USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

R.9.580

PROPORCIONALES

A. Lasala

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE SANTIAGO
00679470

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Folle 219 - 2

GENERALIZACION

DE LA TEORIA DE

LÍNEAS PROPORCIONALES,

POR MEDIO DE UN TEOREMA NUEVO ELEMENTAL, DEL QUE SE DERIVAN ALGUNAS CUESTIONES PERTENECIENTES Á LA GEOMETRÍA MODERNA, LAS FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES Y OTRAS INTERESANTES PROPIEDADES,

POR

D. ATANASIO LASALA Y MARTINEZ,

Licenciado en Ciencias exactas, Director y Catedrático de Matemáticas del Instituto de Orense.

ORENSE:
Imp. y Lib. de Rionegro Lozano.
Plaza del Hierro, núm. 3.
1880.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Es propiedad del autor.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

GENERALIZACION

de la teoría de

LINEAS PROPORCIONALES,

POR MEDIO DE UN TEOREMA NUEVO ELEMENTAL, DEL QUE SE DERIVAN ALGUNAS CUESTIONES PERTENECIENTES Á LA GEOMETRÍA MODERNA, LAS FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES, Y OTRAS INTERESANTES PROPIEDADES,

POR

DON ATANASIO LASALA Y MARTINEZ,

Licenciado en Ciencias exactas, Director y Catedrático de Matemáticas del Instituto de Orense.

ORENSE:
Imp. y Lib. de Rionegro Lozano,
Plaza del Hierro, n.º 3.

1880.

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

PRÓLOGO.

A fines del año 1878 emprendimos la tarea de revisar nuestro tratadito de Geometría y Trigonometría, publicado dos años antes, con objeto de preparar despacio la segunda edicion. Meditando sobre el plan que debiamos seguir, nos ocurrió la idea de someter las proposiciones geométricas á un órden que llamaremos combinatorio, porque estriba en considerar los objetos que constituyen la materia de estudio en geometría elemental primeramente aislados y despues combinados con otros de la misma ó de distinta especie, sin pasar á nuevo órden de combinaciones hasta haber agotado todas las hipótesis posibles.

Examinado atentamente este plan, muy luégo nos persuadimos de que lograriamos con él importantes ventajas, que no exponemos ahora por creerlo impropio de este lugar, lo que nos movió á ponerle en práctica.

Las líneas rectas, consideradas en un plano, ofrecen, bajo el punto de vista de sus posiciones relativas, dos hipótesis simples, á saber: rectas que se cortan ó concurrentes, y rectas que no se cortan ó paralelas; y otras compuestas, combinaciones de las anteriores: paralelas cortadas por paralelas, concurrentes cortadas por paralelas, antiparalelas, y *concurrentes cortadas por concurrentes*.

Todos los tratados de geometría elemental contienen las proposiciones relativas á comparacion de ángulos y de segmentos rectilíneos á que dan lugar las hipótesis mencionadas, si se exceptua el caso último que hemos subrayado. En efecto, los teoremas de ángulos, perpendiculares y oblícuas, paralelas, y líneas proporcionales responden á dichas hipótesis; pero ¿qué teoremas responden á la última? ¿qué relaciones de magnitud existen entre los segmentos de rectas concurrentes en un punto cortadas por otras concurrentes?

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Hé aquí descubierto un vacío en la geometría elemental; hé aquí una solucion de continuidad en el estrecho encadenamiento de las teorías geométricas; vacío que se pone de manifiesto por la aplicacion de nuestro plan.

Hallado el vacío era preciso llenarle, reconocida la solucion de continuidad era preciso remediarla, y á ello consagramos desde luego nuestras escasas fuerzas y tenaz perseverancia.

A vuelta de algunos ensayos sobre la mejor manera de plantear concretamente la cuestion, pensamos, por último, que siendo la forma más general del teorema de líneas proporcionales la en que se consideran los segmentos de dos rectas interceptados por tres paralelas, debiamos proponernos como hipótesis de la proposicion buscada *dos rectas cualesquiera divididas en segmentos por tres concurrentes en un punto.*

Presentado así el problema, tuvimos la suerte de descubrir esta interesante propiedad, que llamó vivamente nuestra atencion: *los segmentos de las rectas son proporcionales, con tal que se divida cada uno por la distancia de su extremo al punto en que se reunen las tres concurrentes.*

El oráculo habia contestado: la ciencia recompensaba con pródiga mano nuestros desvelos y solicitud entregándonos uno de sus secretos, y haciéndonos sentir la mas íntima y pura satisfaccion.

Estudiando nuestro teorema bajo todos sus aspectos, luégo comprendimos qué lazos le ligan á las teorías usuales de la geometría: con solo suponer el punto de concurso alejado al infinito, las distancias de los extremos de los segmentos á este punto se igualaban por su infinitud, y suprimiéndolas quedaba subsistente una proporcion simple entre los segmentos de dos rectas interceptados por tres paralelas; luego nuestro teorema comprendia como caso particular el fundamental de las líneas proporcionales.

Nuevas deducciones nos condujeron al teorema de Menelao, relativo á los seis segmentos causados en los lados de un triángulo por una transversal, al de la relacion anarmónica, y á varias propiedades curiosas del cuadrilátero.

Los dos teoremas citados son la base y fundamento de las teorías de transversales, relacion anarmónica, proporcion armónica y division homográfica; luego era natural establecerlas

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

como derivaciones de nuestro principio fundamental, y así lo hicimos, dando de este modo un paso hácia la unidad, toda vez que refundiamos dos órdenes de teoremas, apoyados hasta ahora en proposiciones fundamentales independientes, en una teoría general basada en un teorema único, ligado á las teorías usuales de geometría elemental, por ser generalizacion del de líneas proporcionales.

Tales fueron los primeros frutos de nuestras investigaciones; empero no quedábamos satisfechos por completo: habiamos descubierto y demostrado una verdad, habiamos puesto de relieve su conexion con otras ya conocidas y determinado su lugar en la geometría, veiamos cuán general y fecunda es, y sin embargo nos faltaba algo: presintiamos instintivamente la existencia de otra verdad desconocida, más simple, más primordial, á la qne debiese su existencia la que conociamos.

Y así era en efecto. Si dos segmentos de una transversal interceptados por tres concurrentes y divididos por las distancias de sus extremos al punto de concurso, son proporcionales á los segmentos correspondientes de otra transversal, divididos tambien por las distancias de sus extremos al punto de concurso, esto es debido á que dichas razones compuestas son iguales á la razon simple entre las distancias del orígen de los segmentos á las concurrentes que pasan por los extremos, y como esta razon simple es constante para todos los puntos de una misma concurrente, tambien las razones compuestas deben tener un valor constante.

Desde que conseguimos este resultado no dudamos en dar la prioridad á la proposicion anterior, ni en considerar la primeramente descubierta como un simple corolario de aquella, opinion en que nos confirmamos al examinar las proposiciones análogas de líneas proporcionales, que ofrecen una dependencia semejante, pues si dos segmentos de una transversal interceptados por tres paralelas son proporcionales á los correspondientes de otra transversal cualquiera, esto es debido á que tales razones segmentarias son iguales á la razon entre las distancias constantes de la paralela que pasa por el orígen á las otras dos.

Que este nuevo principio fundamental tiene aplicacion inmediata á la trigonometría, es evidente, desde el momento en que se observa que la razon entre las distancias de un punto tomado en una concurrente á las otras dos no es otra cosa que

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

la razon entre los senos de los ángulos que aquella forma con éstas.

Guiados por esta observacion demostramos, entre otras proposiciones conocidas, que los lados de un triángulo son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos, y descubrimos una fórmula de que nacen simplicísimamente los desarrollos de seno y coseno de $(a \pm b)$.

Terminada en tal punto la primera parte de nuestro estudio, que sólo abraza figuras trazadas en un plano, tratamos de investigar si algunas cuestiones de las desenvueltas tendrian sus correspondientes en las figuras esféricas. y como era natural procuramos ante todo hallar un teorema correlativo del que tan variadas consecuencias nos habia dado en la geometría plana. Le encontramos sin gran dificultad, tan análogo á aquel como habiamos deseado, puesto que no les distinguen otras diferencias que las inherentes al cambio de superficie plana por superficie esférica. Dicho se está que las consecuencias de la nueva proposicion habian de guardar con las de la primera la misma analogía, bastando la simple lectura de los enunciados para dejar, sin más, establecida una série de teoremas relativos á los arcos transversales, relacion anarmónica de cuatro puntos situados en circunferencia máxima ó de cuatro arcos concurrentes en un punto, proporcion armónica y division homográfica.

Enteramente análogas serian las dos partes de este trabajo, si fuera posible la existencia de arcos paralelos de círculo máximo. La consideracion de transversales rectilíneas paralelas á un radio del haz nos ha sido de gran utilidad en la eliminacion de segmentos, que siendo desiguales en el caso general, cuando tienen magnitudes finitas, adquieren valores iguales al suponer uno de sus extremos en el infinito, lo que permite suprimirlos. Mas en una superficie esencialmente limitada como la esférica, á ménos de suponer el radio infinito y entonces volviamos al plano, aquella hipótesis es imposible, lo que dificulta la consideracion de circunstancias particulares.

Algo hemos conseguido, sin embargo, en el indicado sentido, reemplazando las rectas infinitamente grandes y de diferencia finita, que como iguales se suprimen, por los arcos suplementarios, cuyos senos, siendo iguales y del mismo signo, se suprimen tambien. Gracias á esta idea hemos podido cortar dos lados de un triángulo esférico por arcos de círculo máximo de manera

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

que los senos de los segmentos de un lado sean proporcionales á los senos de los segmentos del otro, proposicion evidentemente análoga á la que resulta de considerar un triángulo rectilíneo cortado por una paralela á la base, mucho más demostrando, como lo hacemos, que los arcos que unen los puntos de division con los vértices opuestos de la base se cortan en el que une el medio de ésta con el tercer vértice.

Tal es, en resúmen, el presente trabajo.

No debe mirarse como obra didáctica, sino como estudio iniciado, sin plan fijo, á impulso de nuestras aficiones escudriñadoras, que continuamos guiados y hasta conducidos por los primeros resultados, y en el que hemos hecho punto, no por creer agotada la materia, ni ménos completo y acabado el trabajo, sino más bien porque entrevemos abierto ante nosotros escabroso sendero cuyo término desconocemos, y, antes de lanzarnos en él, juzgamos prudente consultar nuestras fuerzas y ver qué acogida merece á las personas competentes este primer ensayo.

Nos hemos decidido á publicar lo hecho, porque además creemos una obligacion poner en conocimiento de los hombres de ciencia nuestros principios fundamentales, sus íntimas conexiones y más inmediatas consecuencias, despertando quizá al propio tiempo la aficion hácia tan interesantes materias, por la circunstancia de presentarlas con carácter elemental y enlazadas á las teorías comunes de la geometría de Euclides.

Orense, Setiembre de 1880.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

PRIMERA PARTE.

GEOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

1.—Exposicion de los principios fundamentales.

1. Si en una recta indefinida se marcan tres puntos *a*, *b*, *c*, estos determinan tres segmentos *ab*, *ac*, *bc*, dos de los cuales tienen siempre un punto comun: al comparar las longitudes de dos segmentos consideraremos como *orígen* el punto comun; los otros dos puntos serán los *extremos* de los segmentos.

LEMA. *(Fig.* 1.*)*

2. *Si desde el vértice* A *de un triángulo isósceles* ABC *se traza una recta* AD *que encuentre á la base en un punto* D, *los segmentos* DB, DC *de ésta son proporcionales á las distancias del punto* D *á los otros lados.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teniendo presente que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales, se ve que los triángulos rectángulos BED y CFD son semejantes, luego

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DE}{DF},$$

lo que demuestra el lema.

TEOREMA. *(Fig. 2.)*

3. *Cuando tres concurrentes* PA, PB, PC *se cortan por una transversal en tres puntos* a, b, c, *dos segmentos cualesquiera de ésta son proporcionales á las distancias de su orígen comun á las otras dos concurrentes, con tal que cada segmento se divida por la distancia de su extremo al punto de concurso* P.

Sean ba y bc dos cualesquiera de los tres segmentos ab, bc, ac de la transversal, $b\alpha$ y $b\gamma$ las distancias del orígen b á las concurrentes PA y PC. Queremos demostrar la relacion

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b\alpha}{b\gamma}.$$

Tracemos la bisectriz Pd del ángulo APC que forman las concurrentes que pasan por los extremos a y c de los segmentos; por el orígen b tiremos una paralela á la bisectriz Pd, prolongándola hasta que encuentre en a' y c' á las concurrentes PA y PC. El triángulo P$a'c'$ será isósceles, porque el ángulo c' es igual al dPc mitad de APC, y el ángulo en a' es igual al APd mitad tambien de APC; luego [*Lema*]

$$\frac{ba'}{bc'} = \frac{b\alpha}{b\gamma}.$$

Tracemos por c y c' paralelas á PA prolongándolas hasta que

encuentren á bc' y á la transversal abc respectivamente en e y f; los triángulos semejantes baa' y bce, cPa y $cc'f$ darán

$$\frac{ba}{bc}=\frac{aa'}{ce},\ \frac{Pa}{Pc}=\frac{c'f}{cc'},$$

de donde, por division,

$$\frac{ba}{bc}:\frac{Pa}{Pc}=\frac{aa'.cc'}{ce.c'f};$$

pero el triángulo $cc'e$ es isósceles, por ser semejante al $Pc'a'$, luego $cc'=ce$; por tanto el segundo miembro de la igualdad anterior se reduce á

$$\frac{aa'}{c'f}=\frac{ba'}{bc'}=\frac{b\alpha}{b\gamma};$$

luego

$$\frac{ba}{Pa}:\frac{bc}{Pc}=\frac{b\alpha}{b\gamma},$$

igualdad que demuestra el teorema.

La misma demostracion puede aplicarse á los segmentos ab, ac y á los ca, cb.

Nota. En lugar de la relacion $\frac{b\alpha}{b\gamma}$ entre las distancias del orígen de los segmentos á las concurrentes PA y PC, puede ponerse la relacion entre las distancias de otro punto cualquiera de PB á las mismas, porque esta relacion es constante para todos los puntos de una misma concurrente.

Corolario. *(Fig. 3.)*

4. *Si tres concurrentes* PA, PB, PC *se cortan por dos transversales, dos segmentos cualesquiera de la primera transversal son proporcionales á los correspondientes de la segunda, con tal que cada segmento se divida por la distancia de su extremo al punto de concurso* P.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Llamando $\frac{m}{n}$ á la razon de las distancias de un punto cualquiera de PB á PA y PC, tendremos [**3**]

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{m}{n}, \quad \frac{b'a'}{Pa'} : \frac{b'c'}{Pc'} = \frac{m}{n},$$

luego
$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b'a'}{Pa'} : \frac{b'c'}{Pc'}.$$

Del mismo modo se obtienen las relaciones

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{ac}{Pc} = \frac{a'b'}{Pb'} : \frac{a'c'}{Pc'}, \quad \frac{ca}{Pa} : \frac{cb}{Pb} = \frac{c'a'}{Pa'} : \frac{c'b'}{Pb'}.$$

5. El anterior corolario puede demostrarse directamente, y en tal caso el teorema del número **3** pasa á ser corolario.

En efecto: por el orígen b de los segmentos elegidos ba y bc tracemos una paralela $a''c''$ á $a'c'$, y por a y a'' otras dos paralelas á la concurrente PC. Los triángulos semejantes bam, bcc'' y los bna'', bcc'' nos dan

$$\frac{ba}{bc} = \frac{am}{cc''}, \ [1], \qquad \frac{ba''}{bc''} = \frac{a''n}{c''c} \ [2].$$

Los triángulos semejantes Pac, $a''an$ y los $Pa''c''$, $aa''m$ dan

$$\frac{Pa}{Pc} = \frac{a''a}{a''n} \ [3], \qquad \frac{Pa''}{Pc''} = \frac{aa''}{am} \ [4].$$

Dividiendo la igualdad [1] por la [3] y la [2] por la [4] será

$$\frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{am.a''n}{cc''.a''a}, \quad \frac{ba''}{bc''} : \frac{Pa''}{Pc''} = \frac{a''n.am}{c''c.aa''},$$

de donde
$$\frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{ba''}{bc''} : \frac{Pa''}{Pc''},$$

sustituyendo $\frac{ba''}{bc''}$ por su igual $\frac{b'a'}{b'c'}$, y $\frac{Pa''}{Pc''}$ por $\frac{Pa'}{Pc'}$ será

$$\frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{Pa'}{Pc'}.$$

ó por último $$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b'a'}{Pa'} : \frac{b'c'}{Pc'}.$$

Para deducir de este principio el del número **3**, prolongamos $b\alpha$ hasta c', y será *(Fig. 4.)*

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b\alpha}{P\alpha} : \frac{bc'}{Pc'} = b\alpha : \frac{P\alpha . bc'}{Pc'};$$

los triángulos semejantes $c'P\alpha$ y $c'b\gamma$ nos dan

$$\frac{P\alpha}{b\gamma} = \frac{Pc'}{bc'}, \text{ de donde } b\gamma = \frac{P\alpha . bc'}{Pc'};$$

sustituyendo la fraccion $\frac{P\alpha . bc'}{Pc'}$ por su igual $b\gamma$, la primera igualdad será

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b\alpha}{b\gamma}.$$

II.—Conexion entre los principios fundamentales y los teoremas de líneas proporcionales.

6. De dos modos se exponen en los tratados de geometría los fundamentos de las líneas proporcionales: unos autores apoyan la teoría en que toda paralela á un lado de un triángulo divide los otros dos en partes proporcionales; otros emplean, en lugar de triángulo, un trapecio cortado por una paralela á las bases.

Ambos enunciados son igualmente restrictivos, porque la

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

proporcionalidad no sólo tiene lugar entre los segmentos aditivos producidos por una paralela interior, sino que tambien existe entre los sustractivos causados por una exterior, y en fin son proporcionales dos segmentos cualesquiera de una transversal á los correspondientes de la otra, cuando los segmentos están determinados por tres paralelas ó por dos paralelas y el punto de concurso de las transversales.

El defecto apuntado suele remediarse por medio de corolarios, lo que complica innecesariamente la cuestion, sin que áun así lleguen á tratarse todos los casos posibles.

Creemos que, para dar á la proposicion que noso cupa toda su generalidad, debe prescindirse de la idea de triángulo ó trapecio, y decir:

Cuando tres rectas paralelas se cortan por dos transversales, dos segmentos cualesquiera de la primera transversal son proporcionales á los correspondientes de la segunda.

Este enunciado comprende todos los casos. En efecto, trazando dos transversales *abc*, *a'b'c'* (*Fig.* 5) podrá suceder que se encuentren en una paralela extrema A, núm. 1, en la intermedia B, núm. 2, fuera de las paralelas, núm. 3, ó entre dos paralelas B y C, núm. 4, y tendremos en cualquiera de los cuatro casos que dos segmentos *ab* y *ac*, *ba* y *bc* ó *ca* y *cb* de la transversal *abc* son proporcionales á los correspondientes *a'b'* y *a'c'*, *b'a'* y *b'c'*, *c'a'* y *c'b'*.

7. Justificada la conveniencia de adoptar el enunciado anterior, veremos ahora la analogía que guarda con el principio fundamental del núm. **4**.

En ambas proposiciones se establecen relaciones de magnitud entre los segmentos de dos transversales producidos por tres concurrentes ó por tres paralelas, esto es, por tres concurrentes en el infinito: la cuestion propuesta es, pues, la misma, general en el primer caso, porque la posicion del punto de concurso es indeterminada, particular en el segundo; luego debe esperarse en buena lógica que nuestro principio fundamental del núm. **4** comprenda el de líneas proporcionales enunciado en el núm. **6**.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Y así sucede, en efecto. Supongamos qne el punto de concurso P se aleje al infinito, ó lo que es igual que las concurrentes se conviertan en paralelas *(Fig. 6)*, y entonces la relacion [1]

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b'a'}{Pa'} : \frac{b'c'}{Pc'}$$

se convertirá en

$$ba : bc = b'a' : b'c'$$

por la supresion de los denominadores iguales P*a* y P*c*, P*a'* y P*c'*.[1]

Haciendo en el principio fundamental del núm. 2 la misma hipótesis, P en el infinito, la relacion

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b\alpha}{b\gamma}$$

se convierte en

$$\frac{ba}{bc} = \frac{b\alpha}{b\gamma},$$

toda vez que P*a*=P*c*. En este supuesto, *ba* y *bc* son segmentos de una transversal interceptados por tres rectas paralelas, y

---

1 Cuando el punto P *(Fig. 3)* se halle en el infinito, las rectas P*a*, P*c* serán infinitamente grandes; su diferencia en cambio será finita, porque los extremos *a* y *c* están á distancia finita de los demás puntos de la figura. La diferencia finita entre dos cantidades infinitamente grandes es nula relativamente á estas cantidades, que por lo tanto pueden considerarse iguales.

Esto mismo lo confirman las siguientes consideraciones: si trazamos *a'm* paralela á *ac (Fig. 7)* será $\frac{Pa}{Pc} = \frac{aa'}{cm}$; por mucho que se aleje el punto P esta proporcion siempre tendrá lugar, luego

$$lím.\ de \frac{Pa}{Pc} = lím.\ de \frac{aa'}{cm};$$

pero en el límite, es decir, cuando P*a* y P*c* sean paralelas, la figura *aca'm* será un paralelógramo, y por tanto

$$lím.\ de \frac{aa'}{cm} = 1, \text{ luego } lím.\ de \frac{Pa}{Pc} = 1, \text{ ó sea } Pa = Pc.$$

Lo mismo se demuestra que P*a* = P*a'* partiendo de la igualdad

$$\frac{Pa}{Pa'} = \frac{ac}{a'm}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$b\alpha$, $b\gamma$ las distancias entre las paralelas correspondientes; luego el principio que nos ocupa es una generalizacion del siguiente:

Dos segmentos cualesquiera de una transversal interceptados por tres paralelas son proporcionales á las correspondientes distancias entre éstas.

Esta proposicion, demostrándola directamente, pudiera y acaso debiera adoptarse como base de las líneas proporcionales, por ser muy expresiva.

Queda, pues, sentado que los dos principios relativos á rectas concurrentes cortadas por transversales, expuestos en los números **3** y **4**, son generalizaciones de los en que se funda la teoría de líneas proporcionales. Al pasar del caso general, punto de concurso cualquiera, al particular, punto de concurso en el infinito, los denominadores de los segmentos, que son las distancias de los extremos respectivos al punto de concurso, desaparecen; deben, por lo tanto, mirarse como *correcciones debidas á la falta de paralelismo* de las concurrentes en P.

8. No carece de interés observar que al paso que desaparece el paralelismo, las igualdades relativas á los segmentos se complican: la interseccion de un sistema de paralelas por otro tambien de paralelas origina la *igualdad de segmentos;* conviértese uno de los sistemas en haz de rectas concurrentes, y la igualdad de segmentos se convierte en *igualdad de razones;* cámbiase tambien el segundo sistema de paralelas en haz de rectas concurrentes, y á la igualdad de razones de líneas sucede la *igualdad de razones de razones.*

9. Todavía vamos á considerar el principio fundamental del núm. **3** bajo otro punto de vista, tan interesante como el anterior.

La relacion
$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b\alpha}{b\gamma}$$
puede escribirse en la forma
$$\frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{b\alpha}{b\gamma},$$
y traducirse al lenguaje vulgar del modo siguiente:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si desde el vértice P *de un triángulo* Pac (Fig. 2) *se traza una recta* Pb *que encuentre al lado opuesto, la relacion* $\frac{ba}{bc}$ *de los segmentos de éste y la* $\frac{Pa}{Pc}$ *de los lados del ángulo son proporcionales á las distancias del pié de dicha recta á los mismos lados.*

Este teorema es una generalizacion del que se enuncia en los tratados de geometría elemental diciendo:

La bisectriz de un ángulo interno ó externo de un triángulo, divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales á los lados del ángulo.

En efecto: trazando la bisectriz AD *(Fig. 1)* y las distancias DE y DF del punto D á los lados AB y AC, tenemos

$$\frac{DB}{DC} : \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF};$$

pero el punto D perteneciente á la bisectriz del ángulo BAC ó del externo B'AC equidista de los lados del ángulo, y por tanto $\frac{DE}{DF} = 1$; luego

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Como al demostrar el teorema del núm. **3** no nos hemos servido de este último, podemos considerarle como corolario de aquel.

III.—Grado de generalidad de los principios fundamentales.

10. El teorema del número **3** se verifica áun en el caso particular de que la transversal sea paralela á una de las concurrentes. En tal supuesto, alguno de los puntos de interseccion *a, b, c* se aleja al infinito, y las distancias á los otros puntos de la figura deben considerarse iguales, siempre que su diferencia sea finita.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Suponiendo, para fijar las ideas, que la transversal sea paralela á la concurrente PC, propongámonos demostrar el teorema para los segmentos cuyo orígen es c, es decir el punto en el infinito.

La relacion del caso general

$$\frac{ca}{Pa} : \frac{cb}{Pb} = \frac{c\alpha}{c\beta},$$

llamando $c\alpha$ y $c\beta$ á las perpendiculares bajadas desde el punto en el infinito á las concurrentes PA y PB, se convierte ahora en

$$\frac{Pb}{Pa} = \frac{c\alpha}{c\beta},$$

toda vez que ca y cb, magnitudes infinitas cuya diferencia ab es finita, son iguales; no diremos lo mismo de $c\alpha$ y $c\beta$, magnitudes tambien infinitas, porque no consta que su diferencia sea finita, y además porque sabemos que las distancias de los diferentes puntos de PC á las rectas PA y PB guardan una razon constante, y por lo tanto $\frac{c\alpha}{c\beta}$ no es, en general, igual á la unidad, sino á la relacion $\frac{c'\alpha'}{c'\beta'}$ de un punto cualquiera c' (*Fig.* 8) de PC á PA y PB.

Puesto que la eleccion de punto en la concurrente PC es arbitraria, damos la preferencia al c', interseccion de PC con una paralela tirada por b á la bisectriz Pd del ángulo APB.

Debemos, por consiguiente, demostrar la igualdad

$$\frac{Pb}{Pa} = \frac{c'\alpha'}{c'\beta'}.$$

El triángulo Pba' es isósceles, luego

$$\frac{c'a'}{c'b} = \frac{c'\alpha'}{c'\beta'} \quad \text{y} \quad Pb = Pa',$$

luego

$$\frac{Pb}{Pa} = \frac{Pa'}{Pa} = \frac{c'a'}{c'b} = \frac{c'\alpha'}{c'\beta'}:$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si queremos demostrar el teorema para los segmentos cuyo origen comun es b, la relacion del caso general será

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b\alpha}{b\gamma},$$

y la del particular que consideramos

$$\frac{ba}{Pa} = \frac{b\alpha}{b\gamma},$$

puesto que $bc = Pc$.

