



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución ós conxuntos fractais

Adrián Blanco Aguiar

2023–2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución ós conxuntos fractais

Adrián Blanco Aguiar

07/24

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemático

Título: Introducción ós conxuntos fractais

Director: Fernando Adrián Fernández Tojo

Breve descripción do contido

Un conxunto fractal é unha forma xeométrica que contén unha estrutura detallada a escalas arbitrariamente pequenas, xeralmente cunha dimensión fractal que excede estritamente a dimensión topolóxica e cun aspecto que é similar a diferentes escalas. Neste traballo estudaremos as propiedades elementais dos fractais, facendo fincapé na súa dimensión e utilizando ferramentas de teoría da medida. Tamén construiremos certos tipos de fractais e exploraremos as súas aplicacións.

Índice general

Resumen	IV
1. Introducción	1
2. Dimensións fractais	7
2.1. Dimensión topolóxica	8
2.2. Dimensión de conteo de caixas	9
2.3. Propiedades e problemas da dimensión de conteo de caixas	16
2.4. Dimensión de Hausdorff	21
2.5. Propiedades e problemas da dimensión de Hausdorff	26
2.6. Relación entre a dimensión de conteo de caixas e a dimensión de Hausdorff	29
3. Sistemas iterativos de funcións (IFS)	33
3.1. Dimensión de conxuntos autosemellantes	41
4. Algunhas aplicacións dos fractais	45
4.1. Movemento browniano	45
4.2. Antenas fractais	52
4.3. Outras aplicacións	55
A. Apéndice	57
A.1. Código para debuxar o conxunto de Mandelbrot	57
A.2. Código da función para xerar o copo de neve de Koch	58

A.3. Código para calcular a dimensión de conteo de caixas	59
A.4. Código para o cálculo da dimensión de conteo de caixas do copo de neve de Koch . .	64
A.5. Código para a representación da curva de Koch a través do seu IFS asociado	66
A.6. Código para computar os métodos de obtención do atractor dun IFS	68
A.7. Código de Wolfram Mathematica para representar a condición do conxunto aberto .	70
A.8. Código de MATLAB para xeral un movemento browniano 2-dimensional	70

Resumen

Un conxunto fractal é aquel que posúe unha dimensión fractal que excede á dimensión topolóxica deste. Algúns presentan autosemellanza, sendo idénticos ao orixinal nos detalles a menor escala. Exploraremos que entendemos por dimensión fractal, dando exemplos de estas e calculándoa para algún conxunto, así como expoñendo as vantaxes e problemas que presenta cada unha. Despois, centrarémonos nos fractais que presentan autosemellanza, que son de gran interese a nivel práctico. Definiremos os sistemas iterativos de funcións e daremos métodos para representar estes fractais, así como formas de calcularlles a súa dimensión fractal de forma sinxela. Finalmente, exploraremos algunhas aplicacións destes conxuntos, principalmente os movementos brownianos, pero tamén aplicacións en antenas fractais, compresión de imaxe e arte na arte.

Abstract

A fractal set is one that possesses a fractal dimension exceeding its topological dimension. Some exhibit self-similarity, being identical to the original in smaller scale details. We will explore what we understand by fractal dimension, providing examples of these and calculating it for some sets, as well as discussing the advantages and issues presented by each. Then, we will focus on fractals that exhibit self-similarity, which are of great practical interest. We will define iterative function systems and provide methods for representing these fractals, as well as ways to easily calculate their fractal dimension. Finally, we will explore some applications of these sets, primarily Brownian motion, but also applications in fractal antennas, image compression, and even in art.

1. Introducción

Ao longo da historia da matemática a maioría de estudos estiveron centrados en obxectos o máis regulares posibles, como é o caso da xeometría euclídea ou das funcións continuas ou diferenciables. O estudo destes obxectos foi de gran interese para o desenvolvemento humano, sendo unha ferramenta clave á hora de construír unha sociedade con mellor calidade de vida, progresando no avance tecnolóxico, construción de cidades, e en moitos máis campos.

Aínda así, matemáticos como Cantor ou Peano atoparon algún obxecto peculiar dentro da matemática. Por unha parte, o primeiro deu nome a un conxunto amplamente coñecido, descuberto en 1875 por Henry John Stephen Smith [30], e posteriormente mencionado por Cantor en 1882 [13]. Este conxunto obtense a partir do intervalo $[0,1]$ da recta real, no que de cada vez lle quitamos un cacho para quedarnos con dous intervalos novos disxuntos. Na primeira iteración, dividimos o intervalo $[0,1]$ en tres anacos iguais e eliminamos o do medio, quedándonos así con $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, formado polos dous intervalos disxuntos restantes. Dividimos agora cada intervalo disxunto en outras ter partes, eliminando a do medio, obtendo $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Seguindo esta lóxica, obtemos E_k como os 2^k intervalos disxuntos obtidos deste xeito (ver Figura 1.1). Así, o **conxunto de Cantor** defínese como

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

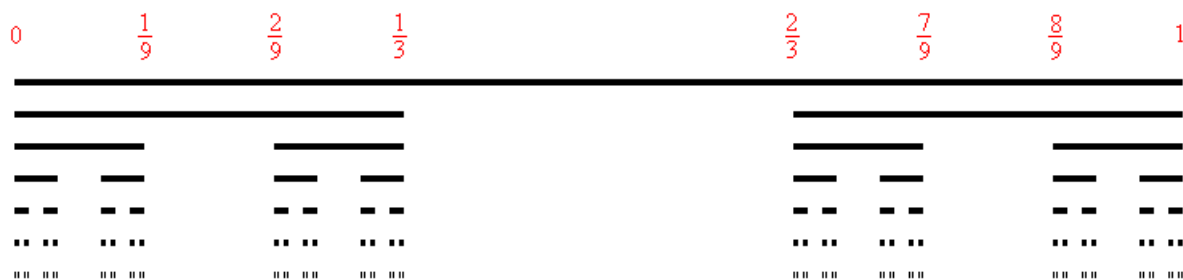


Fig. 1.1. Primeiros conxuntos E_k para formar o conxunto de Cantor [5].

Este conxunto, aínda que podería parecer que non contén números debido á gran cantidade deles que se eliminaron do intervalo inicial, ten infinitos puntos. É máis, para cada punto do conxunto, existen infinitos puntos do conxunto en calquera veciñanza del. Isto fai do conxunto de Cantor un

obxecto peculiar, xa que se atopa a medio camiño entre ser un conxunto de puntos illados e un intervalo.

Por outra parte, Peano descubriu unha curva que enchía o plano en 1890 [28]. Esta curva tamén foi creada con un argumento recursivo, tal e como se mostra na Figura 1.2.

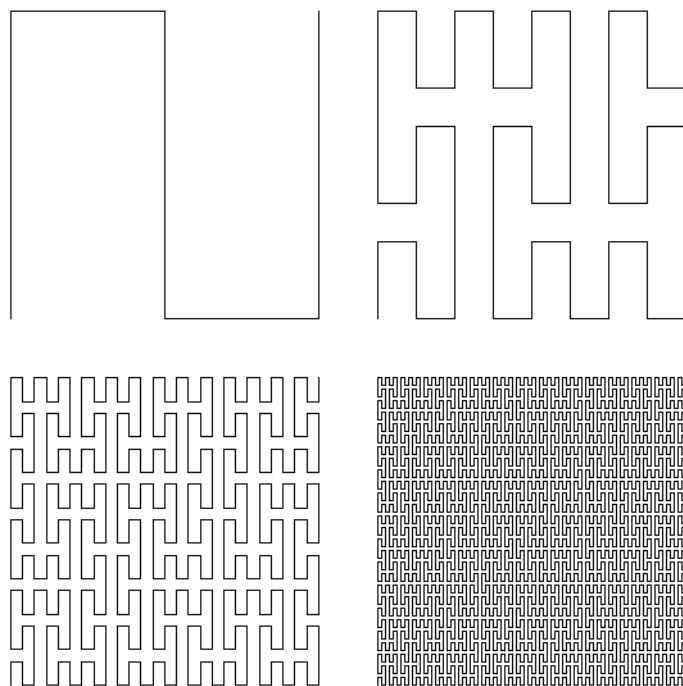


Fig. 1.2. Primeiras iteracións da curva de Peano [3]

Estes casos foron tratados como casos patolóxicos e, aínda que parecían curiosos, non despertaron o interese para ser estudados. Este tipo de obxectos “ásperos” (termo que mellor define a natureza fractal segundo comenta Mandelbrot en [24]) seguiron a causar situacións estrañas. Unha das máis memorables é a coñecida como **paradoxa da liña de costa**. Esta paradoxa (que foi inicialmente percibida por Hugo Steinhaus [31]) ven a dicir que, se medimos a liña de costa de Gran Bretaña cunha “regra” de 100 quilómetros, a lonxitude da costa será menor que se a medimos cunha “regra” de 50 quilómetros (ver Figura 1.3). Se seguimos reducindo o tamaño da “regra” que empregamos para medir, a liña de costa cada vez terá máis lonxitude, parecendo que o valor desta tende a infinito. Isto débese a que cada vez que reducimos o tamaño co que medimos, somos capaces de medir máis asperezas da costa, dende novos cabos ate novas rochas, pedras, areas, átomos... Estas complicacións expuxeron a necesidade dunha nova forma de modelar as formas da natureza, que cada vez parecían afastarse máis da xeometría clásica para converterse en algo caótico, sen seguir unha orde.

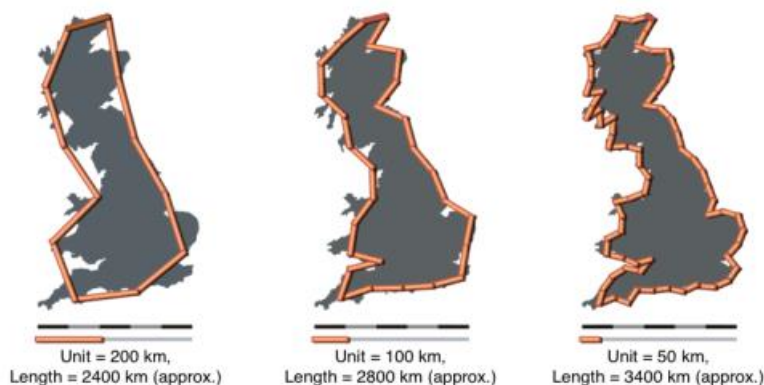


Fig. 1.3. Medición da liña de costa de Gran Bretaña con “regras” de diferente lonxitude [18].

Benoit Mandelbrot, amplamente coñecido pola súa enorme contribución no estudo dos fractais, foi dos primeiros que centrou os seus esforzos en estudar estas “patoloxías da matemática”. Mandelbrot, ao fixarse nas formas ásperas que seguía a natureza, quería cuantificar “canto de áspero” é un obxecto. Con ese fin, empregando a teoría da medida, pódense construír certas dimensións que cuantifiquen o anterior. Tamén construíu o coñecido **conxunto de Mandelbrot**, un conxunto que, a pesar de ser obtido a partir dunha expresión aparentemente moi sinxela, presenta patróns moi complexos a escalas arbitrariamente pequenas. Este conxunto defínese no plano complexo como os números $c \in \mathbb{C}$ tales que a función

$$f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c,$$

non diverxe a infinito ao ser iterada comezando en $z = 0$, isto é, ao manterse a sucesión

$$f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0))), \dots$$

acoutada en valor absoluto. Esta expresión tan sinxela da lugar a un conxunto moi complexo, representado na Figura 1.4. Podemos observar na Figura 1.4(a) o conxunto visto con menos ampliación, e vemos na Figura 1.4(b) que, conforme nos vamos acercando, van xurdindo novos patróns complexos. A representación faise habitualmente con diferentes cores dependendo da velocidade de converxencia do número complexo c . O lector pode empregar o exposto no Código A.1 de MATLAB, un software de cálculo numérico que nos será de gran utilidade ao longo do traballo, e, sen máis que cambiar as cores como se desexe, personalizar a representación deste conxunto.

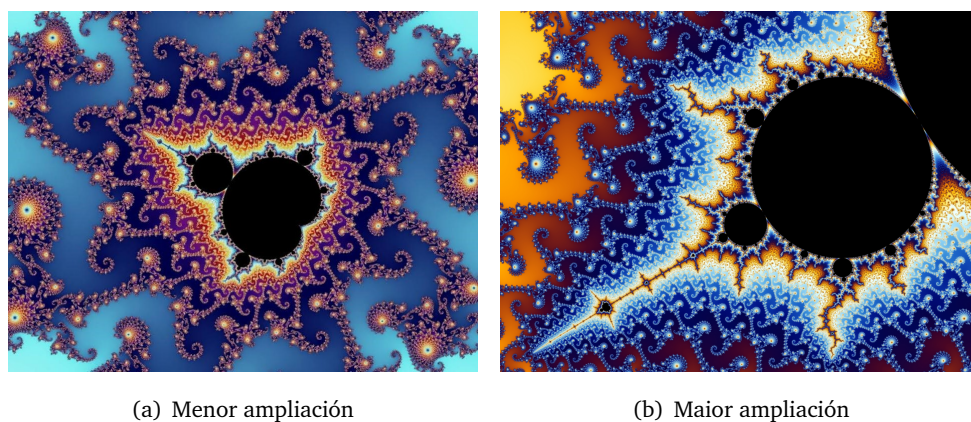


Fig. 1.4. Representación do conxunto de Mandelbrot con diferentes niveis de ampliación [25].

Un fractal, polo tanto, non será máis que un conxunto que é máis áspero do que cabería esperar del. Isto cuantifícase coa súa dimensión fractal, que pode tomar valores fraccionarios. Entón, se a dimensión usual, que só toma valores enteiros, difire da dimensión fractal, diremos que tal obxecto é un fractal.

Adicionalmente, certos fractais caracterízanse por presentar similitudes a diferentes escalas. Se nos fixamos, por exemplo, na estrutura da coliflor (en particular na especie *Brassica oleracea*, comunemente coñecida como *Romanesco*) da Figura 1.5, podemos ver que podemos extraer partes dela que parecen a coliflor orixinal enteira, pero máis pequena. Con ese cacho, podemos facer o mesmo e así case indefinidamente. A esta característica chamarémola **autosemellanza** e xogará un papel central no estudo dos fractais.



Fig. 1.5. Brassica oleracea, Romanesco [9].

Ao longo do noso estudo, empregaremos un fractal coñecido como **curva de Koch** para expoñer certos conceptos, que se constrúe a partir do intervalo $[0,1]$, o cal se divide en tres anacos iguais, engádense dous segmentos de recta que conformen un triángulo equilátero co do medio e elimínase tal anaco. Séguese este proceso indefinidamente con cada segmento de recta obtido para chegar á curva de Koch. Da mesma forma, podemos considerar o **copo de neve de Koch**, que se obtén sen máis que pegar tres curvas de Koch. O proceso de creación destes fractais ilústrase na Figura 1.6. Se o lector quere xerar por si mesmo este segundo fractal, pode empregar o Código A.2 de MATLAB.

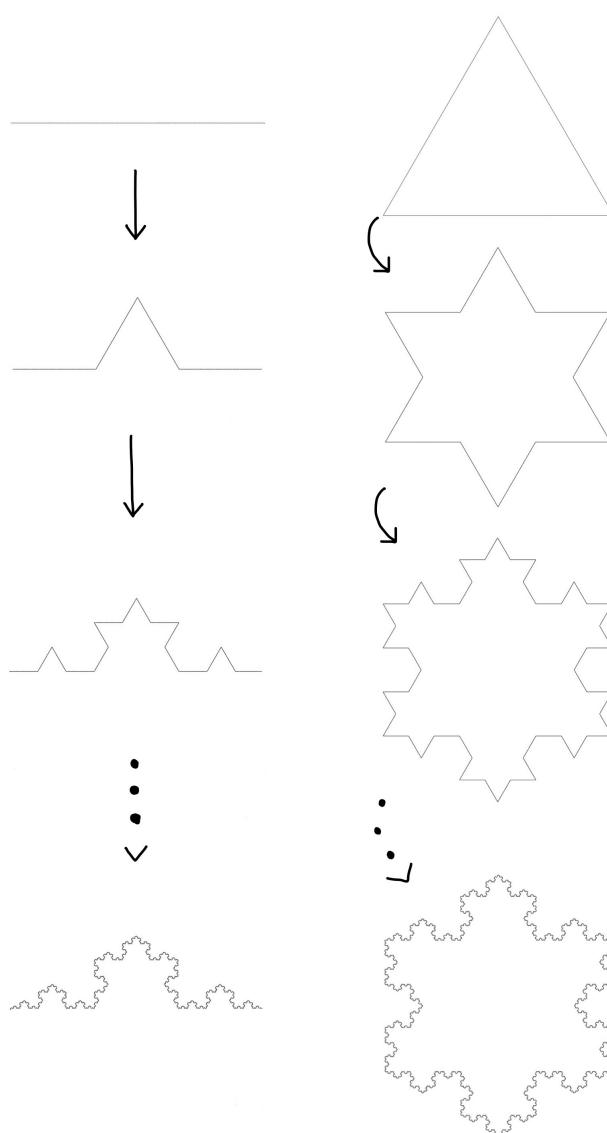


Fig. 1.6. Construción da curva de Koch e do copo de neve de Koch (imaxes modificadas das obtidas co Código A.2).

O traballo seguirá, en gran medida, a forma que empregou Falconer en [16] para expoñer os conceptos, así como [19], que segue a mesma liña. Tamén é de gran interese o traballo feito por Edgar en [14], que amosa unha forma alternativa de expoñer algún dos conceptos expostos neste traballo. Adicionalmente, unha das primeiras publicacións extensas sobre o estudo dos fractais ven da man de Falconer en [17], que xorde pouco despois de que Mandelbrot lle dera visibilidade a este tipo de obxectos a finais da década dos setenta e principios da dos oitenta.

2. Dimensións fractais

Para comezar a estudar os conxuntos fractais, definiremos diferentes dimensións sobre un conxunto F para así poder caracterizalos. Non existe unha dimensión universal que sexa mellor ca outra, a utilidade das diferentes dimensións ven dada fundamentalmente por intuición e bo funcionamento na experiencia, e mentres unha dimensión pode ser boa nuns casos, será mala noutros. Aínda así, existen algunhas propiedades que nos poden interesar ao considerar unha dimensión. Segundo remarca Falconer en [16] e, posteriormente, se amplía en [19], dados $E, F \subset \mathbb{R}^n$, entre estas propiedades resaltamos:

- **Monotonía.** Se $E \subset F$ entón $\dim E \leq \dim F$.
- **Rango de valores.** Se $F \subset \mathbb{R}^n$ acoutado e non vacío, entón $0 \leq \dim F \leq n$.
- **Estabilidade finita.** $\dim(E \cup F) = \max\{\dim E, \dim F\}$.
- **Estabilidade numerable.** $\dim(\bigcup_{i \in I} F_i) = \sup_{i \in I} \{\dim F_i\}$ para toda familia numerable $\{F_i\}_{i \in I}$ de conxuntos $F_i \subset \mathbb{R}^n$.
- **Dimensión da clausura.** Existe F tal que $\dim F \neq \dim \bar{F}$, onde \bar{F} denota a clausura de F .
- **Invarianza de Lipschitz.** $\dim f(F) = \dim F$ se f é unha transformación bi-lipschitziana.
- **Invarianza xeométrica.** $\dim f(F) = \dim(F)$ se f é unha isometría.
- **Nula en conxuntos numerables.** $\dim(F) = 0$ se F é un conxunto numerable.
- **Dimensión máxima en conxuntos abertos.** $F \subset \mathbb{R}^n$ aberto implica que $\dim F = n$.

Observación 2.1. Está claro que a invarianza de Lipschitz implica a invarianza xeométrica, xa que unha transformación xeométrica é unha transformación bi-lipschitziana.

Neste capítulo comezaremos por definir a dimensión topolóxica dun conxunto, que nos fará de referencia para comparala co resto de dimensións. Respecto ás dimensións fractais, seguiremos coa dimensión de conteo de caixas, a cal ten o inconveniente de non cumprir a propiedade de estabilidade numerable nin a de ser nula en conxuntos numerables. Estes inconvenientes poden ser solventados coa dimensión de Hausdorff a cal, sendo máis difícil de calcular na práctica, ten mellores propiedades teóricas.

2.1. Dimensión topolóxica

Se consideramos un conxunto F da xeometría elemental (recta, plano ...) sabemos que tales conxuntos terán asociados unha dimensión topolóxica. Por exemplo, un punto ten dimensión 0, unha recta ten dimensión 1 e un plano ten dimensión 2. Este concepto foi inicialmente introducido formalmente por Eduard Čech, inspirado por Henri Lebesgue, mais centrarémonos na definición moderna de dimensión topolóxica. Existen diversas dimensións topolóxicas, pero aquí exporemos a, posiblemente, máis importante delas, coñecida como dimensión de cobertura ou de Lebesgue. Existen outras dimensións topolóxicas, como a dimensión indutiva, mais non é tan relevante como a exposta anteriormente. O lector pode consultar máis sobre esta dimensión en [14, Section 3.4] ou en [15, Section 1.6].

Intuitivamente, a dimensión topolóxica dun conxunto será n se podemos recubrir tal conxunto con conxuntos abertos o suficientemente pequenos como para que só intersequen $n + 1$ de cada vez. Por exemplo, se temos un conxunto 1-dimensional como a circunferencia da Figura 2.1(a), poderemos recubrilo tal e como se ve na figura por conxuntos abertos que só intersecan 2 de cada vez. No caso do cuadrado (cheo) da Figura 2.1(b), faranos falta que os conxuntos abertos de cobertura intersequen cando menos 3 de cada vez. Por esto mesmo, a circunferencia terá dimensión topolóxica 1 e o cuadrado (cheo), 2.

