



Traballo de Fin de Grao

Series de Fourier e resolución de ecuacións en derivadas parciais en dimensión superior

THOMAS GALLAGHER ROMERO

2023-2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo de Fin de Grao

Series de Fourier e resolución de ecuacións
en derivadas parciais en dimensión superior

THOMAS GALLAGHER ROMERO

2023-2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo Proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Series de Fourier e resolución de ecuacións en derivadas parciais en dimensión superior
Breve descripción do contido
Neste traballo ampliarase o estudado na materia Series de Fourier e Introducción ás EDPs sobre o uso das series de Fourier e o método de separación de variables para a resolución de problemas iniciais e de fronteira coas ecuacións da calor, de ondas e de Laplace. Trátase, por unha banda, de estudar a dedución dos modelos matemáticos e, por outra banda, de resolvelos mediante series de Fourier en casos de dimensión espacial dúas ou tres.

Índice

1. Introducción	11
2. O problema de Cauchy e as Ecuacións de Ondas	12
2.1. Ecuacións de onda homoxéneas	12
2.2. Problemas de valor inicial e de contorno	14
2.2.1. Corda semi-infinita cun extremo fixo	14
3. Series de Fourier e integrais con aplicacións	15
3.1. Extensións periódicas	16
3.2. Un criterio de converxencia	16
3.3. Series de Fourier de senos e de cosenos	17
3.4. Series de Fourier e condicións de contorno	17
3.5. Continuidade absoluta e converxencia uniforme	18
3.6. Series de Fourier e análise funcional	18
3.7. O sistema trigonométrico e converxencia das series de Fourier en $L^2(a, b)$	19
4. Método de separación de variables	20
4.1. Separación de variables	20
4.2. Problema de conducción de calor con condicións Dirichlet	22
4.2.1. Exemplo problema de calor en 1 dimensión en MAPLE	24
5. Series de Fourier dobres	25
5.1. Resolución ecuación do calor a través de series de Fourier dobres para unha placa rectangular	26
5.1.1. MATLAB	28
5.2. Membrana vibrante	30
5.2.1. MATLAB	32
5.3. Membrana circular vibrante	33
5.3.1. Problemas de valor inicial para unha membrana circular	35
5.3.2. MATLAB	36
6. Series de Fourier triples	38
6.1. Ecuación de ondas en tres dimensións	39

6.2. Ecuación da calor nun volume rectangular	40
6.3. Ecuación de Laplace nun cilindro circular	41
6.3.1. Temperatura nula sobre as tapas superior e inferior	42

Resumo

Neste traballo ampliamos o estudo na materia Series de Fourier e Introducción ás EDPs sobre o uso das series de Fourier e o método de separación de variables para a resolución de problemas iniciais e de fronteira coas ecuacións da calor, de ondas e de Laplace.

O obxectivo principal foi explorar máis profundamente os conceptos fundamentais e as técnicas avanzadas para a dedución e a resolución destes modelos matemáticos. Fixemos un enfoque particular nos métodos analíticos e numéricos que permiten abordar problemas en dimensións espaciais superiores, en particular dimensión dúas e dimensión tres.

Para estas dimensións destacamos a importancia das condicións de contorno e das condicións iniciais na obtención das solucións. Empregamos o método de separación de variables e as series de Fourier como ferramentas cruciais para descompoñer e resolver estas ecuacións en distintos escenarios prácticos.

Finalmente proporcionamos exemplos concretos e visualizacións gráficas das solucións obtidas a través de software especializado, en particular Matlab e Maple.

Abstract

In this essay, we extend the study of the Fourier Series and Introduction to PDEs course on the use of Fourier series and the method of separation of variables for solving initial and boundary value problems with the heat, wave, and Laplace equations.

The main objective was to explore more deeply the fundamental concepts and advanced techniques for the deduction and resolution of these mathematical models. We focused particularly on analytical and numerical methods that allow addressing problems in higher spatial dimensions, specifically two and three dimensions.

For these dimensions, we highlighted the importance of boundary conditions and initial conditions in obtaining solutions. We employed the method of separation of variables and Fourier series as crucial tools to decompose and solve these equations in various practical scenarios.

Finally, we provided concrete examples and graphical visualizations of the solutions obtained through specialized software, particularly Matlab and Maple. In this way, we aim to provide a more comprehensive and applied understanding of the techniques studied.

1. Introducción

Unha preocupación central da historia das matemáticas reside na transformación de ecuacións e problemas nun sistema de coordenadas onde as expresións se simplifiquen, desacoplen e sexan susceptibles de computación e análise. A esta motivación respóndelle a transformación de coordenadas introducida por J.-B. Joseph Fourier a comezos do 1800 para investigar a teoría da calor [2]. Fourier chegou á conclusión de que as funcións seno e coseno de frecuencia crecente proporcionan unha base ortogonal para o espazo de funcións.

Para abordar este problema faremos unha descrición dos conceptos de álgebra e análise que sustentan a Serie de Fourier, describiremos tamén os problemas de EDPs que estamos intentando resolver, explicaremos a construción das series de Fourier en unha única dimensión para rematar vendo como construír as Series de Fourier de dimensión superior.

Este TFG ten como obxectivo profundizar no concepto das Series de Fourier en dimensións superiores e a resolución con estas de ecuacións en derivadas parciais. Cada paso virá acompañado na medida das posibilidades de representacións gráficas elaboradas con MATLAB e MAPLE que permitan unha mellor comprensión do que se intenta explicar.

O noso estudo estará dividido nas seguintes seccións: En primeiro lugar estudiaremos o problema de Cauchy e as Ecuacións de onda, estudando como funcionan as ecuacións de onda homoxéneas e resolvendo un caso particular en dimensión 1 a modo de exemplo, a corda semi-infinita cun extremo fixo.

En segundo lugar explicaremos a fondo o concepto e bases teóricas das series de Fourier, estudando a súa converxencia e continuidade absoluta.

En terceiro lugar estudaremos o método de separación de variables exemplificando cun problema en dimensión 1 resolto a través de MAPLE.

En cuarto lugar estudaremos o concepto de series de Fourier dobres e afondaremos en varios exemplos que resolveremos a través de MATLAB.

Por último estudaremos o concepto de series de Fourier triples, explorando tamén varios exemplos.

2. O problema de Cauchy e as Ecuacións de Ondas

No contexto das Ecuacións en Derivadas Parciais, o **problema de valor inicial** é o problema de atopar solución dunha ecuación diferencial dada, co número apropiado de condicións iniciais prescritas. Por exemplo, a ecuación diferencial ordinaria de segundo grao:

$$u'' = f(t, u, u')$$

con condicións iniciais:

$$u(t_0) = \alpha, \quad (u')(t_0) = \beta$$

Consideramos agora a ecuación en derivadas parciais dada pola función u nas variables independentes x e y , e supoñamos que esta ecuación pode ser resolta explicitamente por u_{yy} , e polo tanto representada na forma de

$$u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}) \quad (1)$$

Para un certo valor $y = y_0$ prescribimos os valores iniciais da función descoñecida e da derivada con respecto a y

$$u(x, y_0) = f(x), \quad u_y(x, y_0) = g(x) \quad (2)$$

O problema de achar a función $u = u(x, y)$ que satisface a EDP (1) que satisface as condicións iniciais (2) é coñecido como **o problema de valor inicial**. O *problema de valor inicial* dunha corda vibrante é o problema de atopar unha solución á ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

satisfacendo as condicións iniciais

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad u_t(x, t_0) = v_0(x)$$

onde $u_0(x)$ é o desplazamento inicial e $v_0(x)$ a velocidade inicial. En problemas de valor inicial, os valores iniciais adoitan referirse aos datos asignados a $t_0 = 0$. Non é necesario que estes valores sexan dados ao longo da recta $y = y_0$; poden ser dados ao longo da curva L_0 no plano xy . En tal contexto o problema é chamado *Problema de Cauchy* en lugar de problema de valor inicial, por moito que sexan realmente o mesmo.

2.1. Ecuacións de onda homoxéneas

A ecuación de onda homoxénea fai referencia a unha ecuación en derivadas parciais que describe como se propaga unha onda nun medio sen que ningunha fonte externa a xere. A ecuación de onda homoxénea escríbese como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

onde u é a función de onda, t é o tempo, c é a velocidade da onda e ∇^2 é o operador laplaciano que describe a curvatura da función de onda. A solución xeral desta ecuación describe como as ondas se propagan nun medio homoxéneo sen disipación de enerxía. Este tipo de ecuacións é de gran importancia na física, a enxeñaría e outras áreas da ciencia, xa que moitas ondas na natureza pódense describir como solucións de ecuacións de ondas homoxéneas. Consideremos o seguinte problema de Cauchy dunha corda infinita con condicións iniciais

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (4)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

con **ecuación característica**

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0$$

o cal é equivalente a

$$dx + cdt = 0, dx - cdt = 0.$$

As integrais serían as liñas rectas

$$x + ct = c_1, x - ct = c_2$$

Introducindo as cordenadas características

$$\xi = x + ct, \eta = x - ct,$$

obtemos

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{tt} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

Substituíndo isto na ecuación (3) obtemos

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0$$

E dado que $c \neq 0$ temos

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Integrando con respecto a ξ , e despois con respecto a η obtemos

$$u(\xi, \eta) = \int \psi^*(\eta) d\eta + \phi(\xi).$$

Definindo como $\psi(\eta) = \int \psi^*(\eta) d\eta$, temos

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta),$$

onde ϕ e ψ son funcións arbitrarias. Volvendo ás variables orixinais x e t , temos a solución xeral da ecuación de ondas

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct), \quad (6)$$

Aplicando as condicións (4) e (5), obtemos

$$u(x, 0) = f(x) = \phi(x) + \psi(x), \quad (7)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = c\phi'(x) - c\psi'(x), \quad (8)$$

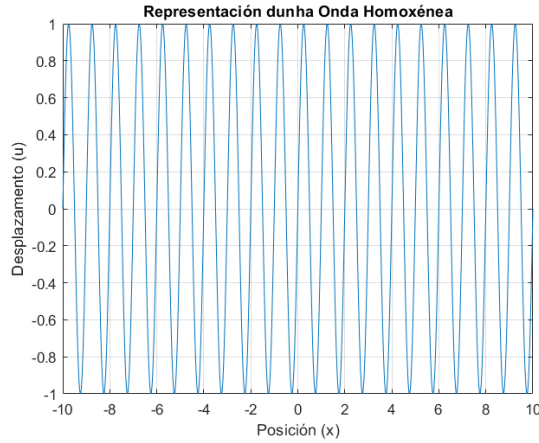
A solución vén dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x_0}^{x+ct} g(\tau) d\tau - \int_{x_0}^{x-ct} g(\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

do que podemos concluír:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (10)$$

Isto é a **solución d'Alembert do problema de Cauchy para a ecuación de ondas unidimensional**. [8]



2.2. Problemas de valor inicial e de contorno

Un *problema de valor inicial e de contorno* é un problema no que se deben especificar tanto as condicións iniciais como as condicións de contorno para determinar unha solución única dunha EDP nun dominio dado.

