FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Existencia de Solucións de Ecuacións Diferenciais Ordinarias Periódicas por medio da Teoría de Sub e Sobre Solucións

Alba Marie Brouet Alonso

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Existencia de Soluciόns de Ecuaciόns Diferenciais Ordinarias Periódicas por medio da Teoría de Sub e Sobre Soluciόns

Alba Marie Brouet Alonso

07/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Existencia de solución de Ecuacións Diferenciais Ordinarias periódicas por medio da teoría de sub e sobre solucións.
Breve descrición do contido
Neste traballo estúdase a existencia de solución de Ecuacións Diferenciais Ordinarias non lineares, de segunda orde, que presenten unha periodicidade predeterminada. A técnica usada é a das denominadas sub e sobre solucións, consistente en que, asumindo a existencia dun par de funcións, ben ordenadas, que satisfán unhas desigualdades prefixadas, é posible deducir a existencia de solución do problema considerado. Solución que, ademais, vai a estar localizada entre a sub e a sobre solución.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

A teoría de sub e sobre solucións tenta probar a existencia de solución do problema de contorno por medio da existencia de sub e sobre solucións. Este método reemplaza o problema de atopar solución por un novo problema, atopar dúas novas funcións, unha sub e unha sobre solución, de xeito que se poda garantir a existencia de, polo menos, una solución entre elas.

Ademais de probar a existencia de solución, este método tamén proporciona certa localización das solucións. Entre a sub e a sobre solución quedará un conxunto de funcións entre as que se atoparán a solución ou as solucións, se hai varias, do problema que estean entre ditas sub e sobre solucións.

Neste traballo centrarémonos no método para as ecuacións diferenciais ordinarias periódicas de segunda orde. Nos dous primeiros capítulos veránse distintas nocións de sub e sobre solucións dependendo da regularidade requerida polo problema. E estudaremos as distintas estruturas do conxunto de solucións dependendo do tipo de sub e sobre solución que esteamos a considerar.

Cabe destacar, que se a parte non lineal do problema depende de u e u' será necesario impoñer algunha condición sobre o crecemento da parte non lineal con respecto da primeira derivada. A condición deste tipo máis habitual é a condición de Nagumo, a cal impón un crecemento ao sumo cuadrático sobre a derivada. De non verificarse a condición de Nagumo a simple existencia de sub e sobre solucións non garantirá a existencia de solución. No terceiro capítulo tratarase esta última cuestión.

Abstract

The theory of lower and upper solutions tries to prove the existence of boundary value problem solution by proving the existence of lower and upper solutions. This method replaces the problem of founding solutions by a new problem, found accurate lower and

upper solutions so the existence of at least one solution between them can be guaranteed. This theory also provides the localization of the solution. It leaves us the set of functions between the lower and the upper solution where the solution or solutions of the problem is located.

In this paper we consider the second order periodic boundary value problem. The two first chapters deal with the periodic problem, we present different notions of upper and lower solutions.

We may notice that if the nonlinear part of the equation depends on u and u' we need to imposed an additional condition on the nonlinear part of the equation with respect to the dependence on the first derivative to derive the existence of solution. The most usual condition is the Nagumo condition which imposes a quadratic growth in the dependence os the derivative. If Nagumo condition is not satisfied we can not guaranteed the existence of solutions even though we can find lower and upper solutions. The last chapter is devoted to this *a priori* bounds on the derivative.

Introdución

O método das sub e sobre solucións introduciuno E.Picard cara o ano 1890 [22] co uso de aproximacións sucesivas na procura de solucións das ecuacións diferenciais ordinarias para o problema de Dirichlet,

$$u'' + f(t,u) = 0, \;\; u(a) = 0, \; u(b) = 0 \tag{1}$$

supoñendo que $u = 0$ é unha solución e que $f(t,\cdot)$ é unha función crecente.
Co fin de probar a existencia dunha solución u de (1) probou a existencia dunha primeira aproximación α_0, unha función positiva tal que

$$\alpha_0'' + f(t,\alpha_0) > 0 \quad \forall t \in]a,b[, \quad \alpha_0(a) = 0, \alpha_0(b) = 0.$$

Esta función denomínase subsolución.

Este método de comparación tamén apareceu máis adiante nos estudos de O.Perron realizados en 1915 [21] para probar a existencia de solucións do problema de Cauchy de primeira orde

$$u' + f(t,u) = 0, \qquad u(0) = u_0,$$

localizando ditas solucións entre funcións α e β que só depende de t tales que $\alpha \leq \beta$, $\alpha(0) = \beta(0) = u_0$ e as derivadas pola dereita ou e pola esquerda satisfan as inecuacións diferenciais

$$\alpha'(t^+) + f(t,\alpha(t)) \leq 0, \quad \beta'(t^+) + f(t,\beta(t)) \geq 0.$$

En 1927 M.Müller estendeu este resultado para os sistemas de ecuacións diferenciais en [19]. Catro anos máis tarde, en 1931, G.Scorza Dragoni [15] realizou grandes avances na teoría de sub e sobre solucións introducindo o método ao problema de Dirichlet de valor inicial

$$u''(t) = f(t,u(t),u'(t)), \quad t \in [a,b], \quad u(a) = a_0, u(b) = b_0 \tag{2}$$

sendo $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua e $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.
Asumiu a existencia de funcións $\alpha, \beta \in C^2([a,b])$ tales que

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in [a,b] \tag{3}$$

onde $\alpha \in C^2([a,b])$ satifai

$$\begin{gathered} \alpha''(t) \geq f(t,\alpha(t),\alpha'(t)),\ \ t \in [a,b] \\ \alpha(a) \leq a_0,\ \alpha(b) \leq b_0 \end{gathered} \tag{4}$$

e $\beta \in C^2([a,b])$

$$\begin{gathered} \beta''(t) \leq f(t,\beta(t),\beta'(t)),\ \ t \in [a,b] \\ \beta(a) \geq a_0,\ \beta(b) \geq b_0 \end{gathered} \tag{5}$$

Nestas condicións, estaría probada a existencia de solución de (2) entre as funcións α e β. As funcións α e β así definidas denomínase respectivamente subsolución e sobresolución.

Este método permítenos, polo tanto, garantir, unha vez encontradas sub e sobre solucións cumprindo (3), (4) e (5), a existencia de solución de (2) e acotar o codomio da solución no intervalo $[a,b]$. En consecuencia, o problema de atopar unha solución para (2) tradúcese en atopar dúas funcións que verifiquen as condicións enunciadas.
Este novo problema motivou a desenvolvemento de estudos para atopar ditas funcións e para aplicar este método a distintos problemas de valor inicial. En 1967 e 1968 K.Akô [3] [4] [5], R.E. Gaines [16] e outros [17] realizaron construcións explícitas das sub e sobre solucións e aportaron condicións que aseguran a existencia de ditas solucións.

O seguinte gran avance realizouno M.Nagumo, en 1937 [20], probando a existencia de, polo menos, unha solución de (2) establecendo unha condición de crecemento sobre a parte non lineal da ecuación, a condición de Nagumo. Esta condición permite controlar o crecemento de f como función da derivada e proporciona cotas entre as que se atopa a primeira derivada de todas as posibles solucións que están entre a sub e a sobre solución.

Nesta memoria farase un breve percorrido sobre existencia de solucións de ecuacións diferenciais ordinarias periódicas mediante a teoría de sub e sobre solucións seguindo a estrutura do libro de C. De Coster e P. Habets *Two-Point Boundary Value Problems: Lower and Upper Solutions*[11].
No primeiro capítulo introduciremos os conceptos de sub e sobre solucións para o problema de contorno periódico

$$u'' = f(t,u),\ t \in [a,b],\ \ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b),$$

sendo $a < b$ e f unha función continua e $[a,b] \times \mathbb{R}$. Veremos baixo que condicións a sub e a sobre solución garanten a existencia de solución e como será a estrutura do conxunto das

solucións que se atopan entre elas.
No seguinte capítulo estenderemos os resultados obtidos anteriormente para sub e sobre solucións menos regulares que as estudadas.
Por último, consideraremos o problema de contorno periódico onde f dependerá de u e u' e comprobaremos que a existencia de sub e sobre solucións non é suficiente para garantir a existencia de solución. Para elo será necesario impoñer unha condición de crecemento sobre a parte non lineal da ecuación con respecto da primeira derivada que nos proporicionará cotas *a priori* sobre u'.
Estudaremos primeiro dous tipos de ecuacións nas que a propia estrutura da ecuación proporcionará cotas *a priori* sobre a derivada. E finalmente, introduciremos a condición de Nagumo, que é a condición máis usual para controlar o crecemento da parte non lineal con respcto a u'.

Preliminares

Neste apartado enunciaremos os teoremas e as definicións usadas ao longo deste traballo.

Definición 0.1. Dado o intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é unha función continua en } [a,b]\}$$

é o espacio de funcións reais continuas definidas sobre $[a,b]$.

Definición 0.2. Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$C^k([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é unha función } k\text{-veces diferenciable sobre } [a,b]$$
$$\text{e a derivada } j\text{-ésima de } f \text{ é continua } \forall j \in \{0,1,..,k\}\}.$$

Definición 0.3. Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$,

$$L^p([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f\text{é unha función Lebesque medible en } [a,b] \text{ e } \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty\}.$$

Teorema 0.4. ***(Schauder)*** *Sexa E un espazo normado e $C \subset E$ un conxunto convexo, pechado e limitado. Supoñamos $T : C \longrightarrow C$ unha función continua tal que $\overline{T(C)}$ é compacto. Entón T ten polo menos un punto fixo.*

Teorema 0.5. *(Converxencia dominada) Sexa $A \subset \mathbb{R}^n$ medible e sexa $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións medibles sobre A que puntualmente converxente en A. Se existe unha función $g \in L^1(A)$ tal que $|f_n(x)| \leq (x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in A$ entón,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Definición 0.6. Sexa $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\Omega)$. A aplicación $K : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}(L^2(\Omega))$ definida por

$$(Kf)(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y)dy$$

onde

$$\mathcal{A}(L^2(\Omega)) = \{K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) | K \text{ operador lineal acotado}\}.$$

é un operador lineal acotado sobre $L^2(\Omega)$ e $k(x, y)$ é o núcleo do operador integral.
Un núcleo $k(x, y)$ dirase Hilbert-Schmidt sobre Ω se $k(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Definición 0.7. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}$, sexa K un operador integral en $H = L^2(\Omega)$ con núcleo $k(x, y)$. Se existe $n \in \mathbb{N}, n > 0$ tal que $K^n \in C(H)$ dirase que K é un operador integral de tipo compacto.
Sendo $C(H)$ o conxunto das aplicacións lineais de H en H tales que para todo subconxunto acotado $X \subset H$ a súa imaxe é relativamente compacta.

Definición 0.8. (Derivadas de Dini) Dada f unha función definida sobre un intervalo $[a, b]$ e x_0 un punto de $[a, b]$. Entón, se $x_0 < b$ defínese

1. A derivada superior pola dereita de f en x_0
$$D^+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \sup \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
2. A derivada inferior pola dereita de f en x_0
$$D_+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \inf \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

se $x_0 > a$ defínese

1. A derivada superior pola esquerda de f en x_0
$$D^- f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \sup \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
2. A derivada inferior pola esquerda de f en x_0
$$D_- f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \inf \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definición 0.9. (Propiedade da intersección finita) Sexa $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ unha familia de subconxuntos dun conxunto Y. Dise que $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ten a propiedade da intersección finita se a intersección de calquera subfamilia finita e non baleira de $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ é non baleira.

Definición 0.10. (Espacio de Sóbolev) Sexan $k > 0$ e $p \in [1, \infty]$, definimos o espacio de Sobolev (k, p) sobre o conxunto I como,

$$W^{k,p}(I) = \{u \in C^{k-1}(I) \ | \ u^{(k-1)} \in AC(I), \ u^{(k)} \in L^p(I)\},$$

onde,

$$AC(I) = \{u \in C(I) \ | \ \exists f \in L^1(I), \ u(t) = u(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s) ds, \ \ t, t_0 \in I\}.$$

Teorema 0.11. *Dado un conxunto I, $W^{k,p}(I)$ é un espacio de Banach.*

Definición 0.12. Un conxunto S dise que é relativamente compacto nun espazo topolóxico X se cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S posúe unha subsucesión $(x_{n_k})_k$ converxente a un elemento de S.

Definición 0.13. Sexa H un subconxunto do espacio $C(E,F)=\{f|f: E\longrightarrow F\}$, sendo E un espacio métrico e F un espazo normado. Dise que H é equicontinuo no punto $x_0\in E$ se, para cada $\epsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que $d(x-x_0)<\delta$ entón $\|f(x)-f(x_0)\|<\epsilon$ para cada $f\in H$. Nótese que, δ é independente de f.
Dise que H é equicontinuo se é equicontinuo en cada punto de E.

Teorema 0.14. *(Teorema de Arzelà-Ascoli) Sexa X un espazo topolóxico compacto e Y un espazo métrico completo. Un conxunto $H\subset(X,Y)$ será relativamente compacto na topoloxía da métrica infinito se e só se*

1. *H é equicontinuo.*

2. *Para todo $x\in X$, $H_x=\{f(x): f\in H\}$ é relativamente compacto en Y.*

0.1. Notacións

Sexa a plicanción $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ e $p\in[1,+\infty]$,

$$\|u\|_{L^p}=\left(\int_a^b |u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|u(t)|$$

Capítulo 1

Método de Sub e Sobre Solucións para Ecuacións Diferenciais Ordinarias Periódicas

1.1. Introdución

Consideramos o problema de contorno periódico:

$$u'' = f(t,u),\ t \in [a,b],\ \ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b), \tag{1.1}$$

sendo $a < b$ e f unha función continua e $[a,b] \times \mathbb{R}$. Buscamos unha solución $u \in C^2([a,b])$ que verifique as igualdades en (1.1).
Para elo, introduciremos as seguintes definicións:

Definición 1.1. Unha función $\alpha \in C^2(]a,b[) \cap C^1([a,b])$ tal que

(i) $\forall t \in]a,b[,\ \ \alpha''(t) \geq f(t,\alpha(t))$

(i) $\alpha(a) = \alpha(b),\ \alpha'(a) \geq \alpha'(b)$.

é unha subsolución do problema (1,1).
Unha función $\beta \in C^2(]a,b[) \cap C^1([a,b])$ tal que

(i) $\forall t \in]a,b[,\ \ \beta''(t) \leq f(t,\beta(t))$

(ii) $\beta(a) = \beta(b),\ \beta'(a) \leq \beta'(b)$.

é unha sobresolución do problema (1.1).

