o método de Montecarlo pode ser tamén moi útil á hora de calcular o erro

asociado a unha cobertura discreta. Ademais, tamén existen outros traballos como por exemplo Leland (1985), onde se teñen en conta os custos de transacción e se discuten as consecuencias que teñen na valoración dun *portfolio*.

A parte das modificacións, métodos e modelos propostos que afectan á taxa libre de risco ou a friccións do mercado, outros autores centráronse en intentar atopar a solución respecto ás limitación impostas sobre o activo subxacente. Para rematar este capítulo, imos describir dous modelos moi coñecidos e usados que amplían a aplicabilidade do modelo de Black-Scholes a escenarios máis realistas. Estes son: o modelo de Merton con saltos e o de Heston.

#### 4.2.1. Modelo de Merton con saltos

O modelo con saltos formulado por Merton (1976), ten algunhas interesantes diferenzas respecto ao modelo de Black-Scholes.

Merton observa que, na práctica, hai algúns saltos bruscos na evolución dos prezos dos activos que non se poden modelar asumindo que o prezo segue un movemento browniano xeométrico. Por iso, modifica a Ecuación (2.1) incluíndo un proceso de Poisson.

**Definición 4.1.** Un **proceso de Poisson**,  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ , é un proceso estocástico que cumpre as seguintes propiedades:

1.  $N(0) = 0$
2. Para calquera  $0 \leq s < t$  os incrementos  $N(t) - N(s)$  serán independentes e a súa distribución será unha Poisson de parámetro  $\lambda$ . Denominaremos a  $\lambda$  como a intensidade do proceso de Poisson.

Este proceso modela a cantidade de eventos raros que suceden ao longo do tempo polo que a probabilidade de que na mesma unidade de tempo ocorran dous sucesos é insignificante. Esta definición baséase na exposta en Gallager (1996).

Ademais, en Merton (1973), o autor explica a posibilidade de que o activo subxacente reparta dividendos continuos. Estas modificacións ao modelo de Black-Scholes que fixo Merton resultan nunha ecuación diferencial que describe a evolución do prezo da seguinte maneira:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu - q - \lambda\beta)dt + \sigma_S dX(t) + (Y - 1)dN(t),$$

sendo  $\lambda$ , aplicado a este caso, o número esperado de saltos por unidade de tempo no prezo do activo. Está multiplicada por  $\beta = \mathbb{E}[Y - 1]$ , que é a variación porcentual media condicionada a que se produza un salto.  $q$  é a taxa de dividendos continua pagada polo activo. A variable

aleatoria  $Y - 1$  representa a variación porcentual no prezo durante un salto brusco, modelado polo proceso de Poisson  $N(t)$ , cuxo incremento  $dN(t)$ , toma o valor 1 se se produce un salto no intervalo  $dt$  e 0 se non.

En definitiva, o modelo de Merton adapta o modelo orixinal incorporando o pago de dividendos do activo subxacente e introduce un proceso de saltos complementario ao movemento browniano xeométrico para tratar de captar os saltos bruscos na evolución dos prezos. Merton é pioneiro na introdución de procesos de saltos na modelaxe do prezo dos activos e os seus efectos na valoración de opcións están amplamente estudados. Para un estudo máis detallado da fórmula dunha opción *call* neste contexto ou sobre estes procesos de saltos en xeral, pódese consultar Shreve et al. (2004).

#### 4.2.2. Modelo de Heston

Este modelo formulado por Heston, centrouse en atopar unha solución para opcións cuxa volatilidade non fora constante, como se supón no modelo de Black-Scholes, senón que esta seguira un proceso estocástico. Seguindo unha argumentación similar á feita para os modelos de taxa libre de risco estocástica, o sistema de ecuacións a resolver neste modelo será da forma;

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t) dt + \sqrt{v(t)} S(t) dX_S(t), \\ dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma \sqrt{v(t)} dX_v(t). \end{cases}$$

sendo  $v(t)$  a varianza en  $t$  do prezo do activo e  $\sigma$  a volatilidade da propia varianza.  $\kappa$  é a velocidade coa que a varianza tende a volver a súa media e  $\theta$  a media a longo prazo da varianza (análogo aos modelos Vasicek e CIR).  $X_S(t)$  e  $X_v(t)$  son dous movementos brownianos estándar tales que entre eles teñen unha correlación  $dX_S(t) \cdot dX_v(t) = \rho dt$ .