2.2.1. Corda semi-infinita cun extremo fixo

Consideremos en primeiro lugar a corda vibrante cun extremo fixo,

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < \infty, & \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x < \infty, & \\
 u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x < \infty, & \\
 u(0, t) &= 0, & 0 \leq t < \infty. &
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

É evidente que a condición de contorna aquí en $x = 0$ produce unha onda que se move á dereita con velocidade c . Polo tanto, para $x > ct$, a solución é a mesma que para a corda infinita, e o desplazamento é influenciado só polo valor inicial no intervalo $[x - ct, x + ct]$. Cando $x < ct$, o intervalo $[x - ct, x + ct]$ exténdese cara a parte negativa do eixo x onde f e g non están descritas. Da fórmula d'Alembert temos

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \tag{12}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi) &= \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(\tau) d\tau + \frac{K}{2}, \\
 \psi(\eta) &= \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2c} \int_0^\eta g(\tau) d\tau - \frac{K}{2},
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

vemos

$$u(0, t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = 0.$$

Polo tanto,

$$\psi(-ct) = -\phi(ct)$$

Tomando por $\alpha = -ct$, entón

$$\psi(\alpha) = -\phi(-\alpha).$$

Sustituindo α por $x - ct$, obtemos $x < ct$,

$$\psi(x - ct) = -\phi(ct - x),$$

e polo tanto

$$\psi(x - ct) = -\frac{1}{2}f(ct - x) - \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}.$$

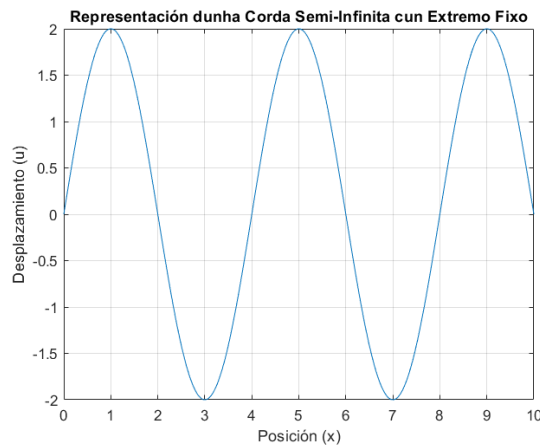
A solución ao problema de contorna inicial é polo tanto

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau & \text{for } x > ct, \\ u(x, t) &= \frac{1}{2}[f(x + ct) - f(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(\tau) d\tau & \text{for } x < ct. \end{aligned} \quad (14)$$

Para que exista a solución, f debe ser continuamente diferenciable dúas veces e g debe ser continuamente diferenciable, a parte

$$f(0) = f''(0) = g(0) = 0.$$

[8]



3. Series de Fourier e integrais con aplicacións

Definimos en primeiro lugar o espazo de funcións **integrables no sentido de Lebesgue**.

$$\mathcal{L}^1(-L, L) = \left\{ f : (-L, L) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ medible e } \int_{-L}^L |f| < \infty \right\}.$$

Así, podemos definir as series de Fourier como:

Definición 3.0.1. *A serie de Fourier dunha $f \in \mathcal{L}^1(-L, L)$ é*

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde

- $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx;$
- $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ para todo $n \in \mathbb{N};$
- $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx$ para todo $n \in \mathbb{N}.$

O noso obxectivo fundamental para este punto é o de estudar que tipos de funcións poden expresarse en serie de Fourier, para así posteriormente estender o concepto a dimensións superiores. Para estudar a converxencia de calquera serie temos que estudar a converxencia da súa sucesión de sumas parciais. Se $f \in \mathcal{L}^1(-L, L)$ e Sf é a súa serie de Fourier, temos que estudar a sucesión $\{s_m(x)\}_{m=0}^\infty$ de sumas parciais de $Sf(x)$, é dicir $s_0(x) = a_0/2$ e

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}),$$

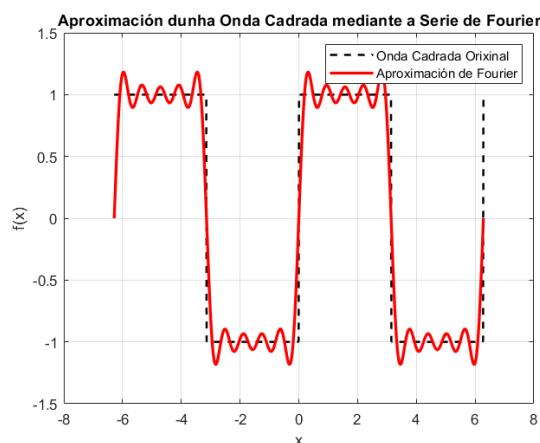
sendo a_0, a_n, b_n os coeficientes de Fourier de f . Consideremos dous tipos de converxencia: puntual e uniforme.

Converxencia puntual. A serie Sf converxe puntualmente a unha función g nun conxunto $D \subset \mathbb{R}$ cando

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in D,$$

Converxencia uniforme. A serie Sf converxe puntualmente a unha función g nun conxunto de máis dun elemento $D \subset \mathbb{R}$ cando

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |s_m(x) - g(x)| = 0 \quad ,$$



3.1. Extensións periódicas

Observamos que se $Sf(x)$ é converxente para todo $x \in (-L, L]$ entón por periodicidade de senos e cosenos o será para todo $x \in \mathbb{R}$ e dará lugar a unha función $2L$ -periódica. Introducimos a extensión $2L$ -periódica da función f , como a función $\bar{f} = f$ en $(-L, L)$, e

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(x + 2L) \quad \text{para } x \in \mathbb{R} / \{(2n + 1)L \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

soamente definiremos \bar{f} nos múltiplos impares de L cando

$$\lim_{x \rightarrow -L^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow L^-} f(x) = \alpha \in \mathbb{R},$$

en tal caso definiremos \bar{f} para que resulte continua,

$$\bar{f}((2n + 1)L) = \alpha \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

3.2. Un criterio de converxencia

Criterio de converxencia dos límites laterais da derivada. Sexan $f \in \mathcal{L}^1(-L, L)$, \bar{f} a súa extensión $2L$ -periódica e $x_0 \in \mathbb{R}$. Se existe $r > 0$ tal que \bar{f} é derivable en $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ e, ademais, existen os dous límites

laterais $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \bar{f}'(x) \in \mathbb{R}$, entón a serie de Fourier de f converge no punto x_0 e

$$Sf(x_0) = (\bar{f}(x_0^+) + \bar{f}(x_0^-)) / 2.$$

En particular, $Sf(x_0) = \bar{f}(x_0)$ se, ademais do anterior, \bar{f} está definida e é continua en x_0 .

Facemos varias observacións sobre este criterio:

1. A existencia dos límites laterais de \bar{f}' implica a existencia dos límites laterais de \bar{f} .
2. Se \bar{f} é continuamente derivable nun entorno de x_0 , entón satisfácense as hipóteses do criterio e, ademais, $Sf(x_0) = \bar{f}(x_0)$.
3. Non basta con que \bar{f} sexa continua nun entorno de x_0 para que $Sf(x_0)$ sexa converxente.

3.3. Series de Fourier de senos e de cosenos

Na resolución de ecuacións en derivadas parciais empregaremos a menudo series de Fourier de funcións definidas en intervalos da forma $[0, L]$. As formas máis simples e máis útiles de construír series de Fourier para unha función integrable $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ son as seguintes:

1. A **serie de senos** de f defínese como a serie de Fourier da extensión impar de f no intervalo $[-L, L]$, a

$$Sg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

onde b_n vén definido por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

2. A **serie de cosenos** de f defínese como a serie de Fourier da extensión par de f no intervalo $[-L, L]$, a

$$Sg(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos} \frac{n\pi x}{L} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad (16)$$

onde a_n vén definido por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{cos} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

incluído o 0.

3. Unha terceira alternativa consiste en construír a **serie de Fourier de extensión L-periódica** de f , é dicir, a serie da función

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(x+L) & \text{se } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

3.4. Series de Fourier e condicións de contorno

Imos estudar como o comportamento da función na fronteira do intervalo suxire o tipo de serie que mellor converge cara ela. En base ás expresións en serie de senos e cosenos (15) e (16) apreciamos que cada sumando das series cumpre as condicións de fronteira

$$f_n(0) = f_n(L) = 0 \quad \text{para a serie de senos}$$

$$g'_n(0) = g'_n(L) = 0 \quad \text{para a serie de cosenos}$$

Isto nos fai suxerir que se a nosa función de partida satisfai as condicións de fronteira de tipo Dirichlet

$$f(0) = f(L) = 0$$

é natural expresala en serie de senos, mentras que se cumpre as condicións de tipo Neumann

$$f'(0) = f'(L) = 0$$

é natural expresala en serie de cosenos.