Para demostrarla, trazaremos la bisectriz Pd del ángulo APC *(Fig. 9)*, y por b una paralela, que encuentra en a' y c' á PA y PC. El triángulo $Pa'c'$ es isósceles, así como tambien su semejante baa',

luego $$\frac{ba'}{bc'} = \frac{b\alpha}{b\gamma} \text{ y } ba = aa',$$

por consiguiente $$\frac{ba}{Pa} = \frac{aa'}{Pa} = \frac{ba'}{bc'} = \frac{b\alpha}{b\gamma}.$$

Análoga demostracion emplearíamos si quisiéramos considerar los segmentos que tienen su orígen en a.

II. Siendo cierto el teorema en el caso particular que acabamos de tratar, igualmente lo será el corolario; por manera que si $a'b'$ *(Fig. 10)* es una transversal paralela á la concurrente PC, y abc una transversal cualquiera, será

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{ac}{Pc} = \frac{a'b'}{Pb'}, \quad \frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b'a'}{Pa'}, \quad \frac{ca}{Pa} : \frac{cb}{Pb} = \frac{Pb'}{Pa'}.$$

Si la transversal abc se supone tambien paralela al radio PC *(Fig. 11)*, las dos primeras igualdades anteriores se convierten en

$$\frac{ab}{Pb} = \frac{a'b'}{Pb'}, \quad \frac{ba}{Pa} = \frac{b'a'}{Pa'},$$

es decir: *Las partes de dos rectas paralelas interceptadas por los lados de un ángulo, son proporcionales á las distancias de sus extremos de un mismo lado al vértice.*

Tambien es cierto el corolario cuando las concurrentes se suponen indefinidas en sus dos direcciones; porque la demostracion del caso general es aplicable; asi pues, tenemos *(Fig.* 12)

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{ac}{Pc} = \frac{a'b'}{Pb'} : \frac{a'c'}{Pc'},$$

$$\frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} = \frac{b'a'}{Pa'} : \frac{b'c'}{Pc'},$$

$$\frac{ca}{Pa} : \frac{cb}{Pb} = \frac{c'a'}{Pa'} = \frac{c'b'}{Pb'}.$$

Resulta de la anterior discusion que los principios fundamentales son ciertos en todos los casos.

IV.—Determinacion de la posicion relativa de tres rectas concurrentes.

12. Las rectas PA, PB, PC, consideradas dos á dos, forman tres ángulos APB, APC, BPC, cada uno de los cuales depende de los otros dos.

Si dos haces de tres rectas tienen sus ángulos respectivamente iguales, las relaciones *compuestas*

$$\frac{ab}{Pc} : \frac{ac}{Pc}, \quad \frac{ba}{Pa} : \frac{bc}{Pc} \text{ etc,}$$

tendrán valores iguales en los dos haces, porque estos son superponibles.

Otro tanto puede decirse de los haces cuyos ángulos sean unos iguales y otros suplementarios, porque los radios de un haz pueden sustituirse por sus prolongaciones, lo que equivale á cambiar algunos ángulos por los respectivos suplementos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

De esta observacion se deduce:

1.° *Si los radios de dos ó más haces inscriptos en una circunferencia pasan por tres puntos fijos de esta curva, las relaciones compuestas de estos haces son iguales.*

Los tres ángulos son respectivamente iguales, por comprender entre sus lados los mismos arcos, ó bien unos serán iguales, por dicha razon, y los otros suplementarios, por comprender entre sus lados arcos cuya suma es igual á la circunferencia.

2.° *Uniendo el centro de un círculo á los puntos de interseccion de tres tangentes fijas con una tangente móvil, se forman haces cuyas relaciones compuestas son respectivamente iguales.*

En efecto: á todo haz central, de las condiciones mencionadas, corresponde otro inscripto, cuyo centro está en el punto de contacto de la tangente móvil, y cuyos radios pasan por los puntos de contacto de las tres tangentes fijas; estos dos haces, central é inscripto, se componen de radios respectivamente perpendiculares, luego los ángulos son iguales ó suplementarios, y como las razones compuestas del inscripto son constantes, tambien lo serán las del central.

13. Siempre que tengamos un haz de tres concurrentes en P cortado por una transversal, las razones compuestas entre las distancias de los puntos a, b, c, P podrán expresarse mediante la relacion simple de las perpendiculares trazadas desde un punto de una concurrente á las otras dos, ó de dos segmentos determinados por una transversal paralela á una concurrente. Estas razones simples son constantes para unos mismos ángulos, y varian evidentemente con éstos.

Tratemos ahora, á fin de completar este estudio, de resolver la cuestion siguiente:

Conociendo dos relaciones compuestas de un haz de tres rectas concurrentes cortado por una transversal, determinar los ángulos que forman las concurrentes.

Supongamos conocidas las relaciones compuestas *(Fig.* 10*)*

$$\frac{ab}{ac} : \frac{Pb}{Pc} = \frac{m}{n}, \quad \frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{p}{q},$$

en las que a y b son los orígenes de los segmentos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Haciendo que el tercer punto c se aleje al infinito, ó lo que es igual, trazando $a'b'$ paralela á Pc, será

$$\frac{ab}{ac} : \frac{Pb}{Pc} = \frac{a'b'}{Pb'} = \frac{m}{n}, \quad \frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{b'a'}{Pa'} = \frac{p}{q} \quad [a];$$

luego los lados del triángulo P$a'b'$ deben satisfacer á las condiciones

$$\frac{a'b'}{Pb'} = \frac{m}{n}, \quad \frac{b'a'}{Pa'} = \frac{p}{q},$$

y es claro que construyendo dicho triángulo, ó bien otro semejante, y trazando PC paralela al lado $a'b'$ estará resuelta la cuestion, porque en el haz que formen los lados Pa' y Pb' con la paralela PC se verificarán las relaciones [a].

Ahora bien, las condiciones indicadas se satisfacen haciendo $a'b' = m$, P$b' = n$, y determinando Pa' por la proporcion

$$\frac{m}{Pa'} = \frac{p}{q},$$

es decir construyendo una cuarta proporcional á p, q y m.

Como consecuencia del anterior análisis, tenemos la siguiente regla: constrúyase un triángulo P$a'b'$, cuyos lados sean m, n y una cuarta proporcional k á las magnitudes conocidas p, q y m, pudiendo tambien construirse con otras tres rectas proporcionales á m, n y k; trácese por el vértice P una paralela al lado opuesto $a'b'$: las tres rectas que parten de P forman el haz que se pedia.

14. *Observacion.* Si conocemos una sola relacion compuesta, por ejemplo

$$\frac{ab}{ac} : \frac{Pb}{Pc} = \frac{m}{n},$$

el problema es indeterminado, pues de la igualdad anterior se deduce únicamente la condicion

$$\frac{a'b'}{Pb'} = \frac{m}{n},$$

pudiendo tener Pa' una longitud cualquiera.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si se dan tres relaciones, el problema en general será imposible, porque cada una de las tres relaciones principales

$$\frac{ab}{ac} : \frac{Pb}{Pc}, \quad \frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc}, \quad \frac{ca}{cb} : \frac{Pa}{Pb},$$

de un haz de tres rectas cortado por una transversal se deduce de las otras dos, como es fácil comprobar; por manera que asignándolas valores arbitrarios resultarán incompatibles en la mayoría de casos.

Luego *para determinar las posiciones relativas de tres rectas concurrentes, se necesita y basta conocer dos de las tres relaciones compuestas que originan dichas rectas cuando se cortan por una transversal.*

V.—Notacion.

15. Las razones compuestas á que dan lugar las anteriores proposiciones, y otras de índole análoga que trataremos en breve, pueden expresarse por medio de una notacion sencilla, que facilitará nuestras investigaciones, la cual consiste en escribir dentro de un paréntesis las letras de los tres puntos de interseccion de la transversal con las concurrentes y la del punto de concurso, unas á continuacion de otras, en esta forma:

$$(abcP).$$

Esta expresion denota que la razon de las distancias del tercer punto c á los dos primeros debe dividirse por la razon de las distancias del cuarto punto P á los mismos a y b; por consiguiente

$$(abcP) = \frac{ca}{cb} : \frac{Pa}{Pb}.$$

Mediante esta notacion, las expresiones del principio [4], equivalentes á

$$\frac{ab}{ac} : \frac{Pb}{Pc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{Pb'}{Pc'}, \quad \frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{Pa'}{Pc'}, \quad \frac{ca}{cb} : \frac{Pa}{Pb} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{Pa'}{Pb'},$$

se escribirán en la forma

$$(bca\mathrm{P}) = (b'c'a'\mathrm{P}),\ (acb\mathrm{P}) = a'c'b'\mathrm{P}),\ (abc\mathrm{P}) = (a'b'c'\mathrm{P}),$$

ó más sencillo $(bca\mathrm{P}) = constante$, $(acb\mathrm{P}) = constante$, etc.

16. *Una razon compuesta no se altera permutando dos de sus letras, con tal que se permuten tambien las otras dos.*

Decimos que $(abc\mathrm{P}) = (c\mathrm{P}ab)$,

donde se han permutado a con c y b con P.

En efecto: $(abc\mathrm{P}) = \frac{ca}{cb} : \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{P}b} = \frac{ca.\mathrm{P}b}{cb.\mathrm{P}a}$,

$$(c\mathrm{P}ab) = \frac{ac}{a\mathrm{P}} : \frac{bc}{b\mathrm{P}} = \frac{ac.b\mathrm{P}}{a\mathrm{P}.bc},$$

lo que demuestra la proposicion.

17. *Permutando las dos últimas ó las dos primeras letras de una razon compuesta, la razon se invierte.*

En efecto: $(abc\mathrm{P}) = \frac{ca}{cb} : \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{P}b}$, $(ab\mathrm{P}c) = \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{P}b} : \frac{ca}{cb}$;

$$(bac\mathrm{P}) = \frac{cb}{ca} : \frac{\mathrm{P}b}{\mathrm{P}a} = \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{P}b} : \frac{ca}{cb}.$$

18. Cada una de las razones compuestas

$$(bca\mathrm{P}),\ (cba\mathrm{P}),\ (acb\mathrm{P}),\ (cab\mathrm{P}),\ (abc\mathrm{P}),\ (bac\mathrm{P}) \quad [a]$$

que resultan aplicando los principios fundamentales, da lugar á otras tres equivalentes, que se obtienen permutando en aquellas dos letras cualesquiera y á la vez las otras dos. Así la razon $(abc\mathrm{P})$ produce las equivalentes

$$(ba\mathrm{P}c),\ (c\mathrm{P}ab),\ (\mathrm{P}cba);$$

lo mismo puede decirse de las demás; luego el número total de razones compuestas que se pueden formar con los segmentos

que unen los puntos a, b, c, P es 24, como debia suceder, puesto que con cuatro letras se forman 24 permutaciones.

De estas 24 razones sólo son distintas las seis que hemos señalado con [a]. Tres de ellas se obtienen aplicando los principios fundamentales sucesivamente á los segmentos que parten de a, de b y de c; otras tres invirtiendo las anteriores; y cada una de las seis produce otras tres equivalentes á ella, permutando dos letras y á la vez las otras dos de todas las maneras posibles.

Es claro que todas son independientes de la direccion de la transversal.

19. Ahora podemos enunciar los dos principios fundamentales del modo siguiente:

Si en cualquiera de las razones compuestas de un haz de tres rectas cortado por una transversal, hacemos que el punto P *ocupe el último lugar* [1], *la razon es igual al cociente de las distancias del tercer punto á las concurrentes que pasan por los dos primeros. Todas las razones son constantes, cualquiera que sea la transversal.*

Así, $$(cPab) = (abcP) = \frac{c\alpha}{c\beta} = constante.$$

$$(Pacb) = (bcaP) = \frac{a\beta}{a\gamma} = constante.$$

1. Basta permutar la letra P con la última y á la vez las otras dos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

CAPÍTULO SEGUNDO.

TEORÍAS DE GEOMETRÍA MODERNA QUE SE DEDUCEN INMEDIATAMENTE DE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

I.—Introduccion.

20. Cuando se consideran en una recta indefinida uno ó más segmentos de la misma, puede tenerse en cuenta, además de la *longitud* de cada segmento, su *direccion*, á partir de un extremo considerado como *orígen*. Por manera que un segmento estará completamente determinado si conocemos el orígen ó punto de partida, el sentido en que debe llevarse sobre la recta, y su longitud.

La oposicion en el sentido de los segmentos se expresa por los signos contrarios *más* y *ménos:* todos los segmentos dirigidos en un mismo sentido convenido se consideran *positivos*, y todos los segmentos dirigidos en el sentido contrario se consideran *negativos*.

Si convenimos en considerar como positivas las longitudes contadas de izquierda á derecha, las que se cuenten de derecha á izquierda serán negativas. El segmento *ab* (*Fig.* 13) es positivo, el *ba* es negativo, y como en longitud son iguales, tenemos

$$ab = -ba \quad ó \quad ab + ba = 0.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si en una recta indefinida XY consideramos dos puntos fijos a y b, y otro punto cualquiera m, las distancias de m á a y b tendrán el mismo signo ó signos contrarios, segun que m esté en la prolongacion de ab ó que esté entre a y b; la relacion de las distancias será, pues, positiva en el primer caso y negativa en el segundo. Así

$$\frac{ma}{mb} \text{ y } \frac{m'a}{m'b} \text{ positivas, } \frac{m''a}{m''b} \text{ negativa.}$$

21. *Si en una recta indefinida* XY (Fig. 14) *marcamos dos puntos fijos* a *y* b, *existe siempre un punto y sólo uno en la recta, tal que la razon de sus distancias á los puntos fijos es igual en magnitud y en signo á una relacion dada* $\frac{m}{n}$. *Dicho punto se hallará en la prolongacion de* ab *si* $\frac{m}{n}$ *es positiva, y entre* a *y* b *si* $\frac{m}{n}$ *es negativa.*

Trazo por el punto a una recta que forme con la ab un ángulo cualquiera; tomo en dicha recta, á partir del punto a, una longitud $am = m$; trazo por b una paralela á am igual en longitud á n, hácia el mismo lado que am con respecto á XY, si la relacion dada es positiva, y hácia lado distinto, si es negativa: sea bn en el primer caso y bn' en el segundo; uniendo m con n ó con n' la recta de union encuentra á XY en d ó en c, y será

$$\frac{da}{db} = \frac{am}{bn} = \frac{m}{n}, \quad \frac{ca}{cb} = \frac{am}{bn'} = -\frac{m}{n}.$$

Si $\frac{m}{n}$ es mayor que la unidad, será $da > db$, $ca > cb$; luego los puntos d y c caerán respectivamente á la derecha de b y de o, medio de ab.

Si $\frac{m}{n}$ es menor que la unidad, será $da < db$, $ca < cb$; luego los puntos d y c caerán respectivamente á la izquierda de a y o.

Si $\frac{m}{n}$ es igual á la unidad, será $ca = -cb$, y el punto c caerá en el medio de ab. En cuanto al d, tendremos

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\frac{da}{db} = \frac{db+ba}{db} = 1 + \frac{ba}{db} = 1,$$

luego $\frac{ba}{bd} = 0$, $bd = \infty$; por consiguiente el punto d se aleja al infinito, lo que por otra parte es evidente, toda vez que, en la hipótesis actual, siendo am y bn iguales y paralelas, la figura $amnb$ es un paralelógramo, y por lo tanto mn paralela á XY.

Por último, si la relacion $\frac{m}{n}$ vale cero ó infinito será $da = 0$, $ca = 0$ en el primer caso, $db = 0$, $cb = 0$ en el segundo; luego d y c se confunden con a ó con b.

Los puntos d y c son únicos, pues si d se mueve acercándose ó alejándose de b, los términos de la fraccion $\frac{da}{db}$ disminuyen ó aumentan en cantidades iguales, luego la fraccion varia constantemente en el mismo sentido, pasando por valores todos mayores ó todos menores que $\frac{m}{n}$; y si c se mueve acercándose al punto a ó alejándose, el numerador de $\frac{ca}{cb}$ disminuye ó aumenta y el denominador varia en sentido contrario, adquiriendo la fraccion valores sucesivos todos menores ó todos mayores que $\frac{m}{n}$.

Análogo razonamiento se aplica si la relacion $\frac{m}{n}$ es menor que uno, y por lo tanto el punto d está á la izquierda de a.

II.—Transversales.

Teorema. (*Fig.* 15).

22. *Si dos concurrentes en* O *se cortan por varias transversales que parten de un punto* P, *los segmentos de las concurrentes, cuyos orígenes comunes son las intersecciones con una misma transversal, son proporcionales, con tal que cada segmento se divida por la distancia de su extremo al punto* P.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sean a y a' los orígenes comunes á los segmentos de las concurrentes en O. Tenemos [1]

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{ac}{Pc} = \frac{a'b'}{Pb'} : \frac{a'c'}{Pc'},$$

$$\frac{ac}{Pc} : \frac{ad}{Pd} = \frac{a'c'}{Pc'} : \frac{a'd'}{Pd'}$$

. . . . . .

ó sea

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{a'b'}{Pb'} = \frac{ac}{Pc} : \frac{a'c'}{Pc'},$$

$$\frac{ac}{Pc} : \frac{a'c'}{Pc'} = \frac{ad}{Pd} : \frac{a'd'}{Pd'}$$

. . . . . .

luego

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{a'b'}{Pb'} = \frac{ac}{Pc} : \frac{a'c'}{Pc'} = \frac{ad}{Pd} : \frac{a'd'}{Pd'} \ldots . [a].$$

23. Escolio 1.° En lugar de dos puntos distintos en línea recta con P, puede tomarse para orígen comun de todos los segmentos el punto de concurso O, pues la demostracion seria semejante, por consiguiente

$$\frac{Oa}{Pa} : \frac{Oa'}{Pa'} = \frac{Ob}{Pb} : \frac{Ob'}{Pb'} = \frac{Oc}{Pc} : \frac{Oc'}{Pc'} \ldots . [b].$$

24. Escolio 2.° Si P se aleja al infinito, es decir, si todas las transversales son paralelas entre sí, tendremos

$$Pa = Pa', \quad Pb = Pb', \quad Pc = Pc' \text{ etc.}$$

luego las séries [a] y [b] se reducen, en este caso particular, á

$$ab : a'b' = ac : a'c' = ad : a'd' \ldots . \quad [a']$$

$$Oa : Oa' = Ob : Ob' = Oc : Oc' \ldots . \quad [b'].$$

Donde vemos que este teorema es una generalizacion del siguiente:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Una série de paralelas divide á dos rectas cualesquiera en partes proporcionales. Ahora podemos decir: una série de concurrentes divide á dos rectas cualesquiera en partes porporcionales, con tal que se haga en éstas la correccion debida á la falta de paralelismo, y que se cuenten desde orígenes comunes en línea recta con el punto de concurso. Esta condicion aquí necesaria, no lo es en las líneas proporcionales.

Si las concurrentes en O se convierten en paralelas, el punto O se aleja al infinito, y será $Oa = Oa'$, $Ob = Ob'$, $Oc = Oc'$ etc.; por consiguiente la série [b] se convierte en

$$Pa' : Pa = Pb' : Pb = Pc' : Pc \ldots,$$

que traducida al lenguaje vulgar significa:

Dos paralelas dividen á varias concurrentes en partes proporcionales.

En la misma hipótesis, la série [a], escrita en la forma

$$\frac{ab}{a'b'} : \frac{Pb}{Pb'} = \frac{ac}{a'c'} : \frac{Pc}{Pc'} = \frac{ad}{a'd'} : \frac{Pd}{Pd'} \ldots,$$

se convierte, por ser iguales las segundas razones, en

$$ab : a'b' = ac : a'c' = ad : a'd' \ldots,$$

lo que nos dice:

Dos paralelas que encuentran á varias concurrentes quedan divididas por éstas en partes proporcionales.

25. Si entre los extremos de una recta limitada ab se marca un punto c, queda la recta dividida en dos segmentos, llamados *aditivos* porque $ac + cb = ab$. Por extension, si en la prolongacion de ab se marca un punto c, se dice que este punto divide á la recta ab en dos segmentos *sustractivos*, porque $ca - cb = ab$. En ambos casos se considera el punto c como orígen comun á los dos segmentos, y al cociente de éstos le llamaremos *razon segmentaria* de la recta limitida ab.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema.

26. *Si dos lados de un triángulo se cortan por una transversal no paralela al tercer lado, los segmentos de los primeros son proporcionales, siempre que se haga en cada uno la correccion debida á la falta de paralelismo.*

Sea ABC (*Fig.* 16) el triángulo cortado por la transversal *abc*.

Imaginando una recta *a*A, y considerando las tres concurrentes en *a*, *a*A, *ac*, *a*B cortadas por las transversales AB y AC, será [**4**]

$$\frac{cA}{aA} : \frac{cB}{aB} = \frac{bA}{aA} : \frac{bC}{aC}.$$

Si en lugar de los segmentos de cada lado, tomamos los lados enteros AB, AC y dos segmentos correspondientes, tambien se verifica el teorema. Así

$$\frac{AB}{aB} : \frac{Ac}{ac} = \frac{AC}{aC} : \frac{Ab}{ab},$$

$$\frac{BA}{aA} : \frac{Bc}{ac} = \frac{CA}{aA} : \frac{Cb}{ab}.$$

En estas tres igualdades, leyendo solamente los numeradores, se ven las proporciones que tienen lugar entre los segmentos de dos lados de un triángulo ABC cortado por una paralela *bc* al tercer lado; los denominadores desaparecen cuando suponemos *a* en el infinito.

27. Escolio. La segunda proporcion

$$\frac{AB}{aB} : \frac{Ac}{ac} = \frac{AC}{aC} : \frac{Ab}{ab},$$

puede escribirse en la forma

$$\frac{AB}{Ac} : \frac{AC}{Ab} = \frac{aB}{aC} : \frac{ac}{ab}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Considerando la figura como un cuadrilátero BC*bc*, cuyos lados opuestos se han prolongado hasta su encuentro en A y *a*, la expresion última nos dice:

Prolongando los lados opuestos de un cuadrilátero hasta su encuentro, y considerando los segmentos que determinan los puntos de concurso, las razones segmentarias de dos lados opuestos son proporcionales á las razones segmentarias de los otros dos. [1]

28 Todavía puede escribirse la última expresion en otra forma, que no carece de interés, á saber:

$$AB.\ ac.\ Ab.\ aC = Ac.\ ab.\ AC.\ aB,$$

ó sea, en términos vulgares,

Prolongando los lados opuestos de un cuadrilátero hasta que se encuentren, y considerando los segmentos que en cada lado determinan los puntos de concurso, el producto de cuatro segmentos, sin segundo extremo comun, pertenecientes á distintos lados del cuadrilátero, es igual al producto de los otros cuatro.

Teorema. (*Fig.* 17.)

29. *Si desde el punto de encuentro* P *de dos lados opuestos de un cuadrilátero* ABCD *se traza una transversal que corte á los otros dos lados, los segmentos de estos serán proporcionales, con tal que se haga en cada uno la correccion debida á la falta de paralelismo.*

Tenemos en efecto [4],

$$\frac{aB}{PB} : \frac{aA}{PA} = \frac{cC}{PC} : \frac{cD}{PD}.$$

---

1 Al escribir la proporcion debe cuidarse: 1.º de tomar las razones segmentarias todas mayores ó todas menores que la unidad; 2.º de poner en ambas razones compuestas para primer término la razon segmentaria del lado más lejano al punto de concurso opuesto, ó en ambas la del lado más próximo.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si en lugar de los segmentos de los lados AB y CD tomamos los lados enteros y dos segmentos correspondientes, se verifica tambien el teorema; así

$$\frac{AB}{PB} : \frac{Aa}{Pa} = \frac{DC}{PC} : \frac{Dc}{Pc},$$

$$\frac{BA}{PA} : \frac{Ba}{Pa} = \frac{CD}{PD} : \frac{Cc}{Pc}.$$

Leyendo los numeradores de las tres igualdades se ven las proporciones á que da lugar un trapecio cuando se corta por una paralela á las bases. El trapecio se obtiene suponiendo P en el infinito; en tal caso los denominadores desaparecen.

30. Escolio. La primera igualdad del número anterior puede escribirse así

$$\frac{aB}{aA} : \frac{cC}{cD} = \frac{PB}{PC} : \frac{PA}{PD}.$$

Considerando los segmentos que los puntos *a* y *c* determinan en AB y DC, y los que determina P en AD y BC, podemos decir:

Si desde el punto de concurso de dos lados opuestos de un cuadrilátero se traza una transversal que corte á los otros dos lados, las razones segmentarias de dos lados opuestos son proporcionales á las razones segmentarias de los otros dos. [1]

31. La última expresion equivale á

$$aB.\ PC.\ cD.\ PA = aA.\ PB.\ cC.\ PD,$$

es decir:

---

1 La regla más fácil para escribir la proporcion consiste en aplicar la de la nota del número 27, sustituyendo el punto de concurso de los lados AB y DC, orígen comun de los segmentos, por los orígenes respectivos *a* y *c* del teorema actual.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trazando desde el punto de concurso de dos lados opuestos de un cuadrilátero una transversal que corte á los otros dos lados, y considerando los segmentos que determinan el punto de concurso y los de interseccion, el producto de cuatro segmentos sin extremidad comun, pertenecientes á distintos lados del cuadrilátero, es igual al producto de los otros cuatro.

TEOREMA. *(Fig. 18).*

32. *Si desde cada punto de concurso de los lados opuestos de un cuadrilátero* ABCD *se traza una transversal que corte á los otros dos lados, las razones segmentarias de dos lados opuestos son proporcionales á las razones segmentarias de los otros dos.*

Considerando las tres concurrentes en P cortadas por AB y CD, y despues las tres concurrentes en Q cortadas por BC y AD, tenemos [**4**]

$$\frac{aB}{aA} : \frac{cC}{cD} = \frac{PB}{PA} : \frac{PC}{PD},$$

$$\frac{bB}{bC} : \frac{dA}{dD} = \frac{QB}{QC} : \frac{QA}{QD}.$$

Considerando ahora las tres concurrentes en Q, QB, QC, QP, cortadas por PB y PA, es fácil ver [**4**] que los segundos miembros de las igualdades anteriores son iguales; luego

$$\frac{aB}{aA} : \frac{cC}{cD} = \frac{bB}{bC} : \frac{dA}{dD}.$$ [1]

33. La igualdad anterior equivale á

$$aB.\ bC.\ cD.\ dA. = aA.\ bB.\ cC.\ dD,$$

esto es:

---

1 Para escribir esta proporcion sígase la regla de la nota del número 27, sustituyendo el orígen Q por *a* y *c*, y el orígen P por *b* y *d*.

Si desde cada punto de concurso de los lados opuestos de un cuadrilátero se traza una transversal que corte á los otros dos lados, éstos quedan divididos en ocho segmentos, y el producto de cuatro de ellos, sin extremidad comun, es igual al producto de los otros cuatro.

34. Los teoremas de los números **27**, **30** y **32** pueden refundirse en el último, del que los otros son casos particulares, pues suponiendo que la transversal que parte de P pase por Q y la que parte de Q por P, resulta la proposicion del número **27**; y haciendo esta hipótesis para una sola transversal, resulta el número **30**.