Seguindo a intuición anterior e tal e como se expón en [15], para definir formalmente o concepto de dimensión topolóxica, introduciremos as seguintes definicións.

Definición 2.2. Unha **cobertura aberta** dun espazo topolóxico X é unha familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de conxuntos abertos tales que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Definición 2.3. A **orde** dunha cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ é o menor número m tal que cada punto do espazo pertence como máximo a m conxuntos abertos.

Definición 2.4. Un **refinamento** dunha cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ é outra cobertura aberta $\{V_j\}_{j \in J}$ tal que cada V_j está contido en algún U_i .

Dadas estas definicións, podemos definir agora o que entendemos por dimensión topolóxica.

Definición 2.5. A **dimensión topolóxica** dun espazo topolóxico X é o mínimo valor n tal que cada cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X ten un refinamento $\{V_j\}_{j \in J}$ que é de orde $n + 1$.

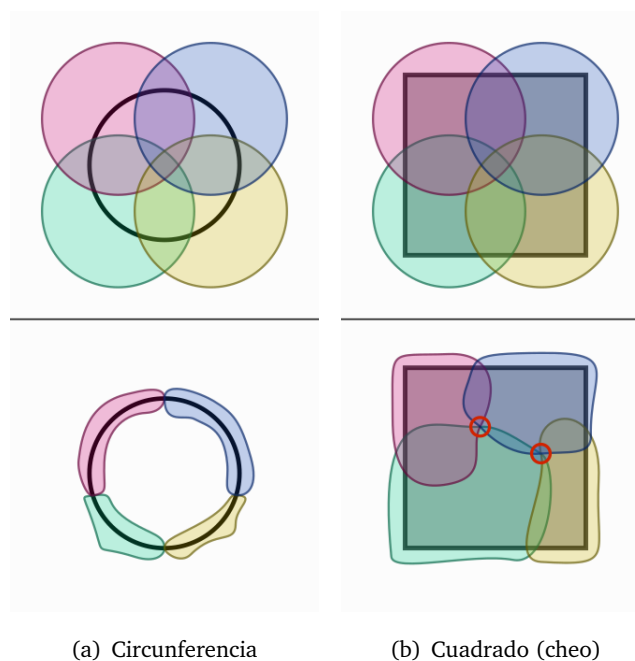


Fig. 2.1. Refinamentos de cobertura dun conxunto 1-dimensional e dun conxunto 2-dimensional [8].

Para o noso propósito, non afondaremos demasiado na dimensión topolóxica dun conxunto, xa que o noso obxectivo é afondar na dimensión fractal. Se o lector ten interese en indagar máis pode consultar [14, Section 3.2], así como [15, Section 1.6]. Teremos, eso sí, en conta que, por exemplo un conxunto de puntos disxuntos terá dimensión 0, que unha unión finita de curvas terá dimensión 1 ou que un conxunto aberto do plano terá dimensión 2.

2.2. Dimensión de conteo de caixas

Tras un pequeno apuntamento sobre a dimensión topolóxica dun conxunto, comezaremos por definir a dimensión de conteo de caixas, que será a primeira dimensión fractal que empregaremos. Calcularemos a dimensión de conteo de caixas de algún conxunto que, como veremos, terán unha dimensión de conteo de caixas estritamente maior que a súa dimensión topolóxica.

A dimensión de conteo de caixas resalta pola súa sencilla e intuitiva formulación, así como pola facilidade de calculala computacionalmente na práctica. Esta dimensión baséase na idea intuitiva de, dado un $\delta > 0$, recubrir o conxunto do cal queremos saber a súa dimensión de conteo de caixas pola menor cantidade de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ e ver como se comporta a

cantidad necesaria destes conxuntos de recubrimento cando $\delta \rightarrow 0$.

Comezaremos por definir os conceptos de diámetro dun conxunto e de δ -cobertura:

Definición 2.6. Diremos que o **diámetro** dun conxunto non vacío $A \subset \mathbb{R}^n$ é o número real

$$|A| := \sup \{|x - y| : x, y \in A\} \in [0, \infty].$$

Definición 2.7. Unha **δ -cobertura** é unha colección numerable $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

Entón, se consideramos un subconxunto F do plano real, tomando un $\delta > 0$, denotamos como $N_{\delta}(F)$ ao menor n tal que existe unha colección $\{U_i\}_{i=1}^n$ de conxuntos a cal é unha δ -cobertura de F . Para calcular a dimensión de F teremos que ver como se comporta $N_{\delta}(F)$ cando $\delta \rightarrow 0$. Para eso, se $N_{\delta}(F)$ satisfai (cando menos aproximadamente) que

$$N_{\delta}(F) \simeq c\delta^{-s}$$

para algunhas constantes positivas c e s , teremos que, tomando logaritmos

$$\log N_{\delta}(F) \simeq \log c - s \cdot \log \delta \iff s \simeq \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} + \frac{\log c}{\log \delta},$$

o que nos permite calcular s da seguinte forma:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta}.$$

Con isto, diremos que F ten dimensión de conteo de caixas igual a s .

Esta intuición motívanos a definir a dimensión de conteo de caixas da seguinte forma:

Definición 2.8. Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ non vacío e $N_{\delta}(F)$ o menor n tal que existe unha colección $\{U_i\}_{i=1}^n$ de conxuntos a cal é unha δ -cobertura de F . Entón, definiremos a **dimensión de conteo de caixas inferior e superior** respectivamente como

$$\underline{\dim}_{\text{B}}(F) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_{\text{B}}(F) := \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta}.$$

Se ambos valores coinciden, diremos que a **dimensión de conteo de caixas** de F será

$$\dim_{\text{B}}(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta}.$$

Observación 2.9. Teñamos en conta que, ao tomar o límite cando δ tende a cero, estamos considerando deltas o suficientemente pequenos como para que $-\log \delta$ sexa estrictamente positivo. Así mesmo, só nos referiremos á dimensión de conteo de caixas de conxuntos acoutados e non vacíos, para non ter problemas con “ $\log 0$ ” ou con “ $\log \infty$ ”.

A gran vantaxe desta definición de dimensión é a facilidade de ser calculada empíricamente. Aínda así, non cumpre algunhas das propiedades desexadas para unha dimensión. Veremos algunhas das propiedades que non cumpre, para o que precisaremos das seguintes definicións e resultados. Comezaremos por caracterizar $N_\delta(F)$ para así ter diferentes formas para poder calculalo.

Definición 2.10. Sexa $\delta > 0$, chamaremos **δ -malla en \mathbb{R}^n** á familia de conxuntos da forma

$$[k_1\delta, (k_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [k_n\delta, (k_n + 1)\delta], \text{ donde } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$$

Teorema 2.11. Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. $N_\delta(F)$ é, equivalentemente,

- (I) o menor número de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ que recubren F ;
- (II) o menor número de bolas pechadas de raio δ que recubren F ;
- (III) o menor número de cubos de lado δ que recubren F ;
- (IV) o número de cubos dunha δ -malla que intersecan a F ;
- (V) o maior número de bolas de raio δ disxuntas con centro en F .

Demostración. ((I) \iff (II)) Sexa $N_\delta(F)$ o menor número de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ que recubren F e $M_\delta(F)$ o menor número de bolas pechadas de raio δ que recubren F . Por un lado, $N_\delta(F) \leq M_\delta(F)$, xa que unha colección de bolas de raio δ que recubren F é, en particular, unha colección de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ . Por outro lado, $M_\delta(F) \leq N_\delta(F)$, xa que, dado un $U \in \{U_i\}_{i \in I}$, con $\{U_i\}_{i \in I}$ unha colección de conxuntos de raio menor ou igual que δ que recubre F , tense que sempre existirá unha bola pechada $B[\delta] \subset \mathbb{R}^n$ de diámetro δ tal que $U \subset B[\delta]$ por ser U de diámetro menor ou igual que δ . Polo tanto, $N_\delta(F) = M_\delta(F)$.

((I) \iff (III)) Sexa $N_\delta(F)$ o menor número de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ que recubren F e $M_\delta(F)$ o menor número de cubos de lado δ que recubren F . Por unha banda, temos que o diámetro dun cubo de lado δ en \mathbb{R}^n é $\delta\sqrt{n}$, polo que $N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq M_\delta(F)$, por ser a cobertura por estes cubos unha cobertura particular por conxuntos de diámetro menor ou igual que $\delta\sqrt{n}$. Por outra banda, como calquera conxunto de diámetro menor ou igual que δ está contido en 3^n cubos, tense que $M_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$. Tomando logaritmos nas dúas desigualdades, combinándoas

e dividindo entre $-\log \delta$,

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}}{-\log \delta} = \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}}{-\log \delta \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}}{-\log \delta \sqrt{n} + \log \sqrt{n}} \leq \frac{M_{\delta}(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 3^n + \log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} = \frac{\log 3^n N_{\delta}(F)}{-\log \delta},$$

polo que, tomando límites cando $\delta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta \sqrt{n}} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_{\delta}(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_{\delta}(F)}{-\log \delta}.$$

Así, a dimensión de conteo de caixas calculada empregando $N_{\delta}(F)$ coincide coa calculada con $M_{\delta}(F)$.

((I) \iff (IV)) Sexa $N_{\delta}(F)$ o menor número de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ que recubren F e $M_{\delta}(F)$ o número de cubos da δ -malla que intersecan a F . Temos que o diámetro destes cubos en \mathbb{R}^n é $\delta\sqrt{n}$, polo que, ao formar estes cubos unha cobertura de $M_{\delta}(F)$ conxuntos de diámetro menor ou igual que $\delta\sqrt{n}$, temos que $N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq M_{\delta}(F)$. Por outro lado, temos que, como calquera conxunto de diámetro menor ou igual que δ está contido en 3^n cubos, $M_{\delta}(F) \leq 3^n N_{\delta}(F)$. Tendo isto e análogamente á equivalencia anterior, tomando logaritmos nas dúas desigualdades, combinándoas e dividindo entre $-\log \delta$,

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}}{-\log \delta} = \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}}{-\log \delta \sqrt{n} + \log \sqrt{n}} \leq \frac{M_{\delta}(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 3^n + \log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} = \frac{\log 3^n N_{\delta}(F)}{-\log \delta},$$

polo que, tomando límites cando $\delta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta \sqrt{n}} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_{\delta}(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_{\delta}(F)}{-\log \delta}.$$

Así, a dimensión de conteo de caixas calculada empregando $N_{\delta}(F)$ coincide coa calculada con $M_{\delta}(F)$.

((I) \iff (V)) Sexa $N_{\delta}(F)$ o menor número de conxuntos de diámetro menor ou igual que δ que recubren F e $L_{\delta}(F)$ o maior número de bolas disxuntas de raio δ con centro en F . Denotemos por $\{B_i\}_{i=1}^{L_{\delta}(F)}$ ditas bolas. Entón, sexa $x \in F$, existirá un $i = 1, \dots, L_{\delta}(F)$ tal que a distancia de x a B_i sexa menor que δ . De non ser así, poderíamos engadir a bola de centro x e raio δ ($B(x, \delta)$) á nosa colección de bolas de centro en F e raio δ disxuntas, polo que $L_{\delta}(F)$ deixaría de ser o maior número destas bolas. Entón, se consideramos as $L_{\delta}(F)$ bolas concéntricas con $B_i, i = 1, \dots, L_{\delta}(F)$, pero con raio 2δ , teremos que tal colección de bolas recubre F , así que $N_{4\delta}(F) \leq L_{\delta}(F)$. Por outro lado, sexa $\{U_i\}_{i=1}^k$ unha colección de k conxuntos de diámetro menor ou igual que δ que recubren F . Consecuentemente, o centro de cada bola estará en algún dos U_i , polo que cada B_i contén polo menos a un U_i . Por seren $B_i, i = 1, \dots, L_{\delta}(F)$, disxuntas dúas a dúas, haberá, polo menos, tantos U_i como B_i , polo que para calquera cantidade k de conxuntos de raio menor ou igual que δ que recubren F , terase que $L_{\delta}(F) \leq k$. En particular, $L_{\delta}(F) \leq N_{\delta}(F)$. Realizando o mesmo procedemento da equivalencia anterior (tomar logaritmos, combinar desigualdades e dividir por $-\log \delta$),

$$\frac{\log N_{4\delta}(F)}{\log 4 - \log 4\delta} \leq \frac{\log L_{\delta}(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta},$$

tomando límites cando $\delta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{4\delta}(F)}{-\log 4\delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log L_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log L_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Entón, é indiferente calcular a dimensión de conteo de caixas con $L_\delta(F)$ ou con $N_\delta(F)$. ■

As caracterizacións equivalentes anteriores serán de utilidade dependendo da situación, sendo mellor algunha que outra en certos casos. En particular, a caracterización (IV) será de gran interese práctico xa que, definindo unha δ -malla e vendo cantos dos seus cubos intersecan ao conxunto de interese, podemos ver como crece $\log N_\delta(F)$ con respecto a $-\log \delta$ para calcular a dimensión de conteo de caixas do conxunto.

O seguinte lema será de gran interese á hora de calcular a dimensión de conteo de caixa de algún conxunto, como o conxunto de Cantor ou o triángulo de Sierpinski:

Lema 2.12. *Para calcular $\dim_{\mathbb{B}}(F)$ será suficiente con considerar unha sucesión decrecente $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de modo que $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ para algún $c \in (0,1)$.*

Demostración. Sexa $\delta_{k+1} \leq \delta \leq \delta_k$. Temos que,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{\log c - \log \delta_{k+1}},$$

polo que, tomando límites,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

A outra desigualdade séguese trivialmente de que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \sup \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} : \{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0 \text{ decrecente} \right\}.$$

■

Observación 2.13. Na práctica será de interese considerar $\delta_k = c^n$.

Exemplo 2.14. Podemos calcular de maneira sinxela a dimensión de conteo de caixas do copo de neve de Koch (K), o cal se pode ver na Figura 2.2. Para elo, empregaremos un recubrimento do mesmo por bolas pechadas de diámetro δ para calcular $N_\delta(K)$ en cada iteración. Para cada iteración k teriamos:

$$\begin{array}{lll} k = 1, & \delta = \frac{1}{3}, & \log N_\delta(K) = 12, \text{ Figura 2.2 arriba dereita,} \\ k = 2, & \delta = \frac{1}{9}, & \log N_\delta(K) = 48, \text{ Figura 2.2 abaixo esquerda,} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 k = 3, & \delta = \frac{1}{27}, & \log N_\delta(K) = 192, \text{ Figura 2.2 abaixo dereita,} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 k = n, & \delta = \frac{1}{3^n}, & \log N_\delta(K) = 3 \cdot 4^n, n \in \{1, 2, \dots\}.
 \end{array}$$

Así, podemos calcular a dimensión de conteo de caixas sen máis que substituír na fórmula da Definición 2.8:

$$\dim_B(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 \cdot 4^n}{-\log \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3}{\log 3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619.$$

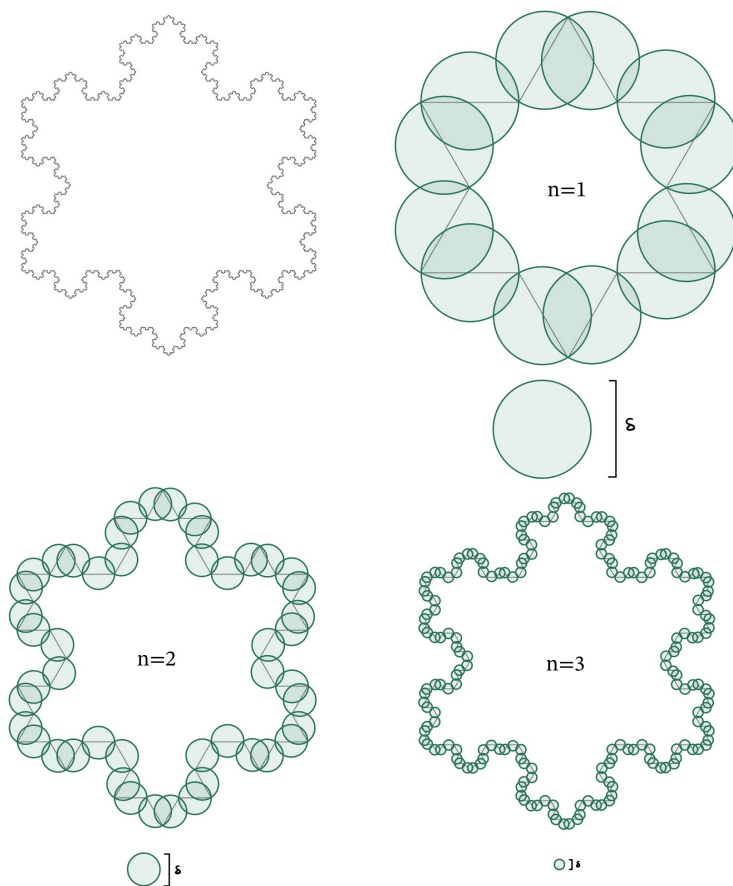


Fig. 2.2. Copo de neve de Koch e as súas coberturas por bolas pechadas con diferentes números de iteracións (n) (imaxes inspiradas no vídeo [27]).

Exemplo 2.15. Para ilustrar a gran utilidade da dimensión de conteo de caixas por ser sinxela de estimar computacionalmente, estimaremos a dimensión de conteo de caixas do copo de neve de Koch empregando a caracterización (IV) do Teorema 2.11. Empregaremos MATLAB, un software de cálculo numérico moi útil para o noso propósito.

Se o lector está interesado no código empregado, pode atopalo no Apéndice A. O proceso computacional sería o seguinte:

- (I) Xerar a aproximación do copo de neve de Koch con k iteracións (A.2).
- (II) Unha vez xerado a aproximación do fractal, xerar unha δ -malla e contar o número de cubos da malla que intersecan ao copo (A.3).
- (III) Reducir o tamaño dos cubos da δ -malla e repetir o paso 2 ate acadar un δ mínimo (A.3).
- (IV) Unha vez calculado o número de cubos das δ -mallas que intersecan ao copo, ver como crece $\log N_\delta(F)$ con respecto a $-\log \delta$ realizando a recta que mellor axusta os valores obtidos (A.3).
- (V) A pendente da recta anterior daranos a estimación da dimensión de conteo de caixas para a nosa figura.

A continuación móstrase unha táboa cos resultados obtidos para diferentes aproximacións do copo de neve de Koch, delta para a malla inicial, delta mínimo e factor de escala (cal é a proporción entre o seguinte delta e o actual). A táboa foi obtida coa execución do Código A.4. Tamén se mostran na Figura 2.3 a representación gráfica de $\log N_\delta(F)$ con respecto a $\log \delta$ dalgún caso da táboa, da que poderemos extraer a dimensión de conteo de caixas estimada como a pendente de tal recta cambiada de signo (por ser unha representación con respecto a $\log \delta$ en vez de $-\log \delta$).

Iteracións do copo	Delta inicial	Factor de escala	Delta mínimo	Dimensión obtida
3	0.1	0.5	0.01	1.1504
3	0.1	0.75	0.01	1.1176
4	0.1	0.5	0.01	1.2615
4	0.1	0.75	0.01	1.2131
5	0.1	0.5	0.01	1.2973
5	0.1	0.75	0.01	1.2536
5	0.1	0.5	0.005	1.2689
5	0.1	0.75	0.005	1.2647
6	0.1	0.5	0.01	1.3053
6	0.1	0.75	0.01	1.2559
6	0.1	0.5	0.001	1.2565

Pódese ver que as aproximacións son bastante boas, aínda que o custo computacional para realizar a comprobación das caixas que intersecan con aproximacións do copo de neve de Koch por máis de 6 iteracións é moi elevado. Aínda así, non é necesario acadar tanto detalle para obter boas aproximacións.

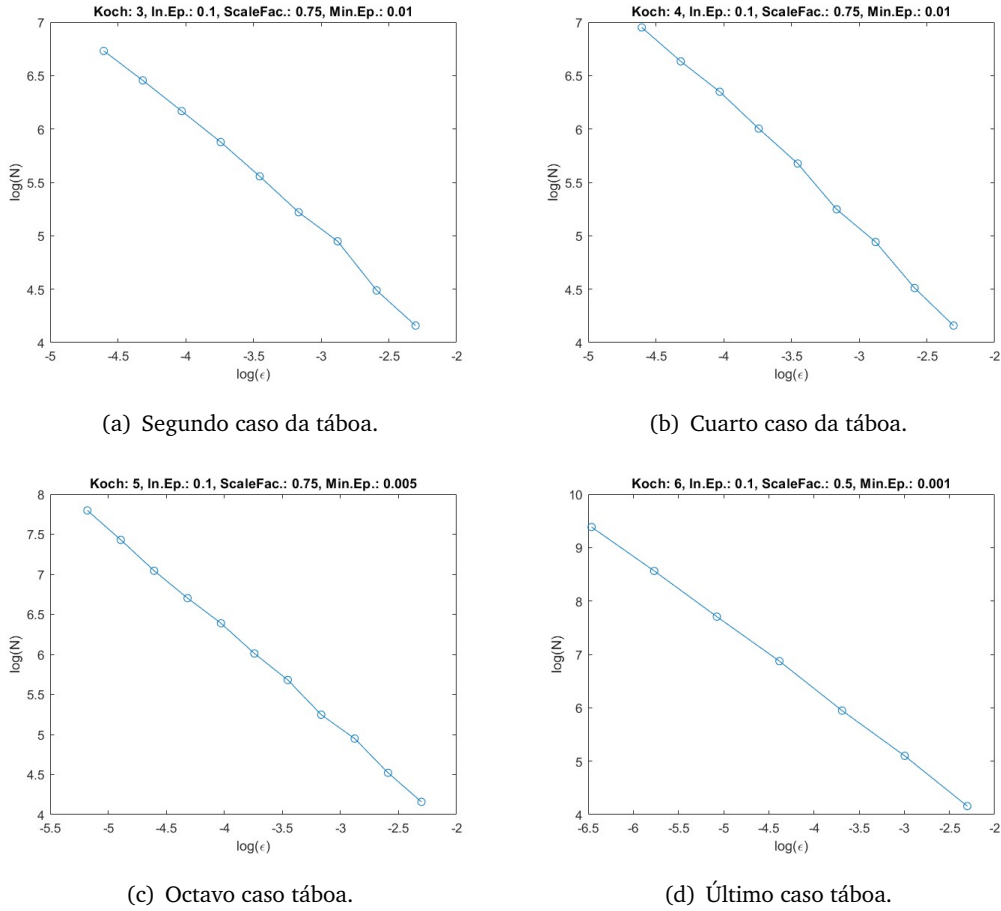


Fig. 2.3. Representación gráfica de $\log N_\delta(F)$ con respecto a $\log \delta$ para algún caso.

