

LA CONCEPCION ANTIRREALISTA DE LA LOGICA

Concepción Martínez Vidal

Abstract

This paper consists of two parts. In the first part the anti-realistic semantics proposed by Dummett is discussed and analysed. Special attention is paid to those aspect –of the so-called negative programme– which are relevant for the description of the philosophy of logic developed from it. In the second part the objectives and partial achievements of the «positive programme» are discussed. Particularly the concepts of validity (as a central notion of an anti-realistic theory of meaning) proposed by Prawitz and Martin-Löf are described and compared. We maintain that the great difficulties they come across in order to develop a central notion that satisfies the principles prescribed from the anti-realistic semantical basis, seriously endanger the possibilities of success of the whole anti-realistic programme. Still and as a side effect this approach has succeeded in developing powerful tools both for mathematical and computational research.

Introducción

El programa de investigación antirrealista se estructura en dos partes claramente diferenciadas:

1ª) El programa negativo. Se establece la imposibilidad de desarrollar una teoría del significado antirrealista a partir de la noción de condiciones de verdad platónicamente entendidas.

2ª) El programa positivo. Se impone el desarrollo de una noción central alternativa. En el ámbito de la lógica y la matemática la noción intuitiva de prueba se presenta como la noción central más adecuada; para estos ámbitos el programa positivo antirrealista se concreta en tres puntos:

- i) De las condiciones de demostración al significado.
- ii) Teoría general de la demostración.
- iii) De la lógica clásica a la lógica intuicionista.

Dummett destaca desde un principio la estrecha relación existente entre la viabilidad del programa que propugna y la fase positiva del mismo. En el curso de la exposición se pondrán de manifiesto algunas de las dificultades –a nuestro entender en muchos casos insalvables– que plantea el desarrollo de una base semántica antirrealista que permita la reconstrucción de la lógica y la matemática. Estas difi-

cultades se deben, esencialmente, a que los principios que Dummett propugna para la base semántica antirrealista se resisten a una combinación armoniosa mediante las técnicas lógico-matemáticas de las que hoy disponemos. Sin embargo, los defensores del paradigma creen firmemente en la eventual superación de las mismas mediante el desarrollo de una noción central adecuada para los distintos ámbitos del lenguaje (o al menos de la matemática); tal desarrollo se considera condición previa al rechazo de la lógica clásica en favor de la intuicionista.

Fundamentos de semántica antirrealista: el programa negativo

Centremos la crítica de Dummett en la polémica entre las concepciones clásica e intuicionista de la lógica y la matemática. Desde la concepción platónica –que Dummett identifica con la defensa del realismo– se atacó tradicionalmente al intuicionismo debido a los planteamientos solipsistas de su fundador. Brouwer concibe la matemática como una actividad mental sin lenguaje, una idealización de la práctica matemática que es correcta y exacta tan sólo en cuanto idealización¹.

Dummett construye una argumentación en contra de una semántica bivalente platónica, sin embargo no puede ser considerado un intuicionista ya que no rechaza la interpretación clásica para el fragmento decidible de la lógica y matemática clásicas al tiempo que cuestiona tanto el psicologismo como el solipsismo de los que está impregnado el pensamiento intuicionista en general y el de Brouwer en particular.

Consideramos que las premisas de su argumentación pueden entenderse como inspiradas en la superación de algunos de los presupuestos de las dos concepciones que rechaza: platonismo e intuicionismo. El antirrealismo semántico se enmarca en la tradición analítica; se asigna un destacado papel al lenguaje y se propugna –desde la metateoría– que toda teoría del significado ha de comprender una teoría del valor semántico y una teoría de la fuerza. Dummett propugna una teoría del significado que incorpora además un tercer elemento: la teoría del sentido. Esta se ocupa de qué es lo que sabe el hablante cuando conoce el significado de una sentencia.

Tanto este tercer elemento como la adopción del dictum del 2º Wittgenstein, *meaning is use*, por parte de Dummett son fundamentales para evitar el psicologismo. Sin embargo, el recurso a este dictum no debe entenderse como convergencia global con la teoría del significado del 2º Wittgenstein; Dummett lo utiliza para huir del psicologismo intuicionista y como criterio para determinar la *clase* de noción central que se considera apropiada desde el marco antirrealista en el que se sitúa. Además, a la filosofía del 2º Wittgenstein subyace una tesis ontológica contraria a la defensa de una realidad existente independientemente del conocimiento humano que desprende un fuerte aroma idealista no extensible a Dummett; tal y como se ha subrayado anteriormente, este autor es realista en lo que se refiere a las sentencias decidibles, rechaza las tesis del platonismo (= realismo) en lo que respecta a las indecidibles y postula que los enunciados matemáticos refieren a objetos creados

¹ Brouwer, 1933.

por nosotros. Las diferencias entre la filosofía de la matemática del 2º Wittgenstein y la antirrealista que nos ocupa se pueden resumir de la siguiente forma:

1) Mientras que el 2º Wittgenstein propugna que la matemática pertenece a la gramática del lenguaje, que la gramática es autónoma –de libre elección– y que las reglas gramaticales son independientes, por el contrario para el antirrealismo semántico el significado de una sentencia es determinable de forma no arbitraria, por lo cual el significado atribuible a las constantes lógicas no es de libre elección, la matemática es estable y el uso es revisable. Esta interpretación del dictum wittgensteniano permite evitar el psicologismo del que adolece el intuicionismo en tanto instituye una exigencia de publicidad del significado y se aleja totalmente del solipsismo en que caía Brouwer al entender la matemática como una actividad carente de lenguaje.