A partir destas definicións probaremos a existencia de solución de (1.1). A idea principal do método está baseada na existencia das subsolucións e das sobresolucións. Se atopamos unha sub e unha sobre solución imos ver que existe unha solución entre elas.
Nótese que (1.1) pode ter solucións que non están en $[\alpha, \beta]$.

Teorema 1.2. *Sexan α e β, respectivamente, sub e sobre solucións do problema (1.1) tales que $\alpha \leq \beta$. Supoñamos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, sendo*

$$E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} | \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Entón, existe, polo menos, unha solución $u \in C^2([a, b])$ tal que

$$\forall t \in [a, b] \;\; \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. Consideramos o problema modificado

$$u'' - u = f(t, \gamma(t, u)) - \gamma(t, u), \;\; \forall t \in [a, b], \;\; u(a) = u(b), u'(a) = u'(b), \tag{1.2}$$

sendo $\gamma : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t, u) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } u < \alpha(t), \\ u & \text{se } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ \beta(t) & \text{se } u > \beta(t). \end{cases}$$

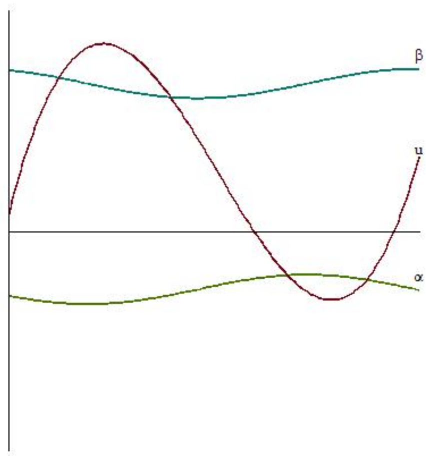


Figura 1.1: Funcións α, β e u.

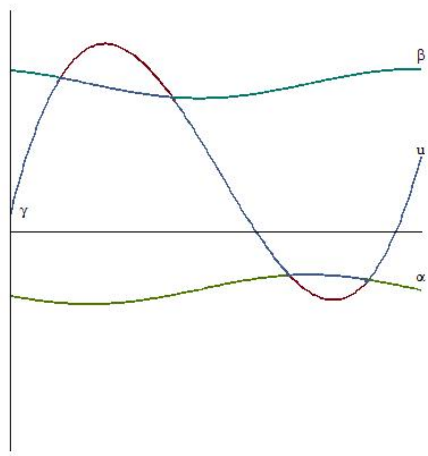


Figura 1.2: Función γ

Probaremos nun primeiro lugar que o problema modificado (1.2) ten polo menos unha solución e nun segundo que todas as solucións de (1.2) satisfán:

$$\forall t \in [a,b], \quad \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Pódese ver en [9] que o problema

$$u'' - u = f(t), \ \ \forall t \in [a,b], \ \ u(a) = u(b), \ u'(a) = u'(b). \tag{1.3}$$

ten solución única e vén dada por

$$u(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds.$$

Onde $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{2a+t-s} + e^{b-a-t-s}}{2(e^a - e^b)} & \text{se } a \leq s \leq t \leq b, \\ \frac{e^{a+b+t-s} + e^{-t+s}}{2(e^a - e^b)} & \text{se } a < t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{1.4}$$

é a función de Green correspondente ao problema (1.3) da cal podemos ver o cálculo en [9].

Podemos entón escribir a solución u de (1.2) como

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]ds$$

Consideramos o operador integral $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]ds. \tag{1.5}$$

Vexamos que é un operador continuo.

Sexa $(u_k)_k$ unha sucesión de solucións converxente, en norma infinito, a unha función $u \in C([a,b])$, é dicir, $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_\infty = 0$.

Como f é unha función continua, temos, para todo $s \in [a,b]$

$$\lim_{k\to\infty} |f(s,\gamma(s,u_k(s))) - \gamma(s,u_k(s)) - f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))| = 0.$$

Dado que f é continua e γ está limitada temos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \|(Tu)_k - (Tu)\|_\infty &= \lim_{k\to\infty} \| \int_a^b G(\cdot,s)[f(s,\gamma(s,u_k(s))) - \gamma(s,u_k(s))]ds \\ &- \int_a^b G(\cdot,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]ds\|_\infty \\ &= \lim_{k\to\infty} \| \int_a^b G(\cdot,s)([f(s,\gamma(s,u_k(s))] - [f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))])ds\|_\infty \\ &= 0.\end{aligned}$$

É dicir, $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ é un operador continuo.
Ademais, como o núcleo do operador integral é tal que $G(t,s) \in L^2([a,b] \times [a,b])$ entón é un núcleo Hilbert-Schmidt e, polo tanto, T é un operador integral compacto [1].
Podemos aplicar o teorema de Schauder que nos garante que T ten polo menos un punto fixo $(Tu)(t) = u(t)$. É dicir, o problema (1.2) posúe como mínimo unha solución.
Probemos a continuación que todas as solucións u de (1.2) verifican:

$$\forall t \in [a,b] \;\; \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Supoñamos, por redución ao absurdo, que existe $t_0 \in [a,b]$ tal que

$$\min_{t \in [a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

No caso $t_0 \in]a,b[$, observamos que, por un lado,

$$\gamma(t_0, u(t_0)) = \alpha(t_0)$$

pola defincíón de γ, dado que $u(t_0) < \alpha(t_0)$.
E, por outro lado, como α é unha subsolución temos que

$$\forall t \in]a,b[, \;\; \alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

En particular, para $t_0 \in]a,b[$,

$$f(t_0, \alpha(t_0) - \alpha''(t_0) \leq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u''(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &= f(t_0, \gamma(t_0, u(t_0)) - \gamma(t_0, u(t_0)) + u(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &= f(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha(t_0) + u(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &= f(t, \alpha(t_0)) - \alpha''(t_0) + u(t_0) - \alpha(t_0) \\ &\leq u(t_0) - \alpha(t_0) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Chegamos, polo tanto, a unha contradición.
Supoñamos agora $t_0 \in \{a,b\}$ entón,

$$\min_{t \in [a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(a) - \alpha(a) = u(b) - \alpha(b) < 0$$

de onde,

$$u'(a) - \alpha'(a) \geq 0 \geq u'(b) - \alpha'(b)$$

pero, pola definición de subsolución temos que,

$$u'(a) - \alpha'(a) \leq u'(b) - \alpha'(b).$$

Por tanto, $u'(a) - \alpha'(a) = 0$ e, para $t > a$ suficientemente pequeno,

$$u'(t) - \alpha'(t) = \int_a^t [f(s, \alpha(s)) + u(s) - \alpha(s) - \alpha''(s)]ds < 0,$$

en contradición con que $u - \alpha$ alcance o seu mínimo en a.
Co cal concluímos, $\forall t \in [a, b],\ \alpha(t) \leq u(t)$.
Analogamente, supoñamos que existe $t_1 \in [a, b]$ tal que

$$\min_{t \in [a,b]} \{\beta(t) - u(t)\} = \beta(t_1) - u(t_1) < 0.$$

No caso $t_1 \in]a, b[$, observamos que, por un lado,

$$\gamma(t_1, u(t_1)) = \beta(t_1)$$

pola definición de γ, dado que $\beta(t_1) < u(t_1)$.
E, por outro lado, como β é unha sobresolución temos que

$$\forall t \in]a, b[,\ \ \beta''(t) \leq f(t, \beta(t)).$$

En particular, para $t_1 \in]a, b[$,

$$\beta''(t_1) - f(t_1, \beta(t_1) \leq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \beta''(t_1) - u''(t_1) \\
&= \beta''(t-1) - f(t_1, \gamma(t_1, u)) + \gamma(t_1, u) - u(t_1) \\
&= \beta''(t_1) - f(t_1, \beta(t_1)) + \beta(t_1) - u(t_1) \\
&\leq \beta(t_1) - u(t_1) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Igual que antes, chegamos a unha contradición.
Se $t_1 \in \{a, b\}$ entón,

$$\min_{t \in [a,b]} (\beta(t) - u(t)) = \beta(a) - u(a) = \beta(b) - u(b) < 0$$

de onde,

$$\beta'(a) - u'(a) \geq 0 \geq \beta'(b) - u'(b)$$

pero, pola definición de sobresolución temos que,

$$\beta'(a) - u'(a) \leq \beta'(b) - u'(b).$$

Por tanto, $\beta'(a) - u'(a) = 0$, e, para $t > a$ suficientemente pequeno,

$$\beta'(t) - u'(t) = \int_a^t [\beta''(s) - f(s, \beta(s)) - u(s) + \beta(s)]ds < 0$$

en contradición con que $\beta - u$ alcance o seu mínimo en a.
Concluímos así que o problema (1.1) ten polo menos unha solución u tal que para todo $t \in [a, b]$ $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$.
Ademais esta solución é un punto fixo de T polo tanto $u \in C([a, b])$. Por derivación directa, sabemos que

$$Tu(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, \gamma(s, u(s)) - \gamma(s, u(s))]ds \in C^2([a, b])$$

é dicir, $u \in C^2([a, b])$ □

Ilustremos este resultado cun exemplo sinxelo,

Exemplo 1.3. Consideremos o problema periódico,

$$u'' = u + \text{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi)$$

Vexamos que a función $\alpha(t) = \text{sen}(t) - 3$ é unha subsolución.

1. Para todo $t \in]0, 2\pi[$,

$$\alpha''(t) = -\text{sen}(t) \geq -1$$

   logo

$$f(t, \alpha(t)) = \text{sen}(t) - 3 + \text{sen}(t) = 2\,\text{sen}(t) - 3 \leq -1 \leq \alpha''(t).$$

2. Cúmprense as condicións na fronteira,

$$\alpha(0) = \text{sen}(0) - 3 = -3 = \text{sen}(2\pi) - 3 = \alpha(2\pi).$$
$$\alpha'(0) = 1 \geq \alpha'(2\pi).$$

Comprobemos agora que a función $\beta(t) = \text{sen}(t) + 3$ é unha sobresolución.

1. Para todo $t \in]0, 2\pi[$,
$$\beta''(t) = -\operatorname{sen}(t) \leq 1$$
logo
$$f(t, \beta(t)) = \operatorname{sen}(t) + 3 + \operatorname{sen}(t) = 2\operatorname{sen}(t) + 3 \geq 1 \geq \beta''(t)$$

2. Cúmprense as condicións na fronteira,
$$\begin{aligned} \beta(0) &= \operatorname{sen}(0) + 3 = 3 = \operatorname{sen}(2\pi) + 3 = \beta(2\pi). \\ \beta'(0) &= 1 \leq \beta'(2\pi) = 1. \end{aligned}$$

Dado que $\alpha(t) < \beta(t)$ estamos, polo tanto, nas hipóteses do Teorema 1.2 que nos asegura a existencia de, polo menos, unha solución $u \in C^2([0, 2\pi])$. E, ademais $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$.

Nótese que este teorema non só proporciona a existencia de solución do problema senón que tamén indica onde se atopa a solución. No seguinte exemplo dita localización dada polo teorema proporciona unha estimación asintótica da solución.

Exemplo 1.4. Consideramos o problema
$$\begin{aligned} \epsilon^2 u'' &= u^3 - \operatorname{sen}^3(t), \;\; t \in [0,2\pi], \\ u(0) &= u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi), \end{aligned}$$
onde $\epsilon > 0$ é un parámetro pequeno.
Vexamos que, $\alpha(t) = \operatorname{sen}(t) - 2\epsilon$ é unha subsolución.

1. Para todo $t \in [0, 2\pi]$
$$\begin{aligned} \epsilon^2\alpha''(t) - f(t, \alpha(t)) &= \epsilon^2\alpha''(t) - \alpha^3(t) + \operatorname{sen}^3(t) \\ &= -\epsilon^2\operatorname{sen}(t) - (\operatorname{sen}(t) - 2\epsilon)^3 + \operatorname{sen}^3(t) \\ &= -\epsilon^2\operatorname{sen}(t) - (\operatorname{sen}^3(t) - 6\epsilon\operatorname{sen}^2(t) + 12\epsilon^2\operatorname{sen}(t) - 8\epsilon^3) + \operatorname{sen}^3(t) \\ &= 6\epsilon\operatorname{sen}^2(t) - 13\epsilon^2\operatorname{sen}(t) + 8\epsilon^3 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$
É dicir, para todo $t \in [0, 2\pi]$
$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

2. Cúmprense as condicións na fronteira,
$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \operatorname{sen}(0) - 2\epsilon = -2\epsilon = \operatorname{sen}(2\pi) - 2\epsilon = \alpha(2\pi). \\ \alpha'(0) &= \cos(0) = 1 \leq \cos(2\pi) = \alpha'(2\pi). \end{aligned}$$

Comprobemos agora que $\beta(t) = \operatorname{sen}(t) + 2\epsilon$ é unha sobresolución.

1. Para todo $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\epsilon^2\beta''(t) - f(t,\beta(t)) &= \epsilon^2 - \beta^3(t) + \operatorname{sen}^3(t)\\ &= -\epsilon^2 \operatorname{sen}(t) - (\operatorname{sen}(t) + 2\epsilon)^3 + \operatorname{sen}^3(t)\\ &= -\epsilon^2 \operatorname{sen}(t) - (\operatorname{sen}^3(t) + 6\epsilon \operatorname{sen}^2(t) + 12\epsilon^2 \operatorname{sen}(t) + 8\epsilon^3) + \operatorname{sen}^3(t)\\ &= -13\epsilon^2 \operatorname{sen}(t) - 6\epsilon \operatorname{sen}^2(t) - 8\epsilon^3\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

   É dicir, para todo $t \in [0, 2\pi]$
$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t)).$$

2. Cúmprense as condicións na fronteira,

$$\beta(0) = \operatorname{sen}(0) + 2\epsilon = 2\epsilon = \operatorname{sen}(2\pi) + 2\epsilon = \beta(2\pi).$$
$$\beta'(0) = \cos(0) = 1 \geq \cos(2\pi) = \beta'(2\pi).$$

Ademais, $\alpha(t) = \operatorname{sen}(t) - 2\epsilon < \operatorname{sen}(t) + 2\epsilon = \beta(t)$.
Aplicando o Teorema 1.2 dedúcese a existencia de, polo menos, unha solución u tal que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)\ \ \forall t \in [0, 2\pi]$. É dicir, $|u(t) - \operatorname{sen}(t)| \leq 2\epsilon$.