2.3. Propiedades e problemas da dimensión de conteo de caixas

Como xa se remarcou ao principio deste capítulo, interesaranos que se cumpran unhas propiedades para a nosa dimensión. Veremos entón nesta sección algunhas propiedades que cumpre a dimensión de conteo de caixas, así como aquelas que non cumpre.

Comezaremos por ver aquelas propiedades que cumpre a dimensión de conteo de caixas.

Teorema 2.16 (Propiedades da dimensión de conteo de caixas). *A dimensión de conteo de caixas satisfai as seguintes propiedades:*

(I) **Monotonía.** *Se $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ entón $\underline{\dim}_B E \leq \underline{\dim}_B F$ e $\overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B F$.*

(II) **Rango de valores.** *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ acoutado e non vacío, entón $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$.*

(III) **Estabilidade finita.** $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$, para calesquera $E, F \subset \mathbb{R}^n$.

(IV) **Nula en conxuntos finitos.** Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é non vacío e finito, entón $\dim_B F = 0$.

(V) **Dimensión máxima en conxuntos abertos.** Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, acoutado e non vacío, entón $\dim_B = n$.

Demostración. (I) Claramente, se $E \subset F$ tense que $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$, polo que $\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$ para δ suficientemente pequeno. Tomando límites, séguese o resultado.

(II) É trivial que $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$. Por outra parte, F está acoutado por un cubo C de lado l . Entón, considerando a caracterización (IV) do Teorema 2.11, $N_\delta(F) \leq N_\delta(C) \leq c\delta^{-n}$ para algunha constante c , xa que C poderá ser recuberto por $\lceil \frac{l}{\delta} \rceil^n$ cubos dunha δ -malla e $\lceil \frac{l}{\delta} \rceil^n \leq (\frac{l}{\delta} + 1)^n = (l + \delta)^n \delta^{-n} \leq (2l)^n \delta^{-n}$ para δ suficientemente pequeno, en concreto, para $\delta < l$. Polo tanto,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log c\delta^{-n}}{-\log \delta} = \frac{\log c - n \log \delta}{-\log \delta}.$$

Tomando límites, obtense o resultado.

(III) Por un lado, notemos que $N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F)$ para calquera $E, F \subset \mathbb{R}^n$. Polo tanto, aplicando logaritmos e dividindo por $-\log \delta$, obtemos que

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) \leq \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}.$$

Por outro lado, como $E, F \subset E \cup F$ implica que $N_\delta(E) \leq N_\delta(E \cup F)$ e $N_\delta(F) \leq N_\delta(E \cup F)$, entón tomando logaritmos en ambas desigualdades e dividindo por $-\log \delta$, obtemos que

$$\max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\} \leq \overline{\dim}_B(E \cup F),$$

obtendo así o resultado.

(IV) Se F está composto por m puntos distintos, terase que $N_\delta(F) = m$ a partir dun δ suficientemente pequeno. Polo tanto $\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log m}{-\log \delta} = 0$.

(V) Seguindo os argumentos de (II), temos que F contén un cubo $C \subset F \subset \mathbb{R}^n$. Polo tanto, terase que $N_\delta(F) \geq N_\delta(C) \geq c\delta^{-n}$ para algunha constante c . Entón,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log c\delta^{-n}}{-\log \delta} = \frac{\log c - n \log \delta}{-\log \delta},$$

de donde, tomando límites inferiores, obtemos que $\underline{\dim}_B F \geq n$. Como F é acoutado e non vacío, polo apartado (II), tense que $\overline{\dim}_B F \leq n$. Xuntando as dúas desigualdades obtemos que

$$n \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n,$$

concluindo así o resultado. ■

Observación 2.17. Se ben no apartado (III) do anterior teorema probamos que a dimensión de conteo de caixas superior é estable para unións finitas, non ocorre o mesmo para a dimensión de conteo de caixas inferior. Aínda así, se a dimensión de conteo de caixas existe para un conxunto F , ambas dimensións de conteo de caixas superior e inferior coincidirán, polo que a dimensión de conteo de caixas cumprirá a estabilidade finita. Hai que fixarse tamén en que probamos que a dimensión de conteo de caixas é nula en conxuntos finitos. Veremos máis adiante que non se ten o mesmo para conxuntos numerables.

Veremos agora como se comporta a dimensión de conteo de caixas ao realizar unha transformación no conxunto. No seguinte resultado, pódese ver que a dimensión de conteo de caixas compórtase ben ao aplicar transformacións bi-lipschitzianas.

Proposición 2.18. (I) Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha transformación lipschitziana, é dicir,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in F.$$

Entón, terase que $\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F$ e $\overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F$.

(II) Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha transformación bi-lipschitziana, é dicir,

$$k|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in F, \text{ con } 0 < k \leq c < \infty.$$

Entón, terase que $\underline{\dim}_B f(F) = \underline{\dim}_B F$ e $\overline{\dim}_B f(F) = \overline{\dim}_B F$.

Demostración. (I) Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é unha δ -cobertura de F , entón $\{U_i \cap F\}_{i \in I}$ tamén o será, polo que, como se ten que

$$|f(U_i \cap F)| \leq c|U_i \cap F| \leq c|U_i| \leq c\delta,$$

donde a primeira desigualdade ven dada porque f é lipschitziana, a segunda é consecuencia de que $U_i \cap F \subset U_i$ e a terceira séguese directamente de que $\{U_i\}_{i \in I}$ é unha δ -cobertura, terase que $\{U_i \cap F\}_{i \in I}$ é unha $c\delta$ -cobertura de $f(F)$. Entón, para calquera $\delta > 0$, $N_{c\delta}(f(F)) \leq N_\delta(F)$, así que, tomando logaritmos e dividindo por $-\log \delta$,

$$\frac{\log N_{c\delta}(f(F))}{-\log \delta} = \frac{\log N_{c\delta}(f(F))}{-\log \frac{c\delta}{c}} = \frac{\log N_{c\delta}(f(F))}{-\log c\delta + \log c} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Sen máis que tomar límites inferiores e superiores na anterior desigualdade, séguese o resultado.

(II) Como f é bi-lipschitziana, entón tamén será unha bixección. Sexa $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ a súa inversa. Pódese ver que f^{-1} é lipschitziana, xa que, se $u, v \in f(F)$, entón $f^{-1}(u), f^{-1}(v) \in F$ e

$$k|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| \leq |f(f^{-1}(u)) - f(f^{-1}(v))| = |u - v|$$

por ser f bi-lipschitziana, entón, tense que

$$|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| \leq \frac{1}{k}|u - v|,$$

polo que f^{-1} é lipschitziana. Do apartado (I), obtense que, por ser f^{-1} lipschitziana,

$$\underline{\dim}_{\mathbb{B}} F = \underline{\dim}_{\mathbb{B}} f^{-1}(f(F)) \leq \underline{\dim}_{\mathbb{B}} f(F) \quad \text{e} \quad \overline{\dim}_{\mathbb{B}} F = \overline{\dim}_{\mathbb{B}} f^{-1}(f(F)) \leq \overline{\dim}_{\mathbb{B}} f(F).$$

As anteriores desigualdades xuntadas coas desigualdades do apartado (I) que se seguen de que, en particular, f é lipschitziana, conclúen o resultado. ■

A partir da anterior proposición, completamos o Teorema 2.16.

Teorema 2.19 (Continuación do Teorema 2.16). *A dimensión de conteo de caixas satisfai as seguintes propiedades:*

(VI) **Invarianza de Lipschitz.** $\dim_{\mathbb{B}} f(F) = \dim_{\mathbb{B}} F$ se f é unha transformación bi-lipschitziana e $F \subset \mathbb{R}^n$.

(VII) **Invarianza xeométrica.** $\dim_{\mathbb{B}} f(F) = \dim_{\mathbb{B}} F$ se f é unha isometría e $F \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. (VI) séguese do apartado (II) da Proposición 2.18 e (VII) de que unha transformación xeométrica é bi-lipschitziana. ■

Unha vez vistas as propiedades que cumpre a dimensión de conteo de caixas, centrarémonos en indicar cales son os seus principais problemas. Para elo, probaremos o seguinte resultado, o cal será a clave para dar cos principais problemas desta dimensión.

Proposición 2.20. *Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e \bar{F} a súa clausura. Entón*

$$\underline{\dim}_{\mathbb{B}} \bar{F} = \underline{\dim}_{\mathbb{B}} F \quad \text{e} \quad \overline{\dim}_{\mathbb{B}} \bar{F} = \overline{\dim}_{\mathbb{B}} F.$$

Demostración. A partir da caracterización (II) de $N_{\delta}(F)$ do Teorema 2.11, sexa $\{B_1, \dots, B_n\}$ unha colección numerable de bolas pechadas de raio δ . Terase, por ser \bar{F} o menor pechado que contén a F , que tal colección de bolas pechadas recubrirá a F se e só se recubre a \bar{F} , do que se segue que $N_{\delta}(F) = N_{\delta}(\bar{F})$, de onde se conclúe o resultado. ■

Aínda que a primeira vista o resultado poida resultar interesante para calcular a dimensión de conteo de caixas dun conxunto a través da súa clausura ou viceversa, esta propiedade fai que moitos

conxunto teñan dimensións “contraintuitivas”, polo que, ao contrario do que cabería esperar nun primeiro momento, esta propiedade non é desexable para unha dimensión.

Recollemos no seguinte resultados algúns problemas da dimensión de conteo de caixas.

Teorema 2.21 (Problemas da dimensión de conteo de caixas). *A dimensión de conteo de caixas presenta as seguintes propiedades:*

- (I) **Dimensión da clausura.** *Non existe $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\dim_{\mathbb{B}} F \neq \dim_{\mathbb{B}} \overline{F}$.*
- (II) **Non nula en conxuntos numerables.** *Existen conxuntos $F \subset \mathbb{R}^n$ numerables tales que $\dim_{\mathbb{B}} F \neq 0$.*
- (III) **Non cumpre estabilidade numerable.** *Existen coleccións numerables $\{F_i\}_{i \in I}$ de conxuntos $F_i \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\dim_{\mathbb{B}} \bigcup_{i \in I} F_i \neq \sup_{i \in I} \{\dim_{\mathbb{B}} F_i\}$.*

Demostración. (I) Demostrado na Proposición 2.20.

(II) Se consideramos o conxunto numerable F formado polos números racionais contidos no intervalo $[0,1]$, teremos que, pola Proposición 2.20, $\dim_{\mathbb{B}} F = \dim_{\mathbb{B}} \overline{F} = \dim_{\mathbb{B}} [0,1] = 1 \neq 0$. Polo tanto, F será un conxunto numerable de dimensión de conteo de caixas non nula.

(III) Consideramos o mesmo conxunto numerable F anterior formado polos números racionais contidos no intervalo $[0,1]$, e $\{F_i\}_{i \in I}$ a colección numerable de conxuntos onde cada F_i é un conxunto formado por un só número racional do intervalo $[0,1]$. Entón, por seren F_i conxuntos formados por un só número, a súa dimensión de conteo de caixas será nula. Polo tanto,

$$\dim_{\mathbb{B}} \bigcup_{i \in I} F_i = \dim_{\mathbb{B}} F = 1 \neq 0 = \sup_{i \in I} \{\dim_{\mathbb{B}} F_i\},$$

obtendo así o resultado. ■

Estos problemas non poden ser resoltos sen máis que restrinxirnos a conxuntos pechados, xa que conxuntos como $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ teñen dimensión de conteo de caixas non nula, neste caso $\frac{1}{2}$ (consultar [16, Example 2.7] para máis detalles). Aínda así, a dimensión de conteo de caixas segue sendo de gran interese práctico pola facilidade que presenta de ser calculada computacionalmente. Existen modificacións da dimensión de conteo de caixas que quedan a medio camiño entre esta e outros conceptos de dimensións como a de Hausdorff. Estas dimensións modificadas fan que se cumpran algunha propiedade de interese que non cumpre a dimensión de conteo de caixas, como a estabilidade numerable. Estas dimensións presentan o problema de que fan moito máis complexo o cálculo da dimensión dun conxunto. Pódese ver unha modificación da dimensión de conteo de caixas en [16, Section 2.3], así como unha dimensión chamada dimensión de empacamento en [16,

Section 3.5], dimensión tamén de gran interese. Adicionalmente, en [14, Section 6.2] tamén se afonda na medida de empaquetamento, que motiva tal dimensión.

2.4. Dimensión de Hausdorff

Introduciremos agora o concepto de dimensión máis antigo (e probablemente máis importante) no ámbito das “dimensións fractais”, a cal está baseada nunha construción de Carathéodory (para máis detalle desta construción, consultar [14, Chapter 5-6]): a dimensión de Hausdorff. É de gran interese debido ás boas propiedades teóricas que posúe, mais ten o inconveniente de ser difícil de calcular nalgúns casos. Como xa vimos, a dimensión de conteo de caixas non ten este inconveniente, polo que a dimensión de Hausdorff será de maior interese a nivel teórico, mentres que a dimensión de conteo de caixas será de maior utilidade na práctica para cálculos empíricos.

Para definir a dimensión de Hausdorff, comezaremos por introducir a medida de Hausdorff, a cal motivará a definición da dimensión. Esta medida será construída polo Método II exposto en [14], xa que as medidas construídas por este método gozarán de boas propiedades, como que todos os conxuntos de Borel serán medibles.

Definición 2.22. Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$ un número real calquera. Para cada $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é unha } \delta\text{-cobertura de } F \right\}.$$

Definimos a **medida s -dimensional de Hausdorff** como

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Observación 2.23. Conforme diminúe δ , o conxunto de posibles δ -coberturas de F diminúe, polo que o ínfimo anteriormente mencionado aumenta ou, polo menos, non diminúe. Entón, o anterior límite existirá para calquera $F \subset \mathbb{R}^n$. Aínda así, o límite poderá ser (e adoitará ser) 0 ou ∞ .

Teorema 2.24. A medida de Hausdorff \mathcal{H}^s recollida na Definición 2.22 é, efectivamente, unha medida exterior.

Demostración. Para probar que \mathcal{H}^s é unha medida exterior teremos que ver que, fixado un $s \geq 0$:

- $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
- Se $E \subset F$, entón $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.

- Se $\{F_i\}_{i \in I}$ é unha colección numerable de conxuntos, entón

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Entón, sexa un $s \geq 0$ calquera:

- Para calquera ϵ tal que $0 < \epsilon \leq \delta$ tense que \emptyset pode ser cuberto por un único conxunto de diámetro ϵ . Entón $0 \leq \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \leq \epsilon^s$ para todo $\epsilon > 0$, polo que $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$. Consecuentemente, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$.
- Sexan $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$. Calquera δ -cobertura de F será, trivialmente, unha δ -cobertura de E , polo que $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$, así que, tomando límites cando $\delta \rightarrow 0$, $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.
- Sexa $\{F_i\}_{i \in I}$ unha colección numerable de conxuntos tales que $\sum_{i=1}^{\infty} F_i < \infty$ sen perda de xeneralidade. Para cada $\epsilon > 0$, consideremos $\{U_{i,j}\}_{i \in I, j \geq 1}$ unha δ -cobertura para cada F_i satisfacendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_{i,j}|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

$\{U_{i,j}\}_{i \in I, j \geq 1}$ é unha δ -cobertura de $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ tal que, para cada $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{H}_\delta^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |U_{i,j}|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}_\delta^s(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \right) = \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_i).$$

Tomando límites cando $\delta \rightarrow 0$,

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F_i) = \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i),$$

polo que, por cumprirse a desigualdade para calquera $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

■

Observación 2.25. Aínda que probamos que, en xeral, a medida de Hausdorff é unha medida exterior, se nos restrinximos á σ -álgebra de Borel, isto é, a σ -álgebra xerada polos conxuntos abertos, teremos que se ten a igualdade no terceiro punto da demostración anterior. Polo tanto, se asociamos a σ -álgebra de Borel á medida de Hausdorff, teremos que esta é unha medida.

Observación 2.26. A medida de Hausdorff é unha xeralización da medida de Lebesgue para conxuntos de Borel, isto é, se F é un subconxunto de \mathbb{R}^n de Borel, entón tense que

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F), \text{ donde } c_n = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!}, & \text{se } n \text{ é impar,} \end{cases}$$

é o volume dunha bola n -dimensional de diámetro 1 e $\text{vol}^n(F)$ denota o volume ou medida clásica (de Lebesgue) do subconxunto de Borel F de \mathbb{R}^n . Tendo isto en conta, vemos que $\mathcal{H}^0(F)$ é o cardinal de F (número de puntos en F), $\mathcal{H}^1(F)$ é a lonxitude de F (como curva regular), $\mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \text{area}(F)$ con $\text{area}(F)$ a área de F (como superficie regular) por exemplo. É dicir, como xa sabemos, se temos, por exemplo, un F subconxunto de Borel de \mathbb{R}^2 , é dicir, unha superficie regular, teremos que $\mathcal{H}^0(F) = \infty$ (xa que hay infinitos puntos en F), $\mathcal{H}^1(F) = \infty$ (xa que F ten lonxitude infinita), mais $\mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \cdot \text{area}(F) < \infty$ e $\mathcal{H}^3(F) = \frac{6}{\pi} \cdot \text{vol}(F) = 0$, e a medida seguirá sendo 0 para dimensións maiores. Isto motivará posteriormente a definición de dimensión de Hausdorff.

Unha vez definida a nosa medida, pódese ver que cumpre algunha propiedade de interese, como o seu bo comportamento con transformacións de Hölder, unha xeralización das transformacións de Lipschitz que definiremos a continuación.

Definición 2.27. Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha función. Diremos que f é unha **transformación de Hölder** de expoñente $\lambda > 0$ se

$$|f(x) - f(y)| = c \cdot |x - y|^\lambda, \text{ para todo } x, y \in F$$

para algunha constante $c > 0$ chamada **constante de Hölder**.

En particular, se $\lambda = 1$, f será unha **transformación de Lipschitz**.

Proposición 2.28. Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha transformación de Hölder de expoñente $\lambda > 0$ con constante de Hölder $c > 0$. Entón, para cada $s \geq 0$ terase que

$$\mathcal{H}^{s/\lambda}(f(F)) \leq c^{s/\lambda} \cdot \mathcal{H}^s(F).$$

En particular, se f é unha transformación de Lipschitz, terase que

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \cdot \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Sexa $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ unha δ -cobertura de F . Entón, por ser f unha transformación de Hölder,

$$f(F \cap U_i) \leq c \cdot |F \cap U_i|^\lambda \leq c \cdot |U_i|^\lambda, i \in \mathbb{N},$$

polo que $\{F \cap U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é unha $c\delta^\lambda$ -cobertura de $f(F)$. Polo tanto

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |f(F \cap U_i)|^{s/\lambda} \leq c^{s/\lambda} \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s,$$

de onde obtemos que $\mathcal{H}_{c\delta^\lambda}^{s/\lambda}(f(F)) \leq c^{s/\lambda} \mathcal{H}^s(F)$. Facendo tender $\delta \rightarrow 0$,

$$\mathcal{H}^{s/\lambda}(f(F)) \leq c^{s/\lambda} \mathcal{H}^s(F).$$

Para $\lambda = 1$, obtemos o resultado para unha transformación de Lipschitz. ■

Corolario 2.29 (Propiedad de escala). *Sexan $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha transformación xeométrica con factor de escala $\lambda > 0$, é dicir, f descomponse en $f(F) = \lambda F$ máis, eventualmente, algunha rotación ou traslación. Entón*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Como $|f(x) - f(y)| = \lambda|x - y| \implies |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = \lambda^{-1}|x - y|$, $x, y \in F$, tense que, pola Proposición 2.28, $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ e $\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(f^{-s}(f(F))) \leq \lambda^{-1} \mathcal{H}^s(f(F))$. Entón, $\mathcal{H}^s(f(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(f(F)) \implies \mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. ■

Esta propiedade é fundamental na medida de Hausdorff, xa que, como é de esperar, ao escalar cun factor de escala λ un conxunto s -dimensional, a súa medida será multiplicada por λ^s (a lonxitude dunha curva será multiplicada por λ , a área dun plano será multiplicada por λ^2 , o volume dun cubo será multiplicado por $\lambda^3 \dots$). Ademáis, tense como consecuencia que a medida de Hausdorff é invariante para calquera transformación que non modifique a escala, como as traslacións ou rotacións. Esta propiedade de gran interese ilústrase na Figura 2.4, donde se escala por un factor de λ obxectos 1,2 e s -dimensionais e, adicionalmente, son rotados. O único que afecta na medida dos obxectos é o factor de escala, independentemente da rotación realizada.