Escolio general.

35. Siempre que los segmentos de dos concurrentes en O, producidos por transversales que parten de un punto P, deban corregirse de la falta de paralelismo dividiéndolos por las distancias de sus extremos á P, se puede sustituir en esta correccion el punto comun P por varios puntos distintos, uno de cada transversal, en línea recta con el de concurso O.

Así, en lugar de la série [*a*], número **22**,

$$\frac{ab}{Pb} : \frac{a'b'}{Pb'} = \frac{ac}{Pc} : \frac{a'c'}{Pc'} = \frac{ad}{Pd} : \frac{a'd'}{Pd'} \cdots\cdots,$$

podremos escribir esta otra (*Fig.* 19)

$$\frac{ab}{nb} : \frac{a'b'}{nb'} = \frac{ac}{pc} : \frac{a'c'}{pc'} = \frac{ad}{qd} : \frac{a'd'}{qd'} \cdots\cdots,$$

donde las correcciones

$$Pb,\ Pb',\ Pc,\ Pc' \text{ etc.}$$

tienen, en lugar del orígen comun P, los orígenes

$$n,\ p,\ q \ldots$$

en línea recta con O.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En efecto, considerando sucesivamente los cuadriláteros $bcb'c'$, $bdb'd'$ etc. tendremos [**27** y **30**]

$$\frac{Pb}{Pb'} : \frac{Pc}{Pc'} = \frac{Ob}{Oc} : \frac{Ob'}{Oc'} = \frac{nb}{nb'} : \frac{pc}{pc'},$$

ó

$$\frac{Pb}{Pb'} : \frac{Pc}{Pc'} = \frac{nb}{nb'} : \frac{pc}{pc'};$$

lo mismo

$$\frac{Pb}{Pb'} : \frac{Pd}{Pd'} = \frac{nb}{nb'} : \frac{qd}{qd'},$$

. . . . . .

de donde

$$\frac{Pb}{Pb'} : \frac{nb}{nb'} = \frac{Pc}{Pc'} : \frac{pc}{pc'} = \frac{Pd}{Pd'} : \frac{qd}{qd'} \ldots ;$$

pero la série [a] puede escribirse

$$\frac{ab}{a'b'} : \frac{Pb}{Pb'} = \frac{ac}{a'c'} : \frac{Pc}{Pc'} = \frac{ad}{a'd'} : \frac{Pd}{Pd'} \ldots ;$$

y sustituyendo las segundas fracciones de las razones compuestas por sus proporcionales

$$\frac{nb}{nb'}, \frac{pc}{pc'}, \frac{qd}{qd'} \ldots$$

resulta

$$\frac{ab}{a'b'} : \frac{nb}{nb'} = \frac{ac}{a'c'} : \frac{pc}{pc'} = \frac{ad}{a'd'} : \frac{qd}{qd'} \ldots$$

ó

$$\frac{ab}{nb} : \frac{a'b'}{nb'} = \frac{ac}{pc} : \frac{a'c'}{pc'} = \frac{ad}{qd} : \frac{a'd'}{qd'} \ldots$$

Teorema. (*Fig.* 15).

36. *Si dos concurrentes en* O *se cortan por otras dos concurrentes fijas* Paa', Pbb', *toda transversal* Pcc' *móvil alrededor del punto* P *determina en las primeras concurrentes segmentos tales que la relacion*

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'}$$

es constante.

Tenemos en efecto [**15**]

$$(abcP) = (a'b'c'P),$$

ó bien,
$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{Pa}{Pb} : \frac{Pa'}{Pb'} \quad [a],$$

es decir
$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \textit{constante} \quad [a'],$$

puesto que siendo Paa' y Pbb' fijas, el segundo miembro es constante, y el primero independiente de la transversal móvil.

Advertencia. Pueden considerarse como fijas dos cualesquiera de las rectas que parten de P, y las demás como diversas posiciones de una transversal móvil.

Teorema. *(Fig. 15).*

37. *Si dos concurrentes en* O *se cortan por una transversal fija* Paa' *y otra* Pcc' *móvil alrededor de un punto* P *de la primera, la relacion*

$$\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O}$$

es constante é igual á $\frac{Pa}{Pa'}$.

Suponiendo que la transversal fija Pbb' del teorema anterior pase por O, los puntos b y b' se confunden en O; Pb y Pb' serán iguales; luego la relacion [a] se reduce á

$$\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O} = \frac{Pa}{Pa'},$$

cuyo segundo miembro es constante, por ser Paa' una transversal fija.

Obsérvese que la relacion $\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O}$ será positiva si el punto P es exterior al ángulo MON, y negativa en el caso contrario.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Advertencia. Puede demostrarse directamente este teorema por medio de la relacion

$$(aOcP) = (a'Oc'P).$$

Teorema recíproco.

38. *Si dos concurrentes en* O *se cortan por varias transversales, una de ellas* aa' *considerada como fija, de tal modo que la relacion* $\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O}$ *sea constante, todas las transversales concurren en un mismo punto, tal que la relacion de sus distancias á* a *y* a' *es igual á dicha constante.*

Llamando P al punto en que cc' encuentra á aa' tendremos, en virtud del teorema directo,

$$\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O} = \frac{Pa}{Pa'} :$$

pero segun la hipótesis, el primer miembro de la igualdad anterior es constante, cualquiera que sea la transversal, luego tambien será constante el segundo miembro; por consiguiente todas las transversales dividen á aa' en la relacion $\frac{Pa}{Pa'}$, y como sólo existe un punto que divida á esta recta en dicha relacion, todas las transversales pasarán por el mismo punto P.

Advertencia. En las proposiciones anteriores, Paa' era la transversal fija; pero se puede suponer fija cualquiera de las otras, por ejemplo Pcc', y entonces las demás serán diferentes posiciones de la móvil.

39. La proposicion del número **36** disfruta igual grado de generalidad que la del **4**, puesto que en ella se funda.

Supongamos la transversal móvil Pcc' *(Fig.* 15*)* paralela á una concurrente OM: el punto c se aleja al infinito, la fraccion $\frac{ca}{cb}$ vale *uno*, y la relacion [a] es

$$\frac{c'b'}{c'a'} = \frac{Pa}{Pb} : \frac{Pa'}{Pb'}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Aqui tenemos una expresion de la constante más sencilla que la del caso general. Llamando A al punto en que una paralela tirada por P á OM encuentra á ON, tenemos

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = constante = \frac{Ab'}{Aa'} \quad [1].$$

Llamando B al punto en que una paralela á ON encuentra á OM será

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = constante = \frac{Ba}{Bb} \quad [2].$$

De las expresiones [1] y [2] se desprende

$$\frac{Ab'}{Aa'} = \frac{Ba}{Bb}.$$

Dadas las rectas OM, ON y el punto P, la posicion del punto A queda desde luego determinada independientemente de las transversales fijas Paa' y Pbb', sin más que tirar desde P una paralela á OM *(Fig. 20)*. Esta observacion puede servir para trazar las transversales fijas, de modo que la constante tenga un valor dado de antemano.

Se trata, en efecto, de marcar en ON dos puntos b' y a' tales que la relacion de sus distancias al punto A tenga un valor dado $\frac{m}{n}$, cuestion que se resuelve tomando un punto arbitrario b', y determinando el a' de modo que satisfaga á la condicion

$$\frac{Ab'}{Aa'} = \frac{m}{n}.$$

40. Supongamos que la transversal fija Pbb' sea paralela á OM; el punto b se aleja entonces al infinito, los segmentos cb y Pb son iguales, luego la relacion general [a] del número **36** se reduce á

$$ca : \frac{c'a'}{c'b'} = Pa : \frac{Pa'}{Pb'} = constante.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si las dos transversales fijas Paa', Pbb' son paralelas respectivamente á ON y OM, tambien se aleja al infinito el punto a', y los segmentos $c'a'$, Pa' serán iguales; por tanto la última relacion será *(Fig.* 21)

$$ca.\ c'b' = \mathrm{P}a.\ \mathrm{P}b' = constante.$$

Teorema. *(Fig.* 16).

41. *Si dos lados de un triángulo* ABC, *considerados como indefinidos, se cortan por una transversal* abc, *las razones segmentarias de dichos lados son proporcionales á los segmentos del tercero determinados por la transversal.*

Es decir que

$$\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} : \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} = \frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{B}} \qquad [a]$$

En efecto, considerando las concurrentes AC y AB cortadas por las transversales aCB y abc, siendo fija la primera, el teorema del número **37** nos dá la igualdad [a].

Podria tambien deducirse directamente del principio del número **4** que, suponiendo una recta aA, daria

$$\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} : \frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{A}} = \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} : \frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{A}},$$

fácil de transformar en la relacion [a].

Escolio 1.° Si la transversal abc es paralela al lado BC, el punto a se aleja al infinito, y la relacion $\frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{B}}$ es igual á 1; luego

$$\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} = \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}}.$$

es decir: *toda paralela á un lado de un triángulo divide los otros dos lados en partes proporcionales.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Escolio 2.° El importante teorema anterior se encuentra ya en las *Esféricas* de Menelao, geómetra griego que vivió 80 años despues de Jesu-Cristo, y suele enunciarse del modo siguiente:

Si los tres lados de un triángulo, considerados como indefinidos, se cortan por una transversal, ésta determina seis segmentos tales que el producto de tres de ellos sin extremidad comun es igual al producto de los otros tres.

Se ve efectivamente que la igualdad [*a*] equivale á esta otra

$$aB.\ bC.\ cA = aC.\ bA.\ cB.$$

Nuestro enunciado ofrece la ventaja de patentizar la conexion entre el teorema de Menelao y el de las líneas proporcionales, del que es una generalizacion, como acertadamente expresa M. Chasles en su historia de la Geometría. [1]

Teorema recíproco.

12. *Si en los tres lados de un triángulo, considerados como indefinidos, se marcan tres puntos, de modo que las razones segmentarias de dos lados sean proporcionales á los segmentos del tercero, dichos tres puntos estarán en línea recta.*

Supongamos que entre los segmentos determinados por los puntos *a*, *b*, *c* exista la relacion

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = \frac{aC}{aB} \qquad [a].$$

Considerando las concurrentes AC, AB y la transversal fija BC, la recta que une *b* con *c* tiene que pasar por *a* [**38**].

Escolio 1.° Si la razon $\frac{aC}{aB}$ vale 1, es decir si

$$\frac{bC}{bA} = \frac{cB}{cA},$$

1 *Aperçu historique sur l' origine et le développement des méthodes en Géométrie.* Paris 1875, pág. 27.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

la transversal bc es paralela al lado BC, de lo contrario $\frac{aC}{aB}$ no tendria el valor 1, luego: *si una recta divide en partes proporcionales á dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.*

Escolio 2.° El recíproco anterior se enuncia comunmente así:

Cuando sobre los lados de un triángulo, considerados como indefinidos, se marcan tres puntos tales que el producto de tres segmentos sin extremidad comun sea igual al producto de los otros tres, dichos tres puntos están en línea recta.

Teorema. *(Fig. 22).*

43. *Si desde un punto* P *tomado en una diagonal de un cuadrilátero* ABCD *se trazan dos transversales cortando cada una á dos lados adyacentes, las razones segmentarias de dos de éstos son proporcionales à las razones segmentarias de los otros dos.*

Tenemos, en efecto [41]

$$\frac{aB}{aA} : \frac{dD}{dA} = \frac{PB}{PD}, \qquad \frac{bB}{bC} : \frac{cD}{cC} = \frac{PB}{PD},$$

luego

$$\frac{aB}{aA} : \frac{dD}{dA} = \frac{bB}{bC} : \frac{cD}{cC} \quad [a]$$

ó

$$\frac{aB}{aA} : \frac{bB}{bC} = \frac{dD}{dA} : \frac{cD}{cC} \cdot \quad [b]$$ [1]

---

1 Estas expresiones pueden escribirse así:

$$aA.\ bB.\ cC.\ dD = aB.\ bC.\ cD.\ dA.$$

lo que permite enunciar el teorema de otro modo:

Si desde un punto de una diagonal de un cuadrilátero se trazan dos transversales cortando cada una á dos lados adyacentes, resultan ocho segmentos, tales que el producto de cuatro de ellos sin extremidad comun es igual al producto de los otros cuatro.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema recíproco.

14. *Si los cuatro lados de un cuadrilátero se dividen en dos segmentos por medio de puntos* a, b, c, d, *de tal modo que las razones segmentarias de dos lados adyacentes sean proporcionales á las razones segmentarias de los otros dos, las rectas* ad *y* bc *concurren en un punto de la diagonal* BD, *y las* ab *y* dc *concurren en un punto de la otra diagonal* AC.

Tenemos por hipótesis

$$\frac{aB}{aA} : \frac{dD}{dA} = \frac{bB}{bC} : \frac{cD}{cC} \quad [a] :$$

llamando P al punto en que *ad* encuentra á BD, el primer miembro de la igualdad [*a*] valdrá $\frac{PB}{PD}$ [**11**], luego

$$\frac{bB}{bC} : \frac{cD}{cC} = \frac{PB}{PD},$$

lo que exige que *bc* pase tambien por P [**12**].

Análoga demostracion se aplica á *ab* y *dc*, partiendo de la igualdad [*b*] del número anterior.

Corolarios.

15. 1.° *Si desde un punto* P *de una diagonal* BD *de un cuadrilátero se trazan dos transversales cortando cada una á dos lados adyacentes, las rectas que unan los puntos* a *y* d *de interseccion de una de ellas respectivamente con los* b *y* c *de la otra concurren en un punto de la segunda diagonal* AC.

Puesto que, segun el teorema directo, las razones segmentarias producidas por P*ad* y P*bc* son proporcionales, luego, segun el recíproco, las transversales *ab* y *dc* concurren en un punto de AC.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

46. 2.° *Si desde los puntos de concurso* E *y* F (Fig. 23) *de los lados opuestos de un cuadrilátero* ABCD *se trazan dos transversales que corten á los lados del mismo en puntos* b *y* d. a *y* c, *las rectas que unen* a *con* d *y* b *con* c *concurren en un punto de la diagonal* BD, *y las que unen* a *con* b, c *con* d *concurren en un punto de la otra diagonal* AC.

Tenemos, en efecto [**32**],

$$\frac{aB}{aA} : \frac{cC}{cD} = \frac{bB}{bC} : \frac{dA}{dD},$$

que se convierte en

$$\frac{aB}{aA} : \frac{dD}{dA} = \frac{bB}{bC} : \frac{cD}{cC},$$

luego el corolario es cierto [**44**].

Teorema. (*Fig.* 24).

47. *Si todos los lados de un polígono, considerados como indefinidos, se cortan por una transversal, ésta determina en cada lado dos segmentos. y el producto de todos los que no tienen ningun extremo comun es igual al produto de todos los demás.*

Sea ABCDE el polígono, MN la transversal y *a*, *b*, *c*, *d*, *e* los puntos en que ésta corta á los lados de aquel.

Trazando las diagonales AC, AD del polígono y prolongándolas hasta la transversal, tendremos varios triángulos ABC, ACD, ADE cortados por la transversal comun MN; luego [**41**]

$$\frac{aB}{aA} : \frac{C'C}{C'A} = \frac{bB}{bC}, \quad \frac{C'C}{C'A} : \frac{D'D}{D'A} = \frac{cC}{cD}, \quad \frac{D'D}{D'A} : \frac{eE}{eA} = \frac{dD}{dE};$$

multiplicando ordenadamente y simplificando resulta:

$$\frac{aB}{aA} : \frac{eE}{eA} = \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \cdot \frac{dD}{dE},$$

ó

$$aB.\ bC.\ cD.\ dE.\ eA = aA.\ bB.\ cC.\ dD.\ eE,$$

lo que debiamos demostrar.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema. *(Fig. 25).*

48. *Dadas tres circunferencias* A, B, C, *si considerándolas dos á dos trazamos las tangentes comunes exteriores, los tres puntos* a, b, c *en que éstas encuentran á las respectivas rectas de los centros están en línea recta.*

Sean A, B, C los radios de las circunferencias.

Tenemos la igualdad evidente por sí misma

$$\frac{B}{A} : \frac{C}{A} = \frac{B}{C},$$

pero los radios de dos circunferencias son proporcionales á las distancias del punto en que concurren las tangentes comunes á los centros respectivos, luego

$$\frac{cB}{cA} : \frac{bC}{bA} = \frac{aB}{aC},$$

lo que demuestra que *a*, *b* y *c* están en línea recta.

Teorema. *(Fig. 26).*

49. *Si desde dos puntos fijos* A, A′ *de dos rectas concurrentes* OM, ON *se trazan pares de transversales* Aa′ *y* A′a, Ab′ *y* A′b *etc. cuyas intersecciones* α, β *etc. estan en línea recta con* O, *y se considera como fijo uno de los pares* Aa′, A′a, *la relacion*

$$\frac{ba}{bO} : \frac{b'a'}{b'O}$$

es constante.

En efecto: si atendemos al cuadrilátero O*aza′* y á las transversales A′*b* y A*b′* trazadas desde un punto β de la diagonal Oα,

las cuales cortan, la primera á los lados adyacentes aO y $a\alpha$ en b y A', y la segunda á los otros dos $a'O$ y $a'\alpha$ en b' y A, tendremos [**13**]

$$\frac{ba}{bO} : \frac{A'a}{A'\alpha} = \frac{b'a'}{b'O} : \frac{Aa'}{A\alpha},$$

ó bien

$$\frac{ba}{bO} : \frac{b'a'}{b'O} = \frac{A'a}{A'\alpha} : \frac{Aa'}{A\alpha} \quad [a].$$

Trazando desde A y A' otras dos transversales que se cortasen en la recta $O\alpha\beta$, obtendriamos de igual manera una expresion cuyo segundo miembro seria idéntico al de $[a]$, luego los primeros miembros serian iguales; por tanto

$$\frac{ba}{bO} : \frac{b'a'}{b'O} = constante. \quad [a'].$$

TEOREMA. *(Fig. 27).*

50. *Si dos concurrentes* OM, ON *se cortan por pares de transversales* Ab' *y* $A'b$, Ac' *y* $A'c$ *que parten de dos puntos fijos* A *y* A' *tomados en las concurrentes, y cuyas intersecciones* β, γ *están en línea recta con* O, *la relacion*

$$\frac{bA}{bO} : \frac{b'A'}{b'O}$$

es constante é igual á $-\frac{\alpha A}{\alpha A'}$.

Suponiendo que las dos transversales fijas Aa' y $A'a$ del teorema anterior se confundan en una sola recta AA', los numeradores $A'a$ y Aa' del segundo miembro de la relacion $[a]$ serán iguales y de signos contrarios, luego

$$\frac{bA}{bO} : \frac{b'A'}{b'O} = -\frac{\alpha A}{\alpha A'},$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

y como el segundo miembro es constante, el teorema es cierto.

Obsérvese que la relacion $\frac{bA}{bO} : \frac{b'A'}{b'O}$ es positiva si la recta OK es interior al ángulo MON, y negativa si OK es exterior.

Teorema recíproco.

51. *Si desde dos puntos fijos* A *y* A′ *tomados en dos concurrentes* OM, ON *se trazan pares de rectas* Ab′ *y* A′b, Ac′ *y* A′c... *que determinen en las concurrentes segmentos tales que la relacion*

$$\frac{bA}{bO} : \frac{b'A'}{b'O}$$

sea constante, las intersecciones β, γ... *de cada par de rectas están en otra recta que pasa por* O *y que divide á* AA′ *en dos segmentos, cuya relacion es igual y de signo contrario á dicha constante.*

Sea β la interseccion del primer par de rectas A*b*′, A′*b*, y α el punto con que Oβ encuentra á AA′. Por el teorema directo tenemos

$$\frac{bA}{bO} : \frac{b'A'}{b'O} = -\frac{\alpha A}{\alpha A'} :$$

el primer miembro es, por hipótesis, constante; el segundo tendrá que serlo tambien; luego todas las rectas tales como Oβ dividen á AA′ en la relacion $-\frac{\alpha A}{\alpha A'}$, por consiguiente todas pasarán por α confundiéndose en una sola.

Teorema. *(Fig. 28).*

52. *Si desde un punto fijo* P *se trazan varias transversales* Paa′, Pbb′... *que corten á dos concurrentes* OM, ON, *las rectas*

que unan los puntos de interseccion a *y* a' *de cualquiera de ellas con los respectivamente opuestos* b' *y* b, c' *y* c *de las otras, se cortarán en puntos en línea recta con* O.

Segun el teorema [**37**]

$$\frac{ba}{bO} : \frac{b'a'}{b'O} = \frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O} = constante,$$

luego en virtud del [**51**], los puntos β, γ.. están en línea recta con O.

TEOREMA. *(Fig. 28).*

53. *Si desde dos puntos fijos* a *y* a' *tomados en dos rectas concurrentes* OM, ON *se trazan pares de rectas* ab' *y* a'b, ac' *y* a'c... *que se corten en puntos en línea recta con* O, *las rectas que unan* a *con* a', b *con* b', c *con* c' *etc. concurrirán en un mismo punto* P.

Segun el teorema [**50**]

$$\frac{ba}{bO} : \frac{b'a'}{b'O} = \frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O} = constante,$$

luego en virtud del [**38**], las rectas *aa'*, *bb'*, *cc'* etc, concurren en un mismo punto.

TEOREMA. *(Fig. 29).*

54. *Si desde un punto* I *tomado en el plano de un triángulo* ABC *se tiran rectas á los tres vértices, prolongadas hasta los lados opuestos, el cociente de las razones segmentarias de dos lados es igual y de signo contrario á la razon segmentaria del tercero.*

Es decir que

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{aC}{aB} \qquad [a].$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En efecto: considerando las concurrentes AC, AB, y las transversales Bb, Cc que parten de los puntos fijos B y C, el teorema es consecuencia inmediata del [**50**].

55. Corolario. Si a es el punto medio de BC, la relacion $\frac{aC}{aB}$ vale — 1, luego

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = 1 \quad ó \quad \frac{bC}{bA} = \frac{cB}{cA}.$$

esto es, *las rectas que partiendo de dos vértices de un triángulo se cortan en la mediana tirada desde el tercero, dividen á los lados opuestos en partes proporcionales.*

Segun esto, la recta bc será paralela á BC.

56. Escolio. El teorema anterior, debido al geómetra italiano Juan de Ceva [1], suele enunciarse así:

Cuando desde un punto tomado en el plano de un triángulo se tiran rectas á los tres vértices, estas rectas determinan sobre los lados opuestos seis segmentos tales que el producto de tres de ellos sin extremidad comun es igual y de signo contrario al de los otros tres.

En efecto: la igualdad [a] equivale á esta otra:

$$aB.\ bC.\ cA. = -\ aC.\ bA.\ cB.$$

Teorema recíproco. *(Fig. 29).*

57. *Si desde los tres vértices de un triángulo se tiran rectas á los lados opuestos de modo que el cociente de las razones segmentarias de dos lados sea igual y de signo contrario á la razon segmentaria del tercero, dichas rectas concurren en un mismo punto.*

---

1 Se encuentra en una obra de este autor titulada: *De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio.* Milan, 1678.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Tenemos por hipótesis

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{aC}{aB},$$

luego las rectas Bb y Cc, que parten de los puntos B y C tomados en las concurrentes AB y AC, tienen que cortarse en una recta que pase por A y divida á BC en la relacion $-\frac{aC}{aB}$ [**51**], por lo tanto es claro que se cortan en Aa.

58. Escolio. Hé aquí el enunciado usual de este importante recíproco:

Si en los tres lados de un triángulo, considerados como indefinidos, se marcan tres puntos a, b, c, *tales que el producto de tres segmentos sin extremidad comun sea igual y de signo contrario al de los otros tres, las rectas que unen los puntos* a, b, c *con los vértices opuestos concurren en un mismo punto.*

Corolarios.

59. 1.° Si los puntos b y c dividen á los lados AC y AB en partes proporcionales, esto es, si bc es paralela al lado BC, será $\frac{aC}{aB} = -1$, ó $aC = -aB$, de modo que a será el punto medio de BC; luego *si dos lados de un triángulo se cortan por paralelas al tercer lado, las rectas que unan los extremos de cada paralela con los vértices opuestos del tercer lado se cruzarán sobre la mediana correspondiente al mismo.*

La recta que une los puntos medios de las bases de un trapecio pasa por el punto de concurso de los lados no paralelos; es por consiguiente una mediana en la que se cruzarán las diagonales del trapecio; luego

El punto de interseccion de las diagonales de un trapecio y los puntos medios de las bases están en línea recta con el punto de concurso de los lados no paralelos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

60. 2.º Si a, b, c son los puntos medios de los lados del triángulo ABC, será

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{aC}{aB},$$

luego las tres rectas Aa, Bb, Cc concurren en un mismo punto I, es decir:

Las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto.

61. 3.º Si a, b, c son los piés de las bisectrices de los ángulos A, B, C, tendremos

$$\frac{bC}{bA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{cB}{cA} : \frac{CB}{CA},$$

luego
$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{CA}{BA} = -\frac{aC}{aB},$$

por tanto:

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un mismo punto.

De igual modo se probaria que

Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo y la del ángulo interno no adyacente á los anteriores, concurren en un mismo punto.

62. 4.º Si a, b, c son los piés de las tres alturas, los triángulos semejantes BAb, CAc nos dan

$$\frac{cA}{bA} = \frac{CA}{BA},$$

de igual modo se halla

$$\frac{aB}{cB} = \frac{AB}{CB}, \quad \frac{bC}{aC} = \frac{BC}{AC};$$

multiplicando las tres igualdades resulta

$$\frac{cA}{bA} \cdot \frac{aB}{cB} \cdot \frac{bC}{aC} = \frac{CA.\,AB.\,BC}{BA.\,CB.\,AC} = -1,$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

que puede escribirse así

$$\frac{cB}{cA} : \frac{bC}{bA} = -\frac{aB}{aC};$$

luego

Las tres alturas de un triángulo concurren en un mismo punto.

63. 5.° Si tenemos un triángulo ABC circunscrito á un círculo *(Fig. 30)*, llamando a, b, c á los puntos de contacto de los lados BC, AC y AB, tendremos

$$\frac{cB}{cA} : \frac{bC}{bA} = \frac{cB}{bC} = -\frac{aB}{aC},$$

toda vez que $cA = bA$, $cB = aB$, $bC = aC$, luego

En todo triángulo circunscrito á un círculo, las rectas que unen los tres vértices con los puntos de contacto opuestos concurren en un mismo punto.

La misma propiedad se verifica cuando se considera un triángulo y un círculo ex-inscripto.

64. 6.° *Dadas las circunferencias* A, B, C (Fig. 25), *si considerándolas dos á dos trazamos las tangentes comunes interiores, las rectas que unan el centro de cada circunferencia con el punto en que las tangentes á las otras dos encuentren á la respectiva línea de los centros, concurrirán en un mismo punto.*

Sean a', b', c' los puntos en que las tangentes comunes interiores cortan á las rectas de los centros. De la igualdad evidente

$$\frac{B}{A} : \frac{C}{A} = \frac{B}{C},$$

se deduce, como en el número **48** y teniendo en cuenta que las razones segmentarias de las líneas de los centros son negativas,

$$\frac{c'B}{c'A} : \frac{b'C}{b'A} = -\frac{a'B}{a'C},$$

lo que demuestra que Aa', Bb', Cc' concurren en un mismo punto.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

III.—Relacion anarmónica.