A localizanción das solucións entre as sub e sobre solucións dada polo Teorema 1.2 tamén pode proporcionar a existencia de varias solucións distintas. Se existen, $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$, dúas subsolucións de (1.1) e, $\beta_1(t)$ e $\beta_2(t)$, dúas sobresolucións de (1.1) tales que $\alpha_1(t) < \beta_1(t)$, $\alpha_2(t) < \beta_2(t)$ e $\beta_1(t) < \alpha_2(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Entón aplicando o Teorema 1.2 tense que, existen dúas solucións u_1, u_2 de (1.1) tales que, $\forall t \in [a, b]$

$$\alpha_1(t) \leq u_1(t) \leq \beta_1(t), \quad \alpha_2(t) \leq u_2(t) \leq \beta_2(t).$$

Exemplo 1.5. Consideramos o problema,

$$u'' = h(t) - \operatorname{sen}(u), \;\; t \in [0, 2\pi],$$
$$u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi),$$

onde $h \in C([0, 2\pi])$ é tal que $\forall t \in [0, 2\pi], \;\; -1/4 \leq h(t) \leq 0$.
Pódese comprobar fácilmente que as funcións $\alpha_1(t) = -\pi$ e $\alpha_2(t) = 0$ son subsolucións e que as funcións $\beta_1(t) = \frac{-\pi}{2}$ e $\beta_2(t) = \frac{3\pi}{2}$ son sobresolucións. E, ademais $\alpha_1(t) < \beta_1(t)$, $\alpha_2(t) < \beta_2(t)$ e $\beta_1(t) < \alpha_2(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$
Polo tanto, aplicando o Teorema 1.2 dedúcese a existencia de, polo menos, dúas solucións u_1 e u_2 tales que, $\forall t \in [0, 2\pi]$,

$$-\pi \leq u_1(t) \leq -\pi/2, \quad 0 \leq u_2(t) \leq 3\pi/2.$$

Observación 1.6. Podemos interpretar o Teorema 1.2 como un teorema de valor intermedio para o operador $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]ds.$$

Pódese comprobar facilmente, tendo en conta que a función de Green, neste caso, é negativa, que,

$$T\alpha = \int_a^b G(\cdot,s)[f(s,\alpha(s)) - \alpha(s)]ds \geq \int_a^b G(\cdot,s)[\alpha''(s) - \alpha(s)]ds \geq \alpha.$$

E, analogamente,

$$T\beta = \int_a^b G(\cdot,s)[f(s,\beta(s)) - \beta(s)]ds \leq \int_a^b G(\cdot,s)[\beta''(s) - \beta(s)]ds \leq \beta$$

E, polo teorema anterior temos probada a existencia dun valor intermedio $u \in [\alpha,\beta]$ tal que $Tu = u$.

Observación 1.7. Esta interpretación depende directamente da orde suposta entre α e β, $\alpha \leq \beta$. De non se cumprir esta condición o resultado non é certo.

Consideremos, por exemplo, o problema,

$$\begin{gathered} u'' + u = \operatorname{sen}(t), \quad t \in [0,2\pi], \\ u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi). \end{gathered}$$

As funcións $\alpha(t) = 1$ e $\beta(t) = -1$ son sub e sobre solucións, respectivamente, deste problema.

Se multipicamos por $\operatorname{sen}(t)$ temos que,

$$u''(t)\operatorname{sen}(t) + u(t)\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}^2(t)$$

e integrando esta ecuación teríamos que,

$$\int_0^{2\pi} [u''(t)\operatorname{sen}(t) + u(t)\operatorname{sen}(t)]dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)dt.$$

Pero,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [u''(s)\operatorname{sen}(s) + u(s)\operatorname{sen}(s)]ds &= \int_0^{2\pi} u''(s)\operatorname{sen}(s)ds + \int_0^{2\pi} u'(s)\operatorname{sen}(s)ds \\ &= [u'(t)\operatorname{sen}(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u'(s)\cos(s)ds + \int_0^{2\pi} u'(s)\operatorname{sen}(s)ds \\ &= -\int_0^{2\pi} u'(s)\cos(s)ds + \int_0^{2\pi} u'(s)\operatorname{sen}(s)ds \\ &= -\int_0^{2\pi} u'(s)\cos(s)ds - [u(t)\cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} u'(s)\cos(s)ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

e,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(s)ds = \pi.$$

É dicir, o problema non ten solución. Concluímos logo, que o feito de ter sub e sobre solucións non garante a existencia de solución se $\alpha \geq \beta$.

Observación 1.8. Se invertemos as desigualdades das condicións de fronteira sobre a sub e sobre solución o resultado do teorema tampouco será certo. Por exemplo, o problema,

$$\begin{gathered} u'' = 1, \;\; t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi) \end{gathered}$$

non ten solución dado que, integrando a ecuación teríamos que

$$\int_0^{2\pi} u''(s)ds = \int_0^{2\pi} 1ds.$$

Pero,

$$\int_0^{2\pi} u''(s)ds = u'(2\pi) - u'(0) = 0$$

e,

$$\int_0^{2\pi} 1ds = 2\pi.$$

Con todo existen funcións, $\alpha(t) = (t - \pi)^2 - 1$ e $\beta(t) = \pi^2$ cumprindo,

$$\begin{gathered} \alpha''(t) = 2 \geq 1, \alpha(0) = \alpha(2\pi), \\ \beta''(t) = 0 \leq 1, \beta(0) = \beta(2\pi), \end{gathered}$$

pero $\alpha'(0) \leq \alpha'(2\pi)$ e $\beta'(0) \geq \beta'(2\pi)$.
É dicir, ao estar invertidas as desigualdades das condicións de fronteira a existencia de solución non está garantida.

En conclusión, para poder aplicar este teorema, a maior dificultade é atopar sub e sobre solucións adecuadas. Unha idea simple sería probar con funcións constantes.

Corolario 1.9. *Consideremos* $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *unha función continua tal que para certos* $r_1 \leq r_2$ *tense que,*

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t, r_1) \leq 0 \leq f(t, r_2).$$

Entón, o problema (1.1) ten, polo menos, unha solución $u \in C^2([a, b])$ *tal que,*

$$\forall t \in [a, b], \;\; r_1 \leq u(t) \leq r_2.$$

Demostración. A proba é case inmediata. A función $\alpha(t) = r_1$ é unha subsolución de (1.1) dado que,

$$\forall t \in]a,b[, \quad \alpha''(t) = 0 \geq f(t, r_1) = f(t, \alpha(t)),$$
$$\alpha(a) = r_1 = \alpha(b), \ \ 0 = \alpha'(a) \geq \alpha'(b) = 0.$$

Analogamente, a función $\beta(t) = r_2$ é unha sobresolución de (1.1),

$$\forall t \in]a,b[, \quad \beta''(t) = 0 \leq f(t, r_2) = f(t, \beta(t)),$$
$$\beta(a) = r_2 = \beta(b), \ \ 0 = \beta'(a) \leq \beta'(b) = 0.$$

E, $\alpha(t) = r_1 \leq r_2 = \beta(t)$.
Aplicando o Teorema 1.2 deducimos a existencia de, polo menos, unha solución $u \in C^2([a,b])$ tal que $r_1 = \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) = r_2$. □

1.2. Sub e sobre solucións de clase C^2

Introducimos agora un novo concepto de subsolución e de sobresolución no que non se require a regularidade da sección anterior. Asemade se debilitan as desigualdades impostas anteriormente.

Definición 1.10. Unha función $\alpha \in C([a,b])$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ é unha subsolución de clase C^2 de (1.1) se a súa extensión periódica sobre $\mathbb{R}$, definida como, $\alpha(t) = \alpha(t+b-a)$, é tal que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ tense, ou ben,

$$D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0);$$

ou, existen un intervalo aberto I_0 e unha función $\alpha_0 \in C^1(I_0)$ tal que para $t_0 \in I_0$

(*i*) $\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0)$ e $\alpha(t) \geq \alpha_0(t) \ \ \forall t \in I_0$;

(*ii*) $\exists\ \alpha_0''(t_0)$ e $\alpha_0''(t_0) \geq f(t_0, \alpha_0(t_0))$.

Analogamente, unha función $\beta \in C([a,b])$ tal que $\beta(a) = \beta(b)$ é unha sobresolución de clase C^2 de (1.1) se a súa extensión periódica sobre $\mathbb{R}$, definida como, $\beta(t) = \beta(t+b-a)$, é tal que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ tense, ou ben,

$$D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0);$$

ou, existen un intervalo aberto I_0 e unha función $\beta_0 \in C^1(I_0)$ tal que para $t_0 \in I_0$

(*i*) $\beta(t_0) = \beta_0(t_0)$ e $\beta(t) \leq \beta_0(t) \ \ \forall t \in I_0$;

(ii) $\exists\, \beta_0''(t_0)$ e $\beta_0''(t_0) \le f(t_0, \beta_0(t_0))$.

De non haber lugar a confusión coa Definición 1.1 falaremos de sub e sobre solucións indiferentemente. Nótese que, se f é continua e as sub e sobre solucións α e β están en $C^2[a,b]$ entón as definicións (1.2) e (1.1) son equivalentes.

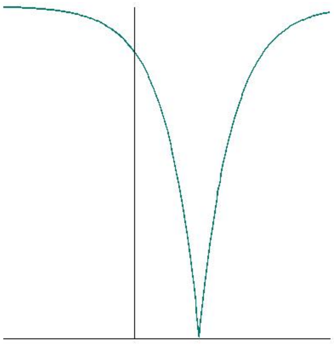


Figura 1.3: Función α

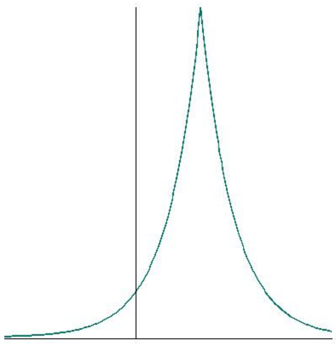


Figura 1.4: Función β

Proposición 1.11. *Sexan $\alpha_i \in C([a,b])$ para $i = 1,...,n$ subsolucións de clase C^2 do problema (1.1). Entón a función*

$$\alpha(t) = \max_{1\le i\le n}\{\alpha_i(t)\} \tag{1.6}$$

é unha subsolución de clase C^2 de (1.1).

Demostración. Nótese que $\forall\, t_0 \in [a,b]$ existe un $k \in \{1,..,n\}$ tal que a subsolución α_k verifica $\alpha(t_0) = \alpha_k(t_0)$. Ademais, como $\alpha(t)$ é o máximo de todas as subsolucións α_i con $i \in \{1,..,n\}$ temos, en particular, que $\alpha(t) \ge \alpha_k(t)$.
Dado que $\alpha_k(t)$ é unha subsolución de clase C^2 do problema (1.1) temos que, ou ben,

$$D_-\alpha_k(t_0) < D^+\alpha_k(t_0)$$

o cal implica que,

$$D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$$

ou ben, existen I_0 un intervalo aberto e $\alpha_{k_0} \in C^1(I_0)$ tal que para $t_0 \in I_0$

(i) $\alpha_{k_0}(t_0) = \alpha_k(t_0) = \alpha(t_0)$ e $\alpha(t) \ge \alpha_k(t) \ge \alpha_{k_0}(t)$ $\forall t \in I_0$;

(ii) $\exists\, \alpha_{k_0}''(t_0)$ e $\alpha_{k_0}''(t_0) \ge f(t_0, \alpha_{k_0}(t_0))$.

Polo tanto, α é unha subsolución de clase C^2 do problema (1.1). $\square$

Analogamente tense o seguinte resultado para as sobresolucións.

Proposición 1.12. *Sexan $\beta_j \in C([a,b])$ para $j = 1, ..., n$ sobresolucións de clase C^2 do problema (1.1). Entón a función*

$$\beta(t) = \min_{1\leq j\leq n} \{\beta_j(t)\}, \tag{1.7}$$

é unha sobresolución de clase C^2 de (1.1).

Demostración. A demostración desta proposición é análoga á da proposición anterior. Nótese que $\forall t_0 \in [a,b]$ existe un $s \in \{1,..,n\}$ tal que a solución β_s é tal que $\beta(t_0) = \beta_s(t_0)$. Ademais, como $\beta(t)$ é o mínimo de todas as sobresolucións β_j con $j \in \{1,..,n\}$ temos, en particular, que $\beta(t) \leq \beta_s(t)$.
Dado que $\beta_s(t)$ é unha sobresolución de clase C^2 do problema (1.1) temos que, ou ben,

$$D^-\beta_s(t_0) > D_+\beta_s(t_0)$$

o cal implica que,

$$D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$$

ou ben, existen I_0 un intervalo aberto e $\beta_{s_0} \in C^1(I_0)$ tal que para $t_0 \in I_0$

(i) $\beta_{s_0}(t_0) = \beta_s(t_0) = \beta(t_0)$ e $\beta(t) \leq \beta_s(t) \leq \beta_{s_0}(t) \quad \forall t \in I_0$;

(ii) $\exists\, \beta''_{s_0}(t_0)$ e $\beta''_{s_0}(t_0) \leq f(t_0, \beta_{s_0}(t_0))$.

Polo tanto, β é unha sobresolución de clase C^2 do problema (1.1). □

1.3. Existencia de solucións de clase C^2

A continuación imos ver que o resultado obtido anteriormente para sub e sobre solucións pode estenderse as sub e sobre solucións de clase C^2.

Teorema 1.13. *Sexan α e β, respectivamente, sub e sobre solucións de clase C^2 do problema (1.1) tales que $\alpha \leq \beta$. Supoñamos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, sendo*

$$E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Entón, existe, polo menos, unha solución $u \in C^2([a,b])$ do problema (1.1) tal que,

$$\forall t \in [a,b] \;\; \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. De forma similar á demostración do Teorema 1.2 consideramos o problema modificado (1.2), isto é,

$$u'' - u = f(t, \gamma(t,u)) - \gamma(t,u), \;\; \forall t \in [a,b], \;\; u(a) = u(b), u'(a) = u'(b),$$

sendo $\gamma : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t,u) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } u < \alpha(t), \\ u & \text{se } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ \beta(t) & \text{se } u > \beta(t) \end{cases}$$

Na demostración do Teorema 1.2 xa probamos a existencia de solución do problema (1.2), polo tanto, só falta demostrar que esta solución cumpre $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ en $[a,b]$. Supoñamos que,

$$\min_{t \in [a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\} < 0,$$

entón, existe $t_0 \in [a, b[$ tal que

$$u(t_0) - \alpha(t_0) = \min_{t \in [a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\}$$

e tense que,

$$u'(t_0) - D_{-}\alpha(t_0) \leq u'(t_0) - D^{+}\alpha(t_0).$$

Dado que α é unha subsolución de clase C^2, existe, por definición, un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$ e unha función $\alpha_0 \in C^1(I_0)$ tal que,

(i) $\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0)$ e $\alpha(t) \geq \alpha_0(t) \;\; \forall t \in I_0$;

(ii) $\exists\, \alpha_0''(t_0)$ e $\alpha_0''(t_0) \geq f(t_0, \alpha_0(t_0))$.