Motivado por todo o exposto anteriormente, centrámonos agora en dar unha definición de dimensión de Hausdorff. Tendo en conta a Definición 2.22 de medida de Hausdorff, se consideramos un subconxunto F de \mathbb{R}^n e un $\delta \in (0,1)$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ será non crecente con respecto a s , polo que $\mathcal{H}^s(F)$ será tamén non crecente con respecto a s . É máis, se consideramos un $t > s$ e $\{U_i\}_{i \in I}$ unha δ -cobertura de F , teremos que

$$\sum_{i \in I} |U_i|^t \leq \sum_{i \in I} |U_i|^{t-s+s} = \sum_{i \in I} |U_i|^{t-s} \cdot |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \cdot \sum_{i \in I} |U_i|^s$$

polo que, collendo a δ -cobertura que faga que as sumas anteriores sexan o ínfimo das sumas sobre todas as δ -coberturas, obtemos que

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

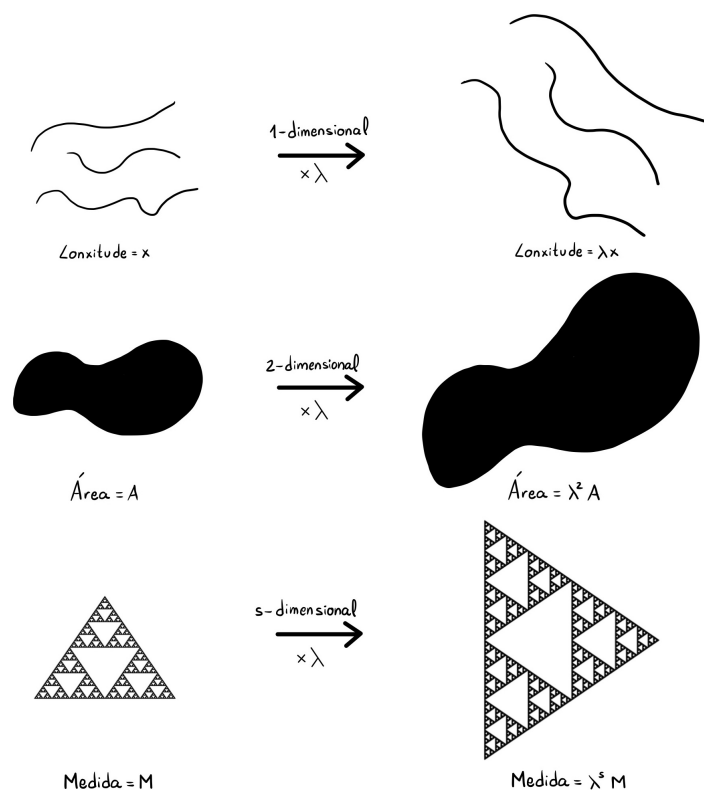


Fig. 2.4. Propiedade de escala para diferentes obxectos tras unha modificación da súa escala e rotacións.

A partir de isto, se consideramos o límite cando $\delta \rightarrow 0$, temos que $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para todo $t > s$ sempre e cando $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Polo tanto, temos que $\mathcal{H}^s(F)$ pasará de tomar o valor ∞ a tomar o valor 0 a partir dun punto crítico, tomando, eventualmente, un valor finito non nulo nese punto crítico. Ese punto é o que consideraremos como a nosa dimensión de Hausdorff de F .

Definición 2.30. Sexan $F \subset \mathbb{R}^n$ e \mathcal{H}^s a medida de Hausdorff s -dimensional. Entón, chamaremos **dimensión de Hausdorff** de F a

$$\dim_{\text{H}}(F) := \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

ou, o que é o mesmo (considerando $\sup \emptyset = 0$), $\dim_{\text{H}}(F)$ é o único valor que cumpre

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se } s < \dim_{\text{H}}(F), \\ 0, & \text{se } s > \dim_{\text{H}}(F). \end{cases}$$

Observación 2.31. Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto de Borel. Se se ten que $s = \dim_{\text{H}}(F)$, entón a medida de Hausdorff de F pode tomar os valores 0 ou ∞ . Adicionalmente, se se ten que toma un valor

$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, dirase que F é un **s-conxunto**. Estes conxuntos aparecen de forma moi habitual e, ao ter a boa propiedade de que a súa medida de Hausdorff s -dimensional é finita e non nula, son os mais interesantes de ser estudados. Na Figura 2.5 móstrase unha gráfica de $\mathcal{H}^s(F)$ fronte a s dun s -conxunto F , donde se pode apreciar o salto na medida de Hausdorff do mesmo conforme crece s .

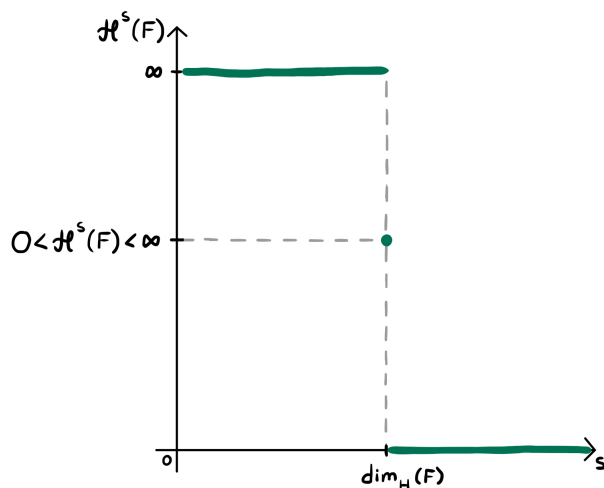


Fig. 2.5. Gráfica do punto crítico da medida de Hausdorff (dimensión de Hausdorff) para un s -conxunto.

2.5. Propiedades e problemas da dimensión de Hausdorff

Centrarémonos agora en expoñer as propiedades que presenta a dimensión de Hausdorff, así como os seus principais problemas. Este concepto de dimensión resalta por posuír moi boas propiedades, cumprindo todas as propiedades que esperamos dunha dimensión como veremos a continuación.

Teorema 2.32 (Propiedades da dimensión de Hausdorff). *A dimensión de Hausdorff satisfai as seguintes propiedades:*

- (I) **Monotonía.** Se $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ entón $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- (II) **Rango de valores.** Se $F \subset \mathbb{R}^n$ acoutado e non vacío, entón $0 \leq \dim_H F \leq n$.
- (III) **Estabilidade finita.** $\dim_H(E \cup F) = \max\{\dim_H E, \dim_H F\}$ para calesquera $E, F \subset \mathbb{R}^n$.
- (IV) **Estabilidade numerable.** $\dim_H\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \sup_{i \in I} \{\dim_H F_i\}$ para toda familia numerable $\{F_i\}_{i \in I}$ de conxuntos $F_i \subset \mathbb{R}^n$.

(V) **Dimensión da clausura.** Existe $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\dim_{\text{H}} F \neq \dim_{\text{H}} \bar{F}$, onde \bar{F} denota a clausura de F .

(VI) **Nula en conxuntos numerables.** Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é non vacío e numerable, entón $\dim_{\text{H}} F = 0$.

(VII) **Dimensión máxima en conxuntos abertos.** Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, acoutado e non vacío, entón $\dim_{\text{H}} F = n$.

Demostración. (I) A partir de que $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ por ser \mathcal{H}^s unha medida tense o resultado.

(II) Temos que $0 \leq \dim_{\text{H}} F$ por ser \mathcal{H}^s non negativa ao ser unha medida. Agora, se F é acoutado, considerando o recubrimento de F formado por un cubo $C \subset \mathbb{R}^n$, tal cubo terá claramente dimensión n , polo que $\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(C) = 0$ se $s > n$. Por ser calquera subconxunto $F \subset \mathbb{R}^n$ unha unión numerable de conxuntos acoutados, entón $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para $s > n$ pola aditividade numerable da medida de Hausdorff. Polo tanto, o punto crítico onde a medida “dá o salto” estará antes que n , polo que $\dim_{\text{H}} F \leq n$.

(IV) Claramente, para todo $j \in I$ tense que $F_j \subset \bigcup_{i \in I} F_i$, polo que $\dim_{\text{H}} F_j \leq \dim_{\text{H}} \bigcup_{i \in I} F_i$ por (I). Entón,

$$\sup_{j \in I} \{\dim_{\text{H}} F_j\} \leq \dim_{\text{H}} \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right).$$

Agora, se consideramos $s > \dim_{\text{H}} F_i$ para todo $i \in I$, entón $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ do que, a partir da aditividade numerable da medida de Hausdorff,

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) \leq \sum_{i \in I} \mathcal{H}^s(F_i) = 0,$$

polo que $\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) = 0$, o que implica que $s > \dim_{\text{H}} \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right)$, obtendo así a igualdade desexada.

(III) Séguese a partir de que unha familia finita é, en particular, numerable, e aplicando (IV).

(VI) Por ser F numerable, temos que se pode escribir da forma $F = \bigcup_{i \in I} F_i$, onde cada F_i , $i \in I$, é un conxunto formado por un só punto, polo que $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ e $\dim_{\text{H}} F_i = 0$. Por (IV), temos que

$$\dim_{\text{H}} F = \dim_{\text{H}} \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) = \sup_{i \in I} \{\dim_{\text{H}} F_i\} = 0.$$

(V) Sexa $F = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Por un lado, temos que $\dim_{\text{H}} F = 0$ por (VI), xa que F é un conxunto numerable. Por outro lado, temos que $\bar{F} = [0,1]$ por ser \mathbb{Q} denso nos números reais. Como se ten que $\dim_{\text{H}} [0,1] = 1$, entón

$$0 = \dim_{\text{H}} F \neq \dim_{\text{H}} \bar{F} = \dim_{\text{H}} [0,1] = 1.$$

(VII) Por ser F aberto, este contén unha bola n -dimensional aberta, que sabemos que ten dimensión n . Polo tanto, por (I), $\dim_{\text{H}} F \geq n$. Como por (II) tense que $\dim_{\text{H}} F \leq n$, obtemos a igualdade. ■

Veremos agora como se comporta a dimensión de Hausdorff a través de transformacións lipschitzianas. Para elo, temos o seguinte resultado, similar ao xa exposto para a dimensión de conteo de caixas.

Proposición 2.33. (I) Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha transformación de Hölder de expoñente $\lambda > 0$ e constante de Hölder $c > 0$, é dicir,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\lambda, \quad \forall x, y \in F.$$

Entón, tense que $\dim_{\text{H}} f(F) \leq \frac{1}{\lambda} \dim_{\text{H}} F$. En particular, se $\lambda = 1$, é dicir, se f é unha transformación lipschitziana, tense que $\dim_{\text{H}} f(F) \leq \dim_{\text{H}} F$.

(II) Sexa $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha transformación bi-lipschitziana, é dicir,

$$k|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in F, \text{ con } 0 < k \leq c < \infty.$$

Entón, terase que $\dim_{\text{H}} f(F) = \dim_{\text{H}} F$.

Demostración. (I) Consideremos $s > \dim_{\text{H}} F$. Pola Proposición 2.28, teremos que

$$\mathcal{H}^{s/\lambda}(f(F)) \leq c^{s/\lambda} \mathcal{H}^s(F) = 0,$$

por ser $s > \dim_{\text{H}} F$. Entón $\dim_{\text{H}} f(F) \leq \frac{s}{\lambda}$ para calquera $s > \dim_{\text{H}} F$, concluíndo así que $\dim_{\text{H}} f(F) \leq \frac{\dim_{\text{H}} F}{\lambda}$. En particular, para $\lambda = 1$ tense que $\dim_{\text{H}} f(F) \leq \dim_{\text{H}} F$.

(II) Seguindo os argumentos da Proposición 2.18, por ser f bi-lipschitziana, tamén será unha bixección. Temos que f^{-1} é lipschitziana como xa vimos na Proposición 2.18. Aplicando o apartado (I) tendo en conta que f^{-1} é lipschitziana, temos que

$$\dim_{\text{H}} F = \dim_{\text{H}} f^{-1}(f(F)) \leq \dim_{\text{H}} f(F).$$

Esta desigualdade xunto a que, polo apartado (I) e o feito de que f é lipschitziana, tense que

$$\dim_{\text{H}} f(F) \leq \dim_{\text{H}} F,$$

danos o resultado. ■

Con isto, podemos completar o Teorema 2.32 de propiedades da dimensión de Hausdorff.

Teorema 2.34 (Continuación do Teorema 2.32). *A dimensión de Hausdorff satisfai as seguintes propiedades:*

(VIII) *Invarianza de Lipschitz.* $\dim_{\text{H}} f(F) = \dim_{\text{H}} F$ se f é unha transformación bi-lipschitziana e $F \subset \mathbb{R}^n$.

(IX) *Invarianza xeométrica.* $\dim_{\text{H}} f(F) = \dim_{\text{H}} F$ se f é unha isometría e $F \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. (VIII) séguese do apartado (II) da Proposición 2.33 e (IX) do feito de que unha transformación xeométrica é bi-lipschitziana. ■

En xeral, para calcular a dimensión de Hausdorff dun conxunto $F \subset \mathbb{R}^n$, buscarase acoutar o valor de $\mathcal{H}^s(F)$ entre dous valores finitos, obtendo así que s é a dimensión de Hausdorff do conxunto. O lector pode consultar a comprobación da dimensión de Hausdorff dalgún conxunto como o po de Cantor ou o conxunto de Cantor en [16, Section 3.3]. Aínda así, este cálculo require de coñecer de antemán cal será a dimensión e, ao contrario que para a dimensión de conteo de caixas, non contamos con métodos para obter unha estimación de forma sinxela na practica coa axuda da computación. Isto fai, como xa recalcamos anteriormente, máis complexa de calcular esta dimensión. Aínda así, para certos conxuntos contamos con algún resultado que fará a tarefa de calcular a dimensión de Hausdorff dun conxunto con certas propiedades (autosimilitude) máis sinxela, o cal trataremos máis adiante no Teorema 3.14.

2.6. Relación entre a dimensión de conteo de caixas e a dimensión de Hausdorff

Polo visto nas seccións anteriores, recollemos na Táboa 2.1 as propiedades que desexamos dunha dimensión que cumpren ou non a dimensión de conteo de caixas e a dimensión de Hausdorff.

Como podemos observar, a dimensión de Hausdorff ten claramente mellores propiedades teóricas que a dimensión de conteo de caixas. Aínda así, o potencial da dimensión de conteo de caixas reside na súa facilidade de ser calculada na práctica, ao contrario da dimensión de Hausdorff, que só será posible calculala de forma relativamente sinxela en algún caso concreto. Aínda que, polo xeral, a dimensión de conteo de caixas non coincide coa dimensión de Hausdorff, podemos empregar a primeira como cota superior da segunda. Verémolo co seguinte resultado.

Proposición 2.35. *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é acoutado e non vacío, entón tense que*

$$\dim_{\text{H}} F \leq \underline{\dim}_{\text{B}} F \leq \dim_{\text{B}} F \leq \overline{\dim}_{\text{B}} F.$$

Propiedade	\dim_B	\dim_H
Monotonía	SI	SI
Rango de valores	SI	SI
Estabilidade finita	SI	SI
Estabilidade numerable	NON	SI
Dimensión da clausura	NON	SI
Invarianza de Lipschitz	SI	SI
Invarianza xeométrica	SI	SI
Nula en conxuntos numerables	NON	SI
Dimensión máxima en conxuntos abertos	SI	SI

Táboa 2.1: Propiedades que cumpren as dimensións de conteo de caixas e de Hausdorff.

Demostración. Imos supoñer que, para algún $s \geq 0$, tense que $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, xa que, se $1 \geq \mathcal{H}^s(F)$ para todo $s \geq 0$, entón teríase que $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s \geq 0$, o que implica que $\dim_H F = 0$ e cumpriríase polo tanto a desigualdade. Entón, se consideramos δ suficientemente pequeno e $\{U_i\}_{i=1, \dots, N_\delta(F)}$ unha cobertura de F formada polo menor número de conxuntos de diámetro δ que recobren F (a cal existirá por ser F acoutado), tense que

$$1 < \mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é unha } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

Tomando agora logaritmos,

$$0 = \log 1 < \log N_\delta(F) \delta^s = \log N_\delta(F) + s \log \delta.$$

Entón, despexando s na anterior inecuación,

$$s > -\frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta},$$

polo que tomando límites inferiores obtemos que

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Por ser $\dim_H F$ o supremo ou ínfimo dalgún de estes s tal e como se mostra na Definición 2.30, podemos concluír o resultado. ■

Observación 2.36. A igualdade da proposición anterior non se ten en xeral. Isto é, existen conxuntos con dimensión de conteo de caixas estritamente maior que a súa dimensión de Hausdorff. Por exemplo, se consideramos o conxunto $F = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, temos que tal conxunto terá dimensión de conteo de caixas

$$\dim_B F = \dim_B \overline{F} = \dim_B [0,1] = 1,$$

pola Proposición 2.20. Na súa contra, a dimensión de Hausdorff satisfai a propiedade de que é nula en conxuntos numerables, polo que, ao ser F un conxunto numerable, terase que

$$\dim_{\text{H}} F = 0.$$

Polo tanto, para este conxunto F temos que

$$\dim_{\text{H}} F = 0 < 1 = \dim_{\text{B}} F.$$

Aínda así, a proposición anterior pode ser útil para facer unha suposición da dimensión de Hausdorff de certos conxuntos, xa que a dimensión de conteo de caixas é sinxela de estimar e, eventualmente, pode coincidir coa dimensión de Hausdorff ou, no peor dos casos, facer de cota superior dela.

3. Sistemas iterativos de funcións (IFS)

Moitos dos fractais que estamos a considerar presentan unha propiedade de gran interese para moitos propósitos, a autosimilitude. En termos coloquiais, diremos que un conxunto presenta autosimilitude se está composto por copias dun mesmo conxunto, eventualmente escaladas, trasladadas ou rotadas. Por exemplo, a curva de Koch, empregada para formar o copo de neve de Koch, esta composta por, en cada iteración, catro copias da anterior iteración. Os conxuntos que presentan esta propiedade son máis sinxelos de estudar como xa remarcamos anteriormente, posto que, cumprindo algunha outra condición que exporemos posteriormente, existirán métodos sinxelos para calcular a súa dimensión. Ademais, este tipo de fractais son bastante frecuentes, presentándose habitualmente na natureza.

Con todo isto exposto, centrarémonos agora en dar unha definición formal de que entendemos por un fractal autosimilar, para o que, seguindo o esquema que Falconer expuxo en [16], definiremos os seguintes conceptos.

Definición 3.1. Sexa $D \subset \mathbb{R}^n$ un pechado (usualmente $D = \mathbb{R}^n$). Unha función $S : D \rightarrow D$ será unha **contracción** en D se existe un r , con $0 < r < 1$ tal que

$$|S(x) - S(y)| \leq r|x - y|, \text{ para todo } x, y \in D.$$

Se se ten a igualdade, isto é, se

$$|S(x) - S(y)| = r|x - y|, \text{ para todo } x, y \in D,$$

entón diremos que S é unha **similitude contráctil**.

Procederemos definindo o que entendemos por sistema iterativo de funcións, que da nome ao capítulo e caracterizará aos fractais autosimilares.

Definición 3.2. Unha familia finita $\{S_i\}_{i=1, \dots, m}$, $m \geq 2$, de contraccións definida sobre un conxunto $D \subset \mathbb{R}^n$ pechado, é un **sistema iterativo de funcións** ou **IFS** (do inglés *Iterated Function System*).

Exemplo 3.3. Se consideramos as transformacións $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 4$, dadas por

$$S_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x}, \quad S_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \quad S_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos que $\{S_i\}_{i=1,\dots,4}$ conforman un IFS. É máis, terase que S_i son similitudes con $r_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, \dots, 4$, xa que estamos contraendo os puntos cun factor de $\frac{1}{3}$ e, eventualmente, efectuando unha rotación e unha translación. Veremos máis adiante que este IFS caracteriza a curva de Koch.



Fig. 3.1. Exemplo dunha contracción na curva de Koch (S_2).

Coa seguinte definición, poderemos caracterizar a través dun sistema iterativo de funcións certos fractais.

Definición 3.4. Diremos que un conxunto $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$ compacto e non vacío é un **atractor** ou **conxunto invariante** para un IFS $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$ se

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Veremos que cada IFS determina un único atractor que, eventualmente, poderá ser un fractal. Isto permitiranos caracterizar moitos fractais a través do seu sistema iterativo de funcións asociado, facendo máis sinxelo, por exemplo, calcular a súa dimensión fractal. Para ver isto, definiremos unha métrica sobre os subconxuntos de $D \subset \mathbb{R}^n$ considerado nas definicións anteriores. Posteriormente, veremos que a clase de todos os subconxuntos compactos e non vacíos de D , que denotaremos por \mathcal{F} , será un espazo métrico con esa métrica. É máis, terase que a métrica será completa sobre \mathcal{F} , é dicir, que toda sucesión de Cauchy de conxuntos de \mathcal{F} converge a un conxunto en \mathcal{F} .

Definición 3.5. Sexa $D \subset \mathbb{R}^n$ pechado e denotemos por \mathcal{F} á clase de todos os subconxuntos compactos e non vacíos de D . Definiremos a **métrica** ou **distancia de Hausdorff** para dous conxuntos $A, B \in \mathcal{F}$ como

$$d(A, B) := \inf \{ \delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta \},$$

onde $A_\delta := \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ para algún } a \in A\}$ denota a δ -veciñanza dun conxunto A .