65. Se llama *relacion anarmónica* de cuatro puntos a, b, c, d en línea recta, el cociente de las razones de las distancias de dos de estos puntos á los otros dos.

Por ejemplo *(Fig. 31)*

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}, \quad \frac{ba}{bc} : \frac{da}{dc}.$$

Estas relaciones se expresan por una notacion análoga á la explicada en el número **15**; así

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = (abcd), \quad \frac{ba}{bc} : \frac{da}{dc} = (acbd).$$

En las relaciones anarmónicas se considera el valor absoluto y el signo; para determinar éste se observa que cada razon consta de dos segmentos con el mismo orígen, siendo positiva ó negativa, segun el sentido de los segmentos [**20**], y el signo de la relacion anarmónica se hallará aplicando la regla de la division algebráica á los signos de las razones simples: en la relacion $(abcd)$ las dos razones $\frac{ca}{cb}$ y $\frac{da}{db}$ son positivas, luego la relacion será positiva; en $(acbd)$ la primera razon $\frac{ba}{bc}$ es negativa y la segunda $\frac{da}{dc}$ positiva, luego la relacion será negativa.

Una relacion anarmónica no se altera permutando entre sí dos letras, con tal que se permuten á la vez las otras dos.

Esta proposicion se ha demostrado ya [**16**] para los valores absolutos, y es fácil cerciorarse de que tambien es cierta para los signos.

66. Cuatro letras a, b, c, d se ordenan de 24 maneras diferentes, por consiguiente cuatro puntos en línea recta dan 24 relaciones anarmónicas; sólo seis son distintas, y aún de éstas tres son inversas de las otras tres.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Cuando enunciemos un teorema sin referirnos expresamente á ninguna de las relaciones anarmónicas en particular, se entenderá que el teorema es cierto para todas.

67. Conocido el valor r de una relacion anarmónica $(abcd)$, y dados en una recta indefinida tres puntos cualesquiera de dicha relacion, a, b, d por ejemplo, puede determinarse el cuarto c.

En efecto: de $(abcd) = r$ se deduce

$$\frac{ca}{cb} = \frac{r.\,da}{db}.$$

El segundo miembro es cantidad conocida; si le representamos por $\frac{m}{n}$ será

$$\frac{ca}{cb} = \frac{m}{n},$$

y la cuestion actual entra en otra ya resuelta [**21**].

Si $r = 0$ será $ca = 0$, luego c se confundirá con a; si $r = \infty$ será $cb = 0$, luego se confundirá con b; si $r = +1$ será $\frac{ca}{cb} = \frac{da}{db}$, y c se confundirá con d.

En cualquier otro caso podrá determinarse un punto c y sólo uno, distinto de a, b y d, tal que la relacion $\frac{ca}{cb}$ sea igual á $\frac{m}{n}$ en magnitud y en signo [**21**]; luego *la relacion anarmónica de cuatro puntos distintos puede tener todos los valores positivos y negativos, excepto* 0, ∞ *y* $+1$.

Hé aquí, ahora, el procedimiento geométrico y general para determinar un punto cualquiera c de una relacion anarmónica $(abcd)$, conociendo el valor r de ésta y la posicion de los otros puntos.

Permútese el punto c que se busca con el último y á la vez los otros dos, lo que no altera la relacion. Trácese por el *primer punto* b de la relacion transformada $(badc)$ una recta indefinida, y tómense en ella dos longitudes bn y bn' (*Fig.* 14) cuya rela-

cion sea igual á r [1], hácia un mismo lado de XY si r es positiva y hácia lados distintos si r es negativa. Trácese por el *segundo punto a* una paralela á nn', únase el *tercer punto d* con el extremo n de la longitud que representa al numerador de la relacion dada r, prolongando la recta de union hasta que encuentre en m á mn: la recta mn', prolongada si es preciso, encontrará á XY en el punto buscado c.

En efecto:

$$\frac{ca}{cb} = \frac{am}{bn'}, \qquad \frac{da}{db} = \frac{am}{bn};$$

luego

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{bn}{bn'} \quad \text{ó} \quad (abcd) = r.$$

Teorema. (*Fig.* 32).

68. *Si un haz de cuatro rectas concurrentes en* O *se corta por una transversal, la relacion anarmónica de los cuatro puntos de interseccion es constante, cualquiera que sea la direccion de la transversal.*

Vamos á demostrar este teorema para una relacion anarmónica cualquiera, por ejemplo $(abcd)$; es decir que trazando otra transversal $a'\ b'\ c'\ d'$ se verifica

$$(abcd) = (a'\ b'\ c'\ d') = constante.$$

Considerando ad y $a'd'$ como dos concurrentes cortadas por varias transversales que parten de O, siendo fijas las Oaa', Obb' correspondientes á los dos primeros puntos de las relaciones cuya igualdad se quiere demostrar, tenemos [**36**]

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} = constante,$$

---

1 Si r es una fraccion cuyos términos sean dos rectas, se tomarán bn y bn' iguales á ellas; si dichos términos son números, se tomarán dos longitudes proporcionales á los números dados, sirviéndose de una unidad arbitraria.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ó sea $$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = constante,$$

lo cual debiamos demostrar.

Es claro que este teorema se verifica en el caso de coincidencia de dos puntos homólogos.

69. *Nota.* La proposicion anterior, que se encuentra ya en las *Colecciones matemáticas* de Pappus, siglo IV de la era cristiana, y en la que M. Chasles ha fundado su excelente *Tratado de Geometría superior* [1], puede deducirse directamente del principio número 4, base del presente estudio.

Tenemos, en efecto,

$$(abcO) = (a'\,b'\,c'\,O)\,,\quad (abdO) = (a'\,b'\,d'\,O),$$

dividiendo estas igualdades, con objeto de eliminar O, resulta

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}\,.$$

70. El teorema de la relacion anarmónica es enteramente general. Si suponemos una transversal $b'\,c'\,d'$ (*Fig.* 33) paralela á un radio Oa, tendremos

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{d'b'}{c'b'}\,,$$

toda vez que hallándose el punto a' en el infinito es $c'a' = d'a'$.

Esta observacion ofrece un medio sencillo y fácil de retener para hallar el cuarto punto de una figura rectilínea cuando se conocen tres y el valor de la relacion anarmónica.

Supongamos conocidos los puntos a, b, c, y tratemos de hallar el cuarto d por la condicion

$$(abcd) = r.$$

Desde un punto, exterior á la recta dada, trácense tres ra-

1 Paris, 1852.

dios á los puntos a, b, c; tirese una transversal paralela á cualquiera de ellos, al Oa por ejemplo, esta paralela encuentra á Oa en un punto en el infinito, que llamaremos a'.

Ahora bien,

$$(abcd) = (a'\,b'\,c'\,d') = r$$

ó sea

$$\frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = r\,,$$

pero $c'a' = d'a'$, luego $\dfrac{d'b'}{c'b'} = r$.

El punto d' se determinará por esta condicion, y trazando el radio Od', su interseccion con la recta dada será el punto d que buscábamos.

71. Llamaremos relaciones anarmónicas de un haz de cuatro rectas á las relaciones anarmónicas de sus cuatro puntos de interseccion con una transversal cualquiera.

Cuatro rectas concurrentes en un punto, consideradas dos á dos, forman seis ángulos. Dos haces de cuatro rectas, cuyos ángulos sean respectivamente iguales, tendrán las mismas relaciones anarmónicas. Otro tanto decimos de dos haces cuyos ángulos sean unos iguales y otros suplementarios, porque los radios de un haz pueden sustituirse por sus prolongaciones, lo que cambia algunos ángulos del haz en sus respectivos suplementos.

De esta observacion se desprenden proposiciones análogas á las tratadas en el número **12**.

1.ª *Si los radios de dos ó más haces de cuatro rectas inscriptos en una circunferencia pasan por cuatro puntos fijos de esta curva, las relaciones anarmónicas de los haces son iguales.*

2.ª *Si el centro de un círculo se une con los puntos en que cuatro tangentes fijas son cortadas por una quinta tangente móvil, las relaciones anarmónicas de los haces son constantes, cualquiera que sea la tangente móvil.*

72. Se llaman relaciones anarmónicas de cuatro puntos situados en una circunferencia, las relaciones anarmónicas de

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

un haz inscripto, cuyos radios pasan por los cuatro puntos.

Se llaman relaciones anarmónicas de cuatro tangentes fijas, las relaciones anarmónicas de un haz central cuyos radios pasan por los puntos de interseccion de las tangentes con una quinta tangente móvil.

Las relaciones anarmónicas de cuatro tangentes á una circunferencia son iguales á las relaciones anarmónicas de los cuatro puntos de contacto.

Puesto que el haz central, cuyos radios pasan por los cuatro puntos de interseccion de las tangentes fijas con la móvil, tiene las mismas relaciones anarmónicas que el inscripto cuyo centro está en el punto de contacto de esta quinta tangente y cuyos radios pasan por los cuatro puntos de contacto de las fijas [**12**].

Teorema. *(Fig. 34.)*

73. *Si dos figuras de cuatro puntos en línea recta* abcd *y* ab'c'd' *tienen una relacion anarmónica igual y un punto homólogo comun* a, *las tres rectas que unen dos á dos los otros puntos homólogos concurren en un mismo punto.*

Supongamos

$$(abcd) = (a\,b'\,c'\,d').$$

Esta igualdad puede escribirse así

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a}{d'b'} :$$

considerando las dos concurrentes en *a* cortadas por las transversales *bb'*, *cc'* y *dd'*, siendo fija la *bb'*, las transversales concurren en un punto O [**38**].

74. La igualdad entre dos relaciones anarmónicas puede establecerse de cuatro modos, porque permutando en una de ellas dos de sus letras y á la vez las otras dos, la relacion no varia, subsistiendo igual á la otra.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Así, de la igualdad

$$(abcd) = (a'\ b'\ c'\ d')$$

pueden deducirse estas tres

$$(abcd) = (b'a'd'c'),\ (abcd) = (c'd'a'b'),\ (abcd) = (d'c'b'a'),$$

que se han obtenido permutando sucesivamente en $(a'b'c'd')$, a' y b', a' y c', a' y d', y á la vez las otras dos letras.

En consecuencia, cuando dos figuras rectilíneas de cuatro puntos tienen una relacion anarmónica igual, haciendo coincidir dos puntos cualesquiera, aunque no sean homólogos, los demás unidos dos á dos, de manera conveniente, dan tres rectas que concurren en un punto.

Si tenemos, por ejemplo,

$$(abcd) = (a'b'c'd'),$$

y hacemos coincidir los puntos no homólogos b y c', permutando en el segundo miembro b' con c' y a' con d', será

$$(abcd) = (d'c'b'a'),$$

donde b y c' son homólogos, luego, segun el teorema, las rectas que unan a, c, d, puntos de la primera relacion, con sus homólogos en la segunda d', b', a' concurrirán en un punto O.

75. Corolario. *Si dos figuras rectilíneas de cuatro puntos que se corresponden tienen una relacion anarmónica igual, las demás relaciones anarmónicas son respectivamente iguales.*

Haciendo coincidir dos puntos homólogos, las rectas que unan los demás dos á dos concurrirán en un mismo punto, luego todas las relaciones anarmónicas análogas de las dos figuras serán respectivamente iguales [**68**].

Teorema. *(Fig. 35.)*

76. *Si los radios de dos haces* O *y* O' *de cuatro rectas se cortan dos á dos en puntos* α, β, γ, δ *situados en línea recta, los haces tienen iguales relaciones anarmónicas.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Demostremos el teorema para una relacion anarmónica cualquiera; por ejemplo, probemos que

$$(abcd) = (ab'c'd').$$

Considerando los primeros radios Oa, $O'a$ como dos concurrentes en a, los segundos Ob, $O'b'$ como dos transversales fijas que parten de puntos fijos O, O' tomados en las concurrentes, y los demás como transversales que parten de los mismos puntos y se cortan dos á dos en puntos en línea recta con a y β, tdndremos [**19**]

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a}{d'b'},$$

ó bien

$$(abcd) = (ab'c'd').$$

Es claro que esta proporcion se verifica tambien en el caso de confundirse dos radios homólogos en uno solo.

Nota. El teorema anterior puede demostrarse por la simple consideracion de ser $a\beta\gamma\delta$ una transversal comun á los dos haces; pero hemos preferido conservar la correlacion entre las propiedades de las figuras rectilíneas de cuatro puntos y las análogas de los haces de cuatro rectas concurrentes.

Teorema. *(Fig. 36).*

77. *Si dos haces O y O' de cuatro rectas tienen una relacion anarmónica igual y un radio homólogo comun, los tres puntos de interseccion de los otros radios correspondientes, tomados dos á dos, están en línea recta.*

Suponiendo (O, ABCD) = (O', A'B'C'D'), queremos demostrar que las intersecciones a, β, γ de los radios homólogos están en línea recta.

En virtud de la hipótesis, la relacion anarmónica de los cuatro puntos de interseccion del haz O,ABCD con una recta

cualquiera será igual á la relacion anarmónica de los cuatro puntos de interseccion del haz O′,A′B′C′D′ con otra recta; luego

$$(abcO') = (ab'c'O),$$

relacion que puede escribirse así

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b'} = \frac{O'a}{O'b} : \frac{Oa}{Ob'}.$$

Considerando los primeros radios OA, O′A′ como dos concurrentes en a, y los demás como transversales que parten de dos puntos fijos O y O′ tomados en aquellas, siendo fijas Ob y $O'b'$, es claro que los puntos β y γ estarán en línea recta con a [**51**].

78. Cuando dos haces de cuatro rectas tienen una relacion anarmónica igual, haciendo coincidir dos radios cualesquiera, aunque no sean homólogos, habrá siempre tres pares de radios que dos á dos se cortarán en tres puntos en línea recta.

Si tenemos, por ejemplo,

$$(O,ABCD) = (O',A'B'C'D').$$

y hacemos coincidir los radios OA, O′C′ no homólogos, permutando en la igualdad anterior C′ con A′ y D′ con B′ será

$$(O,ABCD) = (O',C'D'A'B'),$$

donde los radios que coinciden OA, O′C′ son homólogos; luego, segun el teorema, los puntos de interseccion de OB, OC, OD con O′D′, O′A′, O′B′ estarán en línea recta.

79. Corolario. *Si dos haces de cuatro rectas que se corresponden tienen una relacion anarmónica igual, las demás serán respectivamente iguales.*

Haciendo coincidir dos radios homólogos las intersecciones de los demás estarán en línea recta [**77**]; luego todas las relaciones anarmónicas análogas de los dos haces serán respectivamente iguales [**76**].

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema. *(Fig. 37).*

80. *Dado un exágono inscripto en una circunferencia, si se prolongan cada dos lados opuestos* AB *y* DE, BC *y* FE, CD *y* FA *hasta su encuentro, los tres puntos de interseccion* L, M, N *estarán en línea recta.*

Tenemos [**71**]

$$(A, BDEF) = (C, BDEF);$$

el primer haz determina en una recta LD los puntos L, D, E, G, y el segundo determina en MF los M, H, E, F; luego

$$(LDEG) = (MHEF);$$

estas dos figuras rectilíneas tienen un punto comun E, luego las rectas LM, DH, GF concurren en un mismo punto N, ó lo que es igual, los puntos L, M, N están en línea recta. [1]

81. Inscribiendo en una circunferencia un pentágono, cuadrilátero ó triángulo, y trazando por uno, dos ó tres vértices respectivamente tangentes á la circunferencia, podrán considerarse estas figuras como exágonos inscriptos en los que uno, dos ó tres pares de vértices consecutivos se han reunido en un punto, y el teorema anterior será aplicable, porque no depende de la longitud de los lados del exágono.

Fundados en esta observacion diremos:

1.° *En todo pentágono inscripto en una circunferencia, el punto de concurso de la tangente en un vértice con el lado opuesto, y las intersecciones de los otros cuatro lados dos á dos, son tres puntos en línea recta.*

2.° *En todo cuadrilátero inscripto, las tangentes en dos vértices opuestos se cortan sobre la recta que une los puntos de concurso de los lados opuestos.*

---

1 Este teorema es un caso particular del *exagrama místico* que Pascal descubrió á los 16 años de edad (1639), y del que dedujo cuatrocientos corolarios.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

3.° *En todo cuadrilátero inscripto, el punto de concurso de dos lados opuestos y los puntos en que las prolongaciones de los otros dos lados opuestos encuentran á las tangentes trazadas por los extremos de uno de los primeros, son tres puntos en línea recta.*

4.° *En todo triángulo inscripto, los tres puntos de intersección de los lados con las tangentes tiradas por los vértices opuestos están en línea recta.*

Teorema. *(Fig. 38).*

82. *En todo exágono circunscrito á un círculo, las rectas* AD, BE, CF *que unen los vértices opuestos se cortan en un mismo punto* O.

En efecto: considerando los lados BC, DE, EF y FA como cuatro tangentes fijas, y los no consecutivos AB y CD como dos posiciones de una tangente móvil, vemos que la AB está cortada en los puntos B, H, L, A, y la CD lo está, por las mismas tangentes, en C, D, M, N; luego [71]

$$(BHLA) = (CDMN).$$

Tomando E y F para centros de dos haces cuyos radios pasen respectivamente por los puntos anteriores, será

$$(E, BHLA) = (F, CDMN);$$

pero estos haces tienen un radio comun EL, FM, luego las intersecciones O, D, A de EB con FC, EH con FD y EA con FN están en línea recta, es decir que las diagonales EB y FC se cortan sobre la AD; por consiguiente las tres concurren en un mismo punto O. [1]

83. Circunscribiendo á una circunferencia un pentágono, cuadrilátero ó triángulo, y considerando uno, dos ó tres puntos de contacto respectivamente como vértices de ángulos cir-

---

1 Este teorema se debe á Brianchon.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

cunscritos, podrán mirarse las mencionadas figuras como exágonos circunscritos en los que uno, dos ó tres ángulos son iguales á dos rectos; y el teorema anterior será aplicable á ellas, puesto que es independiente del valor de los ángulos del exágono.

De esta observacion se deduce:

1.° *En todo pentágono circunscrito á un círculo, la recta que une un vértice con el punto de contacto del lado opuesto, y las dos diagonales que unen los otros cuatro vértices, se cortan en un mismo punto.*

2.° *En todo cuadrilátero circunscrito á un círculo, las rectas que unen los puntos de contacto de lados opuestos se cortan en el punto de interseccion de las diagonales.*

3.° *En todo cuadrilátero circunscrito, la recta que une dos vértices opuestos, y las que unen los otros dos con los puntos de contacto de dos lados adyacentes á uno de los primeros vértices, son tres rectas que se cortan en un punto.*

4.° *En todo triángulo circunscrito á un círculo, las tres rectas de union de los vértices con los puntos de contacto opuestos, concurren en un punto.*

Teorema. *(Fig. 39).*

81. *Si dos triángulos* ABC, A'B'C' *tienen sus vértices colocados dos á dos sobre tres rectas concurrentes en* O, *sus lados se cortan dos á dos en puntos* a, b, c *en línea recta.*

Sean D, E, F los puntos en que la recta *ab* encuentra á las tres concurrentes. Es evidente que

$$(a, \mathrm{OBEB'}) = (b, \mathrm{OBEB'}),$$

luego

$$(\mathrm{OADA'}) = (\mathrm{OCFC'}),$$

por consiguiente las rectas AC, DF ó *ab* y A'C' concurren en un mismo punto *c*, ó lo que es igual, los puntos *a*, *b*, *c* están en línea recta.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema recíproco.

85. *Si los lados de dos triángulos* ABC, A'B'C' *se cortan dos á dos en tres puntos* a, b, c *situados en línea recta, sus vértices están situados dos á dos en tres rectas concurrentes.*

Sean G y H los puntos en que AC y A'C' cortan á BB'.

Es evidente que

$$(B, aEbc) = (B', aEbc),$$

luego

$$(AGCc) = (A'HC'c);$$

por consiguiente las rectas AA', GH ó BB' y CC' concurren en un mismo punto O.

Nota 1.ª Los dos teoremas precedentes están comprendidos en el corolario del número **45**. En efecto: prolongando BA y BC hasta que encuentren respectivamente á B'A' y B'C' tambien prolongados, se forma un cuadrilátero B*a*B'*b*, del que BB' es una diagonal; y como desde un punto O de ésta tenemos dos transversales OAA', OCC', las rectas AC, A'C' que unen los puntos A y A' respectivamente con C y C' concurren en un punto *c* de la otra diagonal *ab*, luego *a*, *b* y *c* están en línea recta.

De un modo semejante demostrariamos el recíproco.

Nota 2.ª Son ciertos los dos teoremas anteriores para dos figuras rectilíneas cualesquiera, cuyos vértices estén en rectas concurrentes ó cuyos lados se corten en una misma recta.

Por manera que estas dos condiciones son consecuencia una de otra. El punto de concurso se llama *centro de homología*, y la recta *eje de homología*; las figuras se llaman *homológicas*, denominacion debida á Poncelet, si bien los teoremas particulares se deben á Desargues. Haciendo que una de las figuras homológicas gire alrededor del eje de homología saliendo fuera del plano, las rectas AA', BB', CC' siguen concurriendo en O, esto es, son perspectivas. [1]

---

1 Para conocer el inmenso partido que se puede sacar de la proyeccion central ó perspectiva, pueden verse, entre otras, las obras siguientes: *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, por Poncelet, Paris 1865 y 1866; *Elementos de Geometría proyectiva*, por Cremona, traducidos por Dewulf, Paris 1875.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

IV.—Proporcion armónica.

86. Cuatro puntos en línea recta están en *proporcion armónica* cuando alguna de sus relaciones anarmónicas tiene el valor particular — 1.

Si $(abcd) = -1$ *(Fig. 40)*, los puntos a, b, c, d están en proporcion armónica.

De $(abcd) = -1$ se deduce

$$\frac{ca}{cb} = -\frac{da}{db},$$

donde vemos que el punto c divide la recta ab en dos segmentos aditivos, y el d la divide en dos sustractivos, siendo la razon de los primeros igual en valor absoluto á la de los segundos. Por esto se dice tambien que los puntos c y d *dividen armónicamente* el segmento ab, ó que son *conjugados armónicos* con respecto á ab.

La expresion $(abcd) = -1$ puede escribirse así

$$(dcba) = -1 \quad ó \quad \frac{bd}{bc} = -\frac{ad}{ac},$$

luego tambien los puntos a y b son conjugados armónicos con respecto á cd, ó dividen armónicamente el segmento cd.

Segun el número **21**, uno de los puntos c, d está entre a y b y el otro en la prolongacion de ab, los dos á la derecha de o, medio de ab, y de b respectivamente, ó los dos á la izquierda de o y a. Si c está en medio de ab su conjugado d se aleja al infinito, y recíprocamente el conjugado de un punto en el infinito, con respecto á un segmento ab, es el punto medio o de éste.

Dados tres puntos de una proporcion armónica, se determina el cuarto por el procedimiento general de las relaciones anarmónicas [**67**], sin otra particularidad que tomar $bn = bn'$ hácia distintos lados de XY, puesto que r vale — 1.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TEOREMA. *(Fig. 41.)*

87. *Si desde un punto* d *se trazan transversales que encuentren á los lados de un ángulo* MON, *la recta determinada por el vértice* O *y la interseccion* i *de las* ab′ *y* ba′ *que unen los extremos opuestos de dos segmentos interceptados por el ángulo, es el lugar geométrico de los puntos armónicos conjugados del* d *con relacion á dichos segmentos.*

Sea c el punto en que Oi encuentra á la transversal dba. Considerando ésta como fija, tenemos [**37** y **50**]

$$\frac{a'a}{a'O} : \frac{b'b}{b'O} = \frac{da}{db}, \quad \frac{a'a}{a'O} : \frac{b'b}{b'O} = -\frac{ca}{cb},$$

luego
$$\frac{da}{db} = -\frac{ca}{cb} \quad \text{ó} \quad (abcd) = -1.$$

lo que demuestra que c es conjugado armónico de d con respecto al segmento ab.

Trazando ahora una transversal cualquiera, $db''a''$ por ejemplo, tendremos [**68**]

$$(abcd) = (a''b''c''d),$$

luego
$$(a''b''c''d) = -1.$$

88. Segun este teorema, si la transversal dba gira alrededor del punto d, el armónico conjugado de éste con relacion al segmento interceptado por el ángulo MON recorre la recta OK; por esta razon OK se llama *pólar* del punto d con relacion al ángulo MON, y el punto d *polo* de la OK.

Es indudable que si el polo está fuera del ángulo la polar estará dentro y vice-versa.

89. Se llama *haz armónico* todo haz de cuatro rectas, alguna de cuyas relaciones anarmónicas es igual á — 1.

Todo haz cuyos radios pasan por cuatro puntos a, b, c, d en proporcion armónica, es armónico [**68**], y cortándolo por una

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

transversal cualquiera quedará ésta dividida armónicamente; los puntos del radio que pasa por *c* tendrán sus conjugados armónicos en el que pasa por *d*, y los del O*a* estarán en O*b*. Por esto, los radios O*c*. O*d* se llaman conjugados armónicos con respecto al ángulo *a*O*b*, y los O*a*, O*b* lo son tambien con respecto al ángulo *c*O*d*.

Corolarios.

90. 1.° *Si desde un punto* d *se trazan varias transversales que encuentren á los lados de un ángulo* MON (Fig. 41), *las rectas* ab', ba' *etc. que unen los extremos opuestos de dos segmentos de las transversales interceptados por los lados del ángulo, se cortan dos á dos en la polar del punto* d *con respecto al ángulo* MON.

En efecto: todas las rectas O*i*, O*i'*... deben determinar sobre una misma transversal, *dba* por ejemplo, un punto conjugado del *d* con respecto al segmento *ab*, y como este punto es único se confundirán todas en una sola, que será la polar OK del punto *d* con respecto al ángulo MON.

91. 2.° *Si tenemos tres rectas* OA, OB, OD (Fig. 42) *concurrentes en* O, *y desde diferentes puntos* d, d'... *de una de ellas* OD *se trazan pares de transversales que encuentren á las otras dos* OA, OB, *las rectas que unen los extremos opuestos de los segmentos de cada par interceptados por estas dos concurrentes se cortan sobre el radio armónico conjugado de* OD *con respecto al ángulo* AOB.

Segun el corolario anterior, dos rectas tales como *ab'*, *a'b* se cortan en la polar del punto *d* con respecto al ángulo AOB; pero todos los puntos de OD tienen la misma polar OC; luego todas las rectas tales como *ab'*, *a'b* se cortarán en la OC.