2) Es interesante destacar el carácter revisable que Dummett atribuye al uso del lenguaje; esta exigencia está estrechamente vinculada al carácter molecular –contrario al holismo en general y al del 2º Wittgenstein en particular– que según el padre del antirrealismo semántico ha de detentar toda teoría del significado. Para el 2º Wittgenstein el uso del lenguaje es una mera convención y como tal no será revisable a menos que optemos por una nueva teoría. Evidentemente, el significado de las sentencias del lenguaje dependerá de la teoría (del juego del lenguaje) en la que se encuentren inmersas y no puede ser determinado en función de los componentes de la sentencia según establece el principio fregeano. Por el contrario, Dummett considera que el uso de una sentencia ha de ser revisable y propone como criterio de revisión la exigencia de cierta sistematicidad en la articulación del lenguaje: *el principio de armonía*. El principio de armonía establece que las consecuencias de la aseveración de una sentencia no deben ir más allá de lo que establecen las condiciones de aseveración de la misma. La satisfacción de este principio garantiza que la utilización de métodos indirectos, (en matemáticas la obtención de pruebas mediante aplicación de las reglas de eliminación) constituye una extensión conservadora del lenguaje.

Una vez expuestas someramente las premisas básicas de la argumentación de Dummett, presentaremos sintéticamente el núcleo de la argumentación:

Si consideramos el conjunto de las sentencias decidibles es evidente que el platear que el significado de la sentencia está determinado por sus condiciones de verdad se ajusta a la propuesta antirrealista. Sin embargo, si consideramos también las sentencias indecidibles es obvio que es imposible definir un criterio de verdad contrastable –no es posible comprobar de forma efectiva si la sentencia satisface o no su condición de verdad–. Así, pues, es obvio que en el caso de las sentencias indecidibles no es posible formular tales condiciones de verdad sin recurrir a condiciones trascendentes de verdad, en otras palabras, a condiciones que no se manifiestan en el uso de esa sentencia.

La conclusión es obvia: la teoría del significado que resulta de la adopción de la noción de condiciones de verdad como noción central de la teoría del valor semántico contradice el principio fundamental de publicidad del significado de la sentencia.

De lo dicho se sigue así mismo que la teoría del significado que Dummett propugna es una teoría verificacionista –la noción central de la teoría del significado

ha de ser susceptible de manifestación en el uso, no trascendente, verificable-, pero, este verificacionismo no coincide con el neopositivista. La diferencia esencial radica en que el neopositivismo no rechaza la semántica bivalente sino que considera que el fragmento de sentencias indecidibles es asignificativo. Además desde el antirrealismo se desarrolla una propuesta de verificacionismo refinado –incluida en el programa positivo– mediante la cual se intentan superar los problemas a los que tradicionalmente se han enfrentado los enfoques de esta índole.

La teoría del significado antirrealista en el ámbito de la lógica y la matemática: variaciones en torno al concepto de prueba

Entre los distintos principios que, según Dummett, ha de detentar toda teoría del significado, prestaremos especial atención a aquellos que inciden en la defensa de una u otra teoría del significado para las constantes lógicas según los distintos autores pertenecientes al paradigma que nos ocupa. En general, los distintos autores del paradigma «proof-theoretical» (teoría de la prueba) estiman que cualquier intento de desarrollar una teoría general del significado ha de producirse tras una clarificación –semántica– que permita optar por *la* teoría del significado para las constantes lógicas, ya que:

1^a) La complejidad del lenguaje de la lógica de primer orden es mucho menor que la de cualquier otro y su desarrollo puede considerarse un primer paso de cara a la concreción de una teoría general del significado.

2^a) La tarea de lograr una fundamentación de la matemática y la lógica que permita superar el eclecticismo vigente en el campo es relevante en sí misma.

En lo que se refiere al ámbito de la lógica, la crítica de Dummett resulta ser una crítica a la concepción clásica de la lógica, al bivalentismo; sin embargo, el rechazo radical de la concepción clásica de la lógica y la aceptación de la intuicionista depende –tal y como se ha indicado en el párrafo anterior– del éxito de programa positivo.

Punto clave en la constitución y desarrollo del programa positivo será la formulación y desarrollo de una noción central alternativa a la de condiciones de verdad. En lógica y matemáticas la existencia de una demostración se considera la condición de aseveración de toda sentencia; en principio, es obvio que esta noción satisface la exigencia de no trascendencia ya que siempre podemos reconocer una demostración cuando se nos presenta. No cabe duda, no obstante, de que la utilización de esta noción plantea ciertos problemas. Así:

1^a) Dada la incompletud de los sistemas formales no es posible identificar el significado de las constantes lógicas con su utilización en uno u otro sistema formal.