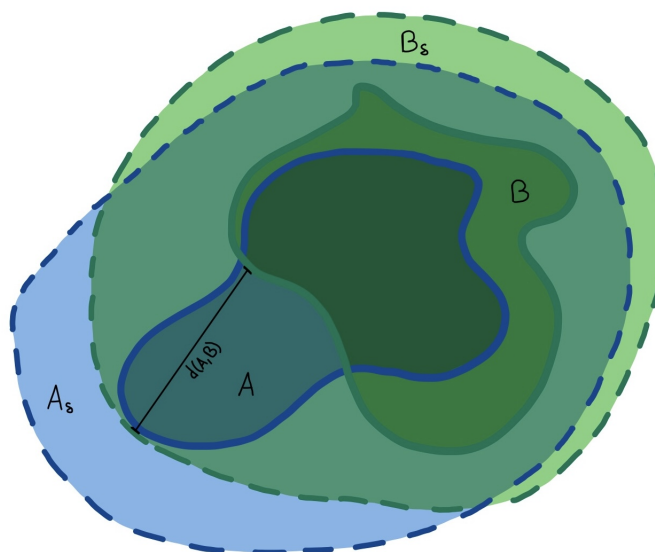


Fig. 3.2. Exemplo da distancia de Hausdorff entre dous conxuntos A e B.

Proposición 3.6 ([22, Proposition 2-2]). A métrica de Hausdorff é, efectivamente, unha métrica sobre \mathcal{F} , a clase de todos os subconxuntos compactos e non vacíos de $D \subset \mathbb{R}^n$ pechado.

Demostración. Para ver que é unha métrica, teremos que probar os seguinte puntos para todo $A, B, C \in \mathcal{F}$:

$$(I) \quad d(A, B) \geq 0 \text{ e } d(A, B) = 0 \iff A = B.$$

$$(II) \quad d(A, B) = d(B, A).$$

$$(III) \quad d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Imos remarcar inicialmente a seguinte definición equivalente da métrica de Hausdorff:

$$d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} m(a, B), \sup_{b \in B} m(b, A) \right\},$$

onde $m(e, C) : D \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ven dada por

$$m(e, C) = \inf_{c \in C} |e - c|.$$

Pódese probar que esta definición é equivalente á que se expuxo anteriormente (consultar para máis detalle [22]). Esta definición alternativa seranos de utilidade para probar o resultado.

(I) Temos que o valor da métrica é trivialmente non negativo por ser o módulo ($|\cdot|$) non negativo. Vexamos agora a equivalencia: por unha banda, se consideramos $A = B$ entón para todo $a \in A$ e para

todo $b \in B$ terase que $m(a,B) = 0$ e $m(b,A) = 0$, polo que $d(A,B) = 0$. Por outra banda, se se ten que $d(A,B) = 0$ entón ámbolos termos do máximo serán igual a 0, xa que $m(e,C)$ é non negativa, polo que para todo $a \in A$ tense que $m(a,B) = \inf_{b \in B} |a - b| = 0$. Polo tanto, todo entorno de a contén puntos de B , polo que a é un punto límite de B . Agora, como temos que B é pechado por pertencer a \mathcal{F} , terase que $a \in B$. Así, $A \subset B$. O contido no outro sentido próbase de forma análoga, xa que a definición auxiliar da métrica é simétrica, no sentido de que, sen máis que cambiar $a \in A$ por $b \in B$ e $A \in \mathcal{F}$ por $B \in \mathcal{F}$, tense que $B \subset A$. Entón, $A = B$.

(II) Trivial por ser a función máximo simétrica.

(III) Sexan $A, B, C \in \mathcal{F}$. Asumiremos que son distintos. De non selo, teríanse trivialmente as igualdades. Entón, considerando un $a \in A$ arbitrario, existirá un $b \in B$ tal que $|a - b| \leq d(A, B)$ pola definición auxiliar de d . Da mesma forma, se consideramos un $b \in B$ arbitrario, existirá un $c \in C$ tal que $|b - c| \leq d(B, C)$. Entón, sumando e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Entón, isto indícanos que, para todo $a \in A$, existe un $c \in C$ a unha distancia menor que $d(A, B) + d(B, C)$ del, isto é,

$$A \subset C_{d(A, B) + d(B, C)},$$

onde $C_\delta := \{x \in D : |x - c| \leq \delta \text{ para algún } c \in C\}$ denota a δ -veciñanza dun conxunto C . De forma análoga, sen máis que cambiar o $a \in A$ arbitrario elixido ao inicio por un $c \in C$ arbitrario e facendo as contas no outro sentido, obtemos que

$$C \subset A_{d(A, B) + d(B, C)}.$$

Entón, pola Definición 3.5, temos que, como $d(A, B) + d(B, C) \in \{\delta : A \subset C_\delta \text{ e } C \subset A_\delta\}$,

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

quedando así probado o resultado. ■

Como xa dixemos anteriormente, cada sistema iterativo de funcións determinará un único atractor. Este será un resultado central no estudio destes sistemas, o cal enunciaremos a continuación. Para elo, recordamos o Teorema do Punto Fixo de Banach, teorema do que faremos uso para demostrar o resultado.

Teorema 3.7 (Teorema do Punto Fixo de Banach). *Sexa (X, d) un espazo métrico completo e non vacío con unha contracción $T : X \rightarrow X$. Entón, T posúe un único punto fixo \bar{x} en X , isto é, $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Ademais, poderemos atopar \bar{x} da seguinte forma: comezamos con un elemento arbitrario $x_0 \in X$ e definimos unha sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que $x_n = T(x_{n-1})$ para $n \geq 1$. Entón, terase que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.*

Teorema 3.8. Sexa $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$, $m \geq 2$, un IFS en $D \subset \mathbb{R}^n$ pechado tal que

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq r_i |x - y|, \text{ para todo } x, y \in D,$$

con $0 < r_i < 1$ para $i = 1, \dots, m$. Entón, terase que tal IFS terá un único atractor F , é dicir, un único conxunto compacto e non vacío tal que

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

É máis, tense que

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E),$$

para todo conxunto compacto e non vacío $E \in \mathcal{F}$ tal que $S_i(E) \subset E$ para $i = 1, \dots, m$, onde denotamos por S^k á k -ésima iteración de S , con S definida como

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E), \text{ para } E \in \mathcal{F}.$$

Así, $S^0(E) = E$ e $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ para $k \geq 1$.

Demostración. Consideremos $A, B \in \mathcal{F}$. Entón, remitíndonos á Definición 3.5 da distancia de Hausdorff, terase que

$$\begin{aligned} d(S(A), S(B)) &= d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) = \inf \left\{ \delta : \bigcup_{i=1}^m S_i(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right)_\delta \text{ e } \bigcup_{i=1}^m S_i(B) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A)\right)_\delta \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \delta : S_i(A) \subset (S_i(B))_\delta \text{ e } S_i(B) \subset (S_i(A))_\delta \right\} = d(S_i(A), S_i(B)), \text{ para todo } i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

xa que, se se ten que $S_i(B) \subset (S_i(A))_\delta$ para todo $i = 1, \dots, m$, entón $\bigcup_{i=1}^m S_i(B) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A)\right)_\delta$. Do mesmo xeito, se $S_i(A) \subset (S_i(B))_\delta$ para todo $i = 1, \dots, m$, entón $\bigcup_{i=1}^m S_i(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right)_\delta$. Así,

$$\left\{ \delta : S_i(A) \subset (S_i(B))_\delta \text{ e } S_i(B) \subset (S_i(A))_\delta \right\} \subset \left\{ \delta : \bigcup_{i=1}^m S_i(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right)_\delta \text{ e } \bigcup_{i=1}^m S_i(B) \subset \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A)\right)_\delta \right\},$$

para todo $i = 1, \dots, m$, e o ínfimo do primeiro conxunto será maior ca o do segundo por estar contido nel. En particular, terase que

$$d(S(A), S(B)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} (d(S_i(A), S_i(B))).$$

Agora, por seren as S_i contraccións con $0 < r_i < 1$, $i = 1, \dots, m$, tal e como se indicou no enunciado do teorema, terase que

$$d(S(A), S(B)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} (d(S_i(A), S_i(B))) \leq \max_{1 \leq i \leq m} r_i d(A, B) = \left(\max_{1 \leq i \leq m} r_i \right) d(A, B),$$

isto é, que a función S é tamén unha contracción por ser $0 < \max_{1 \leq i \leq m} r_i < 1$. Pódese probar que d é completa sobre \mathcal{F} (para ver isto con detalle, o lector pode consultar [22]). Polo tanto, o noso espazo métrico (\mathcal{F}, d) será completo. Polo tanto, poderemos aplicar o Teorema 3.7 do Punto Fixo de Banach. Entón, a nosa función S terá un único punto fixo, isto é, un único $F \in \mathcal{F}$ tal que $S(F) = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = F$, e poderemos atopalo sen máis que definir, para un $E \in \mathcal{F}$ arbitrario, a sucesión $(S^k(E))_{k \in \mathbb{N}}$, xa que $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{F}$. Entón, $\lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E) = F$, ou o que é o mesmo, $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$ cando $k \rightarrow \infty$. En particular, se temos que $S_i(E) \subset E$ para todo $i = 1, \dots, m$, entón $S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \subset E$, polo que $(S^k(E))_{k \in \mathbb{N}}$ será unha sucesión decrecente de conxuntos compactos non vacíos, contido cada un no anterior, polo que o seu límite será a intersección de todos eles, é dicir, $\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$. Como polo Teorema 3.7 do Punto Fixo de Banach este será o único punto fixo de S , teremos que $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$. ■

Observación 3.9. Existe unha demostración alternativa que non fai uso do teorema do punto fixo de Banach, demostrando o resultado dunha forma máis elemental. Pódese consultar tal demostración en [16, Theorem 9.1].

Tras este resultado, xurde naturalmente a pregunta de, dado un IFS, cal é o seu atractor F asociado e viceversa. Dado un conxunto F que presente similitudes, podemos, sen máis que observalo, atopar cal sería o seu IFS asociado.

Exemplo 3.10. Se consideramos a curva de Koch, podemos deducir que o seu IFS asociado é o indicado no Exemplo 3.3. Empregaremos MATLAB para representar a curva de Koch empregando o IFS indicado na Figura 3.3, onde se indica de distinta cor cada transformación do IFS para dous casos de iteracións.

Se temos un IFS, o Teorema 3.8 xa nos da un método para atopar o atractor do IFS, que se baseará na expresión

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E),$$

para todo conxunto compacto e non vacío $E \in \mathcal{F}$ tal que $S_i(E) \subset E$ para $i = 1, \dots, m$, que nos permitirá, collendo un conxunto E con esas características, obter a expresión dos puntos do atractor. Para isto, vemos que podemos expresar, para cada k ,

$$S^k(E) = \bigcup_{I_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))\dots)),$$

onde I_k é o conxunto de todas as posibles secuencias de k termos (i_1, \dots, i_k) . Entón, se temos un $x \in F$, entón existirá unha sucesión de índices (i_1, i_2, \dots) tal que $x \in S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))\dots))$ para todo k . Isto danos unha forma de codificar x a través destes índices da forma $x = x_{i_1, i_2, \dots}$. Entón,

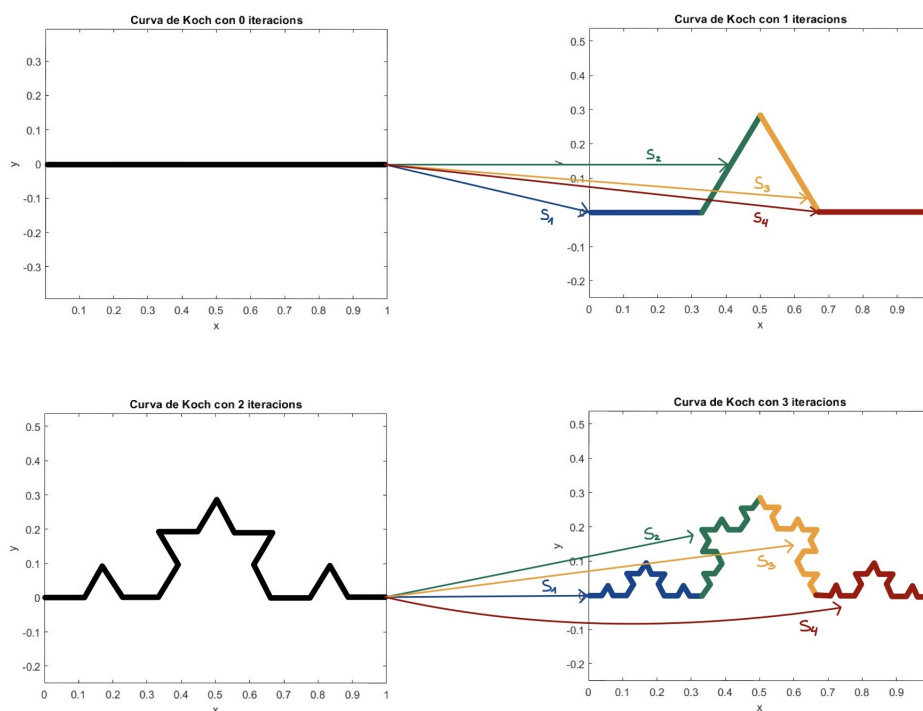


Fig. 3.3. IFS asociado á curva de Koch (imaxe modificada da obtida do Código A.5).

cos elementos de F así codificados, temos que

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}.$$

Con todo isto, obtemos métodos para debuxar o atractor dun IFS. Un método será o chamado *xogo do caos*, que se baseará en elixir un x_0 arbitrario e, elixindo aleatoriamente unha contracción S_{i_1} do IFS $\{S_i\}_{i=1, \dots, m}$, definimos $x_1 = S_{i_1}(x_0)$. Repetindo este proceso para $k = 1, 2, \dots$ (definindo $x_k = S_{i_k}(x_{k-1})$), obtemos, para k suficientemente grande, un punto moi próximo a F . Polo que, realizando unha representación dos puntos da sucesión a partir dun índice suficientemente grande, obteremos unha visualización aproximada de F . Outro método baséase en aplicar a expresión do Teorema 3.8 para un conxunto E coas propiedades indicadas.

Exemplo 3.11. Calcularemos con estes métodos descritos anteriormente o atractor do IFS descrito no Exemplo 3.3, e veremos, como era de esperar, que este atractor parecerá ser a figura desexada, a curva de Koch. Para o xogo do caos, colleremos $x_0 = (\frac{1}{2}, 0)$ como punto inicial. Podemos ver nas Figuras 3.4(a), 3.4(b), 3.4(c) e 3.4(d) as representacións dos puntos da sucesión anteriormente comentada con 100, 1000, 10000 e 100000 iteracións respectivamente. En gris atópanse a primeira metade de puntos da sucesión, que non se aproximan tanto á curva, mentres que en azul atópanse a

segunda metade dos puntos da sucesión, que dan unha mellor aproximación da curva. Con respecto ao outro método, podemos considerar o cadrado C de lado 1 con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. Para o noso IFS, teremos que $S_i(C) \subset C$ para $i = 1, \dots, 4$, e por ser un conxunto compacto e non vacío de \mathbb{R}^n , poderemos aplicar o Teorema 3.8. Polo tanto, o noso atractor será a intersección destes cadrados conforme iteramos ate infinito. Pódese ver nas Figuras 3.4(e), 3.4(f), 3.4(g) e 3.4(h) a representación da primeira, segunda, terceira e cuarta iteración respectivamente para unha malla que simula o noso cadrado C . O código empregado pódese consultar no Código A.6.

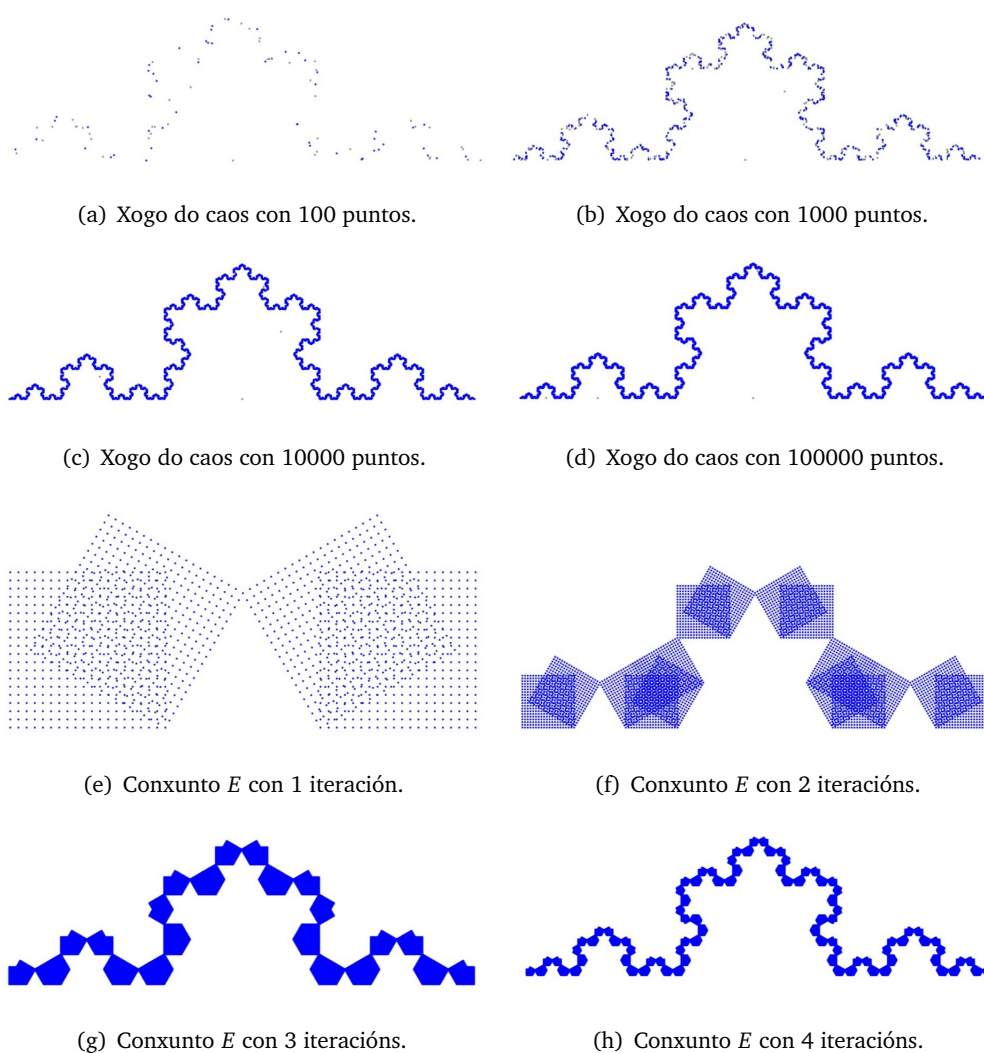


Fig. 3.4. Representación da curva de Koch a través dos dous métodos.

3.1. Dimensión de conxuntos autosemellantes

Como xa indicamos anteriormente, a dimensión de Hausdorff é, en xeral, complexa de calcular. Aínda así, para conxuntos autosemellantes podemos atopar formas sinxelas de calculala. Para elo, imos considerar nesta sección IFSs $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$, con S_i , $i = 1, \dots, m$, similitudes, é dicir, tales que

$$|S_i(x) - S_i(y)| = r_i |x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $0 < r_i < 1$, $i = 1, \dots, m$. Un atractor F asociado a un IFS deste estilo dirase que é un **conxunto autosemellante**. Exemplos destes conxuntos poden ser o copo de neve de Koch ou o triángulo de Sierpiński. Definiremos o seguinte concepto de dimensión para este tipo de conxuntos.

Definición 3.12. Sexa un IFS $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$ con

$$|S_i(x) - S_i(y)| = r_i |x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $0 < r_i < 1$, $i = 1, \dots, m$. Diremos que a **dimensión de semellanza** do atractor F do IFS será o único número s que satisfai

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1.$$

Veremos que, baixo certas condicións, esta dimensión coincidirá coa de Hausdorff e a de conteo de caixas, posto que, se consideramos $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ unión disxunta (só será necesario que sexa preto a disxunta), para un IFS $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$ nas condicións da definición anterior, entón

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m r_i^s \mathcal{H}^s(F),$$

onde a segunda igualdade ven dada polo Corolario 2.29 sobre a propiedade de escala da medida de Hausdorff. Se $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, con $s = \dim_{\text{H}} F$, entón podemos cancelar os $\mathcal{H}^s(F)$, acadando que a dimensión de Hausdorff coincide coa de semellanza.

Para ver o anterior, comezaremos por especificar que entendemos por que unha unión estea preto a ser disxunta, é dicir, que as compoñentes da unión non teñan intersección ‘de máis’. Para elo, definiremos o seguinte.

Definición 3.13. Sexa un IFS $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$. Diremos que tal IFS cumpre a **condición do conxunto aberto** se existe un conxunto V aberto, acoutado e non vacío tal que

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V,$$

coa unión disxunta.

Con isto en mente, temos o seguinte resultado, recibe o nome de Teorema de Moran.

Teorema 3.14 (de Moran). *Consideremos un IFS Sexa un IFS $\{S_i\}_{i=1,\dots,m}$ en \mathbb{R}^n que cumpra a condición do conxunto aberto e tal que*

$$|S_i(x) - S_i(y)| = r_i |x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $0 < r_i < 1$, $i = 1, \dots, m$. Sexa F o seu atractor asociado dado polo Teorema 3.8 por

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Entón, terase que $\dim_{\text{H}} F = \dim_{\text{B}} F = s$, onde s é a dimensión de semellanza, é dicir, o único s que satisfai

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1.$$

Ademais, tense que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

A proba deste teorema é bastante complexa. O lector pode atopala en [16, Theorem 9.3]. O resultado danos un método moi sinxelo para atopar a dimensión de Hausdorff dos conxuntos fractais que presentan autosemellanza, sen máis que coñecer o seu IFS asociado.