3.5. Continuidade absoluta e converxencia uniforme

Definición 3.5.1. Unha función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é **absolutamente continua** en $[a, b]$ cando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^m$ é unha familia finita de subintervalos de $[a, b]$ disxuntos dous a dous e tal que $\sum_{n=1}^m (b_n - a_n) < \delta$, entón

$$\sum_{n=1}^m |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$$

Definición 3.5.2. Denotamos por $AC([a, b])$ o conxunto das funcións absolutamente continuas en $[a, b]$, e

$$AC_P([a, b]) = \{f \in AC([a, b]) : f(a) = f(b)\}.$$

Teorema 3.5.3 (Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue). *Sexa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unha función dada. Os seguintes enunciados son equivalentes.*

1. f é absolutamente continua en $[a, b]$;
2. Existe $f'(x)$ para case todo $x \in [a, b]$, $f' \in \mathcal{L}^1(a, b)$ e $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ para todo $x \in [a, b]$.

Teorema 3.5.4 (Converxencia uniforme). *Se $f \in AC_P([-\pi, \pi])$ entón*

$$Sf(x) = f(x) \quad \text{uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

Como consecuencia, a serie de Fourier Sf converge uniformemente en \mathbb{R} á extensión 2π -periódica de f , que é continua en \mathbb{R} .

3.6. Series de Fourier e análise funcional

Vimos como moitas funcións exprésanse en series de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

polo tanto, as funcións $\sin nx$ e $\cos nx$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, forman unha especie de base para un espazo vectorial de funcións. Imos ver que esta idea é correcta.

Definición 3.6.1. *Sexa H un espazo vectorial real. Unha aplicación*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

é un produto escalar o produto interior se cumpre as seguintes propiedades: (1) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para $u, v \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; (2) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ para $u_1, u_2, v \in H$; (3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todos $u, v \in H$; (4) $\langle u, u \rangle > 0$ a menos que $u = 0$ (neutro de H para a suma).

Teorema 3.6.2 (Desigualdade de Bessel). Se $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ é un subconxunto ortonormal nun espazo H dotado dun produto escalar, entón para calquera $v \in H$ temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle^2 \leq \|v\|^2$$

Os números $\langle v, v_n \rangle$ chámanse **coeficientes de Fourier** de v con respecto ao conxunto $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 3.6.3. Un **espazo de Hilbert** é un espazo de Banach cuxa norma procede dun produto escalar. Noutras palabras, é un espazo vectorial cun produto escalar e que é completo coa topoloxía inducida por dito produto escalar.

Definición 3.6.4. Sexa H un espazo vectorial dotado dun produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dous vectores $u, v \in H$ son ortogonais ou perpendiculares, y denotámolo por $u \perp v$, se $\langle u, v \rangle = 0$. Un subconxunto $A \subset H$ é ortogonal se $u \perp v$ para calquera $u, v \in A$ tales que $u \neq v$. Se, ademais, $\|u\| = 1$ para todo $u \in A$, entón dise que o conxunto é ortonormal.

Definición 3.6.5. Sexa $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espazo vectorial cun produto escalar. Dise que $B \subset H$ é unha **base de Hilbert** ou un sistema ortonormal completo de H se

1. B é ortonormal e
2. $\overline{\langle B \rangle} = H$, isto é, o subespazo vectorial xerado por B é denso en H .

Teorema 3.6.6. Sexan $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espazo de Hilbert e $B = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconxunto ortonormal de H . As seguintes afirmacións son equivalentes:

1. B é base de Hilbert;
2. Todo $v \in H$ pódese desenrolar en serie de Fourier:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle v_n \quad (\text{converxencia en } H);$$

3. Para todo $v \in H$ cúmprese a identidade de Parseval:

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle^2 \quad (\text{converxencia en } \mathbb{R}).$$

3.7. O sistema trigonométrico e converxencia das series de Fourier en $L^2(a, b)$

Definición 3.7.1. Sexa (a, b) un intervalo real, acotado ou non. Definimos o conxunto

$$L^2(a, b)$$

como o conxunto de (clases de equivalencia de) funcións medibles $f : (a, b) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e tales que

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

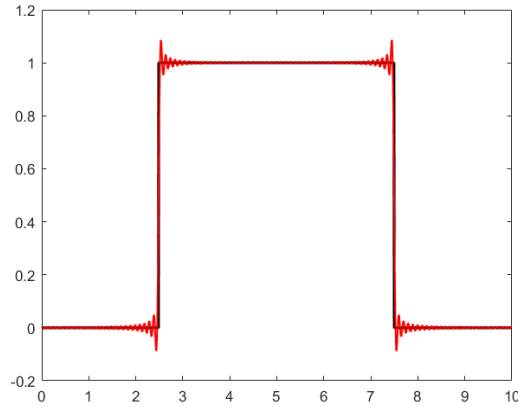
Teorema 3.7.2. O sistema trigonométrico

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

é unha base de Hilbert de $L^2(-\pi, \pi)$

Teorema 3.7.3 (de converxencia en $L^2(-\pi, \pi)$). A serie de Fourier de calquera $f \in L^2(-\pi, \pi)$ converxe cara f coa norma de $L^2(-\pi, \pi)$.

Figura 1: Nesta imaxe apreciamos a aproximación dunha función descontinua a través da aproximada de Fourier. Vemos como as funcións descritas serven como base ortogonal para describir calquera función e a parte apreciamos o coñecido como fenómeno de Gibbs, un fenómeno caracterizado por que nestas aproximacións existan oscilacións de alta frecuencia preto das descontinuidades. [7] [4] [5]



4. Método de separación de variables

O método de separación de variables combinado co principio de superposición emprégase para resolver problemas de valor inicial que impliquen ecuacións en derivadas parciais lineais. Normalmente, a variable dependente $u(x, y)$ exprésase na forma separable $u(x, y) = X(x)Y(y)$, onde X e Y son funcións de x e y respectivamente. En moitos casos, a ecuación en derivadas parciais redúcese a dúas ecuacións diferenciais ordinarias para X e Y . Un tratamento similar pódese aplicar a ecuacións de tres ou máis variables independentes. Con todo, a cuestión da separabilidade dunha EDP en dúas ou máis ecuacións diferenciais ordinarias non é de ningún xeito trivial. Este método de solución tamén se coñece como método de Fourier.

4.1. Separación de variables

Consideramos a ecuación diferencial parcial homoxénea de segunda orde

$$a^*u_{x^*x^*} + b^*u_{x^*y^*} + c^*u_{y^*y^*} + d^*u_{x^*} + e^*u_{y^*} + f^*u = 0$$

onde a^*, b^*, c^*, d^*, e^* e f^* son funcións de x^* e y^* . Aplicando a transformación

$$x = x(x^*, y^*), \quad y = y(x^*, y^*),$$

onde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)} \neq 0$$

Transformando esta ecuación en forma canónica

$$a(x, y)u_{xx} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = 0 \quad (17)$$

onde, (i) se $a = -c$, é hiperbólica, (ii) se $a = 0$ ou $c = 0$, é parabólica, (iii) se $a = c$, é elíptica. Asumimos a solución separable de (17) na forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad (18)$$

Sustituíndo (18) en (17), obtemos

$$aX''Y + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0 \quad (19)$$

Supoñendo a existencia dunha función $p(x, y)$, tal que, se dividimos (19) por $p(x, y)$, obtemos

$$a_1(x)X''Y + b_1(y)XY'' + a_2(x)X'Y + b_2(y)XY' + [a_3(x) + b_3(y)]XY = 0. \quad (20)$$

Dividindo agora (20) por XY , obtemos

$$\left[a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 \right] = - \left[b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3 \right]. \quad (21)$$

O lado esquerdo de (21) é función de x exclusivamente. O lado dereito depende unicamente de y . Así, derivando (21) con respecto de x obtemos

$$\frac{d}{dx} \left[a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 \right] = 0 \quad (22)$$

polo tanto, existe unha constante lambda coa que se cumpre:

$$a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 = \lambda, \quad (23)$$

Temos:

$$b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3 = -\lambda \quad (24)$$

Podemos reescribir (23) e (24) como

$$a_1 X'' + a_2 X' + (a_3 - \lambda) X = 0, \quad (25)$$

e

$$b_1 Y'' + b_2 Y' + (b_3 + \lambda) Y = 0. \quad (26)$$

Así, temos probado que se $u(x, y)$ é a solución de (18) entón $X(x)$ e $Y(y)$ son solucións das ecuacións ordinarias diferenciais (23) and (24) respectivamente. O recíproco tamén é certo, como pode comprobarse por cálculos directos.

Se os coeficientes da ecuación diferencial parcial homoxénea de segunda orde son constantes, entón a redución á forma canónica (17) non é necesaria. Vexamos isto considerando a ecuación de segunda orde

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0, \quad (27)$$

onde A, B, C, D, E , e F son constantes distintas de cero. Asumimos a solución separable da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0. \quad (28)$$

Substituíndo isto na ecuación (27) temos

$$AX''Y + BX'Y' + CXY'' + DX'Y + EXY' + FXY = 0. \quad (29)$$

Dividindo isto por AXY

$$\frac{X''}{X} + \frac{B}{A} \frac{X'}{X} \frac{Y'}{Y} + \frac{C}{A} \frac{Y''}{Y} + \frac{D}{A} \frac{X'}{X} + \frac{E}{A} \frac{Y'}{Y} + \frac{F}{A} = 0, \quad A \neq 0. \quad (30)$$

Derivando esta ecuación con respecto de x

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)' \frac{Y'}{Y} + \frac{D}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)' = 0. \quad (31)$$

Tendo polo tanto

$$\frac{\left(\frac{X''}{X}\right)'}{\frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)'} + \frac{D}{B} = -\frac{Y'}{Y}. \quad (32)$$

Esta ecuación e separable, polo que ambos lados deben ser iguais a λ . Obtendo

$$Y' + \lambda Y = 0, \quad (33)$$

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \left(\frac{D}{B} - \lambda\right) \frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)' = 0. \quad (34)$$

Integrando a ecuación (34) respecto de x , obtemos

$$\frac{X''}{X} + \left(\frac{D}{B} - \lambda\right) \frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right) = -\beta, \quad (35)$$

Onde β é a constante a determinar. Substituíndo a ecuación (33) na orixinal (30), temos

$$X'' + \left(\frac{D}{B} - \lambda\right) \frac{B}{A} X' + \left(\lambda^2 - \frac{E}{C} \lambda + \frac{F}{C}\right) \frac{C}{A} X = 0. \quad (36)$$