92. Ahora podemos resolver, sin emplear otro instrumento que la regla, los problemas siguientes:

1.° *Dado un punto* d *de una recta, hallar su armónico conjugado con relacion á un segmento* ab *de dicha recta.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Constrúyase un ángulo AOB (*Fig.* 42) cuyos lados pasen por *a* y *b*, trácese desde *d* una transversal *db'a'*, y determínese por interseccion de *ab'* con *ba'* el punto *i*, que, unido al vértice O del ángulo, da la polar OC del punto *d*, y por tanto el punto *c* conjugado del *d* con respecto á *ab*.

La misma construccion se empleará para determinar la polar de un punto con relacion á un ángulo dado; y para hallar el radio armónico conjugado del OD con respecto á un ángulo AOB.

El problema *hallar el polo de una recta con respecto á un ángulo dado*, tiene infinitas soluciones, porque á una polar OC corresponden como polos todos los puntos del radio OD conjugado armónico de OC.

93. 2.º *Dadas dos rectas que no se pueden prolongar, trazar por un punto dado otra recta, tal que si las tres se prolongasen concurrieran en un mismo punto.*

Sean MN y PQ las dos rectas dadas, *m* el punto dado, que podrá estar dentro del ángulo de aquellas (*Fig.* 43) ó fuera.

Desde el punto dado *m* trácense dos rectas *mab*, *ma'b'* que corten á las dadas en cuatro puntos; únanse éstos dos á dos por dos nuevas rectas *ab'*, *a'b*, que se cortarán en un punto *n*.

Repitiendo la misma construccion para el punto *n* y las rectas dadas se determina un punto *m'* de la recta pedida. Uniendo *m* con *m'* está resuelto el problema, puesto que, segun el corolario del número **30**, la recta XY determinada por las intersecciones *m*, *m'* es la polar del punto *n* con respecto el ángulo de MN y PQ; luego XY pasa por el punto de concurso de MN y PQ.

Teorema. (*Fig.* 44.)

94. *En un haz armónico, toda transversal paralela á uno de los radios queda dividida por los otros tres en dos partes iguales.*

En efecto: el haz armónico (O, ABCD) determina sobre una

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

transversal *ab* paralela á OD cuatro puntos *a, b, c, d* en proporcion armónica; pero hallándose el cuarto punto *d* en el infinito, su conjugado *c* debe ser el punto medio de *ab* [**86**].

Teorema recíproco.

95. *Si una transversal paralela á un radio de un haz queda dividida por los otros tres en dos partes iguales, el haz es armónico.*

Siendo *c* el punto medio de *ab*, su conjugado está en el infinito, punto de encuentro del radio OD con la transversal *ab*; se ve, pues, que el haz determina en una transversal *ab* cuatro puntos armónicos, luego es armónico.

Corolarios.

96. 1.° *Si dos radios conjugados* OC, OD (Fig. 44) *de un haz armónico son perpendiculares entre sí, son bisectrices del ángulo* AOB *que forman los otros radios, y del suplemento* A'OB.

Trazando una transversal *ab* perpendicular á OC, será paralela á OD, luego $ca = cb$. De aquí se deduce que los triángulos rectángulos O*ca*, O*cb* son iguales, luego *áng.* $aOc =$ *áng.* bOc, lo que prueba que OC es bisectriz del ángulo AOB, y es claro que la perpendicular OD lo será del A'OB adyacente al AOB, toda vez que las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

97. Recíprocamente. *Las bisectrices de un ángulo* AOB *y del adyacente* A'OB *forman con los lados del ángulo un haz armónico.*

Trazando una transversal *ab* perpendicular á OC será paralela á OD; pero los triángulos rectángulos O*ca*, O*cb* son iguales, por tener un cateto comun O*c* y un ángulo agudo igual, luego $ca = cb$; por consiguiente el haz (O, ABCD) es armónico [**95**].

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Obsérvese que el vértice del ángulo se hallará en la circunferencia descrita sobre el segmento de la transversal que interceptan las bisectrices, considerado como diámetro, y que, por consiguiente, todas las circunferencias descritas sobre los segmentos de varias transversales interceptados por las bisectrices pasan por un mismo punto.

98. 2.° *Si cuatro puntos de una recta están en proporcion armónica, describiendo una circunferencia sobre uno de los segmentos conjugados como diámetro, y uniendo un punto cualquiera de la curva con los cuatro puntos dados, las rectas que pasan por los extremos del diámetro son bisectrices del ángulo que forman las otras dos y del adyacente.*

Las cuatro rectas forman un haz armónico, y las que pasan por los extremos del diámetro son rectangulares, luego este corolario es consecuencia del 1.°

99. Prolongando los lados opuestos de un cuadrilátero ABCD (*Fig.* 45) hasta su encuentro en E y F, se forma una figura ABCDEF que ha recibido el nombre de *cuadrilátero completo.*

Tiene tres diagonales: las AC y BD del cuadrilátero simple ABCD, y la EF que une los puntos de concurso de los lados opuestos.

Teorema. (*Fig.* 45).

100. *Los puntos medios* m, n, p *de las tres diagonales de un cuadrilátero completo están en línea recta.*

Considerando el triángulo FDC cortado por la transversal EA, se tiene [**41**]

$$\frac{AD}{AF} : \frac{BC}{BF} = \frac{ED}{EC};$$

ó sea

$$\frac{AF}{AD} : \frac{BF}{BC} = \frac{EC}{ED} \qquad [a].$$

Uniendo los puntos medios G, H, L de los lados del mismo triángulo por medio de rectas, la GL pasará por el punto medio m de la diagonal AC, LH pasará por n, medio de la BD, y HG por p, medio de EF.

Sustituyendo los seis segmentos de la igualdad [a] por sus mitades respectivas, será

$$\frac{mG}{mL} : \frac{nH}{nL} = \frac{pG}{pH}.$$

Tenemos, pues, que en el triángulo GHL, los puntos m y n determinan en dos lados LG, LH razones segmentarias proporcionales á los segmentos que el punto p determina en el tercer lado GH: luego los tres puntos m, n, p estarán en línea recta [**12**].

TEOREMA. (*Fig.* 46).

101. *Los cuatro lados de un cuadrilatero completo* ABCDEF, *las tres diagonales, y las dos rectas que unen los puntos* E *y* F *con la interseccion* G *de las diagonales interiores, son nueve lineas divididas armónicamente.*

La simple inspeccion de la figura manifiesta que Ed es polar del punto F con respecto al ángulo AED, lo que demuestra el teorema para BC, AD y FG. Tambien se ve que Fa es polar de E con relacion al ángulo AFB, lo que demuestra el teorema para CD, AB y EG.

Llamando H′ al punto en que la diagonal BD encuentra á EF, vemos que AH es polar de H′ con relacion á EAF: luego el teorema es cierto para BD y EF.

Por último, H′C es polar de A con respecto al ángulo BH′E, lo que demuestra el teorema para la diagonal AC.

Se notará que cada lado del cuadrilátero es dividido armónicamente por uno de los vértices E, F y uno de los puntos a, b, c, d en que las transversales EG y FG encuentran á los lados: cada diagonal está dividida armónicamente por las otras

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

dos; y las transversales EG y FG están divididas por dos lados opuestos del cuadrilátero.

102. Escolio. Las rectas *ad* y *bc* concurren en un punto de la diagonal BD, y las *ab* y *dc* en uno de la AC *aunque las transversales* E*d*, F*a* *no pasen por* G [**16**]. Si las transversales E*d* y F*a* pasan por G, los mencionados puntos de concurso serán los conjugados armónicos H′ y H en que las diagonales BD y AC encuentran á la tercera diagonal EF; porque considerando las concurrentes AE, AF, como los pares de rectas ED y FB, E*d* y F*a* se cortan en puntos C y G en línea recta con A, las rectas BD y *ad* concurren en un mismo punto de la EF [**53**]. De un modo análogo, considerando las concurrentes BE, BF y los pares de rectas EG y FG, ED y FD, cuyas intersecciones G y D están en línea recta con B, se demuestra que *ab*, AC y *dc* concurren en H.

Por último, haremos notar que los lados del cuadrilátero *abcd* están armónicamente divididos por las tres diagonales del ABCDEF.

103. Las relaciones

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = \frac{aC}{aB},$$

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{aC}{aB},$$

de los teoremas de Menelao [**41**] y de Ceva [**54**], pueden escribirse en esta forma:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1,$$

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1 \qquad [a]$$

Si en un lado, BC por ejemplo, del triángulo ABC se determina el punto conjugado armónico del *a* con relacion á dicho lado, y le llamamos *a*′, será

$$\frac{aB}{aC} = -\frac{a'B}{a'C};$$

llamando b' y c' á los puntos conjugados armónicos de b y c con respecto á los lados AC y AB en que éstos se hallan situados, tendremos tambien

$$\frac{bC}{bA} = -\frac{b'C}{b'A} \quad , \quad \frac{cA}{cB} = -\frac{c'A}{c'B} .$$

Segun esto, si en una de las relaciones [a] se sustituye un número impar de puntos a, b, c por sus conjugados resultará la otra relacion: y sustituyendo dos de los tres puntos a, b, c por sus conjugados la relacion no se altera.

Ahora bien, cuando se verifica la primera de las relaciones [a], los puntos a, b, c están en línea recta, y cuando se verifica la segunda, las tres rectas Aa, Bb, Cc concurren en un mismo punto, luego

Cuando en los lados de un triángulo tengamos tres puntos en línea recta se podrán obtener tres rectas concurrentes en un punto, sustituyendo un número impar de puntos por sus conjugados armónicos; y recíprocamente, cuando tengamos tres rectas partiendo de los vértices y concurrentes en un punto, se obtendrán del mismo modo tres puntos en línea recta. Cuando tengamos tres puntos en línea recta se obtendrán otros tres en línea recta cambiando dos de los puntos por sus conjugados armónicos; y cuando tengamos tres rectas concurrentes en un punto se hallarán de igual manera otras tres concurrentes.

Esta observacion nos permite enunciar varias proposiciones.

1.ª *Si un triángulo se corta por una transversal en tres puntos* a, b, c, *las rectas que unan los puntos* a′, b′, c′, *conjugados armónicos de* a, b, c *respecto de los lados del triángulo, con los vértices opuestos, se cortan en un mismo punto.*

2.ª *Si un triángulo se corta por una transversal en tres puntos* a, b, c, *uno cualquiera de estos puntos está en línea recta con los conjugados armónicos de los otros dos.*

3.ª *Si un triángulo se corta por una transversal en tres puntos* a, b, c, *las rectas que unan dos de estos puntos* a, b *y el conjugado* c′ *del tercero con los vértices opuestos, concurren en un mismo punto.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

4.ª *Dado un punto* I *en el plano de un triángulo, las polares del mismo punto con relacion á los tres ángulos, encuentran á los lados opuestos en tres puntos en línea recta.*

5.ª *Las polares de* I *con relacion á dos ángulos del triángulo y la recta que une el punto* I *con el tercer vértice, concurren en un mismo punto.*

6.ª *La polar de* I *con relacion á un ángulo* A *del triángulo y las rectas que unen* I *con los otros vértices* B *y* C, *encuentran á los lados opuestos en tres puntos en línea recta.*

7.ª *Las bisectrices de los tres ángulos externos de un triángulo encuentran á los lados opuestos en tres puntos en línea recta.*

8.ª *Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo y del tercer ángulo interno, concurren en un mismo punto.*

9.ª *Las bisectrices de dos ángulos de un triángulo y la del suplemento del tercero, encuentran á los lados opuestos en tres puntos en línea recta.*

101. Hemos visto [**18** y **61**] que considerando dos á dos tres circunferencias dadas y trazando sus tangentes comunes exteriores é interiores, los puntos a, b, c (*Fig.* 25) en que las exteriores encuentran á las respectivas líneas de los centros están en línea recta; y las tres rectas que unen cada uno de los centros con los a', b', c' en que las tangentes interiores encuentran á las líneas de los centros, concurren en un punto.

Una de estas propiedades es consecuencia de la otra, en virtud de la observacion general expuesta en el número anterior, toda vez que a', b', c' son puntos conjugados armónicos de a, b, c con respecto á los lados del triángulo ABC; y de cualquiera de ellas pueden deducirse consecuencias bastante curiosas.

Consideremos los tres puntos a, b, c en línea recta, y cambiemos algunos de ellos por sus conjugados.

Cambiando a y b por a' y b' se deduce: a', b' y c en línea recta,
a y c por a' y c' — a', c' y b en línea recta,
b y c por b' y c' — b', c' y a en línea recta.

Cambiando a por a', las rectas Aa', Bb, Cc son concurrentes,
b por b' — Bb', Aa, Cc son concurrentes,
c por c' — Aa, Bb, Cc' son concurrentes.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

V.—Division homográfica.

105. Si tenemos dos líneas rectas y suponemos en cada una dos puntos fijos y uno móvil, de modo que los cocientes de las distancias de éste á los fijos respectivos estén en relacion constante, los puntos móviles forman en las rectas dos *divisiones homográficas*.

Sean a, b los puntos fijos de la primera recta y c el móvil, sean a', b', c' los análogos en la otra: estas rectas se hallarán homográficamente divididas si se verifica la relacion

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = constante.$$

106. Segun esta definicion, el teorema del número **36** nos dice que cuando dos rectas se cortan por dos transversales fijas que parten de un punto P, toda transversal móvil alrededor de dicho punto determina en las primeras rectas dos divisiones homográficas; y pudiendo considerar como fijas dos transversales cualesquiera, enunciaremos así dicho teorema:

Si dos rectas se cortan por varias transversales que parten de un mismo punto, quedan divididas homográficamente. [1]

Los puntos fijos son dos cualesquiera de la primera recta y sus homólogos en la otra. El punto de concurso de ambas rectas es homólogo de sí mismo en las dos divisiones, porque una de las transversales que parten de P puede pasar por dicho punto.

107. Recíprocamente. *Si hacemos coincidir dos puntos fijos homólogos de dos rectas divididas homográficamente, las rectas que unan dos dos á dos los demás puntos homólogos concurren en un mismo punto* [**38**]. [2]

108. Cuando dos rectas concurrentes se cortan por varias transversales que parten de un punto, pueden considerarse como fijas dos cualesquiera de ellas [**36**]; luego, teniendo pre-

---

1 Chasles, *Traité de Géométrie supérieure*, núm. 102.
2 Id. id. núm. 103.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

sente el recíproco anterior, diremos: en dos rectas divididas homográficamente pueden considerarse como fijos dos puntos cualesquiera de la primera y los homólogos de la segunda, siendo todos los demás diversas posiciones del punto móvil.

109. Supongamos dos rectas divididas homográficamente. Sean a, b, c, d cuatro puntos de la primera y a', b', c', d' los correspondientes de la segunda. Consideremos como fijos los a y b, a' y b', y será [**105**]

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} \quad \text{ó} \quad \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'},$$

esto es $$(abcd) = (a'\ b'\ c'\ d') ;$$

luego *cuando dos rectas están divididas homográficamente, cuatro puntos de la primera y los correspondientes de la segunda tienen iguales relaciones anarmónicas.*

Recíprocamente, *cuando dos rectas están divididas por puntos que se corresponden, de modo que la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera de la primera sea igual á la relacion anarmónica de los cuatro puntos correspondientes de la segunda, las rectas están divididas homográficamente.*

Si a, b, c, d son cuatro puntos de la primera division y a', b', c', d' los correspondientes, tenemos por hipótesis

$$(abcd) = (a'\ b'\ c'\ d'),$$

de donde $$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} \qquad [a].$$

Tomemos tres puntos de los anteriores a, b, d y un cuarto e, y los correspondientes a', b', d', e', y será

$$(abde) = (a'\ b'\ d'\ e'),$$

de donde $$\frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{ea}{eb} : \frac{e'a'}{e'b'} \qquad [b].$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

De esta manera pudiéramos continuar indefinidamente. De las relaciones [a], [b], etc. se deduce

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{ea}{eb} : \frac{e'a'}{e'b'} \cdots\cdots,$$

lo que demuestra que los puntos $a, b, c, d, e\ldots, a', b', c', d', e'\ldots$ forman dos divisiones homográficas.

Nota. Las conclusiones anteriores se deducen tambien de los teoremas números **107** y **106**. El **107** demuestra que dos rectas divididas homográficamente pueden colocarse de manera que uniendo los puntos de una con los homólogos de la otra las rectas de union concurran en un mismo punto; luego cuatro puntos cualesquiera de la primera recta tendrán iguales relaciones anarmónicas que los correspondientes de la segunda [**68**].

Recíprocamente, si cuatro puntos cualesquiera a, b, c, d de la primera recta tienen igual relacion anarmónica que los correspondientes a', b', c', d' de la segunda, haciendo coincidir dos puntos homólogos a y a' las rectas que unan b con b', c con c', d con d' serán concurrentes [**73**]; considerando otros cuatro puntos a', b', d', e', la recta ee' pasará por el punto de concurso de las tres anteriores, y así sucesivamente. Siendo, segun esto, concurrentes todas las rectas bb', cc', dd', ee' etc. las dos divisiones son homográficas [**106**].

Se habrá observado ya que la relacion anarmónica es un caso particular de la division homográfica: aquel en que los puntos de division son cuatro.

110. Si nos proponemos marcar una division homográfica de otra dada $a, b, c, d, e\ldots$, tomaremos tres puntos arbitrarios a', b', c' en linea recta y determinaremos un cuarto punto d por la condicion

$$(a'\,b'\,c'\,d') = (abcd),$$

siguiendo la regla del número **67**; determinando sucesivamente otros por las condiciones

$$(a'\,b'\,c'\,e') = (abce), \quad (a'\,b'\,c'\,f') = (abcf) \text{ etc.}$$

se tendrán dos divisiones homográficas [**109**].

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

111. Dos haces de rectas concurrentes son *homográficos* si cortándolos por transversales quedan éstas divididas homográficamente.

Es claro que si dos transversales están divididas homográficamente por dos haces, otras dos transversales cualesquiera lo estarán tambien, porque las nuevas divisiones serán homográficas con respecto á las primeras [**106**]; luego serán homográficas entre sí.

112. *Si varios radios que parten de dos puntos fijos se cortan dos á dos en puntos situados en línea recta, los haces que forman son homográficos.* [1] [**49**].

Observacion. La recta que une los centros de los dos haces es un radio homólogo de sí mismo comun á los dos haces.

113. Recíproco. *Haciendo coincidir dos radios homólogos de dos haces homográficos los demás se cortan dos á dos en puntos situados en línea recta.* [2] [**51**].

Teorema.

114. *Si dos rectas están divididas homográficamente, y en la recta que une dos puntos de division homólogos marcamos dos puntos fijos* P y P′, *uniendo* P *con los puntos de division de una recta y* P′ *con los respectivos homólogos de la otra, las rectas de union se cortan dos á dos en puntos situados en línea recta.* [3]

Porque las rectas que parten de P y P′ forman dos haces homográficos con un radio comun PP′.

Si las divisiones homográficas tienen un punto homólogo comun *a*, es claro que la recta lugar geométrico de las intersecciones de los radios que parten de P y P′, pasará por *a;* porque este punto pertenece en tal caso al lugar geométrico mencionado.

---

1 Chasles, núm. 104.
2 Id. núm. 105.
3 Id. núm. 106.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema.

115. *Dados dos haces homográficos, si por la interseccion de dos radios homólogos trazamos dos transversales, las rectas que unen los puntos de interseccion de una transversal y un haz con los de la otra tranversal y el otro haz concurren en un mismo punto.* [1]

Porque las transversales quedan divididas homográficamente por los haces y tienen un punto homólogo comun.

Si los haces homográficos tienen un radio homólogo comun, el punto de concurso estará en este radio.

Teorema.

116. *Si dos rectas están divididas homográficamente, y unimos dos puntos de la primera con los homólogos de la segunda tomados inversamente, las rectas de union se cortan siempre sobre una misma recta fija.*

Sea AB′ (*Fig.* 47) el punto de concurso de las dos rectas, que designaremos por A cuando se considere como punto de la recta M y por B′ cuando se considere como punto de la recta N. Sea A′ el punto de la N correspondiente al punto A de la M, y B el punto de la M correspondiente al B′ de la N.

Segun esto, á los puntos *a*, *b*, A, B de la recta M corresponden en la N los *a*′, *b*′, A′, B′; luego [**109**]

$$(ab\mathrm{AB}) = (a'\,b'\,\mathrm{A}'\,\mathrm{B}');$$

permutando las letras del segundo miembro de modo que en la igualdad resultante los puntos A y B′ sean homólogos, tendremos

$$(ab\mathrm{AB}) = (b'\,a'\,\mathrm{B}'\,\mathrm{A}')\,;$$

---

1 Chasles, núm. 107.

luego las rectas que unen *a* con *b'*, *b* con *a'* concurren en un mismo punto de la BA' [**74**], y como ésta es fija, queda demostrado el teorema. [1]

Si AB' fuese un punto homólogo comun á las dos divisiones, la recta *mnp* pasaria por dicho punto, y seria la polar del punto de concurso de las rectas *aa'*, *bb'*, *cc'* etc. con respecto al ángulo que forman las M y N.

Corolario.

117. *Si en dos rectas* M *y* N *tomamos dos séries de tres puntos cualesquiera* a, b, c *y* a', b', c' *que se correspondan uno á uno, las rectas* ab' *y* a'b, ac' *y* a'c, bc' *y* b'c *se cortan en tres puntos* m, n, p *situados en línea recta.* [2]

Puesto que el razonamiento del teorema somete la posicion de los puntos *a*, *b*, *c* y *a'*, *b'*, *c'* á la única condicion de que pertenezcan á dos divisiones homográficas, y esto se puede siempre suponer de tres puntos marcados arbitrariamente en dos líneas rectas [**110**].

Teorema. *(Fig. 48.)*

118. *Dados dos haces homográficos, si consideramos dos radios* OA, OB *del primero y los dos correspondientes* O'A', O'B' *del segundo, la recta que una los puntos* m, n *en que los primeros radios encuentran á los segundos, tomados inversamente, pasará siempre por un mismo punto fijo.*

Sea O*a* el radio que en el primer haz corresponde al O'O del segundo, O'*a'* el radio del segundo haz que corresponde al OO' del primero, y P el punto de encuentro de O*a* y O'*a'*. Como los radios O'O y OO' son fijos, sus correspondientes

---

1 Es la demostracion de Chasles, número 108, modificada en su segunda parte.

2 Chasles, núm. 109.

Oa y $O'a'$, y por tanto el punto P, tambien lo son: vamos ahora á demostrar que los puntos m, n están en línea recta con el punto fijo P.

Tenemos, en efecto:

$$(O, ABO'a) = (O', A'B'a'O);$$

haciendo homólogos los radios OO' y $O'O$ que coinciden será

$$(O, ABO'a) = (O', B'A'Oa'),$$

luego los radios OA y $O'B'$, OB y $O'A'$, Oa y $O'a'$ se cortan en tres puntos m, n, P en línea recta. [1]

Corolario. *(Fig. 49).*

119. *Si tres ángulos* A, B, C *subtienden una misma cuerda* OO', *tomándolos dos á dos subtienden otras tres cuerdas, las cuales concurren en un mismo punto.* [2]

Del punto O parten tres radios OA, OB, OC, y del O' otros tres O'A, O'B, O'C, y podemos suponer que los primeros corresponden á los segundos bajo el punto de vista de la homografía; luego la recta que una los puntos de interseccion de dos de ellos OA, OB con sus correspondientes O'B, O'A tomados inversamente, es decir la recta mm', pasará por un punto fijo P.

Considerando otros dos radios OA, OC del primer haz y los correspondientes O'C, O'A del segundo tomados inversamente, tendremos la recta nn', que pasará por el punto fijo.

Lo mismo sucede con pp', que resulta de considerar OB, OC y O'C, O'B.

---

1 Es la demostracion de Chasles, núm. 111, modificada en su segunda parte.

2 Chasles, núm. 112.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

CAPÍTULO TERCERO.

CONEXIONES ENTRE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES, EL TEOREMA DE TRANSVERSALES Y EL DE LA RELACION ANARMÓNICA.

120. Desenvueltas ya las teorías que inmediatamente se deducen de nuestro segundo principio fundamental [1], poco necesitamos esforzarnos para demostrar el principal papel que está llamado á desempeñar en la geometría moderna.

Importante y fecundo es el teorema de Menelao, relativo á los seis segmentos determinados en los lados del triángulo por una transversal rectilínea.

Carnot lo acredita fundando en él la interesante teoría de transversales «que no es en el fondo sino la de coordenadas» [1], Chasles lo confirma en su historia de la geometría diciendo: es una generalizacion del principio fundamental de la teoría de líneas proporcionales, á saber: *una recta trazada paralelamente á la base de un triángulo, divide á los lados en partes proporcionales*. Esta observacion basta, añade, para vislumbrar cuán útil puede ser en geometría este teorema. Conceptuándole digno de hacer su historia, le consagra una larga nota, la VI, donde despues de consignar que se atribuye indebidamente á Ptolomeo, quien le tomó de las *Esféricas* de Menelao, reseña el partido que de él han sacado, en el siglo IV Pappus, y en la

---

1 *Essai sur la théorie des transversales*, Paris, 1806.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

época moderna Finée, Stifel, Cardan, Frisius, J. Schoner, Maurolycus, Bressius, Mersenne, Stevin, Snellius, Beaugrand, Desargues, Pascal, Guarini, Schubert, Fuss y Carnot, aplicándole á cuestiones las más diversas de aritmética, geometría, trigonometría y mecánica.

Aun prescindiendo de tan preclaros antecedentes históricos y atendiendo sólo al teorema en sí, se concibe cual debe ser su importancia considerando que relaciona por una sencilla ecuacion de dos términos, y de seis en seis, los segmentos en que mútuamente se dividen cuatro rectas indefinidas trazadas al azar en un plano, toda vez que tres de ellas formarán, en general, un triángulo, y la cuarta será una transversal que encontrará á los tres lados del mismo.

Solamente hay un caso en que el teorema no puede aplicarse, y es aquel en que el triángulo se reduce á un punto situado á distancia finita ó en el infinito, es decir, en que tres de las rectas concurren en un mismo punto ó son paralelas.

Sea un triángulo ABC (*Fig.* 16) cortado por una transversal *abc*. Escribamos la relacion de los seis segmentos bajo la forma

$$\frac{cB}{bC} : \frac{aB}{aC} = \frac{cA}{bA};$$

suponiendo ahora que la transversal gire alrededor del punto *a* hasta pasar por el vértice A, los segmentos *b*A y *c*A se anulan, y sin embargo su razon no se anula ni es indeterminada, porque el primer miembro de la igualdad anterior adquiere el valor determinado

$$\frac{AB}{AC} : \frac{aB}{aC}.$$

¿Qué relacion deberá sustituir á $\frac{cA}{bA}$ en el caso actual? El teorema de Menelao no responde á esta pregunta, ni á la análoga que puede hacerse suponiendo paralelas tres de las rectas dadas.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

121. Demostrando la importancia y fecundidad del teorema de Menelao, hemos hecho el mejor elogio del nuestro, puesto que aquel es uno de los múltiples y variados casos particulares que éste comprende.