2^a) Además, al considerar esta noción como noción central de una teoría del significado se plantea uno de los problemas típicos del verificacionismo: para poder reconocer una prueba de la verdad de un enunciado es preciso saber en qué consiste la verdad de ese enunciado. En matemática está claro que una sentencia es correcta si se dispone de la demostración correspondiente. Pero el significado que se asigne a una determinada sentencia es fundamental para entender que un conjunto dado

de inferencias relativas a esa sentencia constituyen una prueba de la misma².

No obstante, si se consiguiesen formular las condiciones de prueba de una sentencia dispondríamos de un criterio decidible que permitiría esclarecer en qué circunstancias puede aseverarse correctamente una sentencia. Por esta razón, la explicitación de las mismas constituye el núcleo del programa positivo. Además, las condiciones de prueba entendidas como noción central de esa teoría del significado han de satisfacer el principio de armonía³, principio que desempeña un papel equivalente al de la consistencia en la concepción realista.

A partir de este momento, nuestro objetivo será el de investigar cómo se entiende la validez (las condiciones de prueba) y cómo se concreta el correspondiente principio de armonía por parte de los distintos autores del paradigma.

Dag Prawitz coincide fundamentalmente con la crítica que Dummett hace al realismo semántico. Disiente en lo que respecta a la metateoría puesto que considera que no es necesaria una «teoría del sentido»; Prawitz considera suficiente para conjurar el psicologismo que se exija la satisfacción de la siguiente y más modesta condición T:

«... if T es to be adequate, it must be possible to derive T in the implication 'if P knows the meaning of A, then P shows behaviour BA'»⁴.

La diferencia entre una teoría del significado modesta como la de Prawitz y la vigorosa de Dummett radica en que:

(i) La diferencia entre Prawitz y Dummett estribaría en que mientras que el primero considera que el desarrollar una explicación a nivel metateórico —a nivel de una teoría de la comprensión— no es tarea de la lógica ni de la semántica, el segundo considera, por el contrario, que se trata de una condición imprescindible;

(ii) en palabras de Martin-Löf las teorías modestas consideran que diseñar una semántica (entendida como aquella teoría que se sale del lenguaje, como teoría de la comprensión) no es posible dado que la lógica se entiende como lingua característica, como universal⁵, mientras que los defensores de una semántica vigorosa estiman que:

«... you must enter on a genuinely semantical or meaning theoretical investigation; (...) you must enter on an enterprise which is essentially philosophical or phenomenological, if you prefer, in nature»⁶.

(iii) Dummett considera que una teoría modesta implica la concepción del lenguaje como código de pensamiento; a esto se opone Prawitz que coincide con McDowell al considerar que:

² Prawitz, 1987, pp. 474–5.

³ Dummett, 1977, p. 397.

⁴ Prawitz, 1978, p. 27.

⁵ «... nada puede estar fuera del sistema (...). Es obvio que todo sistema formal requiere reglas que no se expresan en el sistema pero esas reglas no corresponden a ninguna lógica intuitiva, son las reglas de manipulación de los signos». Jean Van Heijenoort, «Logic as calculus and logic as language», *Synthese*, 17, (1967), pp. 324–330.

⁶ Martin-Löf, 1987, p. 414.

«psychologism is avoided because the implicit knowledge is (in, so to speak, its inner aspect) capable of acknowledgement by speakers as what guides their practice».

Prawitz formula su objeción aplicada al ámbito concreto de la lógica indicando que, aunque la teoría del significado es molecular y ha de satisfacer el principio de armonía, este principio no es directamente una propiedad del comportamiento lingüístico; en otras palabras, del hecho de que una persona conozca las reglas de introducción y eliminación para una constante lógica no se sigue que conozca los procedimientos de reducción. La exigencia de Dummett –debemos ser capaces de reconocer la regla que nos está guiando en nuestro comportamiento aunque seamos incapaces de formularla– presenta a juicio de Prawitz cierto carácter psicoanalítico.

La teoría del significado de Prawitz se centra en los ámbitos de la lógica y la matemática. Para la concreción de su concepción utiliza buena parte de los resultados obtenidos en teoría general de la demostración que constituyen parte fundamental de la filosofía de la lógica defendida por este autor.

Entre los resultados obtenidos por este autor en teoría general de la demostración destacan el principio de inversión (formulación del principio de armonía para lenguajes de primer orden) y, sobre todo, la definición de procedimientos de reducción que le permiten obtener un resultado equivalente para los cálculos N al Hauptsatz de Gentzen para los L , el teorema de la forma normal⁸; esto es, la demostración del principio de armonía para lenguajes de primer orden. El principio de armonía en su forma general dice que las conclusiones que se siguen a partir de la sentencia aseverada no pueden ir más allá de las condiciones que hacen posible la aseveración de la misma. En el caso concreto del principio de inversión se dice que mediante las reglas de eliminación de una constante lógica no se puede concluir nada que no haya sido previamente exigido para la introducción de la constante principal de la aseveración en cuestión.