Polo tanto,

$$(u - \alpha_0)'(t_0) = u'(t_0) - \alpha_0'(t_0) = u'(t_0) - \alpha'(t_0) = (u - \alpha)'(t_0) = 0$$

e,

$$(u - \alpha_0)''(t_0) \geq 0$$

de onde se segue que,

$$0 \leq u''(t_0) - \alpha_0''(t_0) \leq f(t_0, \alpha_0(t_0)) - \alpha_0(t_0) + u(t_0) - f(t_0, \alpha_0(t_0)) < 0.$$

Analogamente, próbase que $u \leq \beta$. □

Ilustremos este resultado cun exemplo simple,

Exemplo 1.14. Consideremos o problema

$$\epsilon^2 u'' = \varphi(u) - \varphi(|t-\pi|),$$
$$u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi),$$

sendo $\epsilon > 0$ un parámetro real e $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ unha función tal que $\varphi'(t) \geq a^2 > 0$. Vexamos que a función $\alpha \in C([0, 2\pi])$ definida tal que $\alpha(t) = \text{máx}\{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}$ sendo,

$$\alpha_1(t) = -(t-\pi) - \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{at}{\epsilon}}, \quad \alpha_2(t) = (t-\pi) - \frac{\epsilon}{a}e^{\frac{a(t-2\pi)}{\epsilon}},$$

é unha subsolución de clase C^2.

1. Para todo $t \in [0, 2\pi]$ as funcións $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ son tales que,

$$\begin{aligned}
\epsilon^2\alpha_1''(t) - \varphi(\alpha_1(t)) + \varphi(|t-\pi|) &= -\epsilon^2\frac{a}{\epsilon}e^{-\frac{at}{\epsilon}} - \varphi(\alpha_1(t)) + \varphi(|t-\pi|)\\
&\geq -\epsilon a e^{-\frac{at}{\epsilon}} + a^2(|t-\pi| + (t-\pi) + \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{at}{\epsilon}})\\
&\geq a^2(|t-\pi| - (t-\pi))\\
&\geq 0,\\
\epsilon^2\alpha_2''(t) - \varphi(\alpha_2(t)) + \varphi(|t-\pi|) &= -\epsilon^2\frac{a}{\epsilon}e^{\frac{a(t-2\pi)}{\epsilon}} - \varphi(\alpha_2(t)) + \varphi(|t-\pi|)\\
&\geq -\epsilon a e^{\frac{a(t-2\pi)}{\epsilon}} + a^2(|t-\pi| - (t-\pi) + \frac{\epsilon}{a}e^{\frac{a(t-2\pi)}{\epsilon}})\\
&\geq a^2(|t-\pi| - (t-\pi))\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

   Polo tanto, se $t \neq \pi$

$$\alpha''(t) = \text{máx}\{\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)\} \geq f(t, \alpha(t)).$$

   E, se $t = \pi$ pódese comprobar fácilmente que $D_-\alpha(\pi) < D^+\alpha(\pi)$.

2. A función α cumpre as condicións de fronteira

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= \text{máx}\{\alpha_1(0), \alpha_2(0)\}\\
&= \text{máx}\{-(0-\pi) - \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a\cdot 0}{\epsilon}}, -\pi - \frac{\epsilon}{a}e^{\frac{a(0-2\pi)}{\epsilon}}\}\\
&= \text{máx}\{\alpha_2(2\pi), \alpha_1(2\pi)\}\\
&= \alpha(2\pi),\\
\alpha'(0) &= \text{máx}\{\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)\}\\
&= \text{máx}\{-1 + e^{-\frac{a\cdot 0}{\epsilon}}, 1 - e^{\frac{a(0-2\pi)}{\epsilon}}\}\\
&\geq \text{máx}\{\alpha_2'(2\pi), \alpha_1'(2\pi)\}\\
&= \alpha'(2\pi).
\end{aligned}$$

Polo tanto, $\alpha(t) = \text{máx}\{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}$ é unha subsolución.

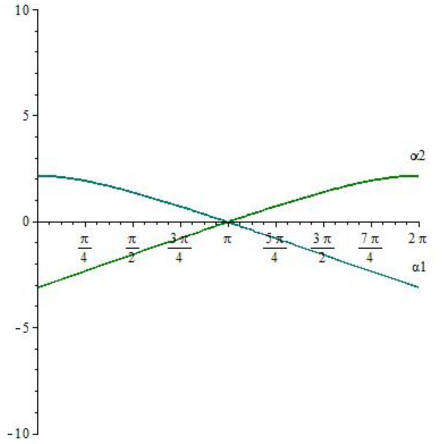


Figura 1.5: α_1 e α_2 con $\epsilon = 1, a = 1$.

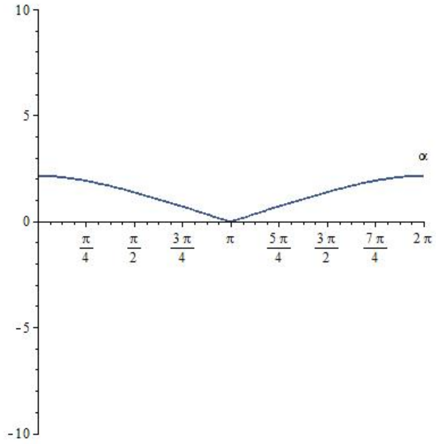


Figura 1.6: α con $\epsilon = 1, a = 1$

Nótese que $\alpha(t)$ é unha suboslución pero podemos comprobar fácilmente que as funcións $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ non o son, xa que non cumpren as condicións na fronteira.

Analogamente podemos comprobar que a función $\beta \in C([0, 2\pi])$,

$$\beta(t) = |t - \pi| + \frac{\epsilon}{a} e^{-\frac{a|t-\pi|}{\epsilon}}$$

é unha sobresolución de clase C^2.

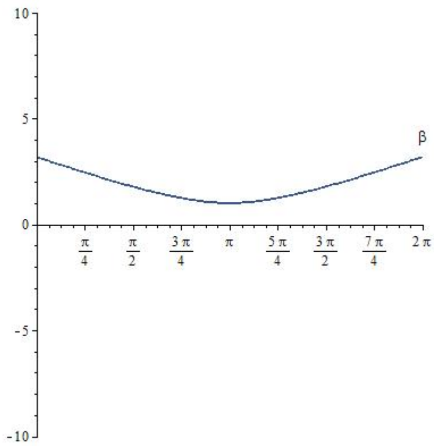


Figura 1.7: β con $\epsilon = 1, a = 1$.

Por tanto, aplicando o teorema anterior, podemos deducir a existencia dunha solución u tal que $\forall t \in [0, 2\pi]$ $\alpha \leq u(t) \leq \beta(t)$, é dicir, $u(t) = |t - \pi| + O(\epsilon)$.

1.4. Estrutura do conxunto de solucións

O conxunto de solucións que se atopan entre a subsolución de clase C^2, α, e a sobresolución de clase C^2, β, está contido en $[\alpha, \beta]$, polo tanto, é un conxunto limitado. A continuación probaremos a existencia de solucións extremais.

Teorema 1.15. *Sexan α e β sub e sobre solucións de clase C^2, respectivamente, do problema (1.1), tales que $\alpha < \beta$. Consideremos o conxunto*

$$E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$$

e supoñamos que a función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua. Entón, existen solucións do problema (1.1), $u_{\text{mín}}, u_{\text{máx}} \in C^2([a, b])$, tales que,

$$\alpha \leq u_{\text{mín}} \leq u_{\text{máx}} \leq \beta,$$

verificándose que calquera outra solución u de (1.1) tal que $\alpha \leq u \leq \beta$ verifica

$$u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}$$

en $[a, b]$.
As solucións $u_{\text{mín}}$ e $u_{\text{máx}}$ de (1.1) que se atopan entre α e β e tales que calquera outra solución u do problema (1.1) que está entre α e β cumpre $u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}$ chámanse solución minimal e solución maximal en $[\alpha, \beta]$ respectivamente, ou simplemente solución minimal e maximal.

Demostración. Nótese que as solucións do problema (1.1) son os puntos fixos do operador

$$T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$$

definido tal que,

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, u(s)) - u(s)]ds.$$

onde $G(t, s)$ é a función de Green dada pola expresión (1.4).
Definimos o conxunto

$$S = \{u \in C([a, b]) \mid u = Tu,\ \alpha \leq u \leq \beta\}.$$

Podemos afirmar que $S \neq \emptyset$ dado que o Teorema 1.13 garante a existencia de, polo menos, unha solución (é dicir, polo menos un punto fixo do operador T) entre α e β. Imos ver que ademais é compacto.
Sexa $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de elementos de S converxente en S a $u \in S$. Como T é un operador continuo, a sucesión $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a Tu. E, dado que, $u_n \in S$ para cada $n \in \mathbb{N}$, a sucesión $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é igual a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entón, por unicidade do límite, $Tu = u$, polo tanto, $u \in S$. É dicir, S é un conxunto pechado.
O conxunto S está limitado polas funcións α e β, polo tanto, é un conxunto limitado.
Por ser f continua, temos que existe $h \in C([a,b])$ tal que

$$|f(r,u(r)) - u(r)| \leq h(r) \text{ para todo } r \in [a,b].$$

Ademais sabemos que G é uniformemente continua en $[a,b]\times[a,b]$, polo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|t-s| < \delta$ entón,

$$|G(t,r) - G(s,r)| < \epsilon \text{ para todo } r \in [a,b]$$

Para $|t-s| < \delta$ temos que,

$$\begin{aligned}
|u(t) - u(s)| &= |Tu(t) - Tu(s)| \\
&= |\int_a^b (G(t,r) - G(s,r))(f(r,u(r)) - u(r))dr| \\
&\leq \int_a^b |G(t,r) - G(t,s)||f(r,u(r)) - u(r)|dr \\
&\leq \epsilon \int_a^b h(r)dr < \epsilon M.
\end{aligned}$$

Polo tanto, S é un conxunto equicontinuo.
Aplicando o teorema de Arzèla-Ascoli tense que S é un conxunto compacto.
Consideremos agora a familia de conxuntos,

$$\mathcal{F} = \{F_x\}_{x\in S} \; ; \; F_x = \{u \in S \mid u \geq x\}, \; x \in S.$$

Nótese que para cada subconxunto $\emptyset \neq S' \subset S$ finito, existe x', tal que, $x' = \max\limits_{u\in S'}\{S'\}$. Ademais, sabemos, pola Proposición 1.11, que x' é subsolución de clase C^2. Polo tanto, existe $u' \in S$ tal que $u' \geq x'$ co cal para todo subconxunto $\emptyset \neq S' \subset S$ finito, $\bigcap\limits_{x\in S'} F_x = F_{x'}$ sendo $x' = \max\limits_{u\in S'}\{S'\}$, é dicir, para cada subfamilia finita e non baleira de $\mathcal{F}$ a intersección dos seus elementos é non baleira, *i.e*, $\mathcal{F}$ ten a propiedade da interseción finita.
Entón, existe

$$u_{\text{máx}} \in \bigcap_{x\in S} F_x,$$

que é a solución maximal en $[\alpha, \beta]$, por definición.
De forma similar, probamos a existencia dunha solución minimal. Neste caso consideramos a familia de conxuntos,

$$\mathcal{H} = \{H_x\}_{x\in S} \ ; \ H_x = \{u \in S \ | \ u \leq x\}, \ x \in H$$

E, razoando de forma análoga, aplicando esta vez a Proposición 1.12 (en vez da 1.11), concluímos que $\mathcal{H}$ ten a propiedade da intersección finita. Entón, existe,

$$u_{\text{mín}} \in \bigcap_{x\in S} H_x$$

que é a solución minimal en $[\alpha, \beta]$, por definición. □

Observación 1.16. A solucións minimal e maximal son únicas. E, se $u_{\text{mín}} = u_{\text{máx}}$ entón o problema (1.1) ten solución única en $[\alpha, \beta]$.

Se a función f é monótona crecente con respecto a u imos ver que o conxunto de solucións é un continuo. Haberá solucións pasando por todos os puntos entre $u_{\text{mín}}$ e $u_{\text{máx}}$.

Teorema 1.17. *Sexan α e β sub e sobre solucións de clase C^2, respectivamente, do problema (1.1), tales que $\alpha < \beta$. Consideremos o conxunto*

$$E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$$

e supoñamos que a función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua e monótona crecente con respecto a u. Sexan $t_0 \in [a, b]$ e u^* un número real tal que $u_{\text{mín}}(t_0) \leq u^* \leq u_{\text{máx}}(t_0)$ sendo $u_{\text{mín}}$ e $u_{\text{máx}}$ as solucións minimal e maximal, respectivamente, definidas no teorema anterior.
Entón, existe unha solución $u \in C^2([a, b])$ de (1.1) tal que $u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}$ e $u(t_0) = u^*$.

Demostración. Sexan $t_0 \in [a, b]$ e $u^* \in \mathbb{R}$ tales que $u_{\text{mín}}(t_0) \leq u^* \leq u_{max}(t_0)$.
Sexa $\epsilon > 0$ tal que $u_{\text{máx}} - \epsilon \leq u_{\text{mín}} + \epsilon$ e consideremos as funcións,

$$\alpha_1(t) = \text{máx}\{u_{\text{mín}}(t), u_{\text{máx}}(t) - \epsilon\}, \quad \beta_1 = \text{mín}\{u_{\text{máx}}(t), u_{\text{mín}}(t) + \epsilon\}.$$

Vexamos que, as funcións α_1 e β_1 son, respectivamente, sub e sobre solucións de clase C^2 do problema (1.1).
As funcións $u_{\text{mín}}(t)$ e $u_{\text{máx}}(t) - \epsilon$ son subsolucións.

1. A función $u_{\text{mín}}(t)$ é a solución minimal, polo tanto é solución de (1.1). En particular,

   a) $u''_{\text{mín}} = f(t, u_{\text{mín}}(t))$,

   b) $u_{\text{mín}}(a) = u_{\text{mín}}(b), \quad u'_{\text{mín}}(a) = u'_{\text{mín}}(b)$.

2. A función $u_{\text{máx}}(t)$ é a solución maximal, polo tanto é solución de (1.1). En particular, a función $u_{\text{máx}} - \epsilon$ é tal que,

   a) $(u_{\text{máx}}(t) - \epsilon)'' = u''_{\text{máx}}(t) = f(t, u_{\text{máx}}(t)) \geq f(t, u_{\text{máx}}(t) - \epsilon)$,

   b) $u_{\text{máx}}(a) - \epsilon = u_{\text{máx}}(b) - \epsilon, \quad (u_{\text{máx}}(a) - \epsilon)' = (u_{\text{máx}}(b) - \epsilon)'$.