Dos transversales cualesquiera cortando á tres rectas concurrentes en un punto, presenta el caso general: supónganse paralelas las tres concurrentes, y resultará, por supresion de rectas iguales infinitamente grandes, el principio de proporcionalidad de los segmentos causados en dos rectas cualesquiera por tres paralelas [7]; hágase la hipótesis análoga en el teorema de Menelao, es decir supóngase la transversal paralela á un lado, y resultará, por la supresion tambien de rectas iguales, el principio de proporcionalidad entre los segmentos de dos concurrentes cortadas por dos paralelas [11, escolio 1°]. De estos dos principios de líneas proporcionales, pertenecientes al órden de teoremas á que dan lugar las rectas paralelas cortadas por transversales, el segundo es caso particular del primero, el caso en que dos puntos de las transversales situados en una misma paralela se unen reduciéndose á uno sólo, y por tanto la paralela es inútil; luego de las respectivas generalizaciones, pertenecientes á otro órden superior de teoremas á que dan lugar las rectas concurrentes cortadas por transversales, la segunda es un caso particular de la primera, el caso en que dos puntos de las transversales situados en una misma concurrente se unen reduciéndose á uno sólo, y por tanto la concurrente es inútil. Esto se demuestra (*Fig.* 16) observando que la igualdad $(CAba) = (BAca)$, comprendida en nuestro principio fundamental [1], no es otra cosa que el teorema de Menelao.

Para deducir del teorema relativo al triángulo cortado por una paralela á la base, el análogo relativo á los segmentos de dos transversales interceptados por tres paralelas, es necesario convertir el triángulo en trapecio, trazando la tercera paralela AA′ y añadiendo el paralelógramo ABA′B′ (*Fig.* 50), y sustituir los segmentos cA, cB por los iguales $c'A'$, $c'B'$; de este modo se obtiene $\frac{bA}{bC} = \frac{c'A'}{c'B'}$. Pues así tambien, para elevarse del teorema de Menelao al nuestro es necesario convertir el

triángulo ABC (*Fig.* 51) en trapezoide, trazando la tercera concurrente aA y añadiendo el trapecio ABA'B', y sustituir en la relacion de aquel teorema

$$\frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} : \frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} = \frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{C}} : \frac{a\mathrm{A}}{a\mathrm{A}},$$

las razones $\frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}}$ y $\frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{A}}$ por las iguales $\frac{c'\mathrm{B}'}{c'\mathrm{A}'}$ y $\frac{a\mathrm{B}'}{a\mathrm{A}'}$; así se tiene

$$\frac{c'\mathrm{B}'}{c'\mathrm{A}'} : \frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} = \frac{a\mathrm{B}'}{a\mathrm{A}'} : \frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{A}}.$$

Las consideraciones precedentes determinan de un modo preciso las conexiones del teorema de Menelao con el nuestro, y las de ambos con los de líneas proporcionales.

Convendrá resumirlas diciendo: 1.° el teorema de Menelao es un caso particular del expuesto en el número **4**; 2.° los teoremas de líneas proporcionales relativos al triángulo ó trapecio cortado por una paralela á la base ó bases, son casos particulares del de Menelao y del nuestro respectivamente; 3.° se pasa del teorema del triángulo al del trapecio sustituyendo algunos segmentos por otros iguales, y, de una manera análoga, se puede pasar del teorema de Menelao al **4**, sustituyendo algunas razones por otras iguales.

122. El teorema de la relacion anarmónica [**68**] no cede en importancia al de Menelao. Chasles lo ha demostrado brillantemente en su admirable *Tratado de Geometría superior* al que sirve de base: una sola proposicion, dice el autor, forma la base de toda la obra é introduce naturalmente el principio de los signos. Esta simple igualdad, la de dos funciones anarmónicas de segmentos y de senos [1], tiene algo de más general y de más primordial que las dos proposiciones que sirven de base á la Trigonometría y á la Geometría analítica [2]; porque éstas pueden considerarse como consecuencias de la primera.

---

1 Pronto veremos que la relacion anarmónica puede considerarse igualmente como funcion de senos que como funcion de segmentos.

2 Desenvolvimiento de sen $(a + b)$, y ecuacion de la línea recta.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Pues bien, este interesante teorema se deduce inmediatamente del nuestro [**4**], por una simple eliminacion de los segmentos que concurren en O, segun se ha visto en el número **69.**

123. Siendo el teorema de Menelao y el de la relacion anarmónica consecuencias de una misma proposicion, deben estar unidos por más puntos de contacto de los que se perciben á primera vista, y no carece de interés descubrir la dependencia y lugar respectivo de las tres proposiciones.

Generalmente aquellos dos teoremas se presentan como independientes uno de otro, con sus demostraciones propias. Chasles ha deducido, sin embargo, el primero del segundo [1] mediante la involucion, fundándose en que los vértices del triángulo y los puntos de interseccion de la transversal con los lados, pueden considerarse como los seis vértices de un cuadrilátero completo, cuyas proyecciones sobre una recta están en involucion, y en que los segmentos proyectados son dos á dos proporcionales á sus proyecciones; y tambien lo deduce empleando un haz de cuatro rectas cortado por dos transversales, una de las cuales es paralela á un radio del haz.

Nosotros añadiremos que el principio de la relacion anarmónica puede á su vez ser deducido del teorema de Menelao.

Sean, en efecto, dos transversales *abcd* y *a' b' c' d'* (*Fig.* 52). Trazando por *a* una paralela á la segunda transversal, y considerando el triángulo *abm* cortado por las transversales O*cn*, O*dp* será

$$\frac{cb}{ca} : \frac{nm}{na} = \frac{Ob}{Om}, \quad \frac{db}{da} : \frac{pm}{pa} = \frac{Ob}{Om},$$

de donde $\frac{cb}{ca} : \frac{nm}{na} = \frac{db}{da} : \frac{pm}{pa}$ ó $\frac{cb}{ca} : \frac{db}{da} = \frac{nm}{na} : \frac{pm}{pa}$;

pero $$\frac{nm}{na} : \frac{pm}{pa} = \frac{c'b'}{c'a'} : \frac{d'b'}{d'a'}:$$

luego $$\frac{cb}{ca} : \frac{db}{da} = \frac{c'b'}{c'a'} : \frac{d'b'}{d'a'}.$$

---

1 Número 352.

Conceptuamos del mayor interés para la ciencia analizar y descubrir los puntos de contacto entre las diversas proposiciones: las verdades aisladas no deben satisfacernos hasta encontrar el vinculo que las une á una teoría determinada, hasta saber el lugar que deben ocupar en la ciencia, la que será tanto más perfecta, cuanta mayor continuidad exista entre sus partes; y uno de los medios más adecuados para lograr este fin consiste, á nuestro juicio, en elevarse á puntos de vista generales, cuidando de no introducir en los enunciados ninguna idea que restrinja ó limite su natural alcance.

Buen número de teoremas geométricos se presentan como propiedades del triángulo, sin que esta idea sea esencial. Cierto que el triángulo resulta en los casos generales, y su consideracion como sujeto del enunciado abrevia y facilita el lenguaje, pero esta ventaja queda destruida por inconvenientes de más peso, siendo uno restringir el alcance del enunciado: consecuencia ineludible de la infraccion de las leyes lógicas en que incurrimos al presentar, como sujeto de una proposicion, una figura cuya existencia es accidental, y de cuyas propiedades no se hace uso alguno en la demostracion.

Ejemplo y prueba de lo dicho es el teorema de Menelao.

Se ha mirado esta proposicion como propiedad del triángulo, aunque dando más extension á la idea, suponiendo los lados indefinidos; pero ¿no ganará en generalidad el teorema prescindiendo de la figura, y considerando tan sólo dos rectas concurrentes y una transversal fija, segun lo hacemos en el número **37**? Es indudable que sí, porque de este modo se puede tratar el caso de una transversal fija paralela á cualquiera de las concurrentes, y tambien el de dos concurrentes en el infinito, hipótesis muy violentas en una figura cerrada como el triángulo.

Suponiendo, pues, dos concurrentes cortadas por una transversal fija y otra móvil alrededor de un punto P de la primera, tendremos

$$\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O} = \frac{Pa}{Pa'},$$

y como el segundo miembro es independiente de la direccion de la transversal móvil, el teorema de Menelao se enunciará como se ha visto en el número **37**.

Ahora es evidente la conexion entre el principio de la division homográfica [**106**], el de la relacion anarmónica y el teorema de Menelao.

Partiendo de la relacion (*Fig.* 15)

$$(abcP) = (a'\,b'\,c'\,P),$$

escrita bajo la forma

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{Pa}{Pb} : \frac{Pa'}{Pb'} \quad [a],$$

y suponiendo fijas las transversales Paa', Pbb', si consideramos un número indefinido de transversales móviles Pcc', Pdd', Pee' etc. y prescindimos del segundo miembro, será

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{ea}{eb} : \frac{e'a'}{e'b'} \cdots$$

que es el principio de la division homográfica. Si sólo consideramos dos transversales móviles, será

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'}$$

ó

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'},$$

que es el principio de la relacion anarmónica.

Si consideramos una transversal móvil y suponemos que una de las fijas pase por O, tendremos, tomando en cuenta el valor del segundo miembro,

$$\frac{ca}{cO} : \frac{c'a'}{c'O} = \frac{Pa}{Pa'},$$

que es el teorema de Menelao.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

124. A los tres principios que acaban de ocuparnos corresponden otros tres: 1.° haces homográficos [**112**]; 2.° haces anarmónicos [**76**]; 3.° teorema de Céva [**54**]. Todos tres están comprendidos en la relacion [a] del número **49**, así como los anteriores lo están en la relacion [a] del número **36**.

Si de los puntos fijos A y A′ (*Fig.* 26) parten pares de radios cuyas intersecciones O, α, β... estén en línea recta, considerando dos pares AO y A′O, Aa' y A′a como fijos y prescindiendo del segundo miembro de la relacion

$$\frac{ba}{b\mathrm{O}} : \frac{b'a'}{b'\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{A}'a}{\mathrm{A}'\alpha} : \frac{\mathrm{A}a'}{\mathrm{A}\alpha} \quad [a]$$

será

$$\frac{ba}{b\mathrm{O}} : \frac{b'a'}{b'\mathrm{O}} = \frac{ca}{c\mathrm{O}} : \frac{c'a'}{c'\mathrm{O}} = \frac{da}{d\mathrm{O}} : \frac{d'a'}{d'\mathrm{O}} = \ldots.$$

lo que demuestra que los haces A y A′ son homográficos.

Si sólo se consideran cuatro pares de radios será

$$\frac{ba}{b\mathrm{O}} : \frac{b'a'}{b'\mathrm{O}} = \frac{ca}{c\mathrm{O}} : \frac{c'a'}{c'\mathrm{O}}$$

ó bien

$$\frac{ba}{b\mathrm{O}} : \frac{ca}{c\mathrm{O}} = \frac{b'a'}{b'\mathrm{O}} : \frac{c'a'}{c'\mathrm{O}},$$

luego los haces (A, Oa' b' c') y (A′, Oabc) tienen iguales relaciones anarmónicas.

Por último, considerando un sólo par fijo AO, A′O, suponiendo que el segundo Aa', A′a se reduzca á la recta AA′, y tomando en cuenta el segundo miembro de la ecuacion [a], resulta (*Fig.* 27)

$$\frac{b\mathrm{A}}{b\mathrm{O}} : \frac{b'\mathrm{A}'}{b'\mathrm{O}} = -\frac{\alpha\mathrm{A}}{\alpha\mathrm{A}'},$$

que es el teorema de Céva.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

CAPÍTULO CUARTO.

APLICACION DE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES A LA TRIGONOMETRIA.

125. Hasta ahora nos hemos limitado á estudiar las relaciones entre segmentos de líneas rectas; ahora vamos á establecer, como prueba de las variadas aplicaciones á que se presta el principio del número **3**, algunas proposiciones análogas en las que los segmentos estarán reemplazados por senos de ángulos, la ecuacion de la línea recta y las fórmulas fundamentales de la Trigonometría.

Se habrá observado, sin duda, que las distancias $b\alpha$ y $b\gamma$ (*Fig.* 2) del orígen b de los segmentos de una transversal abc á las concurrentes PA y PC son los senos de los ángulos BPA, BPC que la concurrente PB forma con las otras dos, pues si bien estos senos en realidad son las razones $\frac{b\alpha}{bP}$, $\frac{b\gamma}{bP}$ de las ordenadas $b\alpha$ y $b\gamma$ al radio Pb, como en el principio del número **3** consideramos el cociente de los senos, podemos prescindir del radio, y mirar las distancias $b\alpha$ y $b\gamma$ como senos de los ángulos mencionados.

De esta observacion se infiere que nuestros principios fundamentales son igualmente útiles para descubrir relaciones entre segmentos de rectas, por la eliminacion de senos, segun se ha visto en este estudio, ó entre senos de ángulos, por eliminacion de segmentos, pudiendo servir tambien para descubrir ó demostrar relaciones entre rectas y senos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema. *(Fig. 28).*

126. *Si dos concurrentes* OM, ON *se cortan por una transversal fija* Paa' *y otra móvil* Pbb' *alrededor del punto* P *de la primera, la relacion*

$$\frac{\text{sen } ba'a}{\text{sen } ba'O} : \frac{\text{sen } b'aa'}{\text{sen } b'aO}$$

es constante é igual á $\frac{\text{sen PO}a}{\text{sen PO}a'}$.

En efecto:

$$\frac{\text{sen } ba'a}{\text{sen } ba'O} = \frac{ba}{bO} : \frac{a'a}{a'O}, \quad \frac{\text{sen } b'aa'}{\text{sen } b'aO} = \frac{b'a'}{b'O} : \frac{aa'}{aO},$$

luego $$\frac{\text{sen } ba'a}{\text{sen } ba'O} : \frac{\text{sen } b'aa'}{\text{sen } b'aO} = \frac{Pa}{Pa'} : \frac{Oa}{Oa'} = \frac{\text{sen PO}a}{\text{sen PO}a'}.$$

127. Corolario. *Si un triángulo* ABC *se corta por una transversal* abc (Fig. 16), *se verifica la relacion*

$$\frac{\text{sen } b\text{BC}}{\text{sen } b\text{BA}} : \frac{\text{sen } c\text{CB}}{\text{sen } c\text{CA}} = \frac{\text{sen } a\text{AC}}{\text{sen } a\text{AB}}.$$

Es consecuencia inmediata del teorema, considerando las concurrentes AB, AC cortadas por la transversal fija *a*CB y la móvil *abc*.

Obsérvese la analogía entre esta proposicion y el teorema de Menelao.

Teorema. *(Fig. 27.)*

128. *Si desde dos puntos fijos* A, A', *tomados en dos concurrentes en* O, *se trazan pares de rectas* Ab', A'b *etc. que se corten en puntos en línea recta con* O, *la relacion*

$$\frac{\text{sen } b\text{A'A}}{\text{sen } b\text{A'O}} : \frac{\text{sen } b'\text{AA'}}{\text{sen } b'\text{AO}}$$

es constante é igual á $-\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{OA}}{\text{sen}\,\alpha\,\text{OA}'}$.

En efecto:

$$\frac{\text{sen}\,b\text{A}'\text{A}}{\text{sen}\,b\text{A}'\text{O}}=\frac{b\text{A}}{b\text{O}}:\frac{\text{A}'\text{A}}{\text{A}'\text{O}},\quad \frac{\text{sen}\,b'\text{AA}'}{\text{sen}\,b'\text{AO}}=\frac{b'\text{A}'}{b'\text{O}}:\frac{\text{AA}'}{\text{AO}},$$

de donde

$$\frac{\text{sen}\,b\text{A}'\text{A}}{\text{sen}\,b\text{A}'\text{O}}:\frac{\text{sen}\,b'\text{AA}'}{\text{sen}\,b'\text{AO}}=-\frac{\alpha\text{A}}{\alpha\text{A}'}:\frac{\text{OA}}{\text{OA}'}=-\frac{\text{sen}\,\alpha\text{OA}}{\text{sen}\,\alpha\text{OA}'}.$$

129. Corolario. *Si desde un punto* I (Fig. 16) *tomado en el plano de un triángulo* ABC *se trazan rectas á los tres vértices, prolongándolas hasta que encuentren á los lados opuestos en* a', b, c, *se verifica la relacion*

$$\frac{\text{sen}\,b\text{BC}}{\text{sen}\,b\text{BA}}:\frac{\text{sen}\,c\text{CB}}{\text{sen}\,c\text{CA}}=-\frac{\text{sen}\,a'\text{AC}}{\text{sen}\,a'\text{AB}}.$$

Es consecuencia inmediata del teorema.

Este corolario tiene con el teorema de Céva la misma analogía que el anterior con el de Menelao.

De los dos corolarios anteriores se deduce

$$\frac{\text{sen}\,a\text{AC}}{\text{sen}\,a\text{AB}}=-\frac{\text{sen}\,a'\text{AC}}{\text{sen}\,a'\text{AB}}\qquad [a].$$

130. Se llama *relacion anarmónica* de un haz de cuatro rectas el cociente de las razones de los senos de los ángulos que dos de estas rectas forman con las otras dos.

Cuando una relacion anarmónica tiene el valor particular — 1, el haz es *armónico*.

La igualdad [*a*] expresa que el haz cuyo centro es A y cuyos radios pasan por C, B, *a*, *a'* es armónico. Los radios A*a*, A*a'* dividen armónicamente el ángulo CAB de los otros dos, ó son conjugados armónicos respecto de CAB; lo mismo AC y AB son conjugados armónicos respecto del ángulo *a*A*a'*.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Teorema. *(Fig. 32).*

131. *Las relaciones anarmónicas de un haz de cuatro rectas son iguales á las relaciones anarmónicas de los cuatro puntos en que una transversal corta á dichas rectas.*

Tenemos, en efecto [**3**]

$$\frac{\text{sen COA}}{\text{sen COB}} = \frac{ca}{cb} : \frac{Oa}{Ob}, \quad \frac{\text{sen DOA}}{\text{sen DOB}} = \frac{da}{db} : \frac{Oa}{Ob},$$

de donde, por division,

$$\frac{\text{sen COA}}{\text{sen COB}} : \frac{\text{sen DOA}}{\text{sen DOB}} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}.$$

132. Corolario. *Un haz cuyos radios pasan por cuatro puntos en proporcion armónica, es armónico.*

Problema. *(Fig. 53).*

133. *Dividir un ángulo en dos partes cuyos senos guarden entre sí una relacion dada* $\frac{m}{n}$.

Sea el ángulo ABC. Trazo el arco correspondiente, divido la cuerda en dos partes DA, DC ó D'A, D'C que sean como $\frac{m}{n}$: las rectas BD y BD' resuelven el problema, porque

$$\frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC} = \frac{\text{sen DBA}}{\text{sen DBC}},$$

pero BA = BC, luego

$$\frac{\text{sen DBA}}{\text{sen DBC}} = \frac{DA}{DC} = \frac{m}{n}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TEOREMA. *(Fig. 54).*

134. *El lugar geométrico de los puntos* O *de un plano tales que, uniéndolos á tres puntos fijos* A, B, C *en línea recta, los senos de dos de los ángulos resultantes guarden siempre entre sí una misma relacion* $\frac{m}{n}$, *es una circunferencia.*

Tenemos, en efecto,

$$\frac{BA}{BC} : \frac{OA}{OC} = \frac{\text{sen } BOA}{\text{sen } BOC};$$

siendo constante $\frac{BA}{BC}$ porque A, B, C son puntos fijos, y $\frac{\text{sen } BOA}{\text{sen } BOC}$ por hipótesis, tambien lo será $\frac{OA}{OC}$; y recíprocamente, si $\frac{OA}{OC}$ es constante lo será $\frac{\text{sen } BOA}{\text{sen } BOC}$; pero el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á dos dados A y C están en relacion constante es una circunferencia, que tiene por diámetro la distancia entre dos puntos armónicos conjugados con respecto á AC, tales que cada uno divida á este segmento en la relacion dicha; luego el lugar geométrico del presente teorema será una circunferencia.

Para determinarla hay que dividir AC en dos segmentos cuya relacion sea igual á

$$\frac{BA}{BC} : \frac{m}{n} = \frac{BA.\,n}{BC.\,m},$$

Haciendo $\frac{BA.n}{m} = \alpha$, será $\frac{BA.n}{BC.m} = \frac{\alpha}{BC}$; luego debemos determinar α por la condicion $\frac{m}{n} = \frac{AB}{\alpha}$, y dividir AC en partes proporcionales á α y BC.

Tomo *(Fig. 55)* $Am = m$, $An = n$, uno m con n y trazo

por B la paralela $B\alpha$ á mn; $A\alpha$ será igual á α. Trazo ahora por C una paralela $B'B''$ á $A\alpha$, tomo $CB' = CB'' = CB$; uniendo α con B' y con B'' se determinan los puntos X,Y extremos del diámetro que se buscaba.

Caso particular. Si $\frac{m}{n} = 1$, OB es bisectriz de AOC, el punto Y será el conjugado de B con relacion á AC; luego *el lugar geométrico de los puntos* O *tales que* OB *sea bisectriz de* AOC *es una circunferencia, que tiene por diámetro la distancia del punto* B *á su conjugado con relacion á* AC.

Problema. (*Fig.* 56.)

135. *Hallar la ecuacion de la línea recta.*

Sea la recta AB determinada por la ordenada en el orígen $OB = b$, y por el ángulo $MAx = \beta$ que forma con el eje de las x. Llamemos α al ángulo yOx de los ejes, y sean MN, MP las coordenadas de un punto cualquiera M de la recta.

Considerando las tres concurrentes en M, MP, MB, MN cortadas por la transversal Oy, tenemos [**3**]:

$$\frac{BP}{MP} = \frac{\text{sen } BMP}{\text{sen } BMN},$$

ó

$$\frac{y-b}{x} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } (\alpha-\beta)},$$

de donde

$$y = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } (\alpha-\beta)} x + b.$$

Teorema. (*Fig.* 57).

136. *En todo triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Sea el triángulo ABC. Tracemos por un vértice C la para-

lela CD al lado opuesto, y consideremos tres rectas concurrentes CA, CB, CD cortadas por la transversal AB. Llamando M al punto en que AB encuentra á la concurrente CD, punto en el infinito, será [**3**]

$$\frac{MA}{MB} : \frac{CA}{CB} = \frac{\text{sen DCA}}{\text{sen DCB}},$$

pero $\frac{MA}{MB} = 1$, sen DCA = sen BAC, sen DCB = sen ABC,

luego
$$\frac{CB}{CA} = \frac{\text{sen BAC}}{\text{sen ABC}}.$$

TEOREMA. (*Fig.* 58.)

137. *Si tres concurrentes en* O *se cortan por una transversal en tres puntos* a, b, c *se verifica la relacion*

$$\text{sen AC sen } b = \text{sen AB sen } c + \text{sen BC sen } a.$$ [1]

Tenemos, en efecto,

$$ac = ab + bc,$$

de donde
$$1 = \frac{ab}{ac} + \frac{bc}{ac},$$

pero
$$\frac{ab}{ac} = \frac{Ob}{Oc} \cdot \frac{\text{sen AB}}{\text{sen AC}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } b} \cdot \frac{\text{sen AB}}{\text{sen AC}},$$

$$\frac{bc}{ac} = \frac{Ob}{Oa} \cdot \frac{\text{sen CB}}{\text{sen CA}} = \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} \cdot \frac{\text{sen CB}}{\text{sen CA}};$$

luego
$$1 = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } b} \cdot \frac{\text{sen AB}}{\text{sen AC}} + \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} \cdot \frac{\text{sen CB}}{\text{sen CA}},$$

ó
$$\text{sen AC sen } b = \text{sen AB sen } c + \text{sen BC sen } a \quad [a].$$

---

1 Designamos los ángulos en O por las letras de los radios que les forman; así AC es el ángulo AOC; los ángulos en *a*, *b* ó *c* tienen todos igual seno, por cuya razon los designamos con solo la letra del vértice.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Nota. Para escribir esta relacion se sustituyen los segmentos de la igualdad

$$ac = ab + bc$$

por sen AC, sen AB, sen BC multiplicados respectivamente por sen b, sen c, sen a.

138. Considerando los radios OB, OC (*Fig.* 58) y un tercero OA′ perpendicular á OA, tenemos

$$\text{sen BA}' \text{ sen } c = \text{sen BC sen } a' + \text{sen CA}' \text{ sen } b$$

ó $$\text{sen CA}' \text{ sen } b = \text{sen BA}' \text{ sen } c - \text{sen BC sen } a',$$

cambiando ahora el radio OA′ por el OA, será

$$\cos \text{CA sen } b = \cos \text{BA sen } c - \text{sen BC cos O}ac \qquad [b].$$

Problema.

139. *Dados los senos y cosenos de dos ángulos, hallar los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos ángulos.*

Suponiendo que la transversal *abc* de los números anteriores sea sucesivamente perpendicular á los radios OA, OB y OC, las relaciones [*a*] y [*b*] darán

$$\text{sen AC cos AB} = \text{sen AB cos AC} + \text{sen BC} \qquad [1]$$

$$\text{sen AC} = \text{sen AB cos BC} + \text{sen BC cos AB} \qquad [2]$$

$$\text{sen AC cos BC} = \text{sen AB} + \text{sen BC cos AC} \qquad [3]$$

$$\cos \text{AC} = \cos \text{AB cos BC} - \text{sen BC sen AB} \qquad [4]$$

$$\cos \text{AB} = \cos \text{AC cos BC} + \text{sen BC sen AC} \qquad [5].$$

Llamando a al ángulo AB, b al BC, y $a + b$ al AC, las fórmulas [2] y [4] nos dan

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } b \text{ sen } a$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Llamando a al ángulo AC, b al BC, y $a-b$ al AB, las fórmulas [3] y [5] nos dan

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a,$$

$$\cos\,(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,b\,\text{sen}\,a.$$

140. Sumando las ecuaciones [1] y [2] se obtiene

$$\text{sen AC}\,(1+\cos \text{AB}) = \text{sen AB}\,(\cos \text{AC} + \cos \text{BC}) + \text{sen BC}\,(1+\cos \text{AB}),$$

ó $(\text{sen AC} - \text{sen BC})\,(1+\cos \text{AB}) = \text{sen AB}\,(\cos \text{AC} + \cos \text{BC})$;

luego $$\frac{\text{sen AC} - \text{sen BC}}{\cos \text{AC} + \cos \text{BC}} = \frac{\text{sen AB}}{1+\cos \text{AB}} = \text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}.$$

Restándolas será

$$\text{sen AC}\,(1-\cos \text{AB}) = \text{sen AB}\,(\cos \text{BC} - \cos \text{AC}) - \text{sen BC}\,(1-\cos \text{AB}),$$

ó $(\text{sen AC} + \text{sen BC})\,(1-\cos \text{AB}) = \text{sen AB}\,(\cos \text{BC} - \cos \text{AC})$;

luego $$\frac{\text{sen AC} + \text{sen BC}}{\cos \text{AC} - \cos \text{BC}} = -\frac{\text{sen AB}}{1-\cos \text{AB}} = -\cot\,\frac{1}{2}\,\text{AB}.$$

Representando en los dos resultados obtenidos AC por a, BC por b, AB por $a-b$, será

$$\frac{\text{sen}\,a - \text{sen}\,b}{\cos a + \cos b} = \text{tg}\,\frac{1}{2}\,(a-b) \qquad [6]$$

$$\frac{\text{sen}\,a + \text{sen}\,b}{\cos a - \cos b} = -\cot\,\frac{1}{2}\,(a-b) \qquad [7].$$

Partiendo de las ecuaciones [1] y [3], y llamando a al ángulo AB, b al BC, $a+b$ al AC, se obtiene de un modo análogo

$$\frac{\text{sen}\,a + \text{sen}\,b}{\cos a + \cos b} = \text{tg}\,\frac{1}{2}\,(a+b) \qquad [8]$$

$$\frac{\text{sen}\,a - \text{sen}\,b}{\cos a - \cos b} = -\cot\,\frac{1}{2}\,(a+b) \qquad [9].$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Dividiendo las ecuaciones [8] y [6], así como tambien las [9] y [6], resulta

$$\frac{\text{sen } a + \text{sen } b}{\text{sen } a - \text{sen } b} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tg } \frac{1}{2}(a-b)} \qquad [10].$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\cot \frac{1}{2}(a+b) \cot \frac{1}{2}(a-b) \qquad [11].$$

141. Supongamos un haz de cuatro rectas concurrentes en O (*Fig.* 59), y cortémosle por una transversal paralela á OD; tendremos [**137**]

$$\text{sen AC sen } b = \text{sen AB sen } c + \text{sen BC sen } a.$$

Sustituyendo los ángulos en a, b, c por los respectivos suplementos en O, será

$$\text{sen AC sen BD} = \text{sen AB sen CD} + \text{sen BC sen AD} \quad [c]$$

relacion que se halla en la *Geometría superior* de Chasles, n.º **24**.