Comparando as ecuacións (35) e (36), temos

$$\beta = \left(\lambda^2 - \frac{E}{C} \lambda + \frac{F}{C}\right) \frac{C}{A}. \quad (37)$$

Polo tanto, $u(x, y)$ é a solución das ecuacións (27) se $X(x)$ e $Y(y)$ satisfacen as ecuacións diferenciais ordinarias (36) e (33) respectivamente. Nesta sección seguimos as referencias [1] [8]

4.2. Problema de conducción de calor con condicións Dirichlet

Consideramos unha vara homoxénea de lonxitude l . A vara é o suficientemente delgada para que a calor se distribúa por igual sobre a sección transversal no momento t . A superficie da vara está illada e, polo tanto, non hai perda de calor a través da fronteira. A distribución de temperatura da vara vén dada pola solución do problema inicial con condición de fronteira

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t &\geq 0, \\ u(l, t) &= 0, & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, & \quad k > 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Se asumimos a solución da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Temos para a ecuación (38)

$$XT' = kX''T$$

Polo tanto, temos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\alpha^2$$

onde α é unha constante positiva. Isto se debe a que se traballamos con $+\alpha^2$ entón $T(t)$ sería unha exponencial non acotada, o cal é fisicamente imposible. Tampouco vale $\alpha^2 = 0$, pois nese caso $X(x) = 0$, o cal non nos interesa. Polo tanto, X e T deben cumprir

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0, \\ T' + \alpha^2 kT &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Das condicións de fronteira, temos

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Polo tanto,

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

para unha función arbitraria $T(t)$. Polo tanto, debemos resolver o problema de valores propios

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned}$$

A solución da ecuación (39) é

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Como $X(0) = 0$, $A = 0$. Para satisfacer a segunda condición, temos

$$X(l) = B \sin \alpha l = 0.$$

Como $B = 0$ produce unha solución trivial, debemos ter $B \neq 0$ e polo tanto,

$$\sin \alpha l = 0.$$

Así,

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituíndo os autovalores, temos

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

A continuación, consideramos a ecuación

$$T' + \alpha^2 kT = 0,$$

con solución

$$T(t) = C e^{-\alpha^2 kt}.$$

Substituíndo $\alpha = (n\pi/l)$, temos

$$T_n(t) = C_n e^{-(n\pi/l)^2 kt}.$$

Así, as solucións non triviais da ecuación do calor satisfacendo ambas condicións fronteira son

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde $a_n = B_n C_n$ é unha constante arbitraria. Polo principio de superposición, obtemos unha solución formal por series

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{40}$$

que satisfice as condicións iniciais en caso de cumprirse

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Isto cúmprese en caso de que $f(x)$ poda ser representado por unhas serie de Fourier de senos con coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Polo tanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(\tau) \sin \left(\frac{n\pi\tau}{l} \right) d\tau \right] e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

é a solución formal por series da ecuación da calor. Nesta sección seguimos a referencia [8]

4.2.1. Exemplo problema de calor en 1 dimensión en MAPLE

Estudaremos a evolución da temperatura en todo punto dunha varilla no intervalo $[0, 2]$, supoñendo que os seus extremos se mantén en todo momento a temperatura cero e que no instante inicial $t = 0$ a temperatura en cada punto

$$x \in [0, 2] \text{ vén dada por } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{3}{2} < x \leq 2. \end{cases}$$

$$f := x \rightarrow \text{piecewise} \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2} < x \leq 2, 0 \right)$$

$$b := n \rightarrow \text{int}(f(x) \sin(n \cdot \text{Pi} \cdot x/2), x = 0, 2)$$

$$u := (x, t, a, m) \rightarrow \text{sum} (b(k) \cdot \exp(-(1/4) \cdot a \cdot k^2 \cdot \text{Pi}^2 \cdot t) \cdot \sin((1/2) \cdot$$

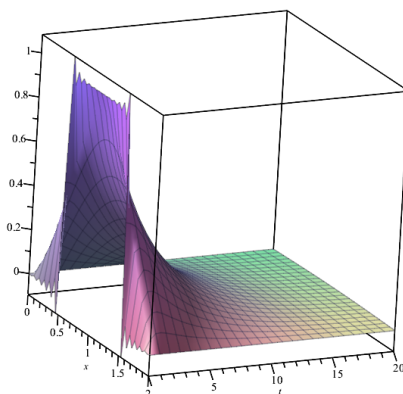
$$k \cdot \text{Pi} \cdot x, k = 1..m)$$

$$\text{with} (\text{plots}) : \text{animate}(\text{plot}, [u(x, t, 1, 10), x = 0., 2], t = 0., 10)$$

$$\text{plot}(f(x) - \text{sum}(b(k) \cdot \sin((1/2) \cdot k \cdot \text{Pi} \cdot x), k = 1., 10), x = 0., 2)$$

$$\text{plot } 3d(u(x, t, 1/10, 50), x = 0., 2, t = 0., 20)$$

Figura 2: Representación gráfica da evolución da temperatura. [5]



5. Series de Fourier dobres

A teoría das expansións da serie de Fourier para funcións de dúas variables é análoga á das expansións da serie de Fourier para funcións dunha variable. Aquí presentaremos unha breve descrición da serie de Fourier dobre, que posteriormente extenderase tamén á serie de Fourier triple. Nesta sección seguimos a referencia [8]

Vimos anteriormente que, se $f(x)$ é continua a trozos e periódica con período 2π , entón a serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

converxe na media a $f(x)$. Se f é continuamente diferenciable e periódica, entón a súa serie de Fourier converxe uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Por motivos de simplicidade e comodidade, consideremos a función $f(x, y)$ que é continuamente diferenciable. Sexa $f(x, y)$ periódica co período 2π , é dicir,

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi) = f(x, y).$$

Entón, se mantemos y fixo, podemos expandir $f(x, y)$ nunha serie de Fourier uniformemente converxente.

$$f(x, y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(y) \cos mx + b_m(y) \sin mx] \quad (41)$$

na que os coeficientes son funcións de y , é dicir,

$$a_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx dx,$$

$$b_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx dx.$$

Estes coeficientes son continuamente diferenciables en y e, polo tanto, podemos expandilos en series uniformemente converxentes.

$$a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos ny + b_{mn} \sin ny),$$

$$b_m(y) = \frac{c_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{mn} \cos ny + d_{mn} \sin ny),$$

onde

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny dx dy,$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny dx dy,$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx \cos ny dx dy,$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny dx dy.$$

Substituíndo a_m e b_m na ecuación (41) temos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + b_{0n} \sin ny) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + c_{m0} \sin mx) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny \\ &+ c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny). \end{aligned}$$

Isto é a coñecida como **Serie de Fourier dobre para $f(x, y)$** .

Introducimos unha serie de casos particulares que facilitarán o cálculo da Serie de Fourier dobre.

- Cando $f(-x, y) = f(x, y)$ e $f(x, -y) = f(x, y)$, todos os coeficientes desaparecen excepto a_{mn} , e a Serie de Fourier dobre redúcese a

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \cos ny,$$

onde

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny dx dy.$$

- Cando $f(-x, y) = f(x, y)$ e $f(x, -y) = -f(x, y)$, temos

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos mx \sin ny$$

onde

$$b_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny dx dy.$$

- Cando $f(-x, y) = -f(x, y)$ e $f(x, -y) = f(x, y)$, temos

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m0} \sin mx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin mx \cos ny,$$

onde

$$c_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \cos ny dx dy.$$

- Cando $f(-x, y) = -f(x, y)$ e $f(x, -y) = -f(x, y)$, temos

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin mx \sin ny,$$

onde

$$d_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny dx dy.$$

5.1. Resolución ecuación do calor a través de series de Fourier dobres para unha placa rectangular

Supoñamos unha placa de lonxitude a e de ancho b perfectamente illada nas caras $x = 0$ e $x = a$. Supoñamos que os outros dous lados se manteñen a temperatura cero. Sexa a distribución de temperatura inicial $f(x, y)$. Despois, buscamos a solución do problema inicial de valores de contorno

$$u_t = k\nabla^2 u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \quad (42)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (43)$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u_x(a, y, t) = 0$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0.$$

Buscamos unha solución non trivial da forma

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t).$$

Substituíndo isto na ecuación (42) temos

$$T' + \lambda k T = 0, \quad (44)$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0. \quad (45)$$

Polo tanto vemos como o problema é esencialmente o de atopar a solución da ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0.$$

Asumimos a solución separable non trivial da forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

Introducindo isto na ecuación (45), temos

$$X'' - \mu X = 0, \quad (46)$$

$$Y'' + (\lambda + \mu)Y = 0. \quad (47)$$

Como as condicións en x son homoxéneas, tomamos $\mu = -\alpha^2$ tal que

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Como $X'(0) = 0, B = 0$ e $X'(a) = 0$,

$$\sin \alpha a = 0, \quad A \neq 0$$

o que resulta en

$$\alpha = m\pi/a, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Destacamos que $\mu = 0$ é tamén un valor propio. Consecuentemente,

$$X_m(x) = A_m \cos(m\pi x/a), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Similarmente, para a solución non trivial Y , escollemos $\beta^2 = \lambda + \mu = \lambda - \alpha^2$ de forma que a solución da ecuación (47) é

$$Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y.$$

Aplicando as condicións homoxéneas, atopamos $C = 0$ e

$$\sin \beta b = 0, \quad D \neq 0.$$

Así, obtemos

$$\beta = n\pi/b; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

e

$$Y_n(y) = D_n \sin(n\pi y/b).$$

Lembrando que $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$, a solución da ecuación (44) pode ser escrita como

$$T_{mn}(t) = E_{mn} e^{-(m^2/a^2 + n^2/b^2)\pi^2 kt}.$$

Así, a solución da ecuación do calor satisfacendo as condicións de contorna prescritas pode ser reformulada como

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-(m^2/a^2 + n^2/b^2)\pi^2 kt} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (48)$$

onde $a_{mn} = A_m D_m E_{mn}$ son constantes arbitrarias. Aplicando as condicións iniciais, temos

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Isto é unha serie de Fourier dobre onde os coeficientes veñen dados por

$$a_{0n} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

e por $m \geq 1$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

A solución da ecuación de calor vén dada por (48).