Aplicando o Teorema 1.11 temos que α_1 é unha subsolución.
Analogamente, temos que, as funcións $u_{\text{máx}}(t)$ e $u_{\text{mín}}(t) - \epsilon$ son sobresolucións.

1. A función $u_{\text{máx}}(t)$ é a solución maximal, polo tanto é solución de (1.1). En particular,

   a) $u''_{\text{máx}}(t) = f(t, u_{\text{máx}}(t))$,

   b) $u_{\text{máx}}(a) = u_{\text{máx}}(b), \quad u'_{\text{máx}}(a) = u'_{\text{máx}}(b)$.

2. A función $u_{\text{mín}}(t)$ é a solución minimal, polo tanto é solución de (1.1). En particular, a función $u_{\text{mín}}(t) + \epsilon$ é tal que,

   a) $(u_{\text{mín}}(t) + \epsilon)'' = u''_{\text{mín}}(t) = f(t, u_{\text{mín}}(t)) \leq f(t, u_{\text{mín}}(t) + \epsilon)$,

   b) $u_{\text{mín}}(a) + \epsilon = u_{\text{mín}}(b) + \epsilon, \quad (u_{\text{mín}} + \epsilon)'(a) = (u_{\text{mín}} + \epsilon)'(b)$.

Aplicando agora o Teorema 1.12 temos que β_1 é unha sobresolución.
A continuación, considerando as subsolución de clase C^2, $u_{\text{mín}}(t)$ e $u_{\text{máx}}(t) - \epsilon$, e as sobre solucións de clase C^2, $u_{\text{mín}}(t) + \epsilon$ e $u_{\text{máx}}(t)$. E, tendo en conta que $u_{\text{mín}}(t) \leq u_{\text{mín}}(t) + \epsilon$ e que, $u_{\text{máx}}(t) - \epsilon \leq u_{\text{máx}}(t)$ podemos aplicar o Teorema 1.13 que nos garante a existencia dunha solución u_1 do problema (1.1) tal que $\forall t \in [a, b]$,

$$\alpha_1(t) \leq u(t) \leq \beta_1(t).$$

É dicir,

$$u_{\text{mín}}(t) \leq u_1(t) \leq u_{\text{mín}}(t) + \epsilon, \quad u_{\text{máx}}(t) - \epsilon \leq u_1(t) \leq u_{\text{máx}}(t).$$

E, dado que $u_{\text{mín}}(t_0) \leq u^* \leq u_{\text{máx}}(t_0)$ tense que,

$$u^* \in [u_{\text{mín}}(t_0), u_1(t_0)] \quad ou \quad u^* \in]u_1(t_0), u_{\text{máx}}(t_0)].$$

Se $u^* \in [u_{\text{mín}}(t_0), u_1(t_0)]$ entón, considerando as funcións,

$$\alpha_2(t) = \text{máx}\{u_{\text{mín}}(t), u_1(t) - \epsilon/2\}, \quad \beta_2(t) = \text{mín}\{u_1(t), u_{\text{mín}}(t) + \epsilon/2\}$$

o Teorema 1.13 nos asegura a existencia dunha solución u_2 tal que $\forall t \in [a, b]$

$$u_{\text{mín}}(t) \leq u_2(t) \leq u_{\text{mín}}(t) + \epsilon/2, \quad u_1(t) - \epsilon/2 \leq u_2(t) \leq u_1(t).$$

Analogamente, se $u^* \in]u_1(t_0), u_{\text{máx}}(t_0)]$, consideramos as funcións,

$$\alpha_3(t) = \text{máx}\{u_1(t), u_{\text{máx}}(t) - \epsilon/2\}, \quad \beta_3(t) = \text{mín}\{u_{\text{máx}}(t), u_1(t) + \epsilon/2\}$$

e, igual que no caso anterior, o Teorema 1.13 nos garante a existencia dunha solución u_2 tal que $\forall t \in [a, b]$

$$u_1(t) \leq u_2(t) \leq u_1(t) + \epsilon/2, \quad u_{\text{máx}}(t) - \epsilon/2 \leq u_2(t) \leq u_{\text{máx}}(t).$$

En calquera dos dous casos temos, $|u_2(t_0) - u^*| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.
Podemos definir así unha sucesión de solucións $(u_k)_k$ tal que $|u_k(t_0) - u^*| \leq \epsilon/2^{k-1}$. Aplicando o teorema de Arzelà-Ascoli temos que existe unha subsucesión $(u_{k_n})_n$ que converxe a u en $C([a, b])$. Do cal se segue que u é un punto fixo do operador T definido en (1.5) e, polo tanto, solución de (1.1). Ademais, $u(t_0) = \lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n}(t_0) = u^*$. $\square$

A condición de que f sexa monótona crecente é indispensable para que o conxunto de solucións sexa un continuo.

Exemplo 1.18. Consideremos o problema,

$$\begin{gathered} u'' = u^3 - u^2,\ t \in [0, 1], \\ u(0) = u(1),\ \ u'(0) = u'(1). \end{gathered}$$

Obsérvese que a función $f(t, u) = u^3 - u^2$ non é monótona crecente dado que é decrecente no intervalo $(0, \frac{2}{3})$ polo tanto non cumpre as hipóteses do teorema anterior.
As funcións $\alpha(t) = -2$ e $\beta(t) = 2$ son sub e sobre solucións, respectivamente. Pero, as únicas solucións deste problema son $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$.
Vemos así que ao non cumprirse que f sexa crecente, a continuidade das solucións non está garantida.

O seguinte exemplo pon de manifesto que as solucións que están entre a sub e a sobre solución non están necesariamente ordenadas.

Exemplo 1.19. Consideramos o problema,

$$\begin{gathered} u'' = \text{mín}\{u + 2, \text{máx}\{-u, u - 2\}\},\ \ t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi) \end{gathered}$$

Podemos comprobar fácilmente que $\alpha(t) = -3$ é unha subsolución,

1. $\forall t \in]0, 2\pi[,\ \ 0 \geq f(t, \alpha(t)) = f(t, -3) = \text{mín}\{-3 + 2, \text{máx}\{-(-3), -3 - 2\}\} = -1$

2. $\alpha(0) = -3 = \alpha(2\pi),\ \ 0 = \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi) = 0.$

E que $\beta(t) = 3$ é unha sobresolución,

1. $\forall t \in]0, 2\pi[, \;\; 0 \leq f(t, \beta(t)) = f(t, 3) = \text{mín}\{3 + 2, \text{máx}\{-3, 3 - 2\}\} = 1$
2. $\beta(0) = 3 = \beta(2\pi), \;\; 0 = \beta'(0) \leq \beta'(2\pi) = 0.$

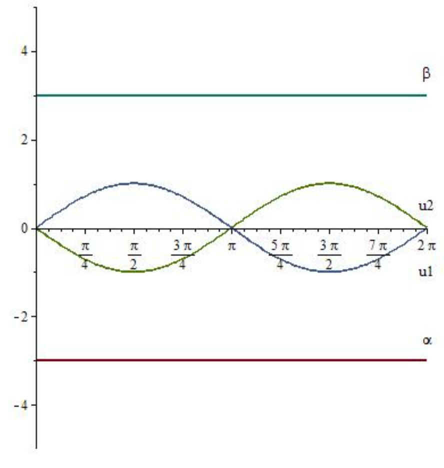
Consideremos as funcións $u_1(t) = \text{sen}(t)$ e $u_2(t) = -\text{sen}(t)$. Vemos que,

(a) A función u_1 verifica para todo $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} u_1''(t) &= -\text{sen}(t) \\ &= \text{mín}\{\text{sen}(t) + 2, \text{máx}\{-\text{sen}(t), \text{sen}(t) - 2\}\} \\ &= \text{mín}\{\text{sen}(t) + 2, -\text{sen}(t)\} = -\text{sen}(t), \\ u_1(0) &= \text{sen}(0) = 0 = \text{sen}(2\pi) = u_1(2\pi), \\ u_1'(0) &= \cos(0) = 1 = \cos(2\pi) = u_1'(2\pi). \end{aligned}$$

(b) A función u_2 verifica para todo $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} u_2''(t) &= \text{sen}(t) \\ &= \text{mín}\{-\text{sen}(t) + 2, \text{máx}\{-(-\text{sen}(t)), -\text{sen}(t) - 2\}\} \\ &= \text{mín}\{-\text{sen}(t) + 2, \text{sen}(t)\} = \text{sen}(t), \\ u_2(0) &= -\text{sen}(0) = 0 = -\text{sen}(2\pi) = u_2(2\pi), \\ u_2'(0) &= -\cos(0) = -1 = -\cos(2\pi) = u_2'(2\pi). \end{aligned}$$



É dicir, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ son solucións do problema considerado. Ademais, para todo $t \in [0, 2\pi]$ $\alpha(t) \leq u_1(t) \leq \beta$ e $\alpha(t) \leq u_2(t) \leq \beta$ pero non son solucións ordenadas.

Capítulo 2

Solucións de clase $W^{2,1}$

Neste capítulo verificaremos que a maioría dos resultados enunciados anteriormente seguirán sendo certos para sub e sobre solucións que verifiquen condicións máis débiles. Consideraremos o problema de valor inicial (1.1) con f unha función de Carathéodory L^1 e buscaremos sub e sobre sobre solucións cunha regularidade inferior a C^2, as sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$. Veremos que seguirá sendo posible probar a existencia de solucións entre elas, así como a existencia de solución minimal e maximal; e tamén, que conxunto de solucións é un continuo se f é, ademais, monónota crecente.

2.1. Definicións

Nun primeiro lugar imos definir o concepto de función de Carathéodory e introduciremos as ditas sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$.

Definición 2.1. Unha función $f : D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dise que satisfai a condición de Carathéodory ou que f é unha función de Carathéodory se,

1. para c.t.p $t \in [a, b]$, a función $f(t, \cdot)$ con dominio $\{z \in \mathbb{R}^n \mid (t, z) \in D\}$ é continua;
2. $\forall z \in \mathbb{R}^n$, a función $f(\cdot, z)$ con dominio $\{t \in [a, b] \mid (t, z) \in D\}$ é Lebesque medible.

Se, ademais, para algún $p \in [1, \infty]$ a función f satisfai,

3. $\forall r > 0$ existe $h_r \in L^p(a, b)$, $p \in [1, \infty]$ tal que $\forall (t, z) \in D$ con $|z| \leq r$, $|f(t, z)| \leq h_r(t)$ para c.t.p $t \in [a, b]$.

Neste caso, dise que f é unha función de Carathéodory L^p ou que f satisfai as condicións de Carathéodory L^p

Se f é unha función de Carathéodory L^1, como u é continua temos que $u'' = f(t,u) \in L^1([a,b])$ [6]. Ademais como u' é absolutamente continua se f é unha función de Carathéodory L^1 as solucións de (1.1) están en $W^{2,1}(a,b)$. Polo tanto, neste caso, cabe considerar a búsqueda de sub e sobre solucións que se atopen neste espazo, $W^{2,1}$. Para simplificar as notacións, estendemos $f(t,u)$ por periodicidade $f(t,u) = f(t+(b-a),u)$.

Definición 2.2. Unha función $\alpha \in C([a,b])$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ é unha subsolución de clase $W^{2,1}$ de (1.1) se a súa extensión periódica sobre $\mathbb{R}$, $\alpha(t) = \alpha(t+b-a)$, é tal que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ tense, ou ben,

$$D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$$

ou, existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ e

$$\alpha''(t) \geq f(t,\alpha(t)) \text{ en c.t.p } t \in I_0.$$

Analogamente, unha función $\beta \in C([a,b])$ tal que $\beta(a) = \beta(b)$ é unha sobresolución de clase $W^{2,1}$ de (1.1) se a súa extensión periódica sobre $\mathbb{R}$, $\beta(t) = \beta(t+b-a)$, é tal que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ tense, ou ben,

$$D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$$

ou, existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$

$$\beta''(t) \leq f(t,\beta(t)) \text{ en c.t.p } t \in I_0.$$

Na práctica, as diversas nocións de sub e sobre solucións a miúdo coincidirán.

Observación 2.3. Se f é continua e $\alpha \in C^1([a,b]) \cap C^2(]a,b[)$, entón, α é unha subsolución de clase $W^{2,1}$ se e só se é unha subsolución, é dicir, cumpre a Definición 1.1 de subsolución. Analogamente, se f é continua e $\beta \in C^1([a,b]) \cap C^2(]a,b[)$, entón, β é unha sobresolución de clase $W^{2,1}$ se e só se é unha sobresolución, é dicir, cumpre a Definición 1.1 de sobresolución.

Polo tanto, de non haber lugar a confusións, falaremos de sub e sobre solucións en lugar de subs e sobre solucións de clase $W^{2,1}$ de (1.1).

2.2. Existencia de solucións

A continuación enunciaremos resultados análogos aos obtidos para sub e sobre solucións de clase C^2 para sub e sobre solución de clase $W^{2,1}$. Veremos baixo que condicións estará garantida a existencia dunha solución $u \in W^{2,1}([a,b])$ do problema (1.1) e como podemos adaptar os resultados das Proposicións 1.11 e 1.12 para sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$.