Exemplo 3.15. Seguindo na nosa liña, consideremos o copo de neve de Koch F co seu IFS asociado $\{S_i\}_{i=1,\dots,4}$ definido no Exemplo 3.3. Entón, se consideramos o interior do triángulo T de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, temos que, como podemos observar la Figura 3.5 (obtida co Código A.7 no software Wolfram Mathematica), se cumpre a condición do conxunto aberto, é dicir, $S_i(T) \subset T$, $i = 1,2,3,4$, e T é un conxunto aberto, acoutado e non vacío. Entón, poderemos calcular a dimensión de Hausdorff da curva de Koch sen máis que aplicar o Teorema 3.14 e, adicionalmente, teremos tamén que tal dimensión coincidirá coa de conteo de caixas e a de semellanza. Entón, como temos que as contraccións do IFS asociado á curva de Koch son tales que $r_i = \frac{1}{3}$, $i = 1,2,3,4$, por seren contraccións de factor $\frac{1}{3}$ e, eventualmente, rotacións e traslacións, aplicando o teorema podemos afirmar que $\dim_{\text{H}} F = \dim_{\text{B}} F = s$, con s a dimensión de semellanza, isto é, o único s que satisfai

$$\sum_{i=1}^4 r_i^s = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Entón, sen máis que despxear aplicando logaritmos,

$$4 = (3)^s \iff \log 4 = s \log 3 \iff s = \frac{\log 4}{\log 3},$$

como xa sabíamos.

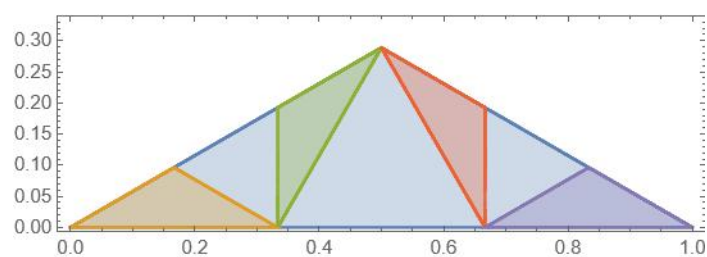


Fig. 3.5. Condición do conxunto aberto para a curva de Koch obtida do Código A.7.

Observación 3.16. En verdade, xa sabíamos que esa dimensión era a do copo de neve de Koch, tal e como calculamos no Exemplo 2.14. Aínda así, con isto e tendo en conta que a dimensión de conteo de caixas é finitamente estable, temos que a dimensión do copo de neve de Koch debe coincidir coa da curva de Koch, por ser o primeiro nada máis que 3 copias do segundo rotadas e trasladadas.

4. Algunhas aplicacións dos fractais

Os fractais posúen un amplo número de aplicacións, sobre todo cando se desexa modelar comportamentos da natureza. Estes comportamentos, en moitos casos, afástanse de ser regulares, parecendo que seguen un comportamento caótico. Empregando a xeometría fractal, pódese atopar orde en este caos, reducindo patróns complexos a fórmulas matemáticas simples de manexar e interpretar.

Exploraremos neste capítulo algunha aplicación relevante dos fractais, dende o campo da tecnoloxía ate o campo da bioloxía ou medicina, e incluso da arte.

4.1. Movemento browniano

En 1923, Wiener propuxo un modelo matemático que conseguía explicar o movemento irregular dunha partícula dentro dun líquido ou dun gas, a cal é bombardeada por outras partículas dentro do medio, sendo moi impredicible o seu movemento. Estas partículas seguen movementos tan irregulares que, ao fixarnos no camiño que recorreron nun medio 3-dimensional, vemos que chegan a ter dimensión de Hausdorff igual a 2. Nesta sección imos expoñer este modelo matemático que, facendo uso de probabilidade, xera traxectorias de partículas que se asemellan ás que se observaron na realidade.

Definición 4.1. Chamamos **camiño seguido por unha partícula** dende o tempo t_1 ate o tempo t_2 ao conxunto

$$f([t_1, t_2]) = \{f(t) : t_1 \leq t \leq t_2\},$$

onde unha $f(t)$ é a función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que indica a posición da partícula en tempo t .

Observación 4.2. En algunha referencia, pode referirse ao anterior conxunto como a gráfica da función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ sempre e cando $n \geq 2$. É dicir, como o conxunto

$$\{(t, f(t)) : t_1 \leq t \leq t_2\} \subset \mathbb{R}^n.$$

No noso caso, centrarémonos na definición dada.

Un movemento browniano é un tipo de movemento que involucra fenómenos aleatorios. Centrémonos primeiro en como se define en \mathbb{R} e, posteriormente, estenderemos a definición para dimensións superiores. Na recta real, ao movemento browniano coñécese co nome de “marcha do

borracho”, termo que describe perfectamente a idea xeral deste movemento. Supoñamos que temos ao camiñante na recta real, que identificaremos cun punto dela. Este dará un paso de lonxitude δ en intervalos de tempo τ , cunha probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ de dar o paso cara adiante ou cara atrás. Se supoñemos que o noso camiñante comeza no punto 0, temos que a posición deste nun tempo t , que denotaremos por $X_\tau(t)$, virá descrita por

$$X_\tau(t) = \delta(Y_1 + \cdots + Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor}),$$

onde $Y_1, \dots, Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor}$ son variables aleatorias independentes que toman o valor 1 ou -1 con igual probabilidade de $1/2$. É dicir, a posición do camiñante en cada instante será unha variable aleatoria que ven dada pola suma das variables aleatorias de cada paso que deu. Se supoñemos que en cada intervalo de tempo τ o paso que dá é de lonxitude τ , é dicir, se consideramos $\delta = \tau$, temos que

$$\mathbb{E}[X_\tau(t)] = \sqrt{\tau} \left(\mathbb{E}[Y_1] + \cdots + \mathbb{E}\left[Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor}\right] \right) = 0$$

e

$$\text{Var}(X_\tau(t)) = \tau \left(\text{Var}(Y_1) + \cdots + \text{Var}\left(Y_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor}\right) \right) = \tau \lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \approx t,$$

para t suficientemente grande con respecto a τ . Temos entón, polo teorema central do límite, que a posición $X_\tau(t)$ do noso camiñante é unha variable aleatoria e segue aproximadamente unha normal con media 0 e desviación típica próxima a \sqrt{t} para τ suficientemente pequeno. Os incrementos $X_\tau(t+h) - X_\tau(t)$ para t e h fixados con τ suficientemente pequeno seguirán tamén tal distribución.

Definición 4.3. Sexa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espazo de probabilidade. Diremos que X é un **proceso aleatorio** ou unha **función aleatoria** de $[0, \infty)$ en \mathbb{R} se $X(t)$ é unha variable aleatoria para cada $t \in [0, \infty)$.

Definición 4.4. Diremos que X é un **movemento browniano** se X é un proceso aleatorio tal que

- (I) $X(0) = 0$ e $X(t)$ é continua como función de t con probabilidade 1;
- (II) o incremento $X(t+h) - X(t)$ segue unha distribución normal de media 0 e varianza h para todo $t \geq 0$ e $h > 0$;
- (III) $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_4) - X(t_3)$, \dots , $X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$, con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2m}$, son independentes.

Pódese probar que existen este tipo de procesos aleatorios, así como desenvolver métodos para simulalos. En [16, Section 16.1] danse tres destes métodos. Podemos empregar a función `wfbm()` do paquete *Wavelet* de MATLAB para representar este tipo de movementos, tal e como se va na Figura 4.1. O seguinte teorema expón o irregulares que son estes procesos.

Teorema 4.5 ([16, Theorem 16.2]). *O gráfico dun movemento browniano $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ten dimensión de Hausdorff e de conteo de caixas igual a $1 + \frac{1}{2}$ con probabilidade 1.*

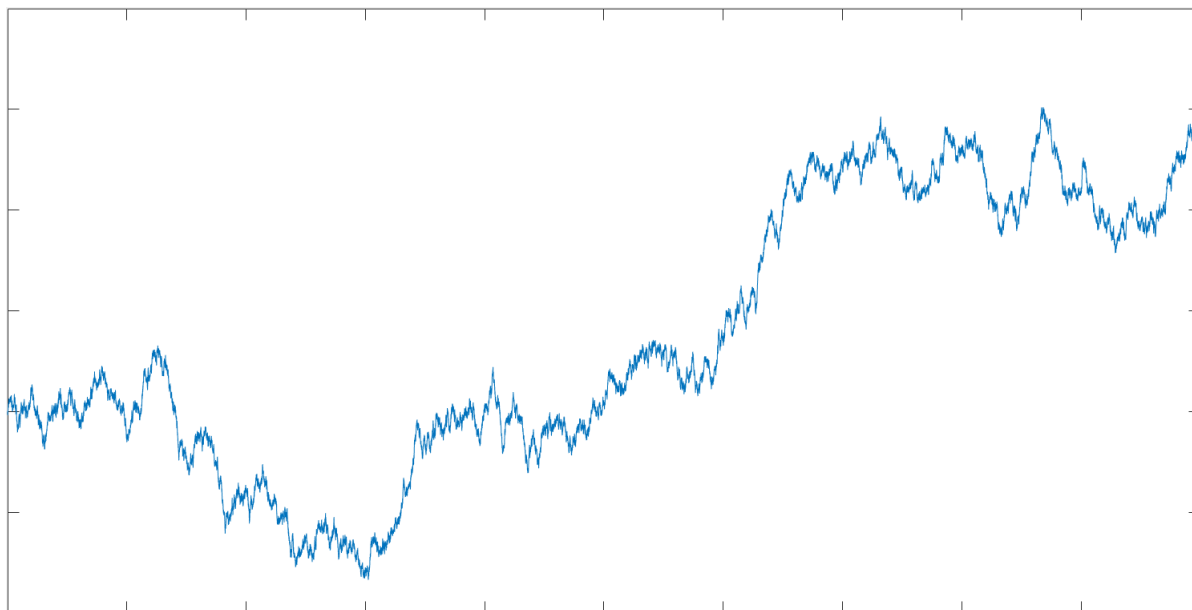


Fig. 4.1. Movement browniano obtido coa función `wfbm()` do paquete Wavelet de MATLAB.

Pódese ver que, aínda sendo continuas, estas función non son diferenciables en ningún punto con probabilidade 1.

Á hora de definir un movement browniano para dimensións superiores, só temos que considerar, en cada unha das compoñentes, movementos brownianos independentes uns de outros.

Definición 4.6. Diremos que $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ é un **movement browniano n -dimensional** se as súas compoñentes X_i son movementos brownianos 1-dimensionais independentes para $i = 1, \dots, n$.

Podemos observar na Figura 4.2 unha representación dun movement browniano 2-dimensional, que foi obtida empregando o Código A.8. Tal e como tíñamos no caso 1-dimensional, para dimensións superiores tamén teremos que as traxectorias destes movementos son moi complexas. Non se tratan de curvas usuais, se non que presentan enormes irregularidades, o cal se expón no seguinte teorema.

Teorema 4.7 ([16, Theorem 16.5]). *O gráfico dun movement browniano n -dimensional $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ten dimensión de Hausdorff e de conteo de caixas igual a 2 con probabilidade 1.*

Aínda que estes movementos son de gran interese a nivel teórico, moitos sucesos da natureza requiren de ser modelados con movementos que permitan que a súa traxectoria teña diferente dimensión, xa que cos movementos brownianos restrinxímonos simplemente aos casos con dimensión de Hausdorff e de conteo de caixas igual a $1 + \frac{1}{2}$ para o caso 1-dimensional e 2 para o caso

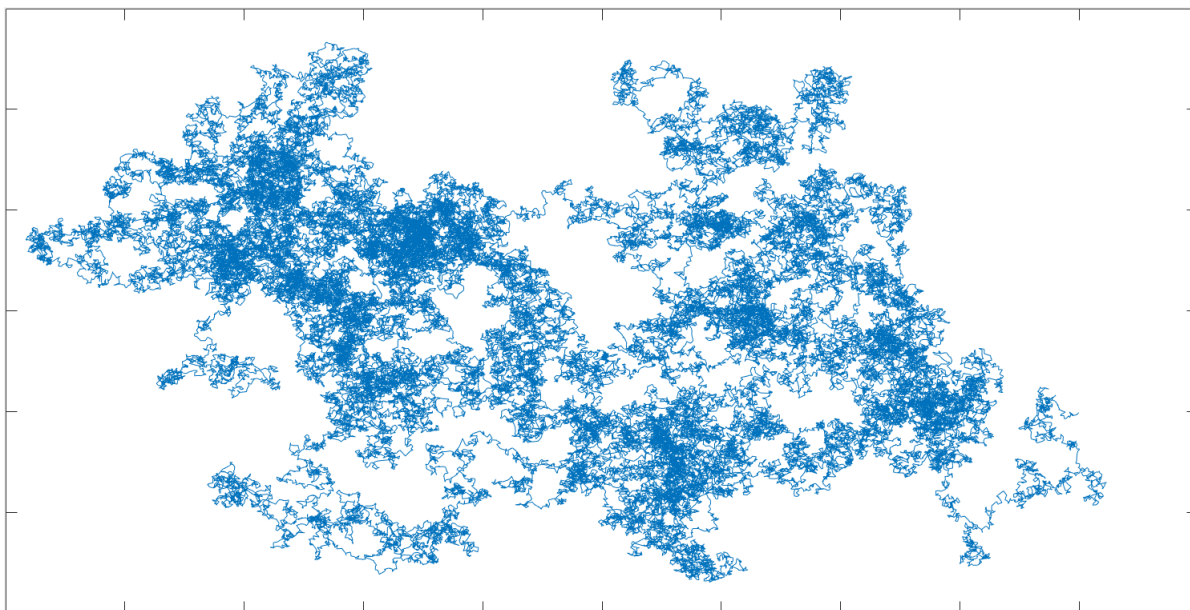


Fig. 4.2. Movemento browniano 2-dimensional obtido co Código A.8.

n -dimensional, $n \geq 2$. Con este fin, trataremos de relaxar as condicións expostas na Definición 4.4, para así conseguir uns movementos que permitan máis flexibilidade na dimensión da gráfica obtida.

Definición 4.8. Diremos que un proceso aleatorio X definido nun intervalo calquera é un **proceso gaussiano** se o vector aleatorio $(X(t_1), \dots, X(t_m))$ segue unha normal multivariante para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$ pertencen ao intervalo.

Observación 4.9. Un movemento browniano é claramente un proceso gaussiano, xa que todas as súas compoñentes son normais univariantes e, ao ser independentes unhas de outras, todas seguen en conxunto unha distribución normal multivariante.

Definición 4.10. Diremos que X é un **movemento browniano fraccional de índice α** , $0 < \alpha < 1$, se $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é un proceso gaussiano tal que

- (I) $X(0) = 0$ e $X(t)$ continua con probabilidade 1;
- (II) $X(t+h) - X(t)$ segue unha distribución normal con media 0 e varianza $h^{2\alpha}$ para todo $t \geq 0$ e $h > 0$.

Ao igual que para os movementos brownianos, pódese probar que os movementos brownianos fraccionais existen. Fixémonos en que un movemento browniano non é máis que un movemento browniano fraccional con $\alpha = \frac{1}{2}$. O interesante de considerar estes novos movementos é que, a diferenza do que acontecía para os anteriores, podemos controlar que dimensión terá a súa gráfica,

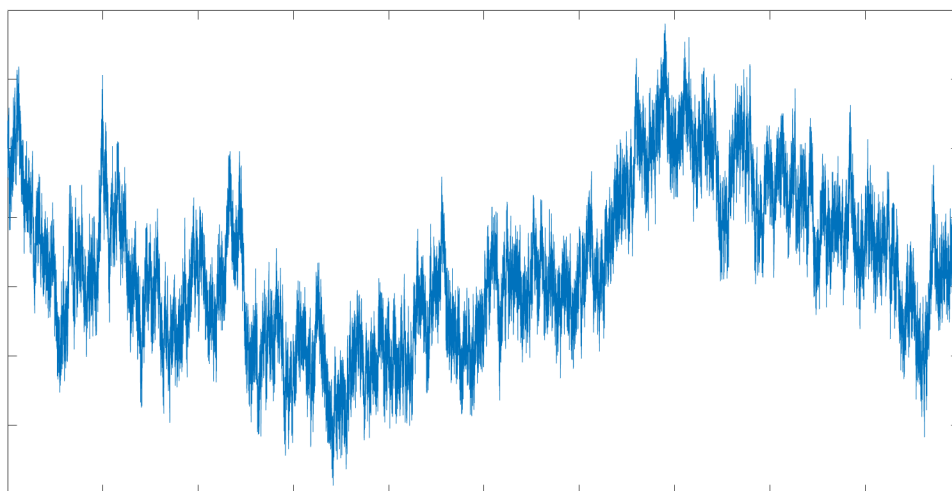


Fig. 4.3. Movemento browniano fraccional para $\alpha = 0.2$.

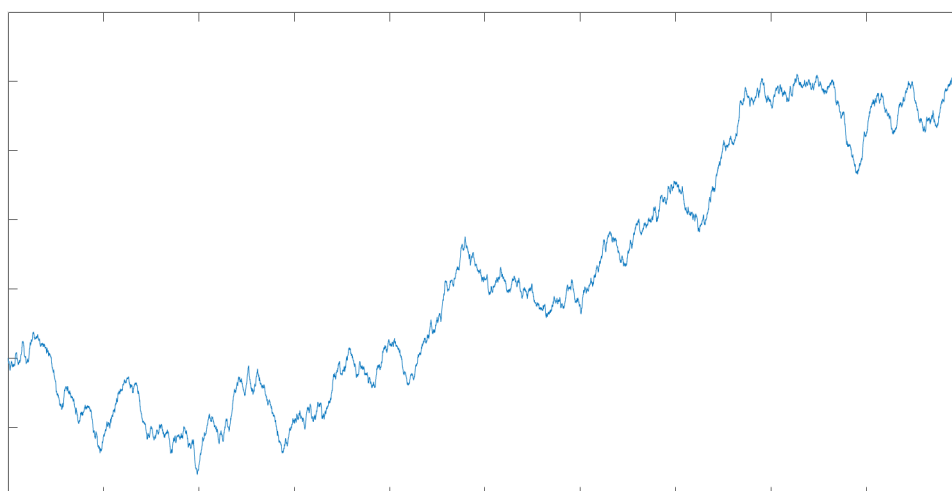


Fig. 4.4. Movemento browniano fraccional para $\alpha = 0.7$.

tal e como expoñemos no seguinte teorema.

Teorema 4.11 ([16, Theorem 16.8]). *O gráfico dun movemento browniano fraccional de índice α $X : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, ten dimensión de Hausdorff e de conteo de caixas igual a $2 - \alpha$ con probabilidade 1.*

Esto permítenos regular a rugosidade desexada para a nosa gráfica, permitindo modificar así a dimensión de Hausdorff desta. Vemos na Figura 4.3 a representación dun movemento browniano fraccional con $\alpha = 0.2$, máis rugoso que o movemento browniano representado na Figura 4.1. Así mesmo, na Figura 4.4 represéntase un movemento browniano fraccional con $\alpha = 0.7$, menos rugoso

que os anteriores. Podemos calcular a dimensión de Hausdorff e de conteo de caixas destes gráficos sen máis que aplicar o Teorema 4.11.

Podemos estender o concepto de movemento browniano fraccional a dúas dimensións co fin de xerar superficies rugosas que se asemellen á realidade. Isto ten gran utilidade na creación de terreos para contido audiovisual, dende películas ate videoxogos.

Definición 4.12. Diremos que X é un **movemento browniano fraccional 2-dimensional de índice α** , $0 < \alpha < 1$, se $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función aleatoria gaussiana (como a normal multivariante) tal que

- (I) $X(0,0) = 0$ e $X(x,y)$ continua como función de (x,y) con probabilidade 1;
- (II) $X(x+h,y+k) - X(x,y)$ segue unha distribución normal con media 0 e varianza $(h^2 + k^2)^\alpha = |(h,k)|^{2\alpha}$ para todo $(x,y), (h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Definición 4.13. Dado X un movemento browniano fraccional 2-dimensional de índice α , diremos que $\{(x,y,X(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ é unha **superficie browniana fraccional de índice α** .

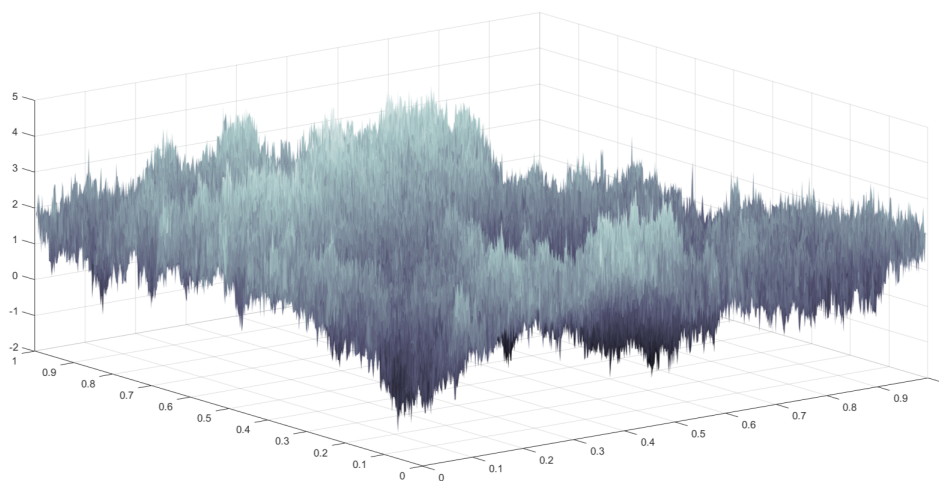


Fig. 4.5. Superficie browniana fraccional 2-dimensional para $\alpha = 0.2$.

Teorema 4.14. Unha superficie browniana fraccional de índice α , ten dimensión de Hausdorff e de conteo de caixas igual a $3 - \alpha$ con probabilidade 1.