5.1.1. MATLAB

Elaboramos un sinxelo programa de Matlab para estudar a ecuación do calor nunha placa rectangular. Para ilo establecemos unha placa cadrada de lado 1, un maiado e a ecuación do calor correspondente:

```
[x,y]=meshgrid(0:0.05:1,0:0.05:1);
z=x.*y.*(1-x).*(1-y);
```

Creamos a pantalla gráfica:

```
figure
surf(z)
xlim=get(gca,'XLim');
ylim=get(gca,'YLim');
zlim=get(gca,'ZLim');
```

Inicializamos o código:

```
N=20;
t=0.0;
for t=0:0.1:1
    U=zeros(size(z));
    for m=1:N
        for n=1:N
```

```

% CALOR
b_mn=16/(pi^6*m^3*n^3)*...
    (cos(m*pi)*cos(n*pi)-cos(m*pi)-cos(n*pi)+1);
U=U+b_mn.*sin(n.*pi.*x).*sin(m.*pi.*y).*exp(-pi.*sqrt(m^2+n^2).*t);
end
end

```

Introducimos un bucle que represente por pantalla e garde as imaxes para cada instante de tempo:

```

figure
surf(U)
axis([xlim ylim [-zlim(2) zlim(2)]])
title(['Time t=',num2str(t), ' N=',num2str(N)])
if(save)
saveas(gcf,['t_',num2str(t),'.png'])
end
end

```

Así, para os datos introducidos obtemos as seguintes representacións da calor:

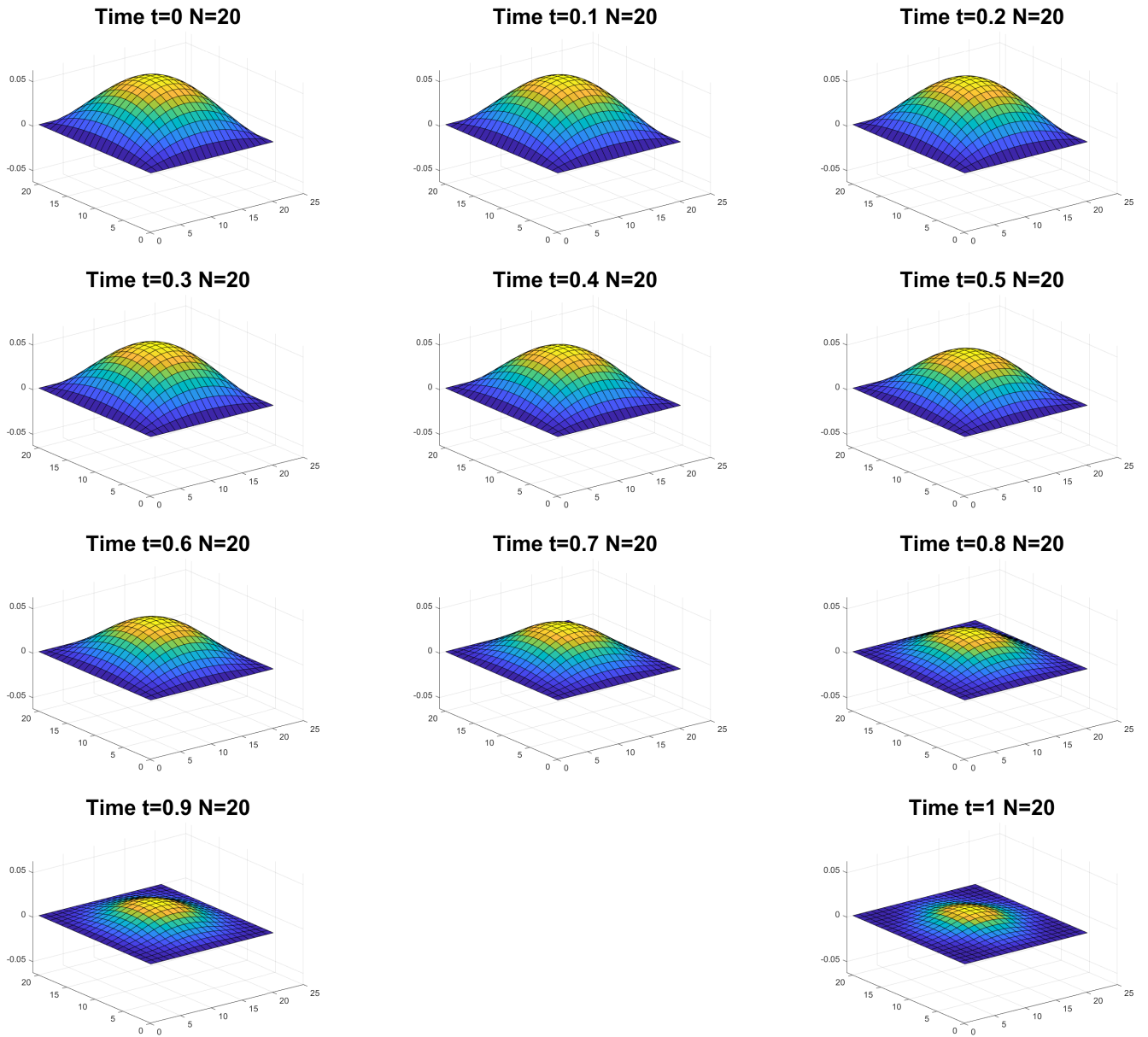


Figura 3: Resultados en 11 instantes de tempo distintos da evolución da temperatura nun rectángulo.

5.2. Membrana vibrante

Como exemplo específico da ecuación de onda de dimensión 2, determinemos a solución do problema da membrana vibratoria de lonxitude a e ancho b . O problema de valores límite para a función de desprazamento $u(x, y, t)$ é

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \quad (49)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0.$$

Asumimos a solución separable non trivial da forma

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t).$$

Substituíndo isto na ecuación (49), obtemos

$$T'' + \lambda c^2 T = 0, \quad (50)$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0, \quad (51)$$

onde $-\lambda$ é a constante de separación e $\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy}$. Tomando $\lambda = \alpha^2$. A solución da ecuación (50) é

$$T(t) = A \cos \alpha ct + B \sin \alpha ct.$$

Agora buscamos a solución non trivial da ecuación (51) na forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituíndo isto na ecuación (51) temos

$$X'' - \mu X = 0,$$

$$Y'' + (\lambda + \mu)Y = 0.$$

Se tomamos $\mu = -\beta^2$, entón as solucións destas ecuacións toman a forma

$$X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x.$$

$$Y(y) = E \cos \gamma y + F \sin \gamma y,$$

onde

$$\gamma^2 = (\lambda + \mu) = \alpha^2 - \beta^2$$

As condicións de fronteira homoxéneas en x requiren que $C = 0$ e

$$D \sin \beta a = 0$$

o cal implica que $\beta = (m\pi/a)$ con $D \neq 0$. Similarmente, as condicións de fronteira homoxéneas y requiren que $E = 0$ e

$$F \sin \gamma b = 0$$

o que implica que $\gamma = (n\pi/b)$ con $F \neq 0$. Observando que m e n son enteiros independentes, obtemos a función de desprazamento na forma

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \alpha_{mn} ct + b_{mn} \sin \alpha_{mn} ct) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (52)$$

onde $\alpha_{mn} = (m^2\pi^2/a^2) + (n^2\pi^2/b^2)$, a_{mn} and b_{mn} son constantes. Agora aplicando as condicións iniciais non homoxéneas, temos

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

e polo tanto,

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

De xeito similar, a condición inicial en u_t implica

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \alpha_{mn} c \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

do que se segue

$$b_{mn} = \frac{4}{\alpha_{mn} abc} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

A solución do problema da membrana rectangular vén, polo tanto, dada pola ecuación (52). Nesta sección estudamos as referencias [8] [6]

5.2.1. MATLAB

O código empregado é practicamente idéntico ao anterior. Simplemente modificamos as seguinte líneas:

```
z=x.*y.*(x-1).*(y-1); % ONDAS
```

```
%En lugar de: z=x.*y.*(1-x).*(1-y); % CALOR
```

```
% ONDAS
```

```
b_mn=4*(2*((-1)^n-1)*2*((-1)^m-1))/(pi^6*n^3*m^3);
```

```
U=U+b_mn.*cos(sqrt(m^2+n^2)*t).*sin(m*pi.*x).*sin(n*pi.*y);
```

```
%En lugar de:
```

```
% % CALOR
```

```
% b_mn=16/(pi^6*m^3*n^3)*...
```

```
% (cos(m*pi)*cos(n*pi)-cos(m*pi)-cos(n*pi)+1);
```

```
% U=U+b_mn.*sin(n.*pi.*x).*sin(m.*pi.*y).*exp(-pi.*sqrt(m^2+n^2).*t);
```

A lista de resultados gráficos será moi semellante á do calor pero apreciamos que existe menor disipación da deformación no caso da ecuación de ondas que na de calor:

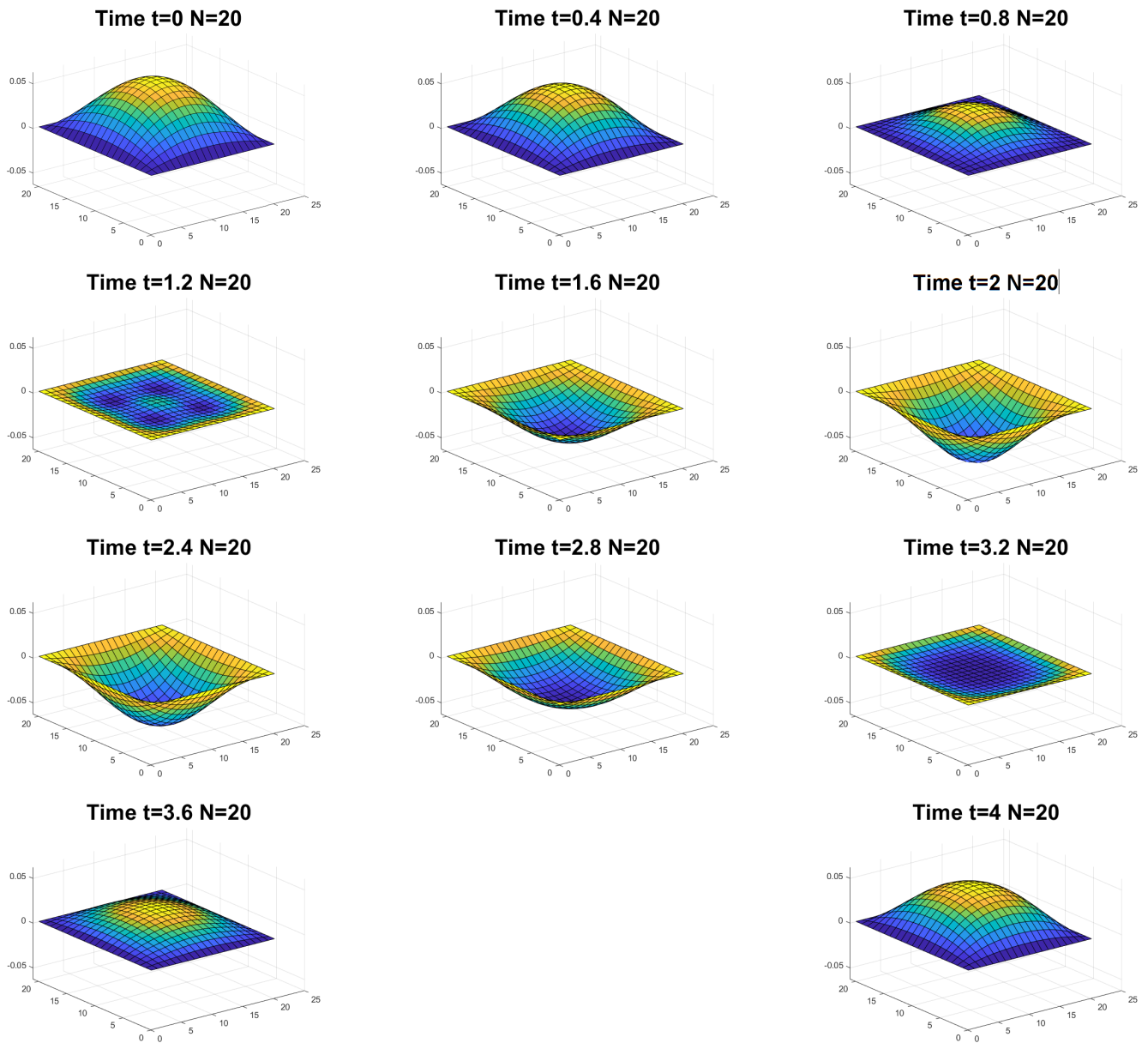


Figura 4: Resultados en 11 instantes de tempo distintos da evolución da vibración nun rectángulo.

5.3. Membrana circular vibrante

Mostremos agora unha aplicación interesante dos problemas de autovalores tanto unidimensionais (Sturm-Liouville) como multidimensionais. Consideremos as vibracións dunha membrana circular. O desplazamento vertical satisfai a ecuación de ondas bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

A xeometría do problema suxire que empreguemos cordenasas polares, $u = u(r, \theta, t)$. Supondremos que a membrana ten desplazamento nulo na fronteira circular, $r = a$:

$$u(a, \theta, t) = 0.$$

Tamén supondremos coñecidas a posición e velocidade iniciais:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= \alpha(r, \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) &= \beta(r, \theta). \end{aligned}$$

En primeiro lugar separamos a variable temporal buscando solucións produto da forma,

$$u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)h(t).$$

Como vimos xa anteriormente, $h(t)$ satisfai a ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h \quad (53)$$

onde λ é unha constante de separación. A partir de (53) deducimos que as frecuencias naturais de vibración son $c\sqrt{\lambda}$ (se $\lambda > 0$). Ademais, $\phi(r, \theta)$ satisfai o problema de autovalores bidimensional

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0 \quad (54)$$

con $\phi = 0$ sobre toda a fronteira, $r = a$:

$$\phi(a, \theta) = 0.$$

Intentemos agora obter solucións produto de (54) en coordenadas polares,

$$\phi(r, \theta) = f(r)g(\theta) \quad (55)$$

dado que nesas coordenadas, os puntos da membrana verifican $0 < r < a$, $-\pi < \theta < \pi$. Isto equivale a buscar dende o principio solucións da ecuación de ondas que sexan produto de funcións de cada variable independente, $u(r, \theta, t) = f(r)g(\theta)h(t)$. Sostituindo agora (55) en (54); en coordenadas polares, temos que

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

co que $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$ se converte en

$$\frac{g(\theta)}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{f(r)}{r^2} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \lambda f(r)g(\theta) = 0.$$

Podemos separar as variables r e θ multiplicando esta ecuación por r^2 y dividíndoa por $f(r)g(\theta)$:

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^2 = \mu$$

Introducimos unha nova constante de separación que escribimos na forma μ debido á nosa experiencia anterior con rexións circulares, que nos suxire que $g(\theta)$ debe oscilar para que poda satisfacer as condicións periódicas na variable θ . Así pois, as nosas tres ecuacións diferenciais, con dúas constantes de separación, son

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dt^2} &= -\lambda c^2 h, \\ \frac{d^2 g}{d\theta^2} &= -\mu g, \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - \mu) f &= 0. \end{aligned}$$

Dúas destas ecuacións deben ser problemas de autovalores. Porén, se ignoramos as condicións iniciais, a única condición de contorno que temos é aquela que se sigue do feito de que $u(a, \theta, t) = 0$ ou $\phi(a, \theta) = 0$, é dicir, $f(a) = 0$. Porén, se lembramos que $-\pi < \theta < \pi$ y $0 < r < a$, tanto θ como r están definidas en intervalos finitos, polo que ambas deberían satisfacer condicións de contorno nos extremos desos intervalos. Así, a natureza periódica da solución en θ implica que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ \frac{dg}{d\theta}(-\pi) &= \frac{dg}{d\theta}(\pi). \end{aligned}$$

Por outro lado, xa tñamos unha condición en $r = a$. Posto que as cordenadas polares son singulares en $r = 0$, debemos introducir unha condición de singularidade nese punto. Posto que o desplazamento da membrana debe ser finito, concluímos que

$$|f(0)| < \infty.$$

5.3.1. Problemas de valor inicial para unha membrana circular

As vibracións $u(r, \theta, t)$ dunha membrana circular quedan descritas por medio da ecuación de ondas bidimensional, estando u prescrita sobre a fronteira, e suxeita ás condicións iniciais. Cando aplicamos o método de separación de variables, obtemos catro familias de solucións produto, $u(r, \theta, t) = f(r)g(\theta)h(t)$:

$$J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sen m\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t \\ \sen c\sqrt{\lambda_{mn}}t \end{Bmatrix}. \quad (56)$$

Para simplificar os cálculos, tomaremos unha membrana inicialmente en reposo,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \beta(r, \theta) = 0.$$

Polo tanto, os termos $\sen c\sqrt{\lambda_{mn}}t$ en (56) non serán necesarios. Dacordo co principio de superposición, intentaremos resolver o problema de valores iniciais considerando unha combinación lineal infinita das restantes solucións produto:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sen m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t. \end{aligned}$$

A posición inicial $u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta)$ implica que

$$\begin{aligned} \alpha(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \right) \cos m\theta \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \right) \sen m\theta \end{aligned}$$

Ordenando de forma apropiada os termos vemos que esta é unha serie de Fourier ordinaria en θ . Os seus coeficientes de Fourier son, á súa vez, series de Fourier-Bessel (obsérvese que m está fixo). Polo tanto, os coeficientes poden determinarse por medio da ortogonalidade de $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$ con peso r . Deste modo podemos calcular os coeficientes por aplicación repetida da ortogonalidade unidimensional. Podemos determinar dúas familias de coeficientes A_{mn} y B_{mn} (incluíndo $m = 0$) a partires dunha condición inicial, posto que a periodicidade en θ conduce a dúas autofuncións asociadas a cada autovalor.

Porén, é relativamente máis fácil determinar todos os coeficientes empregando a ortogonalidade bidimensional. Lembremos que para o problema de autovalores bidimensional,

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0,$$

con $\phi = 0$ sobre a circunferencia de radio a , as autofuncións bidimensionais forman as familias dobremente infinitas

$$\phi_\lambda(r, \theta) = J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r}) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{Bmatrix}.$$

Polo tanto,

$$\alpha(r, \theta) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \phi_{\lambda}(r, \theta),$$

onde o símbolo \sum_{λ} significa que sumamos sobre todas as autofuncións. Estas autofuncións $\phi_{\lambda}(r, \theta)$ son ortogonais con peso 1. Podemos entón calcular inmediatamente A_{λ} (que representa tanto a A_{mn} como a B_{mn})

$$A_{\lambda} = \frac{\iint \alpha(r, \theta) \phi_{\lambda}(r, \theta) dA}{\iint \phi_{\lambda}^2(r, \theta) dA}.$$

Aquí $dA = r dr d\theta$. En dúas dimensións a función peso é constante. Porén, por razóns xeométricas $dA = r dr d\theta$ (escribindo a integral en coordenadas polares o xacobiano é r). Polo tanto, o peso r que aparece na ortogonalidade unidimensional das funcións de Bessel é soamente un factor xeométrico. Nesta sección estudamos a referencia [3]