Teorema 2.4. *Sexan α e β, respectivamente, sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$ do problema (1.1) tales que $\alpha \leq \beta$. Supoñamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función de Carathéodory L^1, sendo $E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$.*
Entón o problema (1.1) ten, polo menos, unha solución $u \in W^{2,1}([a,b])$ tal que para todo $t \in [a,b]$

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. Analogamente á proba do Teorema 1.2, consideramos o problema modificado (1.2), isto é,

$$u'' - u = f(t, \gamma(t,u)) - \gamma(t,u), \;\; \forall t \in [a,b], \;\; u(a) = u(b), u'(a) = u'(b),$$

sendo $\gamma : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t,u) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } u < \alpha(t), \\ u & \text{se } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ \beta(t) & \text{se } u > \beta(t). \end{cases}$$

Razoando igual que na demostración do Teorema 1.13 temos que a existencia de solución do problema (1.2) xa está probada na demostración do Teorema 1.2. Polo tanto, só falta demostrar que esta solución cumpre $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ para todo $t \in [a,b]$.
Supoñamos, por redución ao absurdo, que para certo $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\min_{t \in [a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Entón,

$$u'(t_0) - D_-\alpha(t_0) \leq u'(t_0) - D^+\alpha(t_0)$$

e, pola definición de subsolución de clase $W^{2,1}$, existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ e para case todo $t \in I_0$

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

Ademais, $u'(t_0) - \alpha'(t_0) = 0$ e para $t \geq t_0$ suficientemente próximo a t_0,

$$\begin{aligned} u'(t) - \alpha'(t) &= \int_{t_0}^{t} (u''(s) - \alpha''(s))ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} [f(s,\alpha(s)) + u(s) - \alpha(s) - f(s,\alpha(s))]ds \\ &< 0 \end{aligned}$$

Nótese que, como estamos supoñendo $u(t) \leq \alpha(t)$ temos $\gamma(t, u(t)) = \alpha(t)$.
Polo tanto, $u(t_0) - \alpha(t_0)$ non é un mínimo de $u - \alpha$, chegamos así a unha contradición.
De xeito similar próbase que $u(t) \leq \beta(t)$.
Supoñamos, por redución ao absurdo, que para certo $t_1 \in \mathbb{R}$

$$\min_{t \in [a,b]} \{\beta(t) - u(t)\} = \beta(t_1) - u(t_1) < 0.$$

Entón,

$$D^- \beta(t_1) - u'(t) \geq D_+ \beta(t) - u'(t_1)$$

e, pola definición de subsolución de clase $W^{2,1}$, existe un intervalo aberto I_1 con $t_1 \in I_1$, $\beta \in W^{2,1}(I_1)$ e para case todo $t \in I_1$ tense

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t)).$$

Ademais, $\beta'(t_1) - u'(t_1) = 0$ e, para $t \geq t_1$ suficientemente próximo a t_1,

$$\begin{aligned} \beta'(t) - u'(t) &= \int_{t_0}^{t} (\beta''(s) - u''(s)) ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} [f(s, \beta(s)) - f(s, \beta(s)) + u(s) - \beta(s)] ds \\ &< 0 \end{aligned}$$

Nótese que, como estamos supoñendo $u(t) \geq \beta(t)$ temos $\gamma(t, u(t)) = \beta(t)$.
Polo tanto, $u(t_1) - \beta(t_1)$ non é un mínimo de $u - \beta$, igual que antes chegamos a unha contradición.
Concluímos así que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ para todo $t \in [a, b]$. □

No caso das sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$, a diferencia do caso continuo, nin o máximo das sub solucións nin o mínimo das sobre solucións serán, en xeral, sub e sobre solucións. Ora ben, é sinxelo probar a existencia de solución entre ditas funcións.

Teorema 2.5. *Consideremos α_i con $i = 1, ..., n$ subsolucións de clase $W^{2,1}$ e β_j con $j = 1, .., m$ sobresolucións de clase $W^{2,1}$ do problema (1.1). Sexan $\alpha := \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}$ e $\beta := \min_{1 \leq j \leq m} \{\beta_j\}$ tales que $\alpha \leq \beta$. Supoñamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función de Carathéodory L^1, sendo $E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$.*
Entón o problema (1.1) ten, polo menos, unha solución $u \in W^{2,1}([a, b])$ tal que para todo $t \in [a, b]$,

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. Consideramos o problema modificado

$$\begin{aligned} u'' - u &= \overline{f}(t,u) - \gamma(t,u), \\ u(a) &= u(b),\ u'(a) = u'(b), \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo $\gamma : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t,u) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } u < \alpha(t), \\ u & \text{se } \alpha(t) \le u \le \beta(t), \\ \beta(t) & \text{se } u > \beta(t) \end{cases}$$

e $\overline{f} : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\overline{f}(t,u) = \begin{cases} \min\limits_{1\le i\le n} f(t, \max\{\alpha_i(t), u\}) & \text{se } u \le \alpha(t), \\ f(t,u) & \text{se } \alpha(t) < u < \beta(t), \\ \max\limits_{1\le j\le m} f(t, \min\{\beta_j(t), u\} & \text{se } u \ge \beta(t). \end{cases}$$

Procedemos do mesmo xeito que na demostracion do Teorema 1.2, primeiro probamos que o problema (2.1) ten solución e despois vemos que para todo $t \in [a,b]$ $\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)$. Estendemos periodicamente as funcións α e u e supoñemos, por redución ao absurdo,

$$\min_{t\in[a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\} < 0.$$

Polo tanto, para certos t_0 e $i \in \{1, ..., n\}$ temos que

$$\min_{t\in[a,b]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha_i(t_0) = \min_{t\in[a,b]} \{u(t) - \alpha_i(t)\} < 0.$$

Chegando así a unha contradición de xeito similar a da demostración do Teorema 2.4. De xeito análogo chegamos a que $u \le \beta$. □

2.3. Estrutura do conxunto de solucións

De xeito similar ao caso continuo podemos probar existencia de solución minimal e maximal. E tamén que o conxunto de solucións é un continuo, é dicir, hay solucións pasando por todo os puntos de $E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \le u \le \beta(t)\}$ se a función f é monótona crecente con respecto a u.

Teorema 2.6. *Sexan α e β, respectivamente, sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$ do problema (1.1) tales que $\alpha \le \beta$ e supoñamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfai as condicións de*

Carathéodory L^1, sendo $E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} | \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$.
Entón o problema (1.1) posúe unha solución minimal $u_{\text{mín}} \in W^{2,1}([a,b])$ e unha solución maximal $u_{\text{máx}} \in W^{2,1}(`[a,b])$ en $[\alpha,\beta]$, é dicir,

$$\alpha \leq u_{\text{mín}} \leq u_{\text{máx}} \leq \beta$$

e calquera outra solución u de (1.1) tal que $\alpha \leq u \leq \beta$ cumpre,

$$u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}.$$

Demostración. Igual que na demostración do Teorema 1.15 obervamos que as solucións do problema (1.1) son os puntos fixos do operador

$$T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

definido como,

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s,u(s)) - u(s)]ds.$$

onde $G(t,s)$ é a función de Green de (1.3) dada pola expresión (1.4).
Definimos o conxunto

$$S = \{u \in C([a,b]) | \; u = Tu, \; \alpha \leq u \leq \beta\}.$$

Razoando igual que na demostración do Teorema 1.15 tense que $S \neq \emptyset$ e que é un conxunto compacto.
Consideremos agora a familia de conxuntos,

$$\mathcal{F} = \{F_x\}_{x \in S} \;\; ; \;\; F_x = \{u \in S \;\mid\; u \geq x\} \; \forall x \in S,$$

Para cada subconxunto $\emptyset \neq S' \subset S$ finito, existe $x' \in S'$, tal que, $x' = \max_{u \in S'} \{S'\}$. Neste caso, a diferencia da demostración do Teorema 1.15 non podemos afirmar que x' sexa unha subsolución. Así e todo o Teorema 2.5 garántenos a existencia dunha solución $u' \in W^{2,1}([a,b])$ tal que $u' \geq x'$. Polo tanto, para todo subconxunto $\emptyset \neq S' \subset S$ finito, $\bigcap_{x \in S'} F_x = F_{x'}$ sendo $x' = \max_{x \in S'} S'$, é dicir, para cada subfamilia finita e non baleira de $\mathcal{F}$ a intersección dos seus elementos é non baleira, *i.e*, $\mathcal{F}$ ten a propiedade da interseción finita. Entón, existe

$$u_{\text{máx}} \in \bigcap_{x \in S} F_x,$$

que é a solución maximal en $[\alpha,\beta]$, por definición.
De forma similar, probamos a existencia dunha solución minimal. Neste caso consideramos a familia de conxuntos,

$$\mathcal{H} = \{H_x\}_{x \in S} \;\; ; \;\; H_x = \{u \in S \;\mid\; u \leq x\} \; \forall x \in H$$

E, razoando de forma análoga, concluímos que $\mathcal{H}$ ten a propiedade da intersección finita. Entón, existe,

$$u_{\text{mín}} \in \bigcap_{x \in S} H_x$$

que é a solución minimal en $[\alpha, \beta]$, por definición. □

Teorema 2.7. *Sexan α e β, respectivamente, sub e sobre solucións de clase $W^{2,1}$ do problema (1.1) tales que $\alpha \leq \beta$ e supoñamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfai as condicións de Carathéodory L^1 e ademais é monótona crecente, sendo $E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} | \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$.*
Entón, para todo $t_0 \in [a,b]$ e $u^* \in [u_{\text{mín}}(t_0), u_{\text{máx}}(t_0)]$ existe unha solución $u \in W^{2,1}(a,b)$ de (1.1) tal que $u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}$ e $u(t_0) = u^*$.

Demostración. Sexan $t_0 \in [a,b]$ e $u^* \in \mathbb{R}$ tal que $u_{\text{mín}}(t_0) \leq u^* \leq u_{max}(t_0)$.
Sexa $\epsilon > 0$ tal que $u_{\text{máx}} - \epsilon \leq u_{\text{mín}} + \epsilon$ e consideremos as funcións,

$$\alpha_1(t) = \text{máx}\{u_{\text{mín}}(t), u_{\text{máx}}(t) - \epsilon\}, \quad \beta_1 = \text{mín}\{u_{\text{máx}}(t), u_{\text{mín}}(t) + \epsilon\}.$$

As funcións $u_{\text{mín}}(t)$ e $u_{\text{máx}}(t) - \epsilon$ son subsolucións de clase $W^{2,1}$.

1. A función $u_{\text{mín}}(t)$ é a solución minimal, polo tanto é solución de (1.1). En particular, existe un intervalo aberto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $u_{\text{mín}} \in W^{2,1}(I_0)$ e para c.t.p $t \in I_0$,

$$u''_{\text{mín}} \geq f(t, u(t)).$$

2. A función $u_{\text{máx}}(t)$ é a solución maximal, polo tanto é solución de (1.1). En particular, a función $u_{\text{máx}} - \epsilon$ é tal que, existe un intervalo aberto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $u_{\text{máx}} - \epsilon \in W^{2,1}(I_0)$ e para c.t.p $t \in I_0$,

$$u''_{\text{máx}}(t) \geq f(t, u(t)).$$

De xeito similar, temos que, as funcións $u_{\text{máx}}(t)$ e $u_{\text{mín}}(t) - \epsilon$ son sobresolucións de clase $W^{2,1}$.

1. A función $u_{\text{máx}}(t)$ é a solución maximal, polo tanto é solución de (1.1). En particular, existe un intervalo aberto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $u_{\text{mín}} \in W^{2,1}(I_0)$ e para c.t.p $t \in I_0$,

$$u''_{\text{máx}} \leq f(t, u(t)).$$

2. A función $u_{\text{mín}}(t) - \epsilon$ é a solución minimal, polo tanto é solución de (1.1). En particular, a función $u_{\text{mín}}(t) - \epsilon$ é tal que, existe un intervalo aberto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $u_{\text{mín}} - \epsilon \in W^{2,1}(I_0)$ e para c.t.p $t \in I_0$,

$$u''_{\text{mín}} - \epsilon \leq f(t, u(t)).$$

A continuación, considerando as subsolución de clase $W^{2,1}$, $u_{\text{mín}}(t)$ e $u_{\text{máx}}(t)-\epsilon$, e as sobre solucións de clase C^2, $u_{\text{mín}}(t)+\epsilon$ e $u_{\text{máx}}(t)$. E, tendo en conta que, $u_{\text{mín}}(t) \leq u_{\text{mín}}(t)+\epsilon$ e que, $u_{\text{máx}}(t)-\epsilon \leq u_{\text{máx}}(t)$ podemos aplicar o Teorema 2.5 que nos garante a existencia dunha solución u_1 do problema (1.1) tal que $\forall t \in [a,b]$,

$$\alpha_1(t) \leq u(t) \leq \beta_1(t).$$

É dicir,

$$u_{\text{mín}}(t) \leq u_1(t) \leq u_{\text{mín}}(t)+\epsilon, \quad u_{\text{máx}}(t)-\epsilon \leq u_1(t) \leq u_{\text{máx}}(t).$$

E, dado que $u_{\text{mín}}(t_0) \leq u^* \leq u_{max}(t_0)$ tense que,

$$u^* \in [u_{\text{mín}}(t_0), u_1(t_0)] \quad ou \quad u^* \in]u_1(t_0), u_{\text{máx}}(t_0)]$$

Se $u^* \in [u_{\text{mín}}(t_0), u_1(t_0)]$ entón, considerando as funcións,

$$\alpha_2(t) = \text{máx}\{u_{\text{mín}}(t), u_1(t)-\epsilon/2\}, \quad \beta_2(t) = \text{mín}\{u_1(t), u_{\text{mín}}(t)+\epsilon/2\}$$

o Teorema 2.5 nos asegura a existencia dunha solución u_2 tal que $\forall t \in [a,b]$

$$u_{\text{mín}}(t) \leq u_2(t) \leq u_{\text{mín}}(t)+\epsilon/2, \quad u_1(t)-\epsilon/2 \leq u_2(t) \leq u_1(t).$$

Analogamente, se $u^* \in]u_1(t_0), u_{\text{máx}}(t_0)]$, consideramos as funcións,

$$\alpha_3(t) = \text{máx}\{u_1(t), u_{\text{máx}}(t)-\epsilon/2\}, \quad \beta_3(t) = \text{mín}\{u_{\text{máx}}(t), u_1(t)+\epsilon/2\}$$

e, igual que no caso anterior, o Teorema 2.5 nos garantíza a existencia dunha solución u_2 tal que $\forall t \in [a,b]$

$$u_1(t) \leq u_2(t) \leq u_1(t)+\epsilon/2, \quad u_{\text{máx}}(t)-\epsilon/2 \leq u_2(t) \leq u_{\text{máx}}(t).$$

En calquera dos dous casos temos, $|u_2(t_0)-u^*| \leq \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$.
Podemos definir así unha sucesión de solucións $(u_k)_k$ tal que $|u_k(t_0)-u^*| \leq \epsilon/2^{k-1}$. Aplicando o teorema de Arzelà-Ascoli temos que existe unha subsucesión $(u_{k_n})_n$ que converxe a u en $C([a,b])$. Do cal se segue que u é un punto fixo do operador T definido en (1.5) e, polo tanto, solución de (1.1). Ademais, $u(t_0) = \lim_{n\to\infty} u_{k_n}(t_0) = u^*$. □

Exemplo 2.8. Consideremos o problema

$$u'' - \frac{1}{\sqrt{t}}u^2 = q(t),$$
$$u(0) = u(2\pi), \; u'(0) = u'(2\pi),$$

onde $q \in L^1(0, 2\pi)$.
Para construír unha sub solución consideramos $q(t) = \overline{q} + \widetilde{q}$ con $\overline{q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(s)ds$. Buscamos unha subsolución da forma $\alpha(t) = A + w(t)$ tal que $\overline{w} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(s)ds = 0$.
Para que α sexa subsolución é preciso que

$$\alpha''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2(t) = w''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2 \leq \overline{q} + \widetilde{q}.$$

Tomamos polo tanto w solución de

$$w''(t) = \widetilde{q}(t), \;\; w(0) = w(2\pi), \;\; w'(0) = w'(2\pi), \overline{w} = 0.$$

Temos así que, $\|\alpha'\|_\infty = \|w'\|_\infty \leq \|\widetilde{q}\|_{L^1}$ e se ecollemos $A = -w(0)$ podemos escribir para todo $t \in [0, 2\pi]$, $|\alpha(t)| \leq \|\widetilde{q}\|_{L^1} t$.
Entón, por un lado temos que,

$$-\frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2 \geq -\|\widetilde{q}\|^2_{L^1} \int_0^{2\pi} \frac{t}{\sqrt{t}} = -\|\widetilde{q}\|^2_{L^1}(2\pi)^{3/2},$$

e, por outro lado,

$$\alpha''(t) = \widetilde{q}(t).$$

Logo,

$$\alpha'' - \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2 - \overline{q} - \widetilde{q} \geq -\|\widetilde{q}\|^2_{L^1}(2\pi)^{3/2} - \overline{q}$$

e $\alpha(t) = w(t) - w(0)$ é unha subsolución se

$$\overline{q} + (2\pi)^{3/2}\|\overline{q}\|^2_{L^1} \leq 0.$$

Para B unha constante positiva suficientemente grande a función $\beta(t) = \alpha(t) + B \geq \alpha(t)$ é unha sobresolución.
Aplicando o Teorema 2.4 podemos asegurar que existe polo menos unha solución $u \in W^{2,1}([0, 2\pi])$ tal que para todo $t \in [0, 2\pi]$, $\alpha(t) \leq \beta(t)$.