Estas superficies son de gran interese no mundo audiovisual á hora de xerar terreos de forma artificial. Ademais, pódese axustar a rugosidade da superficie, tal e como expón o Teorema 4.14, obtendo así terreos tan irregulares como se desexe. Podemos empregar o código de [12] para xerar algunha destas superficies. Na Figura 4.5 vese representada a superficie browniana fraccional para

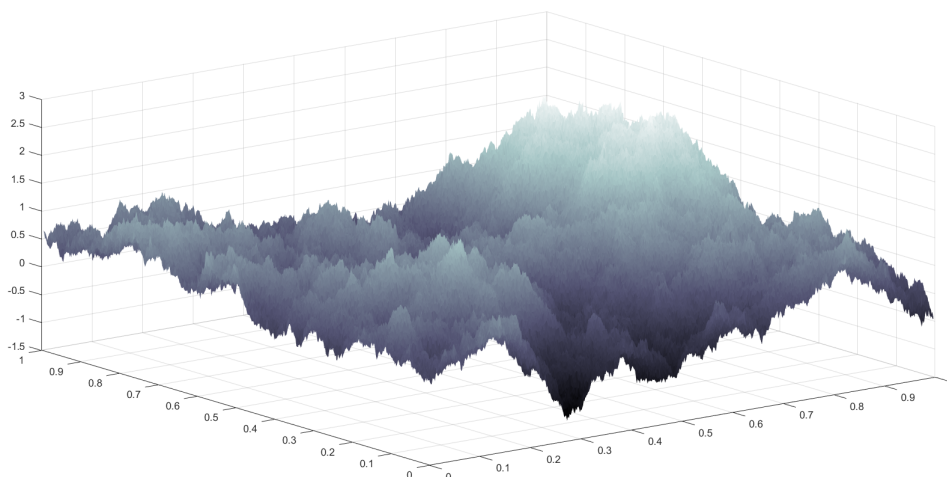


Fig. 4.6. Superficie browniana fraccional 2-dimensional para $\alpha = 0.5$.

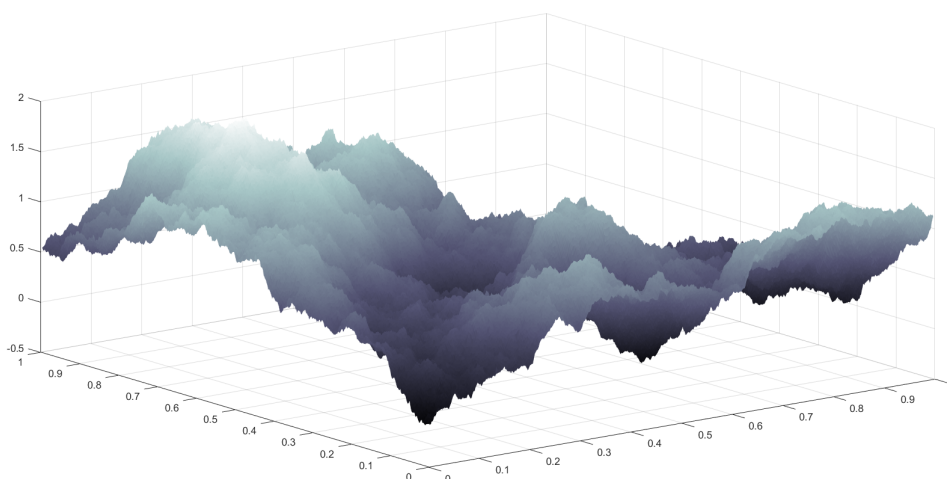


Fig. 4.7. Superficie browniana fraccional 2-dimensional para $\alpha = 0.7$.

$\alpha = 0.2$, na Figura 4.6 a superficie para $\alpha = 0.5$ e na Figura 4.7 para $\alpha = 0.7$. A facilidade de xerar estas superficies computacionalmente fan delas unha perfecta opción para, por exemplo, xerar terreos de videoxogos de forma procedemental, xa que ao ser xerados aleatoriamente, teremos terreos diferentes para cada xeración. Con respecto aos movementos brownianos fraccionais 2-dimensionais son útiles á hora de simular o movemento que segue unha partícula nun líquido ou gas, xa que debido á enorme cantidade de interaccións que ten coas partículas que a rodean, os movementos desta parecen ser aleatorios en todo momento. En [26], emprégase este tipo de movemento aleatorio para simular a traxectoria dun átomo sobre unha superficie cristalina de Ag(111). Os movementos brownianos 1-dimensionais aparecen no ámbito da economía, sendo útiles para modelar o compor-

tamento da variación do prezo dun produto. Pode verse na Figura 4.8 unha simulación do prezo de produtos realizada a partir de parámetros económicos co modelo de Black-Scholes.

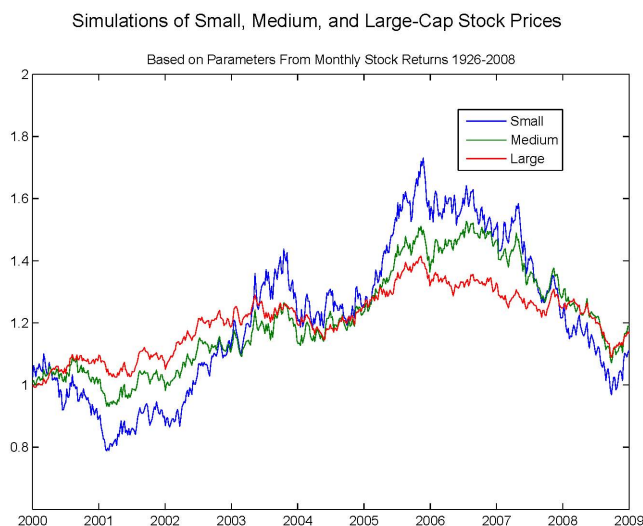


Fig. 4.8. Simulación de prezos co modelo de Black-Scholes [4].

4.2. Antenas fractais

En 1987, Nathan Cohen, un radioastrónomo aficionado á radio, atopouse co problema de que, ao estar nese momento de alugamento lonxe da súa residencia, necesitaba dunha antena para poder comunicarse coa súa radio. Por desgracia, o seu caseiro non permitía antenas para os inquilinos, que de aquelas eran moi voluminosas e podían molestar aos veciños. Ante esta situación e inspirado por unha charla de Mandelbrot que presenciou un ano atrás, Nathan experimentou intentando crear unha antena con deseño fractal, buscando que a forma desta presentara autosemellanza, tal e como se mostra na Figura 4.9. Observou que, dándolle esa forma á antena, esta funcionaba extraordinariamente ben, recollendo unha ampla variedade de frecuencias. Vendo os bos resultados deste experimento, continuou investigando este fenómeno, definindo inicialmente o que denominou **compresión de perímetro** como

$$PC = A \log [N (D + C)],$$

onde A e C son uns coeficientes que dependen da forma fractal escollida para a antena, N é o número de iteracións da forma fractal e D é a dimensión fractal deste. O que nos ven a indicar este valor é que, canto máis grande sexa, máis poderemos reducir o tamaño da antena para percibir as mesmas

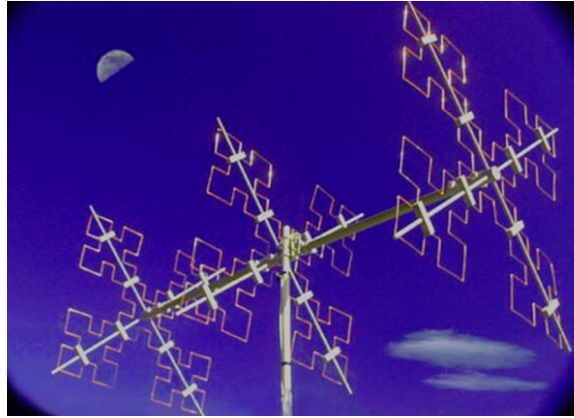


Fig. 4.9. Forma da primeira antena fractal que construíu Nathan Cohen [1].

frecuencias. Polo tanto, serán de interese as antenas que, con poucas iteracións da forma fractal, acaden unha compresión de perímetro grande. Con este primeiro acercamento ao estudo das antenas fractais, xunto a Robert Hohfeld, publicou en [23] un estudo que amosaba a necesidade dunha antena de presentar autosemellanza para funcionar de forma óptima. A través das ecuacións de Maxwell, se asumimos a dependencia ao longo do tempo das magnitudes físicas proporcional a $e^{j\omega t}$, con ω a frecuencia, temos que o campo eléctrico no punto x é $e^{j\omega t} \mathbf{E}(x)$ e o campo magnético é $e^{j\omega t} \mathbf{H}(x)$, de onde se obtén a través das ecuación de Maxwell que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E},$$

onde μ e ϵ son a permitividade e a permeabilidade do espazo. Se realizamos as transformacións dadas por

$$x \rightarrow sx \quad \text{e} \quad \omega \rightarrow \frac{\omega}{s},$$

é dicir, un reescalado das coordenadas por un factor s á vez que un reescalado da frecuencia por un factor $\frac{1}{s}$. Se aplicamos estas transformacións a un operador diferencial, obtemos derivadas da forma

$$\frac{\partial}{\partial(sx)} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x},$$

polo que o operador do rotacional ∇ convértese en $\frac{1}{s}\nabla$ ao realizar a transformación. Con isto, as ecuacións de Maxwell para as transformacións convértense en

$$\frac{1}{s}\nabla \times \mathbf{E} = -j\frac{\omega}{s}\mu\mathbf{H},$$

$$\frac{1}{s}\nabla \times \mathbf{H} = j\frac{\omega}{s}\epsilon\mathbf{E}.$$

Entón, as ecuacións de Maxwell mantéñense iguais, ao poder eliminar o factor $\frac{1}{s}$. Isto indícanos que, se a antena presenta a mesma forma a escala por un factor s , esperarase un comportamento similar á forma orixinal para frecuencias escaladas por un factor $\frac{1}{s}$, é dicir, para lonxitudes de onda escaladas por un factor s . O que nos quere dicir isto é que, se a antena presenta autosemellanza, pode recoller unha maior variedade de frecuencias, sendo isto de gran interese no deseño dunha antena. Pódese ver na Figura 4.10 unha representación de como unha antena que presenta autosemellanza pode recoller diferentes frecuencias.

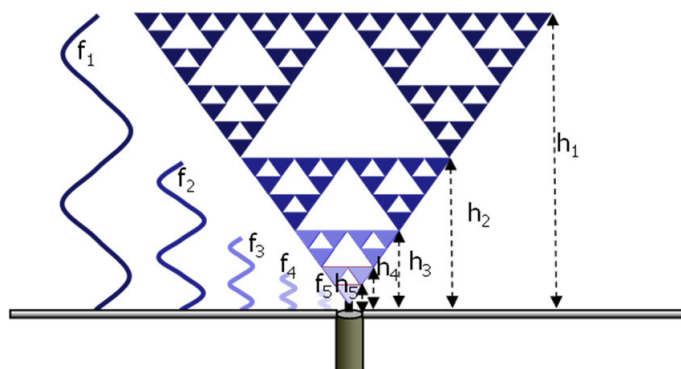


Fig. 4.10. Representación da diversidade de frecuencias que pode recoller unha antena fractal [10].

Esta idea foi empregada no deseño de moitas antenas fractais, que, sen perder o ancho de banda das tradicionais, permitían reducir o tamaño destas para as novas necesidades, como para introducirlas en aparellos de peto (teléfonos móbiles), tal e como se mostra na Figura 4.11. En [29] expóñense as boas propiedades que presentan estes deseños.

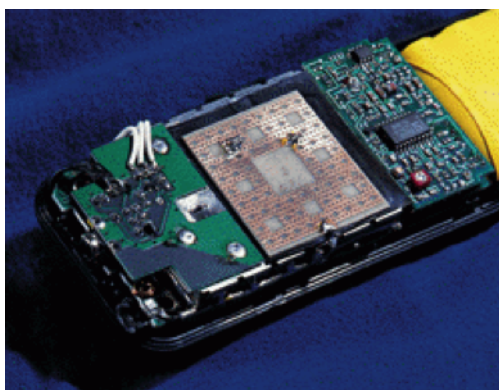


Fig. 4.11. Antena con forma de fractal (alfombra de Sierpiński) nun teléfono móbil [21].

4.3. Outras aplicacións

Unha das aplicacións máis coñecidas dos fractais é a compresión de imaxe empregando a propiedade de autosemellanza presente en algún destes. Como isto é frecuente na natureza, un algoritmo de compresión de imaxes que se aproveite de isto para non gardar información irrelevante pode ser útil. Se un elemento da imaxe presenta autosemellanza, podemos simplemente almacenar a información dun anaco deste elemento, para despois xeralo sen máis que aplicarlle transformacións, tal e como fixemos para os sistemas iterativos de funcións. Entón, só teríamos que almacenar o anaco e as transformacións que se teñen que realizar en el para acadar o elemento orixinal, reducindo enormemente a cantidade de información almacenada, sobre todo en obxectos que presenten moita autosemellanza, como árbores con moitas ramificacións, montañas, todo tipo de plantas... A pesar de isto, estes algoritmos presentan certos problemas. Un problema é atopar, dada unha imaxe, cales serían as zonas que presentan autosemellanza e cales non. A nivel visual, é sinxelo para un humano percibir isto, pero para establecer un algoritmo debemos de darlle instrucións á máquina para que detecte isto, o cal pode ser complexo. Outro problema e que, para imaxes que precisan de gran detalle a pequena escala, como pode ser imaxes para a medicina como radioloxías, este tipo de algoritmos fan que se perdan tales detalles, posto que, se en algún momento deixa de haber autosemellanza cando nos fixamos a menor escala, o algoritmo simplemente iteraría o anaco que atopou autosemellante nun inicio, perdendo a información da imaxe orixinal. Polo tanto, este tipo de algoritmos poden ser de utilidade cando estes detalles non son relevantes, como fotos a paisaxes, selfies, fotos grupais e demais fotos que non teñan un uso profesional. Pódese consultar máis acerca destes algoritmos en [20].

Os fractais tamén tiveron gran peso no mundo artístico, por presentar estas formas moi asombrosas e únicas, que non vemos en calquera tipo de forma tradicional. Así é que atopamos elementos fractais en obras de arte tan coñecidas como *A Gran Ola de Kanagawa*, que se atopa exposta no *Museo Metropolitano do Arte*, en New York. Podemos ver na Figura 4.12 como esta obra de arte presenta autosemellanza na crista das olas, ramificando unha e outra vez. Aínda que esta obra non sexa a máis parecida a un fractal, fíxose mención a ela por ser unha das obras artísticas máis coñecidas que presentan este tipo de patróns. Se nos fixamos na arquitectura islámica da Figura 4.13, podemos ver como se empregan patróns repetitivos, semellando fractais. Como estes exemplos, existen moitos máis acerca do uso dos fractais na arte. Para elo, emprégase software de xeración de fractais, como poden ser *Apophysis*, que é de código aberto, *Terragen*, un software para xerar terreo fractal, e moitos outros programas. Con eles, pódense xerar fractais que cumpran o desexado para as aplicacións anteriormente nomeadas, podendo modificar a rugosidade, color ou forma de estes.



Fig. 4.12. A Gran Ola de Kanagawa [7].

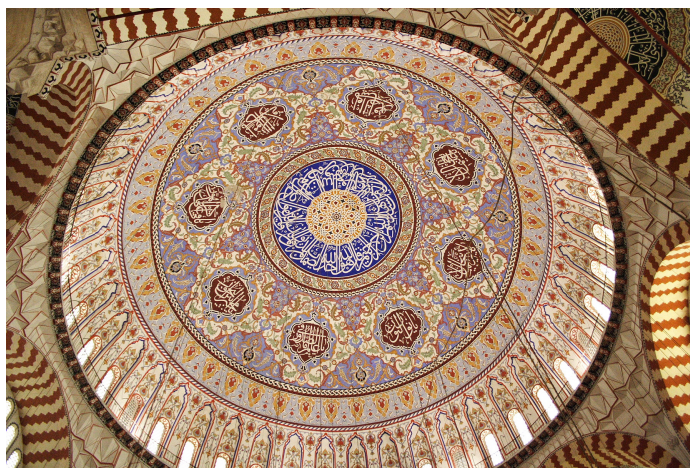


Fig. 4.13. Forma fractal na cúpula principal de Selimiye Mosque, Edirne, Turkey [6].

A. Apéndice

O código deste apéndice foi escrito polo autor, coa axuda da intelixencia artificial de ChatGPT e de algún anaco de código atopado na web.

A.1. Código para debuxar o conxunto de Mandelbrot

Código inspirado en [11]. As cores indican a velocidade de converxencia para cada número complexo, sendo branco para os números que non converxen e, en orde de velocidade de converxencia, vermello, laranxa, amarelo, azul e verde, de menor velocidade de converxencia a maior.

```
1
2     escaladetalle = 0.0002; % canto mais pequeno, mais detalle
3
4     x = -2:escaladetalle:1;
5     y = -1:escaladetalle:1;
6     [X,Y] = meshgrid(x,y);
7     A = X + Y * 1j;
8     Z = zeros(size(A));
9     itM = 10;
10    %% Averiguamos se os numeros estan no conxunto
11    for k = 1:itM
12        Z = Z.^2 + A;
13    end
14    %% Coloreamos a matriz D
15    D = exp(-abs(Z));
16
17    blanco = [1, 1, 1];
18    vermello = [1, 0, 0];
19    laranxa = [1, 0.5, 0];
20    amarelo = [1, 1, 0];
21    azul = [0, 0, 1];
22    verde = [0, 1, 0];
23    map = [blanco
24           vermello
```

```
25     laranxa
26     amarelo
27     azul
28     verde];
29
30     imagesc(D)
31     colormap(map)
32     axis equal
33     saveas(gcf, 'mandelbrot.jpg')
34
```

Código A.1: Código conxunto de Mandelbrot.

A.2. Código da función para xerar o copo de neve de Koch

```
1
2 % Funcion que xera o fractal do copo de neve de Koch (aprox.) dados:
3 %
4 %   iterations: numero de iteracions de aproximacion do fractal.
5 %
6 %   plot_ksf: true para representar a figura, false para non representala.
7
8 function vertices = kochSnowflake(iterations,plot_ksf)
9     % Definir os vertices do triangulo equilatero inicial
10    vertices = [0,0; 1,0; 0.5,sqrt(3)/2; 0,0];
11
12    % Aplicar iteracions de Koch
13    for iter = 1:iterations
14        new_vertices = [];
15        for i = 1:length(vertices)-1
16            % Dividir o segmento de linha en tres partes iguais
17            v1 = vertices(i,:);
18            v2 = vertices(i+1,:);
19            delta = (v2 - v1) / 3;
20
21            % Calcular os puntos intermedios
22            p1 = v1;
23            p2 = v1 + delta;
24            p3 = p2 + delta * [cos(pi/3),-sin(pi/3); sin(pi/3),cos(pi/3)];
25            p4 = v1 + 2 * delta;
```

```

26     p5 = v2;
27
28     % Contruir os novos vertices
29     new_vertices = [new_vertices; p1; p2; p3; p4];
30
31     end
32     vertices = [new_vertices; new_vertices(1,:)]; % Pechar o bucle
33 end
34
35 % Redondear os valores dos vertices (para evitar erros de maquina)
36 vertices = round(vertices,10);
37
38 % Mostrar a minima distancia teorica entre os vertices
39 min_distance = 1/3^iterations;
40 disp(['Minimum distance between vertices: ', num2str(min_distance)]);
41 if plot_ksf
42     figure();
43     % Representar o copo de neve de Koch
44     plot(vertices(:,1), vertices(:,2), 'k-');
45
46     % Propiedades da representacion
47     axis equal;
48     title(['Koch Snowflake (', num2str(iterations), ' iterations)']);
49     xlabel('x');
50     ylabel('y');
51 end
52 end

```

Código A.2: Código copo de neve de Koch.