5.3.2. MATLAB

Adaptamos o mesmo código de MATLAB empregado anteriormente para o noso novo problema, introducindo condicións iniciais arbitrarias.

```
clear all
close all
clc
```

```
% Parametros do problema
a = 1; % Radio de la membrana
c = 1; % Velocidad de la onda
N = 10; % Numero de termos en la serie
```

```
% Discretización espacial e temporal
r = linspace(0, a, 100);
theta = linspace(0, 2*pi, 100);
[R, Theta] = meshgrid(r, theta);
x = R .* cos(Theta);
y = R .* sin(Theta);
t_max = 5;
dt = 0.5;
time = 0:dt:t_max;
```

```
% Condicións iniciais arbitrarias
alpha = @(r, theta) sin(pi*r/a) .* cos(theta);
beta = @(r, theta) zeros(size(r)); % Para simplificar, beta es cero
```

```

U0 = alpha(R, Theta);
V0 = beta(R, Theta);

% Preparar a figura
figure;
axis tight manual
ax = gca;
ax.NextPlot = 'replaceChildren';

% Animaci n da soluci n
for t = time
    U = zeros(size(R));
    for m = 1:N
        for n = 1:N
            % Coeficientes de Fourier
            b_mn_alpha = integral2(@(r, theta) alpha(r, theta) .* sin(m*pi*r/a) .*
                sin(n*theta), 0, a, 0, 2*pi);
            b_mn_beta = integral2(@(r, theta) beta(r, theta) .* sin(m*pi*r/a) .*
                sin(n*theta), 0, a, 0, 2*pi) / (m^2+n^2);

            U = U + b_mn_alpha * cos(sqrt(m^2 + n^2) * c * t) .* sin(m * pi * R /
                a) .* sin(n * Theta) ...
                + b_mn_beta * sin(sqrt(m^2 + n^2) * c * t) .* sin(m * pi * R /
                a) .* sin(n * Theta);
        end
    end
end

% Gr fica da soluci n
surf(x, y, U, 'EdgeColor', 'none')
axis([-a a -a a -1 1])
title(['Time_t=', num2str(t)])
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('u(r,\theta,t)')
drawnow
title(['Time_t=', num2str(t), '\N=', num2str(N)], 'FontSize', 26)
saveas(gcf, ['CIRCULAR_t_', num2str(t), '.png'])
end

```

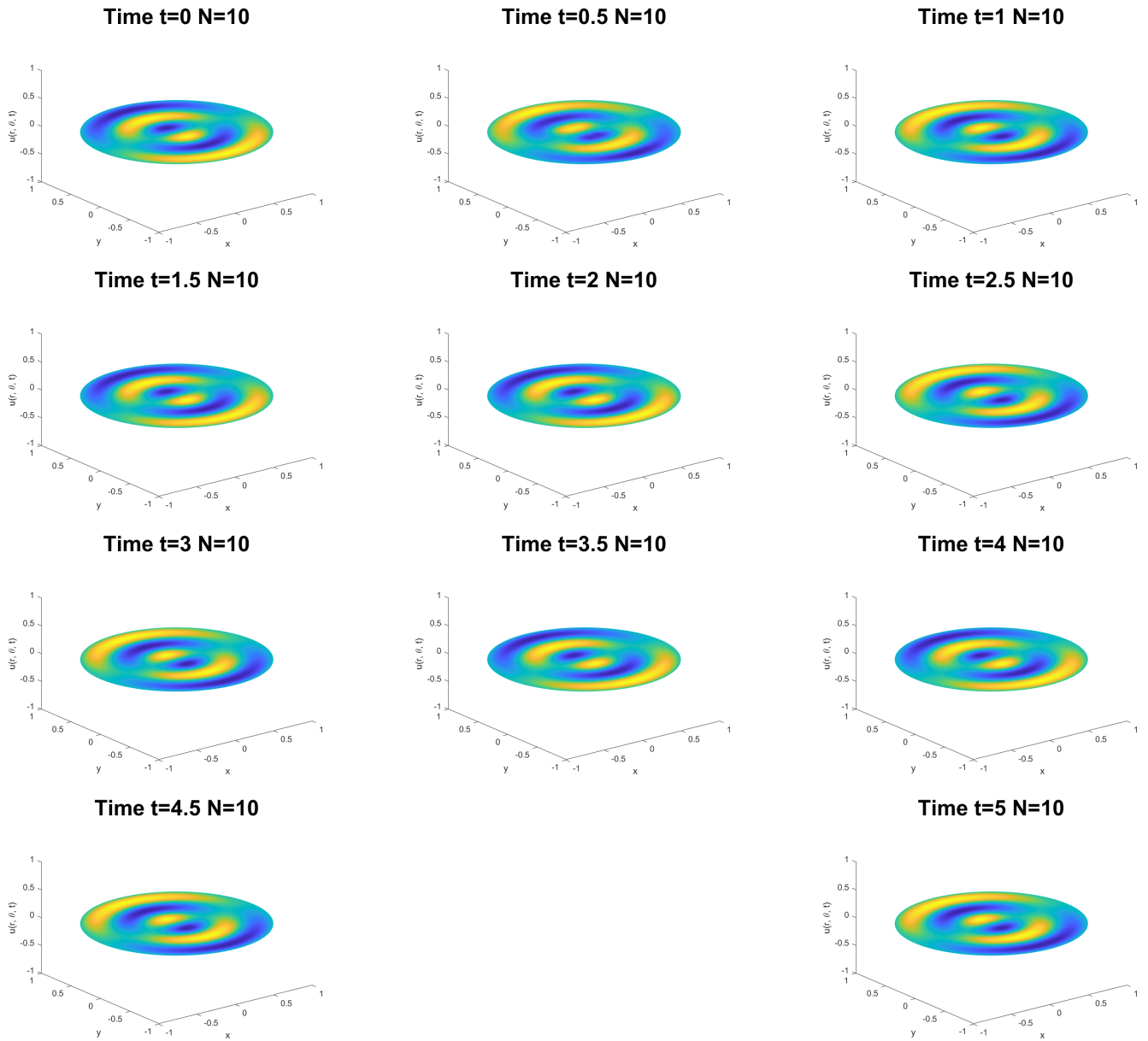


Figura 5: Resultados em 11 instantes de tempo distintos da evoluç3o da vibraç3o numa circunferencia.

6. Series de Fourier triples

A serie tripla de Fourier correspondente 3 funç3o $f(x, y, z)$ pode escreverse na forma

$$\sum_{l=1, m=1, n=1}^{\infty, \infty} \frac{1}{2^{E(1/l)+E(1/m)+E(1/n)} \pi^3} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x', y', z') P_{lmn}(x, y, z, x', y', z') dx' dy' dz',$$

onde

$$P_{lmn}(x, y, z, x', y', z') = \cos[(l-1)(x'-x)] \cos[(m-1)(y'-y)] \cos[(n-1)(z'-z)]$$

e $E(u)$ representa o maior inteiro contido em u .

6.1. Ecuación de ondas en tres dimensiones

A propagación das ondas debida a unha perturbación inicial nun volume rectangular descríbese mellor coa solución do problema do valor límite inicial.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \nabla^2 u, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b, & \quad 0 < z < d, & \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) &= f(x, y, z), & 0 \leq x \leq a, & \quad 0 \leq y \leq b, & \quad 0 \leq z \leq d, \\ u_t(x, y, z, 0) &= g(x, y, z), & 0 \leq x \leq a, & \quad 0 \leq y \leq b, & \quad 0 \leq z \leq d, \\ u(0, y, z, t) &= 0, & u(a, y, z, t) &= 0, \\ u(x, 0, z, t) &= 0, & u(x, b, z, t) &= 0, \\ u(x, y, 0, t) &= 0, & u(x, y, d, t) &= 0. \end{aligned}$$

Asumimos a solución separable non trivial da forma

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t).$$

As ecuacións separadas veñen dadas por

$$T'' + \lambda c^2 T = 0, \tag{57}$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0. \tag{58}$$

Asumimos que U téna solución non trivial separable da forma

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Substituíndo isto na ecuación (57) temos

$$X'' - \mu X = 0,$$

$$Y'' - \nu Y = 0,$$

$$Z'' + (\lambda + \mu + \nu)Z = 0.$$

Debido ás condicións homoxéneas en x , tomamos $\mu = -\alpha^2$ de forma que

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Obtemos

$$X_l(x) = B_l \sin \frac{l\pi x}{a}, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Tomamos $\nu = -\beta^2$ para obter

$$Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y$$

consecuentemente,

$$Y_m(y) = D_m \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

De novo tomamos $\gamma^2 = \lambda + \mu + \nu = \lambda - \alpha^2 - \beta^2$ de forma que

$$Z(z) = E \cos(\gamma z) + F \sin(\gamma z).$$

Aplicando as condicións homoxéneas en z , obtemos

$$Z_n(z) = F_n \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right)$$

Como a solución da ecuación (52) é

$$T(t) = G \cos(\sqrt{\lambda}ct) + H \sin(\sqrt{\lambda}ct),$$

a solución da ecuación de ondas tén a forma

$$u(x, y, z, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{lmn} \cos \sqrt{\lambda} ct + b_{lmn} \sin \sqrt{\lambda} ct \right) \\ \times \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right)$$

onde a_{lmn} e b_{lmn} son constantes arbitrarias. Os coeficientes a_{lmn} determínanse a partir da condición inicial $u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$ e atópase que son

$$a_{lmn} = \frac{8}{abd} \int_0^a \int_0^b \int_0^d f(x, y, z) \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) dx dy dz$$

Do mesmo xeito, os coeficientes b_{lmn} determínanse a partir da condición inicial $u(x, y, z, 0) = g(x, y, z)$ e atópase que son

$$= \frac{8}{\sqrt{\lambda} acbd} \int_0^a \int_0^b \int_0^d g(x, y, z) \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) dx dy dz$$

onde

$$\lambda = \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2} \right) \pi^2$$

6.2. Ecuación da calor nun volume rectangular

Consideremos o problema da distribución da calor nun volume rectangular. As caras mantéñense a temperatura cero graos. O sólido quéntase inicialmente de forma que o problema se escribe como

$$u_t = k \nabla^2 u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < d, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq d, \\ u(0, y, z, t) = 0, \quad u(a, y, z, t) = 0, \\ u(x, 0, z, t) = 0, \quad u(x, b, z, t) = 0, \\ u(x, y, 0, t) = 0, \quad u(x, y, d, t) = 0.$$

As ecuacións separables son

$$T' + \lambda k T = 0, \tag{59}$$

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0. \tag{60}$$

Asumindo a solución U da forma

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

así a solución da ecuación de Helmholtz é

$$U_{lmn}(x, y, z) = B_l D_m F_n \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right)$$