Capítulo 3

Parte non lineal con dependecia da primeira derivada

Consideramos o seguinte problema,

$$\begin{aligned} u'' &= f(t,u,u'), \\ u(a) &= u(b), u'(a) = u'(b). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Agora a función f depende de u e u' co cal, o operador de Nemytskii, $Nu(\cdot) = f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$, e o conseguinte problema de punto fixo están definidos en $C^1([a,b])$. As sub e sobre solucións proporcionarán cotas *a priori* da función u. Para poder aplicar o teorema de Schauder ou a teoría do grado necesitaremos tamén cotas *a priori* sobre a derivada u'. Nalgúns casos a propia función f proporcionaranos dita información, noutros haberá que impoñer certas condicións sobre o crecemento da parte non lineal da ecuación con respecto á primeira derivada. A condición máis habitual é a condición de Nagumo.
A continuación imos ver o exemplo estudado en [18] para ilustrar a necesidade dalgunha condición adicional na parte non lineal da ecuación dado que a existencia de sub e sobre solucións ordenadas non é suficiente para asegurar a existencia de solución do problema periódico.

Exemplo 3.1. Consideramos o problema,

$$u''(t) = (\sqrt{1+u'(t)^2})^3(u(t)-p(t)), \;\; u(0)=u(T), \; u'(0)=u'(T), \tag{3.2}$$

onde p é unha función continua tal que

$$p(t) = \begin{cases} -2 & \text{se } t \in [0,r], \\ 2 & \text{se } t \in [T-r,T] \end{cases}$$

e $0 < r < \frac{T}{2}$.
Nótese que a función $\alpha = -3$ é unha subsolución e a función $\beta = 3$ é unha sobre solución de (3.2). Con todo, veremos a continuación que o problema non ten sempre solución. Máis concisamente, probaremos que se $r > \sqrt{2}$ o problema (3.2) non ten solución. Consideremos, en primeiro lugar, a ecuación,

$$u''(t) = (\sqrt{1 + u'(t)^2})^3(u(t) + 2). \tag{3.3}$$

Nótese que, substituíndo $x = u$ e $y = u'$ tense,

$$x' = y,\ y' = (\sqrt{1 + y^2})^3(x + 2).$$

Logo,

$$(\sqrt{1 + y^2})^3(x + 2)x' = yy'.$$

O cal implica que

$$(x + 2)x' = \frac{y}{(\sqrt{1 + y^2})^3}y'.$$

Integrando en ambos lados da igualdade obtemos,

$$\frac{(x + 2)^2}{2} = \frac{-1}{\sqrt{y^2 + 1}} + C.$$

Co cal a ecuación de enerxía

$$\varepsilon_1(u, u') = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} + \frac{(u + 2)^2}{2}$$

permanece constante ó longo dunha órbita con condición inicial prefixada en $u(t_0)$ e $u'(t_0)$. Obsérvese que por un lado temos

$$E - (u + 2)^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}}$$

e, por outro,

$$\sqrt{1 - (E - (u + 2)^2/2)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + u'^2}} = \sqrt{\frac{1 + u'^2 - 1}{1 + u'^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}.$$

Polo tanto,

$$\frac{E - (u + 2)^2/2}{\sqrt{1 - (E - (u + 2)^2/2)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}}{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}} = \frac{1}{u'}.$$

Sexa $u(t)$ unha solución de (3.3) tal que $\varepsilon_1(u(t), u'(t)) = E \geq 2$.
Se $u(t) > -2$ consideramos t_0 tal que u alcanza o seu mínimo en $t = t_0$. Para $t > t_0$ temos que,

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{t_0}^{t} 1 ds = \int_{t_0}^{t} \frac{E - (u+2)^2/2}{\sqrt{1 - (E - (u+2)^2/2)^2}} u'(s) ds \\ &= \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{E - (u+2)^2/2}{\sqrt{1 - (E - (u+2)^2/2)^2}} du \end{aligned}$$

Nótese que,

$$2 \leq E = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} + \frac{(u+2)^2}{2}.$$

De onde,

$$2 - \frac{(u+2)^2}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} \leq 1$$

o cal implica que

$$\frac{1}{u+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nótese que $w = E - (u+2)^2/2 = \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} \in]0, 1]$ co cal substituíndo por w na integral de arriba e tendo en conta que $w(t_0) > w(t)$ tense que

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{-w}{\sqrt{1 - w^2}} \frac{dw}{u+2} \\ &\leq \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - w} \right]_1^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vemos así que non existirá ningunha solución $u(t)$ de (3.3) con $\varepsilon_1(u(t), u'(t)) = E \geq 2$ nun intervalo $[a, b]$ de lonxitude $b - a > \sqrt{2}$.
Co mesmo argumento para $t > t_0$ temos que a distancia será tamén menor que $\sqrt{2}$.
Se $u(t) < -2$ razoando de xeito similar obtemos o mesmo resultado.
Consideramos agora a ecuación

$$u''(t) = (\sqrt{1 + u'(t)^2})^3 (u(t) - 2). \tag{3.4}$$

Facendo os cálculos análogos ao caso anterior tense que a ecuación da enerxía

$$\varepsilon_2(u(t), u'(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} + \frac{(u-2)^2}{2}$$

permanece constante para todas as solucións de (3.4).
Razoando de xeito similar ao caso anterior chégase a que non existe ningunha solución $u(t)$

de (3.4) tal que

$$\varepsilon_2(u(t_0), u'(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} + \frac{(u-2)^2}{2} \geq 2$$

nun intervalo $[a, b]$ de lonxitude $b - a > \sqrt{2}$.

Polo tanto, para $u(t)$ solución de (3.2) e $r > \sqrt{2}$. Se $u(0) \leq 0$, temos que

$$\varepsilon_1(u(0), u'(0)) \geq 2.$$

Pero acabamos de probar que dita solución non existe no intervalo $[0, r]$.
Por outro lado, se $u(0) < 0$ deducimos a partir das condicións na fronteira que $u(T) < 0$.
Entón

$$\varepsilon(u(T), u'(T)) \geq 2.$$

Pero acabamos de probar que dita solución non existe no intervalo $[T - r, T]$.
Concluímos así que (3.2) non ten solución.

Queda así probada a necesidade de condicións máis fortes que a simple existencia de sub e sobre solucións para ter existencia de solución do problema (3.1). A continuación veremos dous tipos de ecuacións, a ecuación de Rayleigh e e ecuación de Liénard para as cales existen cotas *a priori* sobre a derivada.

3.1. A Ecuación de Rayleigh

Consideramos a ecuación de Rayleigh,

$$\begin{aligned} u'' + g(u') + h(t, u, u') &= 0, \\ u(a) = u(b),\ u'(a) &= u'(b), \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $g \in C(\mathbb{R})$ e h é unha función de Carathéodory.

Proposición 3.2. *Sexa $g \in C(\mathbb{R})$ e h unha función de Carathéodory. Supoñamos que para todo $s > 0$ e para certo $h_s \in L^2(a, b)$, h satisfai, para c.t.p $t \in [a, b]$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ se $|u| \leq s$ entón, $|h(t, u, v)| \leq h_s(t)$.*
Entón, para todo $r > 0$ existe $R > 0$ tal que para toda solución u de (3.5) cumprindo $\|u\|_\infty \leq r$ tense que $\|u'\|_\infty < R$.

Demostración. Sexan $r > 0$ e u unha solución de (3.5) tal que $\|u\|_\infty \leq r$. Multiplicando

(3.5) por u'' e integrando usando que $u'(a) = u'(b)$ temos que,

$$\begin{aligned}
\|u''\|_{L^2}^2 &= -\int_a^b g(u'(t))u''(t)dt - \int_a^b h(t, u(t), u'(t))u''(t)dt \\
&= -\int_{u'(a)}^{u'(b)} g(s)ds - \int_a^b h(t, u(t), u'(t))u''(t)dt \\
&\leq \int_a^b |h(t, u(t), u'(t))||u''(t)|dt \\
&\leq \|h_r\|_{L^2}\|u''\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $u(a) = u(b)$ tense que existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $u'(t_0) = 0$ polo tanto para todo $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
|u'(t)| = |u(t) - u(t_0)| = |\int_{t_0}^t u''(s)ds| &\leq \int_a^b |u''(s)|ds \\
&\leq \sqrt{b-a}\|u''\|_{L^2} \leq \sqrt{b-a}\|h_r\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, para $R = \sqrt{b-a}\|h_r\|_{L^2} + 1 > 0$ cúmprese o enunciado. $\square$

Pódese obter unha cota sobre u' independente de r se impoñemos condicións máis fortes sobre h.

Proposición 3.3. *Sexa $g \in C(\mathbb{R})$ e h unha función de Carathéodory. Supoñamos que existe $h_0 \in L^2(a, b)$ tal que, para c.t.p $t \in [a, b]$ e para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|h(t, u, v)| \leq h_0(t)$. Entón existe $R > 0$ tal que para toda solución u de (3.5) satisfai $\|u'\|_\infty < R$.*

De xeito similar á demostración anterior consideramos u unha solución do problema (3.5). Multiplicando (3.5) por u'' e integrando tendo en conta que $u'(a) = u'(b)$ temos que,

$$\begin{aligned}
\|u''\|_{L^2}^2 &= -\int_a^b g(u'(t))u''(t)dt - \int_a^b h(t, u(t), u'(t))u''(t)dt \\
&= -\int_{u'(a)}^{u'(b)} g(s)ds - \int_a^b h(t, u(t), u'(t))u''(t)dt \\
&\leq \int_a^b |h(t, u(t), u'(t))||u''(t)|dt \\
&\leq \|h_0\|_{L^2}\|u''\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $u(a) = u(b)$ tense que existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $u'(t_0) = 0$ polo tanto para todo $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
|u'(t)| = |u(t) - u(t_0)| = |\int_{t_0}^t u''(s)ds| &\leq \int_a^b |u''(s)|ds \\
&\leq \sqrt{b-a}\|u''\|_{L^2} \leq \sqrt{b-a}\|h_0\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, para $R = \sqrt{b-a}\|h_0\|_{L^2} + 1 > 0$ cúmprese o enunciado.

3.2. A Ecuación de Liénard

De xeito similar á ecuación de Rayleigh imos ver que tamén existen cotas *a priori* sobre a derivada para a ecuación de Liénard,

$$\begin{aligned} &u'' + g(u)u' + h(t,u) = 0, \\ &u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b), \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $g \in C(\mathbb{R})$ e h é unha función de Carathéodory L^1.

Proposición 3.4. *Sexa $g \in C(\mathbb{R})$ e h unha función de Carathéodory L^1. Entón, para todo $r > 0$ existe $R > 0$ tal que para toda solución u de (3.6) con $\|u\|_\infty \le r$ entón $\|u'\|_\infty < R$.*

Demostración. Sexa $r > 0$. Como h é unha función de Carathéodory L^1 existe $h_r \in L^1(a,b)$ tal que para c.t.p $t \in [a,b]$ e para todo $u \in [-r,r]$, $|h(t,u)| \le h_r(t)$.
Sexa u unha solución de (3.6) tal que $\|u\|_\infty \le r$. Entón multiplicando a ecuación (3.6) por u e integrando a continuación usando que $u(a) = u(b)$ tense que,

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2}^2 &= \int_a^b g(u(t))u(t)u'(t)dt + \int_a^b h(t,u(t))u(t)dt \\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} g(s)sds + \int_a^b h(t,u(t))u(t)dt \\ &\le \int_a^b |h(t,u(t))||u(t)|dt \\ &\le r\|h_r\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz tense que

$$\|u''\|_{L^1} = \int_a^b |u(t)|dt \le \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |u''(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a}\|u''\|_{L^2}.$$

Polo tanto,

$$\|u''\|_{L^1} \le r\sqrt{b-a}\|h_r\|_{L^1}.$$

Razoando igual que nas dúas demostracións anteriores. Como $u(a) = u(b)$ tense que existe $t_0 \in [a,b]$ tal que $u'(t_0) = 0$ polo tanto para todo $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |u'(t)| = |u(t) - u(t_0)| = |\int_{t_0}^t u''(s)ds| &\le \int_a^b |u''(s)|ds \\ &\le r\sqrt{b-a}\|h_r\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Polo tanto, para $R = r\sqrt{b-a}\|h_r\|_{L^1} + 1 > 0$ cúmprese o enunciado. $\square$