A.3. Código para calcular a dimensión de conteo de caixas

Fragmento de código relativo á intersección entre dous segmentos obtido de [2].

```

1
2 % Funcion que calcula a dimension de conteo de caixas dunha figura dados:
3 %
4 %     vertices: os vertices da figura desexada.
5 %
6 %     data: unha matriz donde cada columna representa as iteracions do

```

```
7 % fractal (primeira columna) (so para temas de representacion grafica), o
8 % epsilon inicial para a malla (segunda columna), o factor de escala da
9 % malla (terceira columna) e o epsilon minimo da malla (cuarta columna).
10 %
11 % i: a fila de 'data' da cual colleremos os datos.
12 %
13 % epsilon_to_plot: un vector cos epsilons desexados para representar a
14 % malla coa figura, resaltando os cubos que intersecan coa figura
15 % ([1,2,3] para o primeiro, segundo e terceiro epsilon por exemplo)
16
17 function box_counting_dimension = boxCountingDimension(vertices,data,i, ...
18     epsilon_to_plot)
19
20     % Extracion de variables
21     iterations = data(i,1);
22     initial_epsilon = data(i,2);
23     scale_factor = data(i,3);
24     min_epsilon = data(i,4);
25     % Inicializar vectores para almacenar 'log(epsilon)' e 'log(N)'
26     log_epsilon = [];
27     log_N = [];
28
29
30     % Calculo da dimension de conteo de caixas
31     epsilon = initial_epsilon;
32     % Contador de iteracions realizadas
33     iteration = 0;
34
35     while epsilon > min_epsilon
36         iteration = iteration + 1;
37         % Contar caixas
38         num_boxes = countBoxes(vertices,epsilon,iteration,epsilon_to_plot);
39
40         % Almacenar 'log(epsilon)' e 'log(N)'
41         log_epsilon = [log_epsilon; log(epsilon)];
42         log_N = [log_N; log(num_boxes)];
43
44         % Reducir o tamaño das caixas
45         epsilon = epsilon * scale_factor;
46     end
47
```

```

48     % Representacion do grafico log-log
49     figure();
50     plot(log_epsilon, log_N, 'o-');
51     xlabel('log(\epsilon)');
52     ylabel('log(N)');
53     title(['Koch: ', num2str(iterations), ', In.Ep.: ', ...
54           num2str(initial_epsilon), ', ScaleFac.: ', ...
55           num2str(scale_factor), ', Min.Ep.: ', num2str(min_epsilon)]);
56
57     % Calcular a pendiente (dimension de conteo de caixas)
58     slope = diff(log_N) ./ diff(log_epsilon);
59     box_counting_dimension = -mean(slope);
60     disp(['Box Counting Dimension: ', num2str(box_counting_dimension)]);
61 end
62
63 function num_boxes = countBoxes(vertices,epsilon,iteration,epsilon_to_plot)
64     % Calcular a caixa que acota a figura
65     min_x = min(vertices(:,1));
66     max_x = max(vertices(:,1));
67     min_y = min(vertices(:,2));
68     max_y = max(vertices(:,2));
69
70     % Crear as caixas da malla
71     x_edges = min_x - epsilon:epsilon:max_x + epsilon;
72     y_edges = min_y - epsilon:epsilon:max_y + epsilon;
73     [X, Y] = meshgrid(x_edges, y_edges);
74     num_boxes = 0;
75
76     % Inicializas unha matriz para almacenar informacion de interseccion
77     intersections = zeros(numel(x_edges),numel(y_edges));
78
79     % Iterar nas caixas
80     for i = 1:numel(x_edges)-1
81         for j = 1:numel(y_edges)-1
82             box_vertices = [X(j,i), Y(j,i); X(j,i+1), Y(j,i); ...
83                             X(j+1,i+1), Y(j+1,i); X(j+1,i), Y(j+1,i);X(j,i), Y(j,i)];
84             % Comprobar se a caixa interseca a figura
85             if isIntersecting(vertices, box_vertices)
86                 num_boxes = num_boxes + 1;
87                 intersections(j,i) = 1; % Marcar como 'intersecan'
88             end

```

```

89     end
90 end
91
92 if ismember(iteration,epsilon_to_plot)
93     % Representar as caixas da malla
94     % Representar as caixas que intersecan en verde
95     % Representar as caixas que non intersecan en gris
96     figure();
97     hold on;
98     for i = 1:numel(x_edges)-1
99         for j = 1:numel(y_edges)-1
100             if intersections(j,i) == 1
101                 fill([X(j,i),X(j,i+1),X(j+1,i+1),X(j+1,i)], ...
102                     [Y(j,i),Y(j,i),Y(j+1,i),Y(j+1,i)], 'g', ...
103                     'EdgeColor',[0.8 0.8 0.8]);
104             else
105                 fill([X(j,i),X(j,i+1),X(j+1,i+1),X(j+1,i)], ...
106                     [Y(j,i),Y(j,i),Y(j+1,i),Y(j+1,i)], ...
107                     [0.9 0.9 0.9], 'EdgeColor',[0.8 0.8 0.8]);
108             end
109         end
110     end
111     hold off;
112
113     % Representar a figura
114     hold on;
115     plot(vertices(:,1), vertices(:,2), 'k-', 'LineWidth',3);
116
117     xlabel('x');
118     ylabel('y');
119     title(['Grid Boxes Intersecting the Koch Snowflake (delta = ', ...
120         num2str(epsilon), ')']);
121     hold off;
122 end
123 end
124
125 function intersecting = isIntersecting(vertices, box_vertices)
126     % Comprobar se algun segmento da figura interseca coa caixa
127     intersecting = false;
128     for i = 1:size(vertices, 1)-1
129         for j = 1:size(box_vertices, 1)-1

```

```
130         if doIntersect(vertices(i,:), vertices(i+1,:), ...
131             box_vertices(j,:), box_vertices(j+1,:))
132             intersecting = true;
133             return;
134         end
135     end
136 end
137 end
138
139 function intersect = doIntersect(p1, q1, p2, q2)
140     % Devolve true se o segmento de linha dende p1 ate q1 interseca co
141     % segmento de linha dende p2 ate q2.
142     % Inspirado en https://www.geeksforgeeks.org/check-if-two-given-line-segments-intersect/
143     o1 = orientation(p1, q1, p2);
144     o2 = orientation(p1, q1, q2);
145     o3 = orientation(p2, q2, p1);
146     o4 = orientation(p2, q2, q1);
147
148     if o1 ~= o2 && o3 ~= o4
149         intersect = true;
150     elseif o1 == 0 && onSegment(p1, p2, q1)
151         intersect = true;
152     elseif o2 == 0 && onSegment(p1, q2, q1)
153         intersect = true;
154     elseif o3 == 0 && onSegment(p2, p1, q2)
155         intersect = true;
156     elseif o4 == 0 && onSegment(p2, q1, q2)
157         intersect = true;
158     else
159         intersect = false;
160     end
161 end
162
163 function orientation_val = orientation(p, q, r)
164     val = (q(2) - p(2)) * (r(1) - q(1)) - (q(1) - p(1)) * (r(2) - q(2));
165     if val == 0
166         orientation_val = 0; % Colineares
167     elseif val > 0
168         orientation_val = 1; % Sentido horario
169     else
```

```

170     orientation_val = 2; % Sentido antihorario
171     end
172 end
173
174 function on_segment = onSegment(p, q, r)
175     if q(1) <= max(p(1), r(1)) && q(1) >= min(p(1), r(1)) && ...
176         q(2) <= max(p(2), r(2)) && q(2) >= min(p(2), r(2))
177         on_segment = true;
178     else
179         on_segment = false;
180     end
181 end

```

Código A.3: Código dimensión de conteo de caixas.

A.4. Código para o cálculo da dimensión de conteo de caixas do copo de neve de Koch

Os datos introducidos en 'data' dos épsilon mínimos foron motivados polo pouco interese que ten considerar mallas con caixas de lonxitude menor que a distancia mínima entre dous vértices da figura, é dicir, a cantidade de detalle que ten a nosa figura. Esta distancia calcúlase empregando que a distancia entre dous vértices consecutivos do copo de neve de Koch de n iteracións é $\frac{1}{3^n}$, polo que para o copo de 3 iteracións será 0.037037, para o de 4 iteracións, 0.012346, para o de 5 iteracións, 0.0041152, e para o de 6 iteracións, 0.0013717. Así, os épsilon mínimos serán considerados maiores ca esas cantidades ou aproximadamente iguais.

```

1
2 % Programa que xera o copo de neve de Koch e calcula a sua dimension de
3 % conteo de caixas
4
5 clc
6 clear
7
8 % Xeracion do copo de neve de Koch
9 plot_ksf = false; % Representar ou non a figura
10
11 % Calculo da dimension de conteo de caixas
12 % Definir as iteracions da figura, o tamaño inicial dad caixas, o factor
13 % de escala e o epsilon minimo

```

```
14 % [iterations, initial_epsilon, scale_factor, min_epsilon]
15 % (mais filas para mais valores)
16 data = [3, 0.1, 0.5, 0.01;
17         3, 0.1, 0.75, 0.01;
18         4, 0.1, 0.5, 0.01;
19         4, 0.1, 0.75, 0.01;
20         5, 0.1, 0.5, 0.01;
21         5, 0.1, 0.75, 0.01;
22         5, 0.1, 0.5, 0.005;
23         5, 0.1, 0.75, 0.005;
24         6, 0.1, 0.5, 0.01;
25         6, 0.1, 0.75, 0.01;
26         6, 0.1, 0.5, 0.001];
27
28 % Epsilon que se desexa representar (1=primeiro, 2=segundo...)
29 % (se 'false', non representa)
30 epsilon_to_plot = false;
31
32 % Escribir os resultados en .txt
33 writetxt = true;
34
35 %%% PROGRAMA %%%
36
37 if writetxt
38     % Abrir o arquivo .txt
39     fileID = fopen('data.txt', 'w');
40
41     % Escribir o encabezado (nomes das variables)
42     header = {'Koch Iterations', 'Initial Epsilon', 'Scale Factor', ...
43             'Minimum Epsilon', 'Dimension', 'Time (seconds)'};
44     max_width = max(cellfun(@length, header));
45     format_str = ['%->, num2str(max_width), 's\t\t%->, ...
46                 num2str(max_width), 's\t\t%->, ...
47                 num2str(max_width), 's\t\t%->, ...
48                 num2str(max_width), 's\n'];
49     fprintf(fileID, format_str, header{:});
50
51     % Pechar o arquivo .txt
52     fclose(fileID);
53
54     % Abrir outra vez o arquivo .txt en modo 'append'
```

```

55     fileID = fopen('data.txt', 'a');
56 end
57
58 for i=1:length(data(:,1))
59     % Calcular e mostrar cada caso introducido en 'data'
60     tic
61     disp(['Caso ', num2str(i), '/', num2str(length(data(:,1)))]);
62     disp(['Koch: ', num2str(data(i,1)), ' In.Ep.: ', ...
63         num2str(data(i,2)), ' ScaleFac.: ', num2str(data(i,3)), ...
64         ' Min.Ep.: ', num2str(data(i,4))]);
65     vertices = kochSnowflake(data(i,1),plot_ksf);
66     dimension = boxCountingDimension(vertices, data, i, epsilon_to_plot);
67     disp('-----');
68     time = toc;
69     if writetxt
70         % Escribir os resultados no arquivo .txt
71         fprintf(fileID, ['%-', num2str(max_width), 'i\t|\t%-', ...
72             num2str(max_width), '.4f\t|\t%-', num2str(max_width), ...
73             '.4f\t|\t%-', num2str(max_width), '.4f\t|\t%-', ...
74             num2str(max_width), '.4f\t|\t%-', num2str(max_width), ...
75             '.4f\n'], data(i,1), data(i,2), data(i,3), data(i,4), ...
76             dimension, time);
77     end
78 end
79 if writetxt
80     % Pechar o arquivo .txt
81     fclose(fileID);
82 end

```

Código A.4: Código dimensión de conteo de caixas do copo de neve de Koch.

A.5. Código para a representación da curva de Koch a través do seu IFS asociado

```

1
2     function points = kochCurveIFS(iterations)
3         % Definimos as catro transformacions do noso IFS
4         f1 = @(p) (1/3) * p;
5         f2 = @(p) (1/6) * [1, -sqrt(3); sqrt(3), 1] * p + [1/3; 0];

```

```

6      f3 = @(p) (1/6) * [1, sqrt(3); -sqrt(3), 1] * p + [1/2; sqrt(3)/6];
7      f4 = @(p) (1/3) * p + [2/3; 0];
8
9      % Puntos iniciais (vertices do segmento dende (0,0) ate (1,0))
10     points = [0, 0; 1, 0];
11
12     % Iteramos
13     for i = 1:iterations
14         new_points = [];
15         new_points1 = []; new_points2 = [];
16         new_points3 = []; new_points4 = [];
17
18         % Iteramos nos vertices de forma ordenada
19         for j = 1:(size(points, 1))
20             new_points1 = [new_points1; f1(points(j,:))'];
21             new_points2 = [new_points2; f2(points(j,:))'];
22             new_points3 = [new_points3; f3(points(j,:))'];
23             new_points4 = [new_points4; f4(points(j,:))'];
24         end
25
26         % Engadimos os vertices na orde adecuado
27         new_points = [new_points1; new_points2; new_points3; new_points4];
28         % Eliminamos vertices repetidos, mantendo a orde
29         points = unique(new_points, 'rows', 'stable');
30     end
31
32     % Representamos a curva de Koch
33     figure;
34     plot(points(:, 1), points(:, 2), 'b-');
35     axis equal;
36     title(['Curva de Koch con ', num2str(iterations), ' iteracions']);
37     xlabel('x');
38     ylabel('y');
39     end
40

```

Código A.5: Código para a representación da curva de Koch a través do seu IFS asociado.

A.6. Código para computar os métodos de obtención do atractor dun IFS

```

1
2 function points = kochCurveMethods(iterations, method)
3     % method = 1 para conxunto E; method = 2 para xogo do caos
4     % Definimos as catro transformacions do noso IFS
5     f1 = @(p) (1/3) * p;
6     f2 = @(p) (1/6) * [1, -sqrt(3); sqrt(3), 1] * p + [1/3; 0];
7     f3 = @(p) (1/6) * [1, sqrt(3); -sqrt(3), 1] * p + [1/2; sqrt(3)/6];
8     f4 = @(p) (1/3) * p + [2/3; 0];
9
10    if method == 1 % Metodo do conxunto E
11        x = linspace(0, 1, 20);
12        y = linspace(0, 1, 20);
13        [X, Y] = meshgrid(x, y);
14
15        n = numel(X); % Numero total de puntos
16        points = cat(2, reshape(X, n, 1), reshape(Y, n, 1));
17
18        % Iteramos
19        for i = 1:iterations
20            new_points = [];
21            new_points1 = []; new_points2 = [];
22            new_points3 = []; new_points4 = [];
23
24            % Iteramos nos puntos
25            for j = 1:(size(points, 1))
26                new_points1 = [new_points1; f1(points(j,:))'];
27                new_points2 = [new_points2; f2(points(j,:))'];
28                new_points3 = [new_points3; f3(points(j,:))'];
29                new_points4 = [new_points4; f4(points(j,:))'];
30            end
31
32            % Engadimos os puntos
33            new_points = [new_points1; new_points2; new_points3; new_points4
34                ];
35
36            % Eliminamos puntos repetidos
37            points = unique(new_points, 'rows', 'stable');
38        end
39    end

```

```

37
38     % Representamos os puntos
39     figure;
40     plot(points(:, 1), points(:, 2), 'b.');
```

```

41     hold on;
42     axis equal;
43     title(['Curva de Koch con ', num2str(iterations), ' iteracions (
44     conxunto E)']);
45     hold off;
46
47     elseif method == 2 % Xogo do caos
48         x0 = [1/2;0]; % Punto inicial
49         xn = x0;
50         points = [x0'];
51         for i=1:iterations
52             f_index = randi([1,4]); % Eleccion aleatoria
53             if f_index == 1
54                 xn = f1(xn);
55             elseif f_index == 2
56                 xn = f2(xn);
57             elseif f_index == 3
58                 xn = f3(xn);
59             else
60                 xn = f4(xn);
61             end
62             points = [points; xn'];
63         end
64         % Representamos os puntos
65         figure;
66         plot(points(1:floor(end/2)-1, 1), points(1:floor(end/2)-1, 2), '.', '
67         Color', [0.5 0.5 0.5]);
68         hold on;
69         plot(points(floor(end/2):end, 1), points(floor(end/2):end, 2), 'b.')
```

```

70     ;
71     axis equal;
72     title(['Curva de Koch con ', num2str(iterations), ' iteracions (xogo
73     do caos)']);
74     hold off;
75
76     else
77         error("Metodo Invalido!!!");
78     end

```

```

74 end
75

```

Código A.6: Código para a obtención do atractor asociado a un IFS.

A.7. Código de Wolfram Mathematica para representar a condición do conxunto aberto

```

1
2 T1[{a_, b_}] := {3 a, 3 b};
3 T2[{a_, b_}] := {1/2 (-1 + 3 a + 3 Sqrt[3] b),
4   1/2 (Sqrt[3] - 3 Sqrt[3] a + 3 b)};
5 T3[{a_, b_}] := {3/2 (a - Sqrt[3] b),
6   1/2 (-2 Sqrt[3] + 3 Sqrt[3] a + 3 b)};
7 T4[{a_, b_}] := {-2 + 3 a, 3 b};
8 F[{x_, y_}] =
9 1 - x - Sqrt[3] y > 0 && x - Sqrt[3] y > 0 && 2 Sqrt[3] y > 0;
10 RegionPlot[{F[{x, y}], F[T1[{x, y}]], F[T2[{x, y}]], F[T3[{x, y}]],
11   F[T4[{x, y}]]}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1/3}, MaxRecursion -> 6,
12 PlotPoints -> 80, AspectRatio -> 1/3]
13

```

Código A.7: Código para representar a condición do conxunto aberto para a curva de Koch.

A.8. Código de MATLAB para xeral un movemento browniano 2-dimensional

```

1
2 N = 100000;
3 displacement = randn(1,N);
4 plot(displacement); particle = struct();
5 particle.x = cumsum( randn(N, 1) );
6 particle.y = cumsum( randn(N, 1) );
7 plot(particle.x, particle.y);
8 ylabel('Posicion en Y'); xlabel('Posicion en X');
9 title('Movemento browniano 2D');
10

```

Código A.8: Código para xerar un movemento browniano 2-dimensional

Bibliografía

- [1] *How to make Fractal Antennas*. DXZone (2015)
- [2] *How to check if two given line segments intersect?* geeksforgeeks.org (2022). URL <https://www.geeksforgeeks.org/check-if-two-given-line-segments-intersect/>
- [3] *Curva de Peano*. Wikipedia, La enciclopedia libre. (2023). URL https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Curva_de_Peano&oldid=154617850
- [4] *Black–Scholes model*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. (2024). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Black–Scholes_model&oldid=1229026127
- [5] *Conjunto de Cantor*. Wikipedia, La enciclopedia libre. (2024). URL https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Conjunto_de_Cantor&oldid=159210037
- [6] *Fractal art*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. (2024). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fractal_art&oldid=1221079475
- [7] *The Great Wave off Kanagawa*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. (2024). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=The_Great_Wave_off_Kanagawa&oldid=1226362276
- [8] *Lebesgue covering dimension*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. (2024). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lebesgue_covering_dimension&oldid=1197472966
- [9] *Romanesco broccoli*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. (2024). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Romanesco_broccoli&oldid=1220984002
- [10] Anguera, J., Andújar, A., Jayasinghe, J., Vedula, C., Chowdary, P., Pijoan, J., Ali, T., Cattani, C.: *Fractal Antennas: An Historical Perspective*. *Fractal and Fractional* **2020** (2020)
- [11] Blasco, F.: *Arte fractal: Coloreando el conjunto de Mandelbrot con Matlab*. RadioRho (2016). URL <https://radiatorho.blogspot.com/2016/11/arte-fractal-coloreando-el-conjunto-de.html>

- [12] Botev, Z.: *Fractional Brownian field or surface generator*. MATLAB Central File Exchange (2024). URL <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38945-fractional-brownian-field-or-surface-generator>
- [13] Cantor, G.: *On infinite linear point manifolds*. *Mathematische Annalen* **21**, 545–591 (1882)
- [14] Edgar, G.: *Measure, topology, and fractal geometry*, 2nd ed. edn. Undergraduate Texts Math. New York, NY: Springer (2008)
- [15] Engelking, R.: *Dimension theory*. A revised and enlarged translation of “Teoria wymiaru”, Warszawa 1977, by the author, *North-Holland Math. Libr.*, vol. 19. Elsevier (North-Holland), Amsterdam (1978)
- [16] Falconer, K.: *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, 3rd edn. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons (2014)
- [17] Falconer, K.J.: *The geometry of fractal sets*, *Camb. Tracts Math.*, vol. 85. Cambridge University Press, Cambridge (1985)
- [18] Fatima, H., Arsalan, M., Khalid, A., Marjan, K., Kumar, M.: *Spatio -Temporal Analysis of Shore-line Changes along Makran Coast Using Remote Sensing and Geographical Information System*. Scientific Figure on ResearchGate (2015)
- [19] Fernández Martínez, M., García Guirao, J.L., Sánchez-Granero, M.Á., Trinidad Segovia, J.E.: *Fractal dimension for fractal structures. With applications to finance, SEMA SIMAI Springer Ser.*, vol. 19. Springer (2019)
- [20] Fisher, Y. (ed.): *Fractal image compression. Theory and application*. Berlin: Springer-Verlag (1994)
- [21] Gómez, A.: *ANTENAS FRACTALES Así en la Tierra como en los Cielos*. Redacción Hacia el Espacio (2015)
- [22] Henrikson, J.: *Completeness and Total Boundedness of the Hausdorff Metric*. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*: 69–80 (1999)
- [23] Hohlfeld, R., Cohen, N.: *Self-similarity and the geometric requirements for frequency independence in antennae*. *Fractals* **07** (2011)
- [24] Mandelbrot, B.: *Fractals and the art of roughness*. TED2010 (2010). URL https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_and_the_art_of_roughness?utm_campaign=tedsread&utm_medium=referral&utm_source=tedcomshare

-
- [25] Mathigon: *Mandelbrot Zoom Sequence*. Youtube (2020). URL <https://youtu.be/b005iHf8Z3g?si=kdb2y4MW-0qmw-B>
- [26] Meyburg, J.P., Diesing, D.: *Teaching the Growth, Ripening, and Agglomeration of Nanostructures in Computer Experiments*. Journal of Chemical Education **94**(9), 1225–1231 (2017)
- [27] Mike, M.: *DIMENSIÓN FRACTAL: El Copo de Nieve de Koch*. Youtube (2022). URL https://youtu.be/eKY_1j9VrEA?si=d4LDAZLLfZRStIHN
- [28] Peano, G.: *On a curve which entirely fills a plane domain*. Mathematische Annalen **36**, 157–160 (1890)
- [29] Singh, K., Grewal, V., Saxena, R.: *Fractal Antennas: A Novel Miniaturization Technique for Wireless Communications*. International Journal of Recent Trends in Engineering **2** (2009)
- [30] Smith, H.J.S.: *On the integration of discontinuous functions*. Proceedings of the London Mathematical Society **6**, 140–153 (1875)
- [31] Steinhaus, H.: *Length, shape and area*. Colloquium Mathematicum **3**, 1–13 (1954)