Como vemos, este modelo é máis completo que o de Black-Scholes, no sentido en que adaptarase mellor ás volatilidades cambiantes dos mercados reais. Ademais disto, o uso deste método non solo ten esta vantaxe. En Heston (1993), o autor calcula unha solución para a valoración de opcións. Empregando métodos como a transformada de Fourier, Heston obtén:

$$C(S, t) = S P_1 - E e^{-r(T-t)} P_2,$$

sendo:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iu \ln E} f_j(u)}{iu} \right) du, \quad j = 1, 2,$$

as probabilidades axustadas que se detallan no artigo antes mencionado.

Como vemos, as solucións non son totalmente fechadas xa que teñen unha integral definida e, polo tanto, será necesario o uso de métodos numéricos (como o Montecarlo mencionado anteriormente) para a súa resolución.

En conclusión, o modelo de Heston constitúe unha ferramenta potente para a valoración de activos, xa que, por un lado, inclúe volatilidade estocástica (máis fiel aos mercados reais que a volatilidade constante do modelo de Black-Scholes) e, por outro lado, ofrece unha solución parcialmente explícita que facilita o cálculo práctico, algo difícil de encontrar en procesos estocásticos.

### 4.3. Conclusións

Este traballo tivo como obxectivo proporcionar unha introdución matemática formal ao modelo de Black-Scholes, unha das ferramentas fundamentais no ámbito da valoración de opcións en estatística financeira.

Partindo duns conceptos financeiros básicos, explicáronse algúns procesos estocásticos. Entre eles destaca o movemento browniano xeométrico, do cal se fixo un análise detallado das converxencias no límite  $dt \rightarrow 0$ . Este estudo xunto co Lema e Itô e unha serie de hipóteses fundamentais, permitiron desenvolver o modelo ata chegar á ecuación diferencial de Black-Scholes. Seguidamente, resolveuse esta ecuación e obtívose unha solución explícita para as opcións europeas, a cal se aplicou nun caso real para mostrar a utilidade práctica do modelo de Black-Scholes.

Visto o modelo básico formulado en Black and Scholes (1973), analizáronse as principais limitacións do modelo, como a asunción de volatilidade constante ou a incapacidade para capturar saltos bruscos na evolución dos prezos, e presentáronse brevemente algúns modelos alternativos e extensións, como os de Merton ou Heston, que intentan solucionar estes problemas que se atopan nos mercados financeiros reais. Cabe destacar que, aínda coas súas limitacións, o modelo de Black-Scholes segue sendo referencia na valoración de opcións actual.

Como posibles liñas de traballo futuras, poderíase facer unha comparación entre resultados obtidos polo modelo de Black-Scholes cos obtidos co modelo de Heston ou con métodos como o Montecarlo, mencionados previamente. Isto permitiría avaliar a precisión práctica do modelo de Black-Scholes fronte a métodos máis sofisticados na actualidade.