3.3. A condición de Nagumo. Caso continuo

No caso de que a ecuación non teña unha estrutura particular como as que acabamos de ver segue sendo posible definir límites *a priori* se o crecemento da parte non lineal da ecuación é suficientemente lento.
O primeiro en dar un resultado deste tipo foi S. Bernstein [7], [8] impoñendo a seguinte condición sobre o crecemento da parte non lineal da ecuación

$$|f(t,u,u')| \leq A + Bv^2,$$

coñecida como a *condición de Berstein.* Probou que para calquera $r > 0$ existe $R > 0$ tal que para toda solución u de

$$u'' = f(t,u,u')$$

en $[a,b]$ con $\|u'\|_\infty < r$ tense que $\|u'\|_\infty \leq R$.
En 1937 M. Nagumo xeneralizou en [20] este resultado no que se coñece como a condición de Nagumo, que é a condición máis habitual para obter límites *a priori* sobre a derivada.
Consideramos $\alpha, \beta \in C([a,b])$ tales que $\alpha \leq \beta$, definimos o conxunto

$$E = \{(t,u,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 | \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$$

e supoñemos que a función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\forall (t,u,v) \in E \;\; |f(t,u,v)| \leq \varphi(|v|), \tag{3.7}$$

sendo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función positiva tal que

$$\int_0^\infty \frac{sds}{\varphi(s)} = \infty. \tag{3.8}$$

A condición (3.7) chámase *condición de Nagumo.*
Nótese que se unha función f satisfai a condición de Berstein,

$$\forall (t,u,v) \in E, \;\; |f(t,u,v)| \leq A + Bv^2,$$

entón satisfai a condición de Nagumo para $\varphi(v) = A + Bv^2$.
A condición de Bernstein é equivalente a

$$\forall (t,u,v) \in E, \;\; |f(t,u,v)| \leq \varphi(|v|).$$

sendo $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ función positiva continua tal que

$$\lim_{s\to+\infty} \inf \frac{s^2}{\varphi(s)} > 0.$$

Pero, a condición de Berstein non é equivalente a condición de Nagumo. Por exemplo, a función $f(t,u,v) = (v^2+1)\ln(v^2+1)$ con $\varphi(v) = f(t,u,v)$ é tal que,

$$\begin{aligned}
|f(t,u,v)| &= |(v^2+1)\ln(v^2+1)| \\
&= |v^2+1||\ln(v^2+1)| \\
&\leq (|v^2|+|1|)(\ln(|v^2|+|1|)) \\
&= (|v|^2+1)(\ln(|v|^2+1)) \\
&= \varphi(|v|)
\end{aligned}$$

e, ademais,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{sds}{\varphi(s)} &= \int_o^\infty \frac{sds}{(s^2+1)\ln(s^2+1)} \\
&= \frac{1}{2}\int_o^\infty \frac{2sds}{(s^2+1)\ln(s^2+1)} \\
&= [\ln|\ln(t^2+1)|]_0^\infty \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

É dicir, cumpre a condición de Nagumo.
Non cumpre, en cambio, a condición de Bernstein xa que,

$$\lim_{s\to+\infty} \inf \frac{s^2}{\varphi(s)} = \lim_{s\to+\infty} \inf \frac{s^2}{(s^2+1)\ln(s^2+1)} = 0.$$

A seguinte proposición proporciona, a partir da condición de Nagumo, cotas *a priori* sobre a derivada.

Proposición 3.5. *Sexan $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta} \in C([a,b])$ tales que $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$. Consideremos o conxunto $E = \{(t,u,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2 \mid \overline{\alpha}(t) \leq u \leq \overline{\beta}(t)\} \subset [a,b]\times\mathbb{R}^2$ e sexa función $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función positiva e continua tal que,*

$$\int_r^\infty \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} > \max_{t\in[a,b]} \overline{\beta}(t) - \min_{t\in[a,b]} \overline{\alpha}(t),$$

onde $r = \max\{\frac{\overline{\beta}(b)-\overline{\alpha}(a)}{b-a}, \frac{\overline{\beta}(a)-\overline{\alpha}(b)}{b-a}\} \geq 0$.
Entón existe $R > 0$ tal que para toda función continua $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\forall (t,u,v) \in E,\ \ |f(t,u,v)| \leq \overline{\varphi}(|v|)$$

e para toda solución u de $u'' = f(t,u,u')$ en $[a,b]$ tal que $\overline{\alpha} \leq u \leq \overline{\beta}$ tense

$$\|u'\|_\infty < R.$$

Demostración. Sexa R tal que

$$\int_r^R \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} > \max_{t\in[a,b]} \overline{\beta}(t) - \min_{t\in[a,b]} \overline{\alpha}(t)$$

Sexa u unha solución de $u'' = f(t,u,u')$ tal que $\overline{\alpha} \le u \le \overline{\beta}$. Obsérvese que

$$-r \le \frac{\overline{\alpha}(b) - \overline{\beta}(a)}{b-a} \le \frac{u(b)-u(a)}{b-a} \le \frac{\overline{\beta}(b) - \overline{\alpha}(a)}{b-a} \le r.$$

Aplicando o teorema de Lagrange temos que existe $\tau \in [a,b]$ tal que

$$|u'(\tau)| = |\frac{u(b)-u(a)}{b-a}| \le r.$$

Consideremos agora o intervalo $I = [t_0, t_1]$ tal que $u'(t) \ge 0$ para todo $t \in I$, $u'(t_0) = r$ e $u'(t_1) > r$. Entón,

$$\int_{u'(t_0)}^{u'(t_1)} \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u'(t)u''(t)}{\overline{\varphi}(u'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u'(t)f(t,u(t),u'(t))}{\overline{\varphi}(u'(t))} dt$$
$$\le |\int_{t_0}^{t_1} u'(t)dt| = |u(t_1) - u(t_0)| \le \max_{t\in[a,b]} \overline{\beta}(t) - \min_{t\in[a,b]} \overline{\alpha}(t).$$

De onde deducimos que $u'(t_1) < R$.
De xeito similar próbase que para todo $t \in [a,b]$, $u'(t) > -R$ de onde se segue que $\|u(t)\|_\infty < R$. □

Este resultado pode xeneralizarse para o caso de solucións que cumpren a condición de Nagumo lateral. É dicir, as solucións das que se coñecen certas cotas *a priori* sobre a derivada nos extremos do intervalo de definición. Como é o caso, por exemplo, do problema de Neumann,

$$u'' = f(t,u,u'), \;\; u'(\overline{a}) = A, u'(\overline{b}) = B. \tag{3.9}$$

Nótese que, se u é solución do problema periódico (3.1) entón existe $\overline{a} \in [a,b]$ tal que $u'(\overline{a}) = 0$ e a extensión periódica de $u(t)$ é solución de (3.9) con $\overline{a}$, $\overline{b} = \overline{a} + b - b$ e $A = B = 0$.
Por último, imos ver un resultado referido a solucións das que se coñecen cotas *a priori* sobre a derivada nos dous extremos do intervalo de definición, a condición de Nagumo lateral.

Proposición 3.6. *Sexan $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in C([\overline{a}, \overline{\beta}])$ tales que $\overline{\alpha} \le \overline{\beta}$. Consideremos o conxunto $E = \{(t,u,v) \in [\overline{a}, \overline{b}] \times \mathbb{R}^2 \mid \overline{\alpha}(t) \le u \le \overline{\beta}(t)\} \subset [\overline{a}, \overline{b}] \times \mathbb{R}^2$. E, sexan $r \ge 0, R > r$ e $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función positiva tal que,*

$$\int_r^R \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} > \max_{t\in[\overline{a},\overline{\beta}]} \{\overline{\beta}(t)\} - \min_{t\in[\overline{a},\overline{\beta}]} \{\overline{\alpha}(t)\}.$$

Entón, para toda función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(t,u,v) \in E$,

$$f(t,u,v) \leq \overline{\varphi}(|v|) \tag{3.10}$$

e para toda solución u de $u'' = f(t,u,u')$ en $[\overline{a},\overline{b}]$ con $\overline{\alpha} \leq u \leq \overline{\beta}$, $u'(\overline{a}) \leq r$ e $u'(\overline{b}) \geq -r$ tense que,

$$\|u'\|_\infty < R.$$

De forma similar tense que, para toda función continua $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(t,u,v) \in E$

$$f(t,u,v) \geq -\overline{\varphi}(|v|) \tag{3.11}$$

e para toda solución u de $u'' = f(t,u,u')$ en $[\overline{a},\overline{b}]$ con $\overline{\alpha} \leq u \leq \overline{\beta}$, $u'(\overline{a}) \geq -r$ e $u'(\overline{b}) \leq r$ tense que,

$$\|u'\|_\infty < R.$$

Demostración. Sexa u unha solución cumprindo as hipóteses da proposición e supoñamos por redución ao absurdo que $\min\limits_{t\in[\overline{a},\overline{b}]} \{u'(t)\} \leq -R$. Entón existe un intervalo $I = [t_0, t_1]$ tal que $u'(t) \leq 0$ para todo $t \in I$, $u'(t_0) \leq -R$ e $u'(t_1) = -r$.
Logo,

$$\begin{aligned}
\int_r^R \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} &\leq \int_{-u'(t_1)}^{-u'(t_0)} \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{(-u'(t))(-u''(t))}{\overline{\varphi}(-u'(t))} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{(-u'(t))(f(t,u(t),u'(t)))}{\overline{\varphi}(|u'(t)|)} dt \leq -u(t_1) + u(t_0) \\
&\leq \max_{t\in[\overline{a},\overline{\beta}]} \overline{\beta}(t) - \min_{t\in[\overline{a},\overline{\beta}]} \overline{\alpha}(t) < \int_r^R \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)}.
\end{aligned}$$

Chegamos así a unha contradición.
Analogamente, supoñamos agora que $\max\limits_{t\in[\overline{a},\overline{b}]} u'(t) \geq R$. Entón, existe un intervalo $I = [t_0, t_1]$ tal que $u'(t) \geq 0$ para todo $t \in I$, $u'(t_0) \geq R$ e $u'(t_1) = r$.
Logo,

$$\begin{aligned}
\int_r^R \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} &\leq \int_{u'(t_1)}^{u'(t_0)} \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)} = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{u'(t)u''(t)}{\overline{\varphi}(u'(t))} dt \\
&= -\int_{t_0}^{t_1} \frac{(u'(t))(f(t,u(t),u'(t)))}{\overline{\varphi}(|u'(t)|)} dt \leq -u(t_1) + u(t_0) \\
&\leq \max_{t\in[\overline{a},\overline{\beta}]} \overline{\beta}(t) - \min_{t\in[\overline{a},\overline{\beta}]} \overline{\alpha}(t) < \int_r^R \frac{sds}{\overline{\varphi}(s)}.
\end{aligned}$$

Chegamos igualmente a unha contradición.
Concluímos polo tanto, $\|u'\|_\infty < R$.
A proba da segunda parte da proposición é análoga. $\square$

Exemplo 3.7. Consideremos o problema,

$$u'' = (u')^{3/2} + (1+\operatorname{sen}(t))(-u + u^3 + t),$$
$$u(0) = u(1),\, u'(0) = u'(1).$$

Pódese comprobar fácilmente que $\alpha = -2$ e $\beta = -1$ son sub e sobre solucións respectivamente do problema que estamos a considerar.
Sexa $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ a función definida por

$$\varphi(t) = t^{3/2} + 2.$$

Nótese que $r = \text{máx}\, \frac{\beta(b)-\alpha(a)}{b-a}, \frac{\beta(a)-\alpha(b)}{b-a} = 1$. Entón,

$$\int_r^\infty \frac{sds}{\varphi(s)} = \int_1^\infty \frac{sds}{\varphi(s)} = \int_1^\infty \frac{sds}{s^{3/2}+2} = \infty.$$

E, para todo $(t, u, u') \in \{(t, u, u') \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq u \leq -1\}$ tense que

$$|f(t, u, u')| = |(u')^{3/2} + (1 + \operatorname{sen}(t))(-u + u^3 + t)| \leq |t|^{3/2} + 2 = \varphi(|t|).$$

Polo tanto, a Proposición 3.5 asegúranos a existencia dunha constante $R > 0$ tal que para toda solución u do probema considerado tal que $\alpha \leq u \leq \beta$ tense

$$\|u'\|_\infty < R.$$

Bibliografía

[1] Abellanas, L. y Galindo, A., *Espacios de Hilbert (Geometría, Operadores, Espectros)*, 2.ª ed., Eudema Universidad: Manuales, 197-206, 1991.

[2] Adams,R.A., *Sobolev Spaces*, Pure and applied mathematics, Academic Press Inc, 1975

[3] Akô, K., *Subfunctions for ordinary differential equations II*, Funkcialaj Ekvacioj **10** (1967), 145-162.

[4] Akô, K., *Subfunctions for ordinary differential equations III*, Funkcialaj Ekvacioj **11** (1968), 111-129.

[5] Akô, K., *Subfunctions for ordinary differential equations IV*, Funkcialaj Ekvacioj **11** (1968), 185-195.

[6] Appel, J. and Zabrejko, PP., *Nonlinear Superposition Operators*, Cmabridge University Press, Cambridge, 1990

[7] Bernstein, S., *Sur certaines équations différentielles ordinaires du second ordre*, C.R: Acad. Sci. Paris **138** (1904), 950-951.

[8] Bernstein, S., *Sur les équations du calcul des variations*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **29** (1912), 431-485.

[9] Cabada, A., *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations*, SpringerBriefs in Mathematics.

[10] Cabada, A., *An Overview of the Lower and Upper Solutions Method with Nonlinear Boundary Value Condition*, Bound. Value Prob. **2011**, 18 (2011) Article ID 893753

[11] De Coster, C. and Habets, P., *Two-Point Boundary Value Problems: Lower and Upper Solutions*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 205, Elsevier B. V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[12] De Coster, C. and Habets, P., *Upper and Lower Solutions in the Theory of Ode Boundary Value Problems: Classical and Recent Results*, in Zanolin F. (eds) Non Linear Analysis and Bounday Value Problems for Ordinary Differential Equations, International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), vol. 371, Springer, Vienna, 1996.

[13] De Coster, C. and Habets, P., *The lower and upper solutions method for boundary value problems*, in Handbook of Differential Equations, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, The Netherlands,(2004), 69-160.

[14] Dieudonné, J., *Fundamentos de análisis moderno*,(A. Plans), Ed. Reverté, 1979

[15] Dragoni, G.S., *II problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*, Mathematische Annalen, vol. 105, no. 1, 133–143, 1931.

[16] Gaines, R.E., *A priori bounds and upper and lower solutions for nonlinear second-order boundary-value problems*, J. Diff. Equ. **12** (1972), 291-312.

[17] Gaines and J. Mawhin, R.E., *Coincidence degree and nonlinear differential equations*, Lectures Notes in Math. 568, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[18] Habets, P. and Pouso, R. L., *Examples of nonexistence of a solution in the presence of upper and lower solutions*, The ANIZIAM Journal, vol. 44, no.4, pp 591-594, 2003.

[19] Müler, M., *Über das fundamentaltheorem in der theorie der gewöhnlichen differential-gleichun gen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 26, no. 1, 619–645, 1927.

[20] Nagumo, M., *Uber die differentialgleichung* $y'' = f(x, y, y')$, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, vol. 19, 861–866, 1937.

[21] Perron, O., *Ein neuer existenzbeweis für die integrale der differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Mathematische Annalen, vol. 76, no. 4, 471–484, 1915.

[22] Picard, E., *Mémoire sur la théorie des équations aux derivés partielles et la méthode des approximations succesives*,Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol.6, 145-210, 1890.