Tal y como se ha indicado los autores del paradigma antirrealista–«proof-theoretical» consideran que la noción central de la teoría del significado para las constantes lógicas ha de ser la noción de prueba. También hemos indicado algunos de los problemas que plantea el definir una noción de prueba que salve los problemas del verificacionismo y los de la incompletud de los formalismos. Prawitz se inspira, para salvar el problema de considerar que el significado está determinado por el método de verificación de la sentencia en lugar de por sus condiciones de verdad, en Gentzen:

«Las introducciones representan, por así decir, las 'definiciones' de los signos que les conciernen, y las eliminaciones no son en último término más que consecuencias de sus definiciones,...».

En otras palabras, las reglas de introducción para las distintas constantes lógicas establecen el significado de las mismas. En este sentido son autojustificativas y no arbitrarias. Prawitz considera que la condición suficiente para afirmar correctamente

⁷ McDowell, 1987, p. 65.

⁸ Prawitz, 1965.

⁹ Gentzen, 1955, p. 27.

te una sentencia es expresada por la regla de introducción correspondiente a su símbolo principal. Las reglas de eliminación, dado el carácter sistemático de los sistemas de deducción natural¹⁰, no añaden nada al significado de las constantes lógicas. Sin embargo, no sería adecuado identificar las reglas de introducción con la noción central de la teoría del significado como uso. El significado de las constantes lógicas –esto es, las reglas de inferencia según Gentzen– no explica por sí solo el concepto de prueba. Así, es evidente que una demostración de $A \vee B$ a partir de $(x) A \vee B$ es correcta, pero este caso no está incluido en la definición que identifica prueba y reglas de introducción. Tampoco sería posible identificar la noción de prueba con la de prueba canónica¹¹; sí sería posible en los casos de la disyunción y del cuantificador existencial puesto que desde el punto de vista intuicionista sabemos que no es el caso que en la propia prueba canónica de la disyunción la conclusión a obtener ocurra como premisa¹². Sin embargo, en el caso del implicador (y del cuantificador universal) la problemática es más radical:

«... if intuitionistic explanation of implication is to escape, not mere circularity but total vacuousness, there must be a restricted type of proof –canonical proof– in terms of which the explanation is given, and which does not admit modus ponens (eliminación del implicador) save in subordinate deductions»¹³.

Este problema, clave en el paradigma *proof-theoretical*, está estrechamente vinculado: 1) a la defensa de una teoría molecular del significado; 2) al rechazo de la identificación que en el idealismo se produce entre verdad y verdad conocida. Desde el antirrealismo se proclama que ha de existir cierto «abismo» (*gap*) entre la verdad y el reconocimiento de la verdad. De este modo, la noción de verdad retorna a la teoría del significado aunque ni su papel es el de noción central de una teoría del significado ni su definición una vuelta al bivalentismo.

Al concepto de verdad adscribe Prawitz dos acepciones:

a) Verdad₁: se identifica con la existencia de una prueba canónica para una sentencia; prueba canónica es una prueba autojustificativa, aquella en la que se utilizan tan sólo reglas de introducción para las distintas constantes lógicas. El problema radica en que «... *what exactly the notion of canonical proof amounts to is obscure*»¹⁴.

Dummett (1975a, p. 240) plantea este problema mientras que Prawitz opta, en función de los teoremas de normalización que establecen que toda ocurrencia de rodeos (fórmulas que ocurren simultáneamente como conclusión de una introducción y premisa mayor de una eliminación) puede ser eliminada, por la identificación de la noción de prueba canónica¹⁵ con la de prueba en la que no se utilizan eliminaciones. Dummett fundamenta sus dudas en la investigación en torno a la noción

¹⁰ Teorema de la forma normal y Teoremas de normalización en Prawitz 1965 y Prawitz 1971.

¹¹ Prueba canónica: aquella en la que no se utilizan reglas de eliminación.

¹² Dummett, 1975a, p. 240.

¹³ Dummett, 1978, p. 241.

¹⁴ Dummett, 1975b.

¹⁵ *Argumento canónico* sería la terminología correcta, pero puesto que aún no se ha introducido, optamos por prueba en aras de la claridad.

de prueba canónica realizada por Brouwer en su prueba del «Bar Theorem»: en esta prueba no se eliminan los rodeos sino que se proporciona una prueba totalmente analizada.

b) Verdad₂: verdad como corrección. Una sentencia es correcta si es posible probarla (mediante una prueba canónica o demostración) y si se ha establecido la corrección de una sentencia este resultado será verdadero al margen del tiempo. Prawitz defiende pues que un enunciado es correcto si es *demostrable en principio*; es decir, no identifica la verdad del enunciado ni con la existencia de una prueba del mismo ni con su verdad al margen de la existencia de una demostración. El concepto *demostrable en principio* es asumido por parte de los distintos autores del paradigma aunque no hay acuerdo en la interpretación del mismo. Prawitz considera que «... *it is possible in principle to prove A when we abstract from the shortness of our lives, the lack of perseverance and intelligence, and so on*»¹⁶. Además, cuando se dice que existe una prueba de una sentencia:

«... it does not mean that a proof of A will be constructed but only that the possibility is there for constructing a proof of A. One may think that the expression 'there exists' is then not very appropriate, and it is clear (in particular in view of what is said about proofs in sect. 8) that the expression is not to be understood as a quantification over a domain that is well-defined in the same way as that of the natural numbers. But (...) I see no objection to conceiving the possibility that there is a specific method for curing cancer, which we may discover one day, but which may also remain undiscovered»¹⁷.

Prawitz defiende pues un «reino de pruebas»¹⁸ al que se objeta desde el anti-realismo que supone una vuelta al realismo platónico cuyo rechazo constituye la piedra de toque del antirrealismo. Prawitz se defiende:

«I fail to see this, however, since in such an objective realm of proofs there can be no question of the existence of a proof that is not in principle recognizable by us. This is so because a proof is by its very nature something that is related to our recognitional capacities, unlike the classical truth conditions that are understood as possibly obtaining although we may be in principle unable to recognize that they obtain»¹⁹.

En resumen, la noción central de la teoría del significado de las constantes lógicas que Prawitz propone es la noción de argumento válido. El término «argumento» debe entenderse como una representación semi-formal de la noción intuitiva de prueba; mediante este recurso Prawitz intenta salvar el problema del, desde su perspectiva, inaceptable acercamiento a la noción intuitiva que nos ocupa mediante la noción de derivabilidad en un sistema formal. Por argumento se entiende una colección arbitraria de inferencias vinculadas. En todo argumento debe establecerse qué supuestos y parámetros se utilizan y dónde se clausuran, en otras palabras, cómo se establece una conclusión. La validez de un argumento se establece respecto a aquellos en los que todos los supuestos y parámetros están ligados por alguna

¹⁶ Prawitz, 1987, p. 153.

¹⁷ Prawitz, 1987, p. 154.

¹⁸ La defensa del «reino de pruebas» —estrechamente vinculada a la defensa de que las pruebas son «timelessly true»— le permite defender la estabilidad de la matemática aunque parece incompatible con las exigencias del antirrealismo.

¹⁹ Prawitz, 1987, p. 154.

inferencia (argumento cerrado); se asume que toda forma de sentencia tiene asociada una regla de introducción para esa forma de sentencia (argumento canónico) y una operación de justificación (la operación de reducción correspondiente). Se define:

- «(i) an argument in canonical form is valid if and only if its immediate subarguments (i. e. the arguments for the premisses of the last inference of the argument) are valid, and that,
(ii) if a sentence is provable at all, its proof must be capable of being written in canonical form: in other words, an argument not in canonical form can be valid only if it could be written in canonical form»²⁰.

Respecto a esta definición se plantean dos problemas polémicos y de difícil solución; por una parte, la imposibilidad de caracterizar formalmente los métodos para obtener pruebas canónicas y, por otro, dada la impredicatividad de la implicación y del cuantificador universal, para Prawitz es obvio que el descubrimiento de nuevos métodos afectará a la definición del implicador. De algún modo esto se salvaría si consideramos que esos métodos están de alguna forma ya en el *reino de las demostraciones*. Sin embargo, Dummett rechaza la identificación del problema que plantea la impredicatividad de la implicación con el de la concreción formal de los métodos para obtener demostraciones aunque reconoce que ni su tesis ni la de Prawitz disfrutaron de una justificación clara. Dummett resolvería el problema de la estabilidad de la matemática, que, tal y como se acaba de reflejar, plantea al anti-realismo el carácter temporal de la definición del implicador, (tal característica no es compatible con la defensa de la estabilidad de la matemática que propugnan) apelando a esa noción intuitiva de prueba cuya formalización debe ser captada si se aspira a la reconstrucción de la lógica y la matemática a partir de la base semántica antirrealista. En esta línea se sitúa buena parte de la investigación en el marco del paradigma *proof-theoretical* que se ocupa de la reconstrucción de la matemática mediante técnicas intuicionistas.

También inmerso en el paradigma antirrealista-«*proof-theoretical*» y coincidiendo de forma más generalizada que Prawitz con los planteamientos de Dummett destaca Martin-Löf. Su principal aportación a la teoría de la demostración ha sido su teoría de tipos. A partir de esta teoría desarrolla su concepción de la lógica.

Martin-Löf coincide con Dummett respecto al carácter vigoroso (*full-blooded*) que debe detentar toda teoría del significado. Tal y como se ha indicado, y como el propio Martin-Löf recoge en las páginas iniciales de su teoría tipos, esto conlleva la no distinción entre sintaxis y semántica:

«In standard textbook presentations of first order logic, we can distinguish three quite separate steps:

- (1) inductive definition of terms and formulas,
- (2) specification of axioms and rules of inference,
- (3) semantical interpretation.