# Bibliografía

- Alsmeyer, G. (2011). Chebyshev's inequality. In *International Encyclopedia of Statistical Science*, pages 239–240. Springer Berlin Heidelberg.
- Artin, E. (2015). *The gamma function*. Courier Dover Publications.
- Bernstein, P. L. (2012). *The power of gold: the history of an obsession*. John Wiley & Sons.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.
- Coelen, N. (2002). *Black-Scholes Option Pricing Model*. Trinity University.
- Comisión Nacional del Mercado de Valores (2020). Prohibición temporal de creación o incremento de posiciones cortas netas. <https://www.cnmv.es/WebServices/VerDocumento/Ver?t=%7B97e09be9-60d8-4bda-8f6f-f1c215885fd3%7D>. Consultado o 27 de xuño de 2025.
- Comisión Nacional del Mercado de Valores (2025). Productos derivados. <https://www.cnmv.es/portal/inversor/derivados?lang=es>. Consultado o 18 de xuño de 2025.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A., et al. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407.
- Díez, A. G. (2022). El teorema central del límite. Trabajo de Fin de Grao <https://minerva.usc.es/rest/api/core/bitstreams/f2e6c85d-71ad-4954-a72c-151dc48edbcc/content>.
- FinanceCharts (2025). Apple (aapl) stock performance. <https://www.financecharts.com/stocks/AAPL/performance>. Consultado o 30 de xuño de 2025.
- Fontalvo, D. E. S. (2023). Soluciones clásicas de la ecuación unidimensional del calor. Trabajo de grao <https://repositorio.unicordoba.edu.co/server/api/core/bitstreams/80a62002-bfcc-453c-a69c-c9844c9ba7d9/content>.
- Gallager, R. G. (1996). Poisson processes. In *Discrete stochastic processes*, pages 31–55. Springer.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

- Google Finance (2025). Nvidia corp. (nvda) stock price & news. <https://www.google.com/finance/quote/NVDA:NASDAQ>. Consultado o 26 de xuño de 2025.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2):327–343.
- Karatzas, I. and Shreve, S. (2012). *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media.
- Klemkosky, R. C. and Resnick, B. G. (1979). Put-call parity and market efficiency. *The Journal of Finance*, 34(5):1141–1155.
- Kurtzleben, D. (2025). Trump announces reciprocal tariffs on dozens of nations and sweeping 10% tariff. <https://www.npr.org/2025/04/02/nx-s1-5345802/trump-tariffs-liberation-day>. Consultado o 1 de maio de 2025.
- Lawler, G. F. (2010). Stochastic calculus: An introduction with applications. *American Mathematical Society*, pages 51–54.
- Lawler, G. F. and Limic, V. (2010). *Random walk: a modern introduction*, volume 123. Cambridge University Press.
- Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. *The journal of finance*, 40(5):1283–1301.
- Lettau, M. and Ludvigson, S. C. (2010). Measuring and modeling variation in the risk-return trade-off. *Handbook of financial econometrics: Tools and techniques*, 1:617–690.
- MarketBeat (2025). NVIDIA (NVDA) Options Chain & Prices. <https://www.marketbeat.com/stocks/NASDAQ/NVDA/options/>. Consultado o 26 de xuño de 2025.
- Medina, R. T. and Pinzón, H. Y. R. (2010). Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica. *Comunicaciones en Estadística*, 3(1):79–98.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1-2):125–144.
- Mobius, M. (2012). *Bonds: An introduction to the core concepts*, volume 1. John Wiley & Sons.
- Myneni, R. (1992). The pricing of the american option. *The Annals of Applied Probability*, 2(1):1–23.

- R Core Team (2025). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Segendorf, B. (2014). What is bitcoin. *Sveriges Riksbank Economic Review*, pages 71–86.
- Shapiro, A. (2019). Statistical inference of semidefinite programming. *Mathematical Programming*, 174(1):77–97.
- Shreve, S. E. et al. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11. Springer.
- U.S. Department of the Treasury (2025). Daily Treasury Yield Curve Rates. [https://home.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/TextView?type=daily\\_treasury\\_yield\\_curve&field\\_tdr\\_date\\_value\\_month=202506](https://home.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/TextView?type=daily_treasury_yield_curve&field_tdr_date_value_month=202506). Consultado o 26 de xuño de 2025.
- van der Vaart, A. W. (2000). *Asymptotic Statistics*, volume 3. Cambridge University Press.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188.
- Wilmott, P., Howison, S., and Dewynne, J. (1995). *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press.