Como a solución da ecuación (59) é

$$T(t) = G e^{-\lambda k t}$$

a solución da ecuación da calor toma a forma

$$u(x, y, z, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn} e^{-\lambda k t} \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right)$$

onde $\lambda = \left[\left(\frac{l^2}{a^2} \right) + \left(\frac{m^2}{b^2} \right) + \left(\frac{n^2}{d^2} \right) \right] \pi^2$ e a_{lmn} son constantes. A aplicación da condición inicial produce

$$a_{lmn} = \left(\frac{8}{abd} \right) \int_0^a \int_0^b \int_0^d f(x, y, z) \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \\ \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) dx dy dz.$$

6.3. Ecuación de Laplace nun cilindro circular

Un problema interesante consiste en considerar a ecuación de Laplace nun cilindro circular de radio a e altura H . Empregando cordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \operatorname{sen} \theta, \\z &= z,\end{aligned}$$

a ecuación de Laplace escríbese:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (61)$$

Prescribimos u (por exemplo, a temperatura) sobre toda a fronteira do cilindro:

$$\begin{aligned}\text{tapa superior :} \quad u(r, \theta, H) &= \beta(r, \theta), \\ \text{tapa inferior :} \quad u(r, \theta, 0) &= \alpha(r, \theta), \\ \text{superficie lateral :} \quad u(a, \theta, z) &= \gamma(\theta, z).\end{aligned}$$

Éstas son tres condicións de contorno non homoxéneas. Unha forma de atacar o problema é descompoñelo nunha suma de tres problemas máis simples, cada un dos cales consiste en resolver unha ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{onde } u = u_1 + u_2 + u_3.$$

Empecemos buscando solucións produto,

$$u(r, \theta, z) = f(r)g(\theta)h(z), \quad (62)$$

para a ecuación de Laplace. Sustituíndo (62) na Ecuación (61), e dividindo por $f(r)g(\theta)h(z)$, obtemos

$$\frac{1}{r f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (63)$$

Podemos separar inmediatamente a dependencia en z obtendo

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda. \quad (64)$$

Podemos separar tamén as partes que dependen das variables r e θ se multiplicamos (63) por r^2 e empregamos (64):

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \mu.$$

Introducimos unha segunda constante de separación μ , e esperamos anticipadamente que $\mu > 0$ a causa de que pensamos que haberá oscilacións na variable θ para os tres problemas. En efecto, as condicións de contorno periódicas na variable θ dinnos que debe ser

$$\mu = m^2,$$

e que $g(\theta)$ pode ser ou ben $\operatorname{sen} m\theta$ ou ben $\operatorname{cos} m\theta$, onde m é un enteiro non negativo, $m = 0, 1, 2, \dots$. Así pois, será apropiado empregar unha serie de Fourier en θ para os tres problemas.

En resumo, a dependencia no ángulo θ obtense a partires das funcións $\operatorname{sen} m\theta$ e $\operatorname{cos} m\theta$, e as ecuacións diferenciais restantes son

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda h \quad (65)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - m^2) f = 0. \quad (66)$$

Estas dúas ecuacións diferenciais conteñen só un parámetro sen especificar, λ , e só unha delas convertirase nun problema de autovalores. Tal problema de autovalores precisa dúas condicións de contorno homoxéneas. Teremos resultados diferentes para cada un dos problemas de u_1, u_2 y u_3 . Porén, para os problemas de u_1 e de u_2 non temos condicións de contorno homoxéneas na variable z . No seu lugar, deberíamos ter dúas condicións homoxéneas na variable r . Una destas é en $r = a$. A outra debe ser unha condición singular en $r = 0$, que ten lugar debido á natureza singular das cordenadas polares (ou cilíndricas) en $r = 0$:

$$|f(0)| < \infty.$$

Así pois, atoparemos que para os problemas de u_1 e de u_2 , será o problema de autovalores. A solución de (66) oscilará, namentres que a solución de (65) non o fará así.

6.3.1. Temperatura nula sobre as tapas superior e inferior

Xorde un problema matemático algo diferente cando consideramos a situación na que tanto a tapa inferior como a superior se manteñen a temperatura nula. O problema para u_3 é

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad (67)$$

$$u_3(r, \theta, 0) = 0, \quad (68)$$

$$u_3(r, \theta, H) = 0, \quad (69)$$

$$u_3(a, \theta, z) = \gamma(\theta, z). \quad (70)$$

Neste caso, podemos empregar tamén o método de separación de variables. A periodicidade implica de novo que a parte que depende da variable θ estará relacionada cunha serie de Fourier (isto é, $\sin m\theta$ y $\cos m\theta$).

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda h$$

$$h(0) = 0,$$

$$h(H) = 0.$$

Obtemos así o problema de autovalores de Sturm-Liouville máis simple. Para que $h(z)$ poda oscilar e satisfacer as dúas ecuacións anteriores, a constante de separación λ debe ser negativa. En efecto, deberíamos recordar que se ten

$$\lambda = - \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$h(z) = \text{sen} \frac{n\pi z}{H}.$$

As condicións de contorno nas tapas superior e inferior implican que debemos empregar unha serie de Fourier de senos ordinaria na variable z .

Así pois, temos oscilacións nas variables z e θ . A solución que depende de r non debería ser oscilatoria, debe verificar:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(- \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 r^2 - m^2 \right) f = 0 \quad (71)$$

Teremos unha condición homoxénea singular en $r = 0$,

$$|f(0)| < \infty$$

pero non hai condición homoxénea en $r = a$. A Ecuación (71) parece análoga á ecuación diferencial de Bessel, pero ten o signo cambiado diante do término en r^2 . Isto tén como consecuencia que non pode convertirse na ecuación de Bessel empregando unha transformación real. Se facemos

$$s = i \left(\frac{n\pi}{H} \right) r$$

onde $i = \sqrt{-1}$, entón da lugar a

$$s \frac{d}{ds} \left(s \frac{df}{ds} \right) + (s^2 - m^2) f = 0$$

o que é o mesmo,

$$s^2 \frac{d^2 f}{ds^2} + s \frac{df}{ds} + (s^2 - m^2) f = 0$$

Ista é exactamente a ecuación de Bessel, co que

$$f = c_1 J_m(s) + c_2 Y(s) = c_1 J_m \left(i \frac{n\pi}{H} r \right) + c_2 Y_m \left(i \frac{n\pi}{H} r \right).$$

Polo tanto, a solución pódese representar en termos de funcións de Bessel de argumento imaxinario, pero isto non é moi útil, posto que as funcións de Bessel non adoitan estar tabuladas desta forma.

Alternativamente, introduzamos unha transformación real que elimina a dependencia $n\pi/H$ da ecuación diferencial:

$$w = \frac{n\pi}{H} r$$

Entón, a ecuación transfórmase en

$$w^2 \frac{d^2 f}{dw^2} + w \frac{df}{dw} + (-w^2 - m^2) f = 0. \quad (72)$$

Aquí aparece de novo un signo menos que impide que ésta poda ser unha ecuación diferencial de Bessel. A Ecuación (72) é unha modificación da ecuación de Bessel e as súas solucións se coñecen como funcións de Bessel modificadas.

A ecuación (72) tén en $w = 0$ a mesma clase de singularidade que a ecuación de Bessel. Polo tanto, como no caso desta última, poderemos determinar o comportamento singular polo método de Frobenius. Así, podemos afirmar que existe unha solución ben definida en $w = 0$. Esta función chámase **función de Bessel modificada de orden m** de primeira especie, e se denota por $I_m(w)$. Existe outra solución independente que é singular na orixe e se chama función de Bessel modificada de orden m de segunda especie. Esta segunda función se denota por $K_m(w)$. Ambas funcións, $I_m(w)$ y $K_m(w)$, se atopan tamén tabuladas. Necesitaremos moi pouca información adicional sobre as funcións $I_m(w)$ y $K_m(w)$. A solución xeral é:

$$f = c_1 K_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) + c_2 I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right).$$

Posto que K_m é singular en $r = 0$ e I_m non o é, síguese que $c_1 = 0$ e que $f(r)$ é proporcional a $I_m(n\pi r/H)$. Observemos aquí simplemente que tanto $I_m(w)$ coma $K_m(w)$ son non oscilatorias e que non se anulan para $w > 0$. Existen, polo tanto, dúas familias dobremente infinitas de solucións produto:

$$I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{H} \cos m\theta \quad \text{y} \quad I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{H} \text{sen} m\theta.$$

Estas solucións son oscilatorias nas variables z e θ , pero non o son en r . O principio de superposición dinos que

$$u_3(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{H} \cos m\theta \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{H} \operatorname{sen} m\theta$$

Os coeficientes E_{mn} y F_{mn} determínanse [se $I_m(n\pi a/H) \neq 0$] a partires da ecuación non homoxénea, ou ben iterando os resultados de ortogonalidade unidimensional ou por medio dunha aplicación da ortogonalidade bidimensional.

Deste modo, determinamos a solución da ecuación de Laplace dentro dun cilindro circular para as condicións dadas.

Referencias

- [1] Pepe Aranda. *Apuntes de métodos matemáticos II (EDPs)*. <http://jacobi.fis.ucm.es/pparanda/EDPs.html>, 2017.
- [2] Jean Baptiste Joseph Fourier. *The analytical theory of heat*. The University Press, 1878.
- [3] R. Haberman. *Ecuaciones en Derivadas Parciales (con Series de Fourier y Problemas de contorno)*. 3rd. Pearson Educación, 2003. ISBN: 84-205-3534-6.
- [4] Claudia Marcela. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. 1st. EDULP, 2017. ISBN: 978-950-34-1378-4.
- [5] Rodrigo López Pouso. *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales: Una introducción con Maple y ejercicios resueltos*. 1st. USC, editora, 2019. ISBN: 978-84-17595-18-0.
- [6] Sandro Salsa. *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*. 1st. Springer-Verlag, 2008, págs. 261-274. ISBN: 978-88-470-0751-2.
- [7] J. Nathan Kutz Steven L. Brunton. *Data Driven Science Engineering*. Brunton Kutz, 2017.
- [8] Lokenath Debnath Tyn Myint-U. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, 4th Edition*. 4th. Birkhauser Boston, jul. de 1987, págs. 117-120. ISBN: 978-0-8176-4393-5.