Teorema de Ptolomeo.

142. *En todo cuadrilátero inscripto en un círculo, el producto de las diagonales es igual á la suma de productos de los lados opuestos.*

Suponiendo un haz de cuatro rectas, cuyo centro sea un punto cualquiera P de la circunferencia, y cuyos radios pasen por los vértices a, b, c, d del cuadrilátero inscripto, el seno de un ángulo aPc del haz será la mitad de la cuerda ac del arco duplo del correspondiente á aPc; luego si en la fórmula [c] sustituimos los senos por las cuerdas ac, bd etc. no alteraremos la igualdad, porque todos sus términos resultarán multiplicados por 4; luego

$$ac.\ bd = ab.\ cd + bc.\ ad;$$

y como ac, bd son las diagonales, ab y cd dos lados opuestos, y bc, ad los otros dos, queda demostrado el teorema.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA ESFÉRICA.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

TEOREMA. *(Fig. 60.)*

143. *Si tres arcos de círculo máximo concurrentes en* P *se cortan por otro arco de círculo máximo en tres puntos* a, b, c, *los senos de dos segmentos cualesquiera de éste divididos por los senos de los arcos que unen los extremos de dichos segmentos con el punto de concurso* P, *son proporcionales á los senos de los ángulos que el arco que pasa por el orígen forma con los otros dos concurrentes.*

Es decir que

$$\frac{\text{sen } ba}{\text{sen P}a} : \frac{\text{sen } bc}{\text{sen P}c} = \frac{\text{sen } b\text{P}a}{\text{sen } b\text{P}c},$$

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen P}a} : \frac{\text{sen } cb}{\text{sen P}b} = \frac{\text{sen } c\text{P}a}{\text{sen } c\text{P}b}, \qquad [a]$$

$$\frac{\text{sen } ac}{\text{sen P}c} : \frac{\text{sen } ab}{\text{sen P}b} = \frac{\text{sen } a\text{P}c}{\text{sen } a\text{P}b}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Demostremos la primera de estas relaciones.

Por un punto p del radio OP trazo un plano perpendicular á OP; sea $a'\ b'\ c'$ su interseccion con el plano $a\mathrm{O}c$; uno p con a', b' y c': los ángulos $b'pa'$, $b'pc'$ tienen igual medida que los esféricos $b\mathrm{P}a$ y $b\mathrm{P}c$.

Ahora bien

$$\frac{\text{sen } b\mathrm{O}a}{\text{sen } b\mathrm{O}c} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{\mathrm{O}a'}{\mathrm{O}c'}$$

$$\frac{\text{sen } b'pa'}{\text{sen } b'pc'} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{pa'}{pc'},$$

de donde, por division,

$$\frac{\text{sen } b\mathrm{O}a}{\text{sen } b\mathrm{O}c} : \frac{\text{sen } b'pa'}{\text{sen } b'pc'} = \frac{pa'}{\mathrm{O}a'} : \frac{pc'}{\mathrm{O}c'} = \frac{\text{sen PO}a}{\text{sen PO}c},$$

ó

$$\frac{\text{sen } b\mathrm{O}a}{\text{sen } b\mathrm{O}c} : \frac{\text{sen PO}a}{\text{sen PO}c} = \frac{\text{sen } b'pa'}{\text{sen } b'pc'};$$

luego, por último,

$$\frac{\text{sen } ba}{\text{sen } bc} : \frac{\text{sen P}a}{\text{sen P}c} = \frac{\text{sen } b\mathrm{P}a}{\text{sen } b\mathrm{P}c}.$$

Del mismo modo se demuestran las otras dos relaciones.

144. *Escolio.* En lugar de tres arcos concurrentes en P, se pueden considerar tres planos aOP, bOP, cOP con una recta comun PO, cortados por el plano $a\mathrm{O}c$, y sustituir en las relaciones [a] los senos de arcos por senos de ángulos planos, y los senos de ángulos esféricos por senos de ángulos diedros. Por consiguiente

$$\frac{\text{sen } b\mathrm{O}a}{\text{sen } b\mathrm{O}c} : \frac{\text{sen PO}a}{\text{sen PO}c} = \frac{\text{sen } b\mathrm{OP}a}{\text{sen } b\mathrm{OP}c}.$$

Lo mismo las otras dos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Corolarios.

145. 1.° *Los primeros miembros de las relaciones* [a] *tienen un valor constante, cualquiera que sea el arco transversal.*

146. 2.° *El arco bisector de un ángulo de un triángulo esférico divide el lado opuesto en dos segmentos, cuyos senos son proporcionales á los senos de los lados que forman el ángulo.*

Si en la primera de las fórmulas [a] suponemos $bPa = bPc$, será

$$\frac{\text{sen } ba}{\text{sen } bc} = \frac{\text{sen } Pa}{\text{sen } Pc}.$$

147. 3.° *El plano bisector de un ángulo diedro de un triedro divide la cara opuesta en dos segmentos, cuyos senos son proporcionales á los senos de las caras que forman el diedro.*

148. 4.° *El arco trazado desde el vértice de un triángulo esférico al punto medio de la base divide el ángulo en el vértice en dos segmentos, cuyos senos son inversamente proporcionales á los senos de los lados que forman el ángulo.*

Si en la fórmula primera de las [a] suponemos $ba = bc$, será

$$\frac{\text{sen } bPa}{\text{sen } bPc} = \frac{\text{sen } Pc}{\text{sen } Pa}.$$

149. 5.° Análogo al anterior en un triedro.

150. 6.° *Si unimos el vértice de un triángulo isósceles con un punto cualquiera de la base, por un arco de círculo máximo, queda ésta dividida en dos arcos, cuyos senos son proporcionales á los senos de los ángulos que forma el arco con los lados iguales.*

De donde se deduce:

El arco de círculo máximo que une el vértice de un triángulo isósceles con el punto medio de la base, es bisector del ángulo en el vértice, y recíprocamente.

151. 7.° Análogo al anterior en un triedro.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

CAPÍTULO SEGUNDO.

TEORÍAS QUE SE DEDUCEN DE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

152. Verificándose nuestros principios fundamentales en la esfera, sin más que sustituir las líneas rectas por arcos de círculo máximo, las longitudes de los segmentos rectilíneos por los senos de los segmentos de arco, y los senos de ángulos rectilíneos por senos de ángulos esféricos, es claro que tambien se verificarán muchas de las proposiciones que de aquellos principios se deducen inmediatamente, siendo las demostraciones enteramente análogas. Por esto nos limitaremos á indicar los enunciados de los teoremas, mientras su índole especial no nos obligue á dar demostracion.

I.—Introduccion.

153. Si en una circunferencia O se tienen dos puntos fijos a y b (*Fig.* 61), y se marca otro cualquiera c, para hallar el signo de la relacion $\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb}$ hay que atender á dos cosas: 1.ª el signo de cada seno (positivo si el arco es menor que 180° y negativo si es mayor): 2.ª la direccion relativa de los segmentos á partir de c: si se cuentan en el mismo sentido la relacion será, por este concepto, positiva, y negativa en el caso contrario.

Con arreglo á estas observaciones, se vé fácilmente que si c está entre a y b, esto es, en el arco menor de los que unen

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

los puntos a y b, ó entre a' y b', la relacion $\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb}$ es negativa, cualquiera que sea el sentido en que se cuente cada uno de los arcos, y si c está en el arco ab' ó en el $a'b$, dicha relacion es siempre positiva.

Es además evidente que dado un arco ab puede siempre marcarse un punto c tal que la relacion $\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb}$ tenga un valor dado en magnitud y en signo [**133**], y que existen dos puntos en la circunferencia que satisfacen á esta condicion, siendo fácil probar que tales puntos son extremos de un mismo diámetro.

II.—Arcos transversales.

154. Teorema. *Si dos arcos de círculo máximo se cortan por otros varios que parten de un punto* P, *se verifica*

$$\frac{\text{sen } ab}{\text{sen P}b} : \frac{\text{sen } a'b'}{\text{sen P}b'} = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen P}c} : \frac{\text{sen } a'c'}{\text{sen P}c'} = \frac{\text{sen } ad}{\text{sen P}d} : \frac{\text{sen } a'd'}{\text{sen P}d'} \ldots\ldots [a]$$

$$\frac{\text{sen O}a}{\text{sen P}a} : \frac{\text{sen O}a'}{\text{sen P}a'} = \frac{\text{sen O}b}{\text{sen P}b} : \frac{\text{sen O}b'}{\text{sen P}b'} = \frac{\text{sen O}c}{\text{sen P}c} : \frac{\text{sen O}c'}{\text{sen P}c'} \ldots [b]$$

Se demuestran estas relaciones como sus análogas de los números **22** y **23**.

155. Teorema. *Si los lados de un triángulo esférico* ABC *se cortan por un arco de círculo máximo en tres puntos* a, b, c *se verifica*

$$\frac{\text{sen } c\text{A}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen } c\text{B}}{\text{sen } a\text{B}} = \frac{\text{sen } b\text{A}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen } b\text{C}}{\text{sen } a\text{C}},$$

$$\frac{\text{sen AB}}{\text{sen } a\text{B}} : \frac{\text{sen A}c}{\text{sen } ac} = \frac{\text{sen AC}}{\text{sen } a\text{C}} : \frac{\text{sen A}b}{\text{sen } ab},$$

$$\frac{\text{sen BA}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen B}c}{\text{sen } ac} = \frac{\text{sen CA}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen C}b}{\text{sen } ab}.$$

Demostracion del número **26**.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Prolongando los lados opuestos de un cuadrilátero esférico hasta su encuentro, y considerando los senos de los segmentos que determinan los puntos de concurso, las razones de senos de segmentos de dos lados opuestos son proporcionales á las de los otros dos [**27**], ó en otros términos, *el producto de senos de cuatro segmentos, sin segundo extremo comun, pertenecientes á distintos lados del cuadrilátero, es igual al producto de senos de los otros cuatro* [**28**].

156. Teorema. *Si desde el punto de encuentro* P *de dos lados opuestos de un cuadrilátero esférico* ABCD *se traza un arco de círculo máximo que corte á los otros dos lados en* a *y* c *se verifica*

$$\frac{\text{sen } a\text{B}}{\text{sen PB}} : \frac{\text{sen } a\text{A}}{\text{sen PA}} = \frac{\text{sen } c\text{C}}{\text{sen PC}} : \frac{\text{sen } c\text{D}}{\text{sen PD}},$$

$$\frac{\text{sen AB}}{\text{sen PB}} : \frac{\text{sen A}a}{\text{sen P}a} = \frac{\text{sen DC}}{\text{sen PC}} : \frac{\text{sen D}c}{\text{sen P}c},$$

$$\frac{\text{sen BA}}{\text{sen PA}} : \frac{\text{sen B}a}{\text{sen P}a} = \frac{\text{sen CD}}{\text{sen PD}} : \frac{\text{sen C}c}{\text{sen P}c}.$$

Demostracion del número **29**.

Si desde el punto de concurso de dos lados opuestos de un cuadrilátero esférico se traza un arco de círculo máximo que corte á los otros dos lados, las razones de senos de segmentos de dos lados opuestos son proporcionales á las de los otros dos [**30**], ó en otros términos, *el producto de senos de cuatro segmentos sin extremidad comun, pertenecientes á distintos lados del cuadrilátero, es igual al producto de senos de los otros cuatro* [**31**].

157. Teorema. *Si desde cada punto de concurso de los lados opuestos de un cuadrilátero esférico se traza un arco de círculo máximo que corte á los otros dos lados se verifica*

$$\frac{\text{sen } a\text{B}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen } c\text{C}}{\text{sen } c\text{D}} = \frac{\text{sen PB}}{\text{sen PA}} : \frac{\text{sen PC}}{\text{sen PD}},$$

$$\frac{\text{sen } b\text{B}}{\text{sen } b\text{C}} : \frac{\text{sen } d\text{A}}{\text{sen } d\text{D}} = \frac{\text{sen QB}}{\text{sen QC}} : \frac{\text{sen QA}}{\text{sen QD}}.$$

$$\frac{\text{sen } a\text{B}}{\text{sen } a\text{A}} : \frac{\text{sen } c\text{C}}{\text{sen } c\text{D}} = \frac{\text{sen } b\text{B}}{\text{sen } b\text{C}} : \frac{\text{sen } d\text{A}}{\text{sen } d\text{D}}.$$

Demostracion del número **32**.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si desde cada punto de concurso de los lados opuestos de un cuadrilátero esférico se traza un arco que corte á los otros dos lados, éstos quedan divididos en ocho segmentos, y el producto de los senos de cuatro de ellos, sin extremidad comun, es igual al producto de senos de los otros cuatro. [**33**].

158. Teorema. *Si dos arcos de círculo máximo que concurren en* O *se cortan por otros dos arcos fijos* Paa′, Pbb′, *todo arco de círculo máximo* Pcc′ *móvil alrededor de* P *determina en los primeros segmentos tales que la relacion*

$$\frac{sen\ \mathrm{ca}}{sen\ \mathrm{cb}} : \frac{sen\ \mathrm{c'a'}}{sen\ \mathrm{c'b'}}$$

es constante. [**36**].

159. Teorema. *Si dos arcos de círculo máximo que concurren en* O *se cortan por un arco fijo* Paa′ *y otro* Pcc′ *móvil alrededor de un punto* P *del primero, la relacion*

$$\frac{sen\ \mathrm{ca}}{sen\ \mathrm{cO}} : \frac{sen\ \mathrm{c'a'}}{sen\ \mathrm{c'O}}$$

es constante é igual á $\frac{sen\ \mathrm{Pa}}{sen\ \mathrm{Pa'}}$. [**37**].

160. Teorema recíproco. *Si dos arcos de círculo máximo que concurren en* O *se cortan por varios arcos, uno de ellos* aa′ *considerado como fijo, de tal modo que la relacion* $\frac{sen\ \mathrm{ca}}{sen\ \mathrm{cO}} : \frac{sen\ \mathrm{c'a'}}{sen\ \mathrm{c'O}}$ *sea constante, todos los arcos concurren en un mismo punto, tal que la relacion de los senos de sus distancias esféricas á* a *y* a′ *es igual á dicha constante.* [**38**].

161. Supongamos dos arcos de círculo máximo OM, ON (*Fig.* 62) cortados por dos arcos fijos P*aa*′, P*bb*′ que parten del punto P, y sea PA*m* una posicion del arco móvil determinada por un punto A situado á 90° del medio de *ab*. La relacion constante [**158**]

$$\frac{\mathrm{sen}\ ca}{\mathrm{sen}\ cb} : \frac{\mathrm{sen}\ c'a'}{\mathrm{sen}\ c'b'} \quad \text{ó sea} \quad \frac{\mathrm{sen\ A}a}{\mathrm{sen\ A}b} : \frac{\mathrm{sen}\ ma'}{\mathrm{sen}\ mb'},$$

tiene en este caso el valor $\frac{\text{sen } mb'}{\text{sen } ma'}$, porque $\frac{\text{sen A}a}{\text{sen A}b} = 1$, á causa de ser A$a$ y Ab suplementarios.

Sea PBn otra posicion del arco móvil determinada por un punto B situado á 90° del medio de $a'b'$. La relacion constante

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} : \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'} \quad \text{ó sea} \quad \frac{\text{sen } na}{\text{sen } nb} : \frac{\text{sen B}a'}{\text{sen B}b'},$$

tiene en este caso el valor $\frac{\text{sen } na}{\text{sen } nb}$, porque $\frac{\text{sen B}a'}{\text{sen B}b'} = 1$.

De lo dicho se desprende

$$\frac{\text{sen } mb'}{\text{sen } ma'} = \frac{\text{sen } na}{\text{sen } nb}.$$

Si suponemos el punto P distante 90° del medio de aa' (*Fig.* 63), y Pcc' es una transversal cualquiera, la relacion

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} : \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'} = \frac{\text{sen P}a}{\text{sen P}b} : \frac{\text{sen P}a'}{\text{sen P}b'} = \textit{constante},$$

se reduce á

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} : \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'} = \frac{\text{sen P}b'}{\text{sen P}b} = \textit{constante}.$$

Si la transversal móvil Pcc' pasa por un punto c distante 90° del medio de ab, la anterior relacion será

$$\frac{\text{sen } c'b'}{\text{sen } c'a'} = \frac{\text{sen P}b'}{\text{sen P}b}.$$

Si la transversal móvil pasa por O, será

$$\frac{\text{sen O}a}{\text{sen O}b} : \frac{\text{sen O}a'}{\text{sen O}b'} = \frac{\text{sen P}b'}{\text{sen P}b}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si P dista 90° del medio de aa' y del medio de bb', condiciones á las que siempre es posible someter los arcos OM y ON, tendremos

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'};$$

si, en el actual supuesto, c dista 90° del medio de ab, será sen ca = sen cb, por consiguiente sen $c'a'$ = sen $c'b'$, lo que exige que $c'a'$ y $c'b'$ sean suplementarios, esto es, que c' diste tambien 90° del medio de $a'b'$.

Si, en el mismo supuesto, el arco móvil pasa por O, será

$$\frac{\text{sen } Oa}{\text{sen } Ob} = \frac{\text{sen } Oa'}{\text{sen } Ob'}.$$

162. Teorema. *Si los lados de un triángulo esférico* ABC (Fig. 64) *se cortan por un arco de círculo máximo en tres puntos* a, b, c, *se verifica la relacion*

$$\frac{\text{sen } b\text{C}}{\text{sen } b\text{A}} : \frac{\text{sen } c\text{B}}{\text{sen } c\text{A}} = \frac{\text{sen } a\text{C}}{\text{sen } a\text{B}} \qquad [a].$$

Demostracion del número **41**.

163. Corolario. Si el punto a dista 90° del medio de BC,

será $$\frac{\text{sen } a\text{C}}{\text{sen } a\text{B}} = 1,$$

y por tanto $$\frac{\text{sen } b\text{C}}{\text{sen } b\text{A}} = \frac{\text{sen } c\text{B}}{\text{sen } c\text{A}} \qquad [b],$$

luego: *Si en la base de un triángulo esférico se marca un punto á 90° del medio de dicha base, todo arco de círculo máximo que parta de aquel punto dividirá los lados en segmentos cuyos senos son proporcionales.*

Recíprocamente: *Si dos lados de un triángulo se dividen por un arco de modo que los senos de los segmentos sean proporcionales, el arco pasará por un punto del tercer lado á 90° del punto medio.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Si b y c son los puntos medios de los lados AC y AB, el arco bc cortará al lado BC en un punto a distante 90° del medio de BC.

Nota. De la proporcion [b] no se deduce, como en los triángulos rectilíneos, otra formada con los lados enteros y dos segmentos correspondientes; tenemos, en efecto,

$$\frac{\text{sen AC}}{\text{sen A}b} : \frac{\text{sen AB}}{\text{sen A}c} = \frac{\text{sen }a\text{C}}{\text{sen }ab} : \frac{\text{sen }a\text{B}}{\text{sen }ac},$$

y como sen aC = sen aB, resulta

$$\frac{\text{sen AC}}{\text{sen A}b} : \frac{\text{sen AB}}{\text{sen A}c} = \frac{\text{sen }ac}{\text{sen }ab};$$

luego para que fuese $\frac{\text{sen AC}}{\text{sen A}b} = \frac{\text{sen AB}}{\text{sen A}c}$, seria necesario que sen ac = sen ab, condicion que en general no se verifica.

164. Escolio. El corolario anterior ofrece un medio de dividir un arco dado de círculo máximo en dos segmentos de senos proporcionales á los senos de los segmentos en que está dividido otro arco de la misma esfera. Si el arco que se quiere dividir es AB, trazaremos por A un arco AC igual al dividido que se nos da, y el arco BC; tomando el punto a á 90° del medio de BC, y uniéndole con el punto de division dado b, el punto c en que ab encuentra al lado AB resuelve la cuestion.

165. Teorema recíproco. *Si en los lados de un triángulo esférico* ABC *se marcan tres puntos* a, b, c *de modo que*

$$\frac{\text{sen }b\text{C}}{\text{sen }b\text{A}} : \frac{\text{sen }c\text{B}}{\text{sen }c\text{A}} = \frac{\text{sen }a\text{C}}{\text{sen }a\text{B}}, \qquad [a]$$

los puntos a, b, c *estarán en una misma circunferencia máxima.*

Sea a' el punto en que el arco bc encuentra al lado BC; de la hipótesis y del teorema directo se deduce

$$\frac{\text{sen }a\text{C}}{\text{sen }a\text{B}} = \frac{\text{sen }a'\text{C}}{\text{sen }a'\text{A}};$$

para que esta condicion se verifique es necesario [**153**] que a y a'

se confundan en un sólo punto, ó que sean los dos extremos de un diámetro del círculo máximo que pasa por B y C, y en cualquiera de estas hipótesis *a*, *b* y *c* pertenecen á una misma circunferencia máxima.

166. Corolario. Si en los lados de un triángulo ABC marcamos tres puntos *a*, *b*, *c* distantes 90° de los respectivos puntos medios, se verifica la relacion [*a*]; luego

Los puntos marcados en los tres lados de un triángulo esférico á 90° *de los puntos medios, están en una misma circunferencia máxima.*

167. Teorema. *Si desde un punto tomado en uno de los arcos diagonales de un cuadrilátero esférico se trazan dos arcos cortando cada uno á dos lados adyacentes, las razones entre los senos de los segmentos de dos de estos lados son proporcionales á las razones entre los senos de los segmentos de los otros dos* [**43**].

168. Recíproco. *Si los cuatro lados de un cuadrilátero esférico* ABCD *se dividen en dos segmentos por medio de puntos* a, b, c, d, *de tal modo que las razones entre los senos de los segmentos de dos lados adyacentes sean proporcionales á las razones entre los senos de los segmentos de los otros dos, los arcos* ad *y* bc *de círculo máximo concurren en un punto del arco diagonal* BD, *y los* ab *y* dc *concurren en un punto del otro arco diagonal* AC [**44**].

169. Corolario 1.° *Si desde un punto* P *de un arco diagonal* BD *de un cuadrilátero esférico* ABCD *se trazan dos arcos transversales cortando cada uno á dos lados adyacentes, los arcos que unan los puntos* a *y* d *de interseccion de un arco transversal con los* b *y* c *del otro concurren en un punto del arco diagonal* AC [**45**].

170. Corolario 2.° *Si desde los puntos de concurso* E *y* F *de los lados opuestos de un cuadrilátero esférico* ABCD *se trazan dos arcos transversales cortando á los lados del mismo en puntos* b *y* d, a *y* c, *los arcos que unen* a *con* d *y* b *con* c *concurren en un punto del diagonal* BD, *y los que unen* a *con* b, c *con* d *concurren en un punto del otro diagonal* AC [**46**].

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

171. Teorema. *Si todos los lados de un polígono esférico se cortan por un arco de círculo máximo, éste determina en cada lado dos segmentos, y el producto de senos de todos los segmentos sin extremidad comun es igual al producto de senos de todos los demás* [**17**].

172. Teorema. *Si dos arcos* OM, ON *se cortan por uno fijo* Paa′ *y otro móvil* Pbb′ *alrededor del punto* P, *la relacion*

$$\frac{sen\ \mathrm{ba'a}}{sen\ \mathrm{ba'O}} : \frac{sen\ \mathrm{b'aa'}}{sen\ \mathrm{b'aO}}$$

es constante é igual á $\frac{sen\ \mathrm{POa}}{sen\ \mathrm{POa'}}$.

Demuéstrase como el del núm. **126.**

173. Corolario. *Si un triángulo esférico* ABC *se corta por un arco transversal* abc, *se verifica la relacion*

$$\frac{sen\ \mathrm{bBC}}{sen\ \mathrm{bBA}} : \frac{sen\ \mathrm{cCB}}{sen\ \mathrm{cCA}} = \frac{sen\ \mathrm{aAC}}{sen\ \mathrm{aAB}}.$$

Es consecuencia inmediata del teorema.

174. Teorema. *Si desde dos puntos fijos* A, A′ *de dos arcos de círculo máximo* OM, ON *se trazan pares de arcos* Aa′ *y* A′a, Ab′ *y* A′b *etc. cuyas intersecciones* α, β *etc. estén en un arco de círculo máximo que pase por* O, *y consideramos uno de los pares* Aa′, A′a *como fijo, la relacion*

$$\frac{sen\ \mathrm{ba}}{sen\ \mathrm{bO}} : \frac{sen\ \mathrm{b'a'}}{sen\ \mathrm{b'O}}$$

es constante [**19**].

175. Teorema. *Si dos arcos* OM, ON *se cortan por pares de arcos transversales* Ab′ *y* A′b, Ac′ *y* A′c *que parten de dos puntos fijos* A *y* A′ *tomados en los primeros, y cuyas intersecciones* β, γ *están en otro arco que pasa por* O, *la relacion*

$$\frac{sen\ \mathrm{bA}}{sen\ \mathrm{bO}} : \frac{sen\ \mathrm{b'A'}}{sen\ \mathrm{b'O}}$$

es constante é igual á $-\frac{\mathrm{sen}\ \alpha\mathrm{A}}{\mathrm{sen}\ \alpha\mathrm{A'}}$. [**50**]

176. Teorema recíproco. *Si desde dos puntos fijos* A *y* A′ *tomados en dos arcos* OM, ON *se trazan pares de arcos* Ab′ *y* A′b, Ac′ *y* A′c... *que determinen en los primeros segmentos tales que la relacion*

$$\frac{sen\ bA}{sen\ bO} : \frac{sen\ b'A'}{sen\ b'O}$$

sea constante, las intersecciones β, γ... *de cada par de arcos están en otro que pasa por* O *y que divide á* AA′ *en dos segmentos, cuyos senos guardan entre si una relacion igual y de signo contrario á dicha constante* [**51**].