Formulas and deductions are given meaning only through semantics, which is usually done following Tarski and assuming set theory.

What we do here is meant to be closer to ordinary mathematical practice. *We will avoid*

²⁰ Prawitz, 1985, pp. 164-5.

keeping form and meaning (content) apart. Instead we will at the same time display certain forms of judgement and inference that are used in mathematical proofs and explain them semantically»²¹.

Las principales diferencias entre la teoría de tipos y las propuestas basadas en lenguajes de primer orden se concretan de la siguiente forma:

– En su artículo de Siena (1984) Martin-Löf puntualiza que no entra en la caracterización de la noción de expresión, sino que simplemente asume que disponemos de tal noción y que coincidimos en ella. Tal noción correspondería a la de fórmula en tanto que está desprovista de contenido semántico. Una vez asumida la noción de expresión, Martin-Löf puntualiza que mientras que en las propuestas basadas en lenguajes de primer orden la definición de argumento válido ranguea sobre fórmulas, su teoría de tipos ranguea sobre la noción *semántica* de *proposición*. Mientras que las primeras se definen inductivamente, las segundas se interpretan como conjuntos. De este modo no surge el problema que se plantea a Prawitz quien para evitar los problemas que se siguen del teorema de Gödel recurre a la definición semi-formal (relativa a un lenguaje de primer orden aunque no a un sistema formal concreto) de argumento. Esto no significa que la noción intuitiva de prueba se corresponda con la representación formal obtenida en teoría de tipos. No obstante, la interpretación de la noción intuitiva que Martin-Löf propone es más amplia que la propuesta por Prawitz en tanto que la definición de proposición que el primero postula ranguea sobre la noción de conjunto mientras que la del segundo ranguea sobre lenguajes de primer orden.

– En su teoría de tipos retoma la distinción fregeana entre proposición (en su teoría de tipos correspondería a la regla de formación) y juicio. En realidad, la noción de juicio es una noción previa cuya clarificación es el primer objetivo de su reflexión. Su exposición no resulta del todo sencilla en tanto que comienza con una discusión histórica de las nociones de proposición y juicio que interfiere con su propuesta:

«... what we combine by means of the logical operations and hold to be true are propositions. When we hold a proposition to be true, we make a judgement...»²².

De tal distinción entre «acto de juzgar» y «objeto juzgado», «juicio» y «evidencia de un juicio», se sigue con absoluta coherencia la distinción entre «proposición» y «verdad de una proposición». La «verdad de una proposición» se establece mediante una prueba. Una prueba es lo que hace de una proposición un teorema. Conocer el significado de una proposición (conocer un juicio de la forma «A es verdadera») es saber cómo verificar esa proposición. Pero según la interpretación intuicionista de la verdad la distinción entre saber cómo y saber qué se desvanece. La diferencia entre los dos tipos de conocimiento que acabamos de mencionar es puramente categorial puesto que la condición para que pueda afirmar correctamente que A es verdadero (para aseverar la proposición A) no es que A sea verdadero sino que yo *sepa* que A es verdadero²³.

²¹ Martin-Löf, 1984, p. 1. Las cursivas son mías.

²² Martin-Löf, 1984, p. 3.

²³ Martin-Löf, 1984a.

– Mientras que para Prawitz la verdad₁ (prueba canónica) de un enunciado se da simultáneamente con su significado para Martin-Löf:

«... it is the concept of knowing a proof of the proposition, which is the conceptually prior notion, and then the notion of truth is extracted from it by saying that a proposition is true if it is directly provable»²⁴.

Si Prawitz entiende que la regla de inferencia $A, B / A \& B$ nos lleva de las proposiciones A y B a la proposición A & B (Prawitz no distingue entre el acto de juzgar y lo juzgado), sin embargo para Martin-Löf tal esquema indica que la afirmación de A, $\vdash A$, y la afirmación de B, $\vdash B$ nos llevan a la afirmación de A & B, $\vdash A \& B$. Para el primero la regla de inferencia, si es de introducción, proporciona simultáneamente el significado y la verdad de la proposición mientras que el segundo distingue entre el juicio que establece qué es una proposición y el que permite aseverar la verdad de una proposición.

– Una vez se ha puntualizado que las aseveraciones «A es una proposición» y «A es verdadera» son dos tipos de juicio, dos categorías de juicio, la teoría de tipos debe entenderse como una teoría sobre tipos de juicio.

– Ambos coinciden en señalar que la noción de argumento canónico es fundamental para una teoría del significado pero difieren respecto a la segunda cláusula de la definición de argumento válido. La validez es la noción central de la teoría del significado en ambos casos. Prawitz considera que es suficiente con disponer de un método para obtener un argumento válido pero *no* proporciona análisis alguno respecto a cuales son esos métodos, mientras que Martin-Löf proporciona en su teoría de tipos un análisis de esos métodos²⁵ e indica que hay que incorporar además una demostración de que ese método efectivamente permite obtener una demostración susceptible de ser transformada en un argumento canónico. Prawitz objeta a esta definición de validez que se produce cierto regreso al infinito en tanto que sería preciso garantizar a su vez que la demostración de la demostración efectivamente establece lo que se pretende y así sucesivamente. De algún modo esta crítica de Prawitz está relacionada con su defensa de una teoría modesta del significado. En su propuesta se pone de manifiesto su defensa de que en último término es imposible ir más allá, es imposible desarrollar una teoría de la interpretación (teoría del sentido_D) de la índole que postulan Dummett y Martin-Löf; por ello el objeto que se obtiene al construir la prueba de una proposición no garantiza nada que no hubiese establecido ya el propio proceso. Para Martin-Löf tal objeto no constituye tampoco el significado que va más allá del lenguaje y penetra en la naturaleza sino que a su vez define un nuevo tipo de proposición. Ahora bien, ¿cuál de las dos nociones de validez proporciona más ventajas explicativas?

– Es importante indicar que mientras que la extensión de la noción de validez de Prawitz a lenguajes de segundo orden es factible en tanto se ha demostrado el teorema de la forma normal para los mismos, la extensión de la teoría de tipos de Martin-Löf a lenguajes de orden superior plantea problemas no resueltos hasta la

²⁴ Martin-Löf, *Synthese*, 73.

²⁵ Martin-Löf, 1984, pp. 8–9.

La noción de validez, \vdash , de Schroeder-Heister es relativa a una base atómica β (Prawitz, 1973) que se extiende con las reglas de introducción de la lógica intuicionista para $\&$, \vee , \rightarrow , \perp , (x) , \forall . Es decir, la definición de validez no está fuertemente conectada con la de normalizabilidad fuerte²⁸ como lo está la de Prawitz sino sólo con la de invertibilidad de las reglas. Además, mientras que la noción de validez de Prawitz es transitiva la de Schroeder-Heister no lo es.

Por último, cabe hacer referencia a la propuesta de Ruy de Queiroz quien se muestra crítico respecto a los logros obtenidos en la ardua tarea de definir las reglas de prueba. Se apoya en la teoría de tipos de Martin-Löf y propone:

«... the meaning of a connective is completely given by its introduction rules plus the corresponding reduction rules. The introduction and reduction rules give the meaning to the connective being defined by telling *when* and *how* the connective can be used respectively. To eliminate the connective is to compute the expression, getting rid of the undesired connective»²⁹.

Justifica su propuesta: 1ª) estableciendo una analogía respecto a las funciones recursivas:

«And indeed, this seems to be in accordance with the idea of definability and recursive functions where one does not start by giving the computation rule (or the explicit definition corresponding to the inductive one) for a certain connective straight away. Instead one provides the reduction rules...»³⁰.

2ª) Apoyándose en la enorme utilidad de las reglas de igualdad (en teoría de tipos; equivalen a las de reducción de Prawitz para primer orden) en la aplicación de la *lazy evaluation*.

Conclusión

Si algo resulta especialmente atractivo del argumento de Dummett es, sin duda, que la metodología utilizada es innegablemente *crítica* puesto que el *leitmotiv* de la argumentación es el rechazo de cualquier recurso a lo trascendente. No obstante se advierte una clara restricción en la aplicación del criterio metodológico inicial a partir del momento en que se observa que la aplicación irrestricta del mismo le conduciría a la defensa del finitismo estricto y de la teoría del significado concomitante que resulta ser prácticamente inviable. Es fácil convenir con los defensores del antirrealismo semántico en el rechazo al finitismo estricto y, por consiguiente, resulta muy interesante incidir en las distintas interpretaciones de la noción que les separa definitivamente de la propuesta finitista y constituye la clave de su antirrealismo: la noción de *demonstrable en principio*. Al parecer tanto para Dummett como para Martin-Löf la idea de la razón que guiaría la investigación en torno a la expresión formal (algún día) de la noción intuitiva de prueba sería precisamente esa noción intuitiva. Ambos rechazan la propuesta de Prawitz relativa a un *reino de*

²⁸ Ver Prawitz, 1971.

²⁹ Ruy de Queiroz, 1988, p. 266.

³⁰ Queiroz, 1988, p. 274.

pruebas que –a nuestro entender– no conllevaría un nivel de realismo platónico en cuanto que se trata de una noción epistémicamente limitada. La propuesta de Prawitz se sitúa en un punto ciertamente difícil si se defiende desde el antirrealismo. Este autor parece no resignarse a aceptar como referente último de su investigación una noción –la de *demostrable en principio*– que nos parece viola uno de los principios fundamentales que guían la crítica de Dummett a la teoría clásica: el principio de publicidad de significado. (Ese significado sólo sería público *a posteriori* o nunca y resulta incompatible con la defensa de la estabilidad del significado).

Martin-Löf como intuicionista resalta que el concepto de «validez» corresponde al correlato formal de una cierta noción de corrección no formal y rechaza frontalmente el «reino de las pruebas» que Prawitz propugna. Sin embargo, ese correlato intuitivo, mental, ¿no sería en cierta forma un «reino de pruebas»? Un argumento válido constituye una representación parcial de la noción intuitiva, se adecúa pues a esa noción de corrección intuitiva, por consiguiente un argumento inválido, una prueba falsa, sería un error al plasmar la idea intuitiva de corrección puesto que lo falso no puede ser demostrado (salvo en un juicio hipotético). Pero, ¿cómo podemos estar seguros de que es común?, ¿no es la propia polémica entre defensores de la matemática clásica y de la intuicionista una sombra que debería llevarnos a cuestionar la pretendida *claridad y distinción* de tal noción intuitiva? Y si es así, dado que esa noción de prueba resulta ser una abstracción poco clara, ¿en qué medida podemos aceptar la propuesta de Gentzen y Prawitz relativa al carácter autojustificativo de las reglas de introducción y de la noción de argumento canónico?

Consideremos que, dado el cúmulo de dificultades con que los defensores del antirrealismo se encuentran, parece poco probable que el programa positivo pueda concluir felizmente. El problema que se plantea es una constante en la historia de la Filosofía; en último término el problema radica en el carácter limitado de nuestro conocer en tanto que humanos. En ese sentido, cierto nivel de realismo parece incuestionable a nivel teórico, aunque a nivel metodológico sea indeseable.

Si restringimos nuestro análisis crítico a las distintas propuestas en torno a la noción de validez, consideramos que el criterio propuesto por Queiroz reúne dos virtudes importantes: acepta aquél instrumento que parece más potente en principio, esto es, la teoría de tipos de Martin-Löf, y se inspira en su propuesta en la representación formal –por todos aceptada– de la idea intuitiva de computabilidad. Su propuesta respira cierto aire pragmático justificado, tal vez, a la luz de las dificultades teóricas que hemos visto. De algún modo pone de manifiesto el incuestionable interés del desarrollo de nuevas técnicas de representación que nos permiten explicar fragmentos cada vez más amplios de la realidad, en este caso matemática. Su propuesta pone de manifiesto que, a pesar del poco factible éxito del programa positivo, al menos con las herramientas matemáticas y lógicas de las que disponemos hoy, sin duda la investigación produce efectos colaterales de indudable interés. La utilización de la teoría de tipos en computación es tal vez uno de los más destacables.

Bibliografía

- Brouwer: «Weten, Willen, Spreken», *Euclides*, 1933.
- Dummett, M.: «What is a theory of meaning?» en Samuel Gatuplan (eds.), *Mind and Language*, Oxford, Clarendon Press, 1975a, pp. 97-138.
- «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», en *Logic Colloquium 73*, Amsterdam, Rose & Shepherson, 1975a, pp. 5-40.
- «What is a theory of meaning? (II)», en Evans and McDowell (eds.), *Truth and Meaning*, Oxford, 1976.
- *Elements of Intuitionis*, Oxford, 1977.
- *Truth and other enigmas*, Worcester and London, The Trinity Press, 1978.
- Franzen, T.: *Provability and Truth*, Stockholm, Almqvist & Wiksell International, 1987.
- Gentzen, G.: «Untersuchungen über la das logische Schliessen», *Mathematische Zeitschrift*, 39, 1935, pp. 176-210, pp. 405-31.
- *Récherches sur la déduction logique*, 1955. (Traducción de Feys y Ladrière).
- Jacobs, Bart: «The Inconsistency of higher order extensions of Martin-Löf's Type Theory», *Journal of Philosophical Logic*, 18, 1989, pp. 399-422.
- Martin-Löf, Per: *Intuitionistic Type Theory*, Stockholm, 1984.
- «On the meanings of the logical constants and the justification of the logical laws», Bernardi & Pagli (eds.), *Atti degli incontri di Logica Matematica*, vol. 2, Università di Siena, 1984a.
- «Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof», *Synthese*, vol. 73, nº 3, 1987.
- Prawitz, Dag: *Natural Deduction. A proof-theoretical study*, Stockholm, 1965.
- «Ideas and results in proof-theory» en Fenstad (ed.), *Proceedings of the 2nd Scandinavian logic symposium. Oslo 1970*, 1971, pp. 235-307.
- «Remarks on some approaches to the concept of logical consequence», *Synthese*, 62, nº 2, (1985), pp. 153-171.
- «Dummett on a Theory of Meaning and Its impact on Logic», en Taylor (ed.), *Michael Dummett*, 1987.
- Ruy de Queiroz: «A Proof-Theoretic Account of Programming and the Role of Reduction Rules», *Dialectica*, 42, nº 4, (1988).
- Schroeder-Heister, P.: «Completeness of intuitionistic logic with respect to a validity concept based on an inversion principle», *Journal of Philosophical Logic*, 12, (1983), pp. 359-377.
- Tennant, Neil: *Anti-realism and Logic*, Oxford, Clarendon Press, 1987.

Concepción MARTINEZ VIDAL
Universidad de Santiago de Compostela