177. Teorema. *Si desde un punto fijo* P *se trazan varios arcos transversales* Paa′, Pbb′... *que corten á otros dos* OM, ON, *los arcos que unan los puntos de interseccion* a *y* a′ *de cualquier transversal con los respectivamente opuestos* b′ *y* b, c′ *y* c *de los demás, se cortan en puntos de una circunferencia máxima que pasa por* O [**52**].

178. Teorema. *Si desde dos puntos fijos* a *y* a′ *tomados en dos arcos* OM, ON *se trazan pares de arcos* ab′ *y* a′b, ac′ *y* a′c... *que se corten en una circunferencia máxima pasando por* O, *los arcos que unan* a *con* a′, b *con* b′ *etc. concurrirán en un mismo punto* P [**53**].

179. Teorema. *Dado un triángulo esférico* ABC, *si desde un punto de la superficie esférica se trazan arcos á los tres vértices* A, B, C, *prolongados hasta encontrar á los lados opuestos en puntos* a, b, c, *se verifica la relacion*

$$\frac{sen\ bC}{sen\ bA} : \frac{sen\ cB}{sen\ cA} = -\frac{sen\ aC}{sen\ aB} \qquad [\mathbf{54}].$$

180. Corolario. Si *a* es el medio de BC será

$$\frac{\text{sen}\ bC}{\text{sen}\ bA} = \frac{\text{sen}\ cB}{\text{sen}\ cA},$$

esto es, *los arcos que partiendo de dos vértices de un triángulo esférico se cruzan en el que une el tercer vértice con el punto medio del lado opuesto, dividen los otros dos lados en segmentos cuyos senos son proporcionales.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Segun esto, el arco γc encontrará al lado BC á 90° de su punto medio.

181. Teorema recíproco. *Si desde los tres vértices de un triángulo esférico se trazan arcos á los lados opuestos de modo que se verifique la relacion*

$$\frac{sen\ bC}{sen\ bA} : \frac{sen\ cB}{sen\ cA} = -\frac{sen\ aC}{sen\ aB},$$

los tres arcos concurren en un mismo punto [**57**].

182. Corolario 1.° *Si desde un punto distante* 90° *del medio de la base de un triángulo esférico se trazan arcos transversales que corten á los lados, y se unen los puntos de interseccion de cada arco transversal con los vértices opuestos por pares de arcos, las intersecciones de éstos están en el que une el vértice con el punto medio de la base* [**59**].

183. Corolario 2.° *Los arcos que unen los tres vértices de un triángulo esférico con los puntos medios de los lados opuestos, concurren en un mismo punto* [**60**].

184. Corolario 3.° *Los arcos que unen dos puntos marcados en dos lados de un triángulo á* 90° *de sus puntos medios con los vértices opuestos, y el que une el tercer vértice con el punto medio del lado opuesto, concurren en un mismo punto.*

185. Corolario 4.° *Los tres arcos bisectores de los ángulos de un triángulo esférico concurren en un mismo punto* [**61**].

186. Corolario 5.° *Los arcos bisectores de dos ángulos externos de un triángulo esférico y el bisector del interno no adyacente á los anteriores, concurren en un mismo punto* [**61**].

187. Teorema. *Si desde dos puntos fijos* A, A′, *tomados en dos arcos* OM, ON *de círculo máximo, se trazan pares de arcos* Ab′, A′b *etc. que se corten en otro que pase por* O, *la relacion*

$$\frac{sen\ bA'A}{sen\ bA'O} : \frac{sen\ b'AA'}{sen\ b'AO}$$

es constante é igual á $-\dfrac{sen\ \alpha OA}{sen\ \alpha OA'}$ [**128**].

188. Corolario. *Si desde un punto* I *de la superficie de una esfera se trazan arcos á los tres vértices de un triángulo esférico* ABC, *prolongándolos hasta que encuentren á los lados opuestos en* a, b, c, *se verifica la relacion*

$$\frac{\text{sen } b\text{BC}}{\text{sen } b\text{BA}} : \frac{\text{sen } c\text{CB}}{\text{sen } c\text{CA}} = -\frac{\text{sen } a\text{AC}}{\text{sen } a\text{AB}}.$$

III.—Relacion anarmónica.

189. Sustituyendo en la relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta, la recta por un arco de círculo máximo y los segmentos de aquella por los senos de los segmentos del arco, se pasa de la relacion anarmónica rectilínea á la relacion anarmónica esférica.

190. Teorema. *Si un haz de cuatro arcos concurrentes en* O *se corta por un arco transversal, la relacion anarmónica de los cuatro puntos de interseccion es constante* [**68**].

191. Problema. *Dados en un arco de círculo máximo tres puntos* a, b, c *de la relacion anarmónica* (abcd), *y el valor* r *de la relacion, determinar el cuarto punto* d.

Trazo por a un arco de círculo máximo, tomo dos arcos iguales $ma = mb'$, marco el punto c' distante 90° del m, uno b con b' y c con c'; sea O el punto de encuentro de bb' y cc'.

Suponiendo resuelto el problema y que d sea el cuarto punto buscado, será

$$(abcd) = r \text{ , luego } (ab'c'd') = r$$

ó bien
$$\frac{\text{sen } c'a}{\text{sen } c'b'} : \frac{\text{sen } d'a}{\text{sen } d'b'} = r,$$

pero, en virtud de la construccion, $\frac{\text{sen } c'a}{\text{sen } c'b'} = 1$, luego

$$\frac{\text{sen } d'b'}{\text{sen } d'a} = r.$$

Determinando d' por esta condicion, el punto en que Od'

encuentre al arco dado *abc* será el cuarto de la relacion anarmónica.

Para que la construccion indicada pueda efectuarse en la esfera, es preciso que *r* sea la razon entre los senos de dos arcos de la misma esfera en que debe ser resuelto el problema [**164**].

192. Teorema. *Si dos figuras de cuatro puntos en círculo máximo* abcd *y* ab'c'd' *tienen una relacion anarmónica igual y un punto homólogo comun* a, *los tres arcos que unen dos á dos los otros puntos homólogos concurren en un mismo punto* [**73**].

Caso particular. *El arco que une los puntos medios de dos lados de un triángulo esférico, y el que une los situados á* 90° *de dichos puntos medios, concurren en un mismo punto del tercer lado.*

193. Se llama *relacion anarmónica* de un haz de cuatro arcos de círculo máximo el cociente de las razones entre los senos de los ángulos que dos de los arcos forman con los otros dos.

194. Teorema. *Las relaciones anarmónicas de un haz de cuatro arcos de círculo máximo son iguales á las relaciones anarmónicas de los cuatro puntos en que un arco transversal corta á los radios del haz* [**131**].

195. Teorema. *Dos haces de cuatro arcos, cuyos radios se cortan dos á dos en puntos situados en una misma circunferencia máxima, tienen iguales relaciones anarmónicas* [**76**].

196. Teorema. *Si dos haces de cuatro arcos tienen una relacion anarmónica igual y un radio homólogo comun, los tres puntos de interseccion de los otros radios, tomados dos á dos, están en una misma circunferencia máxima* [**77**].

197. Teorema. *Si dos triángulos esféricos tienen sus vértices colocados dos á dos en tres arcos concurrentes en un punto, sus lados se cortan dos á dos en tres puntos de una misma circunferencia máxima* [**84**].

198. Recíproco. *Si los lados de dos triángulos esféricos se cortan dos á dos en tres puntos de una circunferencia máxima, sus vértices están situados dos á dos en tres arcos concurrentes en un punto* [**85**].

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

IV.—Proporcion armónica.

199. Cuatro puntos de una circunferencia máxima están en *proporcion armónica*, cuando alguna de sus relaciones anarmónicas tiene el valor particular — 1.

200. Teorema. *Si desde un punto dado se trazan arcos transversales que encuentren á los lados de un ángulo esférico, el círculo máximo determinado por el vértice y la interseccion de los arcos que unen los extremos opuestos de dos segmentos interceptados por el ángulo, es el lugar geométrico de los puntos armónicos conjugados del dado con relacion á dichos segmentos* [**87**].

201. Cuatro arcos de círculo máximo concurrentes en un punto forman *haz armónico*, cuando alguna de las relaciones anarmónicas del haz vale — 1.

202. Corolario 1.° *Si desde un punto dado se trazan arcos transversales que encuentren á los lados de un ángulo esférico, los arcos que unen los extremos opuestos de dos segmentos interceptados por los lados del ángulo se cortan dos á dos en el arco polar del punto dado con respecto al ángulo* [**90**].

203. Corolario 2.° *Dados tres arcos concurrentes, si desde diferentes puntos de uno de ellos se trazan pares de arcos transversales que encuentren á los otros dos, los arcos que unan los extremos opuestos de los segmentos interceptados se cortarán sobre el radio armónico conjugado del primero con relacion al ángulo de los otros dos* [**91**].

204. Las proposiciones anteriores ofrecen medios sencillos de resolver los problemas siguientes:

1.° *Dado un punto de un arco, hallar su armónico conjugado con relacion á un segmento de dicho arco.*

2.° *Dado un punto y un ángulo esférico, hallar el arco polar del punto con relacion al ángulo.*

3.° *Dado un ángulo esférico y un arco que pasa por el vértice, hallar el armónico conjugado de este arco con relacion al ángulo.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

4.° *Dados dos arcos de círculo máximo que no se pueden prolongar, trazar por un punto dado otro arco, tal que si los tres se prolongasen concurrieran en un mismo punto.*

Véanse los números **92** y **93**.

205. Dado un haz de cuatro arcos concurrentes en O, siempre se puede cortar por otro arco transversal en cuatro puntos, de modo que la razon entre los senos de las distancias esféricas de uno de éstos á dos de los otros sea igual á la unidad. Esto puede conseguirse de dos modos: haciendo que dichas distancias sean dos arcos suplementarios ó dos arcos iguales.

Sea el arco *abcd* (*Fig.* 66).

Describo el arco $a'b'c'd'$, desde O como polo y con un radio igual á la cuerda de un cuadrante máximo; los ángulos en O tendrán por medida los segmentos correspondientes de $a'b'c'd'$; ahora bien

$$\frac{\text{sen } da}{\text{sen } db} : \frac{\text{sen } Oa}{\text{sen } Ob} = \frac{\text{sen } dOa}{\text{sen } dOb} = \frac{\text{sen } d'a'}{\text{sen } d'b'},$$

si suponemos $da + db = 180°$, será $\frac{\text{sen } da}{\text{sen } db} = 1$, por consiguiente

$$\frac{\text{sen } Ob}{\text{sen } Oa} = \frac{\text{sen } d'a'}{\text{sen } d'b'};$$

tomando, pues, $Oa = d'b'$, $Ob = d'a'$, el arco determinado por a y b será tal que $da + db = 180°$.

Lo mismo

$$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} : \frac{\text{sen } Oa}{\text{sen } Ob} = \frac{\text{sen } cOa}{\text{sen } cOb} = \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'};$$

si suponemos $ca = cb$, será $\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = 1$, por consiguiente

$$\frac{\text{sen } Ob}{\text{sen } Oa} = \frac{\text{sen } c'a'}{\text{sen } c'b'},$$

tomando, pues, $Oa = c'b'$, $Ob = c'a'$, el arco determinado por a y b será tal que $ca = cb$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

206. Teorema. *Si un haz armónico se corta por un arco transversal, de modo que* da + db = 180°, *será* ca = — cb; y recíprocamente, *si* ca = — cb, *será* da + db = 180°.

Tenemos $$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = -\frac{\text{sen } da}{\text{sen } db}.$$

Si $da + db = 180°$, será $\frac{\text{sen } da}{\text{sen } db} = 1$, luego $\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = -1$, de donde $ca = -cb$.

Si $ca = -cb$, será $\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = -1$, luego $\frac{\text{sen } da}{\text{sen } db} = 1$, de donde $da + db = 180°$.

207. Teorema. *Dado un haz cortado por un arco transversal en cuatro puntos* a, b, c, d, *si se verifican las dos condiciones* da + db = 180°, ca = — cb, *el haz es armónico.*

Porque de $$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = -1, \quad \frac{\text{sen } da}{\text{sen } db} = 1$$

se deduce $$\text{sen } (abcd) = -1.$$

208. Teorema. *Si dos radios conjugados de un haz armónico son rectangulares, dividen en dos partes iguales al ángulo de los otros dos radios y al suplemento.*

Sea el haz armónico O, ABCD en el que suponemos que los radios conjugados OC, OD se cortan en ángulo recto.

Tenemos $$\frac{\text{sen } dOa}{\text{sen } dOb} = \frac{\text{sen } cOa}{\text{sen } cOb} \quad \text{ó} \quad \frac{\cos cOa}{\cos cOb} = \frac{\text{sen } cOa}{\text{sen } cOb},$$

lo que exige que sea $$cOa = cOb.$$

209. Recíproco. *Los arcos bisectores de un ángulo* AOB *y del supiemento* A'OB *forman con los lados del ángulo un haz armónico.*

En efecto $$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = \frac{\text{sen } Oa}{\text{sen } Ob}, \quad \frac{\text{sen } da}{\text{sen } db} = \frac{\text{sen } Oa}{\text{sen } Ob};$$

luego $$\frac{\text{sen } ca}{\text{sen } cb} = \frac{\text{sen } da}{\text{sen } db}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

210. Teorema. *Los cuatro lados de un cuadrilátero esférico completo, los tres arcos diagonales, y los dos que unen los puntos de concurso de los lados opuestos con la interseccion de los arcos diagonales interiores, son nueve arcos divididos armónicamente* [**101**].

Es aplicable al cuadrilátero esférico el escolio del núm. **102**.

211. La observacion general del núm. **103** se aplica igualmente á las figuras esféricas, por consiguiente las nueve proposiciones enunciadas en dicho número, se verifican tambien en los triángulos esféricos.

V.—Division homográfica.

212. A fin de no cansar la atencion del lector con nuevas repeticiones, nos limitaremos á consignar, para concluir, que todas las proposiciones relativas á la division homográfica de dos líneas rectas, y á los haces homográficos rectilíneos, tratadas en los números **105** á **119**, son aplicables á las figuras esféricas correspondientes, sustituyendo, como se ha visto hasta ahora, las líneas rectas por arcos de círculo máximo, las longitudes de los segmentos rectilíneos por senos de arcos, y los senos de ángulos rectilíneos por senos de ángulos esféricos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

ÍNDICE.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Páginas.

CAPÍTULO CUARTO.

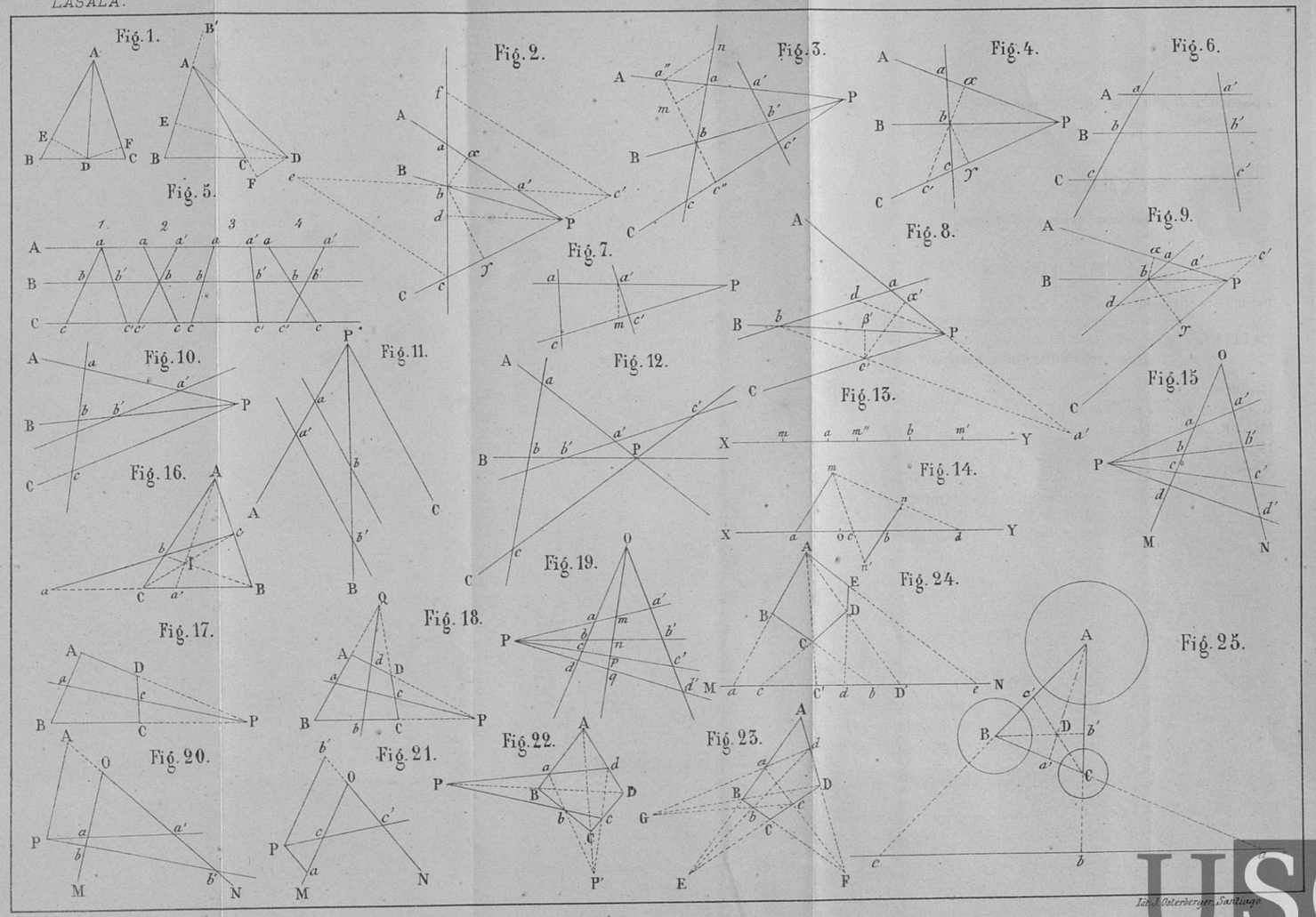
SEGUNDA PARTE.

Geometría esférica.

CAPÍTULO PRIMERO.

CAPÍTULO SEGUNDO.—TEOREMAS QUE SE DEDUCEN DE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

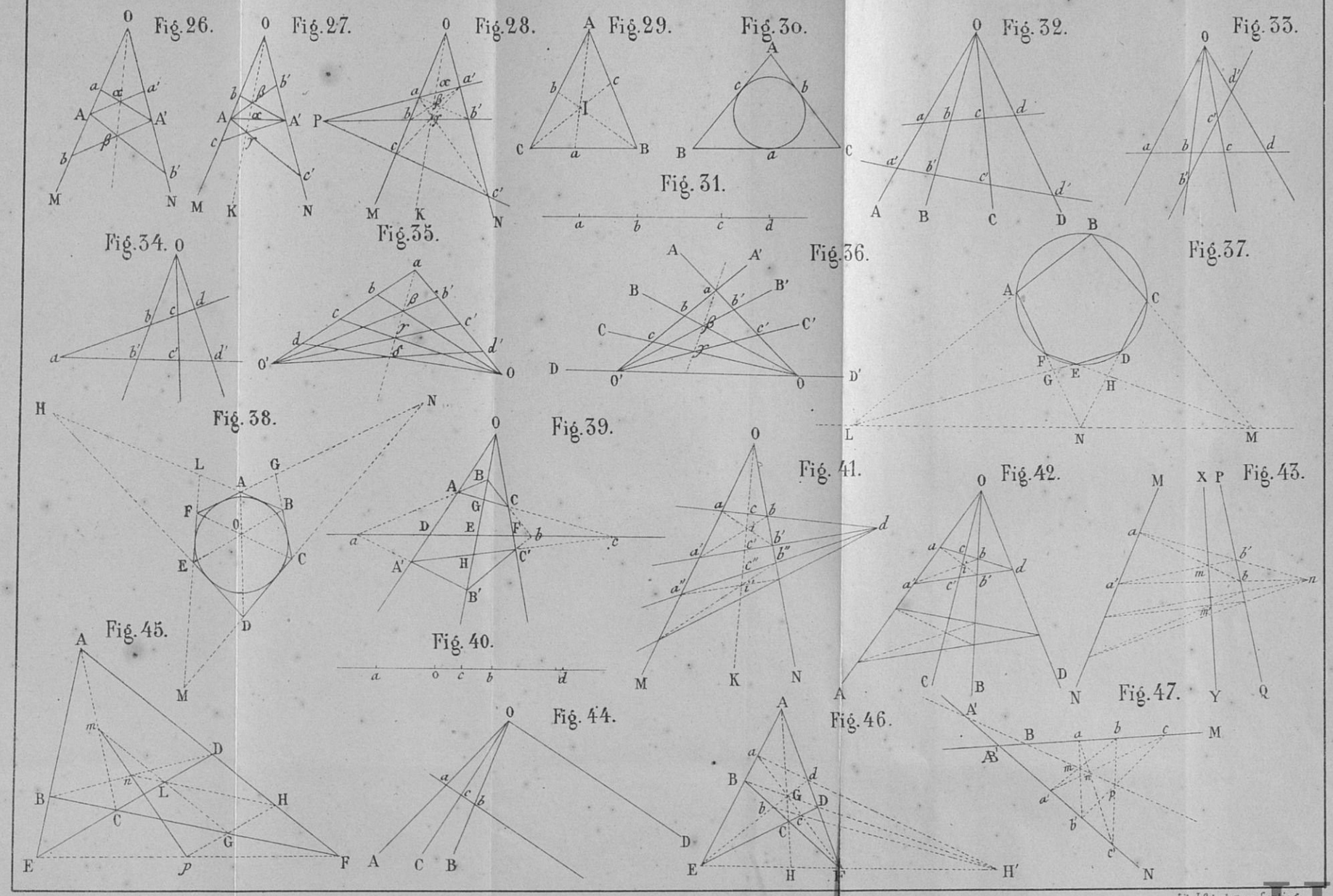
USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Lit. J. Osterberger, Santiago.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

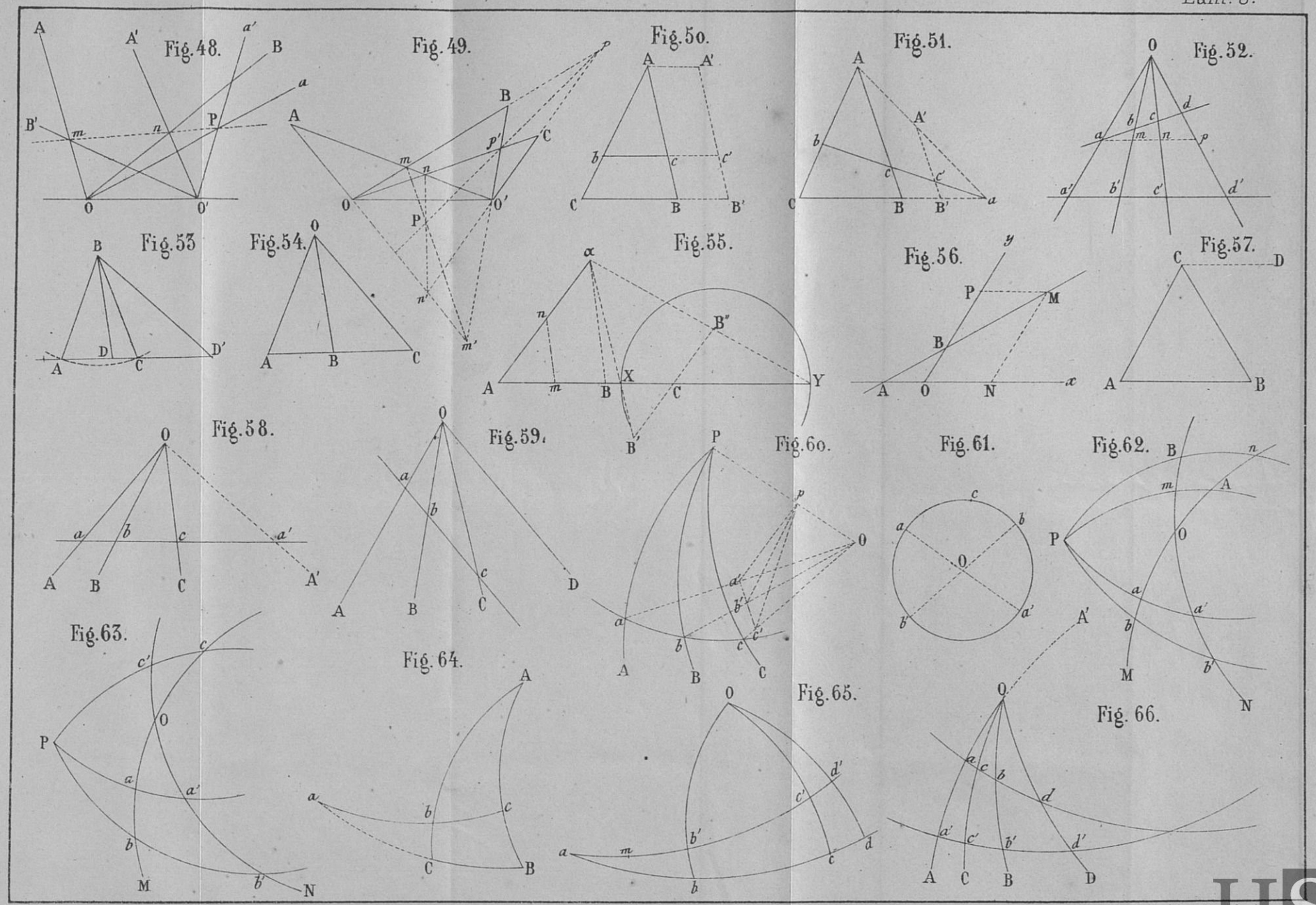
USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA



Lit. J. Osterberger, Santiago.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA



Lit. J. Osterberger, Santiago.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDAD
DE SAN MARCOS
FUNDADA EN 1551

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Se halla de venta esta obra, al precio de **20 reales**, en las librerías siguientes:

ORENSE: D. Vicente Miranda y D. Nemesio Perez.
MADRID: D. Fernando Fé, Carrera de San Jerónimo, y Don Antonio San Martin, Puerta del Sol.

OBRAS DEL MISMO AUTOR.

ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS.

Tomo I.—Aritmética y Algebra, 2.ª edicion. **26 rs.**
Tomo II.—Geometría y Trigonometría.. . . . **22** »

La segunda edicion de la Geometría y Trigonometría aparecerá en breve, con notables adiciones y mejoras.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA